Cours d'Économie de l'Incertitude

Sandrine JUIN
Maître de Conférences en Sciences économiques (Upec, Erudite)
Chercheure associée à l'Institut national d'études démographiques

Responsable du M1 Économie appliquée – Économie de la santé

2024-2025

Contact : sandrine.juin@u-pec.fr
Bureau 226

Organisation du cours

- 3 ECTS en M1 EA parcours Économie de la santé, 4 ECTS en parcours MASERATI, 5 ECTS en M1 MBFA
- 24 heures de CM réparties sur 11 séances le lundi matin :
  - ~~9/09~~ ; ~~16/09~~ ; 23/09 ; 30/09 (10h-12h30)
  - 7/10 ; 14/10 ; 21/10 (10h-12h)
  - Vacances la semaine du 28/10
  - 4/11 ; 18/11 ; 25/11 ; 2/12 (10h-12h)
- 12 h de TD (8 séances)
  - Début la semaine du 23/09. Enseignant : Mahamoudou Zore
- Évaluation : 30% contrôle continu (2 contrôles), 70% examen terminal
- Examen terminal la semaine du 16 décembre

Références

- J-L. Cayatte, *Microéconomie de l'incertitude*, De Boeck, 2009
  - 20 exemplaires disponibles à la BU

- Cours précédemment dispensé par Emmanuel Duguet

- N'hésitez pas à me faire des retours / suggestions sur ce cours pour le faire évoluer !

Introduction

Hypothèse d'information parfaite

- Jusqu'à présent, vous avez étudié en microéconomie les comportements des agents (consommateur, producteur) sous l'**hypothèse d'information parfaite**
  - Acheteurs et vendeurs parfaitement informés des caractéristiques des produits et des facteurs de production et des prix auxquels ils sont proposés
  - Information en libre accès, disponible immédiatement et sans coût
- Cette hypothèse **exclut toute forme incertitude** : aucun agent n'a jamais de doute, que ce soit sur la qualité des produits qu'il achète ; la qualification des travailleurs qu'il embauche ; les conditions de travail dans l'entreprise dans laquelle il envisage de travailler ; l'évolution future des prix, des salaires, des taux d'intérêt ; l'âge auquel il prendra sa retraite… ou même la date de son décès

Omniprésence de l'incertitude 1/2

- L'incertitude et l'imperfection de l'information jouent pourtant un rôle important dans de nombreux champs de l'économie : finance, assurance, retraites, économie du travail, économie de la santé, économie de l'environnement, etc.

- **L'incertitude est ainsi omniprésente dans la réalité** : le salarié peut être licencié (ou promu), le chef d'entreprise peut faire faillite à la suite de la défaillance d'un fournisseur ou bénéficier des ennuis judiciaires d'un concurrent, l'automobiliste peut avoir un accident, certaines consommations peuvent rendre malade à +/- long-terme, les maisons peuvent bruler, la terre peut trembler… une pandémie peut survenir, etc.

Omniprésence de l'incertitude 2/2

- Dans certaines situations, l'incertitude est même un élément essentiel du problème qui se pose à l'agent économique qui doit prendre une décision

- → Assurances, garanties, placements financiers, sociétés d'intérim, agences immobilières, publicités… tout cela n'existe que car l'incertitude existe !

- Ce cours a pour **objectif** d'étudier dans quelle mesure les résultats établis en microéconomie sous l'hypothèse simplificatrice d'information parfaite sont modifiés par la prise en compte de l'incertitude

Microéconomie (de l'incertitude) 1/2

- La microéconomie de l'incertitude n'est pas une rupture complète avec ce que vous avez appris sous l'hypothèse d'information parfaite, mais plutôt une **généralisation** de vos connaissances : l'univers certain que vous connaissez s'analyse, nous le verrons, comme un cas particulier de l'univers incertain

- Dans certains cas, il est par ailleurs évidemment raisonnable de négliger l'incertitude
  - Par exemple, quand vous achetez votre café, on peut supposer que vous savez de manière certaine l'utilité que vous apportera sa consommation (même s'il existe, certes, un risque infime que ce café contienne de l'arsenic ou tout autre produit inattendu)

Microéconomie (de l'incertitude) 2/2

- Les résultats d'univers certain seront seulement reformulés dans un cadre d’analyse plus large

