Introduction

0.1 Hypothèse d'information parfaite

Jusqu'à présent, vous avez étudié en microéconomie les comportements des agents (consommateur, producteur) sous l'hypothèse d'information parfaite. Acheteurs et vendeurs sont parfaitement informés des caractéristiques des produits et des facteurs de production et des prix auxquels ils sont proposés.

Cette hypothèse exclut toute forme incertitude : aucun agent n'a jamais de doute, que ce soit sur la qualité des produits qu'il achète ; la qualification des travailleurs qu'il embauche ; les conditions de travail dans l'entreprise dans laquelle il envisage de travailler ; l'évolution future des prix, des salaires, des taux d'intérêt ; l'âge auquel il prendra sa retraite... ou même la date de son décès.

0.2 Omniprésence de l'incertitude

L'incertitude et l'imperfection de l'information jouent pourtant un rôle important dans de nombreux champs de l'économie : finance, assurance, retraites, économie du travail, économie de la santé, économie de l'environnement, etc.

L'incertitude est ainsi omniprésente dans la réalité : le salarié peut être licencié (ou promu), le chef d'entreprise peut faire faillite à la suite de la défaillance d'un fournisseur ou bénéficier des ennuis judiciaires d'un concurrent, l'automobiliste peut avoir un accident, certaines consommations peuvent rendre malade à plus ou moins long-terme, les maisons peuvent bruler, la terre peut trembler... une pandémie peut survenir, etc.

Dans certaines situations, l'incertitude est même un élément essentiel du problème qui se pose à l'agent économique qui doit prendre une décision : Assurances, garanties, placements financiers, sociétés d'intérim, agences immobilières, publicités... tout cela n'existe que car l'incertitude existe !

Ce cours a pour objectif d'étudier dans quelle mesure les résultats établis en microéconomie sous l'hypothèse simplificatrice d'information parfaite sont modifiés par la prise en compte de l'incertitude.

0.3 Microéconomie de l'incertitude

La microéconomie de l'incertitude n'est pas une rupture complète avec ce que vous avez appris sous l'hypothèse d'information parfaite, mais plutôt une généralisation de vos connaissances : l'univers certain que vous connaissez s'analyse, nous le verrons, comme un cas particulier de l'univers incertain.

Dans certains cas, il est par ailleurs évidemment raisonnable de négliger l'incertitude. Par exemple, quand vous achetez votre café, on peut supposer que vous savez de manière certaine l'utilité que vous apportera sa consommation (même s'il existe, certes, un risque infime que ce café contienne de l'arsenic ou tout autre produit inattendu).

Les résultats d'univers certain seront seulement reformulés dans un cadre d'analyse plus large. Vous allez voir apparaitre un aspect des préférences qui n'a pas de sens en univers certain et qui est omniprésent en univers incertain : l'attitude face au risque des agents.

Vous verrez aussi pourquoi il est raisonnable de penser que la plupart des individus n'aiment pas le risque, sont prêts à payer pour le diminuer et ont intérêt à le partager avec d'autres agents.

0.4 Question de l'intervention de l'État

L'économie de l'incertitude définit précisément la notion de risque puis montre dans quelle mesure les individus ont intérêt à partager les risques qu'ils supportent (par exemple via des assurances, une diversification des placements financiers ou encore la famille).

L'économie de l'incertitude fait donc surgir une question familière aux économistes : comment les individus, laissés à eux-mêmes, vont-ils partager les risques qu'ils supportent ? Le marché conduit-il à une répartition optimale de ces risques ? Ou bien l'intervention de l'État est-elle souhaitable ? Peut-on créer des instruments ou des institutions qui permettraient un partage de ces risques meilleur que celui qui se forme spontanément ?

Nous retrouvons donc, en économie de l'incertitude, la grande question de l'intervention de l'État : est-il légitime qu'il intervienne ? Améliore-t-il la situation lorsqu'il le fait ? Doit-il réglementer, taxer ou subventionner, ou produire lui-même ?

Nous ne répondrons pas directement à ces questions dans ce cours, mais nous définirons précisément la notion de risque et en donnerons le cadre et les outils théoriques. C'est le travail préliminaire indispensable pour répondre à ces questions.

