ÉCONOMIE DE L'INCERTITUDE – FASCICULE DE TRAVAUX DIRIGES

2023 – 2024

Master 1 Économie appliquée et Master 1 Monnaie, banque, finance, assurance
Université Paris-Est Créteil

Cours de Sandrine JUIN, Maître de Conférences en Sciences économiques.

Chargé de TD : Mahamoudou Zore
Contact : Mahamoudou.Zore@u-bourgogne.fr

Planning :

- 8 séances de TD de 1h30 les semaines du 23 septembre, 30 septembre, 7 octobre, 14 octobre, 21 octobre, 4 novembre, 11 novembre, 18 novembre.
- Vacances de la Toussaint la semaine du 28 octobre.
- 2 contrôles continus (le premier en milieu de semestre, le second en fin de semestre). Les dates précises vous seront communiquées par votre chargé de TD.

Horaires :

- Master 1 Économie appliquée (TD1) : le mercredi de 9h à 10h30
- Master 1 Économie appliquée (TD2) : le mercredi de 10h30 à 12h
- Master 1 Monnaie, banque, finance, assurance (TD1) : le mardi de 14h à 15h30
- Master 1 Monnaie, banque, finance, assurance (TD2) : le mardi de 15h45 à 17h15

CHAP. 1 – CONCEPTS DE BASE

Questions de cours

Remarque : les sections « Questions de cours » ont pour objectif, pour chaque chapitre, de reprendre certains éléments vus lors du cours magistral avant les exercices de TD. Elles ne seront pas traitées systématiquement par votre chargé de TD. Toutefois, si en préparant les TD certaines questions de cours spécifiques vous posent problème, vous pourrez demander à votre chargé de TD de vous donner des éléments de correction.

1) En quoi l'univers certain est-il un cas particulier d'univers incertain ?

2) En quoi les jeux d'argent peuvent-ils ne pas constituer un bon exemple d'application de la théorie de la décision en univers incertain étudiée dans ce cours ?

3) Expliquez ce que sont le paradoxe de St Pétersbourg et le paradoxe de l'assurance (aucun calcul n'est demandé).

4) Quelles critiques ces paradoxes conduisent-il à faire au critère d'espérance mathématique ?

5) Quel type de préférences vis-à-vis du risque permet de représenter le critère d'espérance mathématique ?

6) Un riscophobe est-il un agent qui ne prend jamais de risque ? Un riscophile choisit-il toujours l'option la plus risquée ?

7) En prenant l'exemple de l'assurance, dites pourquoi l'hypothèse d'aversion pour le risque est préférée par les économistes à celle de neutralité ou de goût pour le risque.

Exercice 1 : Écriture de problèmes sous forme de matrices d'information et de loteries

1) Vous souhaitez miser 25 euros sur un match de football opposant le Paris SG et Strasbourg. Vous hésitez entre parier sur une victoire du PSG, sur un match nul ou sur une victoire de Strasbourg. Après avoir fait vos recherches sur internet, vous estimez que la probabilité d'une victoire du PSG est de 83% et que celle d'une victoire de Strasbourg s'élève à 7%. La cote pour une victoire du PSG est égale à 1,2 ; celle pour un match nul à 6,8 et celle pour une victoire de Strasbourg à 10.

Note : la cote correspond au chiffre par lequel est multipliée votre mise en cas de pronostic correct.

a) Résumez le problème auquel vous faites face sous la forme d'une matrice d'information.

b) Quels sont les différents états de la nature ? Les actions ? Les conséquences monétaires ?

c) Représentez chaque action sous la forme d'une loterie.

.

2) Supposons qu'un agent participe à un jeu d'argent moyennant l'achat d'un ticket au prix de b euros. Ce jeu consiste à lancer un dé à 6 faces ; si le chiffre 6 apparaît, l'agent gagne g € ; sinon il ne gagne rien.
a) Écrivez la loterie associée à l'action d'acheter deux tickets de jeu.
b) Écrivez la contrainte budgétaire d'un individu ayant une richesse ω, en notant q le nombre de tickets.

