Produits dérivés
- Les stratégies sur options -

Marc Desban, Ph.D.[†,‡,Δ,δ,φ]

[†]Associate Professor of Finance,

[‡]Maître de Conférences en Sciences de Gestion et du Management, spécialisé en Finance de Marché

[Δ]University Paris-Est Créteil (UPEC), UFR d'AEI International School
61, avenue du Général de Gaulle 94010 Créteil Cedex France

[δ]Research Unit : IRG (EA 2354)

[φ]e-mail : marc.desban@u-pec.fr

Définitions

Qu'est ce qu'une option ?

- Une option est un titre financier conditionnel qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent, à un prix déterminé à l'avance et pendant une période donnée.
- Pour exercer ce droit, l'acheteur de l'option doit verser une prime au vendeur.
- Cette option peut être exercée soit à l'échéance (option européenne), soit pendant la durée d'exercice (option américaine).

Caractéristiques des options

- Les options se sont considérablement développées depuis la fin des années 1970.
- Ce type de produit financier permet à son détenteur de se couvrir ou de spéculer contre une évolution défavorable du prix d'un titre financier en utilisant la possibilité d'acheter ou non un actif sous-jacent.

Définitions

Organisation

- Les options peuvent être négociées sur un marché organisé (contrats standardisés, chambre de compensation, appels de marge) ou de gré à gré, c'est-à-dire directement entre l'émetteur et le souscripteur de l'option.
- Les options simples, dites vanilles, s'opposent aux options exotiques, nettement plus complexes à évaluer.
- À la différence des contrats à terme, une option ne constitue pas une obligation pour son détenteur.
- L'option peut être levée si le détenteur décide d'exercer son droit. Ce droit peut également être revendu à un tiers (option négociable).

Les marchés d'options

L'organisation du marché

- Le rôle des marchés organisés d'options est tout d'abord d'assurer la liquidité des options, *i.e*, la cotation permanente et l'existence d'un prix unique pour une option donnée.
- Deuxièmement, l'existence de marchés organisés simplifie la gestion des contrats optionnels en éliminant le risque de contrepartie, car la contrepartie unique de tous les contrats sur un marché organisé est la chambre de compensation de la bourse.
- Les différents participants des marchés d'options sont
    - Les brokers (courtiers) qui exécutent les ordres des investisseurs ;
    - Les market makers (teneurs de marché) qui risquent leur propre capital et assurent la liquidité du marché.
    - Les spécialistes affichent en permanence les prix sur les options les plus liquides. Les contrepartistes répondent aux demandes de prix.
    - La chambre de compensation qui sert à éliminer le risque de contrepartie.

Les différents type de sous-jacents

Quid de l'indexation ?

Les options sont écrites sur :

- Actions (CBOE : 1332 actions, MONEP : 67 actions),
- Indices (CAC40, S&P500, indices sectoriels etc.)
- Taux de change (PHLX)
- Obligations ou swaps
- Futures sur marchandises (commodity): cacao, café, sucre, blé mais aussi des matières premières telles que l'électricité etc.

Les marchés les plus liquides sont ceux d'options sur indices. Ce sont aussi des marchés où on a le plus besoin d'une calibration précise (car les fourchettes bid-ask sont étroites) et où on a le maximum de données disponibles (par exemple, sur CBOE on trouve plus de 500 options de 8 maturités différentes allant de quelques jours à deux ans sur l'indice S&P 500).

Les types d'options

Des produits basés sur de l'anticipation

- Si, à la date d'échéance, l'acquéreur de l'option n'a pas effectué l'opération à laquelle le contrat passé avec le vendeur lui donne droit, il abandonne l'option.
- L'avantage des contrats optionnels par rapport aux contrats fermes est qu'ils permettent à la fois de se protéger contre le risque (exercice de l'option In The Money) tout en ayant la possibilité de profiter d'une évolution favorable des taux (abandon de l'option restant Out of The Money).
- Il existe deux sortes d'options :
  1. les options d'achat (call),
  2. les options de vente (put)
- Les options sont également appelées options de placement et d'emprunt lorsqu'il s'agit d'options de taux d'intérêt.

Les types d'options

Parmi les options classiques, on distingue :

- les options d'achat (call),
- les options de vente (put).

Le Call

- Un call donne à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à un prix d'exercice défini dans le contrat.
- Le vendeur du call a l'obligation de livrer l'actif sous-jacent dès lors que l'acheteur décide d'exercer son option.

Le Put

- Un put donne à son détenteur le droit de vendre l'actif sous-jacent à un prix d'exercice défini dans le contrat.
- Le vendeur du put a l'obligation d'acheter l'actif sous-jacent au prix d'exercice dès lors que le détenteur du put décide d'exercer son option.

Caractérisation d'une option

Les paramètres d'une option

Le Call

- **l'actif sous-jacent** (S_t) : il peut s'agir d'une action, d'un indice boursier, d'une obligation, d'une devise ou de matières premières ; le prix de l'actif sous-jacent, correspondant au cours spot et noté S_t, évolue en fonction des conditions de l'offre et de la demande sur le marché ;
- **le prix d'exercice ou strike** (K) : prix auquel le détenteur de l'option peut exercer son droit, i.e. au prix auquel l'acheteur peut acquérir l'actif sous-jacent durant la période de vie ; c'est un prix de référence ; en fonction de l'évolution du prix du sous-jacent, l'option peut être levée si le prix d'exercice est avantageux et que l'investisseur peut réaliser un profit;
- **la date d'exercice** (T) : date à laquelle l'option perd toute valeur et disparaît ; elle correspond au jour auquel l'option peut être exercée ; plus la date d'exercice de l'option est lointaine, plus le prix de l'option est élevé ;
- **la prime de l'option** (ou premium) : elle correspond au prix auquel l'investisseur souscrit le titre auprès de l'émetteur ou directement sur le marché ; la prime est définitivement acquise au vendeur de l'option ; le vendeur d'un call ou d'un put touche ainsi une prime à la date d'émission du titre.

Exemple

Les paramètres d'une option et leurs influences

Call option on CAC 40

- L'acheteur d'un call sur l'indice CAC 40 a tout intérêt à exercer son option si la valeur finale de l'indice, qui constitue ici l'actif sous-jacent, est supérieure au prix d'exercice.
- Si le prix d'exercice est de 5 050 points et que l'indice CAC 40 vaut 5 100 points, l'investisseur peut exercer son option en achetant la contrepartie au prix de 5 050 points et revendre directement l'actif sur le marché au prix de 5 100 points.
- Il empochera la différence, i.e. 50 points.
- Il devra cependant retirer le montant de la prime payée pour déterminer la rentabilité de son investissement.

Exemple

Les paramètres d'une option et leurs influences

Put option on CAC 40

- Dans le cadre d'un put, la logique est exactement opposée. L'acheteur du contrat a acquis un droit de vendre. Ainsi, il peut livrer le sous-jacent, ici le tracker sur l'indice CAC 40, à la contrepartie vendeuse du contrat dès lors que le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice de l'option à l'échéance.
- Si le prix d'exercice est de 5 000 points et que l'indice CAC 40 vaut 4 900 points, l'investisseur peut exercer son option.
- Pour cela, il achète la contrepartie au prix de 4 900 points (il en prend livraison) et revend directement l'actif au prix de 5 000 points.
- Il empoche ainsi la différence, i.e. 100 points. Il devra également retirer le montant de la prime du put payée pour déterminer la rentabilité de son investissement.

Les options américaines

Quelles différences avec les options européennes

- Pour les options américaines, l'exercice de l'option est possible à toute date t avant la maturité T ou à la maturité.
- Cette avantage justifie donc qu'elle soit plus chère que l'option européene.
- La différence entre les deux prix s'appelle la prime d'exercice anticipée (early exercise premium).

Les options exotiques

Une overview des options dites exotiques notamment utilisées dans les structurés

Une multitude d'options

- Options à barrière : le paiement a lieu (n'a pas lieu) si le sous-jacent a dépassé un niveau contractuel (la barrière) avant cette date.
- Options asiatiques : le payoff dépend de la valeur moyenne du sous-jacent pendant la vie de l'option (pour empêcher la manipulation des prix).
- Options multi-sousjacent : sur un panier d'actions, un panier de taux de change etc.
- Les options forward start. Le strike d'une telle option est déterminé à une date future selon une règle spécifié, par exemple, le pay-off peut être :

$$H_T = (S_T - mS_{T_0})^+ \tag{1}$$

où $T_0 < T$ est une date future et m est un nombre fixé dans le contrat.

Les options exotiques

Une overview des options dites exotiques notamment utilisées dans les structurés

Les *ratchet options*

- Les options cliquets : options vu comme une séquence d'options forward start, avec des dates de départ de plus en plus éloignées. Par exemple le pay-off d'une telle option de maturité $T = 1$ an peut être donné par :

$$\sum_{i=1}^{12} \max(0, r_i), \quad r_i = S_{\frac{i}{12}} - S_{\frac{i-1}{12}} \tag{2}$$

- Cette option permet alors de récupérer l'ensemble des performances positives d'un indice de référence sans en subir des performances négatives.
- Une option cliquet, parfois appelée *ratchet option*, est une option exotique globale, constituée de plusieurs options démarrant à des dates ultérieures et pour des périodes déterminées, avec des prix d'exercice égaux aux cours marqués par le sous-jacent à ces dates.
- Les performances de chaque option sont enregistrées et peuvent être reversées périodiquement (typiquement, lors de leur maturité respective) ou en une seule fois, à l'échéance de l'option cliquet.

Les stratégies optionnelles de base

Statégies sur options vanilles

Définitions

Le détenteur peut décider d'exercer ou non l'option qu'il détient en fonction de l'évolution du prix de l'actif sous-jacent par rapport au prix d'exercice (K) de l'option. On dit que l'option est :

- dans la monnaie (*in the money*) si la levée de l'option permet de dégager un profit pour son détenteur,
- à la monnaie (*at the money*) si le prix d'exercice est égal au cours spot de l'actif sous-jacent,
- hors de la monnaie (*out of the money*) si la levée de l'option ne permet pas de dégager un profit pour son détenteur.

Il existe globalement quatre profils de gain en fonction des stratégies :

1. l'achat d'un call,
2. la vente d'un call,
3. l'achat d'un put,
4. la vente d'un put.

Les stratégies optionnelles de base

Call & Put options

Call option

- L'option d'achat ≪ Call ≫ confère à son acheteur le droit d'acheter un sous-jacent S à maturité T *i.e.* S_T au prix K. Le sous-jacent S est noté S_0 en $t = 0$.
- Arrivé à maturité (T), si $S_T > K$, l'option sera exercée, autrement ($S_T < K$), l'option sera abandonnée. Le payoff du call peut donc être noté $C = \max(S_T - K, 0)$.

Put option

- L'option de vente ≪ Put ≫ confère à son acheteur le droit de vendre un sous-jacent S à maturité T *i.e.* S_T au prix K. Le sous-jacent S est noté S_0 en $t = 0$.
- Arrivé à maturité (T), si $S_T < K$, l'option sera exercée, autrement ($S_T > K$), le Put sera abandonnée. Le payoff du Put peut donc être noté $P = \max(K - S_T, 0)$.

Les stratégies optionnelles de base

Stratégies sur options et arbitrages

Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA)

- Considérons une quantité de liquidité notée K. Cette quantité investie au taux r en temps discret donnera dans T : $K(1+r)^T$. En temps continu, cette valeur sera Ke^{rT}.
- Considérons deux portefeuilles A et B. Si leurs valeurs liquidatives en T est égale *i.e.* $V_A(T) = V_B(T)$ alors par hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), $V_A(0) = V_B(0)$.
- En effet, si $V_A(0) > V_B(0)$, on achèterait B en vendant à découvert A.

Achat d'un Call

Long position

L'anticipation d'une hausse de l'actif sous-jacent

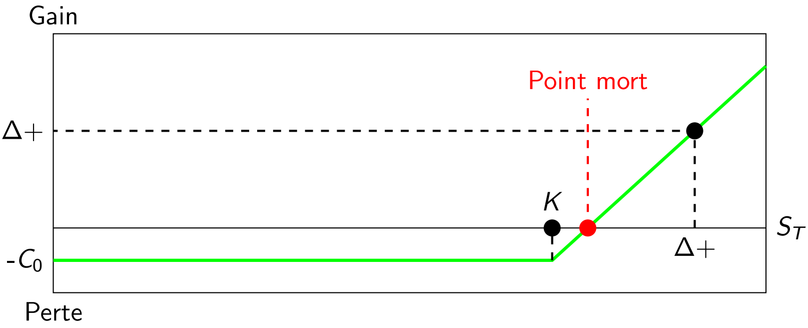
- L'acheteur d'un call paie la prime C_0 au vendeur : il anticipe ainsi une hausse de la valeur de l'actif sous-jacent.
- Si le prix de l'actif sous-jacent (S_T) est inférieur au prix d'exercice (K) de l'option, l'acheteur n'a pas intérêt à exercer son option : il perd donc ici la valeur de la prime payée au vendeur.
- Dès que le prix de l'actif sous-jacent (S_T) dépasse le prix d'exercice de l'option (K), l'acheteur a intérêt à exercer son option.
- Son profit sera positif lorsque le prix de l'actif sous-jacent dépassera le prix d'exercice de l'option plus le montant de la prime payée.
- La perte de l'acheteur du call est limitée au montant de la prime versée ; son gain est potentiellement illimité.

Payoff du Call option

Achat d'un Call (Long Call)

Call option

- Supposons le sous-jacent S à maturité T (S_T), un strike price K le prix d'un Call C_0.
- Le payoff du Call est donné par : $C = \max(S_T - K, 0)$.

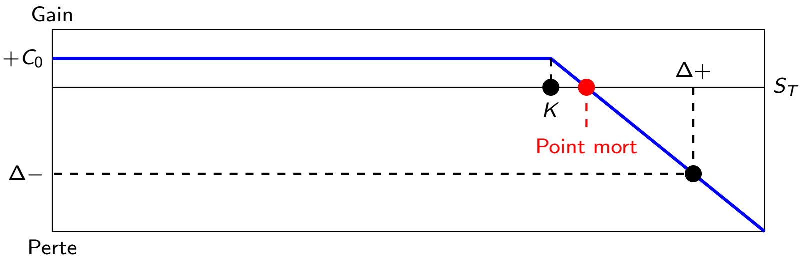


Payoff du Call option

Vente d'un Call (Short Call)

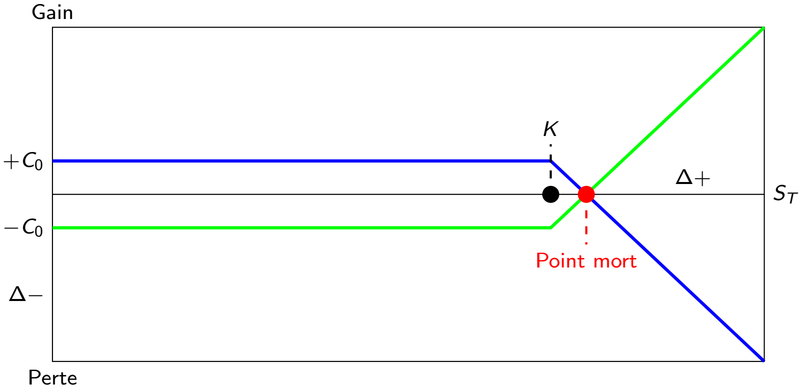
Call option

- Le profil de gain du vendeur du call est symétrique à celui de l'acheteur. Il perçoit la prime C_0 versée car il anticipe une baisse du sous-jacent. Si le prix du sous-jacent (S_T) est inférieur au strike (K), le vendeur n'a pas à livrer l'actif à l'acheteur. Mais dès que le prix du sous-jacent (S_T) dépasse le strike (K), l'acheteur a intérêt à exercer son option. Le vendeur doit livrer la quotité de l'actif défini dans le contrat.
- Le gain du vendeur d'un call est limité à C_0 ; sa perte est potentiellement illimitée.



