

Chapitre 1

Choix optimal de portefeuille et modèle d'évaluation des actifs financiers

1.1 Le rendement attendu d'un portefeuille

1.1.1 Calculer le rendement d'un portefeuille

Pour trouver un portefeuille optimal, nous avons besoin d'une méthode pour définir un portefeuille et analyser son rendement. Nous pouvons décrire un portefeuille par ses pondérations, c'est-à-dire la fraction de l'investissement total dans le portefeuille détenue dans chaque investissement individuel du portefeuille :

$$\omega_i = \frac{\text{Valeur de l'investissement } i}{\text{Valeur totale du portefeuille}}$$

La somme des pondérations de ces portefeuilles est égale à 1 (c'est-à-dire $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$) afin qu'ils représentent la façon dont nous avons réparti notre argent entre les différents investissements individuels du portefeuille.

Prenons l'exemple d'un portefeuille composé de 200 actions de Dolby Laboratories valant 30\$ par action et de 100 actions de Coca-Cola valant 40\$ par action. La valeur totale du portefeuille est de $200 \cdot 30 + 100 \cdot 40 = 10000$ \$ et les pondérations ω_D et ω_C correspondantes sont les suivantes

$$\omega_D = \frac{200 \cdot 30}{10000} = 60\% \quad \omega_C = \frac{100 \cdot 40}{10000} = 40\%$$

Étant donné les pondérations du portefeuille, nous pouvons calculer le rendement du portefeuille.

Supposons que $\omega_1, \dots, \omega_N$ soient les pondérations des N investissements d'un portefeuille, et que ces investissements aient des rendements r_1, \dots, r_N

Le rendement du portefeuille, r_p , est alors la moyenne pondérée des rendements des investissements du portefeuille, où les poids correspondent aux poids du portefeuille :

$$r_p = \omega_1 \cdot r_1 + \omega_2 \cdot r_2 + \dots + \omega_N \cdot r_N = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot r_i$$

Le rendement d'un portefeuille est facile à calculer si l'on connaît les rendements des actions individuelles et les pondérations du portefeuille.

Supposons que vous achetiez 200 actions de Dolby Laboratories à 30\$ l'action et 100 actions de Coca-Cola à 40\$ l'action. Si le cours de l'action de Dolby passe à 36\$ et celui de Coca-Cola à 38\$, quelle est la nouvelle valeur du portefeuille et quel est le rendement obtenu ? portefeuille et quel est son rendement ?

Après le changement de prix, quelles sont les nouvelles pondérations du portefeuille ?

La nouvelle valeur du portefeuille est de $200 \cdot 36 + 100 \cdot 38 = 11000\$$, soit un gain de 1 000\$ ou un rendement de 10% sur votre investissement de 10 000\$. Le rendement de Dolby était de $\frac{36}{30} - 1 = 20\%$, et celui de Coca-Cola de $\frac{38}{40} - 1 = 5\%$

Compte tenu des pondérations initiales du portefeuille (60% Dolby's et 40% Coca-Cola), nous pouvons également calculer le rendement du portefeuille :

$$r_p = \omega_1 \cdot r_1 + \omega_2 \cdot r_2 + \dots + \omega_N \cdot r_N = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot r_i$$

$$r_p = \omega_D \cdot r_D + \omega_C \cdot r_C$$

$$r_p = 60 \cdot 20 + 40 \cdot (-5) = 10\%$$

Après le changement de prix, les nouvelles pondérations du portefeuille sont :

$$\omega_D = \frac{200 \cdot 36}{11000} = 65,45\% \quad \omega_C = \frac{100 \cdot 38}{11000} = 34,55\%$$

En l'absence de négociation, les pondérations augmentent pour les actions dont le rendement est supérieur à celui du portefeuille.

En se basant sur le fait que l'espérance d'une somme est juste la somme des espérances et que l'espérance d'un multiple connu est juste le multiple de son espérance, on obtient la formule suivante pour le rendement attendu d'un portefeuille :

$$\mathbb{E}(r_p) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \cdot r_i\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\omega_i \cdot r_i) = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \mathbb{E}(r_i)$$

En d'autres termes, le rendement attendu d'un portefeuille est simplement la moyenne pondérée des rendements attendus des investissements qui le composent, en utilisant les pondérations du portefeuille.

