

Segmentación por Umbralización

Método de Otsu

Introducción

La umbralización es una técnica de segmentación ampliamente utilizada en las aplicaciones industriales. Se emplea cuando hay una clara diferencia entre los objetos a extraer respecto del fondo de la escena. Los principios que rigen son la similitud entre los píxeles pertenecientes a un objeto y sus diferencias respecto al resto. Por tanto, la escena debe caracterizarse por un fondo uniforme y por objetos parecidos.

Al aplicar un umbral, T , la imagen en escala de grises, $f(x,y)$, quedará binarizada; etiquetando con '1' los píxeles correspondientes al objeto y con '0' aquellos que son del fondo. Por ejemplo, si los objetos son claros respecto del fondo, se aplicará:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow f(x,y) > T \\ 0 & \Leftrightarrow f(x,y) \leq T \end{cases}$$

En el caso de que los objetos sean oscuros respecto del fondo, la asignación sería a la inversa:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow f(x,y) < T \\ 0 & \Leftrightarrow f(x,y) \geq T \end{cases}$$

El umbral puede depender de $f(x,y)$, de alguna propiedad local del píxel, $p(x,y)$, y hasta de su propia posición:

$$T = T(f(x,y), p(x,y), x, y)$$

Si el umbral sólo depende de $f(x,y)$ se dice que es un umbral global; en el caso de que además dependa de $p(x,y)$, por ejemplo, el valor medio de los píxeles vecinos, el umbral es denominado local; y si depende también de la posición (x,y) del píxel, se denominará dinámico.

La mayoría de las técnicas de umbralización se basan en estadísticas sobre el histograma unidimensional (el que vimos hasta ahora) de una imagen. También se utiliza la matriz de co-ocurrencia de una imagen. Para localizar los umbrales se pueden usar procedimientos paramétricos y no paramétricos. En los paramétricos, la distribución de los niveles de gris de una clase de objeto lleva a encontrar los umbrales. En los procedimientos no paramétricos, los umbrales se obtienen de forma óptima de acuerdo a algún criterio. En particular, el método de Otsu, que es el objetivo de este apunte, elige el umbral óptimo maximizando la varianza entre clases (between-class variance) mediante una búsqueda exhaustiva.

Si bien hay diferentes métodos para hallar un umbral, la mayoría de ellos no dan buenos resultados cuando se trabaja con imágenes del mundo real debido a la presencia de ruido, histogramas planos o una iluminación inadecuada. Por el contrario, el método de Otsu fue uno de los mejores métodos de selección de umbral para imágenes del mundo

real. Sin embargo, como anticipamos, este método usa una búsqueda exhaustiva para evaluar el criterio para maximizar la varianza entre clases. A medida que el número de clases de una imagen aumenta, el método de Otsu necesita mucho más tiempo para seleccionar un umbral multinivel adecuado. Para determinar el umbral de una imagen eficientemente, vamos a proponer una varianza entre clases modificada para el método de Otsu. Esta modificación del método disminuirá considerablemente el tiempo de cálculo.

La importancia del método de Otsu radica en que es automático, es decir, no necesita supervisión humana ni información previa de la imagen antes de su procesamiento.

Breve descripción del Método de Otsu para un umbral óptimo

Una imagen es una función bidimensional de la intensidad del nivel de gris, y contiene N píxeles cuyos niveles de gris se encuentran entre 1 y L . El número de píxeles con nivel de gris i se denota como f_i , y la probabilidad de ocurrencia del nivel de gris i en la imagen está dada por

$$p_i = \frac{f_i}{N} \quad (1)$$

En el caso de la umbralización en dos niveles de una imagen (a veces llamada binarización), los píxeles son divididos en dos clases: C_1 , con niveles de gris $[1, \dots, t]$; y C_2 , con niveles de gris $[t+1, \dots, L]$. Entonces, la distribución de probabilidad de los niveles de gris para las dos clases son:

$$C_1 : \frac{p_1}{\omega_1(t)}, \dots, \frac{p_t}{\omega_1(t)} \quad (2)$$

$$C_2 : \frac{p_{t+1}}{\omega_2(t)}, \frac{p_{t+2}}{\omega_2(t)}, \dots, \frac{p_L}{\omega_2(t)} \quad (3)$$

donde

$$\omega_1(t) = \sum_{i=1}^t p_i \quad \omega_2(t) = \sum_{i=t+1}^L p_i$$

También, la media para la clase C_1 y la clase C_2 es

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^t \frac{i \cdot p_i}{\omega_1(t)} \quad \mu_2 = \sum_{i=t+1}^L \frac{i \cdot p_i}{\omega_2(t)}$$

