الفصل السادس: نظرية توزيع العينات والتقدير

الكلمات المفتاحية:

توزيعات العينة، أخذ العينة، توزيع متوسط العينة، النهاية المركزية، تقدير وسطاء المجتمع، تقدير النقطة، تقدير المجال، مجال الثقة، مجال الثقة ذو طرف واحد.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى معرفة التوزيع الاحتمالي لإحصائية (لاسيما متوسط العينة) والمعروف باسم توزيع العينة، كما يهدف أيضاً إلى التعرف على طرق تقدير وسطاء المجتمع لاسيما تقدير القيمة المتوسطة والانحراف المعياري وتحديد هامش الخطأ.

الأهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

توزيعات العينة: متوسط العينة.

تقدير وسطاء المجتمع: المتوسط والتشتت.

نظرية النهاية المركزية.

المخطط:

1. توزيعات العينة.
2. تقدير وسطاء المجتمع.

لتقدير وسطاء parameters المجتمع (متوسط μ، تشتت σ^2 ...) ننطلق من معطيات العينة، حيث نحتاج إلى حساب وسطاء مثل متوسط العينة $\overline{X}$، تباين العينة S^2، ... بصفة عامة، نسمي كل قيمة تحسب انطلاقاً من معطيات العينة من أجل تقدير قيمة وسطاء المجتمع إحصائية العينات sampling statistic.

نسمي التوزيع الاحتمالي لإحصائية بتوزيع العينة sampling distribution.

1. توزيعات العينة sampling distributions:

1.1. متوسط العينة sample mean:

يمكن التمييز بين حالتين رئيسيتين: أخذ العينة مع إعادة وأخذ العينة من دون إعادة.

1.1.1. أخذ العينة مع إعادة sampling with replacement:

مبرهنة 1: ليكن لدينا المتحولات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والتي تمثل عينة حجمها n ومتوسطها $\overline{X}$ من مجتمع ما متوسطه μ وتشتته σ^2، فإن:

$$E(\overline{X}) = \mu \quad and \quad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

مثال 1: ليكن لدينا المتحول العشوائي المتقطع X مع جدول التوزيع الاحتمالي $P(X = x)$ المبين أدناه، وحيث $E(X) = \mu = 0.7$ و $Var(X) = \sigma^2 = 0.61$:

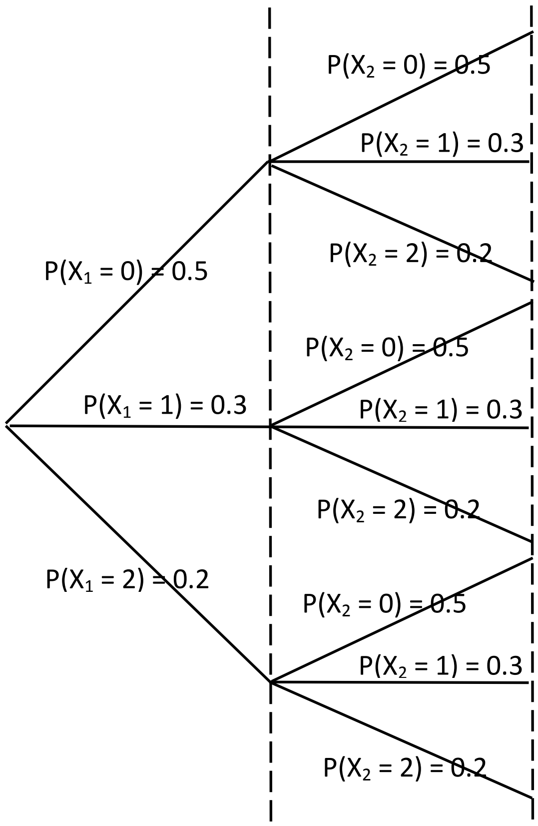
x	0	1	2
$P(X = x)$	0.5	0.3	0.2

نأخذ عينات بشكل عشوائي من هذا التوزيع حجمها 2 (مع إعادة). بأخذ كافة الاحتمالات الممكنة للعينة، أوجد جدول التوزيع الاحتمالي لـــ $\overline{X}$ (متوسط العينات). ومن ثم تحقق من صحة النظرية السابقة.

الحل:

جدول التوزيع الاحتمالي لـــ $\overline{X}$ هو التالي (من الشجرة في الشكل اللاحق):

$\overline{x}$	0	0.5	1	1.5	2
$P(X = x)$	0.25	0.3	0.29	0.12	0.04



Sample	Sample mean	Probability
0, 0	0	(0.5)(0.5) = 0.25
0, 1	0.5	(0.5)(0.3) = 0.15
0, 2	1	(0.5)(0.2) = 0.10
1, 0	0.5	(0.3)(0.5) = 0.15
1, 1	1	(0.3)(0.3) = 0.09
1, 2	1.5	(0.3)(0.2) = 0.06
2, 0	1	(0.2)(0.5) = 0.10
2, 1	1.5	(0.2)(0.3) = 0.06
2, 2	2	(0.2)(0.2) = 0.04

$$E(\overline{X}) = 0(0.25) + 0.5(0.3) + 1(0.29) + 1.5(0.12) + 2(0.04) = 0.7 = \mu$$
$$E(\overline{X}^2) = 0^2(0.25) + 0.5^2(0.3) + 1^2(0.29) + 1.5^2(0.12) + 2^2(0.04) = 0.795$$
$$Var(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - E^2(\overline{X}) = 0.795 - 0.7^2 = 0.305 \ = \sigma^2 / 2$$