Chapitre 1

Concepts de base

L'incertitude qui pèse sur un problème économique peut être résumée par trois éléments.

Les états de la nature : les événements qui peuvent se réaliser. Ils peuvent être écrits sous forme discrète (exemple : faire face à un sinistre ou non) ou continue (ex : taux de sinistre entre 0 et 1)

Les actions réalisables par l'agent étudié : s'assurer ou non contre un sinistre (2 actions), s'assurer un taux de remboursement en cas de sinistre (appartenant à l'intervalle $[0;1]$)

Les conséquences des actions pour un état de la nature donné : le montant de richesse finale selon qu'un sinistre a lieu ou non et que l'on s'est assuré ou non. Attention : on fait ici l'hypothèse simplificatrice que les conséquences des actions peuvent être ramenées à des montants monétaires.

1.1 Les loteries

Toutes ces informations (états de la nature, actions, conséquences des actions) peuvent être représentées sous la forme d'une matrice d'information et de loteries.

Notons E l'ensemble des différents états de la nature e_j.

Exemple avec trois états de la nature $E = \{e_1, e_2, e_3\}$

Notons p_j les probabilités (objectives ou subjectives) associées aux états de la nature : $p_j = P[e = e_j]$ avec $\sum_j^J p_j = 1$

Notons A l'ensemble des actions possibles a_i de l'agent

Notons x_{ij} les conséquences des actions a_i selon les différents états de la nature e_j où i est l'indice de l'action et j celui de l'état de la nature

Dans notre exemple : $i \in \{1, 2, 3\}$; $j \in \{1, 2, 3\}$

1.1.1 Écriture matrice d'information

La matrice d'information s'écrit de la manière suivante :

	e_1	e_2	e_3
	p_1	p_2	p_3
a_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
a_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
a_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

Choisir une action a_i revient à choisir des gains x_{ij} quand l'état de la nature e_j se réalise, sachant que cet événement aura lieu avec une probabilité p_j

1.1.2 Remarque 1 : Risque vs incertitude ?

On oppose souvent les notions de risque et d'incertitude. Le risque est défini par un ensemble d'états de la nature et par les probabilités associées à ces états. L'incertitude est cas où une quantification des probabilités associées aux différents états de la nature n'est pas possible. On parle même parfois d'incertitude radicale lorsque nous ne sommes pas en mesure de savoir les différents états de la nature possible.

Cette distinction remonte à l'économiste américain Franck Knight (1921) et est donc antérieure à la démonstration de Savage sur les probabilités subjectives (1954). Nous ne reprendrons pas cette distinction aujourd'hui considérée comme quelque peu dépassée : risque et incertitude seront ici considérés comme synonymes. Ainsi, incertitude n'est pas synonyme d'ignorance totale.

Tout au long de ce cours, nous supposerons que l'agent étudié sait que l'état de la nature qui se réalisera est l'un de ceux de la matrice d'information.Nous faisons par ailleurs l'hypothèse simplificatrice qu'il est capable d'attribuer une probabilité subjective à chaque état de la nature (Savage, 1954)

1.1.3 Remarque 2 : Univers certain vs incertain

Lorsqu'au moment de la décision, une au moins des actions possibles a plus d'une conséquence possible, on dit que le décideur prend sa décision en univers incertain.

A l'inverse, lorsque toutes les actions possibles a_i pour un décideur ont chacune une seule conséquence possible x_{ij}, on dit que le décideur prend sa décision en univers certain.

Il s'agit d'un cas particulier de l'univers incertain dans lequel la matrice d'information ne comprend qu'une colonne : celle de l'état de la nature dont on sait qu'il va se réaliser !

