Comparación de 4 métodos iterativos

Isaac Barrios C., Justin Fernández B., Jimena León H., Daniel Montoya R.

Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Cartago, Costa Rica

isriom@estudiantec.cr, justinfernandez@estudiantec.cr,
mena.leon@estudiantec.cr, danimo@estudiantec.cr

Resumen

En este informe se utiliza un problema de la electrónica, el cual requiere de la ecuación de Shockley con efecto Early para averiguar la corriente que atraviesa los componentes de un circuito en serie. Los métodos iterativos a utilizar son: bisección, falsa posición, Kou modificado y Ostrowski. Se obtuvo que con Ostrowski se dieron menos iteraciones, con bisección se obtuvo el menor tiempo de ejecución y se llegó a una aproximación de la solución muy similar en la mayoría de métodos excepto en falsa posición. El mejor método fue el de Ostrowski pues tuvo el menor error absoluto de la función y menor cantidad de iteraciones.

This report uses an electronics problem, which requires the Shockley equation with Early effect to determine the current passing through the components of a series circuit. The iterative methods used for the solution are bisection, false position, modified Kou, and Ostrowski algorithms. It was found that the Ostrowski method required the fewest iterations, while bisection had the shortest execution time and achieved a solution approximation similar to most of the other methods except for false position. The best method was found to be Ostrowski due to its slightest absolute error of the function and the fewest number of iterations.

I. Introducción

El problema que se plantea para este informe consiste en la obtención de la corriente que circula a través de un diodo en un circuito electrónico. Para la obtención de este valor, se utiliza la ecuación de Shockley con efecto Early y se aplican distintos métodos iterativos con el fin de analizar cual de estos es el más eficiente tanto computacionalmente como en aproximación de resultado.

Dado que en algunos casos es imposible obtener una solución exacta a una ecuación en términos de ciertas variables y constantes planteadas, se presenta la necesidad de aplicar métodos numéricos iterativos que sean capaces de obtener una aproximación a la solución de un problema [6].

La importancia de los métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales consiste en que estos métodos permiten aproximar soluciones de algún problema dado con una precisión que puede ser controlada [6]. Es posible controlar la precisión de los métodos iterativos utilizando criterios de convergencia que permitan determinar cuando el resultado es lo suficientemente aproximado a la solución del problema [2]. Entre estos criterios se encuentran la cantidad de iteraciones máximas, la norma del residuo y demás.

II. Análisis del Problema

El problema escogido se basa en la ecuación de Shockley con efecto Early. Esta es una ecuación que determina la corriente que pasa a través de un componente electrónico llamado diodo, mediante los valores de algunos de sus parámetros como el voltaje colector-emisor, voltaje térmico, voltaje Early y voltaje base-emisor [5]. La ecuación de Shockley se muestra a continuación:

Observación: Esta investigación se realizó en el curso CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería, durante el Semestre I del 2023.

$$I_c = I_S(e^{\frac{V_{BE}}{nV_T}} - 1)(1 - \frac{V_{CE}}{V_A}) \tag{1}$$

Esta ecuación es muy importante para la electrónica, pues constituye una de las primeras ecuaciones en las que se debe utilizar un método iterativo sencillo para conocer el valor de la corriente [5]. Además, esta ecuación es trascendental, puesto que no se puede expresar como un polinomio si se tienen varias incógnitas. En concreto, se aplicará esta ecuación a un circuito electrónico simple, el cual se muestra en la figura a continuación.

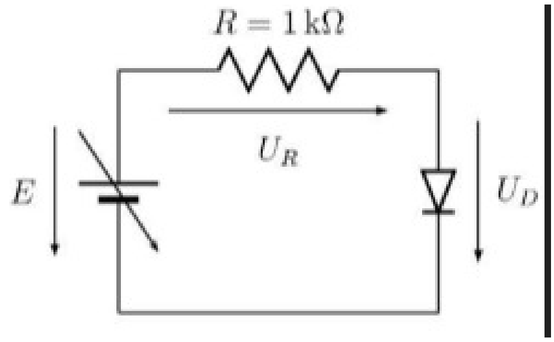

Figura 1. Circuito utilizado para el problema en estudio.

Este circuito está compuesto por una fuente de energía eléctrica, una resistencia y un diodo; y es usado para la medición de parámetros de construcción de los diodos [5]. La ecuación que describe el comportamiento de la corriente que atraviesa a cada uno de esos elementos es:

$$I_c = I_S(e^{\frac{V_{BE}}{nV_T}} - 1)(1 - \frac{V_{CE}}{V_A}) + \frac{V_F}{R} - \frac{V_{BE}}{R} \tag{2}$$

Con este problema se busca comparar cuatro métodos iterativos para conocer la eficiencia de cada uno en la resolución de la anterior ecuación.