Payoff du Call option

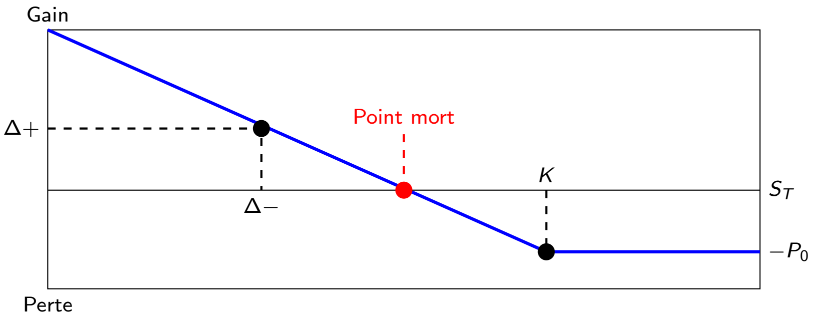
Achat + Vente d'un Call (Long-Short Call Option)



Achat d'un Put

Put option

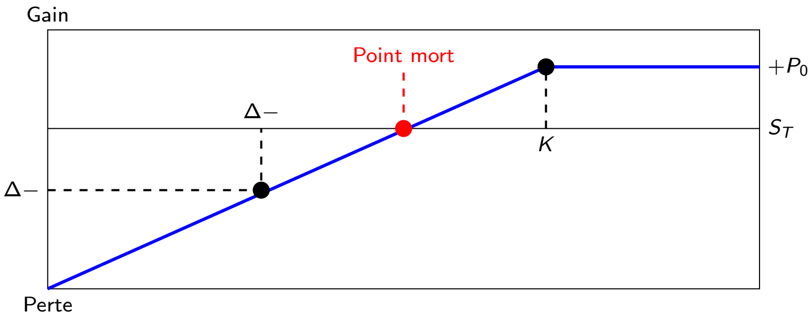
- Supposons le sous-jacent S à maturité T (S_T), un strike price K le prix d'un Put P_0.
- Arrivé à maturité (T), si $S_T < K$, l'option sera exercée, autrement ($S_T > K$), le Put sera abandonnée. $P = \max(K - S_T, 0)$.



Vente d'un Put option

Put option

- Supposons le sous-jacent S à maturité T (S_T), un strike price K le prix d'un Put P_0.
- Arrivé à maturité (T), si $S_T < K$, l'option sera exercée, autrement ($S_T > K$), le Put sera abandonnée. $P = \max(K - S_T, 0)$.



La Parité Call-Put

Les enjeux d'une absence d'opportunité d'arbitrage

La rentabilité en temps continu

Supposons que la somme V_0 est investie durant T années. L'opérateur de marché obtiendra la valeur future V_N équivalente, en temps discret, à :

$$V_T = V_0 \cdot (1 + r)^T \tag{3}$$

Ce qui amène :

$$V_0 = \frac{V_T}{(1 + r)^T} \tag{4}$$

Par équivalence, une liquidité K, à la maturité T correspondant au strike price d'une option à maturité, en temps continu, au taux d'intérêt r, donne la valeur de K en $t = 0$ à Ke^{-rT}.

La parité Call-Put

Tester la parité Call-Put

- Supposons à nouveau que les valeurs des deux portefeuilles A et B soient égales *i.e.* $V_A(T) = V_B(T)$.
- Nous pourrions composer différemment les portefeuilles afin d'observer si leurs valeurs à l'échéance sont toujours égales. Autrement dit, nous pouvons tester la parité Call-Put :

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0 \tag{5}$$

- Le portefeuille A contient un Call (C) ainsi qu'une liquidité en $t = 0$ de Ke^{-rT} ;
- Le portefeuille B contient un Put (P) et le sous-jacent en $t = 0$ noté S_0.

La parité Call-Put

Illustration de deux stratégies

- Le portefeuille A contient un Call (C) ainsi qu'une liquidité en $t = 0$ de Ke^{-rT} ;
- Le portefeuille B contient un Put (P) et le sous-jacent en $t = 0$ noté S_0.
- À partir des éléments présentés on a :
  - $V_A(T) = \max(S_T - K, 0) + K$;
  - $V_B(T) = \max(K - S_T, 0) + S_T$.
- Sachant que :
  - $V_A(0) = C + Ke^{-rT}$;
  - $V_B(0) = P + S_0$.

La parité Call-Put

Illustration de deux stratégies

- À maturité T, deux possibilités s'offrent à nous :
  1. Si $S_T > K$ (Call exercé, Put abandonné) :
     - $V_A(T) = \max(S_T - K, 0) + K$ donc $V_A(T) = S_T$
     - $V_B(T) = \max(K - S_T, 0) + S_T$ donc $V_B(T) = S_T$
  2. Si $S_T < K$ (Put exercé, Call abandonné) :
     - $V_A(T) = \max(S_T - K, 0) + K$ donc $V_A(T) = K$
     - $V_B(T) = \max(K - S_T, 0) + S_T$ donc $V_B(T) = K$
- Sous hypothèse d'AOA, si les portefeuille A et B ont la même valeur en T alors les deux ont la même valeur en $t = 0$.
- Dans tous les cas de figure, la valeur des portefeuilles A et B valent $V_A(T) = V_B(T) = \max(S_T, K)$. Si $V_A(T) = V_B(T)$ alors $V_A(0) = V_B(0)$ et donc on a bien $C + Ke^{-rT} = P + S_0$ ce qui entraine $C = P + S_0 - Ke^{-rT}$.
- Cette formulation nous apprend qu'un Call est équivalent à un portefeuille constitué, de l'actif sous-jacent, d'un put et d'un emprunt de valeur future égale au prix d'exercice.

L'intérêt de cette parité

Les enjeux de l'AOA

Reprenons la parité suivante :

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0 \tag{6}$$

Le principal intérêt de cette relation réside dans le fait qu'elle exprime la valeur d'un call en fonction d'un put et vice versa mais aussi une stratégie de réplication.

$$C = P + S_0 - Ke^{-rT} \tag{7}$$

La valeur d'un call de strike K est identique à celle d'un portefeuille composé d'un put de strike K et d'un titre S financés par l'emprunt d'un montant qui vaudra K à l'échéance pendant une période T au taux r. On appelle cette stratégie un call synthétique.

$$P = -S_0 + Ke^{-rT} + C \tag{8}$$

La valeur d'un put de strike K est identique à celle d'un portefeuille composé d'un call de strike K de la vente à découvert d'un titre S qui finance le placement d'un montant qui vaudra K à l'échéance T au taux r. On appelle cette stratégie un put synthétique.

L'intérêt de cette parité

Les enjeux de l'AOA

$$S_0 = C + Ke^{-rT} - P \tag{9}$$

On peut répliquer la valeur d'un titre en plaçant un montant qui vaudra K au terme de T années au taux d'intérêt r, achetant un call de strike K et en vendant à découvert un put P de strike K, sachant que le call et le put ont la même maturité T=. Cette stratégie s'appelle un sous-jacent synthétique.

Enfin

$$Ke^{-rT} = P + S_0 - C \tag{10}$$

On peut répliquer le placement sans risque d'un montant qui vaudra à l'échéance pendant une période T en achetant le sous-jacent S en vendant un call C de strike K à découvert et en achetant un put P de strike K, sachant que le call et le put ont la même maturité T. Cette stratégie s'appelle un placement monétaire synthétique ou placement sans risque synthétique.

L'utilisation des options

Trois grands types de stratégies

Il existe trois sortes de stratégies types :

1. Les stratégies nues ou naked positions : achat ou vente de l'option sans détenir le sous-jacent.
2. Les stratégies simples de protection ou d'assurance, à proprement parler : achat de call ou de put dans le but de couvrir l'achat ou la vente future du sous-jacent détenu.
3. Les stratégies à caractère directionnel et plus ou moins spéculatives : dites ≪ bullish ≫ (gagner en marché haussier) ou ≪ bearish ≫ (gagner en marché baissier).
    a. Les spreads : achat et vente simultanée d'options identiques sauf pour leur prix d'exercice.
    b. Les straddles : achat (ou vente) d'un call et d'un put identiques.
    c. Les strips : achat (ou vente) de deux puts et d'un call identiques.
    d. Les strangles : achat (ou vente) d'un put et d'un call, tous les deux out-of-the money de prix d'exercice donc différents.

Les Caps, les Floors et les Collars

Mesure et gestion du risque de taux

Définitions

- Le recours aux options de taux classiques dans le but de s'assurer un taux sur longue période est délicat du fait que les échéances maximales sont d'environ un an.
- C'est la raison pour laquelle on a vu se développer d'autres contrats: les Caps, les Floors et les Collars qui portent sur des échéances pouvant aller jusqu'à dix ans (davantage) et représentent des contrats conditionnels négociés de gré à gré.

Les Caps

Mesure et gestion du risque de taux

Définition d'un cap

- Le Cap est un contrat établi entre deux parties (OTC) pour une durée déterminée. Il mentionne un taux fixe (Strike) et un montant notionnel qui servent de référence pour évaluer les sommes à payer ou à recevoir.
- A la fin de chaque période de référence (Euribor 3 mois par exemple), si le taux du marché et supérieur au taux fixe du contrat (Strike Rate du Cap), l'acheteur reçoit une somme en fonction du différentiel de taux (on dit que l'option est dans la monnaie).
- À l'inverse, si le taux du marché est en dessous du taux fixe du contrat, il n'y a aucun versement (l'option est en dehors de la monnaie et n'est donc pas exercée par l'acheteur).
- L'acquisition d'un Cap permet ainsi de garantir un taux maximum (Cap) d'emprunt moyennant le versement d'une prime (coût) de l'acheteur au vendeur.

Application : Mise en place d'un contrat de Cap

Contrat de Cap

Une entreprise a contracté un emprunt (Passif initial) de 10,000,000€ sur 1 an à Euribor 3 mois (4 trimestrialités). Désireuse de se garantir un taux maximum pour son emprunt, tout en bénéficiant d'une évolution favorable des taux en cas de baisse et contracte un Cap dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Durée : 1 an,
- Notionnel : 10M€,
- Taux de référence : Euribor 3 mois (E3M),
- Taux Plafond Garanti : 3%,
- Prime à payer trimestriellement : 0,5%

Correction : Mise en place d'un contrat de Cap

Résultat de la stratégie de couverture (hedging) Cap

Résultats par trimestre

Trimestres	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Évolution de l'E3M	3,25%	3,1%	2,85%	3,05%
Taux plafond garanti	3%	3%	3%	3%
Δ d'intérêt	$(3,25\% - 3\%) \times 10M€ \times 3/12$	$(3,10\% - 3\%) \times 10M€ \times 3/12$	Pas de différentiel	$(3,05\% - 3\%) \times 10M€ \times 3/12$
Versement prime : $0,5\% \times 10M€ \times 3/12$	- 12,5k€	- 12,5k€	- 12,5k€	- 12,5k€

Les Floors

Contrat de Floor

- Le Floor : un Floor est une série d'options de prêt qui sert à se couvrir contre la baisse des taux.
- Ses principes sont symétriques à ceux du Cap, puisqu'il permet à un prêteur de se protéger contre un baisse des taux sur une longue période (en général de 2 à 10 ou 15 ans), tout en conservant l'opportunité de bénéficier d'une hausse éventuelle.
- Cet instrument financier garantit un taux plancher (Floor) de placement moyennant le versement d'une prime (coût) de l'acheteur au vendeur.
- Quand le taux de placement est inférieur au taux garanti (Strike Rate du Floor), l'acheteur d'un Floor exerce son option afin de percevoir le différentiel de taux de la part du vendeur.

Les Floors : application

Contrat de Floor

- Contrat de Floor : une entreprise a réalisé un placement (Actif initial) de 10M€ sur 1 an à Euribor 3 mois (4 trimestrialités).
- Désireuse de se garantir un taux minimum pour son placement, tout en bénéficiant d'une évolution favorable des taux en cas de hausse et contracte un Floor dont les caractéristiques sont les suivantes :
  - Durée : 1 an ;
  - Notionnel : 10M€ ;
  - Taux de référence : Euribor 3 mois (E3M) ;
  - Taux Plancher Garanti : 2,75% ;
  - Prime à payer trimestriellement : 0,5%

Correction : Mise en place d'un contrat de Floor

Résultat de la stratégie de couverture (hedging) Floor

Résultats par trimestre

Trimestres	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Évolution de l'E3M	3%	2,6%	2,5%	2,4%
Taux plafond garanti	2,75%	2,75%	2,75%	2,75%
Δ d'intérêt	Pas de différentiel	$(2,75\% - 2,6\%) \times 10M€ \times {}^3/_{12}$	$(2,75\% - 2,5\%) \times 10M€ \times {}^3/_{12}$	$(2,75\% - 2,4\%) \times 10M€ \times {}^3/_{12}$
Versement prime : $0,5\% \times 10M€ \times {}^3/_{12}$	- 12,5k€	- 12,5k€	- 12,5k€	- 12,5k€

Le Collar

Contrat de Collar

- Le Collar : le Collar (ou Tunnel) complète efficacement la gamme des instruments des marchés de gré à gré en apportant à la fois le caractère d'assurance du Cap et du Floor et une réduction du coût de la prime.
- Il permet de garantir une fourchette de taux.
- L'achat de ce produit correspond à l'achat d'un Cap (prime payée) et la vente simultanée d'un Floor (prime reçue).
- Sa vente correspond à l'achat d'un Floor (prime payée) et la vente simultanée d'un Cap (prime reçue).
- La réduction du coût de l'opération est permis par la compensation (partielle ou totale) entre la prime reçue et la prime versée. Les deux stratégies permettent d'assurer un taux d'intérêt compris entre un taux plancher et un taux plafond.

Mise en place d'un Collar

Stratégie de couverture (hedging) Collar

Contrat de Collar

- Contrat de Collar prêteur : Une entreprise a réalisé un placement (Actif initial) de 10M€ sur 1 an à Euribor 3 mois (4 trimestrialités).
- Désireuse de se garantir un taux minimum pour son placement, tout en bénéficiant d'une certaine évolution favorable des taux en cas de hausse (taux maximum) mais éviter de payer des primes trop importantes, contracte un Collar prêteur (achat d'un Floor et vente d'un Cap) dont les caractéristiques sont les suivantes :
  - Durée : 1 an ;
  - Notionnel : 10M€ ;
  - Taux de référence : Euribor 3 mois (E3M) ;
  - Taux Plancher Garanti sur le Floor acheté : 2,75% ;
  - Taux Plafond Garanti sur le Cap vendu : 3,25% ;
  - Prime à payer trimestriellement sur le Floor acheté : 0,5% ;
  - Prime à recevoir trimestriellement sur le Cap vendu : 0,4%.