2.1.1. أخذ العينة من دون إعادة sampling without replacement:

مبرهنة 2: ليكن لدينا المتحولات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والتي تمثل عينة حجمها n، مأخوذة من دون إعادة، متوسطها $\overline{X}$ من مجتمع ما حجمه N ومتوسطه μ وتشتته σ^2، فإن:

$$E(\overline{X}) = \mu \quad and \quad Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N - n}{N - 1}\right)$$

مثال 2: أوجد متوسط μ وتشتت σ^2 المجتمع 1, 4, 7. ارسم جدول التوزيع للمتوسطات لكافة العينات الممكنة التي حجمها 2 والمأخوذة من دون إرجاع. ومن ثم احسب متوسط وتشتت هذا التوزيع وتحقق أيضاً من صحة المبرهنة السابقة. ماذا يحدث لما $N \to \infty$؟

الحل:

$$E(X)=\mu=1(1/3)+4(1/3)+7(1/3)=12/3=4$$
$$E(X^2)=1^2(1/3)+4^2(1/3)+7^2(1/3)=66/3=22$$
$$\sigma^2 = E(X^2)-E^2(X)=22-4^2=6$$

جدول التوزيع الاحتمالي لـــ $\overline{X}$ هو التالي:

Sample	(1, 4)	(1, 7)	(4, 1)	(4, 7)	(7, 1)	(7, 4)
$\overline{x}$	2.5	4	2.5	5.5	4	5.5

$$E(\overline{X})=(2.5+4+2.5+5.5+4+5.5)/6=24/6=4=\mu$$
$$E(\overline{X}^2)=(2.5^2+4^2+2.5^2+5.5^2+4^2+5.5^2)/6 \; =105/6 \; =17.5$$
$$Var(\overline{X})=E(X^2)-E^2(X)=17.5-4^2=1.5$$
$$\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=\frac{6}{2}\left(\frac{3-2}{3-1}\right)=1.5=Var(\overline{X})$$

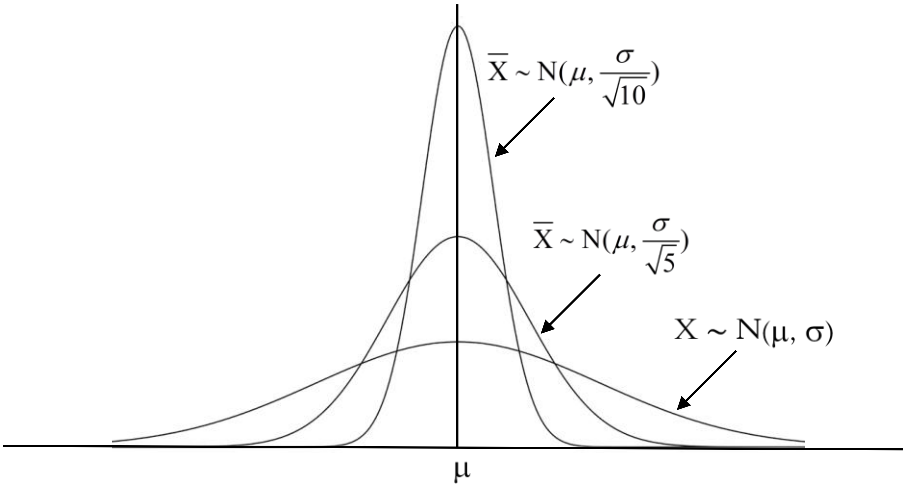
عندما $N\to\infty$ فإن $\frac{N-n}{N-1}\to 1$، بالتالي $Var(\overline{X})\to\frac{\sigma^2}{n}$.

2.1. توزيع متوسط العينة sample mean distribution:

1.2.1. العينات من مجتمع طبيعي sampling from a normal distribution:

مبرهنة 3: ليكن لدينا المتحولات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والتي تمثل عينة حجمها n، مأخوذة من مجتمع يخضع لتوزيع طبيعي $N(\mu,\sigma)$، بالتالي فإن توزيع المتوسط $\overline{X}$ هو طبيعي أيضاً:

$$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}),\quad \overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$



مثال 3: ارتفاع أحد أنواع النباتات يتبع توزيع طبيعي بمتوسط 21 سم وتشتت 90 سم. عينة عشوائية مؤلفة من 10 نباتات وتم حساب متوسط ارتفاعها. أوجد احتمال أن يكون متوسط العينة هذا محصور بين القيمتين 18 سم و 27 سم.