Sea μ_T la intensidad media de toda la imagen. Es fácil demostrar que

$$\omega_1 \cdot \mu_1 + \omega_2 \cdot \mu_2 = \mu_T \quad \omega_1 + \omega_2 = 1$$

Usemos un ejemplo para tener bien claro lo visto hasta aquí. Supongamos una imagen de $N=100$ píxeles con cuatro niveles de gris comprendidos en $[1, 4]$ (1 el negro, 4 el blanco) y supongamos también que el número de píxeles con nivel de gris 1 es 10; con nivel de gris 2, 20; con nivel de gris 3, 30; y con nivel de gris 4, 40; es decir, $f_1=10$, $f_2=20$, $f_3=30$, y $f_4=40$. Luego, $p_1=f_1/N=0.1$, $p_2=0.2$, $p_3=0.3$, y $p_4=0.4$. Entonces, para una umbralización en dos niveles de esta imagen tomemos $t=2$ de manera que la clase C_1 consista en los tonos de gris 1 y 2, y la clase C_2 posea los tonos 3 y 4. De esta manera, $\omega_1(t)=0.1+0.2=0.3$ y

$\omega_2(t)=0.3+0.4=0.7$, y se comprueba que $\omega_1(t)+\omega_2(t)=1$. Por último, la media para la clase C_1 y para la clase C_2 estará dada por:

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^2 \frac{i \cdot p_i}{\omega_1(t)} = \frac{1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2}{0,3} \approx 1,667$$

$$\mu_2 = \sum_{i=3}^4 \frac{i \cdot p_i}{\omega_2(t)} = \frac{3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4}{0,7} \approx 3,57$$

y
$$\mu_T = \omega_1 \cdot \mu_1 + \omega_2 \cdot \mu_2 = 0,3 \cdot 1,667 + 0,7 \cdot 3,57 \approx 3$$

Sigamos con el método. Usando análisis discriminante, Otsu definió la variancia entre clases de una imagen umbralizada como

$$\sigma_B^2 = \omega_1 \cdot (\mu_1 - \mu_T)^2 + \omega_2 \cdot (\mu_2 - \mu_T)^2 \quad (4)$$

Para una umbralización de dos niveles, Otsu verificó que el umbral óptimo t^* se elige de manera que σ_B^2 sea máxima; esto es

$$t^* = \underset{t}{\text{Max}} \{ \sigma_B^2(t) \} \quad 1 \leq t \leq L \quad (5)$$

En el apéndice se incluye un algoritmo que calcula un umbral óptimo usando el método de Otsu para luego poder binarizar correctamente una imagen.

El método puede de Otsu extenderse fácilmente a múltiples umbrales. Asumiendo que hay $M-1$ umbrales, $\{t_1, t_2, \dots, t_{M-1}\}$, los cuales dividen a la imagen en M clases: C_1 para $[1, \dots, t_1]$, C_2 para $[t_1+1, \dots, t_2]$, ..., C_i para $[t_{i-1}+1, \dots, t_i]$, ..., y C_M para $[t_{M-1}, \dots, L]$, los umbrales óptimos $\{t_1^*, t_2^*, \dots, t_{M-1}^*\}$ se eligen maximizando σ_B^2 como sigue:

$$\{t_1^*, t_2^*, \dots, t_{M-1}^*\} = \underset{t_1, t_2, \dots, t_{M-1}}{\text{Max}} \{ \sigma_B^2(t_1, t_2, \dots, t_{M-1}) \} \quad (6)$$

$$1 \leq t_1 < \dots < t_{M-1} < L$$

Donde,

$$\sigma_B^2 = \sum_{k=1}^M \omega_k \cdot (\mu_k - \mu_T)^2 \quad (7)$$

Con

$$\omega_k = \sum_{i \in C_k} p_i \quad \mu_k = \sum_{i \in C_k} \frac{i \cdot p_i}{\omega_k}$$

