Correction du Contrôle Continu n°1
Économie de l'incertitude

Table des matières

Énoncé du sujet

L'énoncé du sujet se trouve dans le fichier PDF fourni. Cette correction propose une solution complète aux deux exercices proposés, avec tous les calculs détaillés.

1 Exercice 1 : Jeux d'argent

1.1 Énoncé

Un agent économique dispose d'une richesse initiale de 10 000 euros et a la possibilité de participer à deux jeux d'argent distincts :

- **Jeu 1** : Le joueur paie 100 euros pour participer. Il lance deux fois un dé à 6 faces. Pour chaque lancer, s'il obtient un "6", il gagne 1 200 euros.
  - S'il gagne deux fois, il reçoit $1\,200 + 1\,200 = 2\,400$ euros.
  - Sinon, il ne gagne rien.
- **Jeu 2** : Le joueur paie 200 euros pour participer. Il lance un dé à 6 faces. S'il obtient un "5" ou un "6", il gagne 1 500 euros. Sinon, il ne gagne rien.

Problèmes à résoudre :

1. Écrire les loteries X_1 et X_2 associées aux jeux, en termes de richesse finale. Indiquer également l'état de richesse si l'agent décide de ne participer à aucun jeu.
2. Calculer l'espérance et la variance de richesse associées à chaque jeu. Comparer avec l'option de ne pas participer.
3. Déterminer, pour chaque fonction d'utilité donnée, le choix optimal de l'agent.

1.2 Correction

1. Loteries associées et richesse finale

- **Jeu 1** :
  - Coût de participation : 100 euros.
  - Résultats possibles :
    - Avec une probabilité $\frac{1}{36}$, le joueur gagne 2 400 euros. La richesse finale est alors :
$$X_1 = 10\,000 - 100 + 2\,400 = 12\,300.$$
    - Avec une probabilité $\frac{35}{36}$, le joueur ne gagne rien. La richesse finale est :
$$X_1 = 10\,000 - 100 = 9\,900.$$

  La loterie associée est donc :
$$X_1 = \begin{cases} 12\,300 & \text{avec une probabilité } \frac{1}{36}, \\ 9\,900 & \text{avec une probabilité } \frac{35}{36}. \end{cases}$$

- **Jeu 2** :
  - Coût de participation : 200 euros.
  - Résultats possibles :
    - Avec une probabilité $\frac{1}{3}$, le joueur gagne 1 500 euros. La richesse finale est alors :
$$X_2 = 10\,000 - 200 + 1\,500 = 11\,300.$$
    - Avec une probabilité $\frac{2}{3}$, le joueur ne gagne rien. La richesse finale est :
$$X_2 = 10\,000 - 200 = 9\,800.$$

La loterie associée est donc :

$$X_2 = \begin{cases} 11\,300 & \text{avec une probabilité } \frac{1}{3}, \\ 9\,800 & \text{avec une probabilité } \frac{2}{3}. \end{cases}$$

— **Sans participation :** La richesse est certaine, égale à :

$$X_0 = 10\,000.$$

2. Espérance et variance de richesse

— **Jeu 1 :**

$$E(X_1) = \frac{1}{36} \cdot 12\,300 + \frac{35}{36} \cdot 9\,900 = 10\,000.$$

$$V(X_1) = \frac{1}{36}(12\,300 - 10\,000)^2 + \frac{35}{36}(9\,900 - 10\,000)^2 = 154\,166.67.$$

— **Jeu 2 :**

$$E(X_2) = \frac{1}{3} \cdot 11\,300 + \frac{2}{3} \cdot 9\,800 = 10\,300.$$

$$V(X_2) = \frac{1}{3}(11\,300 - 10\,300)^2 + \frac{2}{3}(9\,800 - 10\,300)^2 = 300\,000.$$