الحل:

بفرض X المتحول العشوائي الذي يعبر عن طول النبتة، بالتالي $X \sim N(21,\sqrt{90})$، بما أن $n=10$، بالتالي فإن $\overline{X} \sim N(21,3)$ $(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}}=\sqrt{9}=3)$.

$$P(18 < \overline{X} < 27) = P\left(\frac{18-21}{3} < \frac{\overline{X}-21}{3} < \frac{27-21}{3}\right)$$
$$= P(-1 < Z < 2) = 0.8185$$

مثال 4: عينة حجمها n أخذت من مجتمع يخضع لتوزيع طبيعي متحولها $X \sim N(74,6)$ وتم حساب متوسط كل عينة عشوائية. إذا كان $P(\overline{X} > 72) = 0.854$، قدّر حجم العينة n.

الحل:

$$\overline{X} \sim N(74, \frac{6}{\sqrt{n}})$$
$$P(\overline{X} > 72) = \left(\frac{\overline{X}-74}{6/\sqrt{n}} > \frac{72-74}{6/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{-\sqrt{n}}{3}\right) = 0.854$$
$$P(Z > -1.054) = 0.854$$

بالتالي: $\sqrt{n}/3 = 1.054$، ومنه $n = 9(1.054)^2$ أي $n=10$.

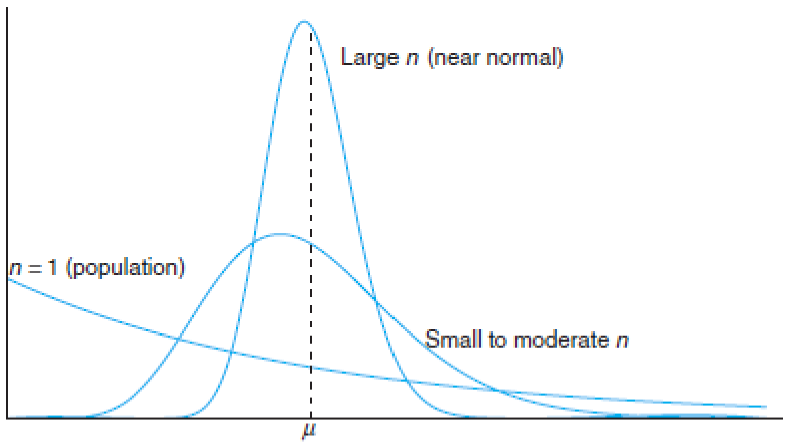
2.2.1. العينات من أي مجتمع sampling from any distribution:

مبرهنة النهاية المركزية the central limit theorem:

تقول مبرهنة النهاية المركزية انه كلما ازداد حجم العينة n فان التوزيع لمتوسط المتغيرات العشوائية الممثلة للعينة يقترب من التوزيع الطبيعي.

مبرهنة 4: ليكن لدينا المتحولات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والتي تمثل عينة حجمها n، مأخوذة من مجتمع يخضع لتوزيع ما بمتوسط μ وتشتت σ^2، بالتالي من أجل n كبيرة، فإن توزيع المتوسط $\overline{X}$ هو تقريباً توزيع طبيعي:

$$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma / \sqrt{n}), \quad \overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n$$



ملاحظة 1: كلما زاد حجم العينة n كلما كان التقريب أفضل.

مثال 5: عينة عشوائية بحجم 30 تم أخذها من كل من التوزيعين التاليين، أوجد من أجل كل حالة احتمال ألا يتجاوز وسط العينة 5.

a) $X \sim p(4.5)$ (توزيع بواسون)

b) $X \sim b(9,\ 0.5)$ (ثنائي الحد)

الحل:

a) من أجل $X \sim p(4.5)$ لدينا بالتالي:

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 4.5$$

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(4.5, \sqrt{0.15})$$

$$P(\overline{X} > 5) = P\left(\frac{\overline{X} - 4.5}{\sqrt{0.15}} > \frac{5 - 4.5}{\sqrt{0.15}}\right) = P\left(Z > 1.291\right) = 0.0983$$

من أجل $X \sim b(9,\ 0.5)$ لدينا بالتالي:

$$\mu = np = 9(0.5) = 4.5$$

$$\sigma^2 = npq = 9(0.5)(0.5) = 2.25$$

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(4.5, \sqrt{0.075})$$

$$P(\overline{X} > 5) = P\left(\frac{\overline{X} - 4.5}{\sqrt{0.075}} > \frac{5 - 4.5}{\sqrt{0.075}}\right) = P\left(Z > 1.826\right) = 0.034$$

2. تقدير وسطاء المجتمع estimation of population parameters:

المقصود بالتقدير estimation هو تقدير معالم المجتمع الإحصائي (أو التوزيع الاحتمالي) والتي غالباً ما تكون مجهولة ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها من معطيات العينة، ونرمز عادة لتقدير وسيط ما θ بالرمز $\hat{\theta}$. على سبيل المثال تقدير متوسط دخل الدولة أو تقدير متوسط عمر الناخب.

