الفصل الخامس: التوزيعات الاحتمالية المستمرة

العنوان	رقم الصفحة
1. التوزيع المنتظم	4
1.1. التوقع الرياضي والتشتت	5
2.1. تابع التوزيع التراكمي	5
2. التوزيع الطبيعي	5
1.2. التوقع الرياضي والتشتت	6
2.2. المساحة تحت المنحني الطبيعي	7
3.2. تابع التوزيع التراكمي	12
4.2. التوزيع الطبيعي كتقريب لثنائي الحد	13
5.2. تركيب خطي من المتحولات العشوائية المستقلة	15
3. توزيع غاما والتوزيع الأسي	18
1.3. التوقع الرياضي والتشتت	20
2.3. تابع التوزيع التراكمي	20
4. توزيع مربع كاي	21
1.4. التوقع الرياضي والتشتت	22
5. التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي	22
1.5. التوقع الرياضي والتشتت	23
2.5. تابع التوزيع التراكمي	23
6. التوزيع ويبل	24
1.6. التوقع الرياضي والتشتت	25
2.6. تابع التوزيع التراكمي	25
3.6. معدل الفشل	26
7. توزيع رايس	26
1.7. التوقع الرياضي والتشتت	27
8. التمارين	30

الكلمات المفتاحية:

التوزيع المنتظم، التوزيع الطبيعي، التوزيع الطبيعي القياسي، تابع الخطأ، توزيع غاما، التوزيع الأسي، توزيع مربع كاي، التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي، توزيع ويبل، توزيع رايلي، معدل الفشل، توزيع رايس.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض المبادئ والتعاريف الأساسية المتعلقة بالتوزيعات المستمرة والتي من ضمنها (التوزيع المنتظم، التوزيع الطبيعي، توزيع غاما، التوزيع الأسي، توزيع مربع كاي، التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي، توزيع ويبل، توزيع رايلي، وتوزيع رايس) بالإضافة إلى مجالات استخدام كل منها. كما يهدف إلى معرفة كيفية استخراج المتوسط والتشتت لكل من التوزيعات آنفة الذكر.

الأهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- التوزيع المنتظم
- التوزيع الطبيعي
- توزيع غاما والتوزيع الأسي
- توزيع مربع كاي
- التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي
- التوزيع ويبل
- توزيع رايس

المخطط:

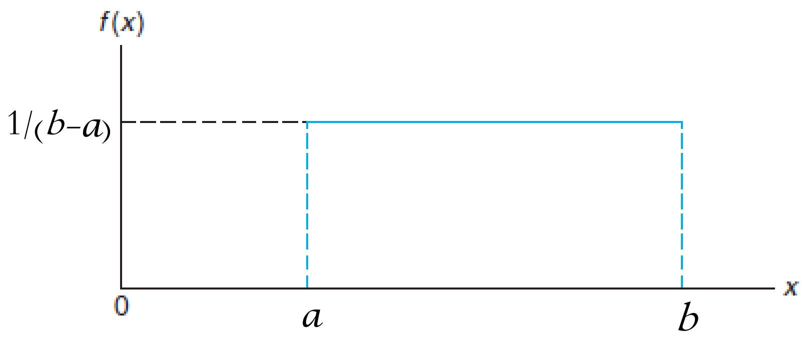
1. التوزيع المنتظم.
2. التوزيع الطبيعي.
3. توزيع غاما والتوزيع الأسي.
4. توزيع مربع كاي.
5. التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي.
6. التوزيع ويبل.
7. توزيع رايس.

1. التوزيع المنتظم uniform distribution:

يعتبر التوزيع المنتظم من أبسط التوزيعات المستمرة في الاحصاء، حيث الاحتمال فيه منتظم (متساوٍ) على مجال مغلق، لنسميه $[a,b]$،

تعريف 1: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع منتظم على المجال $[a,b]$، إذا كان له تابع الاحتمال (سنرمز لتابع الاحتمال $f(x)$ بدلاً من $f_X(x)$ لسهولة الكتابة):

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$



يأخذ تابع الكثافة الاحتمالي شكل مستطيل قاعدته $b-a$ وارتفاع ثابت يساوي $1/(b-a)$. بالتالي فإنه من الواضح رؤية أن مساحة هذا المستطيل تساوي الواحد.

مثال 1: بفرض أن طول فترة حجز صالة مؤتمرات مقدراً بالساعات يخضع لتوزيع منتظم على المجال $[0,4]$

a) أوجد تابع الكثافة الاحتمالي.

b) ما هو احتمال أن يدوم مؤتمر ما مؤتمر ما 3 ساعات على الأقل؟

الحل:

a) تابع الكثافة الاحتمالي هو التالي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0\le x\le 4\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

b) $P(X\ge 3)$

$$P(X\ge 3)=\int_3^4 \frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$$

1.1. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 1: إذا كان X متحول عشوائي يتبع توزيع منتظم على المجال $[a, b]$، فإن:

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{و} \quad \sigma^2 = Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

1.2. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function

تابع التوزيع التراكمي لمتحول عشوائي يتبع توزيع منتظم على المجال $[a, b]$، هو التابع التالي:

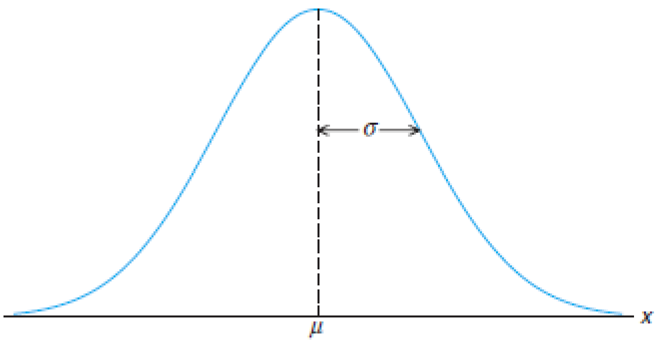
$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a}(x-a) & x \in [a, b] \\ 0 & x \ge b \end{cases}$$

2. التوزيع الطبيعي normal distribution:

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المستمرة وذلك لأن كثير من الظواهر الطبيعية تخضع لهذا التوزيع. كما أن كثير من الظواهر الطبيعية التي لا تخضع لهذا التوزيع يمكن أن يقرب توزيعها بالتوزيع الطبيعي.

تعريف 2: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتشتت σ^2 ونكتب باختصار $X \sim N(x;\mu,\sigma)$ إذا كان له تابع الاحتمال (تابع الكثافة الاحتمالية) التالي:

$$f(x;\mu,\sigma)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\right. \quad , \quad -\infty<x<\infty$$



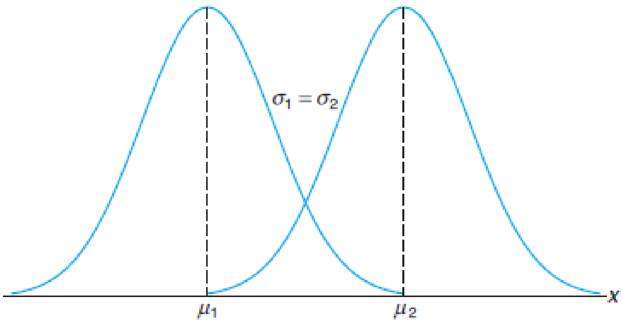
ملاحظات 1:

- منحني تابع الكثافة الاحتمالي للتوزيع الطبيعي $N(x;\mu,\sigma)$ متناظر حول المتوسط μ.
- المساحة الكلية تحت منحنى تابع الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $f(x;\mu,\sigma)$ تساوي الواحد.

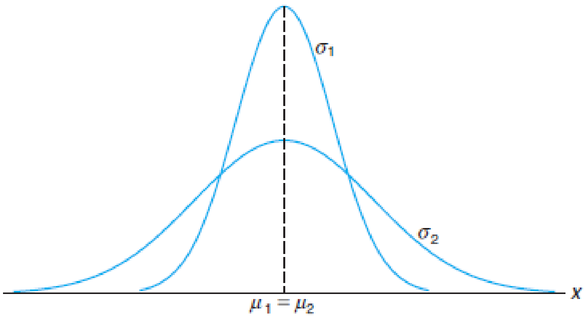
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx=1$$

- في التوزيع الطبيعي لدينا المتوسط = الوسيط = المنوال = μ.
- يعتمد تابع الكثافة الاحتمالي للتوزيع الطبيعي $N(x;\mu,\sigma)$ على وسيطين هما المتوسط μ (تحدد موضع التوزيع) والتشتت σ^2 (تحدد شكل التوزيع)، لذلك نكتب $N(x;\mu,\sigma)$.

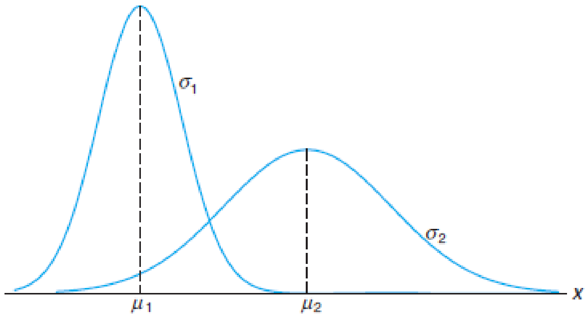
تبين الأشكال التالية تأثير الوسطاء μ و σ على شكل تابع الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي بفرض أنه لدينا توزيعين طبيعيين $N(x;\mu_1,\sigma_1)$ و $N(x;\mu_2,\sigma_2)$.



$\mu_1 < \mu_2$ and $\sigma_1 = \sigma_2$



$\mu_1 = \mu_2$ and $\sigma_1 < \sigma_2$



$\mu_1 < \mu_2$ and $\sigma_1 < \sigma_2$

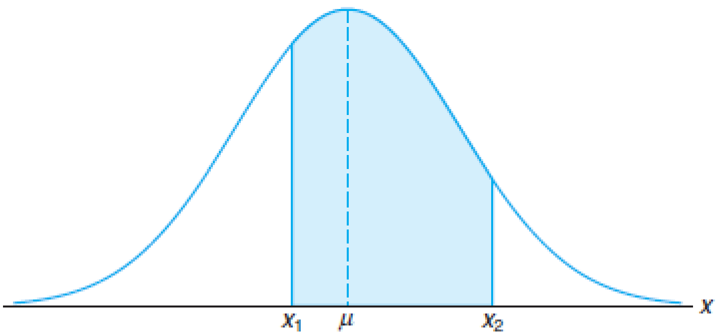
1.2. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 2: ليكن X متحول عشوائي يتبع توزيع طبيعي بوسيطين μ و σ أي $X \sim N(x; \mu, \sigma)$ ، فإن المتوسط هو μ والتشتت هو σ^2، بالتالي الانحراف المعياري هو σ. نسمي أحياناً هذا التوزيع بالغوصي.