- Vous allez voir apparaitre un aspect des préférences qui n'a pas de sens en univers certain et qui est omniprésent en univers incertain : l'**attitude face au risque** des agents

- Vous verrez aussi pourquoi il est raisonnable de penser que la plupart des individus n'aiment pas le risque, sont prêts à payer pour le diminuer et ont intérêt à le partager avec d'autres agents

Question de l’intervention de l'État 1/2

- L'économie de l'incertitude définit précisément la notion de risque puis montre dans quelle mesure les individus ont intérêt à **partager les risques** qu'ils supportent (par exemple via des assurances, une diversification des placements financiers ou encore la famille)

- L'économie de l'incertitude fait donc surgir une question familière aux économistes : comment les individus, laissés à eux-mêmes, vont-ils partager les risques qu'ils supportent ? Le marché conduit-il à une répartition optimale de ces risques ? Ou bien l'intervention de l'État est-elle souhaitable ? Peut-on créer des instruments ou des institutions qui permettraient un partage de ces risques meilleur que celui qui se forme spontanément ?

Question de l’intervention de l'État 2/2

- Nous retrouvons donc, en économie de l'incertitude, la grande question de l'**intervention de l'État** : est-il légitime qu'il intervienne ? Améliore-t-il la situation lorsqu'il le fait ? Doit-il réglementer, taxer ou subventionner, ou produire lui-même ?

- Nous ne répondrons pas directement à ces questions dans ce cours, mais nous définirons précisément la notion de risque et en donnerons le cadre et les outils théoriques → travail préliminaire indispensable pour répondre à ces questions

Prérequis

- Ce cours, bien que mobilisant autant que possible l'intuition économique, sera formalisé. Un certain nombre de prérequis sont nécessaires :
  - Notions de microéconomie de niveau Licence : fonctions d'utilité (et de profit), détermination du comportement d'un agent par maximisation de sa fonction objectif sous contrainte
  - Notions mathématiques et statistiques : dérivées, fonctions composées $f\big(g(x)\big)$, variable aléatoire discrète (et dans une moindre mesure continue), loi de probabilité (y.c. densité de probabilité), espérance mathématique, variance
- Capacité à mobiliser vos connaissance en économie pour mener une argumentation ou décrire des mécanismes économiques

Plan général du cours 1/2

- L'univers certain étant un cas particulier de l'univers incertain, les premiers chapitres consisteront à adapter les outils que vous connaissez. Comme en univers certain, les agents économiques font des **choix**, en fonction de deux ordres de considérations :
  - D'une part leurs **contraintes**, qui définissent l'ensemble des **actions** possibles pour eux
  - D'autre part, les **préférences** qu'ils ont sur ces actions possibles

→ Nous allons ainsi commencer par étudier comment représenter les actions possibles des agents et leurs préférences sur ces actions. Ceci revient à définir les instruments d'analyse, en particulier les loteries, les fonctions d'utilité espérée et leurs propriétés, et à donner un sens à la notion d'aversion pour le risque (Chap. 1 à 5)

Plan général du cours 2/2

- Nous appliquerons ensuite l'ensemble de ces instruments à deux grands exemples de décisions en économie de l'incertitude :

  - Celui d'un agent qui répartit sa richesse entre différents actifs financiers : **choix de portefeuille** (Chap. 6)

  - Celui d'un agent qui choisit son contrat d'**assurance** auprès d'une compagnie d'assurance (Chap. 7)

Chapitres de cours

- Chap. 1 – Concepts de base
- Chap. 2 – L'utilité espérée
- Chap. 3 – Mesure du risque et degré d'aversion
- Chap. 4 – Fonctions d'utilité usuelles
- Chap. 5 – La dominance stochastique

- Chap. 6 – Les choix de portefeuille
- Chap. 7 – La demande d'assurance

- *Séance plus appliquée : comment mesurer l’attitude vis-à-vis du risque dans les enquêtes ? Que nous apprennent les travaux empiriques sur les choix assurantiels ?*

Chap. 1
-
Concepts de base

Plan de cours

- **Chap. 1 – Concepts de base**
  - **1.1. Les loteries**
  - **1.2. Le critère d'espérance mathématique**
  - **1.3. Le paradoxe de St Pétersbourg**
  - **1.4. Le paradoxe de l'assurance**
  - **1.5. Neutralité face au risque**
  - **1.6. Fonctions de Markowitz**
  - **1.7. Autres mesures du risque**