وهناك نوعان للتقدير يسمى النوع الأول تقدير النقطة point estimation، ويسمى الثاني تقدير المجال interval estimation.

ففي حالة تقدير النقطة نحصل على قيمة واحدة من العينة، وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب أو كتقدير لوسيط المجتمع المجهولة. فمثلاً لو أخذنا الوسط الحسابي للدخل في العينة كتقدير لمتوسط الدولة نكون قد حصلنا على تقدير نقطة لمتوسط دخل الدولة.

أما في تقدير المجال فنحصل على مجال معرف بحدين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة. فمثلاً إذا قدرنا أن الوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح بين 40 ± 6 سنة أي يتراوح بين 34 سنة كحد أدنى و46 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير مجال للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع.

وتتميز تقديرات المجال بأنه يمكن حساب احتمال أن يكون التقدير صحيحاً، وبالتالي فإنه يمكن معرفة مدى دقة التقديرات. لذا فإن مجالات التقدير تسمى أيضاً مجالات الثقة confidence intervals لأن هذه الفترات تعتمد في تكوينها الإحصائي على درجات أو مستويات ثقة معينة confidence levels مثل 95% أو 99 % وغيرها، بمعنى أن احتمال أن يكون مجال التقدير صحيح هو 0.95 أو 0.99.

فإذا كان متوسط أعمار الناخبين يتراوح ما بين 46 و34 سنة، ودرجة الثقة هي 95 % فإن هذا معناه أنه لو تكررت التجربة عدد كبير من المرات، فإن التقدير سيكون محصوراً بين هذين الرقمين في 95 من الحالات (أي احتمال أن يكون صحيحاً هو 95%).

1.2.التقدير النقطي point estimation:

1.1.2. متوسط المجتمع:

ليكن مجتمع ما متوسطه μ غير معلوم، نأخذ عينة عشوائية حجمها n، لنعتبر متوسط العينة $\overline{X}$، بحيث:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

فرضية 1: أفضل تقدير لمتوسط مجتمع μ، ونرمز له بالرمز $\hat{\mu}$ هو القيمة المتوسطة للعينة $\overline{X}$، أي أن:

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

2.1.2. تشتت المجتمع:

ليكن مجتمع ما تشتته σ^2 غير معلوم، نأخذ عينة عشوائية حجمها n، لنعتبر تشتت العينة S^2، بحيث:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{n-1} - \frac{n\overline{X}^2}{n-1}$$

فرضية 2: أفضل تقدير لتشتت مجتمع σ^2، ونرمز له بالرمز $\hat{\sigma}^2$ هو تشتت العينة S^2، أي أن:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2$$

مثال 6: أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت مجتمع من العينة المسحوبة منه بشكل عشوائي:

19.30, 19.61, 18.27, 18.90, 19.14, 19.90, 18.76, 19.10

الحل:

أفضل تقدير لمتوسط المجتمع هو:

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \sum_{i=1}^{8}\frac{x_i}{8} = \frac{152.98}{8} = 19.12$$

وأن أفضل تقدير لتشتت المجتمع هو:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{n-1} - \frac{n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{2927.1}{7} - \frac{8(19.12)}{7} = 0.25$$

ليكن الآن مجتمع ما متوسطه μ غبر معلوم تشتته σ^2 غير معلوم أيضاً، لنأخذ عينتان عشوائيان:

	قيم العينة		
	الحجم	**المتوسط**	**التشتت**
العينة I	n_1	$\overline{X}_1$	S_1^2
العينة II	n_2	$\overline{X}_2$	S_2^2

فإن تقدير متوسط المجتمع يعطى بالعلاقة التالية:

$$\hat{\mu} = \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2}$$

وأن تقدير تشتت المجتمع يعطى بالعلاقة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

مثال 7: عينتان، بحجم 40 و 50 على الترتيب، تم أخذهما من مجتمع متوسطه μ وتشتته σ^2 مجهولان. باستخدام معطيات العينتان، أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت هذا المجتمع.

العينة I

x_1	18	19	20	21	22
f	3	7	15	10	5

العينة II

x_2	18	19	20	21	22	23
f	10	21	8	6	3	2

الحل:

العينة الأولى:

$$\overline{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{807}{40} = 20.175$$

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{f_i x_i^2}{n-1} - \frac{n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{16329}{39} - \frac{40(20.175)^2}{39} = 1.225$$

العينة الثانية:

$$\overline{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{977}{50} = 19.54$$

$$s_2^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{f_i x_i^2}{n-1} - \frac{n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{19177}{49} - \frac{50(19.54)^2}{49} = 1.764$$

بالتالي لدينا من أجل المجتمع:

$$\hat{\mu} = \frac{n_1 \overline{X_1} + n_2 \overline{X_2}}{n_1 + n_2} = \frac{40(20.175) + 50(19.54)}{40 + 90} = 19.82$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{39(1.225) + 49(1.764)}{40 + 50 - 2} = 1.52$$