Correction : Mise en place d'un contrat de Collar

Résultat de la stratégie de couverture (hedging) Collar

Contrat de Collar

Trimestres	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Évolution de l'E3M	3%	2,6%	3%	3,5%
Taux garanti Floor acheté	2,75%	2,75%	2,75%	2,75%
Taux garanti Cap vendu	3,25%	3,25%	3,25%	3,25%
Δ d'intérêt	Pas de différentiel	$+(2,75\% - 2,6\%) \times 10M€ \times {}^{3}/_{12}$	Pas de différentiel	$-(3,25\% - 3,5\%) \times 10M€ \times {}^{3}/_{12}$
Paiement prime Floor : $0,5\% \times 10M€ \times {}^{3}/_{12}$	- 12,5k€	- 12,5k€	- 12,5k€	- 12,5k€
Réception prime Cap : $0,4\% \times 10M€ \times {}^{3}/_{12}$	+10k€	+10k€	+10k€	+10k€

Applications sur les stratégies à caractère directionnel

Problématiques posées à l'investisseur

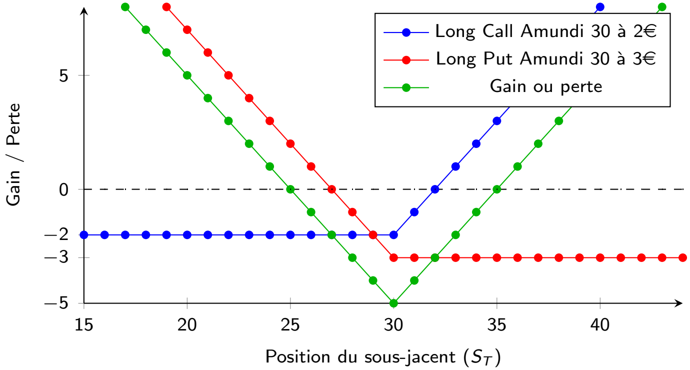
1. Straddle : Le cours de l'action Amundi est de 35€. Un investisseur achète un call Amundi 30 à 2€ ainsi qu'un put Amundi 30 à 3€.
2. Strangle : Le cours de l'action Amundi est de 35€. Un investisseur achète un call Amundi 40 à 1€ ainsi qu'un put Amundi 30 à 2€.
3. Bull Spread : Le cours de l'action Amundi est toujours de 35€. Cette fois l'investisseur achète un call Amundi 35 à 2€ et vend un call Amundi 45 à 0,5€.
4. Butterfly : Le cours de l'action Amundi est toujours de 35€. Cette fois l'investisseur achète un call Amundi 30 à 2€ et un call Amundi 40 à 1€. Il vend, en revanche, deux call Amundi 35 au prix unitaire de 0.50€.
    - Sur quoi parie l'investisseur ? Représenterez graphiquement la position de l'investisseur.

1. Construction d'un *Straddle*

Création d'un arbitrage en cas de forte volatilité

Correction

Le cours de l'action Amundi est de 35€. Un investisseur achète un call Amundi 30 au prix de 2€ ainsi qu'un put Amundi 30 au prix de 3€. L'investisseur est "*long-vol*".

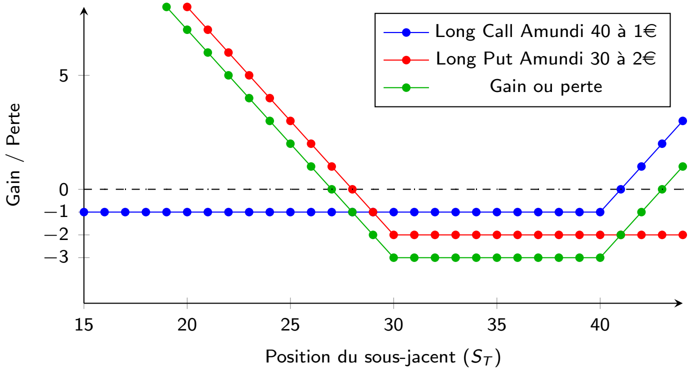


2. Construction d'un *Strangle*

Création d'un arbitrage moins cher que le *Straddle* en cas de très forte volatilité

Correction

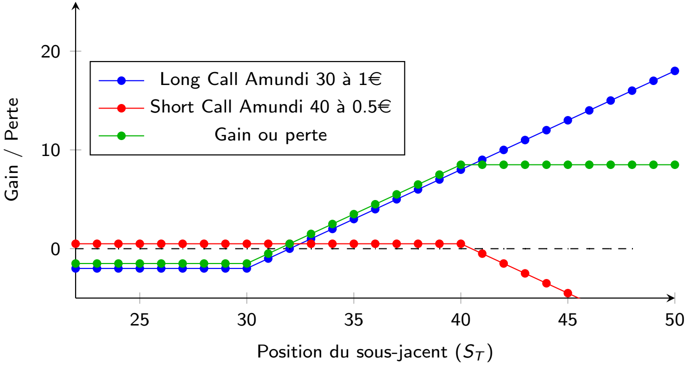
Le cours de l'action Amundi est de 35€. Un investisseur achète un call Amundi 40 au prix de 1€ ainsi qu'un put Amundi 30 au prix de 2€. L'investisseur est "*long-vol*".



3. Construction d'un *Bull Spread*

Stratégie de Bull Spread

- Le cours de l'action Amundi est toujours de 35€. L'investisseur achète un call Amundi 30 à 2€ et vend un Call Amundi 40 à 0,5€.

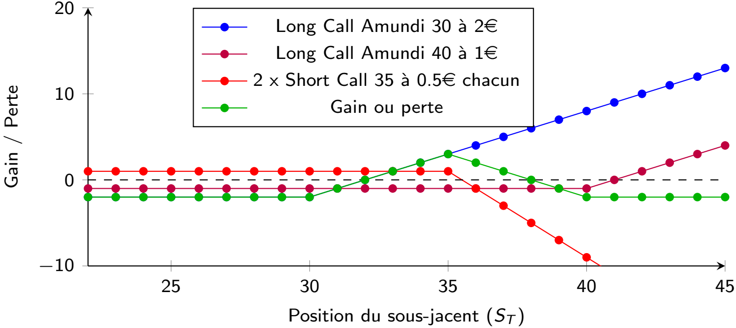


4. Construction d'un *Butterfly*

Création d'une stratégie basée sur une anticipation de faible volatilité à maturité

Stratégie de *Butterfly*

- Le cours de l'action Amundi est toujours de 35€. Cette fois l'investisseur achète un call Amundi 30 à 2€ et un call Amundi 40 à 1€. Il vend, en revanche, deux call Amundi 35 au prix de 0.5€. L'investisseur est, ici, "'*short-vol*".



QCM

Entraînement

1. Une option :
   a. est un contrat ferme.
   b. est un contrat conditionnel.
   c. se négocie exclusivement de gré à gré.
   d. ne peut jamais être revendue avant l'échéance du titre.
2. Une option permet à son détenteur de :
   a. se couvrir.
   b. spéculer.
   c. arbitrer.
   d. Aucune de ces possibilités, car l'acheteur et le vendeur d'une option prennent une position ferme.
3. Une option peut être caractérisée par les éléments suivants :
   a. l'actif sous-jacent.
   b. la prime versée au vendeur de l'option.
   c. la rentabilité de l'option.
   d. le prix d'exercice.

QCM

Entraînement

4. L'acheteur d'un call européen sur action :
    a. verse la prime au vendeur de l'option.
    b. reçoit la prime à la date de dénouement du contrat.
    c. anticipe une baisse de l'action sous-jacente.
    d. anticipe une hausse de l'action sous-jacente.
    e. peut exercer son droit sur toute la durée de l'option.

5. Le vendeur d'un put américain sur action :
    a. verse la prime à l'acheteur de l'option.
    b. reçoit la prime à la date du début du contrat.
    c. anticipe une baisse de l'action sous-jacente.
    d. anticipe une hausse de l'action sous-jacente.
    e. peut exercer son droit uniquement à l'échéance.

Corrigé du QCM

Explications

1. b. Une option est un contrat conditionnel qui permet à son détenteur d'acheter ou de ne pas acheter un actif sous-jacent attaché à l'option. Une option peut se négocier de gré à gré ou sur un marché organisé à partir de contrats standardisés. Les options américaines permettent à leur détenteur de revendre le contrat avant l'échéance.
2. a, b et c. Une option d'achat ou de vente permet à son détenteur les trois stratégies possibles sur les marchés financiers : couverture, spéculation, arbitrage.
3. a, b et d. Une option est caractérisée par les éléments suivants : l'actif sous-jacent ; le prix d'exercice ; la date d'exercice ; la prime de l'option. La rentabilité de l'option ne constitue pas un des facteurs qui permettent de caractériser une option.
4. a et d. L'acheteur d'un call européen anticipe une augmentation de la valeur de l'action sous-jacente. Pour cela, il doit verser la prime de l'option au vendeur du call. Une option européenne n'est exerçable qu'à l'échéance de l'option.
5. b et d. De même, le vendeur d'un put américain anticipe une augmentation de la valeur de l'action sous-jacente. Pour cela, il perçoit la prime au début du contrat. C'est bien l'acheteur et non le vendeur de l'option qui peut exercer son droit sur toute la durée du contrat, et non pas uniquement à l'échéance.

Application 1

Stratégies simples sur options européennes

- M. Buffet, en investisseur avisé, souhaite devenir actionnaire du groupe Saint-Gobain. Mais il estime que les actions Saint-Gobain sont sous-évaluées au regard des performances économiques financières et des perspectives de développement du groupe à l'international.
- M. Buffet envisage d'acquérir des options sur actions Saint-Gobain, de manière à tirer profit de ses anticipations.
- Le 1er mars 2017, l'action Saint-Gobain cote 45,60 €. Le même jour, l'option d'achat européenne (call) associée à cette action cote 2,00 €, avec une échéance au 31 mai 2017 et au prix d'exercice de 48,00 €.
    a. Quelles sont les anticipations de M. Buffet, l'acheteur du call ?
    b. Quel est le seuil de rentabilité de l'opération ?
    c. Si le 31 mai 2017, le titre cote 54,00€, quel sera le résultat (payoff) pour M. Buffet ?

Correction de l'application 1

Stratégies simples sur options européennes

a. Quelles sont les anticipations de M. Buffet, l'acheteur du call ?
   - En souscrivant l'achat de call sur l'action Saint-Gobain, M. Buffet anticipe une augmentation de la valeur de l'action Saint-Gobain sur le marché.

b. Quel est le seuil de rentabilité de l'opération ?
   - Si, à l'échéance du titre le 31 mai 2017, la valeur de l'action Saint-Gobain dépasse le prix d'exercice de l'option plus la valeur de la prime, M. Buffet pourra réaliser un profit issu de sa position. Le seuil de rentabilité est ainsi égal à :
     $SR = K + C_0 = 48,00 + 2,00 = 50,00$.
   - Si le prix de l'action Saint-Gobain dépasse 50,00 €, alors M. Buffet aura intérêt à exercer son option et pourra réaliser ainsi un bénéfice.

c. Si le 31 mai 2017, le titre cote 54,00€, quel sera le résultat (payoff) pour M. Buffet ?
   - Le profit P est déterminé par l'expression suivante :
     $P = S_T - [K - C_O] = 54,00 - 48 - 2 = 4$.
   - Le 31 mai 2017, date d'échéance de l'option, M. Buffet obtient 4,00€ de profit par contrat.

Application 2

Stratégie de couverture par des options composées

- La société Paintelec, spécialisée dans la fabrication des petits matériels électroniques destinés aux appareils électroménagers, souhaite accroître la rentabilité de son portefeuille d'actions.
- M. Sieffo, le directeur financier de Paintelec, décide pour cela de réaliser une opération sur le marché des options sur actions à Paris. Il achète 100 options d'achat sur Michelin le 25 septembre $N+1$, aux conditions suivantes :
  - prix d'exercice (K) : 110,00€ ;
  - prime (C_0) : 3,20€ ;
  - échéance : 31 décembre $N+1$.

  a. Sachant qu'une option porte sur 10 titres Michelin, calculez le montant de la prime versée par la société.
  b. Début décembre, le cours de la société se stabilise autour de 120,00 €. Analysez les deux possibilités qui s'offrent alors à la société.
  c. Dans l'hypothèse où la société exercerait ses options, représentez graphiquement le résultat obtenu en fonction du cours de l'action.
  d. Finalement, la société décide d'exercer ses options alors que le cours de l'action cote 118,30€. Calculez le gain réalisé par la société.
  e. Le vendeur de l'option avait acheté ces titres 112,45€ l'un. Calculez le résultat qu'il réalise.

Correction de l'exercice 2

Stratégie de couverture par des options composées

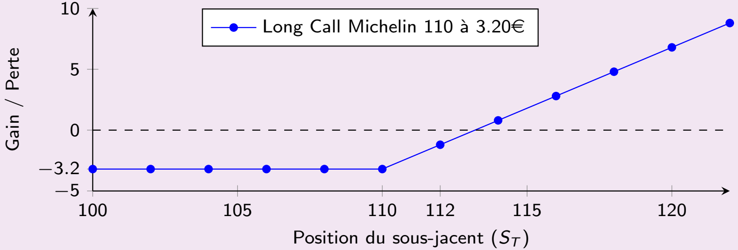
a. Sachant qu'une option porte sur 10 titres Michelin, calculez le montant de la prime versée par la société.
   - L'opération consiste en l'achat de 100 options Michelin pour une prime individuelle de 3,20€. Un contrat porte sur 10 actions. Le montant global de la prime versée est donc de $100 \times 10 \times 3,20 = 3\ 200$€. La société Paintelec doit donc verser au total 3 200€ pour se positionner sur le nombre de titres Michelin.

b. Début décembre, le cours de la société se stabilise autour de 120,00 €. Analysez les deux possibilités qui s'offrent alors à la société.
   - la société Paintelec peut exercer son droit (option à l'américaine), c'est-à-dire acheter à 110€ une action dont la valeur sur le marché est de 120€ ;
   - la société peut vendre ses options dont le cours devrait être supérieur à la valeur intrinsèque (valeur-temps).
   - On peut également considérer que la société va conserver ses options si elle anticipe que le cours de l'action Michelin va continuer à monter.

Correction de l'exercice 2

Stratégie de couverture par des options composées

c. Dans l'hypothèse où la société exercerait ses options, représentez graphiquement le résultat obtenu en fonction du cours de l'action.



- Si le cours est inférieur au strike, la société n'a pas intérêt à exercer son option : elle perd donc la prime.
- Si le cours est supérieur au prix d'exercice, la société a intérêt à lever son option.
- Pour un cours de 120€, le gain net est de : $(120 - 110) \times 10 \times 100 - 3\,200 = 6\,800$.

Correction de l'exercice 2

Stratégie de couverture par des options composées

d. Finalement, la société décide d'exercer ses options alors que le cours de l'action cote 118,30€.
   - Le gain réalisé par la société pour un prix de 118,30€ est : $(118,30 - 110) \times 10 \times 100 - 3\ 200 = 5\ 100$. La société génère ainsi un profit positif de 5 100€.

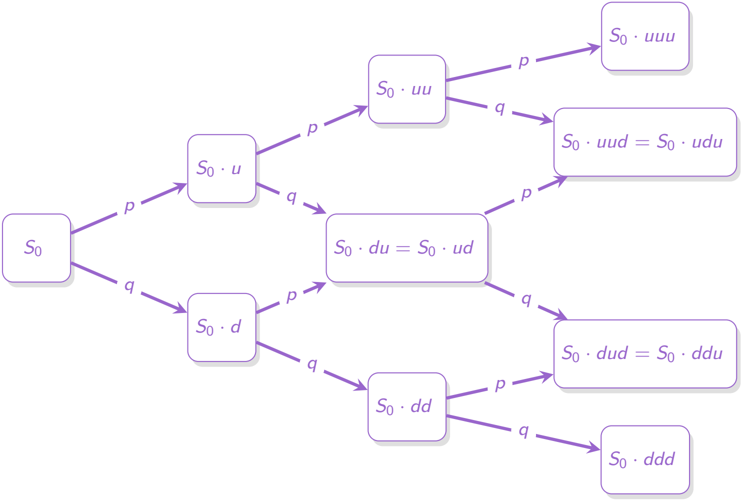
e. Résultat du vendeur des options pour un prix d'achat de 112,45 €
   - Le vendeur était "couvert", il gagne : $3\ 200 + (110 - 112,45) \times 10 \times 100 = 750$.
   - Dans ce cas, le vendeur de l'option gagne également un profit positif de 750€.