ω_k es conocido como momento acumulado de orden cero de la k -ésima clase C_k , y el numerador de la última expresión es conocido como momento acumulado de primer orden de la k -ésima clase C_k ; esto es,

$$\mu(k) = \sum_{i \in C_k} i \cdot p_i$$

Formulación alternativa del método de Otsu

Independientemente del número de clases que se consideren durante el proceso de umbralización, la suma de las funciones de probabilidad acumulada de las M clases son iguales a 1, y la media de la imagen es igual a la suma de las medias de las M clases ponderadas por sus correspondientes probabilidades acumuladas; esto es,

$$\sum_{k=1}^M \omega_k = 1 \quad \mu_T = \sum_{k=1}^M \omega_k \cdot \mu_k \quad (8) \text{ y } (9)$$

Usando las expresiones (7) y (8), la varianza entre clases en la ecuación (7) de la imagen umbralizada puede describirse de la siguiente forma

$$\sigma_B^2(t_1, t_2, \dots, t_{M-1}) = \sum_{k=1}^M \omega_k \cdot \mu_k^2 - \mu_T^2 \quad (10)$$

Debido a que el segundo término en la expresión (10) depende de la elección de los umbrales $\{t_1, t_2, \dots, t_{M-1}\}$, los umbrales óptimos $\{t_1^*, t_2^*, \dots, t_{M-1}^*\}$ pueden ser elegidos maximizando una varianza entre clase modificada $(\sigma_B')^2$, definida como la sumatoria de los términos del lado derecho de la expresión (10). En otras palabras, los valores de los umbrales óptimos $\{t_1^*, t_2^*, \dots, t_{M-1}^*\}$ se eligen por

$$\{t_1^*, t_2^*, \dots, t_{M-1}^*\} = \underset{t_1, t_2, \dots, t_{M-1}}{\text{Max}} \{(\sigma_B')^2\{t_1, t_2, \dots, t_{M-1}\}\} \quad (11)$$

$$1 \leq t_1 < \dots < t_{M-1} < L$$

Donde,

$$(\sigma_B')^2 = \sum_{k=1}^M \omega_k \cdot \mu_k^2 \quad (12)$$

De acuerdo al criterio de la expresión (6) para σ_B^2 y al de la expresión (11) para $(\sigma_B')^2$, para encontrar los umbrales óptimos, el campo de búsqueda para el máximo σ_B^2 y para el máximo $(\sigma_B')^2$ es $1 \leq t_1 < L-M+1$, $t_1+1 \leq t_2 < L-M+2$, ..., y $t_{M-1}+1 \leq t_M < L-1$, como se ilustra en la figura 1. Esta búsqueda exhaustiva involucra $(L-M+1)^{M-1}$ combinaciones posibles. Además, comparando la expresión (12) con la (7), encontramos que la resta en la expresión (7) no es necesaria. Así, la expresión (12) es mejor que la expresión (7) ya que elimina $M \cdot (L-M+1)^{M-1}$ restas del cálculo de los umbrales.

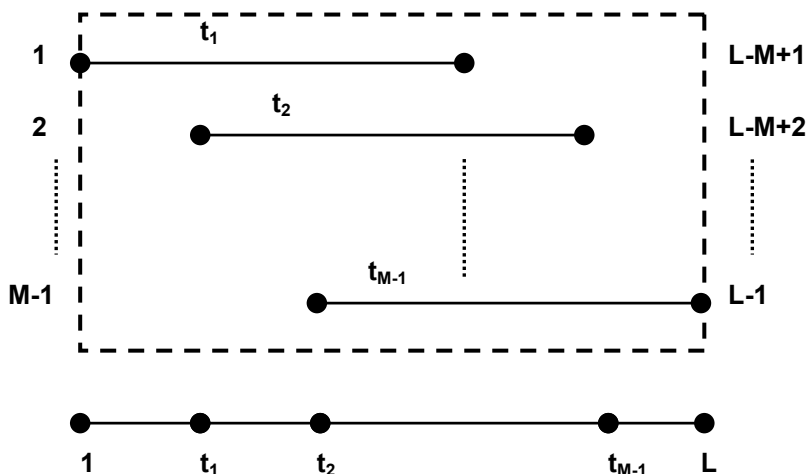


Figura 1: Campo de búsqueda para $\{t_1, t_2, \dots, t_{M-1}\}$.