III. Métodos iterativos en la solución de ecuaciones no lineales

En esta sección se explica con detalle cada uno de los métodos iterativos a utilizar para resolver cada ecuación no lineal del problema: el método de la bisección, el de la falsa posición y los 2 nuevos métodos iterativos seleccionados.

III-A. Método de la bisección

Este método busca la solución de una ecuación, por medio del teorema del valor intermedio. Necesita de un intervalo [a,b] inicial y lo va reduciendo hasta que converja hacia una aproximación de la solución [1]. Para ello, verifica que se cumpla el Teorema de Bolzano, el cual busca lo siguiente:

$$f(a)f(b) \leq 0 \tag{3}$$

Lo anterior asegura que la función pasa por cero al menos una vez en ese intervalo [1]. Si se cumple dicho Teorema, se procede a dividir el intervalo con la siguiente ecuación:

$$x_k = \frac{a+b}{2} \tag{4}$$

Con ello se tienen dos intervalos: [a,x] y [x,b]. Posteriormente se verifica en cuál intervalo se cumple el teorema de Bolzano y se repiten los pasos anteriores, hasta que el error sea menor a una tolerancia muy cercana a cero. De manera que:

$$|f(x_k)| < tol \tag{5}$$

Finalmente, la inecuación anterior asegura que la solución aproximada encontrada muy similar a la solución real [1].

III-B. Método de la falsa posición

Conocido también como el método de la interpolación lineal, este método, al igual que el método de la bisección, requiere de un intervalo [a, b] al inicio y verifica si se cumple el teorema de Bolzano [2]. La diferencia con el método anterior recae en la ecuación utilizada para realizar el cálculo de x_k. Para dicho valor, se utiliza la ecuación dada en el método de la secante, la cual es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \tag{6}$$

Tal como se muestra en la ecuación anterior, se necesitan dos valores iniciales x_0 = a y x_1 = b. Con estos valores se obtiene el primer valor x_2. Posteriormente se verifica el teorema de Bolzano: si este se cumple, b = x. En caso contrario, a = x. De esta manera se actualiza el intervalo y se repiten los pasos anteriores [2]. Todo esto se repite hasta que finalmente se cumpla la inecuación (6).

III-C. Método de Kou modificado

El método de Kou modificado proviene de la unificación del método de Kou con el método de Newthon-Raphson [4].

El método consisten en una familia de métodos iterativos de tres pasos:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7}$$

$$z_n = x_n - \theta \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} - (1-\theta) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(y_n)} \tag{8}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f[z_n, y_n] + f[z_n, y_n, y_n](z_n - y_n)} \tag{9}$$

Donde (7) y (8) provienen del método de Kou y (9) proviene de una modificación del método de newton, mismo que es a su vez (7).

La modificación del método del newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ para generar (9) viene dada por estimar las derivadas $f'(y_n)$ y $f''(y_n)$ por medio del método de diferencias divididas de forma que $f(z_n)$ se pueda aproximar sin evaluar en su derivada [4].

Para ello se parte de que $f'(z_n) \approx f'(y_n) + f''(y_n)(z_n - y_n)$ [4] remplazando por sus equivalentes en términos de diferencias divididas queda tal que $f'(z_n) \approx f[y_n, x_n] + f[y_n, x_n, x_n](z_n - y_n)$[4]. A su vez se define el método de diferencias divididas como:

$$\begin{aligned}
f[x_0] &= f(x_0) \\
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\
f[x_0, x_1, ..., x_n, x] &= \frac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0} \\
f[x, x, .., x, x] &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

En el cual se puede observar que no se obtienen derivadas durante sus cálculos. Además se puede ver a partir de (9) que las evaluaciones producidas por las diferencias divididas serán de $f(z_n)$, $f(y_n)$, $f(x_n)$ y $f'(x)$, todos valores que ya se han procesado anteriormente, por lo que utilizar programación dinámica aceleraría el proceso significativamente en este método.

De este método es necesario hacer dos consideraciones. La primera es que el método genera una variedad de familias a partir de variar su valor θ, donde este proviene del método de kou original, y cada una de estas crea un método con diferente orden de convergencia, en este caso se ha usado $\theta = 0$ para un orden de convergencia entre 6 y 7 [4].

La segunda consideración es del método de diferencias divididas utilizado, el cual cuenta con una modificación que permite definir el método para un punto doble, aspecto que diferencias divididas original no permite. Aun con ello el método sigue teniendo un problema en un punto doble cero dado que su implementación se hace a partir de un punto doble y un punto simple en el denominador de (9).