2.2.المساحة تحت المنحني الطبيعي areas under the normal curve:

يتم بناء أي تابع كثافة احتمالي مستمر بحيث أن المساحة تحت منحني هذا التابع المحددة بين المستقيمين $x = x_1$ و $x = x_2$ تساوي إلى احتمال أن تكون قيمة المتحول العشوائي X محصورة بين القيمتين x_1 و x_2.

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,dx$$



وهو تكامل يصعب حسابه بالطرق العادية ويلزم حسابه في كل مرة نريد حساب احتمال معين (لانهاية من توابع الكثافة الاحتمالية) ولذلك وتجنباً لتكرار المجهود يتم عمل تحويل المنحنى المتناظر حول $X = \mu$ إلى منحنى متناظر حول $Z = 0$.

تتم عملية التحويل هذه باستخدام العلاقة التالية:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

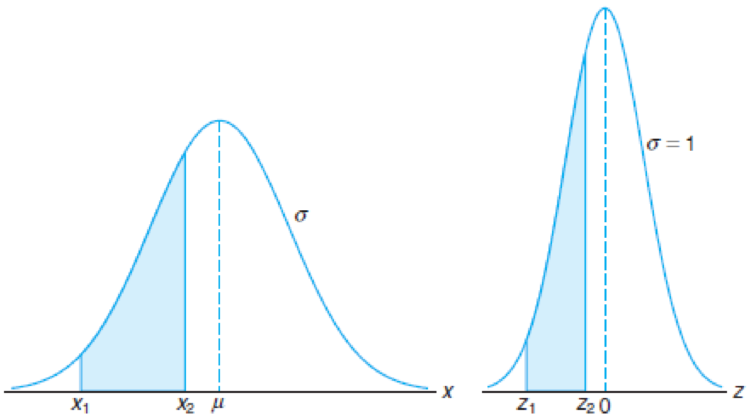
بالتالي إذا كانت قيمة المتحول العشوائي X محصورة بين القيمتين x_1 و x_2، فإن قيمة المتحول العشوائي الناتج Z ستكون محصورة بين القيمتين الموافقتين $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ و $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$، بالتالي يمكننا كتابة ما يلي:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} N(z;0,1)\,dz = P(z_1 < Z < z_2)$$

حيث Z متحول عشوائي مستمر يتبع توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 0$ وتشتت $\sigma^2 = 1$ ونكتب باختصار $Z \sim N(z;0,1)$.

مبرهنة 3: نسمي التوزيع الطبيعي العشوائي الذي متوسطه $\mu = 0$ وتشتته $\sigma^2 = 1$ بالتوزيع الطبيعي القياسي standard normal distribution.



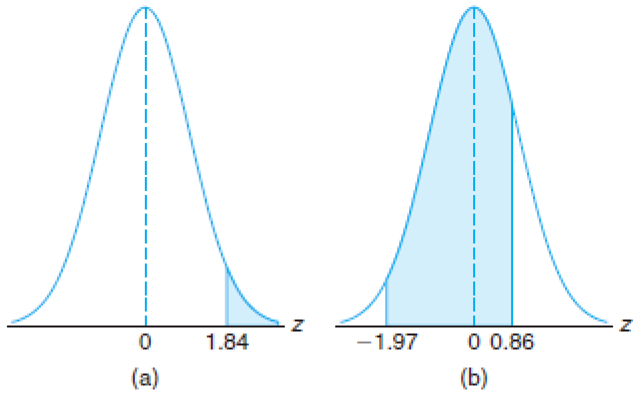
يبين الشكل السابق تابعي التوزيع الأصلي والقياسي حيث مساحة التابع الأصلي المحصورة بين القيمتين x_1 و x_2، تساوي مساحة التابع القياسي المحصورة بين القيمتين z_1 و z_2.

هناك جدول خاص يسمى جدول التوزيع الطبيعي القياسي لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي المعياري $Z \sim N(z;0,1)$ من النوع $P(Z < z)$، من أجل $z \in R$. وهذا الجدول مبين في نهاية الفصل.

مثال 2: ليكن لدينا التوزيع الاحتمالي الطبيعي القياسي، أوجد المساحة:

a) إلى اليمين من $z=1.84$

b) بين القيمتين $z=-1.97$ و $z=0.86$



الحل:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9756	0.9761	0.9761	0.9767

a) يعطينا الجدول المساحة التي هي عن يسار عدد ما ($P(Z<z)$)، بالتالي فالمساحة المطلوبة هي:

$$P(Z>1.84)=1-P(Z<1.84)=1-0.9671=0.0329$$

نحصل على القيمة $P(Z<1.84)=0.9671$ من جدول التوزيع الطبيعي القياسي بقراءة تقاطع السطر الذي يوافق القيمة 1.8 ($Z=1.8$) مع العمود 04.، وبالتالي نكون قد حصلنا على المساحة التي هي عن يسار القيمة $Z=1.84$.

b) يعطينا لجدول المساحة التي هي عن يسار عدد ما ($P(Z<z)$)، بالتالي فالمساحة المطلوبة هي:

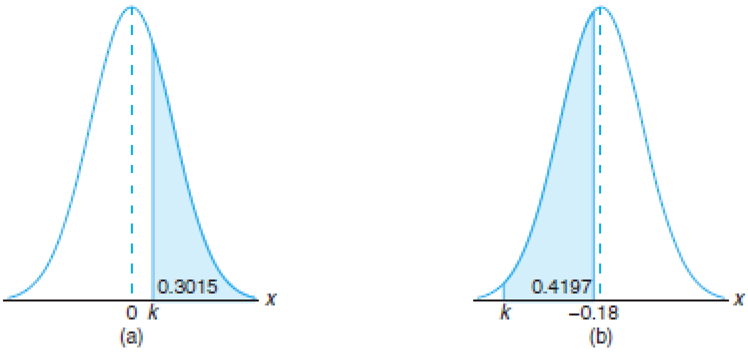
$$P(-1.97<Z<0.86)=P(Z<0.86)-P(Z<-1.97)$$

$$=0.8051-0.0244=0.7807$$

مثال 3: ليكن لدينا التوزيع الاحتمالي الطبيعي القياسي، أوجد قيمة k:

a) $P(Z>k)=0.3015$

b) $P(k<Z<-0.18)=0.4197$



الحل:

a) قيمة k التي تعطينا المساحة 0.3015 عن يمينها هي نفس القيمة k التي تعطينا المساحة 0.6985 (=1 − 0.3015) عن يمينها. من الجدول نحصل على $k=0.52$.

b) من الجدول نحصل على $P(Z<-0.18)=0.4286$، ولدينا:

$$P(k<Z<-0.18)=P(Z<-0.18)-P(Z<k)=0.4197$$

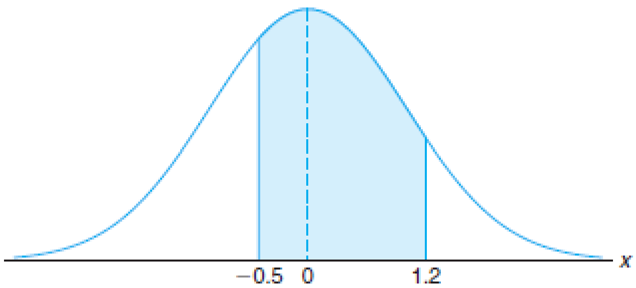
بالتالي فإن: $(Z<k)=0.4286-0.4197=0.0089$، ومن الجدول نحصل على $k=-2.37$

مثال 4: ليكن لدينا المتحول العشوائي X الذي يتبع التوزيع الاحتمالي الطبيعي بمتوسط $\mu=50$ وانحراف معياري $\sigma=10$، أوجد احتمال أن يكون المتحول X بين القيمتين 45 و 62.

الحل:

علينا أولاً التحويل إلى التوزيع الطبيعي القياسي:

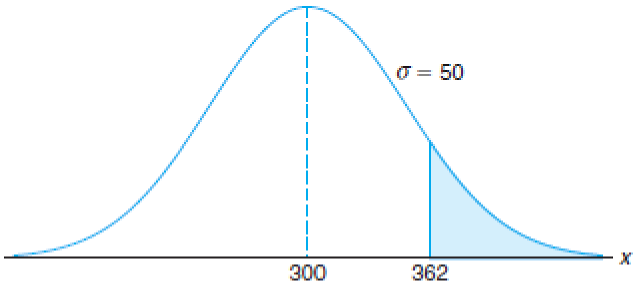
$$z_1=\frac{x_1-\mu}{\sigma}=\frac{45-50}{10}=-0.5 \quad \text{و} \quad z_2=\frac{x_2-\mu}{\sigma}=\frac{62-50}{10}=1.2$$



بالتالي:

$$P(45<X<62)=P(-0.5<Z<1.2)$$
$$=P(Z<1.2)-P(Z<-0.5)=0.8849-0.3085=0.5764$$

مثال 5: ليكن لدينا المتحول العشوائي X الذي يتبع التوزيع الاحتمالي الطبيعي بمتوسط $\mu=300$ وانحراف معياري $\sigma=50$، أوجد احتمال أن يكون المتحول X أكبر من 362.



الحل:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{362-300}{50}=1.24$$

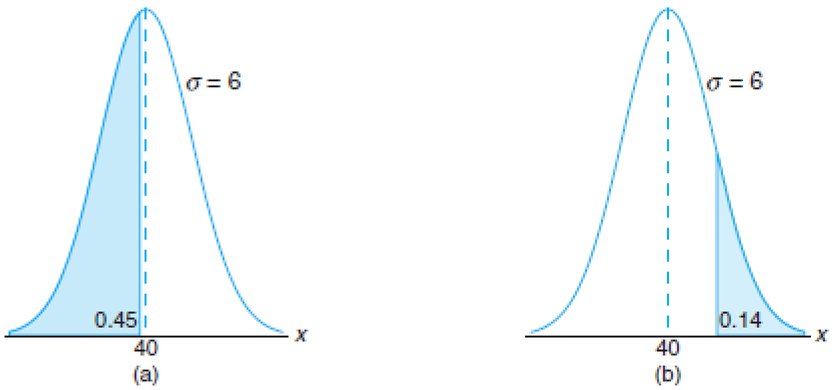
$$P(X>362)=P(Z>1.24)=1-P(Z<1.24)=1-0.8925=0.1075$$

ملاحظة 1: يتم الرجوع من المتحول العشوائي القياسي $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ إلى المتحول العشوائي الأصلي باستخدام العلاقة التالية: $x=\sigma z+\mu$.