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein

- le modèle binomial ou modèle de Cox, Ross et Rubinstein (1979) fournit une méthode numérique pour l'évaluation des options.
- La méthode binomiale utilise un "cadre à temps discret" pour retracer l'évolution de l'actif sous-jacent, via un arbre, pour un nombre donné de "pas" qui correspond au temps entre la date d'évaluation et celle de l'expiration de l'option.
- Chaque noeud de l'arbre est un prix possible du sous-jacent à un moment précis dans le temps. Cette évolution des prix constitue la base de l'évaluation des options.
- Le processus d'évaluation est itératif. On part du noeud final de chaque branche et ensuite on remonte jusqu'au premier noeud (date d'évaluation), où le résultat du calcul correspond à la valeur de l'option.
- Cette méthode implique le processus suivant :
  1. création de l'arbre,
  2. calcul de la valeur de l'option au nœud final de chaque branche,
  3. calcul progressif de la valeur de l'option à partir du nœud précédent,
  4. la valeur du premier nœud étant la valeur de l'option.

Application du modèle de Cox, Ross et Rubinstein

Évolution du prix d'un actif selon le modèle CRR à 3 périodes



Les éléments préalables du modèle Cox, Ross et Rubinstein

L'ensembles des états finaux

$$\Omega = \{uuu, uud, udu, udd, duu, dud, ddu, ddd\} \tag{11}$$

$$S_1 = \begin{cases} S_0 \cdot u & \text{avec probabilité} \quad p \\ S_0 \cdot d & \text{avec probabilité} \quad (1-p) \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} S_0 \cdot u^2 & \text{avec probabilité} \quad p^2 \\ S_0 \cdot ud \text{ ou } S_0 \cdot du & \text{avec probabilité} \quad 2 \cdot p \cdot (1-p) \\ S_0 \cdot d^2 & \text{avec probabilité} \quad (1-p)^2 \end{cases}$$

- 2 états finaux donnent $S_0 \cdot ud$: $\{ud\}, \{du\}$

$$S_3 = \begin{cases} S_0 \cdot u^3 & \text{avec probabilité} \quad p^3 \\ S_0 \cdot u^2 d & \text{avec probabilité} \quad 3 \cdot p^2 \cdot (1-p) \\ S_0 \cdot d^2 u & \text{avec probabilité} \quad 3 \cdot (1-p)^2 \cdot p \\ S_0 \cdot d^3 & \text{avec probabilité} \quad (1-p)^3 \end{cases}$$

- 3 états finaux donnent $S_0 \cdot u^2 d$: $\{uud\}, \{udu\}, \{duu\}$
- 3 états finaux donnent $S_0 \cdot d^2 u$: $\{ddu\}, \{dud\}, \{udd\}$

L'ensembles des états finaux pour 3 périodes

Supposons que $q = 1 - p$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_1] &= p \cdot S_0 \cdot u + S_0 \cdot d(1-p) \\ &= p \cdot S_0 \cdot u + S_0 \cdot dq \\ &= (up + dq) \cdot S_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_2] &= S_0 \cdot u^2 \cdot p^2 + S_0 \cdot ud \cdot 2 \cdot p \cdot (1-p) + S_0 \cdot d^2 \cdot (1-p)^2 \\ &= S_0 \cdot u^2 \cdot p^2 + S_0 \cdot ud \cdot 2 \cdot p \cdot q + S_0 \cdot d^2 \cdot q^2 \\ &= (up + dq)^2 \cdot S_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_3] &= S_0 \cdot u^3 \cdot p^3 + S_0 \cdot u^2 d \cdot 3 \cdot p^2 \cdot (1-p) + S_0 \cdot d^2 u \cdot 3 \cdot (1-p)^2 \cdot p + \\ &\quad S_0 \cdot d^3 \cdot (1-p)^3 \\ &= S_0 \cdot u^3 \cdot p^3 + S_0 \cdot u^2 d \cdot 3 \cdot p^2 \cdot q + S_0 \cdot d^2 u \cdot 3 \cdot q^2 \cdot p + S_0 \cdot d^3 \cdot q^3 \\ &= (up + dq)^3 \cdot S_0\end{aligned}$$

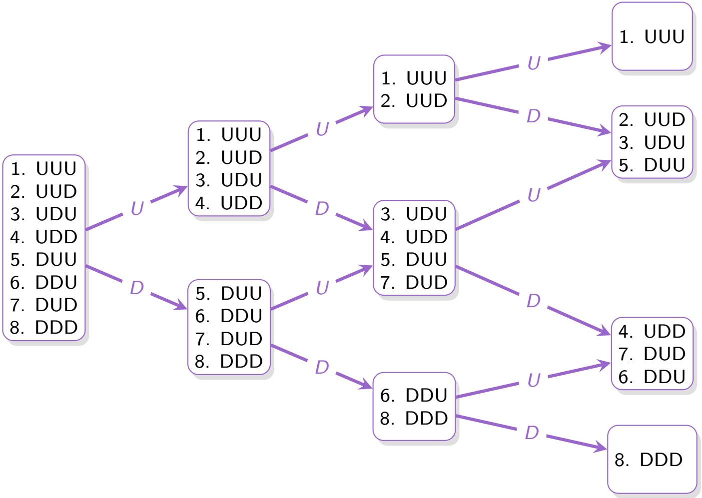
L'ensembles des états finaux pour 3 périodes

L'interprétation des éléments du modèle

- Le processus de prix (S_t), $t = 0, 1, 2, 3$ est alors un processus stochastique en temps discret.
- Chaque valeur S_t est une variable aléatoire c'est-à-dire une fonction de Ω vers $\mathbb{R}$, $\omega \to S_t(\omega)$.
- Si on fixe l'état final ω, on obtient une suite $\{S_0(\omega), S_1(\omega), S_2(\omega), S_3(\omega)\}$ appelée trajectoire du processus (du prix).
- Par exemple, si $\omega = udu$, on obtient la trajectoire $\{S_0, S_0 \cdot u, S_0 \cdot u \cdot d, S_0 \cdot u2 \cdot d\}$
- La trajectoire du prix de l'actif est révélée progressivement au cours du temps.
- À $t = 0$, il a 8 trajectoires possibles. À $t = 1$ on observe S_1 et il reste 4 trajectoires possibles etc.
- On obtient ainsi une filtration de Ω, $\mathbb{F} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$

L'arbre binomiale du modèle de Cox, Ross et Rubinstein

Évolution du prix d'un actif selon le modèle CRR à 3 périodes



Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Définitions des concepts

- Considérons maintenant le processus actualisé du prix :

$$\hat{S}_t = \frac{S_t}{(1+r)^t} \tag{12}$$

- Peut-on trouver les probabilités de hausse et de baisse telles que $\hat{S}_t$ soit une martingale par rapport à la filtration $\mathbb{F} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$?
- La mesure de probabilité p s'appelle mesure de martinguale ou mesure corrigée du risque puisque, sous cette probabilité, le rendement espéré de l'actif risqué est égal au rendement de l'actif sans risque.

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Définitions

1. **Une martingale** est un processus stochastique où la valeur attendue d'un actif à un moment futur, compte tenu de toutes les informations disponibles jusqu'à présent, est égale à sa valeur actuelle.
2. **Une probabilité risque neutre** est une probabilité ajustée qui permet de simplifier le calcul des prix d'actifs dérivés en supposant que tous les investisseurs cherchent à maximiser leur richesse sans se soucier du risque. Dans ce cadre, les rendements attendus des actifs sont équivalents à ceux des actifs sans risque.
3. **Un processus stochastique** est une collection de variables aléatoires indexées par le temps ou par un autre paramètre, qui modélise l'évolution d'un système au fil du temps. En d'autres termes, c'est un modèle mathématique qui décrit comment un phénomène aléatoire évolue.

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Processus stochastiques

- Quels sont les types de processus stochastiques :
  a. **Processus de Markov** : L'évolution future d'un système ne dépend que de son état actuel et non de son passé. Cela simplifie les calculs, car seule l'information présente est nécessaire.
  b. **Processus de Wiener** (ou mouvement brownien) : Un type de processus continu qui modélise le mouvement aléatoire et est utilisé en finance pour modéliser les prix d'actifs.
  c. **Processus de Poisson** : Modélise le nombre d'événements qui se produisent dans un intervalle de temps donné, souvent utilisé pour des événements rares.
- Pour quelles applications ?
  - **Finance** : Pour modéliser les mouvements des prix d'actifs, les taux d'intérêt et d'autres variables économiques.
  - **Ingénierie** : Pour modéliser des systèmes soumis à des variations aléatoires.
  - **Sciences sociales** : Pour analyser des phénomènes tels que la diffusion d'informations ou le comportement humain.

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Implication d'une probabilité risque neutre

Supposons le modèle à une période :

$$S_0 \cdot u \cdot p + S_0 \cdot d \cdot (1-p) = S_0 \cdot (1+r) \tag{13}$$

On simplifie l'équation par S_0:

$$u \cdot p + d \cdot (1-p) = (1+r) \tag{14}$$

$$u \cdot p + d - d \cdot p = (1+r) \tag{15}$$

On cherche à isoler p soit :

$$u \cdot p - d \cdot p = (1+r) - d \tag{16}$$

$$p \cdot (u-d) = (1+r) - d \tag{17}$$

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} \tag{18}$$

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Implication d'une probabilité risque neutre

- En temps discret on a donc :

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} \tag{19}$$

- Si on actualise en temps continu, la mesure de probabilité martinguale s'écrit :

$$p = \frac{e^r - d}{u-d} \tag{20}$$

Passage d'un taux en temps discret à un taux continu

Explication

Considérons un taux d'intérêt en temps discret noté $1 + r$ et un investissement sur n périodes. La valeur future d'un investissement initial P après n périodes est donnée par :

$$V_n = P(1 + r)^n$$

Nous voulons analyser la limite lorsque n tend vers l'infini pour un taux d'intérêt équivalent exprimé sous une forme continue. Nous pouvons reformuler notre expression :

$$V_n = P\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

En utilisant la définition de e^x et en considérant r comme un petit nombre lorsque n devient grand, nous pouvons écrire :

$$\lim_{n \to \infty} (1 + r)^n$$

Passage d'un taux en temps discret à un taux continu

Explication

Nous savons que pour $r = \frac{a}{n}$, où a est constant, la limite devient :

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Donc, pour notre taux d'intérêt en temps discret :

$$\lim_{n \to \infty} (1 + r)^n = e^{\lim_{n \to \infty} n \cdot r}$$

Si nous posons $r = \frac{a}{n}$, nous obtenons :

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot r = a$$

Ainsi, nous avons :

$$\lim_{n \to \infty} (1 + r)^n = e^a$$

Par conséquent, nous avons établi que la valeur future d'un investissement avec un taux d'intérêt discret peut être approximée par la fonction exponentielle lorsque le nombre de périodes n devient très grand.

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

La notion de matingale

- Les deux formules sont vraies quand r est le taux d'intérêt qui prévaut entre deux périodes.
- En général, r est le taux d'intérêt annuel. Dans ce cas,

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} = \frac{e^r - d}{u-d} \tag{21}$$

- Ceci demeure vrai si et seulement si la les périodes considérées sont distantes d'un an. Si ce n'est pas le cas :

$$p = \frac{(1+r)^{\Delta t} - d}{u-d} \tag{22}$$

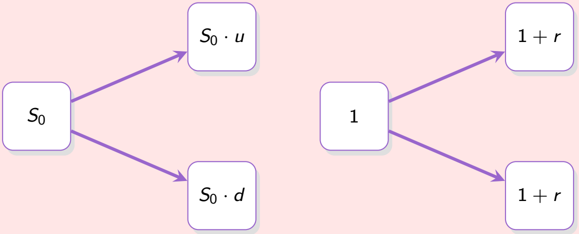
$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d} \tag{23}$$

- où Δt représente l'écart entre deux périodes (exprimé comme proportion d'une année).

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Implications du modèle pour une période

- On considère un univers disposant de deux dates, notées 0 et 1. Il existe trois actifs dans l'économie :
  1. une action, de prix S_0 à la date 0 et pouvant avoir un rendement u (état *up*) ou d'état d (*down*) à la date 1.
  2. un bon du Trésor qui rapporte $(1+r)$€ par € placé.
  3. une option d'achat (call) de type européen, dont le sous-jacent est l'action. Par définition, elle vaut $C_u = \max(u \cdot S_0 - K, 0)$ dans l'état *up* et $C_d = \max(K - u \cdot S_0, 0)$ dans l'état *down*.



Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Implications du modèle pour une période

- On impose que $d < 1 + r < u$. Dans le cas contraire l'action serait systématiquement préférée au bon du trésor (aussi noté r_f) ou vice-versa.
- Les éléments K, S_0, u, d et r sont considérées comme connus. C_d et C_u se calculent directement à partir de ces éléments.
- L'objectif du modèle est de trouver la valeur de l'option à la date $t = 0$ (*i.e.* son prix) telle qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage dans l'économie.

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Implications du modèle pour une période

- Par hypothèse d'AOA, la probabilité de survenance de l'état *up* est :

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} \tag{24}$$

- Remarque : $0 < p < 1$ ssi $d < 1 + r < u$
- Ainsi, la valeur actuelle de l'action, qui correspond à l'espérance actualisée de sa valeur future s'écrit :

$$C = \frac{1}{1+r} \cdot \left(pC_u + (1-p) \cdot C_d\right) \tag{25}$$

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Implications du modèle pour une période

- Notons que :

$$
\begin{aligned}
1 - p &= 1 - \left(\frac{(1+r) - d}{u - d}\right) && (26)\\
&= \frac{u - d}{u - d} - \left(\frac{(1+r) - d}{u - d}\right) && (27)\\
&= \frac{u - d - ((1+r) - d)}{u - d} && (28)\\
&= \frac{u - d - (1+r) + d}{u - d} && (29)\\
&= \frac{u - (1+r)}{u - d} && (30)\\
& && (31)
\end{aligned}
$$

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Implications du modèle pour une période

- Reprenons

$$C = \frac{1}{1+r} \cdot (pC_u + (1-p) \cdot C_d) \tag{32}$$

$$C = \frac{1}{1+r} \cdot \left(\left(\frac{(1+r)-d}{u-d} \right) \cdot \max(u \cdot S_0 - K, 0) + \left(\frac{u-(1+r)}{u-d} \right) \cdot \max(d \cdot S_0 - K, 0) \right)$$

- De la même manière, une option de vente (put) dont le sous-jacent est S et dont le prix d'exercice est K, vaut *de facto* :

$$P = \frac{1}{1+r} \cdot (pP_u + (1-p) \cdot P_d) \tag{33}$$

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Implications du modèle pour une période

$$P = \frac{1}{1+r} \cdot (pP_u + (1-p) \cdot P_d) \tag{34}$$

$$P = \frac{1}{1+r} \cdot \left(\left(\frac{(1+r)-d}{u-d} \right) \cdot \max(K - u \cdot S_0, 0) + \left(\frac{u-(1+r)}{u-d} \right) \cdot \max(K - d \cdot S_0, 0) \right)$$

- Si on considère un put et un call ayant le même sous-jacent et le même prix d'exercice, on retrouve dès lors notre parité Call-Put :

$$C - P = S_0 + \frac{K}{(1+r)} \tag{35}$$

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Exemple

- On cherche a évaluer un call européen d'échance 3 mois et de prix d'exercice fixé à 21€.
- Le cours de l'action est actuellement 20€.
- Pour simplifier, on suppose que, dans 3 mois, le cours de l'action peut augmenter de 10% ou baisser de 10%.
- On suppose, par ailleurs, que le taux sans risque est de 12% annuel.
- Quelle est la valeur du call européen à maturité 3 mois en temps discret ?