Exercice 2 : Comportement d'un entrepreneur neutre au risque en cas d'incertitude sur le prix de vente
On considère une entreprise dotée d'une fonction de production $Q = \sqrt{L}$ où L est le nombre de travailleurs embauchés et Q le niveau de production. Le bien est vendu au prix P et le salaire est égal à w. Dans un premier temps, on se situe en environnement certain.

1) Rappelez quelles sont les valeurs de la demande de travail, de la production et du profit maximal de l'entreprise. On les notera L^*, Q^* et π^*.

2) On suppose désormais que le producteur doit faire face à une incertitude sur le prix de vente du bien qu'il produit. Il sait juste que ce prix est aléatoire, que sa valeur moyenne est $\bar{p}$ et sa variance σ_P^2.
a) Rappelez l'interprétation de la variance.
b) On suppose que l'entrepreneur est neutre face au risque. Déterminez la demande de travail, l'offre de biens et le profit maximum. On les notera L^{**}, Q^{**} et π^{**}.
c) Comment la production d'univers incertain se situe-t-elle par rapport à celle d'univers certain ?

Exercice 3 : Choix de portefeuille et fonction d'utilité linéaire de Markowitz
On considère une personne qui souhaite placer un capital de 1000 euros. Elle choisit de ne faire qu'un type de placement parmi les trois suivants : livret, obligations d'État ou actions. Elle doit faire face à différents types de conjoncture économique (trois états de la nature) : défavorable, moyenne et favorable. Le capital de fin de période obtenu pour les différents placements est résumé par les loteries suivantes :
Livret : $X_1 = \begin{cases} 1022 \\ 1 \end{cases}$; Obligations : $X_2 = \begin{cases} 1060 & 1100 \\ 1/2 & 1/2 \end{cases}$; Actions : $X_3 = \begin{cases} 800 & 1300 & 1600 \\ 1/2 & 3/10 & 2/10 \end{cases}$
1) Calculez les espérances et les variances mathématiques de ces trois loteries et commentez les chiffres obtenus.

2) On souhaite étudier ces différents placements dans le cadre d'une fonction d'utilité linéaire à la Markowitz : $U(X) = E(X) - kV(X)$. Quelle serait la loterie préférée lorsque le degré d'aversion pour le risque $k = -2$? Lorsque $k = 0$? Lorsque $k = 1$? Commentez les résultats obtenus.

3) Quel est le degré d'aversion pour le risque qui amène à préférer le placement en actions au placement sur le livret ? Peut-on dire qu'une personne averse au risque ne prend pas de risque ?

4) On considère maintenant que l'investisseur décide de placer une part α de son capital en actions et une part $(1-\alpha)$ sur le livret.
a) Écrire la loterie correspondant à un tel placement.

b) Quelle part en actions $\alpha \in [0, 1]$ un investisseur choisira-t-il lorsque $k = -2$? Lorsque $k = 0$? Lorsque $k = 1$? Commentez les résultats obtenus.

Exercice 4 : Choix d'offres d'emplois et différentes mesures du risque

Un étudiant doit choisir entre trois offres d'emplois pour l'été prochain dans le secteur des nouvelles technologies. Les salaires qui lui sont proposés par les employeurs dépendent de la conjoncture économique. La probabilité que le secteur "s'effondre" d'ici à cet été est de 5% et l'étudiant doit choisir son emploi sans savoir si cet état de la nature se réalisera ou non. Le premier emploi proposé lui rapportera un salaire de 2000 euros si le secteur des nouvelles technologies se porte bien et de 1200 euros s'il s'effondre. Le deuxième emploi lui rapportera un salaire de 1995 euros si le secteur se porte bien et de 1300 euros s'il s'effondre. Enfin, le dernier emploi proposé à l'étudiant nécessite qu'il investisse 500 euros dans l'entreprise. Il peut perdre ses 500 euros en cas d'effondrement du secteur des nouvelles technologies ou gagner 3500 euros si le secteur se porte bien.