Referencias

- 1) Nobuyuki Otsu, "A threshold selection method from gray-level histogram", *IEEE Transactions on System Man Cybernetics*, Vol. SMC-9, No. 1, 1979, pp. 62-66.
- 2) Ping-Sung Liao, Tse-Sheng Chen and Pau-Choo Chung, "A Fast Algorithm for Multilevel Thresholding", *Journal of Information Science and Engineering* 17, 713-727 (2001).
- 3) *Digital Image Processing Second Edition*, Rafael C. Gonzalez – Richard E. Woods, capítulo 10.

Apéndice

A continuación se mostrará un función hecha en un script de MatLab que calcula el umbral óptimo para binarizar una imagen utilizando el método de Otsu desarrollado anteriormente.

```
function umbralOptimo = umbralOtsu(Imagen)
%
%           umbralOptimo = umbralOtsu(Imagen)
% Esta funcion calcula el umbral optimo para binarizar una imagen mediante el
% Metodo de Otsu.
%
% Universidad Nacional de Quilmes
% Ingeniería en Automatización y Control Industrial
% Cátedra: Visión Artificial - Octubre de 2005

Imagen = fix(double(Imagen));
[f,c]=size(Imagen);

% Calculo de la distribucion de probabilidad de los niveles de gris
P=zeros(1,256);
for i=1:f*c
    P(Imagen(i)+1) = P(Imagen(i)+1) + 1;
end
P = P / (f*c);

% Calculo del momento acumulado de orden cero y del de primer orden
omega = zeros(1,256);
omega(1) = P(1);
mu = zeros(1,256);
for i=2:256
    omega(i) = omega(i-1) + P(i);
    mu(i) = mu(i-1) + (i-1)*P(i);
end

% Calculo del umbral optimo segun Otsu
sigmaB2max = 0;
sigmaB2 = 0;
mut = mu(256); % Intensidad media total de la imagen
umbralOptimo = 0;

for t=1:256
    omega1 = omega(t);
    omega2 = 1 - omega1;
    if omega1~=0 & omega2~=0
        mu1 = mu(t) / omega1;
        mu2 = (mut-mu(t)) / omega2;

        sigmaB2 = omega1 * (mu1-mut)^2 + omega2 * (mu2 - mut)^2;
        if sigmaB2 > sigmaB2max
            sigmaB2max = sigmaB2;
            umbralOptimo = t-1;
        end
    end
end
end
```

Comparemos ahora los resultados de binarizar una imagen con el método de Otsu y con un umbral arbitrario.

```
clear all, close all  
A=double(imread('rice.tif','tif'));
```

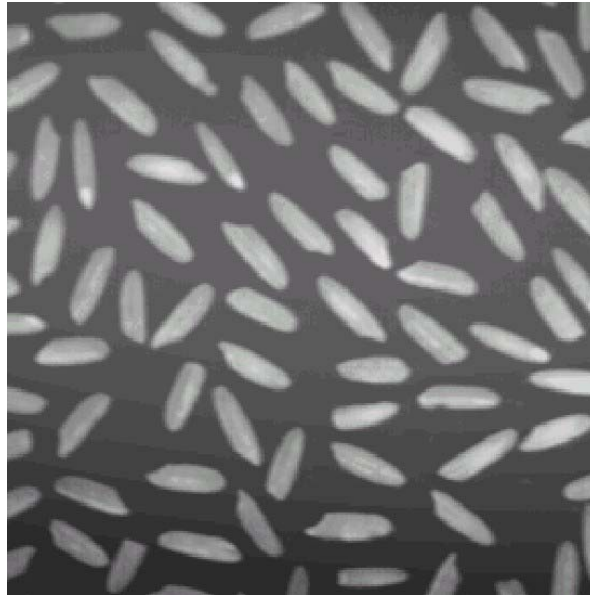


Figura 2: Imagen original que se desea binarizar.