Résumer l'incertitude

- L'incertitude qui pèse sur un problème économique peut être résumée par trois éléments :
  - **Les états de la nature :** les événements qui peuvent se réaliser. Ils peuvent être écrits sous forme discrète (ex : faire face à un sinistre ou non) ou continue (ex : taux de sinistre entre 0 et 1)
  - **Les actions** réalisables par l'agent étudié : s'assurer ou non contre un sinistre (2 actions), s'assurer un taux de remboursement en cas de sinistre (appartenant à l'intervalle [0;1])
  - **Les conséquences des actions pour un état de la nature donné** : le montant de **richesse** finale selon qu'un sinistre a lieu ou non et que l'on s'est assuré ou non. Attention : on fait ici **l'hypothèse simplificatrice que les conséquences des actions peuvent être ramenées à des montants monétaires.**

1.1. Les loteries

- Toutes ces informations (états de la nature, actions, conséquences des actions) peuvent être représentées sous la forme d'une **matrice d'information** et de **loteries**
  - Notons E l'ensemble des différents états de la nature e_j
    - Ex avec trois états : $E = \{e_1, e_2, e_3\}$
  - Notons p_j les probabilités (objectives ou subjectives) associées aux états de la nature : $p_j = P[e = e_j]$ avec $\sum_j p_j = 1$
  - Notons A l'ensemble des actions possibles a_i de l'agent
    - Ex avec trois actions : $\mathrm{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$
  - Notons x_{ij} les conséquences des actions a_i selon les différents états de la nature e_j où i est l'indice de l'action et j celui de l'état de la nature
    - Dans notre exemple : $i \in \{1, 2, 3\}$; $j \in \{1, 2, 3\}$

Écriture matrice d'information

- La matrice d'information s'écrit de la manière suivante :

	e_1	e_2	e_3
	p_1	p_2	p_3
a_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
a_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
a_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

- Choisir une action a_i revient à choisir des gains x_{ij} quand l'état de la nature e_j se réalise, sachant que cet événement aura lieu avec une probabilité p_j

Rq 1 : Risque *vs* incertitude ? 1/2

- On oppose souvent les notions de risque et d'incertitude :
  - Risque = défini par un ensemble d'états de la nature et par les probabilités associées à ces états
  - Incertitude = cas où une quantification des probabilités associées aux différents états de la nature n'est pas possible
  - Notion d'incertitude radicale
- Cette distinction remonte à l'économiste américain Franck Knight (1921) et est donc antérieure à la démonstration de Savage sur les probabilités subjectives (1954)
- Nous ne reprendrons pas cette distinction aujourd'hui considérée comme quelque peu dépassée : risque et incertitude seront ici considérés comme synonymes

Rq 1 : Risque *vs* incertitude ? 2/2

- Ainsi, incertitude n'est pas synonyme d'ignorance totale

- Tout au long de ce cours, nous supposerons que l'agent étudié sait que l'état de la nature qui se réalisera est l'un de ceux de la matrice d'information

- Nous faisons par ailleurs l'hypothèse simplificatrice qu'il est capable d'attribuer une **probabilité subjective** à chaque état de la nature (Savage, 1954)

Rq 2 : Univers certain *vs* incertain

- Lorsqu'au moment de la décision, une au moins des actions possibles a plus d'une conséquence possible, on dit que le décideur prend sa décision en univers **incertain**

- A l'inverse, lorsque toutes les actions possibles a_i pour un décideur ont chacune une seule conséquence possible x_{ij} , on dit que le décideur prend sa décision en univers **certain**

→ Il s'agit d'un cas particulier de l'univers incertain dans lequel la matrice d'information ne comprend qu'une colonne : celle de l'état de la nature dont on sait qu'il va se réaliser !

