

# Chapitre 1

## Choix optimal de portefeuille et modèle d'évaluation des actifs financiers

### 1.1 Le rendement attendu d'un portefeuille

#### 1.1.1 Calculer le rendement d'un portefeuille

Pour trouver un portefeuille optimal, nous avons besoin d'une méthode pour définir un portefeuille et analyser son rendement. Nous pouvons décrire un portefeuille par ses pondérations, c'est-à-dire la fraction de l'investissement total dans le portefeuille détenue dans chaque investissement individuel du portefeuille :

$$\omega_i = \frac{\text{Valeur de l'investissement } i}{\text{Valeur totale du portefeuille}}$$

La somme des pondérations de ces portefeuilles est égale à 1 (c'est-à-dire  $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$ ) afin qu'ils représentent la façon dont nous avons réparti notre argent entre les différents investissements individuels du portefeuille.

Prenons l'exemple d'un portefeuille composé de 200 actions de Dolby Laboratories valant 30\$ par action et de 100 actions de Coca-Cola valant 40\$ par action. La valeur totale du portefeuille est de  $200 \cdot 30 + 100 \cdot 40 = 10000$ \$ et les pondérations  $\omega_D$  et  $\omega_C$  correspondantes sont les suivantes

$$\omega_D = \frac{200 \cdot 30}{10000} = 60\% \quad \omega_C = \frac{100 \cdot 40}{10000} = 40\%$$

Étant donné les pondérations du portefeuille, nous pouvons calculer le rendement du portefeuille.

Supposons que  $\omega_1, \dots, \omega_N$  soient les pondérations des  $N$  investissements d'un portefeuille, et que ces investissements aient des rendements  $r_1, \dots, r_N$

Le rendement du portefeuille,  $r_p$ , est alors la moyenne pondérée des rendements des investissements du portefeuille, où les poids correspondent aux poids du portefeuille :

$$r_p = \omega_1 \cdot r_1 + \omega_2 \cdot r_2 + \dots + \omega_N \cdot r_N = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot r_i$$

Le rendement d'un portefeuille est facile à calculer si l'on connaît les rendements des actions individuelles et les pondérations du portefeuille.

Supposons que vous achetiez 200 actions de Dolby Laboratories à 30\$ l'action et 100 actions de Coca-Cola à 40\$ l'action. Si le cours de l'action de Dolby passe à 36\$ et celui de Coca-Cola à 38\$, quelle est la nouvelle valeur du portefeuille et quel est le rendement obtenu ? portefeuille et quel est son rendement ?

Après le changement de prix, quelles sont les nouvelles pondérations du portefeuille ?

La nouvelle valeur du portefeuille est de  $200 \cdot 36 + 100 \cdot 38 = 11000\$$ , soit un gain de 1 000\$ ou un rendement de 10% sur votre investissement de 10 000\$. Le rendement de Dolby était de  $\frac{36}{30} - 1 = 20\%$ , et celui de Coca-Cola de  $\frac{38}{40} - 1 = 5\%$

Compte tenu des pondérations initiales du portefeuille (60% Dolby's et 40% Coca-Cola), nous pouvons également calculer le rendement du portefeuille :

$$r_p = \omega_1 \cdot r_1 + \omega_2 \cdot r_2 + \dots + \omega_N \cdot r_N = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot r_i$$

$$r_p = \omega_D \cdot r_D + \omega_C \cdot r_C$$

$$r_p = 60 \cdot 20 + 40 \cdot (-5) = 10\%$$

Après le changement de prix, les nouvelles pondérations du portefeuille sont :

$$\omega_D = \frac{200 \cdot 36}{11000} = 65,45\% \quad \omega_C = \frac{100 \cdot 38}{11000} = 34,55\%$$

En l'absence de négociation, les pondérations augmentent pour les actions dont le rendement est supérieur à celui du portefeuille.

En se basant sur le fait que l'espérance d'une somme est juste la somme des espérances et que l'espérance d'un multiple connu est juste le multiple de son espérance, on obtient la formule suivante pour le rendement attendu d'un portefeuille :

$$\mathbb{E}(r_p) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \cdot r_i\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\omega_i \cdot r_i) = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \mathbb{E}(r_i)$$

En d'autres termes, le rendement attendu d'un portefeuille est simplement la moyenne pondérée des rendements attendus des investissements qui le composent, en utilisant les pondérations du portefeuille.

Supposons que vous investissiez 10 000\$ dans des actions Ford et 30 000\$ dans des actions Tyco International. Vous prévoyez un rendement de 10% pour Ford et de 16% pour Tyco. Quel est le rendement attendu de votre portefeuille ?

Vous avez investi 40 000\$ au total, de sorte que les pondérations de votre portefeuille sont les suivantes :  $10\,000/40\,000 = 25\%$  dans Ford et  $30\,000/40\,000 = 75\%$  dans Tyco.

Par conséquent, le rendement attendu de votre portefeuille est de :

$$\mathbb{E}(r_p) = \omega_F \cdot \mathbb{E}(r_F) + \omega_T \cdot \mathbb{E}(r_T)$$

$$\mathbb{E}(r_p) = 25 \cdot 10 + 75 \cdot 16 = 14,5\%$$

### 1.1.2 La volatilité d'un portefeuille à deux actions

La combinaison d'actions dans un portefeuille élimine une partie de leur risque grâce à la diversification. La part de risque qui subsiste dépend du degré d'exposition des actions à des risques communs. Commençons par un exemple simple de l'évolution du risque lorsque des actions sont combinées dans un portefeuille.

Le tableau 11.1 présente les rendements de trois actions hypothétiques, ainsi que leurs rendements et volatilités moyens, moyennes et leurs volatilités.

Year	Stock Returns			Portfolio Returns	
	North Air	West Air	Tex Oil	$1/2R_N + 1/2R_W$	$1/2R_W + 1/2R_T$
2010	21%	9%	-2%	15.0%	3.5%
2011	30%	21%	-5%	25.5%	8.0%
2012	7%	7%	9%	7.0%	8.0%
2013	-5%	-2%	21%	-3.5%	9.5%
2014	-2%	-5%	30%	-3.5%	12.5%
2015	9%	30%	7%	19.5%	18.5%
Average Return	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%
Volatility	13.4%	13.4%	13.4%	12.1%	5.1%

Alors que les trois actions ont la même volatilité et le même rendement moyen, la structure de leurs rendements diffère. Lorsque les actions des compagnies aériennes se sont bien comportées, les actions pétrolières ont eu tendance à mal se comporter (voir 2010-2011), et

lorsque les compagnies aériennes se sont mal comportées, les actions pétrolières ont eu tendance à bien se comporter (2013-2014). Le tableau 11.1 présente les rendements de deux portefeuilles d'actions

Le premier portefeuille se compose d'investissements égaux dans les deux compagnies aériennes, North Air et West Air. Le second portefeuille comprend des investissements égaux dans West Air et Tex Oil.

Le rendement moyen des deux portefeuilles est égal au rendement moyen des actions. Cependant, leurs volatilités (12,1% et 5,1%) sont très différentes de celles des actions individuelles et les unes des autres.

Cet exemple illustre deux phénomènes importants.

En combinant des actions dans un portefeuille, nous réduisons le risque grâce à la diversification. Comme les prix des actions n'évoluent pas de la même manière, une partie du risque est répartie dans un portefeuille. Par conséquent, les deux portefeuilles présentent un risque plus faible que les actions individuelles.

Le degré de risque éliminé dans un portefeuille dépend de la mesure dans laquelle les actions sont confrontées à des risques communs et leurs prix évoluent ensemble.

Étant donné que les deux titres de compagnies aériennes ont tendance à être performants ou médiocres en même temps, le portefeuille de titres de compagnies aériennes a une volatilité qui n'est que légèrement inférieure à celle des titres individuels.

En revanche, les actions des compagnies aériennes et des compagnies pétrolières n'évoluent pas ensemble ; elles ont même tendance à évoluer dans des directions opposées. Par conséquent, le risque supplémentaire est annulé, ce qui rend le portefeuille beaucoup moins risqué. Cet avantage de la diversification est obtenu sans coût et sans réduction du rendement moyen.

### 1.1.3 Détermination de la covariance et de la corrélation

Pour déterminer le risque d'un portefeuille, il ne suffit pas de connaître le risque et le rendement des actions qui le composent : il faut savoir dans quelle mesure les actions sont confrontées à des risques communs et leurs rendements évoluent ensemble.

Nous introduisons deux mesures statistiques, la covariance et la corrélation, qui nous permettent de mesurer la co-mouvement des rendements entre  $r_i$  et  $r_j$  :

$$\text{cov} = \sigma_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)(r_{j,t} - \mu_j)$$

La covariance entre  $r_i$  et  $r_i$  écrit  $\sigma_{i,i}$  est la variance de  $r_i$  ( $\sigma_i^2$ ) car :

$$\sigma_{i,i} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)(r_{i,t} - \mu_i)$$

$$\sigma_{i,i} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)^2$$

Considérons la covariance entre  $r_i$  et  $r_j$  :

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)(r_{j,t} - \mu_j)$$

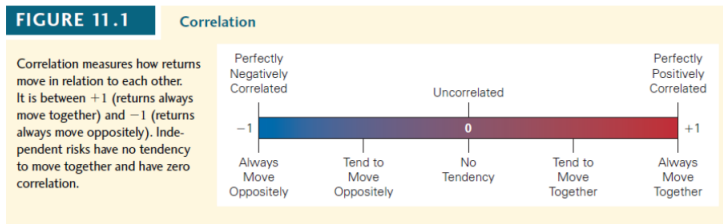
Intuitivement, si deux actions évoluent ensemble, leurs rendements auront tendance à être supérieurs ou inférieurs à la moyenne au même moment, et la covariance sera positive.

Si les actions évoluent dans des directions opposées, l'une aura tendance à être supérieure à la moyenne lorsque l'autre est inférieure à la moyenne, et la covariance sera négative.

Si le signe de la covariance est facile à interpréter, son ampleur ne l'est pas. Elle sera plus importante si les actions sont plus volatiles (et présentent donc des écarts plus importants par rapport à leurs rendements attendus), et elle sera d'autant plus importante que les actions évoluent de manière très proche les unes des autres.

Afin de contrôler la volatilité de chaque action et de quantifier la force de la relation entre elles, nous pouvons calculer la corrélation entre les rendements de deux actions, définie comme la covariance des rendements divisée par l'écart-type de chaque rendement :

$$\rho_{i,j} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)(r_{j,t} - \mu_j)}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_{j,t} - \mu_j)^2}} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j}$$



La corrélation entre deux actions a le même signe que leur covariance, elle a donc une interprétation similaire.

En divisant par les volatilités, la corrélation

est toujours comprise entre -1 et +1, ce qui nous permet d'évaluer la force de la relation entre les actions.

Comme le montre la figure 11.1, la corrélation est un baromètre de la mesure dans laquelle les rendements partagent un risque commun et ont tendance à évoluer ensemble.

Plus la corrélation est proche de +1, plus les rendements ont tendance à évoluer ensemble en raison d'un risque commun. Lorsque la corrélation (et donc la covariance) est égale à 0, les rendements ne sont pas corrélés, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas tendance à évoluer ensemble ou à l'opposé l'un de l'autre.

Les risques indépendants ne sont pas corrélés.

Enfin, plus la corrélation est proche de -1, plus les rendements ont tendance à évoluer en sens inverse.