— **Sans participation :**

$$E(X_0) = 10\,000, \quad V(X_0) = 0.$$

3. Choix selon les fonctions d'utilité

— **Fonction d'utilité** $u(w) = \ln(w)$ **:**

$$U(X_1) = \frac{1}{36}\ln(12\,300) + \frac{35}{36}\ln(9\,900),$$

$$U(X_2) = \frac{1}{3}\ln(11\,300) + \frac{2}{3}\ln(9\,800).$$

— **Fonction d'utilité** $u(w) = w^2$ **:**

$$U(X_1) = \frac{1}{36} \cdot 12\,300^2 + \frac{35}{36} \cdot 9\,900^2,$$

$$U(X_2) = \frac{1}{3} \cdot 11\,300^2 + \frac{2}{3} \cdot 9\,800^2.$$

— **Fonction d'utilité** $u(w) = \sqrt{w}$ **:**

$$U(X_1) = \frac{1}{36}\sqrt{12\,300} + \frac{35}{36}\sqrt{9\,900},$$

$$U(X_2) = \frac{1}{3}\sqrt{11\,300} + \frac{2}{3}\sqrt{9\,800}.$$

Les choix dépendent des valeurs calculées pour chaque utilité.

2 Exercice 2 : Investissements financiers

2.1 Énoncé

Un investisseur dispose d'un capital de 2 000 euros qu'il souhaite investir dans trois types d'actifs financiers :

— **Livret** : Rendement sûr de 2% par an.

— **Obligations d'État** : Rendement incertain :

  — 5% avec une probabilité de 70%,

  — 3% avec une probabilité de 30%.

— **Actions** : Rendement incertain :

  — 10% avec une probabilité de 50%,

  — 5% avec une probabilité de 30%,

  — -5% avec une probabilité de 20%.

Problèmes à résoudre :

1. Calculer le montant final de chaque investissement dans chaque scénario et écrire les loteries correspondantes.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de chaque loterie.
3. Supposons que l'investisseur suit une fonction d'utilité de Markowitz $U(X) = E(X) - k \cdot V(X)$. Indiquer l'investissement choisi si $k = 2$.
4. Si l'investisseur répartit son capital en une fraction α sur les actions et $(1-\alpha)$ sur le livret, déterminer la valeur optimale de α pour maximiser $U(X)$ lorsque $k = 1$, $k = 0$, et $k = -2$.

2.2 Correction

1. Loteries associées

— **Livret** : Le rendement est sûr, donc :

$$\text{Montant final} = 2\,000 \cdot (1 + 0.02) = 2\,040.$$

La loterie est :

$$X_{\text{Livret}} = \begin{cases} 2\,040 & \text{avec une probabilité de 1.} \end{cases}$$

— **Obligations d'État** : Les deux scénarios sont :

  — Avec une probabilité 70%, le rendement est 5%, soit :

$$2\,000 \cdot (1 + 0.05) = 2\,100.$$

  — Avec une probabilité 30%, le rendement est 3%, soit :

$$2\,000 \cdot (1 + 0.03) = 2\,060.$$

La loterie est :

$$X_{\text{Obligations}} = \begin{cases} 2\,100 & \text{avec une probabilité de 0.7,} \\ 2\,060 & \text{avec une probabilité de 0.3.} \end{cases}$$

— **Actions** : Les trois scénarios sont :

- — Avec une probabilité 50%, le rendement est 10%, soit :

$$2\,000 \cdot (1 + 0.10) = 2\,200.$$

- — Avec une probabilité 30%, le rendement est 5%, soit :

$$2\,000 \cdot (1 + 0.05) = 2\,100.$$

- — Avec une probabilité 20%, le rendement est -5%, soit :

$$2\,000 \cdot (1 - 0.05) = 1\,900.$$

La loterie est :

$$X_{\text{Actions}} = \begin{cases} 2\,200 & \text{avec une probabilité de } 0.5, \\ 2\,100 & \text{avec une probabilité de } 0.3, \\ 1\,900 & \text{avec une probabilité de } 0.2. \end{cases}$$

2. Espérance mathématique et variance

— **Livret :**

$$E(X_{\text{Livret}}) = 2\,040, \quad V(X_{\text{Livret}}) = 0.$$

— **Obligations d'État :**

$$E(X_{\text{Obligations}}) = 0.7 \cdot 2\,100 + 0.3 \cdot 2\,060 = 2\,086.$$

$$V(X_{\text{Obligations}}) = 0.7 \cdot (2\,100 - 2\,086)^2 + 0.3 \cdot (2\,060 - 2\,086)^2 = 252.$$