Supposons que vous investissiez 10 000\$ dans des actions Ford et 30 000\$ dans des actions Tyco International. Vous prévoyez un rendement de 10% pour Ford et de 16% pour Tyco. Quel est le rendement attendu de votre portefeuille ?

Vous avez investi 40 000\$ au total, de sorte que les pondérations de votre portefeuille sont les suivantes : $10\,000/40\,000 = 25\%$ dans Ford et $30\,000/40\,000 = 75\%$ dans Tyco.

Par conséquent, le rendement attendu de votre portefeuille est de :

$$\mathbb{E}(r_p) = \omega_F \cdot \mathbb{E}(r_F) + \omega_T \cdot \mathbb{E}(r_T)$$

$$\mathbb{E}(r_p) = 25 \cdot 10 + 75 \cdot 16 = 14,5\%$$

1.1.2 La volatilité d'un portefeuille à deux actions

La combinaison d'actions dans un portefeuille élimine une partie de leur risque grâce à la diversification. La part de risque qui subsiste dépend du degré d'exposition des actions à des risques communs. Commençons par un exemple simple de l'évolution du risque lorsque des actions sont combinées dans un portefeuille.

Le tableau 11.1 présente les rendements de trois actions hypothétiques, ainsi que leurs rendements et volatilités moyens.

Year	Stock Returns			Portfolio Returns	
	North Air	West Air	Tex Oil	$1/2R_N + 1/2R_W$	$1/2R_W + 1/2R_T$
2010	21%	9%	-2%	15.0%	3.5%
2011	30%	21%	-5%	25.5%	8.0%
2012	7%	7%	9%	7.0%	8.0%
2013	-5%	-2%	21%	-3.5%	9.5%
2014	-2%	-5%	30%	-3.5%	12.5%
2015	9%	30%	7%	19.5%	18.5%
Average Return	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%
Volatility	13.4%	13.4%	13.4%	12.1%	5.1%

Alors que les trois actions ont la même volatilité et le même rendement moyen, la structure de leurs rendements diffère. Lorsque les actions des compagnies aériennes se sont bien comportées, les actions pétrolières ont eu tendance à mal se comporter (voir

2010-2011), et lorsque les compagnies aériennes se sont mal comportées, les actions pétrolières ont eu tendance à bien se comporter (2013-2014). Le tableau 11.1 présente les rendements de deux portefeuilles d'actions

Le premier portefeuille se compose d'investissements égaux dans les deux compagnies aériennes, North Air et West Air. Le second portefeuille comprend des investissements égaux dans West Air et Tex Oil.

Le rendement moyen des deux portefeuilles est égal au rendement moyen des actions. Cependant, leurs volatilités (12,1% et 5,1%) sont très différentes de celles des actions individuelles et les unes des autres.

Cet exemple illustre deux phénomènes importants.

En combinant des actions dans un portefeuille, nous réduisons le risque grâce à la diversification. Comme les prix des actions n'évoluent pas de la même manière, une partie du risque est répartie dans un portefeuille. Par conséquent, les deux portefeuilles présentent un risque plus faible que les actions individuelles.

Le degré de risque éliminé dans un portefeuille dépend de la mesure dans laquelle les actions sont confrontées à des risques communs et leurs prix évoluent ensemble.

Étant donné que les deux titres de compagnies aériennes ont tendance à être performants ou médiocres en même temps, le portefeuille de titres de compagnies aériennes a une volatilité qui n'est que légèrement inférieure à celle des titres individuels.

En revanche, les actions des compagnies aériennes et des compagnies pétrolières n'évoluent pas ensemble ; elles ont même tendance à évoluer dans des directions opposées. Par conséquent, le risque supplémentaire est annulé, ce qui rend le portefeuille beaucoup moins risqué. Cet avantage de la diversification est obtenu sans coût et sans réduction du rendement moyen.