### 1.1.4 Calcul de la variance et de la volatilité d'un portefeuille

Ecrivons la matrice de variance-covariance du portefeuille  $p$  avec  $N$  actions comme  $\Omega_p$  tel que :

$$\Omega_p = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,j} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{i,1} & \cdots & \sigma_i^2 & \cdots & \sigma_{i,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N,1} & \cdots & \sigma_{N,j} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_p = (\omega_1, \cdots, \omega_i, \cdots, \omega_N) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,j} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{i,1} & \cdots & \sigma_i^2 & \cdots & \sigma_{i,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N,1} & \cdots & \sigma_{N,j} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \cdots \\ \omega_i \\ \cdots \\ \omega_N \end{pmatrix}$$

$$\sigma_p^2 = \omega^T \Omega \omega = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}$$

Considérons la variance d'un portefeuille de deux actions :

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{1,2} \quad \omega_2 = 1 - \omega_1$$

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1(1 - \omega_1) \sigma_1 \sigma_2 \rho_{1,2}$$

**TABLE 11.1** Returns for Three Stocks, and Portfolios of Pairs of Stocks

Year	Stock Returns			Portfolio Returns	
	North Air	West Air	Tex Oil	$1/2R_N + 1/2R_W$	$1/2R_W + 1/2R_T$
2010	21%	9%	-2%	15.0%	3.5%
2011	30%	21%	-5%	25.5%	8.0%
2012	7%	7%	9%	7.0%	8.0%
2013	-5%	-2%	21%	-3.5%	9.5%
2014	-2%	-5%	30%	-3.5%	12.5%
2015	9%	30%	7%	19.5%	18.5%
Average Return	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%
Volatility	13.4%	13.4%	13.4%	12.1%	5.1%

Comme toujours, la volatilité est la racine carrée de la variance. Vérifions cette formule pour les actions des compagnies aériennes et pétrolières du tableau 11.1. Considérons le portefeuille contenant les actions de West Air et Tex Oil. La va-

riance de chaque action est égale au carré de sa volatilité, soit  $(0,134)^2 = 0,018$ . Supposons que la covariance entre les actions soit de -0,0128. Par conséquent, la variance d'un portefeuille investi à 50% dans chaque action est de :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,018 + \frac{1}{2} \cdot 0,018 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-0,0128) = 0,0026$$

La volatilité du portefeuille est de  $\sqrt{0,0026} = 5,1\%$ , ce qui correspond au calcul du tableau 11.1.

Pour les portefeuilles North Air et West Air, le calcul est le même, à l'exception de la covariance plus élevée des actions (0,0112), ce qui se traduit par une volatilité plus élevée (12,1%).

### La volatilité d'un grand portefeuille

Nous pouvons obtenir des avantages supplémentaires de la diversification en détenant plus de deux actions dans notre portefeuille. Bien qu'il soit préférable d'effectuer ces calculs à l'aide d'un ordinateur, leur compréhension permet d'obtenir une intuition importante concernant le degré de diversification possible si nous détenons de nombreuses actions. Rappelons que le rendement d'un portefeuille de  $N$  actions est simplement la moyenne pondérée des rendements des actions du portefeuille où :

$$r_{i,t} = \frac{[P_{i,t} - P_{i,t-1}] + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}$$

et  $P_{i,t}$  est le prix de l'actif  $i$ ,  $D_{i,t}$  est le dividende de l'actif  $i$  à l'instant  $t$  alors :

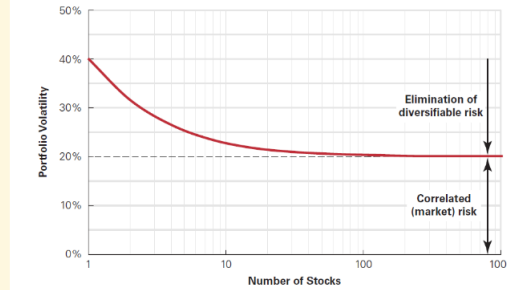
$$r_{p,t} = \sum_{i=1}^N \omega_{i,t} r_{i,t}$$

### Volatilité et diversification

FIGURE 11.2

**Volatility of an Equally Weighted Portfolio Versus the Number of Stocks**

The volatility declines as the number of stocks in the portfolio increases. Even in a very large portfolio, however, market risk remains.



La volatilité diminue au fur et à mesure que le nombre d'actions dans le portefeuille augmente. En fait, près de la moitié de la volatilité des actions individuelles est éliminée dans un grand portefeuille grâce à la diversification.

L'avantage de la diversification est le plus spectaculaire au début : La diminution de la volatilité lorsque l'on passe d'une à deux actions est beaucoup plus importante que la diminution lorsque l'on passe de 100 à 101 actions (en effet, la quasi-totalité des avantages de la diversification peut être obtenue avec une trentaine d'actions). Toutefois, même pour un portefeuille très important, il n'est pas possible d'éliminer tous les risques.

## 1.2 Le portefeuille efficient

Considérons un portefeuille d'actions Intel et Coca-Cola. Supposons qu'un investisseur pense que ces actions ne sont pas corrélées et qu'elles se comporteront comme suit :

Action	Rendement attendu	Volatilité
Intel ( $I$ )	26%	50%
Coca-Cola ( $CC$ )	6%	25%

Comment l'investisseur doit-il choisir un portefeuille composé de ces deux titres ? Certains portefeuilles sont-ils préférables à d'autres ?

Calculons le rendement attendu et la volatilité pour différentes combinaisons d'actions. Considérons un portefeuille composé à 40 % d'actions Intel et à 60 % d'actions Coca-Cola. Nous pouvons calculer le rendement attendu à partir de l'équation :

$$\mathbb{E}(r_p) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \cdot r_i\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\omega_i \cdot r_i) = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \mathbb{E}(r_i)$$

$$\mathbb{E}(r_p) = \omega_I \cdot \mathbb{E}(r_I) + \omega_{CC} \cdot \mathbb{E}(r_{CC})$$

$$\mathbb{E}(r_p) = 40 \cdot 26 + 60 \cdot 6 = 14\%$$



Supposons qu'un investisseur pense que ces actions ne sont pas corrélées. Nous pouvons calculer la variance à l'aide de l'équation suivante

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1(1 - \omega_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}$$

$$\sigma_p^2 = 40^2 \cdot 50^2 + (1 - 40)^2 \cdot 25^2 + 2 \cdot 40(1 - 40) \cdot 50 \cdot 25 \cdot 0 = 0,0625$$

Sur la base de ce résultat, la volatilité mesurée par l'écart-type est la racine carrée de la variance :  $\sqrt{0,0625} = 25\%$ .

Grâce à la diversification, il est possible de trouver un portefeuille dont la volatilité est encore plus faible que celle de l'une ou l'autre action. En investissant 20 % dans l'action Intel et 80 % dans l'action Coca-Cola, par exemple, la volatilité n'est que de 22,4 %. Mais sachant que les investisseurs s'intéressent à la volatilité et au rendement attendu, nous devons considérer les deux simultanément. Pour ce faire, nous représentons graphiquement la volatilité et le rendement attendu de chaque portefeuille.

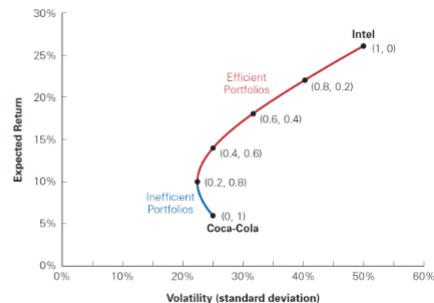
Intel	Coca-Cola	Rendement attendu	Volatilité
$\omega_I$	$\omega_{CC}$	$\mathbb{E}(r_p)$	$\sigma_p$
100%	0%	26%	50%
80%	20%	22%	40,3%
60%	40%	18%	31,6%
40%	60%	14%	25%
20%	80%	10%	22,4%
0%	100%	6%	25%

Supposons que l'investisseur envisage d'investir à 100 % dans l'action Coca-Cola. D'autres portefeuilles, tels que le portefeuille composé de 20 % d'actions Intel et de 80 % d'actions Coca-Cola, sont plus avantageux pour l'investisseur sur les deux plans : Le rendement attendu est plus élevé et la volatilité est plus faible. Par conséquent, investir uniquement dans l'action Coca-Cola n'est pas une bonne idée.

FIGURE 11.3

#### Volatility Versus Expected Return for Portfolios of Intel and Coca-Cola Stock

Labels indicate portfolio weights ( $x_I, x_C$ ) for Intel and Coca-Cola stocks. Portfolios on the red portion of the curve, with at least 20% invested in Intel stock, are efficient. Those on the blue portion of the curve, with less than 20% invested in Intel stock, are inefficient—an investor can earn a higher expected return with lower risk by choosing an alternative portfolio.



Nous disons qu'un portefeuille est inefficace lorsqu'il est possible d'en trouver un autre qui soit meilleur en termes de rendement attendu et de volatilité. Si l'on regarde la figure 11.3, un portefeuille est inefficace s'il existe d'autres portefeuilles au-dessus et à gauche (c'est-à-dire au nord-ouest) de celui-ci.

Investir uniquement dans l'action Coca-Cola est inefficace, et il en va de même pour tous les portefeuilles dont l'action Coca-Cola représente plus de 80 % (partie bleue de la courbe). Les portefeuilles inefficaces ne sont pas optimaux pour un investisseur qui recherche des rendements élevés et une faible volatilité.

En revanche, les portefeuilles contenant au moins 20 % d'actions Intel sont efficaces (partie rouge de la courbe) : Il n'y a pas d'autre portefeuille composé des deux actions qui offre un rendement attendu plus élevé avec une volatilité plus faible. Mais si nous pouvons exclure les portefeuilles inefficaces en tant que choix d'investissement inférieurs, nous ne pouvons pas facilement classer les portefeuilles efficaces : les investisseurs choisiront parmi eux en fonction de leurs propres préférences en matière de rendement par rapport au risque. Un investisseur extrêmement conservateur qui se soucie uniquement de minimiser le risque choisira le portefeuille à la volatilité la plus faible (20 % Intel, 80 % Coca-Cola). Un investisseur agressif pourrait choisir d'investir à 100 % dans l'action Intel (même si cette approche est plus risquée, l'investisseur peut être prêt à prendre ce risque pour obtenir un rendement attendu plus élevé).

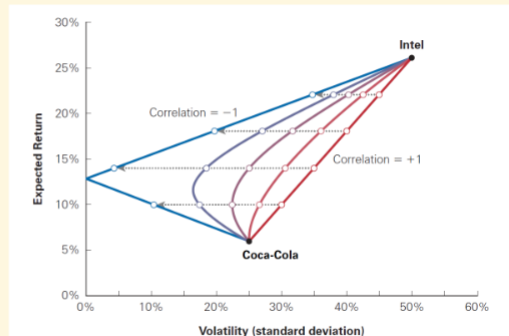
### 1.2.1 L'effet de corrélation

Dans la figure 11.3, nous avons supposé que les rendements des actions Intel et Coca-Cola n'étaient pas corrélés. Examinons comment les combinaisons de risque et de rendement changeraient si les corrélations étaient différentes. La corrélation n'a aucun effet sur le rendement attendu d'un portefeuille. Par exemple, un portefeuille 40-60 aura toujours un rendement attendu de 14 %. Cependant, la volatilité du portefeuille diffère en fonction de la corrélation. En particulier, plus la corrélation est faible, plus la volatilité est faible. Si l'on se réfère à la figure 11.3, plus la corrélation et donc la volatilité des portefeuilles sont faibles, plus la courbe représentant les portefeuilles s'infléchit vers la gauche, comme l'illustre la figure 11.4.