1.1.4 Écriture loteries

A chaque action a (chaque ligne de la matrice d'information) on associe une loterie

Loterie discrète (cas le plus commun dans ce cours)

$$a = \begin{cases} z_1 & z_2 & \cdots & z_I \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_I \end{cases} \qquad 0 < p_i \leq 1 \quad \sum_{i=1}^{I} p_i = 1$$

Les z_i sont les réalisations de la variable d'intérêt (gains ou pertes) qui surviennent avec des probabilités p_i, I événements possibles

Loterie continue : dans ce cas, on n'utilise plus des probabilités discrètes mais une loi de probabilité continue, caractérisée par une fonction de répartition $F_a(z)$ ou une densité $f_a(z)$

$$F_a(z) = \mathbb{P}[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{Z} f_a(z)dz \; z \in A$$

A ensemble des réalisations possibles z de la variable aléatoire Z

1.1.5 Exemple 1

	e_1	e_2	e_3
	$p_1 = 0{,}1$	$p_2 = 0{,}4$	$p_3 = 0{,}5$
a_1	z_1	z_2	z_3
a_2	z_2	z_1	z_1
a_3	z_3	z_3	z_3

Écrire les 3 loteries a_1, a_2, a_3 associées aux trois actions possibles de l'agent

$$a_1 = \begin{cases} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{cases}$$

$$a_2 = \begin{cases} z_1 & z_2 \\ 0,1 & 0,9 \end{cases}$$

$$\underbrace{a_3 = \begin{cases} z_1 \\ 1 \end{cases}}_{\text{Loterie certaine}}$$

1.1.6 Exemple 2 : assurance partielle

Un ménage veut assurer sa voiture de valeur v sachant que la probabilité d'accident est p. Le ménage s'assure pour un montant $z \leq v$ et doit payer une prime d'assurance égale à βz , avec $\beta \in]0;1[$. En cas d'accident, son capital sera égal au montant remboursé z moins la prime d'assurance βz. S'il n'y a pas d'accident, son capital sera de v moins la prime d'assurance.

Écrire la loterie associée au problème

$$a(z) = \begin{cases} z - \beta z & v - \beta z \\ p & 1 - p \end{cases}$$

Avec z la variable de choix de l'agent

1.1.7 Exemple 3 : jeu d'argent

Une personne achète un jeu à gratter d'un montant m. Elle peut gagner le montant $z > m$ avec une probabilité $p = 0,25$.

Écrire la loterie associée au problème

$$a = \begin{cases} z - m & -m \\ \underbrace{0,25}_{\text{Vous gagnez}} & \underbrace{0,75}_{\text{Vous perdez}} \end{cases}$$

Remarque : Cette manière d'écrire les conséquences du jeu suppose qu'elles sont purement monétaires ce qui exclut qu'on prenne du plaisir à jouer, ou la répugnance pour les jeux d'argent. Plus généralement, nous supposerons dans ce cours que les actions, en elles-mêmes, ne procurent ni utilité ni désutilité

1.1.8 Exemple 4 : risque de chômage

Une personne peut être au chômage avec une probabilité p. Si elle travaille, son salaire est w, sinon il est égal à γw avec $0 \leq \gamma < 1$. La cotisation chômage est égale à τw avec $0 < \tau < 1$.

Écrire la loterie associée au problème

$$a = \begin{cases} \gamma w & w - \gamma m \\ \underbrace{p}_{\text{Chômage}} & \underbrace{1-p}_{\text{Pas chômage}} \end{cases}$$

1.1.9 Exemple 5 : fonction de profit

Une entreprise produit un bien qu'elle vend au prix aléatoire P. Pour le produire elle embauche L travailleurs qu'elle rémunère au salaire certain w. Sa fonction de production est $Q = \sqrt{\ell}$ et le prix P apparait avec une densité $f_P(p)$ (il s'agit de la distribution du prix).

Après avoir défini le programme de l'entreprise, la condition de premier ordre et le profit aléatoire en fonction du prix $\prod(p)$, écrire la loterie continue associée au profit de l'entreprise.