1.1.3 Détermination de la covariance et de la corrélation

Pour déterminer le risque d'un portefeuille, il ne suffit pas de connaître le risque et le rendement des actions qui le composent : il faut savoir dans quelle mesure les actions sont confrontées à des risques communs et leurs rendements évoluent ensemble.

Nous introduisons deux mesures statistiques, la covariance et la corrélation, qui nous permettent de mesurer la co-mouvement des rendements entre r_i et r_j :

$$\text{cov} = \sigma_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)(r_{j,t} - \mu_j)$$

La covariance entre r_i et r_i écrit $\sigma_{i,i}$ est la variance de r_i (σ_i^2) car :

$$\sigma_{i,i} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)(r_{i,t} - \mu_i)$$

$$\sigma_{i,i} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)^2$$

Considérons la covariance entre r_i et r_j :

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)(r_{j,t} - \mu_j)$$

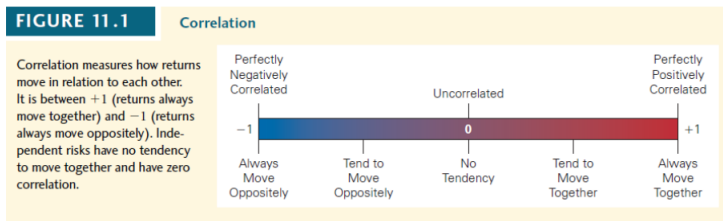
Intuitivement, si deux actions évoluent ensemble, leurs rendements auront tendance à être supérieurs ou inférieurs à la moyenne au même moment, et la covariance sera positive.

Si les actions évoluent dans des directions opposées, l'une aura tendance à être supérieure à la moyenne lorsque l'autre est inférieure à la moyenne, et la covariance sera négative.

Si le signe de la covariance est facile à interpréter, son ampleur ne l'est pas. Elle sera plus importante si les actions sont plus volatiles (et présentent donc des écarts plus importants par rapport à leurs rendements attendus), et elle sera d'autant plus importante que les actions évoluent de manière très proche les unes des autres.

Afin de contrôler la volatilité de chaque action et de quantifier la force de la relation entre elles, nous pouvons calculer la corrélation entre les rendements de deux actions, définie comme la covariance des rendements divisée par l'écart-type de chaque rendement :

$$\rho_{i,j} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)(r_{j,t} - \mu_j)}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_{i,t} - \mu_i)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_{j,t} - \mu_j)^2}} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j}$$



La corrélation entre deux actions a le même signe que leur covariance, elle a donc une interprétation similaire.

En divisant par les volatilités, la cor-

rélation est toujours comprise entre -1 et +1, ce qui nous permet d'évaluer la force de la relation entre les actions.

Comme le montre la figure 11.1, la corrélation est un baromètre de la mesure dans laquelle les rendements partagent un risque commun et ont tendance à évoluer ensemble.

Plus la corrélation est proche de +1, plus les rendements ont tendance à évoluer ensemble en raison d'un risque commun. Lorsque la corrélation (et donc la covariance) est égale à 0, les rendements ne sont pas corrélés, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas tendance à évoluer ensemble ou à l'opposé l'un de l'autre.

Les risques indépendants ne sont pas corrélés.

Enfin, plus la corrélation est proche de -1, plus les rendements ont tendance à évoluer en sens inverse.

1.1.4 Calcul de la variance et de la volatilité d'un portefeuille

Ecrivons la matrice de variance-covariance du portefeuille p avec N actions comme Ω_p tel que :

$$\Omega_p = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,j} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{i,1} & \cdots & \sigma_i^2 & \cdots & \sigma_{i,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N,1} & \cdots & \sigma_{N,j} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_p = (\omega_1, \cdots, \omega_i, \cdots, \omega_N) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,j} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{i,1} & \cdots & \sigma_i^2 & \cdots & \sigma_{i,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N,1} & \cdots & \sigma_{N,j} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \cdots \\ \omega_i \\ \cdots \\ \omega_N \end{pmatrix}$$

$$\sigma_p^2 = \omega^T \Omega \omega = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}$$

Considérons la variance d'un portefeuille de deux actions :