2.2. تقدير المجال interval estimation:

1.2.2. متوسط المجتمع:

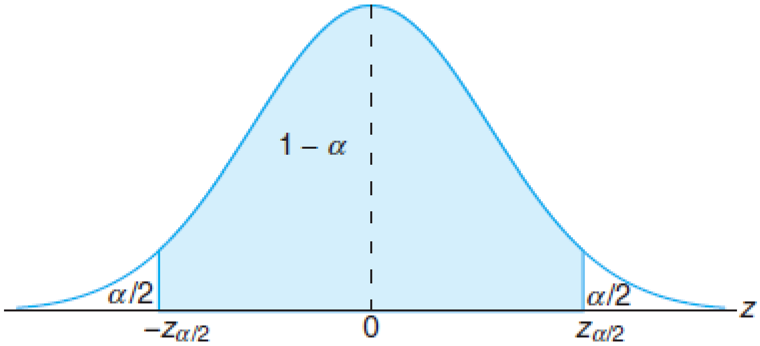
a) مجالات الثقة للمتوسط μ، تشتت المجتمع σ^2 معروف

إذا كان X يتبع توزيع طبيعي بحيث $X \sim N(\mu, \sigma)$ ، بالتالي فإن $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

وإذا لم يكن X يتبع توزيع طبيعي وكانت n كبيرة، بالتالي فإنه حسب نظرية النهاية المركزية $\overline{X}$ يتبع توزيع طبيعي $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma / \sqrt{n})$.

بإجراء التحويل $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ حيث Z يتبع توزيع طبيعي $Z \sim N(0,1)$ ، بالتالي:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$



نتيجة 1: إذا كان $\overline{x}$ متوسط عينة عشوائية حجمها n من مجتمع تشتته معروف σ^2 ، فإن مجال ثقة مقداره $100(1-\alpha)\%$ للمتوسط μ يعطى بالعلاقة التالية:

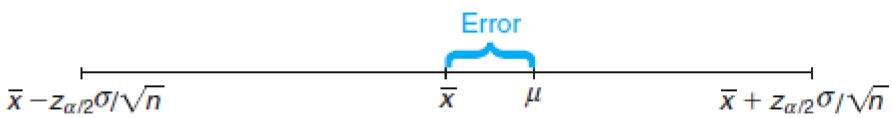
$$\overline{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث $z_{\alpha/2}$ هي قيمة Z التي تترك مساحة مقدارها $\alpha/2$ إلى يمينها.

ملاحظة 1: يمكن كتابة مجال الثقة السابق على النحو التالي:

$$\mu = \overline{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

مبرهنة 5: إذا تم استخدام $\overline{x}$ متوسط عينة كتقدير لمتوسط المجتمع μ ، فإننا نكون $100(1-\alpha)\%$ واثقون بأن الخطأ لن يتجاوز $z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.



يبين الجدول التالي مجالات الثقة الأكثر استخداماً:

99%	98%	95%
$\bar{x} \pm 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} \pm 2.326\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

مبرهنة 6: إذا تم استخدام $\bar{x}$ متوسط عينة كتقدير لمتوسط المجتمع μ، فإننا نكون $100(1-\alpha)\%$ واثقون بأن الخطأ لن يتجاوز قيمة محددة e إذا كان حجم العينة $n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2$.

مثال 8: ينتج مصنع ما صفائح فولاذية حيث أوزانها تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 2.4 kg. عينة عشوائية من 36 صفيحة فولاذية وزنها الوسطي 31.4 kg، أوجد مجال تقدير متوسط أوزان الصفائح بدرجة ثقة 95% ومن ثم 99%.

الحل:

من أجل درجة الثقة 95%:

$$31.4-1.96\frac{2.4}{\sqrt{36}}<\mu<31.4+1.96\frac{2.4}{\sqrt{36}}$$
$$30.62<\mu<32.18$$

ومن أجل درجة الثقة 99%:

$$31.4-2.575\frac{2.4}{\sqrt{36}}<\mu<31.4+2.575\frac{2.4}{\sqrt{36}}$$
$$30.37<\mu<32.43$$

مثال 9: ما هو حجم العينة في المثال السابق إذا أردنا مجال تقدير المتوسط μ بدرجة ثقة 95% بحيث لا يتجاوز الخطأ القيمة 0.6؟

الحل:

$$n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2=\left(\frac{1.96(2.4)}{0.6}\right)^2=61.47$$

بالتالي نحتاج إلى 62 عينة.