Le programme de l'entreprise

$$\begin{cases} \max\limits_{\ell} \prod(p) = p \cdot q - w \cdot \ell \\ s.c. \, Q = \sqrt{\ell} \end{cases}$$

Condition de premier ordre

$$\max_{\ell} p \cdot \sqrt{\ell} - w \cdot \ell$$

$$\frac{\partial \prod(p)}{\partial \ell} = \frac{1}{2} p \cdot \ell^{-\frac{1}{2}} - w = 0$$

$$w = \frac{1}{2} p \cdot \ell^{-\frac{1}{2}}$$

$$2w = p \cdot \ell^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2w} = \frac{1}{p} \ell^{\frac{1}{2}}$$

$$\ell^{\star} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{w}\right)^2$$

Pour trouver le profit aléatoire on remplace ℓ par $\ell^{\star}$ dans la fonction de profit.

$$\prod(p) = p \cdot \sqrt{\ell^{\star}} - w \cdot \ell^{\star}$$

$$p \cdot \left(\frac{p}{2w}\right) - w \cdot \left(\frac{p}{2w}\right)^2$$

$$\frac{p^2}{2w} - \cancel{w} \cdot \frac{p^2}{2w^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{p^2}{4w} > 0$$

La loterie finale de l'entreprise est donc :

$$a = \begin{cases} \prod(p) = \frac{p^2}{4w} \\ f_P(p) \rightarrow \text{distribution prix} \end{cases}$$

1.2 Le critère d'espérance mathématique

Dans la sous-section 1.1, nous avons exploré la manière d'écrire un problème économique dans un contexte d'incertitude, en utilisant des outils tels que la matrice d'information et les loteries. Une question essentielle qui se pose est celle de la prise de décision par l'agent : comment choisit-il une action parmi les différentes options disponibles et comment compare-t-il les loteries ? Pour faciliter cette comparaison, un critère simple est souvent employé : l'approche par l'espérance mathématique, qui consiste à évaluer le gain « moyen » associé à chaque loterie. Cependant, il est crucial de noter que ce critère présente des limites significatives, comme le démontrent les paradoxes 1.3 et 1.4, qui soulignent l'insatisfaction que peut engendrer cette méthode d'évaluation.

1.2.1 Définition

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X de réalisations $(x_1, \cdots, x_I)$ qui surviennent avec des probabilités $(p_1, \cdots, p_I)$ est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{I} p_i \cdot x_i$$

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X de réalisations $x \in A$ réel est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{x \in A} x f(x) dx$$

Avec $f(x)$ densité de probabilité de X.

1.3 Le paradoxe de St Pétersbourg

Le paradoxe de St Pétersbourg, formulé par Daniel Bernoulli en 1738, remet en question la validité du critère d'espérance mathématique. Dans ce jeu, une pièce équilibrée est lancée, et le joueur compte le nombre de fois où elle tombe sur pile avant qu'elle ne tombe sur face. Si le joueur obtient I jets successifs sur pile, il remporte 2^I ducats. À la fin de l'expérience, Bernoulli interroge ses interlocuteurs sur le montant qu'ils seraient prêts à payer pour participer à ce jeu. Étonnamment, la plupart d'entre eux proposent des sommes relativement faibles, autour de 4 ducats, ce qui illustre un décalage entre l'espérance mathématique théorique du jeu et la valeur perçue par les joueurs.

1.3.1 Loterie associée

Quel montant le critère d'espérance mathématique conduirait-il à proposer ? On écrit la loterie et calcule l'espérance mathématique. La probabilité de tomber I fois de suite sur pile est égale à $(\frac{1}{2})^I$. Dans ce cas, le gain est alors de 2^I. On obtient donc la loterie suivante :

$$\begin{cases} 1 & 2 & \cdots & 2^I & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2^{I+1}} & \cdots \end{cases}$$

1.3.2 Espérance mathématique

Espérance mathématique de cette loterie ? On vérifie que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Remarque : c'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Espérance mathématique :

$$\mathbb{E}(B) \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} 2^i = \lim_{I \to +\infty} \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot 2^i = \lim_{I \to +\infty} \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{2} = +\infty$$

Un joueur devrait donc être prêt à donner tout ce qu'il possède pour jouer à ce jeu… ce qui ne correspond pas du tout à ce que l'on observe dans la réalité. C'est ce qu'on appelle un paradoxe expérimental.