**FIGURE 11.4**

**Effect on Volatility and Expected Return of Changing the Correlation between Intel and Coca-Cola Stock**

This figure illustrates correlations of 1, 0.5, 0, -0.5 and -1. The lower the correlation, the lower the risk of the portfolios.



Lorsque les actions sont parfaitement corrélées positivement, on peut identifier l'ensemble des portefeuilles par la ligne droite qui les sépare. Dans ce cas extrême (la ligne rouge de la figure 11.4), la volatilité du portefeuille est égale à la volatilité moyenne pondérée des deux actions (il

n'y a pas de diversification). En revanche, lorsque la corrélation est inférieure à 1, la volatilité des portefeuilles est réduite du fait de la diversification et la courbe s'infléchit vers la gauche. La réduction du risque (et l'inflexion de la courbe) s'accroît à mesure que la corrélation diminue. À l'autre extrême de la corrélation négative parfaite (ligne bleue), la ligne redevient droite, mais cette fois, elle se refléchit sur l'axe vertical. En particulier, lorsque les deux actions sont parfaitement corrélées négativement, il devient possible de détenir un portefeuille qui ne comporte absolument aucun risque.

### 1.2.2 Retour Attendu et Volatilité avec une Vente à Découvert : problème

#### Effet de la Vente à Découvert

Nous avons considéré uniquement des portefeuilles dans lesquels nous investissons un montant positif dans chaque action. Nous faisons référence à un investissement positif dans un titre comme une position longue dans le titre.

Cependant, il est également possible d'investir un montant négatif dans une action, appelé position courte, en engageant une vente à découvert. Cela consiste en une transaction dans laquelle vous vendez une action aujourd'hui que vous ne possédez pas, avec l'obligation de la racheter à l'avenir.

Comme le démontre l'exemple suivant, nous pouvons inclure une position courte comme partie d'un portefeuille en attribuant à cette action un poids de portefeuille négatif.

Supposons que vous ayez 20 000 \$ en espèces à investir. Vous décidez de vendre à découvert pour un montant de 10 000 \$ d'actions Coca-Cola et d'investir les produits de votre vente à découvert, ainsi que vos 20 000 \$, dans Intel.

Quelle est alors le retour attendu et la volatilité de votre portefeuille ? Nous pouvons considérer notre vente à découvert comme un investissement négatif de -10 000 \$ dans les actions de Coca-Cola. De plus, nous avons investi 30 000 \$

dans les actions d'Intel, pour un investissement net total de 30 000 \$ - 10 000 \$ = 20 000 \$ en espèces.

Les poids de portefeuille correspondants sont les suivants :

$$\omega_I = \frac{\text{valeur de l'investissement dans Intel}}{\text{valeur totale du portefeuille}} = \frac{30000}{20000} = 150\%$$

$$\omega_{CC} = \frac{\text{valeur de l'investissement dans Coca-Cola}}{\text{valeur totale du portefeuille}} = \frac{-10000}{20000} = -50\%$$

Notez que les poids du portefeuille s'additionnent toujours à 100%.

En utilisant ces poids de portefeuille, nous pouvons calculer le retour attendu et la volatilité du portefeuille comme suit :

$$\mathbb{E}(r_p) = \omega_I \cdot \mathbb{E}(r_I) + \omega_{CC} \cdot \mathbb{E}(r_{CC})$$

$$\mathbb{E}(r_p) = 150\% \cdot 26\% - 50\% \cdot 6\% = 36\%$$

La variance du portefeuille est donnée par :

$$\sigma_p^2 = \omega_I^2 \sigma_I^2 + (1 - \omega_I)^2 \sigma_{CC}^2 + 2\omega_I(1 - \omega_I)\sigma_I\sigma_{CC}\rho_{I,CC}$$

La volatilité du portefeuille est alors calculée comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{150\%^2 \cdot 50\%^2 + (1 - 150\%)^2 \cdot 25\%^2 + 2 \cdot 150\% \cdot (1 - 150\%) \cdot 50\% \cdot 25\% \cdot 0} \\ &= 76\%\end{aligned}$$

Notez que dans ce cas, la vente à découvert augmente le retour attendu de votre portefeuille, mais également sa volatilité, au-delà de celle des actions individuelles.

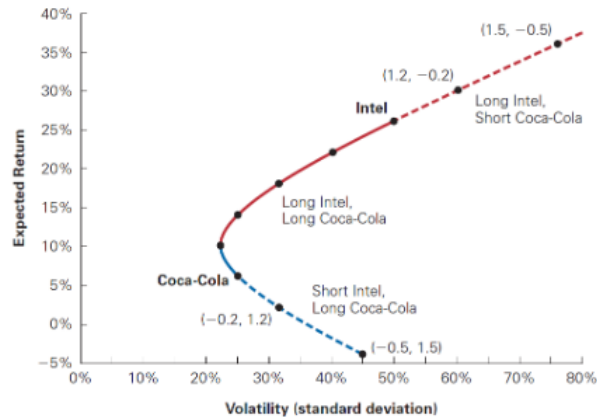
Rappelons que la vente à découvert est rentable si vous vous attendez à ce que le prix d'une action diminue à l'avenir.

Il est important de noter que lorsque vous empruntez une action pour la vendre à découvert, vous êtes obligé de l'acheter et de la retourner à l'avenir. Ainsi, lorsque le prix de l'action diminue, vous recevez plus au départ pour les actions que le coût de remplacement à l'avenir.

Cependant, comme le montre l'exemple précédent, la vente à découvert peut être avantageuse même si vous vous attendez à ce que le prix de l'action augmente, tant que vous investissez les produits dans une autre action avec un retour attendu encore plus élevé. Cela dit, comme l'exemple le montre également, la vente à découvert peut considérablement augmenter le risque du portefeuille.

**FIGURE 11.5****Portfolios of Intel and Coca-Cola Allowing for Short Sales**

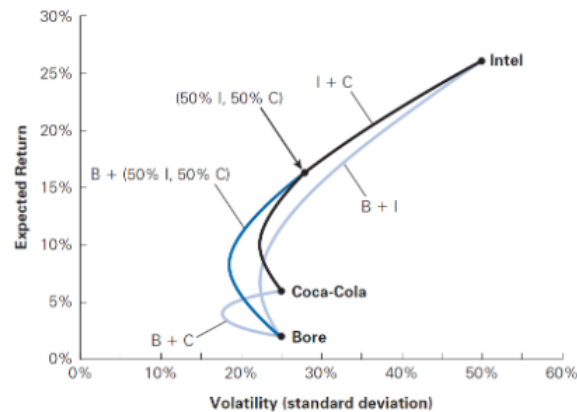
Labels indicate portfolio weights ( $X_I, X_C$ ) for Intel and Coca-Cola stocks. Red indicates efficient portfolios, blue indicates inefficient portfolios. The dashed curves indicate positions that require shorting either Coca-Cola (red) or Intel (blue). Shorting Intel to invest in Coca-Cola is inefficient. Shorting Coca-Cola to invest in Intel is efficient and might be attractive to an aggressive investor who is seeking high expected returns.

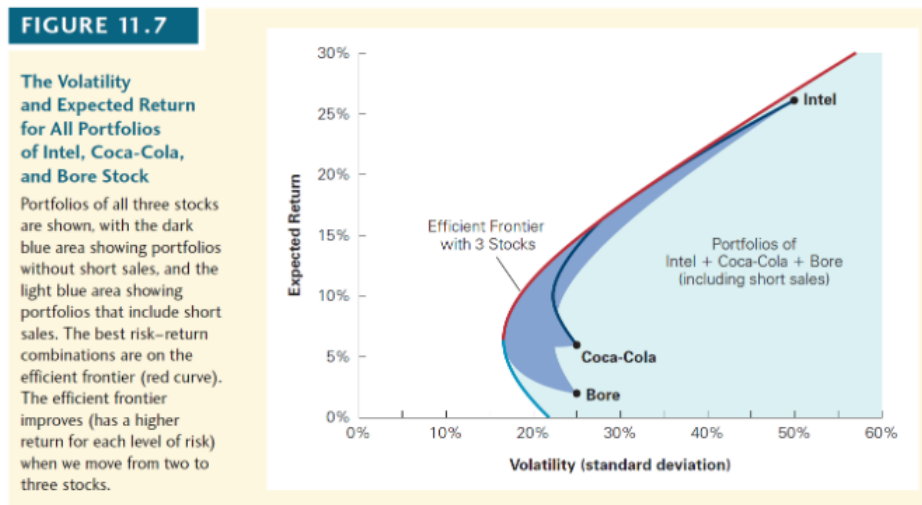


### 1.2.3 Portefeuilles efficaces avec de nombreux titres

**FIGURE 11.6****Expected Return and Volatility for Selected Portfolios of Intel, Coca-Cola, and Bore Industries Stocks**

By combining Bore (B) with Intel (I), Coca-Cola (C), and portfolios of Intel and Coca-Cola, we introduce new risk and return possibilities. We can also do better than with just Coca-Cola and Intel alone (the black curve). Portfolios of Bore and Coca-Cola (B + C) and Bore and Intel (B + I) are shown in light blue in the figure. The dark blue curve is a combination of Bore with a portfolio of Intel and Coca-Cola.





### Diversification avec $N$ actions

Ajouter davantage d'actions à un portefeuille réduit le risque grâce à la diversification.

Considérons l'effet d'ajouter à notre portefeuille une troisième action, Bore Industries, qui est non corrélée avec Intel et Coca-Cola, mais qui devrait avoir un retour très faible de 2% et la même volatilité que Coca-Cola (25%).

La figure 11.6 illustre les portefeuilles que nous pouvons construire en utilisant ces trois actions. Étant donné que l'action Bore est inférieure à l'action Coca-Cola (elle a la même volatilité mais un retour plus faible), on pourrait supposer qu'aucun investisseur ne voudrait détenir une position longue dans Bore.

Cependant, cette conclusion ignore les opportunités de diversification que Bore offre.

La figure 11.6 montre les résultats de la combinaison de Bore avec Coca-Cola ou avec Intel (courbes bleu clair), ou de la combinaison de Bore avec un portefeuille 50-50 de Coca-Cola et Intel (courbe bleu foncé).

Remarquez que certains des portefeuilles obtenus en combinant uniquement Intel et Coca-Cola (courbe noire) sont inférieurs à ces nouvelles possibilités.

Lorsque nous combinons l'action Bore avec chaque portefeuille d'Intel et de Coca-Cola, et que nous permettons également des ventes à découvert, nous obtenons une région entière de possibilités de risque et de retour plutôt qu'une simple courbe.

Cette région est montrée dans la zone ombragée de la figure 11.7. Mais notez que la plupart de ces portefeuilles sont inefficaces.

Les portefeuilles efficaces (ceux offrant le retour attendu le plus élevé pour un niveau de volatilité donné) sont ceux situés sur le bord nord-ouest de la région

ombragée, que nous appelons la frontière efficace pour ces trois actions.

Dans ce cas, aucune des actions, prise seule, ne se trouve sur la frontière efficace, il ne serait donc pas efficace de placer tout notre argent dans une seule action.