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{1,2} \quad \omega_2 = 1 - \omega_1$$

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1(1 - \omega_1) \sigma_1 \sigma_2 \rho_{1,2}$$

TABLE 11.1 Returns for Three Stocks, and Portfolios of Pairs of Stocks

Year	Stock Returns			Portfolio Returns	
	North Air	West Air	Tex Oil	$1/2R_N + 1/2R_W$	$1/2R_W + 1/2R_T$
2010	21%	9%	-2%	15.0%	3.5%
2011	30%	21%	-5%	25.5%	8.0%
2012	7%	7%	9%	7.0%	8.0%
2013	-5%	-2%	21%	-3.5%	9.5%
2014	-2%	-5%	30%	-3.5%	12.5%
2015	9%	30%	7%	19.5%	18.5%
Average Return	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%
Volatility	13.4%	13.4%	13.4%	12.1%	5.1%

Comme toujours, la volatilité est la racine carrée de la variance. Vérifions cette formule pour les actions des compagnies aériennes et pétrolières du tableau 11.1. Considérons le portefeuille contenant les actions de West Air et Tex

Oil. La variance de chaque action est égale au carré de sa volatilité, soit $(0,134)^2 = 0,018$. Supposons que la covariance entre les actions soit de $-0,0128$. Par conséquent, la variance d'un portefeuille investi à 50% dans chaque action est de :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{2}^2 \cdot 0,018 + \frac{1}{2}^2 \cdot 0,018 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-0,0128) = 0,0026$$

La volatilité du portefeuille est de $\sqrt{0,0026} = 5,1\%$, ce qui correspond au calcul du tableau 11.1.

Pour les portefeuilles North Air et West Air, le calcul est le même, à l'exception de la covariance plus élevée des actions (0,0112), ce qui se traduit par une volatilité plus élevée (12,1%).

La volatilité d'un grand portefeuille

Nous pouvons obtenir des avantages supplémentaires de la diversification en détenant plus de deux actions dans notre portefeuille. Bien qu'il soit préférable d'effectuer ces calculs à l'aide d'un ordinateur, leur compréhension permet d'obtenir une intuition importante concernant le degré de diversification possible si nous détenons de nombreuses actions. Rappelons que le rendement d'un portefeuille de N actions est simplement la moyenne pondérée des rendements des actions du portefeuille où :

$$r_{i,t} = \frac{[P_{i,t} - P_{i,t-1}] + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}$$

et $P_{i,t}$ est le prix de l'actif i , $D_{i,t}$ est le dividende de l'actif i à l'instant t alors :

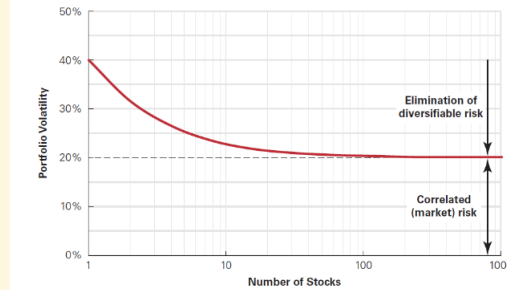
$$r_{p,t} = \sum_{i=1}^N \omega_{i,t} r_{i,t}$$

Volatilité et diversification

FIGURE 11.2

Volatility of an Equally Weighted Portfolio Versus the Number of Stocks

The volatility declines as the number of stocks in the portfolio increases. Even in a very large portfolio, however, market risk remains.



La volatilité diminue au fur et à mesure que le nombre d'actions dans le portefeuille augmente. En fait, près de la moitié de la volatilité des actions individuelles est éliminée dans un grand portefeuille grâce à la

diversification. L'avantage de la diversification est le plus spectaculaire au début : La diminution de la volatilité lorsque l'on passe d'une à deux actions est beaucoup plus importante que la diminution lorsque l'on passe de 100 à 101 actions (en effet, la quasi-totalité des avantages de la diversification peut être obtenue avec une trentaine d'actions). Toutefois, même pour un portefeuille très important, il n'est pas possible d'éliminer tous les risques.