1.4 Le paradoxe de l'assurance

Le paradoxe de l'assurance met en lumière une contradiction intrigante : bien que le critère d'espérance mathématique soit un outil fondamental pour évaluer les risques, il ne suffit pas à expliquer pourquoi un marché de l'assurance existe. En effet, selon ce critère, les individus rationnels devraient choisir d'auto-assurer leurs risques, car la probabilité de perte et le montant de la prime ne justifient pas toujours le recours à un assureur. Pourtant, la réalité montre que les gens préfèrent souvent souscrire des polices d'assurance, motivés par des facteurs psychologiques, sociaux et économiques, tels que la peur de l'incertitude, le besoin de sécurité et la solidarité collective. Ainsi, le paradoxe soulève des questions sur la nature des décisions économiques et les comportements humains face au risque.

Considérons un particulier qui dispose d'une richesse non risquée ω et qui souhaite assurer un bien risqué de valeur v pour un montant z. Pour obtenir cette indemnité z en cas de sinistre, il doit régler une prime d'assurance d'un montant βz avec $0 < \beta < 1$. Le sinistre survient avec une probabilité p.

Loterie associée à la richesse du particulier :

$$W = \begin{cases} \omega + (1-\beta)z & \omega + v - \beta z \\ p & 1-p \end{cases}$$

1.4.1 L'assureur

L'assureur perçoit la prime d'assurance βz que le sinistre ait lieu ou non et fait face à un coût de fonctionnement c, en plus du remboursement z qu'il doit effectuer en cas de sinistre. Si le sinistre a lieu il fait une perte $\beta z - z - c < 0$ et s'il n'a pas lieu il réalise un gain de $\beta z - c$.

Loterie associée au profit de l'assureur :

$$W = \begin{cases} (\beta - 1)z - c & \beta z - c \\ p & 1-p \end{cases}$$

1.4.2 Espérances mathématiques

Espérance de richesse du particulier :

$$\mathbb{E}(W) = p[\omega + (1-\beta)z] + (1-p)[\omega + v - \beta z] = \omega + (1-p)v + (p-\beta)z$$

Espérance de profit de l'assureur :

$$\mathbb{E}(\pi) = p[(\beta-1)z - c] + (1-p)[\beta z - c] = (\beta - p)z - c$$

Il s'agit de fonctions linéaires de z. Le paramètre essentiel est la pente des droites.

1.4.3 Demande d'assurance du particulier

Le particulier va choisir le montant assuré z qui maximise l'espérance de sa richesse :

$$\begin{cases} \max\limits_z \mathbb{E}(W) \\ s.c.\, 0 \leq z \leq v \end{cases}$$

Or, la dérivée de l'espérance de la richesse par rapport à z est la pente $p-\beta$, il y a donc trois cas possibles. Si $p < \beta$, l'espérance de la richesse décroît avec le montant assuré, ce qui implique que la demande d'assurance est nulle, $z^d = 0$. Si $p = \beta$, l'espérance de la richesse ne dépend pas du montant assuré, rendant la demande d'assurance indéterminée, $z^d \in [0, v]$. Enfin, si $p > \beta$, l'espérance de la richesse croît avec le montant assuré, et le particulier choisit donc l'assurance complète, $z^d = v$. Globalement, le particulier ne souhaite s'assurer que si $p \geq \beta$.

1.4.4 Choix de l'assureur

L'assureur cherche à maximiser l'espérance du profit :

$$\begin{cases} \max\limits_z \mathbb{E}(\pi) \\ s.c.\, 0 \leq z \leq v\,; \mathbb{E}(\pi) > 0 \end{cases}$$

Or, la dérivée de l'espérance de la richesse par rapport à z est la pente $\beta - p$, il y a donc trois cas possibles. Si $p < \beta$, l'espérance de profit croît avec le montant assuré, et l'assureur a intérêt à offrir une assurance complète (sous réserve que l'espérance de profit soit positive), soit $z^s = v$. Si $p = \beta$, l'espérance de profit ne dépend pas du montant assuré, mais elle est surtout négative, soit $(= (\beta - p)z - c = -c)$. Dans ce cas, l'assureur ne propose donc pas de contrat, soit $z^s = 0$. Enfin, si $p > \beta$, l'espérance de profit de l'assureur est toujours négative, et l'assureur ne propose pas de contrat, soit $z^s = 0$.