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Exemple

- On cherche a évaluer un call européen d'échance 3 mois et de prix d'exercice fixé à 21€.
- Le cours de l'action est actuellement 20€.
- Pour simplifier, on suppose que, dans 3 mois, le cours de l'action peut augmenter de 10% ou baisser de 10%.
- On suppose, par ailleurs, que le taux sans risque est de 12% annuel.
- On pose $K = 21$, $S_0 = 20$, $r_f = 12\%$, $T = \frac{1}{4}$, $u = 1 + 10\%$ et $d = 1 - 10\%$.
- ce qui implique que :

$$C_u = \max(S_0 \cdot u - K, 0) = \max(20 \cdot (1 + 10\%) - 21, 0) = 1 \quad (36)$$
$$C_d = \max(S_0 \cdot d - K, 0) = \max(20 \cdot (1 - 10\%) - 21, 0) = 0 \quad (37)$$

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Exemple

- À partir des éléments précédent, on a :

$$p = \frac{(1+r)^{\Delta t} - d}{u - d} \tag{38}$$

$$p = \frac{(1+12\%)^{\frac{1}{4}} - (1-10\%)}{(1+10\%) - (1-10\%)} = \frac{(1+12\%)^{\frac{1}{4}} - (0.9)}{1.1 - 0.9} = 0.64 \tag{39}$$

$$C = \frac{1}{(1+r)^{\Delta t}} \cdot (pC_u + (1-p) \cdot C_d) \tag{40}$$

- Pour rappel :

$$C = \frac{1}{(1+r)^{\Delta t}} \cdot \left(\left(\frac{(1+r) - d}{u - d} \right) \cdot \max(u \cdot S_0 - K, 0) + \left(\frac{u - (1+r)}{u - d} \right) \cdot \max(d \cdot S_0 - K, 0) \right)$$

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Exemple

- On peut désormais valoriser la valeur du call :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{1+r} \cdot (pC_u + (1-p) \cdot C_d) \\ &= \frac{1}{(1+12\%)^{\frac{1}{4}}} \cdot (0.64 \cdot 1 + (1-0.64) \cdot 0) \\ &= 0.62 \end{aligned}$$

- La valeur d'un call à maturité 3 mois dont le strike est de 21€ avec un spot-price de 20€ coûte actuellement 0.62€.

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Question

- Combien d'actions (sous-jacentes) doit détenir le vendeur du call s'il veut se couvrir contre le risque associé à l'option ?

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein et ses implications

Exemple

- Combien d'actions (sous-jacentes) doit détenir le vendeur du call s'il veut se couvrir contre le risque associé à l'option ?
- Dans l'exemple, si le vendeur détient Δ actions :
  - Dans l'état up, la valeur des actions est de 22€ par action et le call vaut $C_u = 1$.
  - Dans l'état down, ses actions valent désormais 18€ et donc $C_d = 0$.

$$C_u = \max(S_0 \cdot u - K, 0) = \max(20 \cdot (1 + 10\%) - 21, 0) = 1 \quad (41)$$

$$C_d = \max(S_0 \cdot d - K, 0) = \max(20 \cdot (1 - 10\%) - 21, 0) = 0 \quad (42)$$

  - Le portefeuille est sans risque si $22\Delta - 1 = 18\Delta$ ce qui implique que $\Delta = 0.25$

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_0 \cdot u - S_0 \cdot d} \quad (43)$$

  - Les praticiens désignent ce quotient sous le nom de delta de couverture. Le Δ désigne la quantité d'actifs sous-jacent qu'il faut avoir dans son portefeuille si l'on veut couvrir la vente de l'option.

Création d'un portefeuille de couverture

Évaluation du prix dans un modèle à une étape

- Pour évaluer le prix d'une option d'achat à l'instant initial, c'est-à-dire la somme à verser par l'acheteur au vendeur, plaçons nous tout d'abord dans un cas très simple.
- Notons $t = 0$ l'instant de souscription de l'option, $t = T$ son échéance et K son prix d'exercice.
- Supposons que l'actif sous-jacent ait la valeur S_0 à l'instant initial et qu'il ne puisse prendre que deux valeurs $S_T = S_0 \cdot u$ ou $S_T = S_0 \cdot d$ à l'échéance, avec $0 < d < 1 < u$.
- Il est naturel de supposer, en outre, que $S_0 \cdot d < K < S_0 \cdot u$. Soit C_0 la valeur, à déterminer, du call à l'instant $t = 0$; c'est le prix du contrat, ou la prime.

Création d'un portefeuille de couverture

Considérons un espace en temps continu

Évaluation du prix dans un modèle à une étape

- À l'instant initial le vendeur ne sait pas si S_T prendra la valeur $S_0 \cdot u$ ou $S_0 \cdot d$, mais il peut évaluer ce qu'il devra à l'acheteur dans chacun des deux cas : si $S_T = S_0 \cdot d$, l'acheteur n'exercera pas (puisqu'il peut alors acheter l'actif sous-jacent sur le marché à un prix inférieur à K) et donc la valeur de l'option est nulle ; par contre si $S_T = S_0 \cdot u$, l'acheteur réclamera au vendeur la différence entre le prix de marché et le prix convenu K, soit $S_0 \cdot u - K$, somme lui permettant d'effectuer son achat à ce prix.
- Comment le vendeur peut-il, avec la prime qu'il a reçue, faire face à ses engagements ?
- L'idée est d'utiliser la prime pour constituer un portefeuille, appelé portefeuille de couverture p, composé de a actifs S_0 et de b unités monétaires, et de choisir sa composition a et b de telle façon que sa valeur à l'échéance soit précisément celle de l'option, c'est-à-dire 0 si $S_T = S_0 \cdot d$ et $S_0 \cdot u - K$ si $S_T = S_0 \cdot u$.

Création d'un portefeuille de couverture

Considérons un espace en temps continu

Évaluation du prix dans un modèle à une étape

- Si l'on désigne par r le taux d'intérêt monétaire, la composition du portefeuille (a, b) devra donc vérifier les deux équations suivantes :

$$aS_0 \cdot u + b \cdot e^{rT} = S_0 \cdot u - K$$
$$aS_0 \cdot d + b \cdot e^{rT} = 0$$

- Supposons $S_0 = 120, u = 1.5, d = 0.5, r = 0$, et $K = 80$.
- Trouver les valeurs de a et de b satisfaisant le système ci-dessus.

Création d'un portefeuille de couverture

Considérons un espace en temps continu

Évaluation du prix dans un modèle à une étape

- Supposons $S_0 = 120, u = 1.5, d = 0.5, r = 0$, et $K = 80$.

$$aS_0 \cdot u + b \cdot e^{rT} = S_0 \cdot u - K$$
$$aS_0 \cdot d + b \cdot e^{rT} = 0$$

$$L_1 : 120 \cdot a \cdot 1.5 + b \cdot e^{0 \cdot T} = 120 \cdot 1.5 - 80$$
$$L_2 : 120 \cdot a \cdot 0.5 + b \cdot e^{0 \cdot T} = 0$$

$$L_1 : 180 \cdot a + b = 100$$
$$L_2 : 60 \cdot a + b = 0$$

Création d'un portefeuille de couverture

Considérons un espace en temps continu

Évaluation du prix dans un modèle à une étape

$$L_1 : 180 \cdot a + b = 100$$
$$L_2 : 60 \cdot a + b = 0$$

- On va soustraire L_2 à L_1 soit $(L_1 - L_2)$ ce qui amène à :

$$(180 - 60) \cdot a + b - b = 100 \tag{44}$$

$$a = \frac{100}{120} = \frac{5}{6} \tag{45}$$

Création d'un portefeuille de couverture

Considérons un espace en temps continu

Évaluation du prix dans un modèle à une étape

$$a = \frac{5}{6} \tag{46}$$

- On prend désormais L_2 dans lequel on injecte la valeur de a :

$$60 \cdot \frac{5}{6} = -b \tag{47}$$

- On trouve ainsi que $b = -50$

Création d'un portefeuille de couverture

Considérons un espace en temps continu

Évaluation du prix dans un modèle à une étape

- Supposons $S_0 = 120, u = 1.5, d = 0.5, r = 0$, et $K = 80$.

$$aS_0 \cdot u + b \cdot e^{rT} = S_0 \cdot u - K$$
$$aS_0 \cdot d + b \cdot e^{rT} = 0$$

$$L_1 : 120 \cdot a \cdot 1.5 + b \cdot e^{0 \cdot T} = 120 \cdot 1.5 - 80$$
$$L_2 : 120 \cdot a \cdot 0.5 + b \cdot e^{0 \cdot T} = 0$$

- Cela signifie que, ayant touché la prime fixée à $C_0 = 50$, le vendeur emprunte 50 (car $b = -50$) et achète $a = \frac{5}{6}$ de S_0 (au prix 100).

Création d'un portefeuille de couverture

Considérons un espace en temps continu

Évaluation du prix dans un modèle à une étape

- À l'échéance, son portefeuille vaudra soit $150 = \frac{5}{6} \cdot 180$, si $S_T = S_0 \cdot u$, et il paiera alors $100 = 180 - 80$ au détenteur du call et remboursera les 50 empruntés (sans interêts puisqu'on a suppos é que $r = 0$), soit il vaudra $50 = \frac{5}{6} \cdot 60$, si $S_T = S_0 \cdot d$, ce qui, compte tenu du fait que le détenteur du call ne viendra pas l'exercer, lui permet de rembourser les 50 empruntés.
- Remarque 1 : Notons que pour que le problème admette une solution, il suffit que le système admette une solution, ce qui est assuré dès que $u \neq d$, ce qui est précisément l'origine du sens du contrat : si l'actif sous-jacent n'avait qu'un seul prix à $t = T$, il n'y aurait pas besoin de souscrire d'option.
- Remarque 2 : Le raisonnement précédent se généralise facilement à d'autres contrats d'option. Par exemple pour un contrat d'option qui donne le droit de vendre au prix K (un put), sa valeur à l'échéance sera $K - S_0 \cdot d$ si $S_T = S_0 \cdot d$ et 0 si $S_T = S_0 \cdot u$.

Création d'un portefeuille de couverture

Considérons un espace en temps continu

Évaluation du prix dans un modèle à une étape

- Plus généralement, si l'on désigne par $\varphi(S_0 u)$ et $\varphi(S_0 d)$ la valeur du contrat d'option à l'instant T en cas de up ou down, la résolution du système dans ce cas montre que la composition du portefeuille en actif sous-jacent sera donné par :

$$a = \frac{\varphi(S_0 u) - \varphi(S_0 d)}{S_0 u - S_0 u} \tag{48}$$

- Ce calcule est celui de notre exercice précédent que l'on appelait notre Δ de couverture. Ici $a = \Delta$.

Création d'un portefeuille de couverture

Considérons un espace en temps continu

Évaluation du prix dans un modèle à une étape

$$a = \frac{\varphi(S_0 u) - \varphi(S_0 d)}{S_0 u - S_0 u} \tag{49}$$

- Vérifions :

$$\begin{aligned} &= \frac{\max(S_0 u - K, 0) - \max(S_0 d - K, 0)}{S_0 u - S_0 u} \\ &= \frac{\max(180 - 80, 0) - \max(60 - 80, 0)}{180 - 60} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Modèle à deux étapes : couverture dynamique

Contexte de la couverture

- La seule idée du portefeuille de couverture (a, b) constitué à l'instant initial ne suffit plus si l'option peut prendre trois valeurs à l'échéance (parce que l'actif sous-jacent en prendrait trois).
- Par contre, si l'on ajoute la possibilité de modifier, à une date intermédiaire (entre $t = 0$ et $t = T$) la composition du portefeuille constitué à la date initiale, en tenant compte de la valeur S_t du sous-jacent à cette date, on peut trouver une solution à ce problème : c'est l'idée de la couverture dynamique.
- Considérons un modèle à deux étapes de l'actif sous-jacent : $t \in \{0, \delta t, 2\delta t = T\}$ et S_t prenant la valeur S_0 à l'instant initial, l'une des deux valeurs $S_{\delta t} = S_0 u$ ou $S_{\delta t} = S_0 d$ à l'instant intermédiaire $t = \delta t$ et l'une des trois valeurs $S_T = S_0 u^2$, $S_T = S_0 ud$ (ou $S_0 du$) et $S_T = S_0 d^2$ à l'échéance.

Application

Modèle CRR calibré pour plusieurs périodes

Sujet de l'exercice

- Prix actuel de l'action (S_0) : 100 €
- Prix d'exercice (K) : 100 €
- Taux d'intérêt sans risque (r) : 5 % par an
- Volatilité (σ) : 20 % par an
- Fréquence : semestrielle
- Durée totale : 1 an

Problématique

- Estimer le prix d'un Call et le prix d'un Put à partir du modèle de Cox, Ross et Rubinstein en temps discret.

Application

Modèle CRR calibré pour plusieurs périodes

Étape 1 : Calcul des paramètres

Pour un modèle à 2 pas, chaque pas de temps Δt est donné par :

$$\Delta t = \frac{T}{n} = \frac{1 \text{ an}}{2} = 0,5 \text{ an}$$

Les facteurs de hausse (u) et de baisse (d) sont calculés comme suit :

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} = 1 + 0,20 \cdot \sqrt{0,5} \approx 1 + 0,1414 \approx 1,1414$$

$$d = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} = 1 - 0,20 \cdot \sqrt{0,5} \approx 1 - 0,1414 \approx 0,8586$$

Application

Modèle CRR calibré pour plusieurs périodes

Étape 2 : Calcul des prix possibles à l'échéance

Les prix possibles à l'échéance après 2 pas sont :

- uu (2 hausses) :

$$S_{uu} = S_0 \cdot u^2 = 100 \cdot (1,1414)^2 \approx 100 \cdot 1,2998 \approx 129,98$$

- ud ou du (1 hausse, 1 baisse) :

$$S_{ud} = S_{du} = S_0 \cdot u \cdot d = 100 \cdot 1,1414 \cdot 0,8586 \approx 100 \cdot 0,9800 \approx 98,00$$

- dd (2 baisses) :

$$S_{dd} = S_0 \cdot d^2 = 100 \cdot (0,8586)^2 \approx 100 \cdot 0,7382 \approx 73,82$$

Application

Modèle CRR calibré pour plusieurs périodes

Étape 3 : Calcul des valeurs des options à l'échéance

Pour le call (C):

- $C_{uu} = \max(S_{uu} - K, 0) = \max(129,98 - 100, 0) = 29,98$
- $C_{ud} = C_{du} = \max(98,00 - 100, 0) = 0$
- $C_{dd} = \max(73,82 - 100, 0) = 0$

Pour le put (P):

- $P_{uu} = \max(K - S_{uu}, 0) = \max(100 - 129,98, 0) = 0$
- $P_{ud} = P_{du} = \max(100 - 98,00, 0) = 2,00$
- $P_{dd} = \max(100 - 73,82, 0) = 26,18$

Application

Modèle CRR calibré pour plusieurs périodes

Étape 4 : Calcul des probabilités neutres au risque

La probabilité neutre au risque p est donnée par :

$$p = \frac{(1+r)\Delta t - d}{u - d}$$

Calculons chaque terme :

- $(1+r)\Delta t = (1+0,05) \cdot 0,5 = 1,05 \cdot 0,5 = 0,525$
- $u - d = 1,1414 - 0,8586 = 0,2828$

Calculons p :

$$p = \frac{0,525 - 0,8586}{0,2828} \approx 0,588$$

Application

Modèle CRR calibré pour plusieurs périodes

Étape 5 : Valeurs présentes des options

Pour le call (C_0):