1) Écrivez les trois loteries, que l'on notera X_1, X_2 et X_3 associées aux emplois proposés à l'étudiant.

2) Quelle offre d'emploi choisira l'étudiant s'il a une "fonction d'utilité" de type sécurité d'abord et un paramètre d'aversion au risque $k = 0{,}1$? Et s'il a une fonction d'utilité de type Maximin? De type Maximax ? Enfin, quel emploi choisira-t-il s'il raisonne à partir d'une fonction de regrets ?

CHAP. 2 – L'UTILITE ESPEREE

Questions de cours

1) Comment Bernoulli a-t-il été amené à introduire les fonctions d'utilité espérée ?

2) Quel est l'apport de von Neumann et Morgenstern aux fonctions d'utilité espérée ?

3) Quel est l'apport de Savage aux fonctions d'utilité espérée ?

4) Est-il vrai que les fonctions d'utilité d'univers incertain sont "moins" transformables que celles d'univers certain ?

5) Écrivez la fonction d'utilité espérée d'une personne neutre face au risque. Vérifiez qu'elle est confondue avec la fonction espérance de la richesse.

6) Citez le nom de deux paradoxes expérimentaux invalidant la théorie de l'utilité espérée, en précisant les axiomes qu'ils remettent en cause.

Exercice 1 : Rappels sur les notions d'utilité directe et d'utilité indirecte en univers certain

Un consommateur d'univers certain a des préférences représentées par la fonction d'utilité directe suivante, qui dépend de la consommation de deux biens : $u(q_1, q_2) = q_1 q_2$.

1) Après avoir rappelé ce que sont les notions d'utilité directe et d'utilité indirecte en microéconomie, vérifiez que la fonction d'utilité indirecte du consommateur s'écrit bien : $v(p_1, p_2, \omega) = \frac{\omega^2}{4p_1p_2}$ où ω représente le revenu du consommateur et p_1 et p_2 les prix des deux biens consommés.

2) Quelles transformations peut-on appliquer à cette fonction d'utilité indirecte sans qu'elle cesse de représenter les mêmes préférences ? Y a-t-il une transformation qui s'impose ici ?

3) Ce consommateur doit choisir entre travailler en France et s'expatrier. En admettant que seul son niveau de vie matériel lui importe dans cette affaire, que choisira-t-il si, en France, son revenu est $\omega = 10$ et les prix $p_1 = 1$ et $p_2 = 2$, alors que s'il s'expatrie, son revenu sera $\omega = 18$ et les prix $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$?

4) Quel parallèle pouvez-vous faire entre les notions d'utilités directe et indirecte d'univers certain et les fonctions d'utilité utilisées dans ce cours d'économie de l'incertitude ?

Exercice 2 : Calculs simples d'utilité espérée

Supposons qu'un agent doive choisir de participer ou non à un jeu d'argent. Le ticket de jeu coûte 100 euros. Le jeu consiste à lancer un dé à 6 faces ; si le chiffre 6 apparaît, l'agent gagne 600 euros ; sinon il ne gagne rien. Nous supposons que l'agent dispose d'une richesse certaine ω égale à 10000 euros et qu'il ne peut acheter qu'un ticket au maximum.

1) Écrivez la loterie X associée à l'action d'acheter un ticket de jeu et la richesse totale W (dans le cas où l'individu ne participe pas au jeu, et dans le cas où il y participe).

2) Dites, pour chacune des fonctions d'utilité suivantes, si l'agent participe au jeu ou non, en justifiant votre choix :

a) $u(w) = \sqrt{w}$

b) $u(w) = 2w + 6$

c) $u(w) = w^2$

Exercice 3 : Comportement d'un entrepreneur en univers incertain

On considère un producteur doté de la même fonction de production que celui dans la première fiche de TD : $Q = \sqrt{L}$, où L est le nombre de travailleurs embauchés et Q le niveau de production. Il doit décider aujourd'hui combien de salariés il embauche au salaire certain $w = 1$. Le prix de vente P est quant à lui incertain et peut prendre deux valeurs selon la conjoncture économique et la concurrence sur le marché : $P = \begin{cases} 10 & 30 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{cases}$. On suppose que les préférences du producteur sont représentées par une fonction racine carrée.

