الفصل الرابع: التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

العنوان	رقم الصفحة

الكلمات المفتاحية:

التوزيع الثنائي، توزيع برنولي، التوزيع ثنائي الحد، التوزيع الهندسي، التوزيع فوق الهندسي، توزيع بواسون.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض المبادئ والتعاريف الأساسية المتعلقة بالتوزيعات المتقطعة والتي من ضمنها (توزيع برنولي، توزيع ثنائي الحد، التوزيع الهندسي، التوزيع فوق الهندسي، وتوزيع بواسون). كما يهدف إلى معرفة كيفية استخراج المتوسط والتشتت لكل من التوزيعات آنفة الذكر.

الأهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- التوزيع الثنائي أو توزيع برنولي
- التوزيع ثنائي الحد
- التوزيع الهندسي
- التوزيع فوق الهندسي
- توزيع بواسون

المخطط:

1. التوزيع الثنائي أو توزيع برنولي.
2. التوزيع ثنائي الحد.
3. التوزيع الهندسي.
4. التوزيع فوق الهندسي.
5. توزيع بواسون.

ترتبط أهم التوزيعات الاحتمالية ارتباطاً وثيقاً بالتجارب الثنائية النتائج، وحياتنا اليومية زاخرة بهذا النوع من التجارب نظراً لأهميتها التطبيقية في مجالات العلوم المختلفة. فعندما نقوم برمي قطعة من النقود فإن أمامنا احتمالين فقط إما ظهور الكتابة H أو ظهور الشعار T.

أثناء الرمي في اتجاه هدف معين فإما تكون النتيجة إصابة الهدف أو عدم إصابته. قد يكون الشخص مدخناً أو لا يكون مدخناً. الدواء الجديد مفيد لمعالجة مرض معين أو غير مفيد. إذا اخترنا عشوائياً قطعة من إنتاج مصنع معين فإما أن تكون القطعة خالية من أي عيب صناعي أو تكون معيبة صناعياً. على الرغم من تنوع هذه التجارب إلا أنها جميعاً لها خصائص التجربة الثنائية أو (البرنولية Bernoulli) وميزاتها.

1. التوزيع الثنائي أو توزيع برنولي Bernoulli's distribution:

التجربة الثنائية:

التجربة الثنائية هي تجربة تتصف بالخواص التالية:

1. تتألف التجربة من عدد من التكرارات المتماثلة تماماً (n تكرار).
2. ينتج عن كل تكرار إحدى نتيجتين فإما أن تكون النتيجة: "نجاحاً success" أي وقوع الحدث المعني بالدراسة وسنرمز لهذه النتيجة بـ s ولاحتمال وقوعها بـ p ، أو تكون النتيجة الأخرى "فشلاً failure" وسنرمز لهذه النتيجة بـ f ولاحتمال وقوعها بـ q حيث: $p+q=1$.
3. احتمال النجاح p يبقى ثابتاً من تكرار إلى آخر وكذلك يكون احتمال الفشل وهذا يعني أن التكرارات تكون مستقلة بعضها عن بعض.
4. نهتم بعدد النجاحات التي نحصل عليها خلال التكرارات المستقلة الـ n وسنرمز لهذا العدد بـ X .

عندما نجري التجربة مرة واحدة أي في الحالة $n=1$ فإن قيمة X إما أن تكون 0 (أي النتيجة f)، أو مساوية 1 (أي النتيجة p) ونعلم أن $P(f)=q$ و $P(s)=p$ ، أي أن $P(X=1)=p$ و $P(X=0)=q$. ويكون جدول التوزيع الاحتمالي المطلوب:

x	0	1
$P(X=x)$	$q=1-p$	p

يُدعى التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة ب التوزيع الثنائي أو توزيع برنولي.

تعريف 1: نقول عن متحول عشوائي X أنه يتبع توزيع برنولي وسيطه p إذا كان له تابع الاحتمال:

$$f_X(x)=P(X=x)=\begin{cases} p^x q^{1-x}; & x=0,1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

مبرهنة 1: إذا كان X متحول عشوائي يتبع توزيع برنولي وسيطه p فإن:

$$\mu_X=E(X)=p$$
$$\sigma_X^2=Var(X)=pq$$

البرهان:

$$\mu_X=E(X)=\sum_{x=0}^{1} x.f_X(x)=0.(q)+1.(p)=p$$

$$\sigma_X^2=E(X^2)-\mu_X^2=\sum_{x=0}^{1} x^2.f_X(x)-\mu_X^2$$
$$=0^2.(q)+1^2.(p)-p^2=p-p^2=p(1-p)=pq$$

.2 التوزيع ثنائي الحد binomial distribution:

نعرف المتحول العشوائي X في توزيع ثنائي الحد على أنه عدد مرات النجاح عند تكرار محاولة برنولي عدد من المرات مقداره n مرة وفق الشرط التالي: المحاولات مستقلة (نتيجة أي محاولة لا يؤثر ولا يتأثر بنتائج المحاولات الأخرى)، وأن احتمال النجاح p ثابت لجميع المحاولات.

نسمي في هذه الحالة تابع التوزيع للمتحول العشوائي المتقطع X بتابع التوزيع الاحتمالي ثنائي الحد، ونرمز له بـ $b(x;\ n,\ p)$. من الواضح أن مجموعة القيم الممكنة لهذا المتحول هي $X(\Omega)=\{0,1,\ldots,n\}$.