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^{\Delta t}} \left[p^2 \cdot C_{uu} + 2p(1-p) \cdot C_{ud} + (1-p)^2 \cdot C_{dd}\right]$$

Pour le put (P_0):

$$P_0 = \frac{1}{(1+r)^{\Delta t}} \left[p^2 \cdot P_{uu} + 2p(1-p) \cdot P_{ud} + (1-p)^2 \cdot P_{dd}\right]$$

Après avoir effectué les calculs, nous pouvons résumer les résultats :

- Valeur du Call (C_0) : environ 29,98 €
- Valeur du Put (P_0) : environ 26,18 €

Modèle à deux étapes : couverture dynamique

Contexte de la couverture

- Pour déterminer la valeur d'un portefeuille de couverture d'une option $C_T = \varphi(S_T)$, raisonnons en partant de sa valeur Π_T à l'échéance, qui est connue puisque, pour couvrir l'option il devra valoir $\Pi = \varphi(S_T)$, somme due en $t = T$ par le vendeur à l'acheteur de l'option.
- Il y a trois possibilités pour cette valeur, selon les valeurs prises par S_T. En utilisant la même méthode que dans le cas d'un modèle à une étape, on peut calculer les deux valeurs $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t} S_{\delta t} + b\delta t$ que devra prendre le portefeuille à l'instant $t = \delta t$, selon que $S_{\delta t} = S_0 d$ ou $S_{\delta t} = S_0 u$.
- Pour cela, il suffit de résoudre les deux systèmes :

$$\begin{cases} aS_0 u^2 + be^{r\delta t} = \varphi(S_0 u^2) \\ aS_0 ud + be^{r\delta t} = \varphi(S_0 ud) \end{cases}$$

$$\begin{cases} aS_0 du + be^{r\delta t} = \varphi(S_0 du) \\ aS_0 d^2 + be^{r\delta t} = \varphi(S_0 d^2) \end{cases}$$

Modèle à deux étapes : couverture dynamique

Exemple

- Supposons un titre valant $S_0 = 80$ supposé changer deux fois de prix avant l'échéance notée $T = 2\delta t$.
- Observons que dans l'exemple précédent nous avions, à $t = \delta t$, $S_{\delta t} = S_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$ ou $S_{\delta t} = S_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$.
- Supposons qu'ici S suive un processus analogue

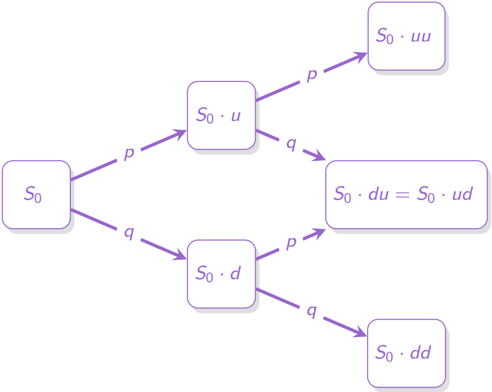
$$S_{\delta t} = S_0 \left(1 \pm \frac{1}{2}\right)$$

$$S_{2\delta t} = S_{\delta t} \left(1 \pm \frac{1}{2}\right)$$

- Quels sont les prix que le sous-jacent peut prendre à maturité ?

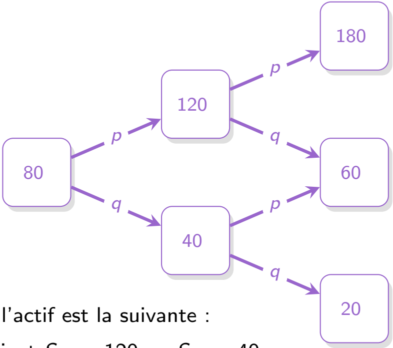
Application du modèle de Cox, Ross et Rubinstein

Évolution du prix d'un actif selon le modèle CRR à 2 périodes



Application du modèle de Cox, Ross et Rubinstein

Évolution du prix d'un actif selon le modèle CRR à 2 périodes



- La dynamique de l'actif est la suivante :
  - $S_0 = 80$ devient $S_{\delta t} = 120$ ou $S_{\delta t} = 40$
  - $S_0 = 120$ devient $S_{2\delta t} = 180$ ou $S_{2\delta t} = 60$
  - $S_0 = 40$ devient $S_{2\delta t} = 60$ ou $S_{2\delta t} = 20$

Modèle à deux étapes : couverture dynamique

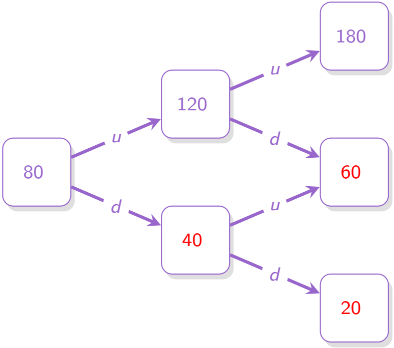
Correction

- Soit une option call de date d'exercice $T = 2\delta t$ et prix d'exercice $K = 80$. On suppose, pour simplifier, que le taux d'intéret monétaire r est ici égal à 0.
- Observons que si $S_{\delta t} = 120$ nous retrouvons l'exemple précédent et comprenons que le portefeuille de couverture, dans ce cas (c'est-à-dire si $S_{\delta t} = 120$), doit valoir $\Pi^{u}_{\delta t} = 50$.
- Pour rappel, nous disons dans le modèle à 1 étape : Le portefeuille vaudra soit $150 = \frac{5}{6} \cdot 180$, si $S_T = S_0 \cdot u$, et il paiera alors $100 = 180 - 80$ au détenteur du call et remboursera les 50 empruntés (sans interêts puisqu'on a suppos é que $r = 0$), soit il vaudra $50 = \frac{5}{6} \cdot 60$, si $S_T = S_0 \cdot d$, ce qui, compte tenu du fait que le détenteur du call ne viendra pas l'exercer, lui permet de rembourser les 50 empruntés.

Modèle à deux étapes : couverture dynamique

Correction

- Qu'en est-il si $S_{\delta t} = 40$? Inutile de faire des calculs : les deux seules possibilité à venir pour $S_{2\delta t}$ sont 60 ou 20. Comme ces deux valeurs sont inférieures au prix d'exercice $K = 80$, on aura dans les deux cas $\varphi(S_{\delta t}) = 0$ et donc $a_{\delta t} = b_{\delta t} = 0$ puisqu'il n'y a plus rien à couvrir dans ce cas.



Application d'une couverture

Calcul d'une couverture à partir du modèle de CRR à 2 périodes

Correction

- À l'instant $t = 0$ le portefeuille de couverture $(a_0,\ b_0)$ doit satisfaire $a_0 S_{\delta t} + b_0 = \Pi_{\delta t}$ c'est-à-dire vérifier le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \cdot 120 + b_0 = a_0 S_0 u + b_0 = 50 \\ a_0 \cdot 60 + b_0 = a_0 S_0 d + b_0 = 0 \end{array} \right.$$

- Trouver les valeurs de a_0 et b_0.

Application d'une couverture

Calcul d'une couverture à partir du modèle de CRR à 2 périodes

Correction

- À partir du système suivant :

$$\begin{cases} a_0 \cdot 120 + b_0 = a_0 S_0 u + b_0 = 50 \\ a_0 \cdot 60 + b_0 = a_0 S_0 d + b_0 = 0 \end{cases}$$

- On trouve $a_0 = \frac{5}{8}$ et $b_0 = -25$ ce qui amène $\Pi_0 = \frac{5}{8} \cdot 80 - 25 = 25$.
- Le vendeur de l'option, dont le prix est $\Pi_0 = 25$, touche cette prime à l'instant initial, y ajoute un montant de 25 qu'il emprunte, le tout servant à acheter $\frac{5}{8}$ actif à 80€ pièce.
- Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la baisse et que $S_{\delta t} = 40$, on solde le portefeuille ; la part en actifs ne vaut plus que $a_0 S_{\delta t} = \frac{5}{8} \cdot 40 = 25$, soit exactement de quoi rembourser la dette $b_0 = 25$.

Application d'une couverture

Calcul d'une couverture à partir du modèle de CRR à 2 périodes

Correction

- Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la hausse et que $S_{\delta t} = 120$, nous avons vu dans l'exemple précédent que le portefeuille doit à présent comporter $a_{\delta t} = \frac{5}{6}$; comme il y a déjà $\frac{5}{8}$ actif dans le portefeuille, il convient d'en racheter $\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{10}{48}$ au prix unitaire $S_{\delta t} = 120$, donc pour une valeur de $\frac{10}{48} \cdot 120 = 25$, que l'on emprunte, ce qui porte la dette totale à $25 + 25 = 50$, comme dans le premier exemple, bien entendu.
- Le vendeur a ainsi modifié la composition de son portefeuille de couverture (sans changer sa valeur) de telle sorte qu'à l'échéance sa valeur soit exactement celle de l'option (100, 0, ou 0 selon les valeurs de $S_{2\delta t}$) : c'est le principe de la couverture dynamique.

Application d'une couverture

Calcul d'une couverture à partir du modèle de CRR à 2 périodes

Remarque importante

- Le méchanisme de couverture dynamique d'une option décrit dans cette section est fondamentalement différent de celui qui permet à un assureur de couvrir un risque de vol ou d'incendie.
- Dans le cas d'une option, le vendeur peut (à supposer que le modèle mathématique qu'il a de la dynamique de l'actif sous-jacent soit réaliste) couvrir le risque d'un seul contrat, et même le couvrir exactement, c'est-à-dire le faire disparaître.
- Dans le cas d'une assurance classique au contraire, l'assureur doit avoir vendu de nombreux contrats pour, en moyenne, pouvoir faire face à ses obligations, comptant sur le fait que la probabilité pour qu'un trop grand nombre de clients aient un sinistre simultanément est suffisamment faible : c'est une couverture du risque par diversification.

Application d'une couverture

Calcul d'une couverture à partir du modèle de CRR à 2 périodes

Remarque importante

- Une question naturelle que cette remarque peut susciter est la suivante : si le vendeur d'une option peut, grace à la couverture dynamique, supprimer le risque, pourquoi l'acheteur ne couvre-t-il pas lui-même ce risque ? Quand au vendeur, s'il ne gagne rien à le faire, pourquoi le fait-il ? La réponse est que, dans la pratique, la couverture dynamique nécessitant un travail au jour le jour de surveillance des cours et d'ajustement de son portefeuille, est, bien entendu, rémunérée, même si nous n'en avons pas tenu compte dans les calculs ci-dessus ;
- L'acheteur, quant à lui, n'a pas nécéssairement envie d'assumer ce travail, d'autant qu'il subsiste une part de risque pour le vendeur si le modèle mathématique utilisé pour faire les calculs est trop grossièrement faux.

Hedging or not hedging

Les implications quand on ne couvre pas sa position

Remarque importante

- Il est utile également d'observer ce qui se passe si le vendeur de l'option ne la couvre pas, soit il n'achète aucun portefeuille de couverture avec la prime, soit il l'achète bien, à la date initiale, le portefeuille (a_0, b_0) adapté mais ne le réajuste plus avant l'échéance.
- Examinons la question dans le cas de l'exemple : avec $\frac{5}{8}$ième d'actif S_t et une dette de 25, le portefeuille acheté à la date initiale vaut à la date finale, si sa composition n'a pas été modifiée dans l'intervalle :
    - $\frac{5}{8} \cdot 180 - 25 = 87.5$, si le sous-jacent prend la valeur 180 ; or le vendeur doit dans ce cas 100 à l'acheteur.
    - $\frac{5}{8} \cdot 60 - 25 = 12.5$, si le sous-jacent prend la valeur 60 ; mais le vendeur ne doit rien à l'acheteur dans ce cas, il n'a donc pas de problème.
    - $\frac{5}{8} \cdot 20 - 25 = -12.5$, si le sous-jacent prend la valeur 20 ; ici encore le vendeur ne doit rien à l'acheteur mais il garde une dette de 12,5€.
- On voit donc sur cet exemple qu'il peut se révéler désastreux de ne pas assurer complètement la couverture dynamique.

Stratégie de couverture

Application

Problématique

- Le cours actuel d'une action est de 100€. Sur chacun des 2 prochains mois on estime que les cours vont augmenter de 1% ou baisser de 1%. Le taux sans risque est de 1%.
- On pose ainsi les conditions suivantes :
  - $S_0 = 100$
  - $\Delta t = \frac{1}{12}$
  - $u = 1.01$
  - $d = 0.99$
  - $r = 1\%$
  - $K = 99$

1. Quelle est la probabilité (p) que le titre augmente *dans un contexte mathématique de temps discret* ?
2. Quelle est la valeur d'une option européenne d'achat (call) d'échéance 2 mois avec prix d'exercice 99€ ?

Stratégie de couverture

Application

Correction

- Par hypothèse d'AOA, la probabilité de survenance de l'état *up* est :

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} \tag{50}$$

- Remarque : $0 < p < 1$ ssi $d < 1+r < u$
- Par ailleurs, la valeur actuelle de l'action, qui correspond à l'espérance actualisée de sa valeur future s'écrit :

$$C = \frac{1}{1+r} \cdot (pC_u + (1-p) \cdot C_d) \tag{51}$$

Stratégie de couverture

Application

Correction

- Par hypothèse d'AOA, la probabilité de survenance de l'état *up* est :

$$p = \frac{(1+r)^{\Delta t} - d}{u - d} = \frac{(1+1\%)^{1/12} - 0.99}{1.01 - 0.99} = 0.54 \quad (52)$$

Stratégie de couverture

Application

Correction

- Notons les possibilités suivantes :

$$C_{uu} = \max(0; (1+1\%)^2 \cdot 100 - 99) = 3.01$$

$$C_{ud} = C_{du} = \max(0; (1+1\%) \cdot (1-1\%) \cdot 100 - 99) = 0.99$$

$$C_{dd} = \max(0; (1-1\%)^2 \cdot 100 - 99) = \max(0; 98.01 - 99) = 0$$

- On a donc :

$$C = \frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{t \cdot \Delta t}}} \left(p^2 \cdot C_{uu} + p \cdot (1-p) \cdot C_{ud} + (1-p)^2 \cdot C_{dd}\right)$$

$$C = \frac{1}{(1+1\%)^{\frac{1}{6}}} \left(0.54^2 \cdot 3.01 + 0.54 \cdot (1-0.54) \cdot 0.99 + (1-0.54)^2 \cdot 0\right) = 1.37$$

Stratégie de couverture

Application

Correction

- En répliquant la méthodologie préalablement utilisée dans le modèle à une période, il apparait que :
  - si on est dans l'état u en 1ère période, en détenant Δ actions du sous-jacent, le portefeuille du vendeur du call vaut dès lors :
    1. En UU $\Delta \cdot 102,1 - 3.01$
    2. En UD ou DU $\Delta \cdot 99.9 - 0.99$
  - Il s'agira d'un portefeuille sans risque si :

$$\Delta \cdot 102,1 - 3.01 = \Delta \cdot 99.9 - 0.99$$

$$\Delta = \frac{3.01 - 0.9}{102.1 - 99.9} = 0.918$$

Stratégie de couverture

Application

Correction

- Supposons dès lors que nous fassions suite à une baisse du cours en première instance.
- On obtient, souvenons nous :

$$C_{ud} = C_{du} = \max(0; (1 + 1\%) \cdot (1 - 1\%) \cdot 100 - 99) = 0.99$$

$$C_{dd} = \max(0; (1 - 1\%)^2 \cdot 100 - 99) = \max(0; 98.01 - 99) = 0$$

- ce qui amène à un Δ de :

$$\Delta = \frac{0.99 - 0}{99.9 - 98.01} = 0.5$$

- Il apparait ainsi que la couverture nécessaire à la vente d'un call varie selon la réalisation de la première période.