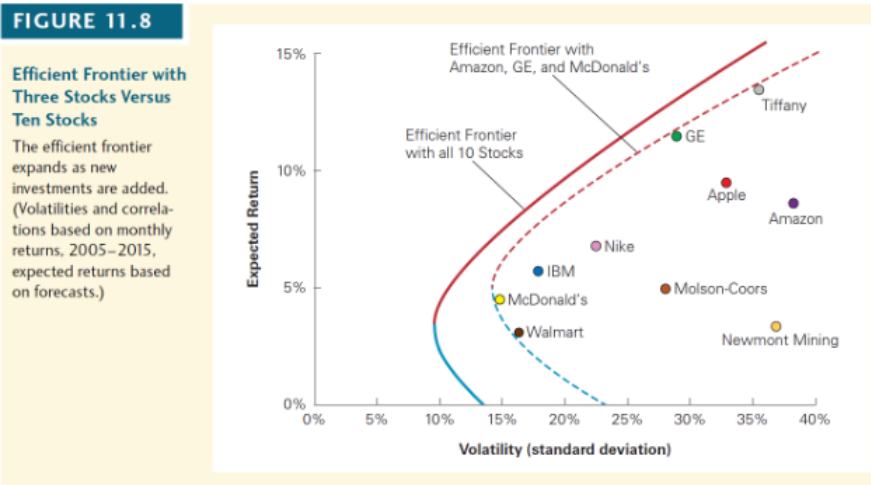
Lorsque l'ensemble des opportunités d'investissement passe de deux à trois actions, la frontière efficace s'améliore.

Visuellement, l'ancienne frontière avec deux actions se situe à l'intérieur de la nouvelle frontière. En général, l'ajout de nouvelles opportunités d'investissement permet une plus grande diversification et améliore la frontière efficace. La figure 11.8 (diapositive suivante) utilise des données historiques pour montrer l'effet de l'augmentation de l'ensemble de trois actions (Amazon, GE et McDonald's) à dix actions.

Bien que les actions ajoutées semblent offrir des combinaisons risque-retour inférieures prises individuellement, leur inclusion permet une diversification supplémentaire, ce qui améliore la frontière efficace.

Ainsi, pour arriver au meilleur ensemble possible d'opportunités de risque et de retour, nous devrions continuer à ajouter des actions jusqu'à ce que toutes les opportunités d'investissement soient représentées.

En fin de compte, sur la base de nos estimations de rendements, de volatilités et de corrélations, nous pouvons construire la frontière efficace pour tous les investissements risqués disponibles, montrant les meilleures combinaisons possibles de risque et de retour que nous pouvons obtenir par une diversification optimale.



## 1.2.4 Épargne et emprunt sans risque

### Introduction de l'actif sans risque appelé $r_f$

Nous avons considéré les possibilités de risque et de retour qui résultent de la combinaison d'investissements risqués dans des portefeuilles. En incluant tous les investissements risqués dans la construction de la frontière efficace, nous atteignons une diversification maximale.

Il existe une autre méthode, en plus de la diversification, pour réduire le risque que nous n'avons pas encore examinée : nous pouvons conserver une partie de notre argent dans un investissement sûr, sans risque, comme les bons du Trésor. Bien sûr, cela réduira notre retour attendu.

Inversement, si nous sommes un investisseur agressif à la recherche de rendements élevés, nous pourrions décider d'emprunter de l'argent pour investir encore plus sur le marché boursier.

Dans cette section, nous verrons que la capacité de choisir le montant à investir dans des titres risqués par rapport aux titres sans risque nous permet de déterminer le portefeuille optimal de titres risqués pour un investisseur. Considérons un portefeuille risqué arbitraire avec des rendements  $r_p$ . Examinons l'effet sur le risque et le rendement de placer une fraction  $\omega$  de notre argent dans le portefeuille  $p$ , tout en laissant la fraction restante  $(1 - \omega)$  dans des bons du Trésor sans risque avec un rendement  $r_f$ . Le portefeuille qui comprend  $p$  et  $r_f$  est appelé  $\psi$ .

En utilisant nos équations précédentes, nous calculons le rendement attendu et la variance de ce portefeuille.

$$\mathbb{E}(r_\psi) = \omega \cdot \mathbb{E}(r_p) + (1 - \omega) \cdot r_f$$

$$\mathbb{E}(r_\psi) = \omega \cdot \mathbb{E}(r_p) + r_f - \omega \cdot r_f$$

$$\mathbb{E}(r_\psi) = r_f + \omega \cdot (\mathbb{E}(r_p) - r_f)$$

La première équation indique simplement que le rendement attendu est la moyenne pondérée des rendements attendus des bons du Trésor et du portefeuille. Comme nous connaissons à l'avance le taux d'intérêt actuel payé sur les bons du Trésor, nous n'avons pas besoin de calculer un rendement attendu pour eux.

La deuxième équation réorganise la première pour donner une interprétation utile : notre rendement attendu est égal au taux sans risque plus une fraction de la prime de risque du portefeuille,  $\mathbb{E}(r_p) - r_f$ , en fonction de la fraction  $\omega$  que nous investissons dans celui-ci.

Ensuite, calculons la volatilité. Étant donné que le taux sans risque  $r_f$  est fixe et ne varie pas avec (ou contre) notre portefeuille, sa volatilité et sa covariance avec le portefeuille sont toutes deux nulles.



$$\sigma_{\psi} = \sqrt{(1 - \omega)^2 \cdot \sigma_{r_f}^2 + \omega^2 \cdot \sigma_{r_p}^2 + 2 \cdot (1 - \omega) \cdot \omega \cdot \sigma_{r_f, r_p}}$$

$$\sigma_{\psi} = \sqrt{(1 - \omega)^2 \cdot \sigma_{r_f}^2 + \omega^2 \cdot \sigma_{r_p}^2 + 2 \cdot (1 - \omega) \cdot \omega \cdot \sigma_{r_f, r_p}}$$

Les termes en bleu sont égaux à zéro :

$$\sigma_{\psi} = \sqrt{\omega^2 \cdot \sigma_{r_p}^2}$$

$$\sigma_{\psi} = \omega \cdot \sigma_{r_p}$$

Cela signifie que la volatilité n'est qu'une fraction de la volatilité du portefeuille, en fonction du montant que nous y investissons.

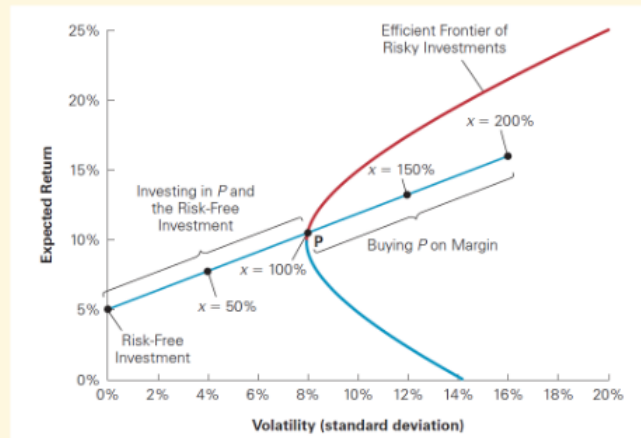
La ligne bleue dans la Figure 11.9 illustre les combinaisons de volatilité et de rendement attendu pour différents choix de  $\omega$ . En regardant l'Équation (23), à mesure que nous augmentons la fraction  $\omega$  investie dans  $p$ , nous augmentons à la fois notre risque et notre prime de risque proportionnellement.

Ainsi, la ligne est droite depuis l'investissement sans risque jusqu'à  $p$ .

**FIGURE 11.9**

**The Risk-Return Combinations from Combining a Risk-Free Investment and a Risky Portfolio**

Given a risk-free rate of 5%, the point with 0% volatility and an expected return of 5% represents the risk-free investment. The blue line shows the portfolios we obtained by investing  $x$  in portfolio  $P$  and  $(1 - x)$  in the risk-free investment. Investments with weight  $(x > 100\%)$  in portfolio  $P$  require borrowing at the risk-free interest rate.



### Emprunter et Acheter des Actions sur Marge

À mesure que nous augmentons la fraction  $\omega$  investie dans le portefeuille  $p$  de 0 à 100%, nous nous déplaçons le long de la ligne dans la Figure 11.9, passant de l'investissement sans risque à  $p$ .

Si nous augmentons  $\omega$  au-delà de 100%, nous obtenons des points au-delà de  $p$  dans le graphique.

Dans ce cas, nous vendons à découvert l'investissement sans risque, donc nous devons payer le rendement sans risque ; en d'autres termes, nous empruntons de l'argent au taux d'intérêt sans risque.

Emprunter de l'argent pour investir dans des actions est appelé acheter des actions sur marge ou utiliser l'effet de levier.

Un portefeuille qui consiste en une position courte dans l'investissement sans risque est connu sous le nom de portefeuille à effet de levier. Comme vous pouvez vous y attendre, l'investissement sur marge est une stratégie d'investissement risquée.

Notez que la région de la ligne bleue dans la Figure 11.9 avec  $\omega > 100\%$  présente un risque plus élevé que le portefeuille  $p$  lui-même. En même temps, l'investissement sur marge peut offrir des rendements attendus plus élevés que l'investissement dans  $p$  en utilisant uniquement les fonds dont nous disposons.

### Investissement sur Marge : problème

Supposons que vous ayez 10 000 \$ en espèces et que vous décidiez d'emprunter un autre 10 000 \$ à un taux d'intérêt de 5% afin d'investir 20 000 \$ dans le portefeuille  $Q$ , qui a un rendement attendu de 10% et une volatilité de 20%.

1. Quel est le rendement attendu et la volatilité de votre investissement ?
2. Quel est votre rendement réalisé si  $Q$  augmente de 30% au cours de l'année ?
3. Que se passe-t-il si  $Q$  diminue de 10% ?

### Investissement sur Marge : solution

1. Vous avez doublé votre investissement dans  $Q$  en utilisant la marge, donc  $\omega = 200\%$ . D'après nos dernières équations, nous voyons que vous avez augmenté à la fois votre rendement attendu et votre risque par rapport au portefeuille  $Q$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(r_\psi) &= r_f + \omega \cdot (\mathbb{E}(r_Q) - r_f) \\ \mathbb{E}(r_\psi) &= 5\% + 200\% \cdot (10\% - 5\%) = 15\% \\ \sigma_\psi &= \omega \cdot \sigma_Q = 200\% \cdot 20\% = 40\%\end{aligned}$$

2. Si  $Q$  augmente de 30%, votre investissement vaudra 26 000 \$, mais vous devrez 10 000 \$  $\cdot (1 + 5\%) = 10\,500$  \$ sur votre prêt, pour un paiement net de 15 500 \$, soit un rendement de 55% sur votre investissement initial de 10 000 \$.
3. Si  $Q$  chute de 10%, il vous reste 18 000 \$ - 10 500 \$ = 7 500 \$, et votre rendement est de -25%.

Ainsi, l'utilisation de la marge a doublé l'étendue de vos rendements ( $55\% - (-25\%) = 80\%$  contre  $30\% - (-10\%) = 40\%$ ), correspondant au doublement de la volatilité du portefeuille.