Écriture loteries

- A chaque action a (chaque ligne de la matrice d'information) on associe une loterie
  - **Loterie discrète** (cas le plus commun dans ce cours)

$$a = \begin{cases} z_1 & z_2 & \cdots & z_I \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_I \end{cases}, \qquad 0 < p_i \leq 1, \qquad \sum_{i=1}^{I} p_i = 1$$

Les z_i sont les réalisations de la variable d'intérêt (gains ou pertes) qui surviennent avec des probabilités p_i, I événements possibles

  - **Loterie continue :** dans ce cas, on n'utilise plus des probabilités discrètes mais une loi de probabilité continue, caractérisée par une fonction de répartition $F_a(z)$ ou une densité $f_a(z)$

$$F_a(z)=P[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{z} f_a(z)dz\,,\ \ \mathrm{z}\ \in A$$

A ensemble des réalisations possibles z de la variable aléatoire Z

Exemple 1

	e_1	e_2	e_3
	$p_1 = 0{,}1$	$p_2 = 0{,}4$	$p_3 = 0{,}5$
a_1	z_1	z_2	z_3
a_2	z_2	z_1	z_1
a_3	z_3	z_3	z_3

- Écrire les 3 loteries a_1, a_2, a_3, associées aux trois actions possibles de l'agent → traité au tableau

Exemple 2 (Assurance partielle)

- Un ménage veut assurer sa voiture de valeur v sachant que la probabilité d'accident est p. Le ménage s'assure pour un montant $z \leq v$ et doit payer une prime d'assurance égale à βz, avec $\beta \in]0\,;1[$. En cas d'accident, son capital sera égal au montant remboursé z moins la prime d'assurance βz. S'il n'y a pas d'accident, son capital sera de v moins la prime d'assurance.

- Écrire la loterie associée au problème → traité au tableau

Exemple 3 (Jeu d'argent)

- Une personne achète un jeu à gratter d'un montant m. Elle peut gagner le montant $z > m$ avec une probabilité $p = 0{,}25$.

- Écrire la loterie associée au problème → traité au tableau

- Rq : Cette manière d'écrire les conséquences du jeu suppose qu'elles sont purement monétaires → exclut qu'on prenne du plaisir à jouer, ou la répugnance pour les jeux d'argent
- Plus généralement, nous supposerons dans ce cours que les actions, en elles-mêmes, ne procurent ni utilité ni désutilité

Exemple 4 (Risque de chômage)

- Une personne peut être au chômage avec une probabilité p. Si elle travaille, son salaire est w, sinon il est égal à γw avec $0 \leq \gamma < 1$. La cotisation chômage est égale à τw avec $0 < \tau < 1$.

- Écrire la loterie associée au problème → traité au tableau

Exemple 5 (Fonction de profit)

- Une entreprise produit un bien qu'elle vend au prix **aléatoire** P. Pour le produire elle embauche L travailleurs qu'elle rémunère au salaire certain w. Sa fonction de production est $Q = \sqrt{L}$ et le prix P apparait avec une densité $f_P(p)$ (il s'agit de la distribution du prix).

- Après avoir défini le programme de l'entreprise, la condition de premier ordre et le profit aléatoire en fonction du prix $\pi(P)$, écrire la loterie continue associée au profit de l'entreprise → traité au tableau

1.2. Espérance mathématique

- Nous avons vu dans la sous-section 1.1. comment écrire un problème économique en environnement incertain → matrice d'information et loteries

- **Comment l'agent prend-il sa décision ?** Quelle action choisit-il ? Comment comparer les loteries ?

- Critère simple permettant de comparer les loteries entre elles : l'approche par l'**espérance mathématique** → considérer simplement le gain « moyen » des loteries

- Nous verrons que ce critère est en réalité insatisfaisant (paradoxes 1.3. et 1.4.)

Définition

- L'espérance mathématique d'une **variable aléatoire discrète** X de réalisations $(x_1, \dots, x_I)$ qui surviennent avec des probabilités $(p_1, \dots, p_I)$ est définie par :

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{I} p_i x_i}$$

- L'espérance mathématique d'une **variable aléatoire continue** X de réalisations $x \in A$ réel est définie par :

$$\boldsymbol{E(X) = \int_{x \in A} x f(x) dx}$$

Avec $f(x)$ densité de probabilité de X

1.3. Paradoxe de St Pétersbourg

- Le paradoxe de St Pétersbourg est la conséquence d'une **expérimentation** réalisée par Daniel Bernoulli en 1738, qui invalide le critère d'espérance mathématique

- Voici le jeu proposé par Bernoulli : on jette une pièce bien équilibrée et on compte le nombre de jets successifs qui tombent sur pile. S'il y a I jets successifs, le joueur empoche 2^I ducats (ancienne monnaie). Le jeu s'arrête lorsque la pièce tombe sur face.