Stratégie de couverture

Application

Question supplémentaire

- Combien le vendeur du call doit-il détenir d'actions du sous-joucent à la date initiale pour se couvrir ?

Stratégie de couverture

Application

Correction de la question supplémentaire

- Combien le vendeur du call doit-il détenir d'actions du sous-joucent à la date initiale pour se couvrir ?
- La première étape est de calculer C_u et C_d à partir de la même méthodologie en $t = 0$ et $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_0 \cdot u - S_0 \cdot d}$.

$$C_u = \frac{1}{(1+1\%)^{\frac{1}{12}}} (0.54 \cdot 3.01 + (1 - 0.54) \cdot 0.99) = 2.079$$

$$C_d = \frac{1}{(1+1\%)^{\frac{1}{12}}} (0.54 \cdot 0.99 + (1 - 0.54) \cdot 0) = 0.534$$

- On implicite ainsi qu'en $t = 0$ le Δ de couverture est de :

$$\Delta = \frac{2.079 - 0.534}{101 - 99} = 0.7725$$

Stratégie de couverture

Synthèse de l'application

Conclusion

- La couverture nécessaire à la vente d'un call (le Δ) change à chaque date.
- Dans le but de maintenir une couverture sans risque, le vendeur doit ajuster le stock d'actions détenues à chaque période, en fonction de la réalisation des évènements.

Le modèle de Black and Scholes

Introduction

Présentation du contexte

- Le modèle Black Scholes est un modèle mathématique d'évaluation du prix d'une option de type européenne qui permet d'estimer sa valeur théorique en fonction de ses caractéristiques et des caractéristiques du sous-jacent sur lequel elle porte.
- Le modèle Black Scholes est donc avant tout une formule mathématique dont la première publication date de 1973 par Robert Merton sur la base de travaux de Fischer Black et de Myron Scholes. Cela vaudra d'ailleurs à Merton et Scholes le prix Nobel d'économie en 1997 (Fischer Black, qui est décédé en 1995, avant la remise de ce prix, a été cité comme contributeur).
- La grande innovation du modèle Black Scholes est de faire largement intervenir la variation de prix de l'actif sous-jacent dans le calcul de la valeur de l'option.

Le modèle de Black and Scholes

Les hypothèses du modèle de Black-Scholes

1. Le marché est parfaitement liquide.
2. Il n'y a pas de coûts de transaction.
3. Les taux d'intérêt sont constants et connus à l'avance.
4. Les rendements de l'actif sous-jacent sont distribués de manière normale.
5. L'option est européenne (ne peut être exercée qu'à l'échéance).
6. Il n'y a pas de dividendes versés sur l'actif sous-jacent.

Le modèle de Black and Scholes

The Black and Scholes formulas

- Supposons que :
  - C représente le prix d'un call,
  - P représente le prix d'un put,
  - S_0 est le prix de l'actif sous-jacent à l'instant $t = 0$,
  - K est le prix d'exercice de l'option,
  - r est le taux d'intérêt sans risque,
  - σ est la volatilité implicite de l'actif sous-jacent,
  - T est la date d'expiration de l'option,
  - $\mathcal{N}(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale standard.
- La formule utilisée pour calculer le prix d'une option européenne, c'est-à-dire une option qui ne peut être exercée qu'à une date précise dans le futur s'appuie sur le modèle de Black and Scholes et repose sur l'hypothèse que les rendements de l'actif sous-jacent suivent une distribution lognormale et que le marché est efficient.

Le modèle de Black and Scholes

La valorisation d'un call et d'un put selon Black and Scholes

$$C = S_0 \cdot \mathcal{N}\left(\frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} \cdot \mathcal{N}\left(\frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$P = -S_0 \cdot \mathcal{N}\left(-\frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + Ke^{-rT} \cdot \mathcal{N}\left(-\frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

- Supposant que le pricing des options intervienne en $t = 0$. On notera, dans le cas échéant, S_t, le *spot price* en t au cours de la vie de l'option avant sa maturité T.

Le modèle de Black and Scholes

Few formulas

$$C = S \cdot \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT} \cdot \mathcal{N}(d_2) \tag{53}$$

$$P = -S \cdot \mathcal{N}(-d_1) + Ke^{-rT} \cdot \mathcal{N}(-d_2) \tag{54}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{55}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{56}$$

- On valorisera une option à chaque instant à partir d'un spot price S et pas seulement à S_0 car la valeur de l'option change à chaque instant durant le cours de sa vie. On peut noter ici S_t avec $t : \{0, \dots, T\}$.

La formule de Black-Scholes

Synthèse paramétrique du modèle

- La formule de Black-Scholes peut être utilisée pour calculer le prix d'une option d'achat ou de vente européenne.
- La formule prend en compte plusieurs variables, notamment le prix actuel de l'actif sous-jacent, le prix d'exercice de l'option, le temps restant jusqu'à l'échéance de l'option, la volatilité de l'actif sous-jacent et le taux d'intérêt sans risque.
- La formule est la suivante:
  $C = S_t \cdot \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rt} \cdot \mathcal{N}(d_2)$
  où C est le prix de l'option, S_t est le prix actuel de l'actif sous-jacent, K est le prix d'exercice de l'option, r est le taux d'intérêt sans risque, t est le temps restant jusqu'à l'échéance de l'option, N est la fonction de répartition normale standard, et d_1 et d_2 sont calculés comme suit:

Le modèle de Black and Scholes

The Black and Scholes formulas

- Supposons que :

	Maturité	Strike	Spot price au 01/03/N
Call	30/09/N	21 €	15 €
Put	30/09/N	21 €	15 €

- La volatilité implicite est de 36%,
- Le taux sans risque, noté r, est associé à une OAT 10 ans de rémunération annuelle de 4%.
- La base temporelle pour une année est de 365 jours.

Question

- Quelle est la valeur du Call et du Put pour ces paramètres ?

Le modèle de Black and Scholes

The Black and Scholes formulas

- Combien de jours restent-ils avant la maturité ?

Mois	Nb. jours
Mars	30
Avril	30
Mai	31
Juin	30
Juillet	31
Août	31
Septembre	30

- On se place le 01/03/N, ce jour n'est pas compté dans le nombre de jours restant avant la maturité donc 30 jours pour le mois de mars.
- On dénombre dès lors 213 jours, soit $T = \dfrac{213}{365}$an.

Le modèle de Black and Scholes

The Black and Scholes formulas

- $S_0 = 15€$,
- $K = 21€$
- $T = \frac{213}{365}$
- $r = 4\%$
- $\sigma = 36\%$

Le modèle de Black and Scholes

Few formulas

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{57}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{15}{21}\right) + \left(0.04 + \frac{0.36^2}{2}\right) \times \frac{213}{365}}{0.36 \times \sqrt{\frac{213}{365}}} = -1.001115 \tag{58}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{59}$$

$$d_2 = -1.001115 - 0.36 \times \sqrt{\frac{213}{365}} = -1.2761233 \tag{60}$$

Le recours au modèle de Black and Scholes

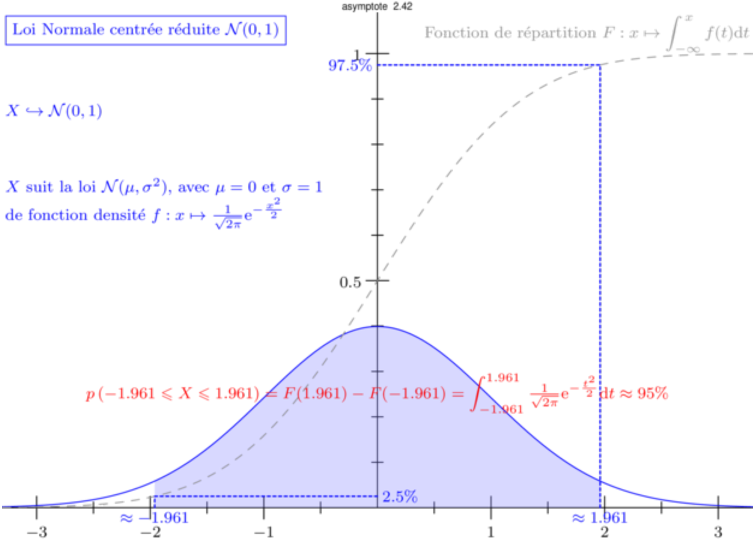
Résolutions des élements du modèle de Black and Scholes

- $\mathcal{N}(d_1)$ est donné par la fonction sous Microsoft Excel `=loi.normale.standard.N(x;1)` qui mesure la version cumulative de la fonction de répartition.
- $\mathcal{N}(d_1) = \mathcal{N}(-1.001115) = 0.15838561$
- $\mathcal{N}(d_2) = \mathcal{N}(-1.2761233) = 0.100955961$

On donne également :

- $\mathcal{N}(-d_1) = \mathcal{N}(1.001115) = 0.841614392$
- $\mathcal{N}(-d_2) = \mathcal{N}(1.2761233) = 0, 899044039$

Fonction de répartition vs. probabilité de masse



Pricing an option from the Black and Scholes formulas

Few formulas

$$C = S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT} \cdot \mathcal{N}(d_2) \tag{61}$$

$$C = 15 \times 0.15838561 - 21 \times e^{-0.04 \times \frac{213}{365}} \times 0.100955961 = 0.304626 \tag{62}$$

- La valeur d'un call est de 0.304626€

$$P = -S_0 \cdot \mathcal{N}(-d_1) + Ke^{-rT} \cdot \mathcal{N}(-d_2) \tag{63}$$

$$P = -15 \times 0.84161439 + 21 \times e^{-0.04 \times \frac{213}{365}} \times 0.899044039 = 5.8201 \tag{64}$$

- La valeur du put est de 5.82€

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Analyse des modèles par la démarche inductive

On considère une action sous-jacente avec les caractéristiques suivantes :

- Prix initial de l'actif (S_0) : 100 €,
- Prix d'exercice (K) : 100 €,
- Taux d'intérêt sans risque (r) : 5% par an,
- Volatilité (σ) : 20% par an,
- Échéance (T) : 1 an.

On souhaite valoriser un **call européen** et un **put européen** en utilisant le modèle binomial avec différents nombres de pas : $n = 2$, $n = 10$ et $n = 50$.

- On comparera ces résultats avec ceux obtenus via le modèle de Black-Scholes afin de montrer la convergence des prix des options avec l'augmentation du nombre de pas dans le modèle binomial.
- Valorisons le call et le put selon les deux modèles en calibrant nos calculs en temps continu.

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Analyse des modèles par la démarche inductive

- Le modèle binomial est basé sur l'idée que, à chaque pas, le prix de l'actif peut soit monter de u soit baisser de d .
- Ces facteurs sont déterminés par les formules suivantes :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

où $\Delta t = \frac{T}{n}$ est la durée d'un pas, et n est le nombre total de pas.

- Le prix du call européen à l'échéance est donné par :

$$C(S_T, K) = \max(S_T - K, 0)$$

- Le prix du put européen à l'échéance est donné par :

$$P(S_T, K) = \max(K - S_T, 0)$$

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 2$

- Le prix des options au temps t peut être déterminé par la méthode de rétropropagation, en utilisant les probabilités risque neutre (*risk-neutral probability*) :

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

  et la probabilité de baisse est $1 - p$.

- Calculons le prix des options pour $n = 2$:

$$\Delta t = \frac{T}{n} = \frac{1}{2} = 0.5$$

- Calculons u :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.20\sqrt{0.5}} \approx e^{0.1414} \approx 1.1513$$

- Calculons d :

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-0.20\sqrt{0.5}} \approx e^{-0.1414} \approx 0.8676$$

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 2$

- Calcul des prix possibles à l'échéance :
  - $S_{uu} = S_0 u^2$,
  - $S_{ud} = S_0 ud$,
  - $S_{dd} = S_0 d^2$.
- Calculons maintenant les valeurs des options à l'échéance :

$$C_{uu} = \max(S_{uu} - K, 0), \quad C_{ud} = \max(S_{ud} - K, 0), \quad C_{dd} = \max(S_{dd} - K, 0)$$

- Nous rétro-propagons pour trouver le prix du call :

$$C_0 = e^{-r\Delta t}(pC_{uu} + (1-p)C_{ud})$$

- Idem pour le put :

$$P_0 = e^{-r\Delta t}(pP_{uu} + (1-p)P_{ud})$$

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 2$

- Calculons p :

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.05 \cdot 0.5} - 0.8676}{1.1513 - 0.8676} \approx \frac{1.0253 - 0.8676}{1.1513 - 0.8676} \approx \frac{0.1577}{0.2837} \approx 0.5550$$

- Nous calculons les prix à l'échéance pour chaque combinaison :
  - **Si** $k = 0$ (2 descentes) :

$$S_{2,0} = S_0 \cdot d^2 \approx 100 \cdot 0.8676^2 \approx 75.31$$

$$C_0 = \max(S_{2,0} - K, 0) = \max(75.31 - 100, 0) = 0$$
$$P_0 = \max(K - S_{2,0}, 0) = \max(100 - 75.31, 0) = 24.69$$

  - **Si** $k = 1$ (1 montée, 1 descente) :

$$S_{2,1} = S_0 \cdot u \cdot d \approx 100 \cdot 1.1513 \cdot 0.8676 \approx 100$$

$$C_1 = \max(S_{2,1} - K, 0) = \max(100 - 100, 0) = 0$$
$$P_1 = \max(K - S_{2,1}, 0) = \max(100 - 100, 0) = 0$$

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 2$

- **Si** $k = 2$ (2 montées) :

$$S_{2,2} = S_0 \cdot u^2 \approx 100 \cdot 1.1513^2 \approx 132.43$$

$$C_2 = \max(S_{2,2} - K, 0) = \max(132.43 - 100, 0) = 32.43$$
$$P_2 = \max(K - S_{2,2}, 0) = \max(100 - 132.43, 0) = 0$$

  - Pour le Call :

$$C = e^{-r\Delta t}\,(p \cdot C_2 + (1-p) \cdot C_1)$$
$$C = e^{-0.05 \cdot 0.5}\,(0.5550 \cdot 32.43 + (1 - 0.5550) \cdot 0)$$
$$C \approx 0.9753 \cdot 18.00 \approx 17.55\,€$$

  - Pour le Put :

$$P = e^{-r\Delta t}\,(p \cdot P_2 + (1-p) \cdot P_1)$$
$$P = e^{-0.05 \cdot 0.5}\,(0.5550 \cdot 0 + (1 - 0.5550) \cdot 24.69)$$
$$P \approx 0.9753 \cdot 11.05 \approx 10.78\,€$$

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 10$

$$\Delta t = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$u = e^{0.20\sqrt{0.1}} \approx 1.0633, \quad d = e^{-0.20\sqrt{0.1}} \approx 0.9409$$

$$p = \frac{e^{0.05 \cdot 0.1} - d}{u - d} \approx \frac{1.005 - 0.9409}{1.0633 - 0.9409} \approx \frac{0.0641}{0.1224} \approx 0.5230$$

- Nous calculons les prix à l'échéance pour chaque combinaison de montées et descentes.
- Pour chaque k allant de 0 à 10 :

$$S_{10,k} = S_0 \cdot u^k \cdot d^{10-k}$$

$$C_k = \max(S_{10,k} - K, 0) \quad \text{et} \quad P_k = \max(K - S_{10,k}, 0)$$

- En rétropropageant les valeurs jusqu'à $t = 0$, nous trouvons :
  - **Prix du call** : $C \approx 10.55$ €
  - **Prix du put** : $P \approx 5.45$ €

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 50$

- Commençons par le pas de temps :

$$\Delta t = \frac{1}{50} = 0.02$$

- Calculons u :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.20\sqrt{0.02}} \approx e^{0.0894} \approx 1.0936$$

- Calculons d :

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-0.20\sqrt{0.02}} \approx e^{-0.0894} \approx 0.9145$$

- Calculons p :

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.05 \cdot 0.02} - 0.9145}{1.0936 - 0.9145} \approx \frac{1.0010 - 0.9145}{1.0936 - 0.9145} \approx \frac{0.0865}{0.1791} \approx 0.4825$$

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 50$

- Pour trouver la valeur du call et du put à $t = 0$, nous devons utiliser la formule de rétropropagation :

$$C_0 = e^{-rT} \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k} C_{50,k}$$

$$P_0 = e^{-rT} \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k} P_{50,k}$$

- Les calculs peuvent être effectués à l'aide d'un langage de programmation ou d'une feuille de calcul pour simplifier le processus.