## 1.3 Portefeuille efficient et rendements requis

### 1.3.1 Identifier le portefeuille tangent

#### Introduction de l'actif sans risque appelé $r_f$

En regardant la Figure 11.9, nous pouvons voir que le portefeuille  $p$  n'est pas le meilleur portefeuille à combiner avec l'investissement sans risque. En combinant l'actif sans risque avec un portefeuille situé un peu plus haut sur la frontière efficace que le portefeuille  $p$ , nous obtiendrons une ligne plus raide que celle passant par  $p$ .

Si la ligne est plus raide, alors pour tout niveau de volatilité, nous obtiendrons un rendement attendu plus élevé. Pour obtenir le rendement attendu le plus élevé possible pour tout niveau de volatilité, nous devons trouver le portefeuille qui génère la ligne la plus raide possible lorsqu'il est combiné avec l'investissement sans risque.

La pente de la ligne passant par un portefeuille donné  $p$  est souvent appelée le ratio de Sharpe du portefeuille. Ce ratio peut être exprimé comme suit :

$$\text{Ratio de Sharpe} = \frac{\text{Rendement Excédentaire du Portefeuille}}{\text{Volatilité du Portefeuille}} = \frac{\mathbb{E}(r_p) - r_f}{\sigma}$$

Le ratio de Sharpe mesure le rapport entre la récompense et la volatilité fourni par un portefeuille. Le portefeuille optimal à combiner avec l'actif sans risque sera celui avec le ratio de Sharpe le plus élevé, où la ligne avec l'investissement sans risque touche juste, et est donc tangente à, la frontière efficace des investissements risqués, comme le montre la Figure 11.10 (diapositive suivante).

Le portefeuille qui génère cette ligne tangente est connu sous le nom de portefeuille tangent. Tous les autres portefeuilles d'actifs risqués se situent en dessous de cette ligne. Étant donné que le portefeuille tangent a le ratio de Sharpe le plus élevé de tous les portefeuilles de l'économie, il offre la plus grande récompense par unité de volatilité de tous les portefeuilles disponibles.

Comme il est évident d'après la Figure 11.10, les combinaisons de l'actif sans risque et du portefeuille tangent fournissent le meilleur compromis risque-rendement disponible pour un investisseur. Cette observation a une conséquence frappante : le portefeuille tangent est efficace et, une fois que nous incluons l'investissement sans risque, tous les portefeuilles efficaces sont des combinaisons de l'investissement sans risque et du portefeuille tangent.

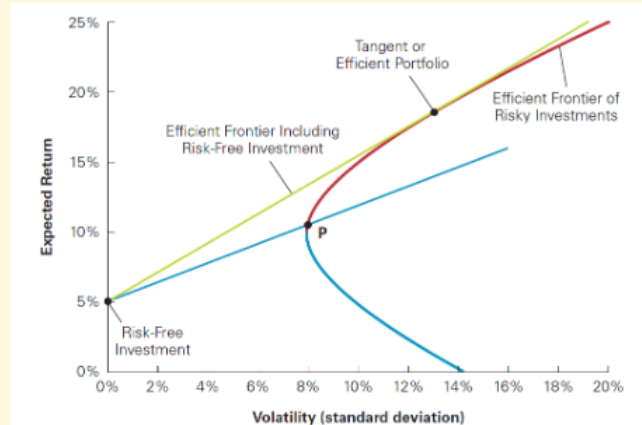
Par conséquent, le portefeuille optimal d'investissements risqués ne dépend plus de la prudence ou de l'agressivité de l'investisseur ; chaque investisseur devrait investir dans le portefeuille tangent, indépendamment de ses préférences en matière de risque. Les préférences de l'investisseur détermineront uniquement combien investir dans le portefeuille tangent par rapport à l'investissement sans risque.

Les investisseurs prudents investiront une petite somme, choisissant un portefeuille sur la ligne près de l'investissement sans risque. Les investisseurs agressifs investiront davantage, choisissant un portefeuille qui est proche du portefeuille tangent ou même au-delà en achetant des actions à crédit. Cependant, les deux types d'investisseurs choisiront de détenir le même portefeuille d'actifs risqués, le portefeuille tangent.

FIGURE 11.10

#### The Tangent or Efficient Portfolio

The tangent portfolio is the portfolio with the highest Sharpe ratio. Investments on the green line connecting the risk-free investment and the tangent portfolio provide the best risk and return trade-off available to an investor. As a result, we also refer to the tangent portfolio as the efficient portfolio.



### 1.3.2 Amélioration du portefeuille : Bêta et rendement requis

#### Introduction de l'actif sans risque appelé $r_f$

Prenons un portefeuille arbitraire  $p$  et considérons si nous pourrions augmenter son ratio de Sharpe en vendant certains de nos actifs sans risque (ou en empruntant de l'argent) et en investissant le produit dans un investissement  $i$ . Si nous faisons cela, il y a deux conséquences.

Tout d'abord, en ce qui concerne le rendement attendu, étant donné que nous renonçons au rendement sans risque et le remplaçons par le rendement de  $i$ , notre rendement attendu augmentera de l'excédent de rendement de  $i$ , soit  $\mathbb{E}(r_i) - r_f$ .

Ensuite, en ce qui concerne la volatilité, nous ajouterons le risque que  $i$  a en commun avec notre portefeuille (le reste du risque de  $i$  sera diversifié). Le risque additionnel est mesuré par la volatilité de  $i$  multipliée par sa corrélation avec  $p$  :

$$\sigma_i \cdot \rho_{i,p}.$$

Il est important de se demander si le gain en rendement provenant de l'investissement dans  $i$  est suffisant pour compenser l'augmentation du risque. Une autre façon d'augmenter notre risque aurait été d'investir davantage dans le portefeuille  $p$  lui-même. Dans ce cas, le ratio de Sharpe de  $p$  calculé comme  $\frac{\mathbb{E}(r_p) - r_f}{\sigma_p}$  nous indique combien le rendement augmenterait pour une augmentation donnée du risque.

Étant donné que l'investissement dans  $i$  augmente le risque de  $\sigma_i \cdot \rho_{i,p}$ , il offre une augmentation de rendement plus importante que ce que nous aurions pu obtenir avec  $p$  seul.

Nous avons la condition suivante :

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f > \sigma_i \cdot \rho_{i,p} \cdot \frac{\mathbb{E}(r_p) - r_f}{\sigma_p}$$

Pour fournir une interprétation supplémentaire de cette condition, combinons les termes de volatilité et de corrélation pour définir le  $\beta$  de l'investissement  $i$  avec le portefeuille  $p$  :

$$\beta_i^p = \frac{\sigma_i \cdot \rho_{i,p}}{\sigma_p}$$

Le  $\beta_i^p$  mesure la sensibilité de l'investissement  $i$  aux fluctuations du portefeuille  $p$ . Autrement dit, pour chaque variation de 1 % du rendement du portefeuille, le rendement de l'investissement  $i$  est censé changer de  $\beta_i^p$  % en raison des risques que  $i$  a en commun avec  $p$ .

Avec cette définition, nous pouvons poser :

$$\mathbb{E}(r_i) = r_f + \beta_i^p \cdot (\mathbb{E}(r_p) - r_f)$$

Cela signifie qu'augmenter le montant investi dans  $i$  augmentera le ratio de Sharpe du portefeuille  $p$  si son rendement attendu  $\mathbb{E}(r_i)$  dépasse son rendement requis compte tenu du portefeuille  $p$ .

Le rendement requis est le rendement attendu nécessaire pour compenser le risque que l'investissement  $i$  contribuera au portefeuille. Le rendement requis pour un investissement  $i$  est égal au taux d'intérêt sans risque plus la prime de risque du portefeuille actuel  $p$ , ajustée par la sensibilité de  $i$  au portefeuille, notée  $\beta_i^p$ .

Si le rendement attendu de  $i$  dépasse ce rendement requis, alors ajouter davantage de cet investissement améliorera la performance du portefeuille.

### 1.3.3 Rendements attendus et portefeuille efficient

#### Problème

Vous êtes actuellement investi dans le Fonds Omega, un fonds diversifié avec un rendement attendu de 15 % et une volatilité de 20 %, ainsi que dans des obligations d'État sans risque offrant un rendement de 3 %.

Votre courtier vous suggère d'ajouter un fonds immobilier à votre portefeuille. Ce fonds immobilier a un rendement attendu de 9 %, une volatilité de 35 %, et une corrélation ( $\rho$ ) de 0,10 avec le Fonds Omega.

La question se pose alors : l'ajout du fonds immobilier améliorera-t-il votre portefeuille ?

#### Solution

Soit  $r_{re}$  le rendement du fonds immobilier et  $r_{of}$  le rendement du Fonds Omega. D'après nos dernières équations, le  $\beta$  du fonds immobilier avec le Fonds Omega est donné par :

$$\beta_{re}^{of} = \frac{\sigma_{re} \cdot \rho_{re,of}}{\sigma_{of}} = \frac{35\% \cdot 10\%}{20\%} = 0.175$$

Nous pouvons maintenant déterminer le rendement requis qui rend le fonds immobilier une addition attrayante à notre portefeuille :

$$r_{re} = r_f + \beta_{re}^{of} \cdot (E(r_{of}) - r_f) = 3\% + 0.175 \cdot (15\% - 3\%) = 5.1\%$$

Étant donné que son rendement attendu de 9 % dépasse le rendement requis de 5.1 %, investir une certaine somme dans le fonds immobilier améliorera le ratio de Sharpe de notre portefeuille.

#### Présentation du véritable portefeuille efficient

Si le rendement attendu d'un actif dépasse son rendement requis, nous pouvons améliorer la performance du portefeuille  $p$  en ajoutant davantage de cet actif. Mais combien devrions-nous en ajouter ?

À mesure que nous achetons des actions de l'actif  $i$ , sa corrélation (et donc son  $\beta$ ) avec notre portefeuille augmentera, ce qui augmentera finalement son rendement requis jusqu'à ce que  $\mathbb{E}(r_i) = r_i$ . À ce stade, nos avoirs dans l'actif  $i$  sont optimaux.

De même, si le rendement attendu de l'actif  $i$  est inférieur au rendement requis  $r_i$ , nous devrions réduire nos avoirs dans  $i$ . En procédant ainsi, la corrélation et le rendement requis  $r_i$  diminueront jusqu'à ce que  $\mathbb{E}(r_i) = r_i$ .

Ainsi, si nous n'avons aucune restriction sur notre capacité à acheter ou vendre des actifs négociés sur le marché, nous continuerons à trader jusqu'à ce que le rendement attendu de chaque actif soit égal à son rendement requis (c'est-à-dire jusqu'à ce que  $\mathbb{E}(r_i) = r_i$  soit vrai pour tous les  $i$ ).

À ce stade, aucune transaction ne peut améliorer le ratio risque-rendement du portefeuille, de sorte que notre portefeuille est le portefeuille optimal et efficace. Un portefeuille est efficace si et seulement si le rendement attendu de chaque actif disponible est égal à son rendement requis :

$$\mathbb{E}(r_i) = r_i = r_f + \beta_i^{eff} \cdot (\mathbb{E}(r_{eff}) - r_f)$$

où  $r_{eff}$  est le rendement du portefeuille efficace, le portefeuille avec le plus haut ratio de Sharpe de tous les portefeuilles de l'économie.

## 1.4 Le modèle d'évaluation des actifs financiers (CAPM)

### 1.4.1 Les trois principales hypothèses du CAPM

Les investisseurs peuvent acheter et vendre tous les actifs à des prix de marché compétitifs (sans encourir de taxes ou de coûts de transaction) et peuvent emprunter et prêter au taux d'intérêt sans risque.