لنبحث الآن عن صيغة عامة لـ $b(x;\ n,\ p)$، ولنحسب الاحتمالات الموافقة للقيم $x=0,1,\ldots,n$. وبملاحظة أن الحدث $\{X=x\}$ يوافق حدوث x نجاحاً و $n-x$ فشلاً. لنبدأ أولاً بحساب احتمال x نجاحاً و $n-x$ فشلاً ضمن ترتيب محدد، وبما أن كافة المحاولات مستقلة فإن ناتج الاحتمال هو حاصل ضرب الاحتمالات الموافقة للنواتج المختلفة أي $p^x q^{n-x}$. والآن علينا تحديد العدد الكلي لنقاط العينة في التجربة والتي لديها x نجاح و $n-x$ فشل وهو يساوي عدد التبديلات الممكنة لمجموعة تحوي n عنصراً منها x عنصراً متماثلاً من النوع s و $n-x$ عنصراً متماثلاً من النوع f وهو يساوي $C(n,x)$. وباستخدام قانون جمع الاحتمالات نحصل على:

$$b(x;\ n,\ p)=C(n,\ x)\,p^x q^{n-x},\ x=0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

تعريف 2: نقول عن متحول عشوائي X أنه يتبع توزيع ثنائي الحد بوسيطين $n,\ p$ ونكتب باختصار $X\sim b(x;\ n,\ p)$ إذا كان له تابع الاحتمال (تابع الكثافة الاحتمالية) التالي:

$$P\left(X=x\right)=b(x;\ n,\ p)=C(n,\ x)\,p^x q^{n-x},\ x=\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

وحيث أيضاً: $0<p<1$ و $q=1-p$.

يمكن ملاحظة أن:

- $b(x;\ n,\ p)=C(n,\ x)\,p^x q^{n-x}\geq 0$
- حسب منشور نيوتن فإن:

$$\sum_{x=0}^{n} b(x;n,\ p)=\sum_{x=0}^{n} C(n,x)\,p^x q^{n-x}=(p+q)^n=1$$

مثال 1: لدينا قطعة نقود غير متزنة بحيث $P(H)=1/3$ و $P(T)=2/3$. رمينا هذه القطعة 3 مرات، ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الكتابة في الرميات الثلاث. أوجد احتمال:

a) الحصول على كتابتين.

b) الحصول على كتابتين على الأقل.

c) الحصول على صورة واحدة على الأكثر.

d) الحصول على 3 شعارات.

الحل:

نتيجة النجاح تساوي ظهور الكتابة، بالتالي احتمال النجاح $p=1/3$. أما نتيجة الفشل تساوي ظهور الشعار، بالتالي احتمال الفشل $q=2/3$. المتغير العشوائي X يتبع توزيع ثنائي الحد بوسيطين $p=1/3$

و $n=3$، أي $X \sim b(x;\ 3,\ 1/3)$.

$$P(X=x)=f_X(x)=C(3,x)(\frac{1}{3})^x(\frac{2}{3})^{3-x};\quad x=0,1,2,3$$

$$P(X=0)=C(3,0)(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$$

$$P(X=1)=C(3,1)(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=C(3,2)(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

$$P(X=3)=C(3,3)(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^0=\frac{1}{27}$$

a) الحصول على كتابتين: $P(X=2)=2/9$

b) الحصول على كتابتين على الأقل:

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=6/27+1/27=7/27$$

c) الحصول على صورة واحدة على الأكثر:

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=8/27+12/27=20/27$$

d) الحصول على 3 شعارات: $P(X=0)=8/27$

مثال 2: نسبة القطع التالفة لأحد مصانع الأجهزة الخليوية هي 10%. لنأخذ عينة من 5 أجهزة بشكل عشوائي من أنتاج هذا المصنع، ما هو احتمال الحصول على:

a) جهاز خليوي واحد تالف.

b) جميع الأجهزة عاطلة.

c) جميع الأجهزة غير عاطلة (تعمل).

d) جهاز واحد على الأقل تالف.

الحل:

ليكن المتحول X الذي يدل على عدد الأجهزة الخلوية التالفة. نتيجة النجاح تعني الحصول على جهاز خليوي عاطل، بالتالي احتمال النجاح $p=0.1$. أما نتيجة الفشل فهي الحصول على جهاز خليوي سليم، بالتالي احتمال الفشل $q=0.9$. المتغير العشوائي X يتبع إذن توزيع ثنائي الحد بوسيطين $p=0.1$ و $n=5$ أي $X \sim b(x;\ 5,\ 0.1)$.

$$P(X=x)=f_X(x)=C(5,x)(0.1)^x(0.9)^{5-x};\quad x=0,1,\dots,5$$

a) $P(X=1)=C(5,1)(0.1)^1(0.9)^4=0.32805$

b) $P(X=5)=C(5,5)(0.1)^5(0.9)^0=0.00001$

c) $P(X=0)=C(5,0)(0.1)^0(0.9)^9=0.59049$

d) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.59049=0.40951$

مثال 3: احتمال أن يتعافى مريض من مرض نادر في الدم هو 0.4. إذا كان 15 شخص مصابون بهذا المرض، ما هو احتمال:

a) 10 أشخاص على الأقل يبقون على قيد الحياة.

b) من 3 إلى 8 أشخاص يبقون على قيد الحياة.

c) 5 أشخاص يبقون على قيد الحياة.