1.4.5 Offre et demande d'assurance

En résumé, on a les fonctions d'offre et demande suivantes :

	z^d	z^s
$p < \beta$	0	v
$p = \beta$	$[0, v]$	0
$p > \beta$	v	0

Il ne peut donc pas y avoir de marché de l'assurance si on applique le critère de l'espérance mathématique. Pourtant, ce marché existe et a un poids important dans l'économie ce qui est paradoxale

1.4.6 Conclusion sur les paradoxes

Le paradoxe de St Pétersbourg et celui de l'assurance soulignent les limites du critère d'espérance mathématique. Deux critiques principales peuvent être faites à son encontre : premièrement, ce n'est pas forcément le gain ou la richesse en tant que tel qui importe aux agents, mais l'utilité qui y est associée. Deuxièmement, le critère d'espérance mathématique ne tient pas compte du fait que l'attitude vis-à-vis du risque peut être très différente d'un individu à l'autre. Nous allons donc introduire des critères spécifiques de prise en compte du risque, tels que les fonctions de Markowitz. Par la suite, dans le Chapitre 2, nous introduirons la notion plus large d'utilité espérée, qui sera retenue dans le reste de ce cours.

1.5 Neutralité face au risque

Avec le critère d'espérance mathématique retenu jusqu'à présent, un décideur est indifférent entre les richesses :

$$W_1 = \begin{cases} \omega + 50 \\ 1 \end{cases}$$

$$W_2 = \begin{cases} \omega - 100 & \omega + 200 \\ 0,5 & 0,5 \end{cases}$$

En effet, $\mathbb{E}(W_1) = \mathbb{E}(W_1) = \omega + 50$ ne tient compte que du rendement moyen. Le décideur est donc indifférent entre la richesse W_1 ,certaine, sans risque, et la richesse W_2, aléatoire, risquée. Le critère d'espérance mathématique représente les préférences d'un individu indifférent au risque ou encore neutre face au risque

On retiendra ainsi qu'un individu est neutre face au risque si et seulement si ses préférences sont représentées par le critère d'espérance mathématique. Pour améliorer la représentation des préférences des agents, il faudrait donc introduire, en plus de l'espérance mathématique de la richesse, une mesure du risque. C'est l'objet des fonctions de Markowitz.

1.6 Fonctions de Markowitz

Puisqu'une richesse est risquée lorsqu'elle peut prendre différentes valeurs, une première mesure du risque est la dispersion de la variable aléatoire représentant cette richesse.

La variance constitue une mesure connue et intuitive de la dispersion et donc du risque :

$$\mathbb{V}(W) = \mathbb{E}\left[(W - \mathbb{E}(W))^2\right] = \mathbb{E}(W^2) - \mathbb{E}(W)^2$$

= Valeur moyenne de la distance au carré entre les réalisations de W et leur moyenne théorique $\mathbb{E}(W)$. Plus les réalisations s'écartent de leur valeur moyenne, plus la richesse est risquée = Moyenne des carrés - carré de la moyenne

1.6.1 Définition

Les fonctions de Markowitz sont une manière de représenter les préférences des agents par une fonction d'utilité à deux éléments, l'espérance et la variance de la richesse :

$$U(W) = f\left(\mathbb{E}(W), \mathbb{V}(W)\right)$$

La fonction de Markowitz est supposée croissante avec l'espérance de la richesse : pour un risque donné (i.e. à variance donnée), le décideur préférera la richesse qui a l'espérance la plus élevée : $\frac{\partial U(W)}{\partial \mathbb{E}(W)} > 0$. L'effet du risque sur l'utilité dépend quant à lui de l'attitude vis-à-vis du risque de l'individu

1.6.2 Attitude vis-à-vis du risque

Trois hypothèses peuvent être faites concernant le lien entre utilité et risque :