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 50$

- Les coefficients binomiaux, notés $\binom{n}{k}$, sont utilisés pour exprimer le nombre de façons de choisir k éléments parmi n sans tenir compte de l'ordre. Voici la formule générale pour le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

  où :

  - $n!$ est la factorielle de n,
  - $k!$ est la factorielle de k,
  - $(n-k)!$ est la factorielle de $n-k$.
- n représente le nombre total d'éléments.
- k représente le nombre d'éléments à choisir.
- Le résultat $\binom{n}{k}$ représente le nombre de combinaisons possibles.

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 50$

- Les formules pour le call et le put à $t = 0$ sont :

$$C_0 = e^{-0.05\cdot 1} \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (0.4825)^k (1 - 0.4825)^{50-k} C_{50,k}$$

$$P_0 = e^{-0.05\cdot 1} \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (0.4825)^k (1 - 0.4825)^{50-k} P_{50,k}$$

- Remplaçons dans les formules :

$$C_0 = 0.9512 \cdot \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (0.4825)^k (0.5175)^{50-k} C_{50,k}$$

$$P_0 = 0.9512 \cdot \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} (0.4825)^k (0.5175)^{50-k} P_{50,k}$$

1. Calculer les valeurs de $C_{50,k}$ et $P_{50,k}$ pour chaque k.
2. Calculer $\binom{50}{k}$ pour chaque k en utilisant la formule :

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 50$

-

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 50$

-

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Hypothèse : $n = 2$

-

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Analyse des modèles par la démarche inductive

- Pour comparer les modèles, utilisons la formule de Black-Scholes pour les options européennes.
- Pour le call :

$$C = S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT} \cdot \mathcal{N}(d_2)$$

où d_1 et d_2 sont donnés par :

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- Pour le put :

$$P = Ke^{-rT} \cdot \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \cdot \mathcal{N}(-d_1)$$

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Analyse des modèles par la démarche inductive

- Commençons avec d_1 :

$$d_1 = \frac{\ln(100/100) + (0.05 + 0.20^2/2) \cdot 1}{0.20\sqrt{1}} = \frac{0 + (0.05 + 0.02)}{0.20} = \frac{0.07}{0.20} = 0.35$$

- Estimation de d_2 :

$$d_2 = d_1 - 0.20 \cdot \sqrt{1} = 0.35 - 0.20 = 0.15$$

- Calcul de $\mathcal{N}(d_1)$ et $\mathcal{N}(d_2)$ Utilisant une table de la fonction de répartition normale (ou une calculatrice), nous trouvons :
  - $\mathcal{N}(d_1) \approx \mathcal{N}(0.35) \approx 0.6368$
  - $\mathcal{N}(d_2) \approx \mathcal{N}(0.15) \approx 0.5596$

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Analyse des modèles par la démarche inductive

- Estimation du prix du call (C)

$$C = 100 \cdot 0.6368 - 100e^{-0.05} \cdot 0.5596$$

- Calculons :

$$C \approx 63.68 - 100 \cdot 0.9512 \cdot 0.5596 \approx 63.68 - 53.29 \approx 10.39\,€$$

- Prix du put (P)

$$P = 100e^{-0.05} \cdot N(-0.15) - 100 \cdot N(-0.35)$$

- Calculons $N(-d_1)$ et $N(-d_2)$:
  - $N(-d_1) \approx N(-0.35) \approx 0.3632$
  - $N(-d_2) \approx N(-0.15) \approx 0.4404$

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Analyse des modèles par la démarche inductive

$$P \approx 100 \cdot 0.9512 \cdot 0.4404 - 100 \cdot 0.3632$$

$$P \approx 41.84 - 36.32 \approx 5.52\,€$$

- Pour $n = 10$ et $n = 50$, les résultats de Black-Scholes sont constants quel que soit n :
  - **Prix du call européen** : $C \approx 10.39\,€$
  - **Prix du put européen** : $P \approx 5.52\,€$

De Cox, Ross et Rubinstein vers Black and Scholes

La convergence des modèles

Analyse des modèles par la démarche inductive

Le Delta (Δ)

La relation entre la valeur d'une option et le mouvement du spot

- Le delta d'une option mesure la sensibilité de son prix à une variation donnée du cours du sous-jacent.
- La prime d'un call est une fonction croissante du prix du sous-jacent, $\Delta_{call} \geq 0$, alors que celle d'un put en est une fonction décroissante, $\delta_{put} \leq 0$.
- Plus le prix du sous-jacent est élevé, plus la probabilité que le call soit dans la monnaie est grande. Symétriquement, plus le prix du sous-jacent est bas, plus la probabilité que le put soit dans la monnaie est grande.
- Lorsqu'une option a un Δ égal à ou proche de 0,5, on dit que l'option est à dans la monnaie.
- En outre, $\Delta_{call} \leq 1$ et $\Delta_{put} \geq -1$. On le comprend en prenant le cas extrême d'un call de prix d'exercice égal à zéro ($K = 0$), sur un sous-jacent qui ne peut pas avoir un prix négatif. La prime de cette option sera toujours égale au prix du sous-jacent : $P_{call} = S$. Sa dérivée par rapport au prix du sous-jacent sera donc égale à 1.Un raisonnement symétrique permet de comprendre pourquoi le delta d'un put est supérieur à -1.
- Le Δ d'un portefeuille d'options est la somme des Δs de chacune des options qui le composent.

Le Delta (Δ)

La relation entre la valeur d'une option et le mouvement du spot

- Le Δ d'une option d'achat européenne :

$$\Delta_{Call} = \mathcal{N}(d_1)$$

- Le Δ d'une option de vente européenne :

$$\Delta_{Put} = \mathcal{N}(d_1) - 1$$

- Les formules sont modulées dans le cas d'un détachement de dividende au taux q :

$$\Delta_{Call} = e^{-qT} \cdot (\mathcal{N}(d_1))$$

$$\Delta_{Put} = e^{-qT} \cdot (\mathcal{N}(d_1) - 1)$$

- Notons que l'on peut aussi voir :

$$\Delta_{Put} = -e^{-qT}\mathcal{N}(d_1)$$

La loi normale centrée réduite

Rappels sur des propriétés intéréssantes

- Dans la mesure où la loi normale standard centrée réduite est symétrique et centrée autour de zéro :

$$\mathcal{N}(-x) = 1 - \mathcal{N}(x)$$

$$-\mathcal{N}(-x) = \mathcal{N}(x) - 1$$

$$-\mathcal{N}(-d_1) = \mathcal{N}(d_1) - 1$$

Le Gamma (γ)

La relation entre la valeur du Δ et le mouvement du spot

- Le gamma représente la convexité ou la termaxité du prix d'une option en fonction du cours du sous-jacent. Il indique si le prix de l'option a tendance à évoluer plus ou moins vite que le prix du sous-jacent. Par analogie, on peut comparer le delta à la vitesse et le gamma à l'accélération. Le gamma est une fonction décroissante de la maturité.
- Une autre lecture du gamma est le sens d'évolution du delta en fonction du prix du sous-jacent. Un gamma positif indique que le prix du sous-jacent et du delta évoluent dans le même sens, alors qu'un gamma négatif montre le contraire.
- Comme $\gamma_{call} \leq 0$ et $\gamma_{put} \geq 0$, on dit qu'un acheteur de call ou de put sera long de gamma, ou que son portefeuille sera gamma positif, et qu'un vendeur sera court (short) de gamma, ou gamma négatif. Toutes choses égales par ailleurs, le gamma est maximum lorsque l'option est à la monnaie (i.e. lorsque son delta est égal à 0.5).

Le Gamma (γ)

La relation entre la valeur du Δ et le mouvement du spot

- Un portefeuille comportant des positions acheteuses (dites longues) et vendeuses (dites courtes) d'options à différents prix d'exercice (sur un même sous-jacent) verra donc la valeur de son gamma évoluer, voire changer de signe, en fonction des évolutions du prix du sous-jacent.
- Le gamma d'un portefeuille d'options est la somme des γs de chacune des options qui le composent.

$$\gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{\mathcal{N}(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}}$$

Le Gamma (γ)

La relation entre la valeur du Δ et le mouvement du spot

- La formule est modulée lorsque l'action détache un dividende avec un taux de dividende noté q :

$$\gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{\mathcal{N}(d_1) \cdot e^{-qT}}{S\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

- Soit :

$$\gamma = \frac{\mathcal{N}\left(\frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \cdot e^{-qT}}{S\sigma\sqrt{t}}$$

Le Gamma (γ)

Bien retenir

- A l'achat, le γ d'une option (call ou put) est toujours positif. Plus la maturité de l'option est courte, plus le gamma est fort.
- Plus le cours du sous-jacent est proche du prix d'exercice de l'option, plus le gamma sera important.
- Être long γ représente un certain appétit pour des mouvements du sous-jacent.

Le Thêta (Θ)

La relation entre la valeur d'une option et le temps

- Le Θ est un indicateur mesurant l'impact de l'écoulement du temps dans le prix de l'option (call ou put).
- Il correspond à la valeur que l'on va retrancher à l'option à chaque unité de temps (journée ou semaine) qui s'écoule. Une option est en effet calculée en fonction de la valeur intrinsèque (prix d'exercice - cours du sous jacent) à laquelle est ajouté une valeur temps.
- Plus l'option est proche de l'échéance, plus la valeur temps est faible et plus les probabilités d'un retournement de scénario sont faibles (prix d'exercice atteint ou non).
- Le Θ d'une option est donc toujours négatif pour l'investisseur car au fur et à mesure que le temps passe, l'option perd de la valeur temps.
- Pour le vendeur de l'option (l'émetteur) en revanche, le Thêta est toujours positif car l'écoulement du temps lui est favorable.

Le Thêta (Θ)

La relation entre la valeur d'une option et le temps

- Le Thêta pour une option d'achat européenne :

$$\Theta_{Call} = \frac{1}{t}\left[-\left(\frac{S\sigma e^{-qt}\mathcal{N}(d_1)}{2\sqrt{t}}\right) - rKe^{-rt}\mathcal{N}(d_2) + qSe^{-qt}\mathcal{N}(d_1)\right]$$

- Avec t, le nombre de jours avant expiration et T, le nombre de jours dans une année (365 jours ou 252 jours ouvrés).
- Theta pour une option de vente européenne :

$$\Theta_{Put} = \frac{1}{t}\left[-\left(\frac{S\sigma e^{-qt}\mathcal{N}(d_1)}{2\sqrt{t}}\right) + rKe^{-rt}\mathcal{N}(-d_2) - qSe^{-qt}\mathcal{N}(-d_1)\right]$$

- Notons que la majeure partie des livres présentant l'expression du Θ ne multiplient pas par $\frac{1}{T}$. Leurs Θ sont illustrés en années en non en jours comme nous le faisons ici.

Le Rhô (ρ)

La relation entre la valeur d'une option et le taux sans risque

- Rho pour une option d'achat européenne :

$$\rho_{Call} = \frac{1}{100} K \cdot t \cdot e^{-rt} \mathcal{N}(d_2)$$

Rho pour une option de vente européenne :

$$\rho_{Put} = -\frac{1}{100} K \cdot t \cdot e^{-rt} \mathcal{N}(-d_2)$$

Le Vega (ν)

La relation entre la valeur d'une option et la volatilité implicite

- Le Vega (ν) est un indicateur de volatilité. Il mesure l'influence d'une évolution de la volatilité sur le prix de l'option.
- Il donne, plus précisément, l'écart de prix en euros pour une variation de 1 point de la volatilité implicite. Un acheteur de call ou put serait toujours long en Vega (ν) alors que le vendeur sera toujours short Vega (ν).
- Le Vega est le seul indicateur à avoir une fonction croissante. Ainsi, l'impact d'une évolution de la volatilité sera d'autant plus forte si l'échéance est éloignée.

$$\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{1}{100} S e^{-qt} \sqrt{t} \cdot \mathcal{N}(d_1)$$

- Divide by 100 to get the resulting vega as option price change for one percentage point change in volatility (if you don't, it is for 100 percentage points change in volatility).

Le Vomma

La relation entre le vega et la volatilité implicite

- Le Vomma ou Volga représente la sensibilité du vega d'une option par rapport à une variation de la volatilité implicite.
- Il s'agit donc de la dérivée seconde de la valeur de l'option par rapport à la volatilité, ce qui permet de mesurer la convexité du vega.
- Ce grec de second ordre est moins fréquemment utilisé que le gamma par exemple, mais permet tout de même à un trader d'options de mieux évaluer l'efficacité de sa couverture en vega.

$$Vomma_{Call,Put} = \frac{\partial \nu}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} = S\sqrt{t} \cdot e^{-qt} \cdot \mathcal{N}(d_1) \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{\sigma}$$

Le Vanna

La relation entre le Δ d'une option et la volatilité implicite ou le ν et le mouvement du spot

- Le Vanna représente la sensibilité du Δ d'une option par rapport à une variation de la volatilité implicite, ou la sensibilité du vega d'une option par rapport à une variation du cours du sous-jacent.
- Ce grec de second ordre est moins fréquemment utilisé que le gamma, mais permet tout de même à un trader d'options de mieux évaluer l'efficacité de sa couverture en δ et en vega.
- Il revêt une importance plus grande pour les options exotiques, en particulier les options à barrière.

$$Vanna_{Call} = Vanna_{Put} = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \nu}{\partial S} = -e^{-qt} \cdot \mathcal{N}(d_1) \cdot \frac{d_2}{\sigma}$$

- Avec $\mathcal{N}(x)$, la fonction de densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.

Higher Order Greeks

Quels sont les autres grecques dits croisés ou d'ordre supérieur ?

- **Charm** : il s'agit de la sensibilité du Δ lorsque le temps varie. Il est égal par construction à la variation du Θ lorsque le spot price varie : $\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial S}$.
- **Color** $=$ Il s'agit de la variation du γ lorsque le temps varie (*small changes in time to expiration*) : $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$.
- **Speed** : il s'agit d'un grecque de troisième ordre qui mesure la variation du γ lorsque le prix varie. C'est la troisième dérivée de la formule de Black and Scholes à partir du spot price S: $\frac{\partial \gamma}{\partial S} = \frac{\partial C^3}{\partial S^3}$.
- **Ultima** : il s'agit également d'un grecque de troisième ordre qui concerne la volatilité. C'est la troisième dérivée de la formule de Black and Scholes à partir de la volatilité implicite. Une autre manière de l'aborder est de dire qu'il s'agit de la variation du Vomma quand la volatilité implicite varie.
- **Vera** : il s'agit de la sensibilité du vega lorsque le taux d'intérêt sans risque (r) varie. Il mesure également la variation du Θ lorsque la volatilité implicite (σ) varie.
- **Zomma** : c'est la sensibilité du γ lorsque la volatilité varie soit $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}$.