مثال 6: ليكن لدينا المتحول العشوائي X الذي يتبع التوزيع الاحتمالي الطبيعي بمتوسط $\mu=40$ وانحراف معياري $\sigma=6$، أوجد قيمة x التي لها:

a) 45% من المساحة عن يسارها

b) 14% من المساحة عن يمينها



الحل:

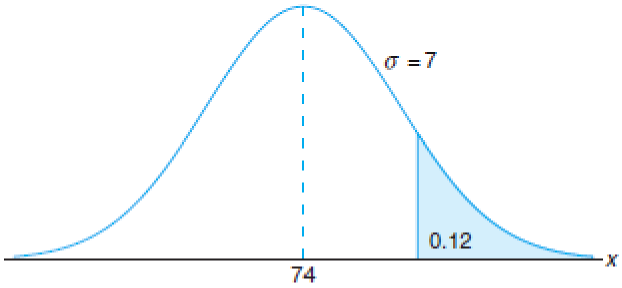
a) نبحث أولاً عن قيمة z التي تعطي مساحة عن يسارها مقدارها 0.45، من الجداول نحصل على $P(Z<-0.13)=0.45$. بالتالي $z=-0.13$، ومن ثم بالرجوع إلى القية الأصلية ل x نحصل على:

$$x=\sigma z+\mu=6(-0.13)+40=39.22$$

b) نبحث أولاً عن قيمة z التي تعطي مساحة عن يمينها 0.14، أي عن يسارها 0.86 = 0.14 − 1.
من الجداول نحصل على $P(Z<1.08)=0.86$. بالتالي $z=1.08$ ، ومن ثم بالرجوع إلى القية الأصلية لـ x نحصل على:

$$x=\sigma z+\mu=6(1.08)+40=46.48$$

مثال 7: متوسط درجات امتحان تخضع لتوزيع طبيعي هي $\mu=74$ وانحراف معياري هو $\sigma=7$. إذا كان 12% من الصف أُعطوا التقييم "A". ما هو أدنى درجة لـ A ؟



الحل:

$$P(Z>z)=0.12$$
$$P(Z<z)=1-0.12=0.88$$

باستخدام الجداول نحصل على $z=1.18$. بالتالي $x=\sigma z+\mu=7(1.18)+74=82.26$. أي أن أدنى درجة للتقييم A هي 82.

3.2. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تابع التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي القياسي، والذي نرمز له بالرمز $\Phi(x)$ ، هو تابع التكامل التالي:

$$\Phi(x)=P(Z\le z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

حيث لا يمكن كتابته باستخدام التوابع المعروفة (أسية، كثيرات حدود، مثلثية، ...)، وهو تابع متزايد على كافة الأعداد الحقيقية ويأخذ القيمة صفر عند $-\infty$ ويأخذ القيمة واحد عند ∞، وأخيراً يأخذ القيمة 0.5 عند الصفر ($\Phi(0)=0.5$).

في الإحصاء، يرتبط هذا التابع $\Phi(x)$ بما يسمى تابع الخطأ $erf(x)$ المعرف على أنه احتمال أن يقع متحول عشوائي، يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 0 وتشتت 1/2، ضمن المجال $[-x,x]$ أي:

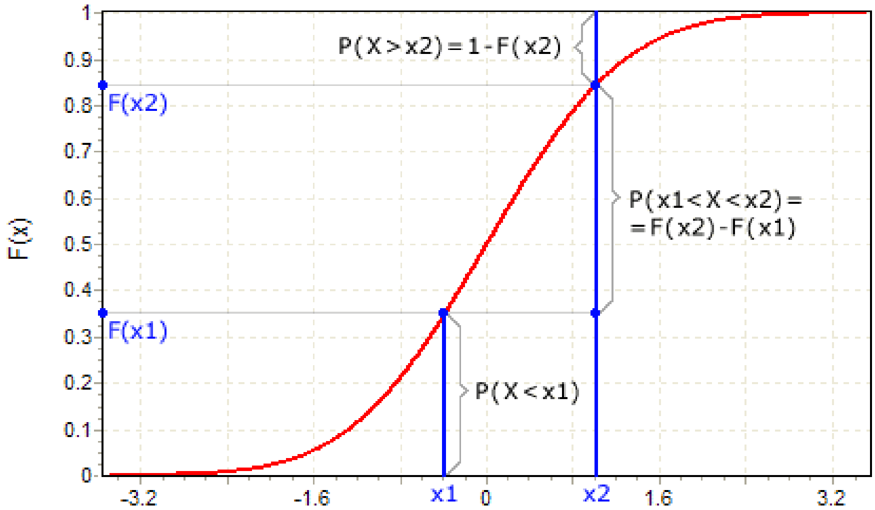
$$erf(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

والعلاقة التي تربط التابعين $\Phi(x)$ و $erf(x)$ هي التالية:

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\left[1+erf\,(\frac{x}{\sqrt{2}})\right]$$

أما تابع التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي (بمتوسط μ وانحراف معياري σ)، $F(x)$ فهو التابع التالي:

$$F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})=\frac{1}{2}\left[1+erf\,(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}})\right]$$