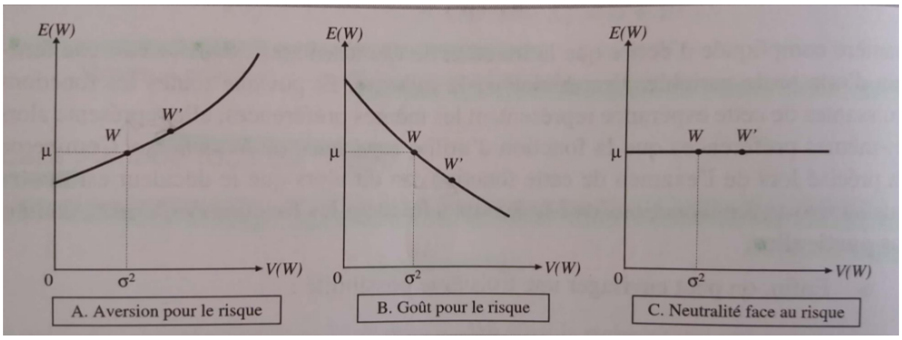
L'utilité est une fonction décroissante du risque : $\frac{\partial U(W)}{\partial \mathbb{V}(W)} < 0$. A espérance donnée, le décideur préfère la richesse qui présente. le risque le plus faible (i.e. la variance la plus faible). On dira que le décideur a de l'aversion pour le risque, ou encore qu'il est riscophobe.

L'utilité est indépendante du risque : $\frac{\partial U(W)}{\partial \mathbb{V}(W)} = 0$. Dans ce cas, la fonction de Markowitz ne dépend plus que de l'espérance de la richesse. On retrouve le cas d'un décideur neutre face au risque. Le critère d'espérance mathématique est un cas particulier des fonctions de Markowitz

L'utilité est une fonction croissante du risque : $\frac{\partial U(W)}{\partial \mathbb{V}(W)} > 0$. Le décideur préfère la richesse qui présente le risque le plus élevé. On dira alors que le décideur a un goût pour le risque, ou encore qu'il est riscophile. Ce comportement reste cependant peu observé en pratique !

Attention : un riscophobe n'est pas une personne qui ne prend jamais de risque, ni même une personne qui ne prend pas de risque lorsque c'est possible... de même, un riscophile peut dans certains cas choisir une richesse certaine tout dépend des loteries proposées et du degré d'aversion pour le risque des individus, c'est l'arbitrage entre niveau de risque et richesse !

1.6.3 Courbes d'indifférence de Markowitz



1.6.4 Fonction de Markowitz linéaire

La spécification la plus usuelle et la plus simple de la fonction de Markowitz est la forme linéaire :

$$U(W) = \mathbb{E}(W) - k\mathbb{V}(W)$$

La constante k représente le degré d'aversion pour le risque : plus k est élevé, plus l'individu a d'aversion pour le risque

Si $k > 0$: l'utilité est d'autant plus faible que le risque (la variance) est élevé, c'est le cas d'aversion pour le risque.

Si $k = 0$ nous sommes dans le cas de la neutralité face au risque.

Si $k < 0$ nous sommes dans le cas de goût pour le risque.

La fonction de Markowitz linéaire est parfois appelée "critère espérance-variance" et est très utilisée. Elle impose la même sensibilité au risque de gain et de perte.

1.6.5 Exemple

Supposons qu'un individu possède une richesse initiale certaine ω , que ses préférences soient correctement représentées par une fonction de Markowitz linéaire, et qu'il doive choisir entre deux loteries :

$$X = \begin{cases} 10 & 40 \\ 0,5 & 0,5 \end{cases}$$

et

$$Y = \begin{cases} -5 & 65 \\ 0,5 & 0,5 \end{cases}$$

Que peut-on dire du choix de cet individu selon son attitude vis-à-vis du risque ?

$$W = \omega + \frac{X}{Y}$$

Critère de choix : fonction linaire de Markowitz

$$U(\omega + X) = \mathbb{E}(\omega + X) - k\mathbb{V}(\omega + X)$$

$$U(\omega + Y) = \mathbb{E}(\omega + Y) - k\mathbb{V}(\omega + Y)$$

$$\mathbb{E}(\omega + X) = \omega + \mathbb{E}(X) = \omega + 10 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,5 = \omega + 25$$

$$\mathbb{E}(\omega + Y) = \omega + \mathbb{E}(Y) = \omega - 5 \cdot 0,5 + 65 \cdot 0,5 = \omega + 30$$

$$\mathbb{V}(\omega + X) = \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$0,5 \cdot 10^2 + 0,5 \cdot 40^2 - 25^2 = 225$$

$$\mathbb{V}(\omega + Y) = \mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$$

$$0,5 \cdot (-5)^2 + 0,5 \cdot 65^2 - 30^2 = 1225$$

Un agent neutre au risque ne tient compte que de l'espérance et choisit la loterie qui conduit à l'espérance la plus élévé. Dans ce cas on a $Y \succ X$.