- Il demande à ses interlocuteurs combien ils seraient prêts à payer pour participer à ce jeu : la plupart proposent des montants faibles, de l'ordre de 4 ducats

Loterie associée

- Quel montant le critère d'espérance mathématique conduirait-il à proposer ?

→ On écrit la loterie et calcule l'espérance mathématique

- La probabilité de tomber I fois de suite sur pile est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^{I+1}$
- Dans ce cas, le gain est alors de 2^I
- On obtient donc la loterie suivante :

$$B(ernoulli) = \begin{cases} 1 & 2 & \dots & 2^I & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2^{I+1}} & \dots \end{cases}$$

Espérance mathématique

- Espérance mathématique de cette loterie ?
  - On vérifie que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Rq : Suite géométrique de 1er terme et de raison $\frac{1}{2}$

  - Espérance mathématique :

$$E(B) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} 2^i = \lim_{I\to+\infty}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i = \lim_{I\to+\infty}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{2} = +\infty \blacksquare$$

→ Un joueur devrait donc être prêt à donner tout ce qu'il possède pour jouer à ce jeu… ce qui ne correspond pas du tout à ce que l'on observe dans la réalité → **paradoxe expérimental**

1.4. Paradoxe de l'assurance

- Paradoxe de l'assurance : le critère d'espérance mathématique **ne permet pas d'expliquer l'existence d'un marché de l'assurance**
- Considérons un particulier qui dispose d'une richesse non risquée ω et qui souhaite assurer un bien risqué de valeur v pour un montant z. Pour obtenir cette indemnité z en cas de sinistre, il doit régler une prime d'assurance d'un montant βz avec $0 < \beta < 1$. Le sinistre survient avec une probabilité p.

- Loterie associée à la richesse du **particulier** :

$$W = \begin{cases} \omega + (1-\beta)z & \omega + v - \beta z \\ p & 1-p \end{cases}$$

L'assureur

- L'assureur perçoit la prime d'assurance βz que le sinistre ait lieu ou non et fait face à un coût de fonctionnement c, en plus du remboursement z qu'il doit effectuer en cas de sinistre. Si le sinistre a lieu il fait une perte $\beta z - z - c < 0$ et s'il n'a pas lieu il réalise un gain de $\beta z - c$.

- Loterie associée au profit de **l'assureur** :

$$\pi = \begin{cases} (\beta - 1)z - c & \beta z - c \\ p & 1 - p \end{cases}$$

Espérances mathématiques

- Espérance de richesse du particulier :

$$E(W) = p[\omega + (1-\beta)z] + (1-p)[\omega + v - \beta z]$$
$$= \omega + (1-p)v + (p-\beta)z$$

- Espérance de profit de l'assureur :

$$E(\pi) = p[(\beta - 1)z - c] + (1-p)[\beta z - c]$$
$$= (\beta - p)z - c$$

- Il s'agit de fonctions linéaires de z → le paramètre essentiel est la **pente des droites**

Demande d'assurance du particulier

- Le particulier va choisir le montant assuré z qui maximise l'espérance de sa richesse :

$$\max_{z} E(W)$$
$$s.c.\ 0 \leq z \leq v$$

- Or la dérivée de l'espérance de la richesse par rapport à z est la pente $(p - \beta)$, il y a donc trois cas possibles
  - Si $p < \beta$: l'espérance de la richesse décroit avec le montant assuré. La demande d'assurance est donc nulle, $\boldsymbol{z^d = 0}$
  - Si $p = \beta$: l'espérance de la richesse ne dépend pas du montant assuré. La demande d'assurance est indéterminée, $\boldsymbol{z^d \in [0, v]}$
  - Si $p > \beta$: l'espérance de la richesse croit avec le montant assuré. Le particulier choisit donc l'assurance complète, $\boldsymbol{z^d = v}$
  - → Globalement, le particulier **ne souhaite s'assurer que si $\boldsymbol{p \geq \beta}$**