1.2 Le portefeuille efficient

Considérons un portefeuille d'actions Intel et Coca-Cola. Supposons qu'un investisseur pense que ces actions ne sont pas corrélées et qu'elles se comporteront comme suit :

Action	Rendement attendu	Volatilité
Intel (I)	26%	50%
Coca-Cola (CC)	6%	25%

Comment l'investisseur doit-il choisir un portefeuille composé de ces deux titres ? Certains portefeuilles sont-ils préférables à d'autres ?

Calculons le rendement attendu et la volatilité pour différentes combinaisons d'actions. Considérons un portefeuille composé à 40 % d'actions Intel et à 60 % d'actions Coca-Cola. Nous pouvons calculer le rendement attendu à partir de l'équation :

$$\mathbb{E}(r_p) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \omega_i \cdot r_i\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\omega_i \cdot r_i) = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \mathbb{E}(r_i)$$

$$\mathbb{E}(r_p) = \omega_I \cdot \mathbb{E}(r_I) + \omega_{CC} \cdot \mathbb{E}(r_{CC})$$

$$\mathbb{E}(r_p) = 40 \cdot 26 + 60 \cdot 6 = 14\%$$

Supposons qu'un investisseur pense que ces actions ne sont pas corrélées. Nous pouvons calculer la variance à l'aide de l'équation suivante

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1(1 - \omega_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}$$

$$\sigma_p^2 = 40^2 \cdot 50^2 + (1 - 40)^2 \cdot 25^2 + 2 \cdot 40(1 - 40) \cdot 50 \cdot 25 \cdot 0 = 0,0625$$

Sur la base de ce résultat, la volatilité mesurée par l'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sqrt{0,0625} = 25\%$.

Grâce à la diversification, il est possible de trouver un portefeuille dont la volatilité est encore plus faible que celle de l'une ou l'autre action. En investissant 20 % dans l'action Intel et 80 % dans l'action Coca-Cola, par exemple, la volatilité n'est que de 22,4 %. Mais sachant que les investisseurs s'intéressent à la volatilité et au rendement attendu, nous devons considérer les deux simultanément. Pour ce faire, nous représentons graphiquement la volatilité et le rendement attendu de chaque portefeuille.

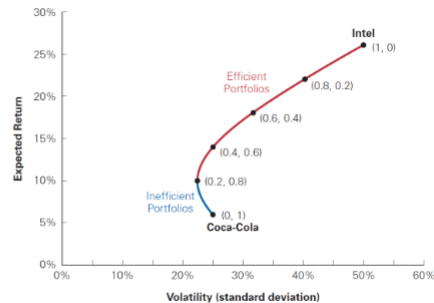
Intel	Coca-Cola	Rendement attendu	Volatilité
ω_I	ω_{CC}	$\mathbb{E}(r_p)$	σ_p
100%	0%	26%	50%
80%	20%	22%	40,3%
60%	40%	18%	31,6%
40%	60%	14%	25%
20%	80%	10%	22,4%
0%	100%	6%	25%

Supposons que l'investisseur envisage d'investir à 100 % dans l'action Coca-Cola. D'autres portefeuilles, tels que le portefeuille composé de 20 % d'actions Intel et de 80 % d'actions Coca-Cola, sont plus avantageux pour l'investisseur sur les deux plans : Le rendement attendu est plus élevé et la volatilité est plus faible. Par conséquent, investir uniquement dans l'action Coca-Cola n'est pas une bonne idée.

FIGURE 11.3

Volatility Versus Expected Return for Portfolios of Intel and Coca-Cola Stock

Labels indicate portfolio weights (x_I, x_C) for Intel and Coca-Cola stocks. Portfolios on the red portion of the curve, with at least 20% invested in Intel stock, are efficient. Those on the blue portion of the curve, with less than 20% invested in Intel stock, are inefficient—an investor can earn a higher expected return with lower risk by choosing an alternative portfolio.