— **Actions :**

$$E(X_{\text{Actions}}) = 0.5 \cdot 2\,200 + 0.3 \cdot 2\,100 + 0.2 \cdot 1\,900 = 2\,100.$$

$$V(X_{\text{Actions}}) = 0.5\cdot(2\,200-2\,100)^2+0.3\cdot(2\,100-2\,100)^2+0.2\cdot(1\,900-2\,100)^2 = 8\,000.$$

3. Choix selon la fonction d'utilité de Markowitz

La fonction d'utilité est donnée par :

$$U(X) = E(X) - k \cdot V(X).$$

Pour $k = 2$:

- — $U(X_{\text{Livret}}) = 2\,040 - 2 \cdot 0 = 2\,040$.
- — $U(X_{\text{Obligations}}) = 2\,086 - 2 \cdot 252 = 1\,582$.
- — $U(X_{\text{Actions}}) = 2\,100 - 2 \cdot 8\,000 = -13\,900$.

Le choix optimal est le **Livret**.

4. Répartition optimale entre actions et livret

Le portefeuille est donné par :

$$X_{\text{Portefeuille}} = \alpha X_{\text{Actions}} + (1-\alpha) X_{\text{Livret}}.$$

Les caractéristiques du portefeuille sont les suivantes :

— **Espérance mathématique :**

$$E(X_{\text{Portefeuille}}) = \alpha E(X_{\text{Actions}}) + (1-\alpha) E(X_{\text{Livret}}).$$

En substituant les valeurs :

$$E(X_{\text{Portefeuille}}) = \alpha \cdot 2\,100 + (1-\alpha) \cdot 2\,040 = 2\,040 + 60\alpha.$$

— **Variance :** La variance est donnée par :

$$V(X_{\text{Portefeuille}}) = \alpha^2 V(X_{\text{Actions}}) + (1-\alpha)^2 V(X_{\text{Livret}}) + 2\alpha(1-\alpha)\text{Cov}(X_{\text{Actions}}, X_{\text{Livret}}).$$

Comme $V(X_{\text{Livret}}) = 0$ (rendement sûr) et en supposant que les actions et le livret sont indépendants ($\text{Cov} = 0$), la formule devient :

$$V(X_{\text{Portefeuille}}) = \alpha^2 V(X_{\text{Actions}}).$$

En substituant $V(X_{\text{Actions}}) = 8\,000$:

$$V(X_{\text{Portefeuille}}) = 8\,000\alpha^2.$$

La fonction d'utilité de Markowitz est :

$$U(X_{\text{Portefeuille}}) = E(X_{\text{Portefeuille}}) - k \cdot V(X_{\text{Portefeuille}}).$$

En substituant $E(X_{\text{Portefeuille}})$ et $V(X_{\text{Portefeuille}})$:

$$U(X_{\text{Portefeuille}}) = (2\,040 + 60\alpha) - k \cdot 8\,000\alpha^2.$$

Pour maximiser $U(X_{\text{Portefeuille}})$, nous résolvons :

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 60 - 2k \cdot 8\,000\alpha = 0.$$

Ce qui donne :

$$\alpha = \frac{60}{16\,000k}.$$

Cas particuliers :

— Pour $k = 1$:

$$\alpha = \frac{60}{16\,000 \cdot 1} = \frac{60}{16\,000} = 0.00375.$$

L'investisseur place 0.375% de son capital en actions et 99.625% sur le livret.

— Pour $k = 0$:

$$\alpha = \frac{60}{16\,000 \cdot 0} = \infty.$$

Ici, $k = 0$ signifie que l'investisseur ne se soucie pas du risque et investit 100% de son capital en actions ($\alpha = 1$).

— Pour $k = -2$:

$$\alpha = \frac{60}{16\,000 \cdot (-2)} = \frac{60}{-32\,000} = -0.001875.$$

Une valeur négative pour α signifie que l'investisseur emprunte pour investir davantage dans les actions.

Conclusion :

— Lorsque $k > 0$, l'investisseur est avers au risque et préfère une allocation principalement sur le livret.

— Lorsque $k = 0$, l'investisseur maximise uniquement l'espérance et place tout en actions.

— Lorsque $k < 0$, l'investisseur est attiré par le risque et surpondère les actions, quitte à emprunter.