Choix de l'assureur

- L'assureur cherche à maximiser l'espérance du profit :

$$\max_{z} E(\pi)$$
$$s.c.\ 0 \leq z \leq v\,; E(\pi) > 0$$

- Or la dérivée de l'espérance de la richesse par rapport à z est la pente $(\beta - p)$, il y a donc trois cas possibles
  - Si $p < \beta$: l'espérance de profit croit avec le montant assuré. L'assureur a intérêt à offrir une assurance complète (sous réserve que l'espérance de profit soit positive), $\boldsymbol{z^s = v}$
  - Si $p = \beta$: l'espérance de profit ne dépend pas du montant assuré, mais elle est surtout négative $(= (\beta - p)z - c\ = -c)$. L'assureur ne propose donc pas de contrat, $\boldsymbol{z^s = 0}$
  - Si $p > \beta$: l'espérance de profit de l'assureur est toujours négative. L'assureur ne propose pas de contrat, $\boldsymbol{z^s = 0}$

Offre et demande d'assurance

- En résumé, on a les fonctions d'offre et demande suivantes :

	z^d	z^s
$p < \beta$	0	v
$p = \beta$	$[0, v]$	0
$p > \beta$	v	0

- Il ne peut donc pas y avoir de marché de l'assurance si on applique le critère de l'espérance mathématique…
- …Pourtant, ce marché existe et a un poids important dans l'économie → **paradoxe**

Conclusion sur les paradoxes

- Le paradoxe de St Pétersbourg et celui de l'assurance soulignent les **limites du critère d'espérance mathématique**

- 2 critiques principales peuvent être faites à son encontre :
  - Ce n'est pas forcément le gain / la richesse en tant que tel qui importe aux agents mais l'**utilité** qui y est associée
  - Le critère d'espérance mathématique ne tient pas compte du fait que l'**attitude vis-à-vis du risque** peut être très différente d'un individu à l'autre

- Nous allons introduire des critères spécifiques de prise en compte du risque (fonctions de Markowitz) puis, dans le Chap. 2, nous introduirons la notion plus large d'**utilité espérée**, qui sera retenue dans le reste de ce cours

1.5. Neutralité face au risque

- Avec le critère d'espérance mathématique retenu jusqu'à présent, un décideur est indifférent entre les richesses :

$$W_1 = \begin{cases} \omega + 50 \\ 1 \end{cases} \text{ et } W_2 = \begin{cases} \omega - 100 & \omega + 200 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{cases}$$

→ En effet, $E(W_1) = E(W_2) = \omega + 50$

→ Ne tient compte que du rendement moyen

- Le décideur est donc indifférent entre la richesse W_1, certaine, sans risque, et la richesse W_2, aléatoire, risquée

- Le critère d'espérance mathématique représente les préférences d'un individu indifférent au risque ou encore **neutre face au risque**

Neutralité face au risque

- On retiendra ainsi qu'un individu est neutre face au risque **si et seulement si** ses préférences sont représentées par le critère d'espérance mathématique

- Ainsi, pour améliorer la représentation des préférences des agents, il faudrait introduire, en plus de l'espérance mathématique de la richesse, une **mesure du risque**

- C'est l'objet des **fonctions de Markowitz**

1.6. Fonctions de Markowitz

- Puisqu'une richesse est risquée lorsqu'elle peut prendre différentes valeurs, une première mesure du risque est la dispersion de la variable aléatoire représentant cette richesse

- La **variance** constitue une mesure connue et intuitive de la dispersion et donc du risque :

$$\boldsymbol{V(W) = E\left[\left(W - E(W)\right)^2\right] = E\left(W^2\right) - E(W)^2}$$

  - = Valeur moyenne de la distance au carré entre les réalisations de W et leur moyenne théorique $E(W)$. Plus les réalisations s'écartent de leur valeur moyenne, plus la richesse est risquée.
  - = Moyenne des carrés - carré de la moyenne

Définition

- Les **fonctions de Markowitz** sont une manière de représenter les préférences des agents par une fonction d'utilité à deux éléments, l'espérance et la variance de la richesse :

$$\boldsymbol{U(W) = f\big(E(W), V(W)\big)}$$

- La fonction de Markowitz est supposée croissante avec l'espérance de la richesse : pour un risque donné (i.e. à variance donnée), le décideur préférera la richesse qui a l'espérance la plus élevée : $\frac{\partial U}{\partial E(W)} > 0$

- L'effet du risque sur l'utilité dépend quant à lui de l'attitude vis-à-vis du risque de l'individu

Attitude vis-à-vis du risque (1)

- Trois hypothèses peuvent être faites concernant le lien entre utilité et risque :
  - 1) L'utilité est une fonction décroissante du risque : $\frac{\partial U}{\partial V(W)} < 0$