Tous les investisseurs choisissent un portefeuille d'actifs négociés qui offre le rendement attendu le plus élevé possible, compte tenu du niveau de volatilité qu'ils sont prêts à accepter : « Les investisseurs ne détiennent que des portefeuilles efficaces d'actifs négociés, des portefeuilles qui offrent le rendement attendu maximum pour un niveau de volatilité donné. »

Il y a de nombreux investisseurs dans le monde, et chacun peut avoir ses propres estimations des volatilités, des corrélations et des rendements attendus des actifs disponibles. Les investisseurs ne formulent pas ces estimations de manière arbitraire ; ils les basent sur des modèles historiques et d'autres informations (y compris les prix du marché) qui sont largement accessibles au public.

Si tous les investisseurs utilisent des sources d'information disponibles publiquement, alors leurs estimations sont susceptibles d'être similaires. Par conséquent, il n'est pas déraisonnable de considérer un cas particulier dans lequel tous les investisseurs ont les mêmes estimations concernant les investissements et les rendements futurs, appelé attentes homogènes.

Bien que les attentes des investisseurs ne soient pas complètement identiques dans la réalité, supposer des attentes homogènes devrait être une approximation raisonnable dans de nombreux marchés. Cela représente la troisième hypothèse simplificatrice du CAPM :

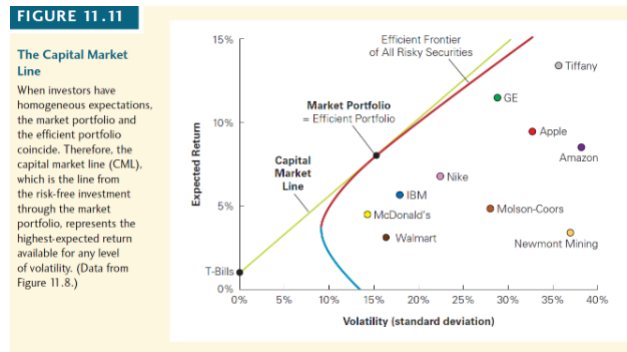
« Les investisseurs ont des attentes homogènes concernant les volatilités, les corrélations et les rendements attendus des actifs. »

### Investissement Optimal : La Ligne de Marché des Capitaux (CML)

Lorsque les hypothèses du CAPM sont respectées, le portefeuille de marché est efficace. Ainsi, le portefeuille tangent dans la Figure 11.10 (diapositive suivante) est en réalité le portefeuille de marché (M).

La ligne tangente représente le rendement attendu le plus élevé que nous pouvons atteindre pour tout niveau de volatilité. Lorsque la ligne tangente passe par le portefeuille de marché, elle est appelée la Ligne de Marché des Capitaux (CML).

Selon le CAPM, tous les investisseurs devraient choisir un portefeuille sur la ligne de marché des capitaux, en détenant une combinaison de l'actif sans risque et du portefeuille de marché.



### Détermination de la Prime de Risque

#### Risque de Marché et

$\beta$  Sous les hypothèses du CAPM, nous pouvons identifier le portefeuille efficace : il est égal au portefeuille de marché. Ainsi, si nous ne connaissons pas le rendement attendu d'un titre ou le coût du capital d'un investissement, nous pouvons utiliser le CAPM pour le déterminer en utilisant le portefeuille de marché comme référence.

$$\mathbb{E}(r_i) = r_f + \beta_i(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$$

$$\beta_i = \frac{\sigma_i \cdot \rho_{i,M}}{\sigma_M} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$$

Le  $\beta$  d'un titre mesure sa volatilité due au risque de marché par rapport au marché dans son ensemble, et capture ainsi la sensibilité du titre au risque de marché.

Pour déterminer la prime de risque appropriée pour tout investissement, nous devons redimensionner la prime de risque du marché (le montant par lequel le ren-



dement attendu du marché dépasse le taux sans risque) par la quantité de risque de marché présente dans les rendements du titre, mesurée par son  $\beta$  avec le marché.

Nous pouvons interpréter l'équation du CAPM comme suit : selon la Loi du Prix Unique, dans un marché compétitif, les investissements avec un risque similaire devraient avoir le même rendement attendu.

Étant donné que les investisseurs peuvent éliminer le risque spécifique à l'entreprise en diversifiant leurs portefeuilles, la bonne mesure du risque est le  $\beta$  de l'investissement avec le portefeuille de marché,  $\beta_i$ .

### Détermination de la Prime de Risque : problème

Supposons que le taux de rendement sans risque soit de 4% et que le portefeuille de marché ait un rendement espéré de 10% avec une volatilité de 16%. L'action 3M présente une volatilité de 22% et une corrélation avec le marché de 0,50.

1. Quel est le bêta de l'action 3M par rapport au marché ?
2. Quel portefeuille situé sur la ligne de marché des capitaux présente un risque équivalent à celui du marché, et quel est son rendement espéré ?

### Détermination de la Prime de Risque : solution

Nous pouvons utiliser la formule suivante :

$$\beta_i = \frac{\sigma_i \cdot \rho_{i,M}}{\sigma_M} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$$

$$\beta_i = \frac{22\% \cdot 0,5}{16\%} = 0,69$$

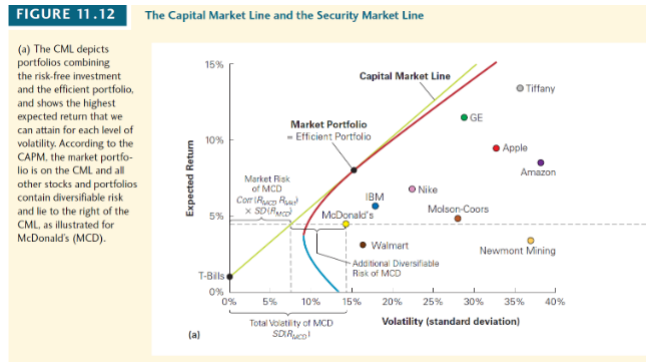
Cela signifie que pour chaque mouvement de 1% du portefeuille de marché, l'action 3M tend à bouger de 0,69%. Nous pourrions obtenir la même sensibilité au risque de marché en investissant 69% dans le portefeuille de marché et 31% dans l'actif sans risque.

Puisque l'action 3M présente le même risque de marché, elle devrait avoir le même rendement espéré que ce portefeuille, qui est :

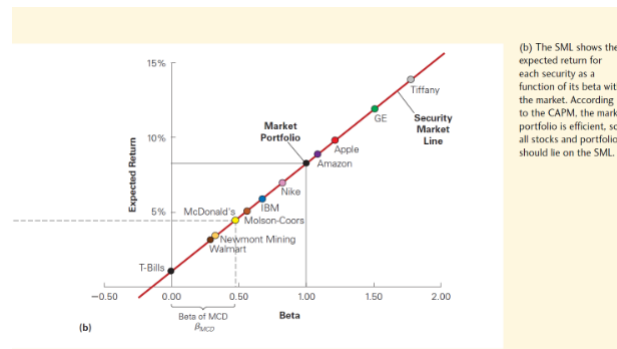
$$\mathbb{E}(r_i) = r_f + \beta_i(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$$

$$\mathbb{E}(r_{3M}) = 4\% + 0,69 \cdot (10\% - 4\%) = 8,1\%$$

Les investisseurs exigeront donc un rendement espéré de 8,1% pour compenser le risque associé à l'action 3M



## 1.4.2 La ligne du marché des titres



$\mathbb{E}(r_i)$  vs.  $\beta$

$$\mathbb{E}(r_i) = r_f + \beta_i(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$$

L'équation implique qu'il existe une relation linéaire entre le bêta  $\beta$  d'une action et son rendement espéré. Le dernier graphique trace cette ligne à travers l'investissement sans risque (avec un  $\beta$  de 0) et le marché (avec un  $\beta = 1$ ); elle est appelée la ligne des marchés de titres (SML).

Selon les hypothèses du CAPM, la ligne des marchés de titres (SML) est la droite sur laquelle toutes les valeurs mobilières individuelles devraient se situer lorsqu'elles sont représentées en fonction de leur rendement espéré et de leur  $\beta$ .

Comme nous l'illustrons pour McDonald's (MCD), le rendement espéré d'une action dépend uniquement de la fraction de sa volatilité qui est commune avec le marché.

La distance de chaque action par rapport à la droite de la ligne de marché des capitaux est due à son risque diversifiable.

La relation entre le risque et le rendement pour des titres individuels devient évidente uniquement lorsque nous mesurons le risque de marché plutôt que le risque total.

### Le bêta d'un portefeuille

Étant donné que la ligne des marchés de titres (SML) s'applique à toutes les opportunités d'investissement négociables, nous pouvons également l'appliquer aux portefeuilles.

Par conséquent, le rendement espéré d'un portefeuille est donné par  $\mathbb{E}(r_p) = r_f + \beta_p(\mathbb{E}(r_M) - r_f)$  et dépend donc du  $\beta$  du portefeuille.

$$\beta_p = \frac{\sigma_p \cdot \rho_{p,M}}{\sigma_M} = \frac{\sigma_{p,M}}{\sigma_M^2} = \frac{\text{cov}(r_p, r_M)}{\mathbb{V}(r_M)}$$

En utilisant l'équation 40, nous calculons le  $\beta$  d'un portefeuille où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(r_p) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \cdot r_i\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\omega_i \cdot r_i) = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \mathbb{E}(r_i) \\ \beta_p &= \frac{\text{cov}\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \cdot r_i, r_M\right)}{\mathbb{V}(r_M)} = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \frac{\text{cov}(r_i, r_M)}{\mathbb{V}(r_M)} = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \beta_i\end{aligned}$$

Autrement dit, le  $\beta$  d'un portefeuille est la moyenne pondérée des  $\beta$  des titres qui composent le portefeuille.

# Chapitre 2

## Produits dérivés : Les stratégies sur options

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Définitions, contexte et recours

##### Définitions

**Qu'est-ce qu'une option ?** Une option est un titre financier conditionnel qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent, à un prix déterminé à l'avance et pendant une période donnée.

Pour exercer ce droit, l'acheteur de l'option doit verser une prime au vendeur.

Cette option peut être exercée soit à l'échéance (option européenne), soit pendant la durée d'exercice (option américaine).

**Caractéristiques des options** Les options se sont considérablement développées depuis la fin des années 1970.

Ce type de produit financier permet à son détenteur de se couvrir ou de spéculer contre une évolution défavorable du prix d'un titre financier en utilisant la possibilité d'acheter ou non un actif sous-jacent.

**Organisation** Le rôle des marchés organisés d'options est tout d'abord d'assurer la liquidité des options, c'est-à-dire la cotation permanente et l'existence d'un prix unique pour une option donnée. Deuxièmement, l'existence de marchés organisés simplifie la gestion des contrats optionnels en éliminant le risque de contrepartie, car la contrepartie unique de tous les contrats sur un marché organisé est la chambre de compensation de la bourse. Les différents participants des marchés

d'options comprennent les brokers (courtiers) qui exécutent les ordres des investisseurs, les market makers (teneurs de marché) qui risquent leur propre capital et assurent la liquidité du marché, ainsi que les spécialistes qui affichent en permanence les prix sur les options les plus liquides. Enfin, la chambre de compensation sert à éliminer le risque de contrepartie.