الحل:

ليكن المتحول X الذي يدل على عدد الأشخاص الذين يبقون على قيد الحياة. نتيجة النجاح تعني البقاء، بالتالي احتمال النجاح $p=0.4$. أما نتيجة الفشل فهي عدم البقاء على قيد الحياة (الموت)، بالتالي احتمال الفشل $q=0.6$. المتغير العشوائي X يتبع إذن توزيع ثنائي الحد بوسيطين $p=0.4$ و $n=15$، أي $X\sim b(x;\ 15,\ 0.4)$.

$$P(X=x)=f_X(x)=C(15,x)(0.4)^x(0.6)^{15-x};\quad x=0,1,\dots,15$$

a) $P(X\geq 10)=\sum_{x=10}^{15}C(15,x)(0.4)^x(0.6)^{15-x}=0.0338$

b) $P(3\leq X\leq 8)=\sum_{x=3}^{8}C(15,x)(0.4)^x(0.6)^{15-x}=0.8779$

c) $P(X=5)=C(15,5)(0.4)^5(0.6)^{10}=0.1859$

1.2. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 2: إذا كان X متحول عشوائي يتبع توزيع ثنائي الحد بوسيطين $n,\ p$ أي $X\sim b(x;\ n,\ p)$، فإن:

$$\mu_X=E(X)=np$$

$$\sigma_X^2=Var(X)=npq$$

مثال 4: أوجد التوقع الرياضي والتشتت للمثال السابق، ومن ثم استخدم متراجحة (نظرية) تشيبيشيف لتفسير المجال $\mu_X\pm 2\sigma_X$.

الحل:

$$\mu_X = np = 15(0.4) = 6$$
$$\sigma_X^2 = npq = 15(0.4)(0.6) = 3.6$$
$$\sigma_X = \sqrt{3.6} = 1.90$$

تقول نظرية تشيبيشيف بأن عينة من المعطيات متوسطها μ_X وانحرافها المعياري σ_X تكون نسبة المعطيات الواقعة ضمن المجال $[\mu_X - k\sigma_X , \mu_X + k\sigma_X]$ لا تقل عن $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

المجال المطلوب هو: $[2.21, 9.79] = (1.90)2 \pm 6$، والنسبة هي: $\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = 1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$.

أي أن عدد المرضى القابلين للشفاء من بين 15 مصاب بمرض نادر في الدم باحتمال مقداره 3/4 يقع في المجال [2.21, 9.79]، وبما أن المعطيات منفصلة، ضمن المجال [2, 10].

3. التوزيع الهندسي geometric distribution:

التوزيع الهندسي هو جزء من التوزيع الاحتمالي المتعلق بتجارب برنولي. وهو عدد التكرارات للتجربة للحصول على نجاح واحد فقط من تلك التجربة. فإذا كان المتغير العشوائي X يشير إلى عدد مرات تكرار التجربة و p يشير إلى احتمال نجاح التجربة و $q=1-p$ هو احتمال فشل التجربة وبالتالي فإن التابع الاحتمالي لهذا التوزيع هو: $g(x;\, p)=pq^{x-1},\ x=1,\ 2,\ \ldots$.

تعريف 3: نقول عن متحول عشوائي X أنه يتبع توزيع هندسي بوسيط p ونكتب باختصار $X \sim g(x;\, p)$ إذا كان له تابع الاحتمال (تابع الكثافة الاحتمالية) التالي:

$$P(X=x)=g(x;\, p)=pq^{x-1},\ x=1,\ 2,\ \ldots$$

وحيث أيضاً: $0<p<1$ و $q=1-p$.

يمكن ملاحظة أن:

- $g(x;\, p)=pq^{x-1}\geq 0$
- $\sum_{x=0}^{\infty} g(x;\, p)=\sum_{x=0}^{\infty} pq^{x-1}=p\frac{1}{1-q}=1$

مثال 5: ليكن لدينا قطعة نرد متزنة، ما هو احتمال ظهور الرقم 6 بعد 7 محاولات لإلقاء النرد؟

الحل:

الاحتمال الناجح (ظهور الرقم 6) هو: $p=1/6$. الاحتمالات الخاطئة (عدم ظهور الرقم 6) هو: $q=5/6$

ظهور الحدث المطلوب يكون بعد 7 محاولات أي في المحاولة الثامنة وبالتالي فإن $x=8$:

$$P(X=8)=g(x;\, p)=\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^7=\frac{5^7}{6^8}=0.04651$$

مثال 6: منتجات آلة ما لديها 3% منها تالفة defective. ما هو احتمال:

a) أن يكون أول منتج تالف يظهر في البند الخامس المفحوص

b) أن يكون أول منتج تالف يظهر في البنود الخمسة الأوائل المفحوصة

الحل:

a) $P(X=5)=(0.03)(0.97)^{5-1}=0.02656$

b) $P(X\leq 5)=1\ -\ P(\text{First 5 non defective})=1-0.97^5=0.14127$

1.3. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=x)$$
$$= p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{x-1}$$
$$= p(1 + q + q^2 + \ldots + q^{x-1})$$
$$= p\frac{1-q^x}{1-q} = p\frac{1-q^x}{p} = 1 - q^x$$

2.3. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 3: إذا كان X متحول عشوائي يتبع التوزيع الهندسي بوسيط p أي $X \sim g(x;\, p)$ ، فإن:

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

مثال 5: إذا كان احتمال ولادة ذكر في أي ولادة تمرّ بها سيده هو $1/3$ أوجد:

a) تابع التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الوضع قبل أن ترزق هذه السيدة بذكر.

b) أوجد متوسط عدد مرات الوضع قبل أن ترزق السيدة بأول ذكر.

c) ما هو احتمال أن تضع ذكرا لأول مرة بعد ولادتين.

d) ما هو احتمال أن تضع السيدة ذكراً لأول مرة بعد ثلاث ولادات على الأكثر.