  → A espérance donnée, le décideur préfère la richesse qui présente le risque le plus faible (i.e. la variance la plus faible)

  → On dira que le décideur a de l'**aversion pour le risque**, ou encore qu'il est **riscophobe**

  - 2) L'utilité est indépendante du risque : $\frac{\partial U}{\partial V(W)} = 0$

  → Dans ce cas, la fonction de Markowitz ne dépend plus que de l'espérance de la richesse

  → On retrouve le cas d'un décideur **neutre** face au risque

  → Le critère d'espérance mathématique est un cas particulier des fonctions de Markowitz

Attitude vis-à-vis du risque (2)

- 3) L'utilité est une fonction croissante du risque : $\frac{\partial U}{\partial V(W)} > 0$

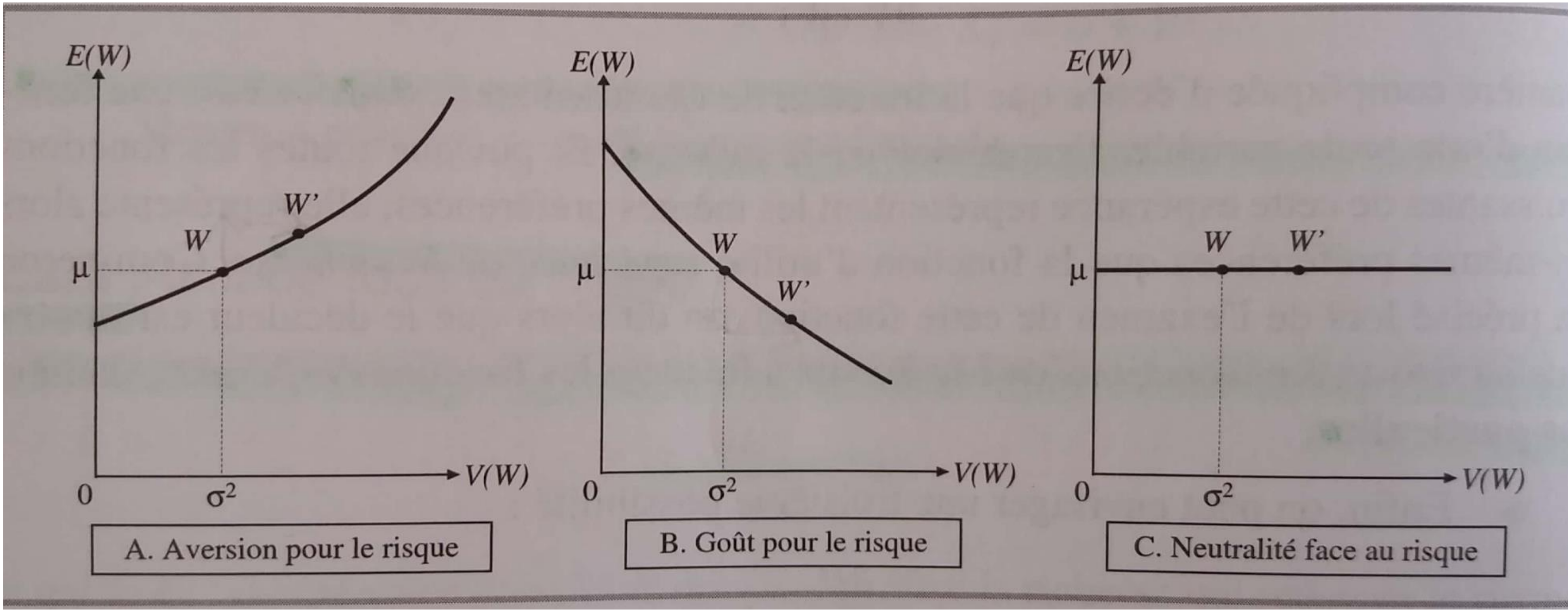
→ Le décideur préfère la richesse qui présente le risque le plus élevé

→ On dira alors que le décideur a un **goût pour le risque**, ou encore qu'il est **riscophile**

→ Comportement peu observé en pratique !

- Attention : un riscophobe n'est pas une personne qui ne prend **jamais** de risque, ni même une personne qui ne prend pas de risque lorsque c'est possible… de même, un riscophile peut dans certains cas choisir une richesse certaine → tout dépend des loteries proposées et du degré d'aversion pour le risque des individus → arbitrage entre niveau de risque et richesse !