**Quid de l'indexation ?** Les options sont écrites sur : actions (CBOE : 1332 actions, MONEP : 67 actions), indices (CAC40, S&P500, indices sectoriels, etc.), taux de change (PHLX), obligations ou swaps, et futures sur marchandises (commodities) : cacao, café, sucre, blé, mais aussi des matières premières telles que l'électricité, etc. Les marchés les plus liquides sont ceux d'options sur indices. Ce sont aussi des marchés où l'on a le plus besoin d'une calibration précise (car les fourchettes bid-ask sont étroites) et où l'on a le maximum de données disponibles (par exemple, sur CBOE, on trouve plus de 500 options de 8 maturités différentes allant de quelques jours à deux ans sur l'indice S&P 500).

## 2.1.2 Les options européennes

### Les types d'options

**Des produits basés sur de l'anticipation** Si, à la date d'échéance, l'acquéreur de l'option n'a pas effectué l'opération à laquelle le contrat passé avec le vendeur lui donne droit, il abandonne l'option. L'avantage des contrats optionnels par rapport aux contrats fermes est qu'ils permettent à la fois de se protéger contre le risque (exercice de l'option In The Money) tout en ayant la possibilité de profiter d'une évolution favorable des taux (abandon de l'option restant Out of The Money). Il existe deux sortes d'options : les options d'achat (call) et les options de vente (put). Les options sont également appelées options de placement et d'emprunt lorsqu'il s'agit d'options de taux d'intérêt.

Parmi les options classiques, on distingue les options d'achat (call) et les options de vente (put).

**Le Call** Un call donne à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à un prix d'exercice défini dans le contrat. Le vendeur du call a l'obligation de livrer l'actif sous-jacent dès lors que l'acheteur décide d'exercer son option.

**Le Put** Un put donne à son détenteur le droit de vendre l'actif sous-jacent à un prix d'exercice défini dans le contrat. Le vendeur du put a l'obligation d'acheter l'actif sous-jacent au prix d'exercice dès lors que le détenteur du put décide d'exercer son option.

**Caractérisation d'une option, Les paramètres d'une option**

**Le Call** L'actif sous-jacent  $S_t$  : il peut s'agir d'une action, d'un indice boursier, d'une obligation, d'une devise ou de matières premières ; le prix de l'actif sous-jacent, correspondant au cours spot et noté  $S_t$ , évolue en fonction des conditions de l'offre et de la demande sur le marché. Le prix d'exercice ou strike  $K$  : prix auquel le détenteur de l'option peut exercer son droit, c'est-à-dire au prix auquel l'acheteur peut acquérir l'actif sous-jacent durant la période de vie ; c'est un prix de référence ; en fonction de l'évolution du prix du sous-jacent, l'option peut être levée si le prix d'exercice est avantageux et que l'investisseur peut réaliser un profit. La date d'exercice  $T$  : date à laquelle l'option perd toute valeur et disparaît ; elle correspond au jour auquel l'option peut être exercée ; plus la date d'exercice de l'option est lointaine, plus le prix de l'option est élevé. La prime de l'option (ou premium) : elle correspond au prix auquel l'investisseur souscrit le titre auprès de l'émetteur ou directement sur le marché ; la prime est définitivement acquise au vendeur de l'option ; le vendeur d'un call ou d'un put touche ainsi une prime à la date d'émission du titre.

**Exemple - Les paramètres d'une option et leurs influences**

**Call option on CAC 40** L'acheteur d'un call sur l'indice CAC 40 a tout intérêt à exercer son option si la valeur finale de l'indice, qui constitue ici l'actif sous-jacent, est supérieure au prix d'exercice. Si le prix d'exercice est de 5 050 points et que l'indice CAC 40 vaut 5 100 points, l'investisseur peut exercer son option en achetant la contrepartie au prix de 5 050 points et revendre directement l'actif sur le marché au prix de 5 100 points. Il empochera la différence, c'est-à-dire 50 points. Il devra cependant retirer le montant de la prime payée pour déterminer la rentabilité de son investissement.

**Put option on CAC 40** Dans le cadre d'un put, la logique est exactement opposée. L'acheteur du contrat a acquis un droit de vendre. Ainsi, il peut livrer le sous-jacent, ici le tracker sur l'indice CAC 40, à la contrepartie vendeuse du contrat dès lors que le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice de l'option à l'échéance. Si le prix d'exercice est de 5 000 points et que l'indice CAC 40 vaut 4 900 points, l'investisseur peut exercer son option. Pour cela, il achète la contrepartie au prix de 4 900 points (il en prend livraison) et revend directement l'actif au prix de 5 000 points. Il empoche ainsi la différence, c'est-à-dire 100 points. Il devra également retirer le montant de la prime du put payée pour déterminer la rentabilité de son investissement.

### 2.1.3 Les autres types d'options

#### Les options américaines

**Quelles différences avec les options européennes** Pour les options américaines, l'exercice de l'option est possible à toute date  $t$  avant la maturité  $T$  ou à la maturité. Cet avantage justifie donc qu'elle soit plus chère que l'option européenne. La différence entre les deux prix s'appelle la prime d'exercice anticipée (early exercise premium).

#### Les options exotiques

**Une multitude d'options** Options à barrière : le paiement a lieu (ou n'a pas lieu) si le sous-jacent a dépassé un niveau contractuel (la barrière) avant cette date. Options asiatiques : le payoff dépend de la valeur moyenne du sous-jacent pendant la vie de l'option (pour empêcher la manipulation des prix). Options multi-sous-jacent : sur un panier d'actions, un panier de taux de change, etc. Les options forward start. Le strike d'une telle option est déterminé à une date future selon une règle spécifiée, par exemple, le pay-off peut être :

$$H_T = (S_T - mS_{T_0})^+$$

où  $T_0 < T$  est une date future et  $m$  est un nombre fixé dans le contrat.

**Les ratchet options** Les options cliquets : options vues comme une séquence d'options forward start, avec des dates de départ de plus en plus éloignées. Par exemple, le pay-off d'une telle option de maturité  $T = 1$  an peut être donné par :

$$\sum_{i=1}^{12} \max(0, r_i), \quad r_i = S_{\frac{i}{12}} - S_{\frac{i-1}{12}}$$

Cette option permet alors de récupérer l'ensemble des performances positives d'un indice de référence sans en subir des performances négatives. Une option cliquet, parfois appelée ratchet option, est une option exotique globale, constituée de plusieurs options démarrant à des dates ultérieures et pour des périodes déterminées, avec des prix d'exercice égaux aux cours marqués par le sous-jacent à ces dates. Les performances de chaque option sont enregistrées et peuvent être reversées périodiquement (typiquement, lors de leur maturité respective) ou en une seule fois, à l'échéance de l'option cliquet.

## 2.1.4 Les stratégies optionnelles de base

### Stratégies sur options vanilles

**Définitions** Le détenteur peut décider d'exercer ou non l'option qu'il détient en fonction de l'évolution du prix de l'actif sous-jacent par rapport au prix d'exercice  $K$  de l'option. On dit que l'option est : dans la monnaie (in the money) si la levée de l'option permet de dégager un profit pour son détenteur, à la monnaie (at the money) si le prix d'exercice est égal au cours spot de l'actif sous-jacent, hors de la monnaie (out of the money) si la levée de l'option ne permet pas de dégager un profit pour son détenteur. Il existe globalement quatre profils de gain en fonction des stratégies : 1. l'achat d'un call, 2. la vente d'un call, 3. l'achat d'un put, 4. la vente d'un put.

### Call & Put options

**Call option** L'option d'achat « Call » confère à son acheteur le droit d'acheter un sous-jacent  $S$  à maturité  $T$ , c'est-à-dire  $S_T$  au prix  $K$ . Le sous-jacent  $S$  est noté  $S_0$  en  $t = 0$ . Arrivé à maturité ( $T$ ), si  $S_T > K$ , l'option sera exercée ; autrement ( $S_T < K$ ), l'option sera abandonnée. Le payoff du call peut donc être noté  $C = \max(S_T - K, 0)$ .

**Put option** L'option de vente « Put » confère à son acheteur le droit de vendre un sous-jacent  $S$  à maturité  $T$ , c'est-à-dire  $S_T$  au prix  $K$ . Le sous-jacent  $S$  est noté  $S_0$  en  $t = 0$ . Arrivé à maturité ( $T$ ), si  $S_T < K$ , l'option sera exercée ; autrement ( $S_T > K$ ), le Put sera abandonné. Le payoff du Put peut donc être noté  $P = \max(K - S_T, 0)$ .

### Stratégies sur options et arbitrages

**Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA)** Considérons une quantité de liquidité notée  $K$ . Cette quantité investie au taux  $r$  en temps discret donnera dans  $T$  :  $K(1 + r)^T$ . En temps continu, cette valeur sera  $Ke^{rT}$ . Considérons deux portefeuilles  $A$  et  $B$ . Si leurs valeurs liquidatives en  $T$  sont égales, c'est-à-dire  $V_A(T) = V_B(T)$ , alors par hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA),  $V_A(0) = V_B(0)$ . En effet, si  $V_A(0) > V_B(0)$ , on achèterait  $B$  en vendant à découvert  $A$ .

### Achat d'un Call : Long position

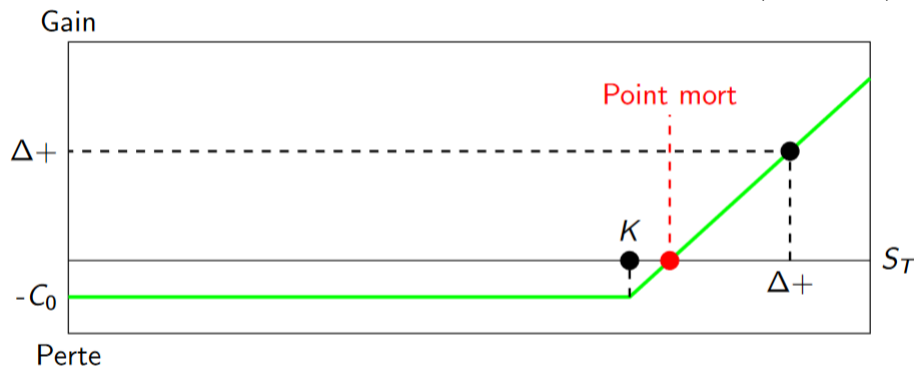
**L'anticipation d'une hausse de l'actif sous-jacent** L'acheteur d'un call paie la prime  $C_0$  au vendeur : il anticipe ainsi une hausse de la valeur de l'actif sous-jacent. Si le prix de l'actif sous-jacent ( $S_T$ ) est inférieur au prix d'exercice ( $K$ ) de



l'option, l'acheteur n'a pas intérêt à exercer son option : il perd donc ici la valeur de la prime payée au vendeur. Dès que le prix de l'actif sous-jacent ( $S_T$ ) dépasse le prix d'exercice de l'option ( $K$ ), l'acheteur a intérêt à exercer son option. Son profit sera positif lorsque le prix de l'actif sous-jacent dépassera le prix d'exercice de l'option plus le montant de la prime payée. La perte de l'acheteur du call est limitée au montant de la prime versée ; son gain est potentiellement illimité.