Écrivez, <u>sans le résoudre</u>, le programme qui détermine la demande de travail du producteur.

Exercice 4 : Souscription à une rente et durée de vie incertaine

Un agent considère comme certain qu'il vivra encore la période qui commence, mais qu'il n'en vivra une seconde qu'avec une probabilité p. Pendant la première période, il perçoit un revenu certain w. Pendant la seconde, s'il vit, il sera retraité et percevra une pension de retraite $w/2$. On admet qu'il ne peut ni prêter, ni emprunter. Sa consommation de chaque période se confond donc avec le revenu de la même période.

1) Écrivez les deux perspectives qui s'ouvrent à l'agent, c'est-à-dire les deux suites de consommations possibles.

2) On suppose à présent que les préférences inter-temporelles d'univers certain de l'agent sont représentées par la fonction : $u(w_O, \dots w_t, \dots w_T) = \sum_{t=0}^{T} \frac{\ln w_t}{(1+r)^t}$ où w_t est la consommation de la période t et T la dernière période (en univers certain, la date de décès est connue par hypothèse). Après avoir rappelé ce que représente le terme $\left(\frac{1}{(1+r)^t}\right)$, écrivez une fonction d'utilité espérée U compatible avec ces préférences d'univers certain.

3) On admet à présent que l'agent peut compléter sa pension de retraite. Il peut pour cela souscrire une rente dans les conditions suivantes : s'il accepte de payer βi euros en première période, il percevra i euros en deuxième période. Écrivez son utilité s'il choisit de percevoir une rente de i euros.

4) Quel sera le comportement de demande de rente de notre agent ?

5) Quel est le prix maximal β_{max} que l'agent accepte de payer pour 1 euro de rente ? Commentez l'expression de β_{max}.

6) Discuter de l'influence des éléments suivants sur la demande de complément de pension de retraite :
a) La richesse w
b) Le prix β ?
c) La probabilité de survie p ?

7) Comment s'interprète le coefficient 1/2 qui apparaît dans la formule de la demande de rente trouvée à la question 4) ? Quelle est son influence ?

8) Quel parallèle pouvez-vous faire entre la demande d'assurance étudiée en cours et la demande de rente étudiée ici ?

CHAP. 3 – MESURE DU RISQUE ET DEGRE D'AVERSION

Questions de cours

1) Le signe du prix de vente permet-il de caractériser l'attitude face au risque ?

2) De quoi dépend le montant de la prime de risque qu'un individu attache à une richesse donnée ?

3) Si deux richesses ont la même espérance, mais des variances différentes, l'indice d'aversion d'une personne donnée est-il différent selon que cette personne possède l'une ou l'autre de ces richesses ?

4) Si deux richesses ont la même espérance, mais des variances différentes, le montant de la prime de risque qu'une personne leur attache est-il différent selon que cette personne possède l'une ou l'autre de ces richesses ?

Exercice 1 : Transformation affine de l'utilité espérée et équivalent certain

1) Démontrez que transformer la fonction d'utilité espérée $U(W) = E\big(u(W)\big)$ par une fonction affine croissante revient à transformer la fonction élémentaire u par la même fonction.

2) Une transformation croissante de U représente les mêmes préférences que U. Une richesse donnée a donc le même équivalent certain si on remplace la fonction U par la transformation croissante $Z = aU + b,\ a > 0$. Démontrez-le directement.