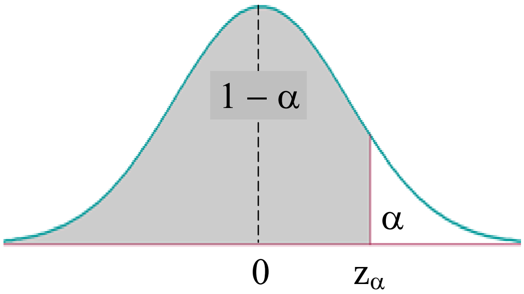
مجال الثقة ذو طرف واحد one sided confidence interval:

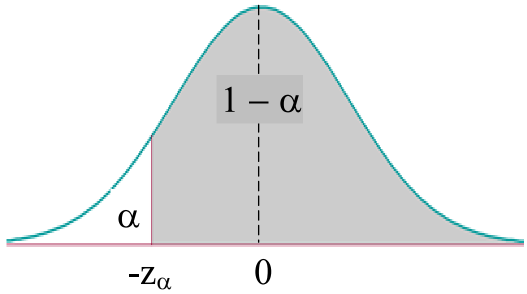
مجالات الثقة التي وجدناها حتى الآن تسمى ذو طرفين two sided (الحد الأدنى والحد الأعلى مطلوبان). لكن هناك الكثير من التطبيقات يطلب منها حد واحد (الأدنى أو الأعلى). نسمي في هذه الحالة مجال الثقة على أنه ذو طرف واحد، ويكون لدينا بالنسبة للشكل اليساري:

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_\alpha\right)=1-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\mu>\overline{X}-z_\alpha\sigma/\sqrt{n}\right)=1-\alpha$$

ومن أجل الشكل اليميني:

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>-z_\alpha\right)=1-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\mu<\overline{X}+z_\alpha\sigma/\sqrt{n}\right)=1-\alpha$$





نتيجة 2: إذا كان $\overline{x}$ متوسط عينة عشوائية حجمها n من مجتمع تشتته معروف σ^2، فإن حدود مجال ثقة مقداره $100(1-\alpha)\%$ للمتوسط μ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{x}+z_\alpha\sigma/\sqrt{n}, \quad \text{upper one sided bound}$$
$$\overline{x}-z_\alpha\sigma/\sqrt{n}, \quad \text{lower one sided bound}$$

مثال 10: في تجربة تحليل نفسي، تم اختيار 25 شخصاً بشكل عشوائي وتم رصد وقياس ردة الفعل، مقدرة بالثواني، نتيجة تحريض ما. تشير التجارب السابقة إلى أن تشتت رد الفعل لهذا النوع من التحريض هو 4 s^2 وأن توزيع رد الفعل يمكن تقريبه بالطبيعي. الزمن الوسطي للعينة كان 6.2 s. أوجد الحد الأعلى لمجال ثقة 95% ذو طرف واحد.

الحل:

حد مجال ثقة 95% يعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{x}+z_\alpha\sigma/\sqrt{n}=6.2+1.645\sqrt{4/25}=6.858\,s$$

b) مجالات الثقة للمتوسط μ، تشتت المجتمع σ^2 غير معروف

إذا كان X يتبع توزيع طبيعي بحيث $X\sim N(\mu,\sigma)$، وبما أن التشتت σ^2 غير معروف بالتالي نحتاج إلى تقدير له $\hat{\sigma}^2$. وكما وجدنا سابقاً بأن أفضل تقدير لتشتت المجتمع هو: $\hat{\sigma}^2=S^2$. بالتالي فإن $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}})$.

بإجراء التحويل $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$ حيث Z يتبع توزيع طبيعي $Z\sim N(0,1)$، بالتالي:

$$P\left(-z_{\alpha/2}<\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

نتيجة 3: إذا كان $\bar{x}$ متوسط عينة عشوائية حجمها n (حيث n كبيرة) من مجتمع يخضع لتوزيع طبيعي متوسطه μ غير معروف وتشتته σ^2 غير معروف أيضاً، فإن مجال ثقة مقداره $100(1-\alpha)\%$ للمتوسط μ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

حيث $z_{\alpha/2}$ هي قيمة Z التي تترك مساحة مقدارها $\alpha/2$ إلى يمينها.

ملاحظة 2: يمكن كتابة مجال الثقة السابق على النحو التالي:

$$\mu=\bar{x}\pm z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

مبرهنة 6: إذا تم استخدام $\bar{x}$ متوسط عينة كتقدير لمتوسط المجتمع μ، فإننا نكون $100(1-\alpha)\%$ واثقون بأن الخطأ لن يتجاوز $z_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$.

مثال 11: تم اختبار عينة من 225 خريج من كليات الهندسة في مادة الرياضات ووجد أن متوسط العينة هو 65 وانحرافها المعياري هو 12. أوجد مجال تقدير متوسط علامات الخريجين بدرجة ثقة 99%.

الحل:

$$65-2.575\frac{12}{\sqrt{225}}<\mu<65+2.575\frac{12}{\sqrt{225}}$$

$$62.94<\mu<67.06$$

مثال 12: عينة من القراءات تم أخذها من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتشتته σ^2 مجهولان أعطت الجدول التالي:

x	17.4	17.5	17.6	17.7	17.8
f	12	16	19	23	10

عينة ثانية من نفس المجتمع أعطت ما يلي:

$$n_2=72,\quad \sum x=1267.2,\quad \sum x^2=22536$$

أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت هذا المجتمع، ومن ثم جمع العينتين معاً وأوجد مجال تقدير μ بدرجة ثقة 90%.