الحل:

احتمال ولادة ذكر $p = 1/3$ ، ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات الوضع قبل أن ترزق السيدة بأول ذكر.

a) X يتبع توزيعا هندسياً بوسيط $p = 1/3$ ، بالتالي يكون تابع التوزيع الاحتمالي هو:

$$P(X = x) = f_X(x) = (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^{x-1}; \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

b) متوسط عدد مرات الوضع قبل أن ترزق السيدة بأول ذكر هو μ_X حيث:

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{1/3} = 3$$

c) احتمال أن تضع السيدة ذكراً لأول مرة بعد ولادتين هو $P(X=2)$ حيث:

$$P(X=2) = (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^{2-1} = \frac{2}{9}$$

d) احتمال أن تضع السيدة ذكراً لأول مرة بعد ثلاث ولادات على الأكثر هو:

$$P(X=2)=(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^{2-1}=\frac{2}{9}$$

$$P(X\leq 3)=F(3)=1-q^3=1-(\frac{2}{3})^3=\frac{19}{27}=0.7$$

4. التوزيع فوق الهندسي hypergeometric distribution:

تشبه أنواع تطبيقات التوزيع فوق الهندسي لأنواع تطبيقات توزيع ثنائي الحد، حيث في كلا الحالتين نهتم بحساب احتمال وقوع عدد معين من المشاهدات ضمن فئة محددة. ولكن في حالة التوزيع ثنائي الحد فإن الاستقلالية بين التكرارات مطلوبة، ونتيجة لذلك عندما نطبق هذا التوزيع، على سبيل المثال عند أخذ العينات (أوراق اللعب cards، دفعة من عناصر منتجة)، وجب علينا السحب مع الإعادة with replacement وذلك بعد المشاهدة. أما في حالة التوزيع فوق الهندسي فإن الاستقلالية بين التكرارات غير مطلوبة وتعتمد على السحب من دون إعادة without replacement. ليكن المثال التوضيحي التالي باستخدام أوراق اللعب.

مثال 6: إذا أردنا إيجاد احتمال وجود 3 بطاقات حمراء من بين 5 بطاقات مسحوبة من أوراق اللعب العادية ال 52. من الملاحظ أنه لا يمكن تطبيق توزيع ثنائي الحد إلا إذا تم إعادة كل بطاقة مسحوبة ومن ثم خلط الأوراق قبل عملية السحب التالية. ولأجل حل مسالة أخذ العينات من دون إعادة، دعونا نطرح المسألة بشكل آخر. إذا تم سحب 5 بطاقات عشوائياً، نقوم بحساب احتمال اختيار 3 بطاقات حمراء من بين ال 26 بطاقة متاحة (باللون الأحمر) ومن ثم اختيار بطاقتين سوداوين من بين الـ 26 بطاقة متاحة (باللون الأسود). بالتأكيد يوجد $C(26,3)$ طريقة مختلفة لاختيار 3 بطاقات حمراء، ومن أجل كل طريقة من هذه الطرق نستطيع اختيار بطاقتين سوداوين بـ $C(26,2)$ طريقة، بالتالي فإن العدد الكلي من أجل اختيار 3 بطاقات حمراء وبطاقتين سوداوين هو $C(26,3)\text{x}C(26,2)$. وأن عدد الطرق المختلفة لسحب 5 بطاقات من بين 52 بطاقة هو $C(52,5)$. وأخيراً فإن احتمال سحب 5 بطاقات من بين 52 بطاقة من دون إعادة حيث 3 منها حمراء واثنتان سوداوان هو:

$$\frac{C(26,3)\,C(26,2)}{C(52,5)} = 0.325$$

وبشكل عام، نهتم بحساب احتمال اختيار x نجاح من بين k عنصر مصنفة على أنها ناجحة واختيار $n-x$ فشل من بين $N-k$ عنصر مصنفة على أنها فاشلة وذلك عندما نأخذ (نختار) عينة مكونة من n من بين N عنصر. نسمي هذه العملية بالتجربة فوق الهندسية hypergeometric experiment. تمتاز هذه العملية بالخاصتين التاليتين:

نختار عينة عشوائية حجمها n بدون إعادة من مجتمع مكون من N عنصر.

من بين الـ N عنصر k منها مصنفة ناجحة و $N-k$ مصنفة فاشلة.