4.2. التوزيع الطبيعي كتقريب لثنائي الحد normal approximation to the binomial:

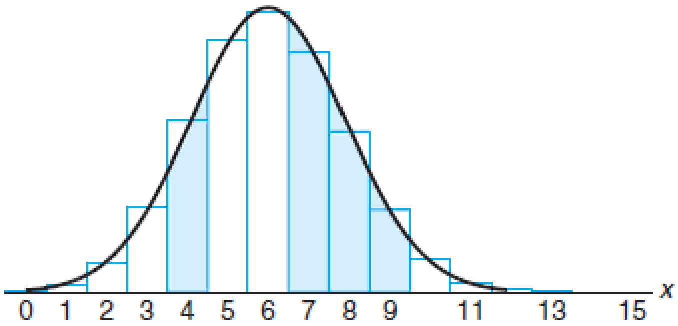
يعتبر التوزيع الطبيعي تقريباً جيداً للتوزيع ثنائي الحد عندما يكون عدد عناصر العينة n كبيراً.

مبرهنة 4: ليكن المتحول المتقطع ثنائي الحد العشوائي X بمتوسط $\mu=np$ وبتشتت $\sigma^2=npq$، عندها يكون توزيع المتحول المستمر $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ يتبع التوزع الطبيعي القياسي $N(z;0,1)$ عندما تسعى n إلى اللانهاية.

يمكن اعتبار التوزيع الطبيعي كتقريب جيد ليس فقط من أجل قيمة n كبيرة فقط و p ليست قريبة من الصفر أو الواحد، لكنها تمثل تقريباً جيداً أيضاً عندما تكون قيمة n صغيرة و p قريبة من $1/2$.

مثال 8: ليكن التوزيع ثنائي الحد $b(x;15,0.4)$، حيث:

$$\mu=np=15(0.4)=6,\ \ \sigma^2=npq=15(0.4)(0.6)=3.6,\ \ \sigma=1.897$$



لنحسب على سبيل المثال:

$$P(X=4)=b(4;15,0.4)=C(15,4)(0.4)^4(0.6)^{11}=0.1268$$

القيمة الصحيحة باستخدام ثنائي الحد هي مساحة المستطيل الذي مركز قاعدته هو 4 (المجال [3.5, 4.5]). والتي تساوي تقريباً المساحة المظللة تحت المنحني الطبيعي بين $x_1=3.5$ و $x_1=4.5$. من أجل حساب هذه المساحة نحول إلى قيم z :

$$z_2=\frac{4.5-6}{1.897}=-0.79 \text{ و } z_1=\frac{3.5-6}{1.897}=-1.32$$

$$P(-1.32<Z<-0.79)=P(Z<-0.79)-P(Z<-1.32)=0.1214$$

وهذه القيمة ليست بعيدة عن القيمة الحقيقية 0.1268 المسحوبة من ثنائي الحد.

أما إذا أردنا حساب $P(7\le X\le 9)$: القيمة الصحيحة باستخدام ثنائي الحد تساوي إلى:

$$P(7\le X\le 9)=\sum_{x=7}^{9}C(15)(0.4)^x(0.6)^{15-x}=0.3564$$

وباستخدام التقريب الطبيعي:

$$z_2=\frac{9.5-6}{1.897}=1.85 \text{ و } z_1=\frac{6.5-6}{1.897}=0.26$$

$$P(0.26<Z<1.85)=P(Z<1.85)-P(Z<0.26)=0.3652$$

مرة أخرى نحصل على قيمة قريبة من القيمة الصحيحة (0.3564).

مما سبق نستطيع القول أنه إذا كان لدينا متحول عشوائي X يخضع لتوزيع ثنائي الحد وسيطاه n و p . من أجل القيم الكبيرة لــ n، X يقرب بشكل جيد بتوزيع طبيعي بمتوسط $\mu=np$ وبتشتت $\sigma^2=npq$، ويكون:

$$P(X\le x)=\sum_{k=0}^{x}b(k;n,p)\approx P(Z\le\frac{x+0.5-np}{\sqrt{npq}})$$

ويمكن اعتبار أن هذا التقريب جيداً إذا كان كل من np و nq أكبر أو يساوي القيمة 5.

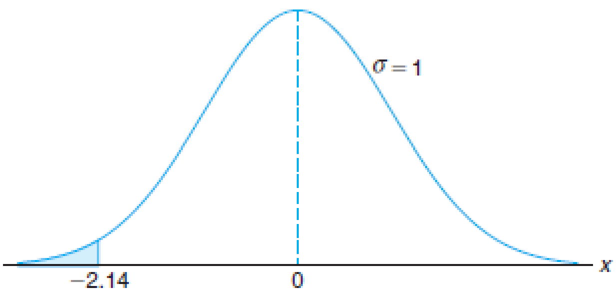
مثال 9: احتمال أن يتعافى مريض من مرض نادر في الدم هو 0.4. إذا كان 100 شخص مصابون بهذا المرض، ما هو احتمال أن يبقى أقل من 30 شخص على قيد الحياة؟

الحل:

$$\mu = np = 100(0.4) = 40$$
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100(0.4)(0.6)} = 4.889$$