الحل:

العينة الأولى:

$$\overline{x_1}=\frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i}=\frac{1408.3}{80}=17.604$$

$$s_1^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{f_i x_i^2}{n-1}-\frac{n\overline{x}^2}{n-1}=\frac{24792.63}{79}-\frac{80(17.604)^2}{79}=0.0161$$

العينة الثانية:

$$\overline{x_2}=\frac{\sum x}{n_2}=\frac{1267.2}{72}=17.6$$

$$s_2^2=\frac{\sum x^2}{n-1}-\frac{n\overline{x}^2}{n-1}=\frac{22536}{71}-\frac{72(17.6)^2}{71}=3.286$$

بالتالي لدينا من أجل المجتمع:

$$\hat{\mu}=\frac{n_1\overline{X_1}+n_2\overline{X_2}}{n_1+n_2}=\frac{80(17.604)+72(17.6)}{80+72}=17.602$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{79(0.0161)+71(3.286)}{80+72-2}=1.564$$

من أجل درجة الثقة 90%:

$$17.602-1.645\frac{1.564}{\sqrt{152}}<\mu<17.602+1.645\frac{1.564}{\sqrt{152}}$$

$$17.435<\mu<17.769$$

تمارين

1. ليكن لدينا المتحولات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ والتي لكل منها توزيع بواسون بوسيط $\lambda = 2$، فإذ كان $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$، أوجد $P(190 < X < 210)$.

2. إذا كان متوسط الدخل الأسبوعي لمجموعة كبيرة من العمال المهرة هو 1200 ليرة سورية بانحراف معياري قدره 100 ليرة سورية. فما هو احتمال أن يكون متوسط دخل عينة حجمها $n = 64$ أكثر من 1150 ليرة سورية في الأسبوع.

4. وجد أن نسبة تركيز التوتياء المستخلصة من عينة من القياسات والمأخوذة من 36 موقع مختلف من نهر هي 2.6 g بالميلي ليتر. أوجد مجال تقدير متوسط تركيز التوتياء في النهر بدرجة ثقة 95% ومن ثم 99%، وذلك بفرض أن الانحراف المعياري للمجتمع هو 0.3 g بالميلي ليتر.

5. عينة عشوائية من 100 رجل في أحد المناطق السكانية، وجد أن مجال الثقة 95% لأطوال الرجال هو [177.22, 179.18] سم. أوجد القيمة $\bar{x}$، متوسط العينة، والانحراف المعياري σ للتوزيع الطبيعي الذي أخذت منه العينة. أوجد بدرجة ثقة 98% متوسط أطوال الرجال.

6. عينة من القراءات تم أخذها من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتشتته σ^2 مجهولان أعطت الجدول التالي:

x	82	83	84	85	86	87
f	6	9	19	27	22	17

أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت هذا المجتمع.

عينة ثانية من نفس المجتمع أعطت ما يلي:

$$n_2 = 64, \quad \sum x = 5452.8, \quad \sum (x - \bar{x})^2 = 973.44$$

أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت هذا المجتمع.

جمع العينتين معاً وأوجد مجال تقدير المتوسط للمجتمع μ بدرجة ثقة 97%.

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: 45 دقيقة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(84) درجة**

ملاحظة: بعض الأسئلة تحتاج إلى جداول التوزيع الطبيعي موجودة في نهاية صفحات الاختبار

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متحولات عشوائية مستقلة بحيث أن: $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$، بالتالي فإن المتوسط $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ يتبع:

a) $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma / n)$

b) $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma / \sqrt{n})$

c) $\overline{X} \sim N(\mu / n, \sigma / \sqrt{n})$

d) $\overline{X} \sim N(\mu / n, \sigma / n)$

2. عينة عشوائية حجمها 15 من توزيع $X \sim N(60, 4)$، تم حساب متوسط العينة. احتمال أن يكون هذا المتوسط أقل من 58 هو:

a) 0.0264

b) 0.9736

c) 0.5

d) لا شيء ما سبق

3. عينة حجمها n أخذت من مجتمع يخضع لتوزيع طبيعي $X \sim N(74,6)$ وتم حساب متوسط كل عينة عشوائية. إذا كان $P(\overline{X} < 76) = 0.854$، فإن حجم العينة n هو:

a) 5

b) 10

c) 15

d) لا شيء ما سبق

4. مجتمع ما متوسطه μ وتشتته σ^2. عينة عشوائية من هذا المجتمع متوسطها $\overline{X}$ وتشتتها S^2. أي من العبارات التالية صحيح