تعريف 4: نقول عن متحول عشوائي X أنه يتبع توزيع فوق هندسي، حيث يمثل X عدد حالات النجاح في عينة عشوائية حجمها n تم اختيارها من مجتمع مكون من N عنصر من بينها k عنصر مصنفة على أنها ناجحة و $N-k$ مصنفة على أنها فاشلة، ونكتب باختصار $X \sim h(x;\ N,\ n,\ k)$، إذا كان له تابع الاحتمال (تابع الكثافة الاحتمالية) التالي:

$$P(X=x)=h\left(x;N,n,k\right)=\frac{C(k,x)C(N-k,n-x)}{C(N,n)},$$
$$\max\{0,n-(N-k)\}\le x\le\min\{n,k\}$$

مثال 7: نسحب 6 أوراق من أوراق اللعب ال 52 وبدون إعادة. ما هو احتمال الحصول على ورقتي قلب؟

الحل:

لدينا $k=13,\ N=52,\ n=6$ ، بالتالي:

$$P(2\,hearts)=\frac{C(13,2)C(39,4)}{C(52,6)}=\frac{6415578}{20358520}=0.315$$

مثال 8: يحوي معرض للسيارات 48 سيارة منها 8 سيارات معيبة. تم اختيار عينة عشوائية مكونة من 5 سيارات، أوجد احتمال:

a) العينة كلها سليمة

b) سيارة واحدة معيبة

c) سيارتين على الأقل معيبة

الحل:

ليكن المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد السيارات المعيبة في العينة المختارة، $k=8$ عدد السيارات المعيبة في المجتمع و $N=48$ و $n=5$. بالتالي $X\sim h(x;\ 48,\ 5,\ 8)$

$$P(X=x)=h\left(x;48,5,8\right)=\frac{C(8,x)C(40,5-x)}{C(48,5)},\quad x=0,1,2,3,4,5$$

العينة كلها سليمة $P(X=0)$

$$P(X=0)=\frac{C(8,0)C(40,5)}{C(48,5)}=\frac{658008}{1712304}=0.384$$

سيارة واحدة معيبة $P(X=1)$

$$P(X=1)=\frac{C(8,1)C(40,4)}{C(48,5)}=\frac{731120}{1712304}=0.427$$

سيارتين على الأقل معيبة $P(X\ge 2)$

$$P(X\ge 2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-(0.384+0.427)=0.189$$

1.4. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 4: إذا كان X متحول عشوائي يتبع التوزيع فوق الهندسي $X\sim h(x;\ N,\ n,\ k)$ ، فإن:

$$\mu_X = E(X) = \frac{nk}{N}$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{N-n}{N-1}.n.\frac{k}{N}(1-\frac{k}{N})$$

مثال 9: صناديق من المصابيح يحوي كل منها 40 مصباح، يتم رفض الصندوق الواحد إذا كان يحوي 3 مصابيح أو أكثر معيبة. تقوم إجرائية قبول الصندوق على اختيار عينة مكونة من 5 مصابيح بشكل عشوائي ويتم رفض الصندوق إذا وجد فيه مصابيح معيبة. بفرض أن عدد المصابيح المعيبة في الصندوق الواحد هو 3 مصابيح. أوجد:

a) احتمال وجود مصباح واحد فقط معيب في العينة.

b) أوجد التوقع الرياضي والتشتت، ومن ثم استخدم متراجحة تشيبيشيف لتفسير المجال $\mu_X \pm 2\sigma_X$.

الحل:

ليكن المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد المصابيح المعيبة في الصندوق المختار، $k=3$ عدد المصابيح المعيبة في الصندوق و $N=40$ و $n=5$، بالتالي $X \sim h(x;\ 40,\ 5,\ 3)$

a) $P(X=1) = \dfrac{C(3,1)C(37,4)}{C(40,5)} = \dfrac{198135}{658008} = 0.3011$

b) $\mu_X = E(X) = \dfrac{5(3)}{40} = \dfrac{3}{8} = 0.375$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \frac{35}{39}.5.\frac{3}{40}(1-\frac{3}{40}) = 0.3113$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.3113} = 0.558$$

المجال المطلوب هو: $0.375 \pm 2(0.558) = [-0.741,\ 1.491]$، والنسبة هي: $1-\dfrac{1}{2^2} = \dfrac{3}{4}$.

نظرية تشيبيشف تقول إن عدد القطع المعيبة في 5 مصابيح تم اختيارها عشوائياً من صندوق مكون من 40 مصباح بينهم 3 مصابيح معيبة لها احتمال على الأقل 3/4 أن تقع ضمن المجال $[-0.741,\ 1.491]$. بمعنى آخر ثلاثة أرباع الحالات المصابيح الخمسة تحوي أقل من مصباحين معيبين.

ملاحظة 1: عندما تكون قيمة n صغيرة مقارنة بقيمة N، عندئذ يمكن استخدام توزيع ثنائي الحد كتقريب للتوزيع فوق الهندسي. في الحقيقة ومن حكم التجربة يمكن اعتبار هذا التقريب جيداً من أجل $n/N \le 0.05$ بالتالي فإن الكمية k/N تلعب دور الوسيط p في ثنائي الحد. ونتيجة لذلك يمكن توزيع اعتبار ثنائي الحد كإصدار مجتمع واسع large–population version من التوزيع فوق الهندسي. بالتالي فإن القيمة المتوقعة والتشتت تنتج من الصيغ التالية:

$$\mu_X = np = \frac{nk}{N}$$

$$\sigma_X^2 = npq = n.\frac{k}{N}(1-\frac{k}{N})$$

بمقارنة هذه الصيغ مع صيغ المبرهنة 4، نجد أن القيمة المتوقعة هي نفسها، لكن التشتت يختلف بعامل التصحيح $\frac{N-n}{N-1}$، والذي يمكن إهماله عندما تكون n صغيرة مقارنة بـــ N.