L'agent riscophobe : $U(\omega + X) > U(\omega + Y)$

$$U(\cancel{\omega} + X) = \mathbb{E}(\cancel{\omega} + X) - k\mathbb{V}(\cancel{\omega} + X) > U(\cancel{\omega} + Y) = \mathbb{E}(\cancel{\omega} + Y) - k\mathbb{V}(\cancel{\omega} + Y)$$

$$25 - k \cdot 225 > 30 - k \cdot 1225$$

$$1000k > 5$$

$$\text{Si } k > 0,005 \text{ Choix de } X$$

$$\text{Si } k < 0,005 \text{ Choix de } Y$$

$$\text{Si } k = 0,005 \text{ Indiffrérence entre } X \text{ et } Y$$

1.6.6 Retour sur le pb de l'assurance

Reprenons le problème de l'assurance vu en section 1.4. en supposant désormais que les préférences de l'assuré ne sont plus représentées par l'espérance mathématique mais par une fonction de Markowitz linéaire. Nous avions du côté du particulier la loterie suivante :

$$W = \begin{cases} \omega + (1-\beta)z & \omega + v - \beta z \\ p & 1-p \end{cases}$$

Nous avions calculé son espérance :

$$\mathbb{E}(W) = \omega + (1-p)v + (p-\beta)z$$

Calculons maintenant sa variance pour introduire le risque :

$$\mathbb{V}(W) = \mathbb{E}\left[(W - \mathbb{E}(W))^2\right]$$

$$p[\omega+(1-\beta)z-(\omega+(1-p)v)+(p-\beta)z]^2+(1-p)[\omega+v-\beta z-(\omega+(1-p)v+(p-\beta)z)]^2$$

$$\mathbb{V}(W) = p(1-p)(v-z)^2$$

1.6.7 Étude de la variance (i.e. du risque)

Le risque est croissant avec l'écart entre la valeur du bien v et le montant remboursé z en cas de sinistre. Moins on s'assure, plus la variance est forte. Le risque varie également avec la probabilité de sinistre p.

$p(1-p)$ minimale en $p = 0$ (sinistre impossible) et $p = 1$ (sinistre certain).

$p(1-p)$ maximale en $p = \frac{1}{2}$, c'est donc lorsque le sinistre a autant de chances de survenir que de ne pas survenir que le risque est le plus fort

$p(1-p)$ peut être interprété comme un indicateur d'incertitude sur les états de la nature

$$\begin{cases} \max\limits_{z} U(W) = \mathbb{E}(W) - k\mathbb{V}(W) = \omega + (1-p)v + (p-\beta)z - kp(1-p)(v-z)^2 \\ s.c. \; 0 \leq z \leq v \end{cases}$$

Nous écartons le cas où la probabilité de sinistre p est nulle ou égale à 1 : dans ce cas il n'y a plus d'incertitude et le choix devient trivial. Nous supposons donc que : $0 < p < 1$

De même, nous avons vu en section 1.4. qu'il est peu vraisemblable de supposer que l'assureur demande une prime d'assurance βz inférieure à l'espérance de l'indemnité pz (ce ne serait pas rentable pour lui). Nous supposons que : $p < \beta$

Enfin, l'assureur ne peut pas demander une prime βz supérieure ou même égale à la somme z qu'il s'engage à verser à l'assuré en cas de sinistre (aucun assuré n'accepterait de s'assurer dans ce cas !). Nous supposons donc que : $\beta < 1$. Ainsi, nous avons la contrainte suivante sur les paramètres :

$$0 < p < \beta < 1$$

1.6.8 Problème de l'assuré avec utilité Markowitz

1.7 Autres mesures du risque