Courbes d'indifférence de Markowitz



Source : J-L. Cayatte, *Microéconomie de l'incertitude*, De Boeck, 2009, p. 46

Fonction de Markowitz linéaire

- La spécification la plus usuelle et la plus simple de la fonction de Markowitz est la forme linéaire :

$$\boldsymbol{U(W) = E(W) - kV(W)}$$

- La constante $\boldsymbol{k}$ représente le **degré d'aversion pour le risque** : plus k est élevé, plus l'individu a d'aversion pour le risque
  - Si $k > 0$: l'utilité est d'autant plus faible que le risque (la variance) est élevé → aversion pour le risque
  - Si $k = 0$ → neutralité face au risque
  - Si $k < 0$ → goût pour le risque
- Parfois appelée "critère espérance-variance", très utilisée
- Impose la **même sensibilité au risque de gain et perte**

Exemple

- Supposons qu'un individu possède une richesse initiale certaine ω, que ses préférences soient correctement représentées par une fonction de Markowitz linéaire, et qu'il doive choisir entre deux loteries :

$$X = \begin{cases} 10 & 40 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{cases} \text{ et } Y = \begin{cases} -5 & 65 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{cases}$$

- Que peut-on dire du choix de cet individu selon son attitude vis-à-vis du risque ? → Traité au tableau

Retour sur le pb de l'assurance

- Reprenons le problème de l'assurance vu en section 1.4. en supposant désormais que les préférences de l'assuré ne sont plus représentées par l'espérance mathématique mais par une fonction de Markowitz linéaire
  - Nous avions du côté du particulier la loterie suivante :

$$W = \begin{cases} \omega + (1-\beta)z & \omega + v - \beta z \\ p & 1-p \end{cases}$$

  - Nous avions calculé son espérance :

$$E(W) = \omega + (1-p)v + (p-\beta)z$$

  - Calculons maintenant sa variance pour introduire le risque :

$$V(W) = E\left[\left(W - E(W)\right)^2\right]$$
$$= p[\omega + (1-\beta)z - (\omega + (1-p)v + (p-\beta)z)]^2$$
$$+ (1-p)[\omega + v - \beta z - (\omega + (1-p)v + (p-\beta)z)]^2$$

→ $V(W) = p(1-p)(v-z)^2$ (admis)

Étude de la variance (i.e. du risque)

$$V(W) = p(1-p)(v-z)^2$$

- Le risque est croissant avec l'écart entre la valeur du bien v et le montant remboursé z en cas de sinistre → moins on s'assure, plus la variance est forte
- Le risque varie également avec la probabilité de sinistre p
  - $p(1-p)$ minimale en $p = 0$ (sinistre impossible) et $p = 1$ (sinistre certain)
  - $p(1-p)$ maximale en $p = \frac{1}{2}$, c'est donc lorsque le sinistre a autant de chances de survenir que de ne pas survenir que le risque est le plus fort
  - $p(1-p)$ peut être interprété comme un indicateur d'incertitude sur les états de la nature

Pb assuré avec utilité Markowitz (1)

$$\max_{z} U(W) = E(W) - kV(W)$$
$$= \omega + (1-p)v + (p-\beta)z - kp(1-p)(v-z)^2$$
$$s.c.\ 0 \leq z \leq v$$

- Nous écartons le cas où la probabilité de sinistre p est nulle ou égale à 1 : dans ce cas il n'y a plus d'incertitude et le choix devient trivial

→ Nous supposons donc que : $0 < p < 1$

- De même, nous avons vu en section 1.4. qu'il est peu vraisemblable de supposer que l'assureur demande une prime d'assurance βz inférieure à l'espérance de l'indemnité pz (ce ne serait pas rentable pour lui)

→ Nous supposons que : $p < \beta$

Pb assuré avec utilité Markowitz (2)

- Enfin, l'assureur ne peut pas demander une prime βz supérieure ou même égale à la somme z qu'il s'engage à verser à l'assuré en cas de sinistre (aucun assuré n'accepterait de s'assurer dans ce cas !)

→ Nous supposons donc que : $\beta < 1$

- Ainsi, nous avons la contrainte suivante sur les paramètres :

$$\mathbf{0 < \boldsymbol{p} < \boldsymbol{\beta} < 1}$$