مثال 10: يصرح مصنع دواليب سيارات أن من بين كل شحنة مكونة من 5000 دولاب يتم إرسالها إلى موزع محلي 1000 منها يحوي على عيب بسيط. إذا اشترى أحدهم من الموزع المحلي 10 دواليب اختارهم عشوائياً، ما هو احتمال أن يكون بينهم دواليب اختارهم عشوائياً، ما هو احتمال أن يكون بينهم 3 دواليب معيبة؟

الحل:

بما أن $N = 5000$ كبيرة بالنسبة لحجم العينة $n = 10$، بالتالي يمكن تقريب الاحتمال المطلوب باستخدام توزيع ثنائي الحد. احتمال الحصول على دولاب معيب هو $p = 0.2$. بالتالي احتمال الحصول على بالتالي احتمال الحصول على 3 دواليب معيبة هو:

$$h(3; 5000, 10, 1000) \approx b(3; 10, 0.2) = C(10,3)(0.2)^3(0.8)^7 = 0.2013$$

قيمة الاحتمال الصحيحة باستخدام التوزيع فوق الهندسي هو: $h(3; 5000, 10, 1000) = 0.2015$.

5. توزيع بواسون Poisson distribution:

في الحياة العملية أحياناً ما نقابل بعض الظواهر التي ينطبق عليها شروط توزيع ذي الحدين ولكن هذه الحوادث تكون نادرة الوقوع وهذا يعنى أن احتمال النجاح يكون صغير جداً يقترب من الصفر وعلية فإنه يمكن القول أن $np=\lambda$، حيث λ هي مقدار ثابت وبذلك يكون احتمال الفشل كبير أي أنه يقترب من الواحد. وبذلك تكون شروط هذا التوزيع كالآتي:

1. أن يكون احتمال النجاح p ثابت وكذلك احتمال الفشل q في كل محاولة.
2. أن يكون احتمال النجاح صغيراً ويقترب من الصفر واحتمال الفشل يقترب من الواحد الصحيح.
3. أن تكون عدد المحاولات كبيراً جداً حيث أن $np=\lambda$ مقدار ثابت.

ولتوزيع بواسون تطبيقات واسعة فهو يقدم بشكل عام نموذجاً للمعلومات الإحصائية التي تأخذ شكل تعداد لحوادث نادرة الوقوع حيث يمثل المتحول العشوائي X عدد الحوادث النادرة الملحوظة في وحدة قياس معينة زمناً كانت أم مساحة أم حجماً بينما يمثل λ معدل أو متوسط عدد مرات ظهور تلك الأحداث في واحدة القياس. توضح الأمثلة التالية الحالات التي نطبق فيها عادة توزيع بواسون:

- عدد المكالمات الهاتفية التي ترد إلى مقسم خلال فترة زمنية معينة.
- عدد الجسيمات الصادرة في الثانية عن مادة مشعة.
- عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات كتاب معين.
- عدد حوادث المرور في مدينة كبيرة خلال يوم.
- عدد البكتريا الموجودة في ميليمتر مكعب واحد من وعاء يحتوي على سائل معين.

تعريف 5: نقول عن متحول عشوائي X أنه يتبع توزيع بواسون بوسيط λ ونكتب باختصار $X \sim p(x;\lambda)$ إذا كان له تابع الاحتمال (تابع الكثافة الاحتمالية) التالي:

$$P(X=x)=p(x;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!};\quad x=0,1,2,\ldots$$

وحيث أن e هو العدد النيبري ويساوي .... $e=\ 2.71828$

يمكن ملاحظة أن:

- $p(x;\lambda)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}>0$
- $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty}p(x;\lambda)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$

مثال 11: إذا كان متوسط عدد مستخدمي الصراف الآلي في أحد البنوك هو 5 اشخاص كل نصف ساعة. احسب:

a) الاحتمالات التالية لأعداد الواصلين كل نصف ساعة بأن يكون:

- 10 أشخاص
- يقل عن 3 أشخاص
- يتراوح العدد بين 4 و 8 أشخاص

b) احسب نفس الاحتمالات السابقة من أجل معدل الوصول كل ربع ساعة

c) احسب نفس الاحتمالات السابقة من أجل معدل الوصول كل ساعة

الحل:

a) معدل الوصول كل نصف ساعة

$$\lambda = 5$$

$$P(X = 10) = \frac{e^{-5}5^{10}}{10!} = 0.01813$$

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \frac{e^{-5}5^{0}}{0!} + \frac{e^{-5}5^{1}}{1!} + \frac{e^{-5}5^{2}}{2!} = 0.12465$$

$$P(X > 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - (\frac{e^{-5}5^{0}}{0!} + \frac{e^{-5}5^{1}}{1!}) = 0.95957$$

$$P(4 \le X \le 8) = P(X = 4) + P(X = 5) + \ldots + P(X = 8) = 0.66688$$

b) معدل الوصول كل ربع ساعة: نجري نفس العمليات الحسابية السابقة ولكن مع قيمة للوسيط λ مساوية إلى $\lambda = 5(1/2) = 5/2 = 2.5$.

c) معدل الوصول كل ساعة: نجري نفس العمليات الحسابية السابقة ولكن مع قيمة للوسيط λ مساوية إلى $\lambda = 5(2) = 10\lambda = 5(2) = 10$.