Exercice 2 : Représentation graphique de la prime de risque

Faites apparaitre graphiquement la prime de risque d'un agent riscophile, dont les préférences sont représentées par la fonction $U(W) = E(W^2)$ et dont la richesse vaut : $W = \omega + X = \begin{cases} 150 & 300 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{cases}$

Exercice 3 : Mesure du risque dans le cas d'un pari sportif

Supposons que vous détenez une richesse non risquée $\omega = 150$ euros et que vous avez par ailleurs décidé de miser, suite à la première fiche de TD, sur une victoire de Strasbourg pour le match de football. La loterie $X = \begin{cases} -25 & 225 \\ 0{,}93 & 0{,}07 \end{cases}$ vient donc s'ajouter à votre richesse certaine. Supposons par ailleurs que votre fonction d'utilité est de la forme : $u(w) = \sqrt{w}$.

1) Écrivez la richesse aléatoire W à laquelle vous êtes confronté.

2) Calculez l'équivalent certain, le prix de vente, et la prime de risque. Interprétez vos résultats.

3) Vous discutez avec un ami qui vous informe que la prime de risque qu'il attache à cette même richesse est égale à 8 euros. Qui de vous deux est le plus averse au risque ?

4) Si votre ami avait une prime de risque égale à -3 euros, que pourriez-vous dire de son attitude face au risque ?

Exercice 4 : Arbitrage entre niveau de salaire et sécurité de l'emploi

Considérons un salarié qui fait face à un risque de chômage. Supposons qu'il est dépourvu de tout patrimoine, c'est-à-dire que $\omega = 0$. Pour simplifier, ramenons le futur de ce salarié à une seule période. Supposons qu'il estime qu'il a une probabilité p d'être au chômage pendant cette période. Si c'est le cas, il recevra une indemnité chômage de b euros. Si, au contraire, il a un emploi, il sera rémunéré au salaire $r > b$. Sa richesse aléatoire s'écrit donc : $W = \begin{cases} b & r \\ p & 1-p \end{cases}$.

1) Comment s'interprète l'équivalent certain de cette richesse ?

2) On suppose que le salarié a une fonction d'utilité élémentaire $u(w) = ln(w)$, que la probabilité de chômage $p = 10\%$, que le salaire vaut $r = 2000$ euros et que l'indemnité chômage vaut $b = 1000$ euros.

a) Quelle serait la réponse du salarié si son employeur lui proposait de réduire son salaire à 1800 euros, mais avec la garantie de l'emploi ?

b) Même question si la probabilité de devenir chômeur passe à 20% ?

c) Avec une probabilité de chômage de 10%, quel est le montant de l'indemnité chômage en dessous duquel le salarié accepterait la réduction de son salaire à 1800 euros avec garantie de l'emploi ?

3) Comment varie l'utilité espérée du salarié en fonction des paramètres r, p et b ? Est-il correct d'affirmer que les salariés n'ont jamais intérêt à une baisse de salaire ?

4) Est-ce parce qu'ils ont de l'aversion pour le risque que les salariés craignent le chômage ?

Exercice 5 : Choix de taux de salaire des salariés et risque de chômage

Supposons que les n salariés (identiques) d'une firme aient la possibilité de fixer librement leur taux de salaire réel r, l'employeur décidant alors librement du nombre L de salariés qu'il emploie. Les salariés qui ne seront pas employés seront tirés au sort et recevront une indemnité de chômage b. Les salariés n'ont pas d'autre richesse ($\omega = 0$). La fonction de demande de travail de la firme vaut : $L^d = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$.

1) Calculez la probabilité p pour un salarié d'être employé.

2) On suppose désormais que la probabilité p est strictement inférieure à 1. Écrivez la richesse finale W d'un salarié et sa fonction d'utilité espérée $E\big(u(W)\big)$ en fonction de α, r, n et b.

3) Allégez l'écriture en notant L^d à la place de $\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ et montrez que le salaire optimal r^* ne dépend pas du nombre de salariés n.

4) Écrivez la condition de premier ordre du programme de maximisation de l'utilité espérée du salarié.

5) Calculez $\frac{dL^d}{dr}$ en faisant apparaitre L^d dans l'expression.

6) Réécrivez la condition de premier ordre en faisant disparaitre le terme L^d.