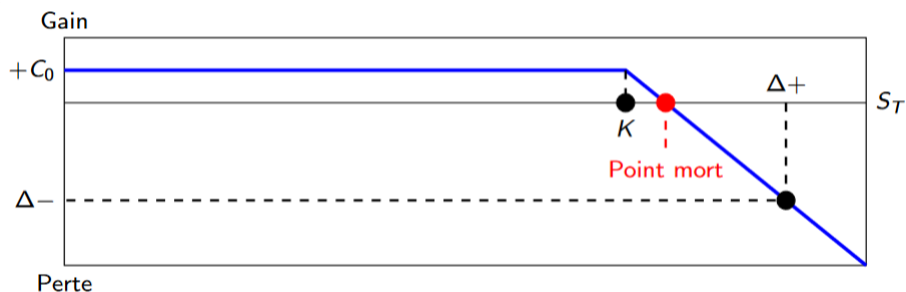
### Payoff du Call option : Achat d'un Call (Long Call)

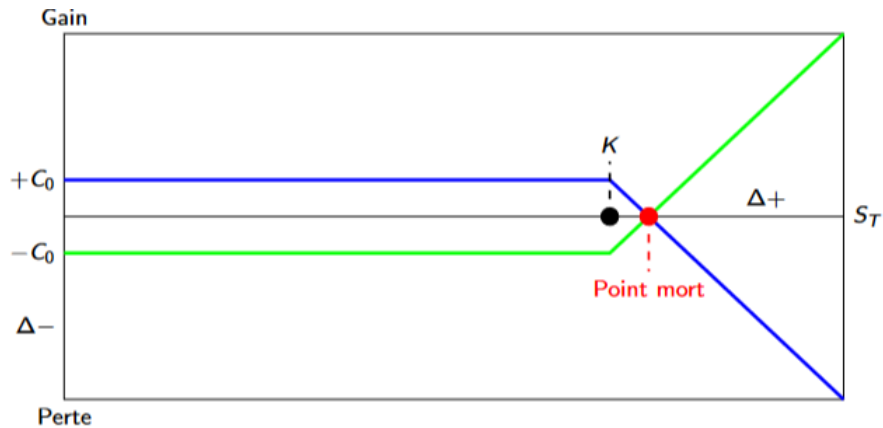
**Call option** Supposons le sous-jacent  $S$  à maturité  $T$  ( $S_T$ ), un strike price  $K$  et le prix d'un Call  $C_0$ . Le payoff du Call est donné par :  $C = \max(S_T - K, 0)$ .



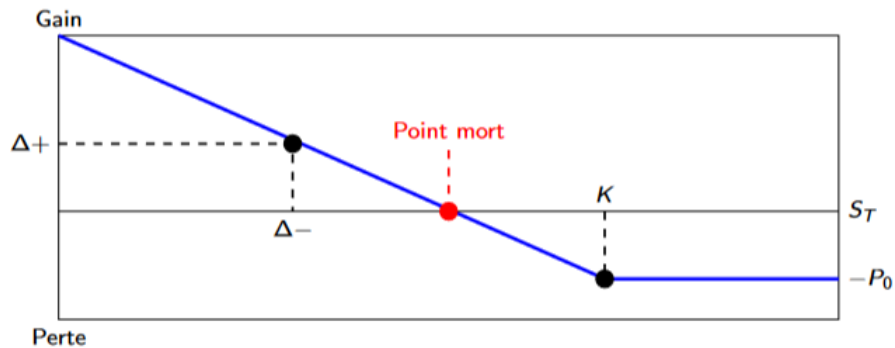
### Payoff du Call option : Vente d'un Call (Short Call)

**Call option** Le profil de gain du vendeur du call est symétrique à celui de l'acheteur. Il perçoit la prime  $C_0$  versée car il anticipe une baisse du sous-jacent. Si le prix du sous-jacent ( $S_T$ ) est inférieur au strike ( $K$ ), le vendeur n'a pas à livrer l'actif à l'acheteur. Mais dès que le prix du sous-jacent ( $S_T$ ) dépasse le strike ( $K$ ), l'acheteur a intérêt à exercer son option. Le vendeur doit livrer la quantité de l'actif définie dans le contrat. Le gain du vendeur d'un call est limité à  $C_0$  ; sa perte est potentiellement illimitée.

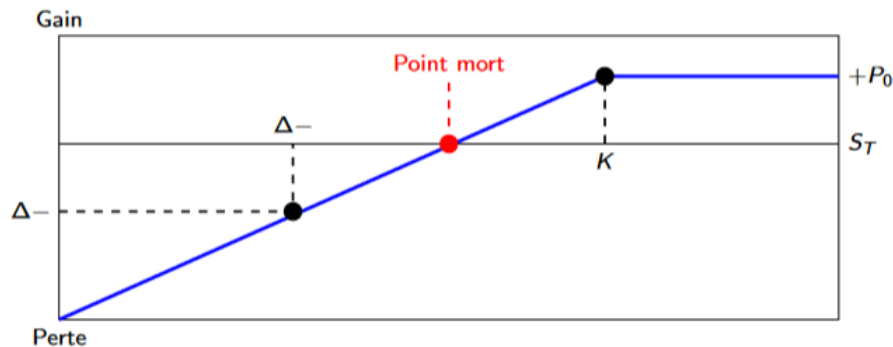


**Payoff du Call option : Achat + Vente d'un Call (Long-Short Call Option)****Achat d'un Put**

**Option de vente (Put option)** Supposons un sous-jacent  $S$  à maturité  $T$  (noté  $S_T$ ) et un strike price  $K$  pour le prix d'un Put  $P_0$ . À maturité ( $T$ ), si  $S_T < K$ , l'option sera exercée; autrement, si  $S_T > K$ , le Put sera abandonné. On a alors  $P = \max(K - S_T, 0)$ .

**Vente d'un Put option**

**Put option** Supposons un sous-jacent  $S$  à maturité  $T$  (noté  $S_T$ ) et un strike price  $K$  pour le prix d'un Put  $P_0$ . À maturité ( $T$ ), si  $S_T < K$ , l'option sera exercée; autrement, si  $S_T > K$ , le Put sera abandonné. On a alors  $P = \max(K - S_T, 0)$ .



## 2.2 La Parité Call-Put

### 2.2.1 Call-Put : une relation européenne

#### La rentabilité en temps continu

Supposons que la somme  $V_0$  est investie durant  $T$  années. L'opérateur de marché obtiendra la valeur future  $V_T$  équivalente, en temps discret, à :

$$V_T = V_0 \cdot (1 + r)^T$$

Ce qui amène à :

$$V_0 = \frac{V_T}{(1 + r)^T}$$

Par équivalence, une liquidité  $K$ , à la maturité  $T$ , correspondant au strike price d'une option à maturité, en temps continu, au taux d'intérêt  $r$ , donne la valeur de  $K$  en  $t = 0$  à  $Ke^{-rT}$ .

#### Tester la parité Call-Put

Supposons à nouveau que les valeurs des deux portefeuilles  $A$  et  $B$  soient égales, c'est-à-dire  $V_A(T) = V_B(T)$ .

Nous pourrions composer différemment les portefeuilles afin d'observer si leurs valeurs à l'échéance sont toujours égales. Autrement dit, nous pouvons tester la parité Call-Put :

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

Le portefeuille  $A$  contient un Call ( $C$ ) ainsi qu'une liquidité en  $t = 0$  de  $Ke^{-rT}$ .  
Le portefeuille  $B$  contient un Put ( $P$ ) et le sous-jacent en  $t = 0$  noté  $S_0$ .

**Illustration de deux stratégies**

Le portefeuille  $A$  contient un Call ( $C$ ) ainsi qu'une liquidité en  $t = 0$  de  $Ke^{-rT}$ .  
 Le portefeuille  $B$  contient un Put ( $P$ ) et le sous-jacent en  $t = 0$  noté  $S_0$ .  
 À partir des éléments présentés, nous avons :

$$V_A(T) = \max(S_T - K, 0) + K$$

$$V_B(T) = \max(K - S_T, 0) + S_T$$

À maturité  $T$ , deux possibilités s'offrent à nous :

1. Si  $S_T > K$  (Call exercé, Put abandonné) :

$$V_A(T) = \max(S_T - K, 0) + K \quad \text{donc} \quad V_A(T) = S_T$$

$$V_B(T) = \max(K - S_T, 0) + S_T \quad \text{donc} \quad V_B(T) = S_T$$

2. Si  $S_T < K$  (Put exercé, Call abandonné) :

$$V_A(T) = \max(S_T - K, 0) + K \quad \text{donc} \quad V_A(T) = K$$

$$V_B(T) = \max(K - S_T, 0) + S_T \quad \text{donc} \quad V_B(T) = K$$

Sous l'hypothèse d'arbitrage sans opportunité (AOA), si les portefeuilles  $A$  et  $B$  ont la même valeur en  $T$ , alors les deux ont la même valeur en  $t = 0$ .

Dans tous les cas de figure, la valeur des portefeuilles  $A$  et  $B$  vaut :

$$V_A(T) = V_B(T) = \max(S_T, K)$$

Si  $V_A(T) = V_B(T)$ , alors  $V_A(0) = V_B(0)$  et donc nous avons bien :

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

ce qui entraîne :

$$C = P + S_0 - Ke^{-rT}$$

**2.2.2 L'intérêt de cette parité****Les enjeux de l'AOA (Absence d'opportunité d'arbitrage)**

Reprenons la parité suivante :

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

Le principal intérêt de cette relation réside dans le fait qu'elle exprime la valeur d'un Call en fonction d'un Put et vice versa, mais aussi une stratégie de réplication :

$$C = P + S_0 - Ke^{-rT}$$

La valeur d'un Call de strike  $K$  est identique à celle d'un portefeuille composé d'un Put de strike  $K$  et d'un titre  $S$  financés par l'emprunt d'un montant qui vaudra  $K$  à l'échéance pendant une période  $T$  au taux  $r$ . On appelle cette stratégie un Call synthétique.

$$P = -S_0 + Ke^{-rT} + C$$

La valeur d'un Put de strike  $K$  est identique à celle d'un portefeuille composé d'un Call de strike  $K$  et de la vente à découvert d'un titre  $S$  qui finance le placement d'un montant qui vaudra  $K$  à l'échéance  $T$  au taux  $r$ . On appelle cette stratégie un Put synthétique.

$$S_0 = C + Ke^{-rT} - P$$

On peut répliquer la valeur d'un titre en plaçant un montant qui vaudra  $K$  au terme de  $T$  années au taux d'intérêt  $r$ , en achetant un Call de strike  $K$  et en vendant à découvert un Put  $P$  de strike  $K$ , sachant que le Call et le Put ont la même maturité  $T$ . Cette stratégie s'appelle un sous-jacent synthétique.

Enfin,

$$Ke^{-rT} = P + S_0 - C$$

On peut répliquer le placement sans risque d'un montant qui vaudra à l'échéance pendant une période  $T$  en achetant le sous-jacent  $S$ , en vendant un Call  $C$  de strike  $K$  à découvert et en achetant un Put  $P$  de strike  $K$ , sachant que le Call et le Put ont la même maturité  $T$ . Cette stratégie s'appelle un placement monétaire synthétique ou placement sans risque synthétique.

## **2.3 Stratégies sur options**

### **2.3.1 Le recours aux options pour quelles stratégies ?**

### **2.3.2 Les Caps, les Floors et les Collars**

### **2.3.3 Stratégies à caractère directionnel**

### **2.3.4 Entraînement**

## **2.4 Valorisation des primes d'options**

### **2.4.1 Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein**

### **2.4.2 Le modèle de Black and Scholes**

### **2.4.3 Les Grecs de Black and Scholes**

### **2.4.4 Grecs d'ordre supérieur**