مثال 12: إذا كان متوسط وصول السفن إلى ميناء اللاذقية سفينتين في اليوم, أوجد احتمال وصول 3 سفن إلى هذا الميناء في أحد الأيام.

الحل:

$$\lambda = 2$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-2}2^{3}}{3!} = 0.18045$$

1.5. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 5: إذا كان X متحول عشوائي يتبع توزيع بواسون $X \sim p(x;\lambda)$، فإن:

$$\mu_X = E(X) = \lambda$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \lambda$$

مثال 13: إذا كان عدد الأخطاء المطبعية في كتاب يتكون من 600 صفحة هو 50 خطأ فإذا كانت الأخطاء تتوزع توزيعاً عشوائياً. فما احتمال إذا اختيرت 10 صفحات عشوائيا ألا تحتوي على أخطاء.

الحل:

بفرض أن X يمثل عدد الأخطاء في كل صفحة وأن عدد المحاولات (الصفحات) تمثل سلسلة من محاولات برنولي عددها $n=10$. نسبة الخطأ (النجاح) هي: $p = 50/600 = 0.083$ ، وعليه فإن:

$$\lambda = np = 10(0.083) = 0.83$$

وبالتالي فإن لـــ X توزيع بواسون، وأن:

$$P(X=0) = \frac{e^{-0.83}0.83^0}{0!} = 0.436$$

مبرهنة 6: ليكن لدينا X متحول عشوائي يتبع توزيع ثنائي الحد $b(x;\, n,\, p)$. عندما تسعى n إلى اللانهاية ($n \to \infty$) وتسعى p إلى الصفر ($p \to 0$)، وتسعى np إلى قيمة محدودة μ عندما تسعى n إلى اللانهاية ($np \underset{n\to\infty}{\to} \mu$)، فإن: $b(x;\, n,\, p) \underset{n\to\infty}{\to} p(x;\mu)$.

قاعدة التقريب هي: $n > 30$ و $p \le 0.05$.

مثال 14: احتمال حدوث حادث في أحد الأيام هو 0.005 والحوادث مستقلة عن بعضها البعض. ما هو احتمال وجود حادث واحد في بوم ما خلال فترة 400 يوم؟

الحل:

ليكن X المتحول العشوائي لتوزيع ثنائي الحد مع $n = 400$ و $p = 0.005$ ، بالتالي $np = 2$. باستخدام تقريب بواسون:

$$P(X=1) = \frac{e^{-2}2^1}{1!} = 0.270671$$

باستخدام ثنائي حد نيوتن:

$$P(X=1) = C(400,1)(0.005)^1(0.995)^{399} = 0.270669$$

تمارين

1. احتمال أن يصيب رامٍ الهدف 0.8 فإذا صوب الرامي نحو الهدف 5 طلقات فما هو احتمال أن:
   a) يصيب الهدف بثلاث طلقات
   b) يصيب الهدف بطلقة واحدة على الأقل

2. كم مرة يجب إلقاء حجر النرد لكي يكون احتمال الحصول على الرقم 6 أكبر من 0.75؟

3. إذا كررنا تجربة رمي زوج النرد 4 مرات متتالية فما هو احتمال أن نحصل على المجموع 5؟
   a) مرة واحدة فقط
   b) مرة واحدة على الأكثر
   c) مرتين على الأقل

4. متوسط عدد المكالمات التي يتلقاها مقسم ما بين الساعة العاشرة والساعة الحادية عشرة هو 1.5 مكالمة في الدقيقة. المطلوب حساب احتمال أن يكون لدينا بين الساعة 9h25 و 9h26:
   a) عدم وجود أي مكالمة هاتفية
   b) مكالمة هاتفية واحدة
   c) مكالمتان هاتفيتان
   d) ثلاث مكالمات هاتفية على الأقل

5. كتاب مؤلف من 500 صفحة ويحتوي على 800 خطأ مطبعي موزعة بشكل عشوائي على صفحات الكتاب فإذا فتحنا الكتاب على صفحة ما فما هو احتمال:
   a) أن يكون في الصفحة ثلاثة أخطاء مطبعية.
   b) أن أن تخلو الصفحة من الأخطاء المطبعية.
   c) أن يكون في الصفحة خطأ مطبعي واحد على الأقل.

6. يحتوي صندوق على 100 عنصر حيث 10% منها معيب. أوجد احتمال ألا يكون أكثر من عنصرين معيبين في عينة عشوائية حجمها 10.
   a) حالة سحب مع إعادة.
   b) حالة سحب من دون إعادة.