7) On suppose que tous les salariés ont les mêmes préférences et que leur fonction d'utilité élémentaire s'écrit : $u(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma},\ \gamma \neq 1,\ w > 0.$

a) Quelle restriction faut-il imposer à γ pour que les salariés aient de l'aversion pour le risque ?

b) Vérifiez que, compte tenu de cette restriction, l'aversion absolue pour le risque est une fonction décroissante de w et l'aversion relative pour le risque est constante.

c) Comment s'appelle ce type de fonction d'utilité ?

8) Reprenez la condition de premier ordre déterminée à la question 6) et déterminez le taux de salaire r^* souhaité par les salariés.

9) Calculez le niveau d'emploi et commentez l'influence de l'indemnité chômage b sur le taux de salaire souhaité par les salariés, et donc sur l'emploi.

CHAP. 4 – FONCTIONS D'UTILITE USUELLES & CHAP. 5 – LA DOMINANCE STOCHASTIQUE

Non traités en TD. Se référer au cours magistral.

CHAP. 6 ET 7 – APPLICATION AUX CHOIX DE PORTEFEUILLE ET A LA DEMANDE D'ASSURANCE

Questions de cours sur l'assurance

1) Expliquez, de manière rigoureuse, le principe général d'une assurance. (Je n'attends pas de calculs ni d'équations). Vous préciserez ensuite quels sont les deux grands types de contrats d'assurance et en donnerez brièvement le principe.

2) Définissez le concept d'antisélection dans le cadre du marché de l'assurance. Quelle solution peut être mise en place par l'assureur pour parer à ce problème ?

3) Quel est, outre l'antisélection, le deuxième grand type d'asymétrie d'information que l'on retrouve sur le marché de l'assurance ? Définissez cette notion et donnez-en un exemple concret.

Exercice sur les choix de portefeuille

Rq : Cet exercice est extrait de l'examen final d'Economie de l'incertitude de l'année 2019-2020.

Nous supposons qu'un investisseur dispose d'une somme ω de 3000 euros à placer. Il peut placer son argent soit sur un livret avec un taux d'intérêt certain $r = 5\%$, soit en actions avec un taux de rendement aléatoire $Y = \begin{cases} 2\% & 9\% \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{cases}$. Nous cherchons à connaitre le montant a que l'individu va placer en actions. On suppose que l'investisseur peut acheter ou vendre à découvert des actions, de telle sorte que le montant a investi en action peut être négatif ou supérieur à la richesse initiale. Ce montant est borné afin de prendre en compte la capacité de remboursement de l'investisseur : $a^{min} \leq a \leq a^{max}$.

On rappelle l'écriture générale de la richesse aléatoire de l'investisseur : $W(a) = \omega(1 + r) + a(Y - r)$.

1) Montrez que $a^{min} = -78750$ euros et que $a^{max} = 105000$ euros en utilisant le raisonnement vu en cours pour déterminer les capacités de vente à découvert et d'achat à découvert.

2) On suppose dans un premier temps que les préférences de l'investisseur sont représentées par la fonction $u(w) = 4w + 3$. Après avoir calculé l'espérance du taux de rendement aléatoire, $E(Y)$, déterminez le montant optimal a^* placé en actions.

3) On suppose à présent que les préférences de l'investisseur sont représentées par la fonction $u(w) = w^2$.

a) Montrez que l'utilité espérée de la richesse de l'investisseur s'écrit, dans notre cas :

$$U(W(a)) = E[u(W(a))] = 0{,}3 \times (3150 - 0{,}03a)^2 + 0{,}7 \times (3150 + 0{,}04a)^2$$

b) Écrire le programme de l'investisseur.

c) Étudiez le signe de la dérivée seconde de la fonction d'utilité par rapport au montant a investi en actions, $\frac{d^2U(W(a))}{da^2}$. Qu'est-ce que cela implique quant au type de solution du programme de l'investisseur ?
d) Déterminez le montant a^* placé en actions par l'investisseur. Fait-il un achat ou une vente à découvert ? On rappelle pour cette question que : $a^{min} = -78750$ euros et $a^{max} = 105000$ euros.