Nous disons qu'un portefeuille est inefficace lorsqu'il est possible d'en trouver un autre qui soit meilleur en termes de rendement attendu et de volatilité. Si l'on regarde la figure 11.3, un portefeuille est inefficace s'il existe d'autres portefeuilles au-dessus et à gauche (c'est-à-dire au nord-ouest)

de celui-ci. Investir uniquement dans l'action Coca-Cola est inefficace, et il en va de même pour tous les portefeuilles dont l'action Coca-Cola représente plus de 80 % (partie bleue de la courbe). Les portefeuilles inefficaces ne sont pas optimaux pour un investisseur qui recherche des rendements élevés et une faible volatilité.

En revanche, les portefeuilles contenant au moins 20 % d'actions Intel sont efficaces (partie rouge de la courbe) : Il n'y a pas d'autre portefeuille composé des deux actions qui offre un rendement attendu plus élevé avec une volatilité plus faible. Mais si nous pouvons exclure les portefeuilles inefficaces en tant que choix d'investissement inférieurs, nous ne pouvons pas facilement classer les portefeuilles efficaces : les investisseurs choisiront parmi eux en fonction de leurs propres préférences en matière de rendement par rapport au risque. Un investisseur extrêmement conservateur qui se soucie uniquement de minimiser le risque choisira le portefeuille à la volatilité la plus faible (20 % Intel, 80 % Coca-Cola). Un investisseur agressif pourrait choisir d'investir à 100 % dans l'action Intel (même si cette approche est plus risquée, l'investisseur peut être prêt à prendre ce risque pour obtenir un rendement attendu plus élevé).

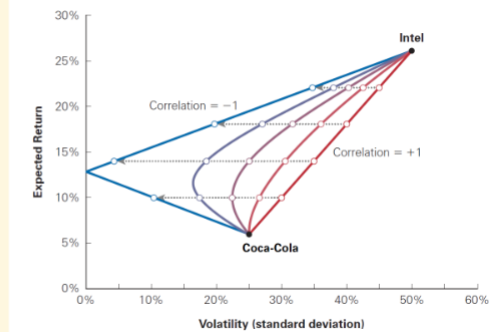
1.2.1 L'effet de corrélation

Dans la figure 11.3, nous avons supposé que les rendements des actions Intel et Coca-Cola n'étaient pas corrélés. Examinons comment les combinaisons de risque et de rendement changeraient si les corrélations étaient différentes. La corrélation n'a aucun effet sur le rendement attendu d'un portefeuille. Par exemple, un portefeuille 40-60 aura toujours un rendement attendu de 14 %. Cependant, la volatilité du portefeuille diffère en fonction de la corrélation. En particulier, plus la corrélation est faible, plus la volatilité est faible. Si l'on se réfère à la figure 11.3, plus la corrélation et donc la volatilité des portefeuilles sont faibles, plus la courbe représentant les portefeuilles s'infléchit vers la gauche, comme l'illustre la figure 11.4.

FIGURE 11.4

Effect on Volatility and Expected Return of Changing the Correlation between Intel and Coca-Cola Stock

This figure illustrates correlations of 1, 0.5, 0, -0.5 and -1. The lower the correlation, the lower the risk of the portfolios.



Lorsque les actions sont parfaitement corrélées positivement, on peut identifier l'ensemble des portefeuilles par la ligne droite qui les sépare. Dans ce cas extrême (la ligne rouge de la figure 11.4), la volatilité du portefeuille est égale à la volatilité moyenne pondérée

des deux actions (il n'y a pas de diversification). En revanche, lorsque la corrélation est inférieure à 1, la volatilité des portefeuilles est réduite du fait de la diversification et la courbe s'infléchit vers la gauche. La réduction du risque (et l'inflexion de la courbe) s'accroît à mesure que la corrélation diminue. À l'autre extrême de la corrélation négative parfaite (ligne bleue), la ligne redevient droite, mais cette fois, elle se réfléchit sur l'axe vertical. En particulier, lorsque les deux actions sont parfaitement corrélées négativement, il devient possible de détenir un portefeuille qui ne comporte absolument aucun risque.

1.2.2 Rendement attendu et volatilité en cas de vente à découvert

1.2.3 Portefeuilles efficaces avec de nombreux titres

1.2.4 Épargne et emprunt sans risque