a) μ أفضل تقدير لـ $\overline{X}$ و σ^2 أفضل تقدير لـ S^2

b) μ أفضل تقدير لـ $\overline{X}$ و S^2 أفضل تقدير لـ σ^2

c) $\overline{X}$ أفضل تقدير لـ μ و σ^2 أفضل تقدير لـ S^2

d) $\overline{X}$ أفضل تقدير لـ μ و S^2 أفضل تقدير لـ σ^2

5. لدينا العينة 10 ,6 ,2 ,8 ,4 المأخوذة عشوائياً من مجتمع ما. أفضل تقدير لمتوسط وتشتت المجتمع هو:

a) متوسط 6 وتشتت 8

b) متوسط 7.5 وتشتت 10

c) متوسط 6 وتشتت 10

d) متوسط 7.5 وتشتت 8

6. لدينا العينتان 10 ,6 ,2 ,8 ,4 و 7 ,3 ,5 المأخوذتان عشوائياً من مجتمع ما. أفضل تقدير لمتوسط وتشتت المجتمع هو:

a) متوسط 5.625 وتشتت 7

b) متوسط 5.625 وتشتت 8

c) متوسط 5.5 وتشتت 7

d) متوسط 5.5 وتشتت 8

7. مجال تقدير متوسط مجتمع μ تشتته σ^2 باستخدام متوسط عينة حجمها n وبدرجة ثقة 95% هو:

a) $\bar{x} \pm \sigma / \sqrt{n}$

b) $\bar{x} \pm 2.575\, \sigma / \sqrt{n}$

c) $\bar{x} \pm 2.326\, \sigma / \sqrt{n}$

d) $\bar{x} \pm 1.96\, \sigma / \sqrt{n}$

8. عند زيادة درجة الثقة فإن مجال التقدير:

a) يزداد
b) ينقص
c) يبقى على حاله
d) يمكن أن يزداد أو ينقص تبعاً للمعطيات

9. ما هو أصغر حجم عينة من أجل مجال تقدير متوسط بثقة 95% علماً أن طول المجال لا يتجاوز 1 وأن المجتمع طبيعي تشتته 9:

a) 1245
b) 34
c) 95
d) 139

10. عينة بحجم $n = 121$، متوسطها 96 من مجتمع انحرافه المعياري $\sigma = 14$. المجال بثقة 95%:

a) [93.41, 98.40]
b) [93.61, 98.60]
c) [93.51, 98.50]
d) [93.71, 98.70]

11. عندما يزداد حجم العينة n فإن عرض مجال الثقة لوسيط المجتمع:

a) يزداد
b) ينقص
c) لا يتغير
d) يمكن أن يزداد أو ينقص

12. عندما ينقص حجم العينة n إلى الربع $(\frac{1}{4}n)$ فإن عرض مجال الثقة لوسيط المجتمع:

a) يتضاعف
b) يتقلص إلى النصف
c) لن يتغير
d) يصبح أربعة أضعاف

السؤال الثاني: **(16) درجة**

عينة من القراءات تم أخذها من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتشتته σ^2 مجهولان أعطت الجدول التالي:

x	16.5	17.5	18	18.5	19
f	6	10	14	12	8

عينة ثانية من نفس المجتمع أعطت ما يلي:

$$n_2 = 42, \quad \sum x = 735, \quad \sum x^2 = 12924$$

أوجد أفضل تقدير لمتوسط وتشتت هذا المجتمع، ومن ثم جمع العينتين معاً وأوجد مجال تقدير μ بدرجة ثقة .95%

الحل:

العينة الأولى:

$$\overline{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{900}{50} = 18$$

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{f_i x_i^2}{n-1} - \frac{n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{16227}{49} - \frac{50(18)^2}{49} = 0.551$$

العينة الثانية:

$$\overline{x}_2 = \frac{\sum x}{n_2} = \frac{735}{42} = 17.5$$

$$s_2^2 = \frac{\sum x^2}{n-1} - \frac{n\overline{x}^2}{n-1} = \frac{12924}{41} - \frac{42(17.5)^2}{41} = 1.5$$

بالتالي لدينا من أجل المجتمع:

$$\hat{\mu} = \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2} = \frac{50(18) + 42(17.5)}{50 + 42} = 17.772$$

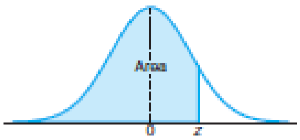
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{49(0.551) + 41(1.5)}{50 + 42 - 2} = 0.984$$

من أجل درجة الثقة 95%:

$$17.772 - 1.645\frac{0.984}{\sqrt{92}} < \mu < 17.772 + 1.645\frac{0.984}{\sqrt{92}}$$

$$17.603 < \mu < 17.941$$

توجيه في حال الخطأ: راجع الفقرة 2



Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

(continued) Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

توجيه في حال الخطأ	الإجابة الصحيحة	السؤال الأول
الفقرة 1	b	1
الفقرة 1	a	2
الفقرة 1	c	3
الفقرة 2	d	4
الفقرة 2	c	5
الفقرة 2	b	6
الفقرة 2	d	7
الفقرة 2	a	8
الفقرة 2	d	9
الفقرة 2	c	10
الفقرة 2	b	11
الفقرة 2	a	12