للحصول على الاحتمال المطلوب علينا حساب المساحة إلى اليسار من القيمة $x = 29.5$ ، والموافقة للقيمة القياسية:

$$z = \frac{29.5 - 40}{4.899} = -2.814 \; .$$



وبالتالي فإن احتمال أن يبقى أقل من 30 شخص من أصل 100 على قيد الحياة يعطى بالمساحة المظللة في الشكل السابق:

$$P(X < 30) \approx P(Z \le -2.14) = 0.0162$$

5.2. تركيب خطي من المتحولات العشوائية المستقلة linear combinations of i.r.v.:

ليكن لدينا المتحولان العشوائيان المستقلان X, Y والعددان الحقيقيان a, b ، بالتالي:

$$E(aX \pm bY) = E(aX) \pm E(bY)$$
$$Var(aX \pm bY) = a^2 E(X) + b^2 Var(Y)$$

مبرهنة 5: ليكن لدينا المتحولان العشوائيان الطبيعيان المستقلان X, Y بحيث أن $X \sim N(x; \mu_1, \sigma_1)$ و $Y \sim N(x; \mu_2, \sigma_2)$ ، بالتالي فإن:

$$X + Y \sim N(x; \mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$
$$X - Y \sim N(x; \mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

مثال 10: يذهب ابراهيم في كل يوم من أيام الأسبوع إلى المكتبة لقراءة المجلات سيراً على الأقدام. الزمن الذي يستغرقه ذهاباً وإياباً هو متحول طبيعي متوسطه 15 دقيقة وانحرافه المعياري 2 دقيقة. والزمن الذي يقضيه في المكتبة هو متحول طبيعي متوسطه 25 دقيقة وانحرافه المعياري $\sqrt{12}$ دقيقة. أوجد احتمال في أحد الأيام:

ابراهيم غائب عن البيت أكثر من 45 دقيقة.

إبراهيم يقضي زمناً في المشي أكثر منه في المكتبة.

الحل:

ليكن W المتحول الذي يعبر عن الزمن بالدقائق الذي يقضيه ابراهيم في المشي أي $W \sim N(x; 15, 2)$

و L المتحول الذي يعبر عن الزمن بالدقائق الذي يقضيه ابراهيم في المكتبة أي $L \sim N(x; 25, \sqrt{12})$.

a) $T = W + L \sim N(x; 40, 4)$

$$P(T > 45) = P\left(\frac{T-40}{4} > \frac{45-40}{4}\right) = P(Z > 1.25) = 0.1056$$

b) $\mathrm{P(W > L) \Leftrightarrow P(W - L > 0)}$

$U = W - L \sim N(x; -10, 4)$

$$P(U > 0) = P\left(\frac{U-(-10)}{4} > \frac{0-(-10)}{4}\right) = P(Z > 2.5) = 0.0062$$

وبشكل عام، كما وجدنا في الفصل الثالث، ليكن لدينا المتحولات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والأعداد الحقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_n$، بالتالي:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) = E(a_1X_1) + E(a_2X_2) \ldots + E(a_nX_n)$$

$$Var(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) = Var(a_1X_1) + Var(a_2X_2) \ldots + Var(a_nX_n)$$

مبرهنة 6: ليكن لدينا المتحولات العشوائية الطبيعية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ بحيث أن:

$X_1 \sim N(x; \mu_1, \sigma_1)$ و $X_2 \sim N(x; \mu_2, \sigma_2)$ و ... و $X_n \sim N(x; \mu_n, \sigma_n)$، بالتالي فإن:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2})$$

نتيجة 1: ليكن لدينا المتحولات العشوائية الطبيعية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والتي تخضع جميعها لنفس التوزيع الطبيعي، أي أن: $X_i \sim N(x; \mu, \sigma)$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$، بالتالي فإن:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; n\mu, \sqrt{n}\sigma)$$

مثال 11: تخضع كتل مادة معينة إلى توزيع طبيعي متوسطه 20 غرام وانحرافه المعياري 2 غرام. تم اختيار عينة من 12 كتلة بشكل عشوائي، ما هو احتمال أن يكون الوزن الكلي أقل من 230 غرام؟

الحل:

ليكن $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12}$ الوزن الكلي للعينة، بالتالي:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12} \sim \mathrm{N}(\mathrm{x}; 240, 4\sqrt{3})$$

$$P(X<230)=P\left(\frac{X-240}{4\sqrt{3}}>\frac{230-240}{4\sqrt{3}}\right)=P(Z<-1.443)=0.0745$$

أخيراً ليكن لدينا المتحول العشوائي X والعدد الحقيقي n، فإن:

$$E(nX)=nE(X)$$
$$Var(nX)=n^2Var(X)$$

مبرهنة 7: ليكن لدينا المتحول العشوائي الطبيعي X بحيث أن $X\sim N(x;\mu,\sigma)$ والعدد الحقيقي n، فإن:

$$nX\sim N(x;n\mu,n\sigma)$$

ملاحظة 2: يجب التمييز بين مجموع متحولات وبين مضاعف متحول طبيعي كلها تخضع لنفس التوزيع الطبيعي $N(x;\mu,\sigma)$:

$$X_1+X_2+\ldots+X_n\sim N(x;n\mu,\sqrt{n}\sigma)$$
$$nX\sim N(x;n\mu,n\sigma)$$

ويبين المثال التالي الفرق بينهما.