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(80) درجة**

1. X متحول عشوائي يتبع توزيع ثنائي الحد بوسيطين n, p. التوقع الرياضي والانحراف المعياري هما:
   a) $\mu_X = np; \quad \sigma_X = \sqrt{npq}$
   b) $\mu_X = np; \quad \sigma_X = npq$
   c) $\mu_X = npq; \quad \sigma_X = np$
   d) $\mu_X = npq; \quad \sigma_X = \sqrt{np}$

2. X متحول عشوائي يتبع توزيع برنولي. التوقع الرياضي والتشتت هما
   a) $\mu_X = p; \quad \sigma_X^2 = pq$
   b) $\mu_X = pq; \quad \sigma_X^2 = p$
   c) $\mu_X = p; \quad \sigma_X^2 = \sqrt{pq}$
   d) $\mu_X = pq; \quad \sigma_X^2 = \sqrt{p}$

قطعة نقود غير متزنة بحيث $P(H) = 1/3$ و $P(T) = 2/3$. رمينا هذه القطعة 3 مرات، X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الكتابة H في الرميات الثلاث (معطيات الأسئلة 3, 4, 5, 6).

3. احتمال عدم الحصول على كتابة هو:
   a) 0
   b) 1/27
   c) 8/27
   d) 1

4. احتمال الحصول على كتابة واحدة على الأقل هو:
   a) 0
   b) 1
   c) 26/27
   d) 19/27

5. $E(X^2)$ هو:

a) $2/3$

b) $5/3$

c) 1

d) $3/5$

6. احتمال الحصول على الكتابة أول مرة بعد محاولتين (في المحاولة الثالثة) هو:

a) $4/27$

b) $1/27$

c) $4/9$

d) $1/9$

متوسط عدد المكالمات التي يتلقاها مقسم ما بين الساعة التاسعة والساعة العاشرة هو 2 مكالمة في الدقيقة. المطلوب حساب احتمال أن يكون لدينا بين الساعة 9h15 و 9h16 (معطيات الأسئلة 9, 8 ,7).

7. عدم وجود أي مكالمة هاتفية هو:

a) 0.125

b) 0.135

c) 0.145

d) 0.155

8. مكالمة هاتفية واحدة على الأقل هو:

a) 0.875

b) 0.855

c) 0.845

d) 0.865

9. X متحول عشوائي يمثل عدد المكالمات الهاتفية في الدقيقة. الانحراف المعياري σ_X هو:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) $1/2$

c) $\sqrt{2}$

d) 2

10. معدل (متوسط) الحوادث المرورية في مدينة صغيرة 3 حوادث في الأسبوع. احتمال وقوع حادث واحد على الأقل في اسبوعين هو:

a) 0.1991

b) 0.9975

c) 0.9502

d) 0.0174

11. ليكن لدينا جدول التوزيع الاحتمالي:

$$P(X=x)=C(5,\ x)(0.7)^{x}(0.3)^{5-x},\ x=0,\ 1,\ \dots,\ 5$$

التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X:

a) 3.5

b) 35

c) 1.5

d) 0.21

12. معطيات عملية السحب sampling بدون إعادة من مجتمع محدود (عدد عناصره منته) تتبع:

a) توزيع ثنائي الحد

b) توزيع فوق الهندسي

c) توزيع بواسون

d) التوزيع الهندسي

13. متحول عشوائي X يمثل عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات كتاب معين يتبع:

a) توزيع ثنائي الحد

b) توزيع فوق الهندسي

c) توزيع بواسون

d) التوزيع الهندسي

14. احتمال إصابة شخص بأحد الأمراض هو 0.001. عينة عشوائية من 1000 شخص. احتمال إصابة 3 أشخاص بهذا المرض هو:

a) 0.06131

b) 0.61310

c) 0.00613

d) لا شيء ما سبق

15. التجربة الثنائية هي تجربة تتصف بالخواص التالية:

a) تتألف من عدد من التكرارات المتماثلة تماماً

b) ينتج عن كل تكرار إحدى نتيجتين نجاح أو فشل

c) احتمال النجاح يبقى ثابتاً من تكرار إلى آخر

d) كل ما سبق

16. عدد المرات التي يجب إلقاء قطعة نفود متزنة لكي يكون احتمال الحصول على الكتابة H أكبر من 0.9:

a) 4

b) 3

c) 5

d) 2

السؤال الثاني: (20) درجة

نرمي قطعة نقود متزنة خمس مرات متتالية وليكن X المتحول العشوائي الدال على ظهور الكتابة H والمطلوب:

a) عين مجموعة قيم المتحول X.

b) أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول X.

c) أوجد الاحتمال $P(1 \le X \le 3)$.

d) أوجد التوقع الرياضي والتشتت للمتحول X.

الحل:

a) $X(\Omega) = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

b) $P(X = x) = C(5,\ x)(0.5)^x (0.5)^{5-x},\ x = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5$

$$P(X = x) = C(5,\ x)\left(\frac{1}{2}\right)^5,\ x = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5$$

$$P(X = x) = \frac{C(5,\ x)}{32},\ x = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5$$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\boldsymbol{P(X = x)}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

c) $P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{25}{32}$$

d) $\mu_X = np = 5(1/2) = 5/2$

$$\sigma_X^2 = npq = 5(1/2)(1/2) = 5/4$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 2

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 2
2	a	الفقرة 1
3	c	الفقرة 2
4	d	الفقرة 2
5	b	الفقرة 2
6	a	الفقرة 3
7	b	الفقرة 5
8	d	الفقرة 5
9	c	الفقرة 5
10	b	الفقرة 5
11	a	الفقرة 2
12	b	الفقرة 4
13	c	الفقرة 5
14	a	الفقرة 2 و5
15	d	الفقرة 1
16	a	الفقرة 2