III-D. *Método de Ostrowski*

El método de Ostrowski es un método iterativo de sétimo orden de convergencia [3]. Consiste en tres pasos:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{10}$$

$$z_n = x_n - (1 + H_1)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{11}$$

$$x_{n+1} = z_n - (m_1 + m_2 H_1 + H_2)^k \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \tag{12}$$

Donde además se considera:

$$H_1 = \frac{f(y_n)}{a_1 f(x_n) + 2f(y_n)} \tag{13}$$

$$H_2 = \frac{f(z_n)}{a_1 f(y_n) + a_2 f(z_n)} \tag{14}$$

Con m_1, m_2, a_1, a_2 y $k \in R$. Además $a_1 \neq 0$ para poder llegar a la convergencia de orden 7.

Del método de Ostrowski se observa que el paso 10 equivale al método de Newton - Raphson, sin embargo, utiliza dicho valor como un valor intermedio del término siguiente de la iteración y en el paso 11 aplica una modificación del método de Newton - Raphson para aplicar un peso y lo asigna a z_n que actua como otro valor intermedio. Finalmente el valor x_{n+1} está dada por la unión del z_n así como las dos funciones peso H.

IV. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para cada método iterativo utilizado. En la siguiente tabla se contemplan los valores iniciales utilizados, la solución aproximada, el error absoluto de la función y el tiempo de ejecución para cada uno de ellos. El código se desarrolló en Python.

Método	**V.I.**	x_k	e_k	k	**Tiempo** (s)
Bisección	a:0, b:10	0.7038497924804688	2.59908244886863e-09	17	0.003101110458
Falsa Posición	a:0.7, b:10	0.6999999999999993	1.26644076611076e-05	2499	0.024013996124
Kou Modificado	$x_0 : 1,\ \theta : 0$	0.7038506245762752	3.43960610834455e-10	6	0.004688739776
Ostrowski	1	0.7038505235217759	1.34644556788743e-11	4	0.005563497543

Es posible apreciar que el método de Ostrowski tiene la menor cantidad de iteraciones, mientras que el de falsa posición utilizó casi la cantidad máxima de iteraciones para converjen a la aproximación mostrada en la tabla. En cuanto al tiempo de ejecución de los métodos, todos son aceptables, sin embargo el método de la Bisección tiene el menor tiempo de ejecución, lo cual es ventajoso. El método de Ostrowski posee el error absoluto de la función más pequeño. Por ende, se puede afirmar que la aproximación de la solución encontrada es más precisa, en comparación con la aproximación encontrada en los demás. Por otro lado, es posible notar que tanto el método de la bisección, el de Kou modificado y el de Ostrowski converjen a una solución muy similar.

V. CONCLUSIONES

En esencia, en esta investigación se compararon cuatro métodos iterativos, en los cuales se aprecia se toman en consideración los parámetros como el tiempo de ejecución, solución aproximada, error absoluto de la función y número de iteraciones utilizadas. No se tuvo un método con los mejores resultados en cada parámetro, sino que tres de cuatro destacaron en alguno de dichos parámetros. El método de la bisección presentó el menor tiempo de ejecución. Por otro lado, el de Ostrowski obtuvo la solución más precisa pues su error absoluto de la función fue el más cercano a cero y, además, utilizó la menor cantidad de iteraciones. Adicionalmente, el método de Kou modificado no destacó particulamente en ningún parámetro pero obtuvo una aproximación de la solución similar en varios decimales al método de Ostrowski. Finalmente, el método de la falsa posición fue el que tuvo peor desempeño en términos computacionales, pues tuvo un tiempo de ejecución más alto y utilizó casi todas las iteraciones posibles, aunado a ello, tuvo el error absoluto de la función más grande de entre los demás métodos. En términos generales, el mejor método fue el de Ostrowski dados los resultados y es el más recomendado de entre los métodos aquí utilizados.

REFERENCIAS

[1] Agud, A. L. (2020). Método de bisección para la resolución de ecuaciones. Universitat Politècnica de València. http://hdl.handle.net/10251/135051

[2] Chapra, S. C. (2007). Métodos Numéricos para Ingenieros. México D.F.: McGraw-Hill.

[3] Cordero, A., Torregrosa, J. R., & Vassileva, M. P. (2011). A family of modified Ostrowski's methods with optimal eighth order of convergence. Applied Mathematics Letters, 24(12), 2082-2086.https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.06.002

[4] Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E., & Torregrosa, J. R.(2010). A family of iterative methods with sixth and seventh order convergence for nonlinear equations. Mathematical and Computer Modelling, 52(9-10), 1490-1496. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.05.033

[5] Razavi, B. (2006). Fundamentals of Microelectronics. Estados Unidos: Wiley.

[6] Amar, S. (2016). Importance of Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations. Suiza: Springer