Binariemos la imagen original usando la función anterior, **'umbralOtsu'**:

```
Botsu = A > umbralOtsu(A);
```

Binariemos otra vez la imagen pero usando un umbral global arbitrario, por ejemplo, 110:

```
Bglobal = A > 110;
```

Agreguemos a la imagen original ruido gaussiano de media 0 y varianza 20:

```
r=20*randn(size(A));  
Ar=fix(min(max(A+r,0),255));
```

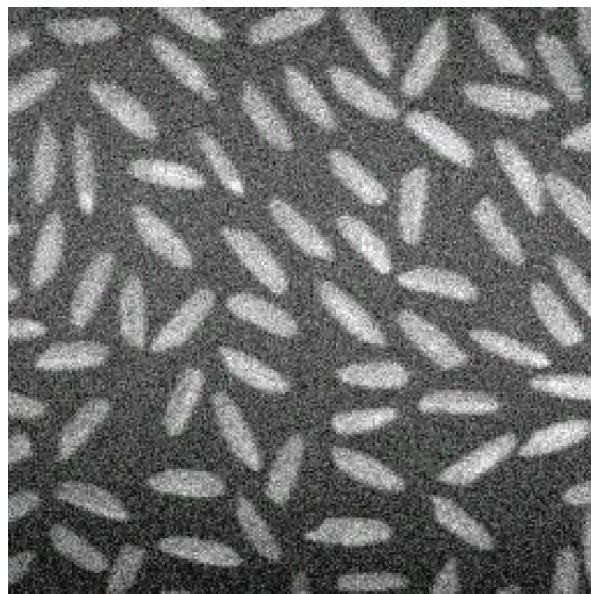


Figura 3: Imagen con ruido gaussiano de media cero y varianza 20 que se desea binarizar.

Binariemos ahora la imagen con ruido gaussiano usando tanto el umbral dado por el método de Otsu como el umbral arbitrario usado antes:

```
Botsur = A > umbralOtsu(Ar);  
Bglobalr = Ar > 110;
```

Finalmente, mostremos las imágenes binarias resultantes de los dos métodos de binarización, para el caso de la imagen sin ruido, y con ruido gaussiano:

```
figure, subplot(1,2,1), imshow(Botsu)  
title('Imagen binarizada con umbral Otsu')  
subplot(1,2,2), imshow(Botsur)  
title('Imagen con ruido binarizada con umbral Otsu')  
figure, subplot(1,2,1), imshow(Bglobal)  
title('Imagen binarizada con umbral arbitrario')  
subplot(1,2,2), imshow(Bglobalr)  
title('Imagen con ruido binarizada con umbral arbitrario')
```

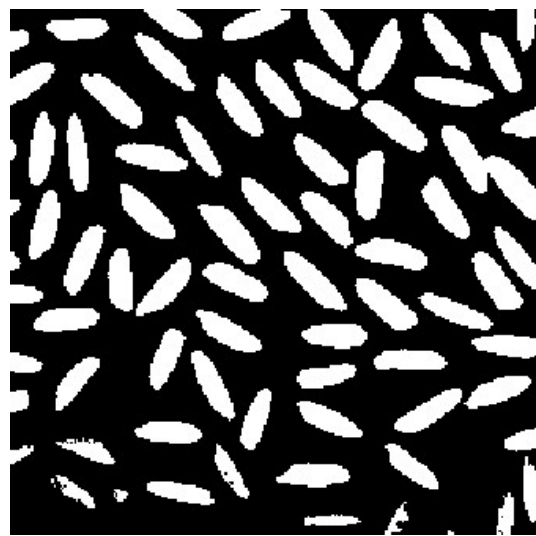
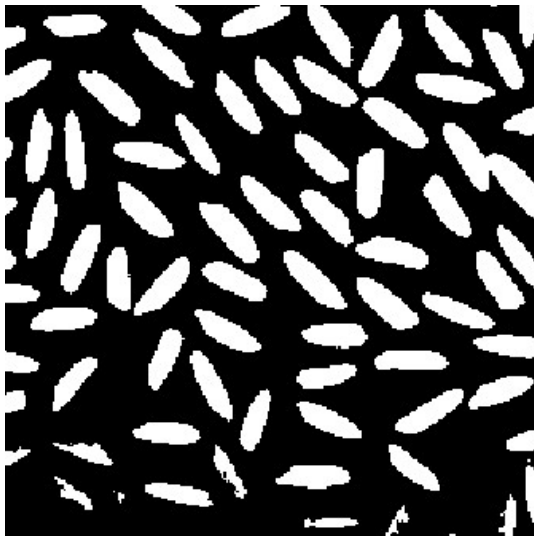


Figura 4: a) Imagen resultante de binarizar la original usando un umbral calculado con el **método de Otsu**. b) Imagen resultante de binarizar la imagen con ruido gaussiano **mediante Otsu**.

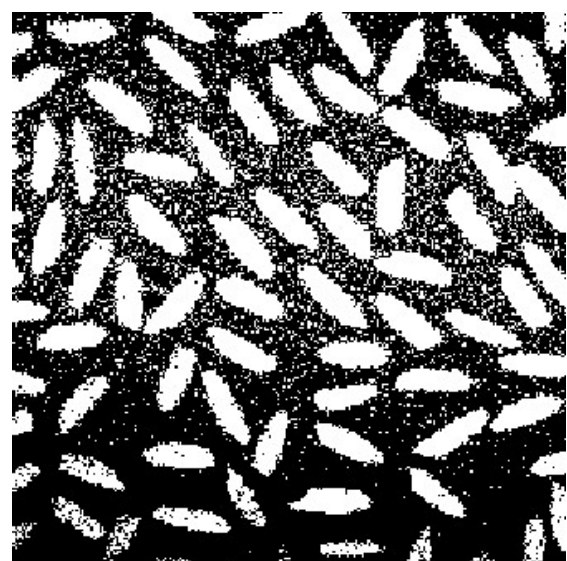
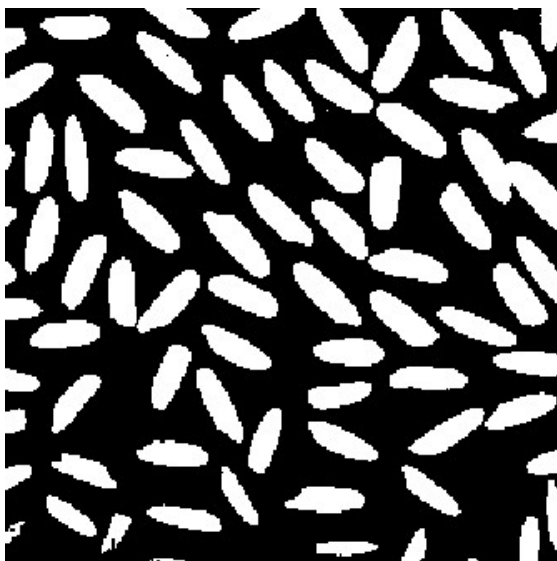


Figura 5: a) Imagen resultante de binarizar la original usando un **umbral arbitrario**. b) Imagen resultante de binarizar la imagen con ruido gaussiano usando el mismo **umbral arbitrario**.

Como se puede ver en la figura 4, la imagen sin ruido binarizada con el umbral calculado mediante el método de Otsu es idéntica a la imagen con ruido gaussiano binarizada usando el mismo método. Sin embargo, la imagen resultante de binarizar la imagen sin ruido con el umbral arbitrario difiere en gran medida de la obtenida luego de binarizar la imagen con ruido gaussiano con el mismo umbral arbitrario.

De esta manera, podemos comprobar la robustez o capacidad del método de Otsu para encontrar un umbral óptimo con el que se pueda binarizar correctamente una imagen contaminada con ruido gaussiano. Dado que no se puede comprobar en este apunte la eficiencia y rapidez del método para calcular el umbral óptimo, tendremos que confiar en el gran uso que se hace de él en la industria a la hora de binarizar imágenes reales en tiempo real y que están inmersas en todo tipo de perturbaciones.

Si bien hemos verificado mediante un simple ejemplo las ventajas del método de Otsu para hallar un umbral óptimo en una imagen con ruido gaussiano, se puede extender su utilidad para aquellos casos en que la iluminación no es uniforme o es en general inadecuada.