مثال 12: مصنع مشروبات غازية يبيع زجاجات شراب بحجمين. كمية السائل الغازي بال ml في كل منها يخضع إلى توزيع طبيعي كما في الجدول التالي:

	Mean (ml)	Variance (ml^2)
Small	252	4
Large	1012	25

a) تم اختيار زجاجة صغيرة وأخرى كبيرة عشوائياً. أوجد احتمال أن تكون سعة الكبيرة أقل من سعة أربع زجاجات صغيرات.

b) تم اختيار زجاجة كبيرة وأربع زجاجات صغيرات عشوائياً. أوجد احتمال أن تكون سعة الكبيرة أقل من السعة الكلية للزجاجات الأربع الصغار.

الحل:

ليكن S المتحول العشوائي الذي يشير إلى سعة الزجاجة الصغيرة بالـــ ml، بالتالي: $S\sim N(x;252,2)$.

و L المتحول العشوائي الذي يشير إلى سعة الزجاجة الكبيرة بالـــ ml، بالتالي: $L\sim N(x;1012,5)$.

a) $P(L<4S)=P(L-4S<0)$

$$E(L-4S)=E(L)-E(4S)=E(L)-4E(S)=1012-4(252)=4$$

$$Var(L - 4S) = Var(L) + Var(4S) = Var(L) + 4^2 Var(S)$$
$$= 25 + 16(4) = 89$$
$$L - 4S \sim N(x; 4, \sqrt{89})$$
$$P(L - 4S < 0) = P\left(Z < \frac{0-4}{\sqrt{89}}\right) = P(Z < -0.424) = 0.3358$$

b) $P(L < S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = P(L - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) < 0)$

$$E(L - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)) = E(L) - E(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$
$$= 1012 - 4(252) = 4$$
$$Var(L - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)) = Var(L) + Var(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$
$$= 25 + 4(4) = 41$$
$$L - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \sim N(x; 4, \sqrt{41})$$
$$P(L - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)) = P\left(Z < \frac{0-4}{\sqrt{41}}\right)$$
$$= P(Z < -0.625) = 0.266$$

3. توزيع غاما والتوزيع الأسي gamma and exponential distribution:

يمثل التوزيع الأسي حالة خاصة من توزيع غاما، وكلاهما يلعبان دوراً هاماً في كل من نظرية الانتظار queuing theory ومسائل الوثوقية reliability. يستخدم التوزيع الأسي عادة في مسائل متعلقة بقياس الزمن، مثال على ذلك مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة، مدة حياة الذرات المشعة radioactive قبل أن تتفكك، ... كما أن للتوزيع الأسي علاقة بتوزيع بواسون، فإذا كان وقوع أحداث ما يتبع هذا التوزيع (بواسون)، فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسي، كمثال على ذلك، إذا كان وصول الزبائن إلى مركز خدمة ما يتبع توزيع بواسون فإن المدة الزمنية بين وصول زبون والزبون التالي تتبع التوزيع الأسي.

تعريف 3: نعرف تابع غاما كما يلي:

$$\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \quad \alpha>0$$

من بعض خصائص التابع غاما التالية:

a) $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ من أجل $\alpha>1$.

b) $\Gamma(n)=(n-1)!$ من أجل الأعداد الصحيحة الموجبة.

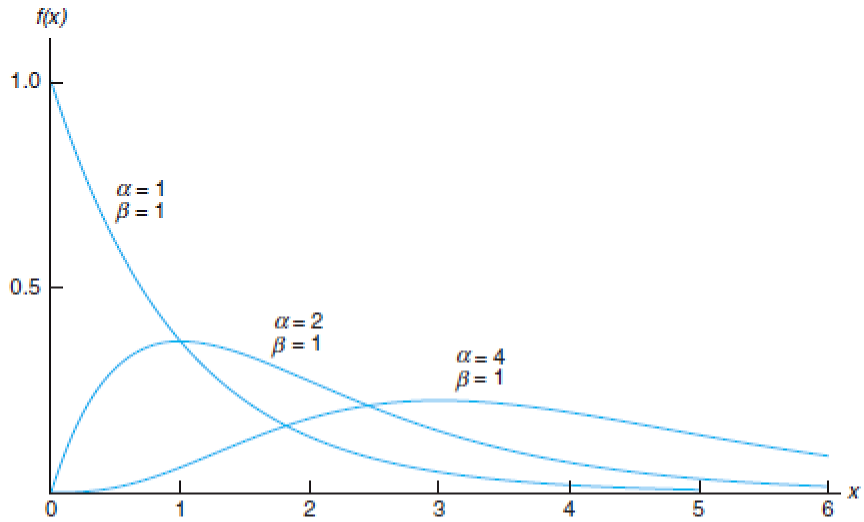
c) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

تعريف 4: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع غاما بوسيطين $\alpha>0$ و $\beta>0$، إذا كان له تابع الاحتمال التالي:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x};\alpha,\beta)=\begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} & x>0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

يمثل الوسيط β عامل مقياس scale factor.

يمثل الوسيط α شكل المنحني ومن أجل $\alpha>1$ للمنحني قيمة عظمى عند النقطة $(\alpha-1)/\beta$.



تعريف 5: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع أسي بوسيط $\beta>0$، إذا كان له تابع الاحتمال التالي (يوافق توزيع غاما من أجل $\alpha=1$):

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\frac{1}{\beta}e^{-x/\beta} & x\geq 0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

1.3. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 8: متوسط وتشتت توزيع غاما هما:

$$\mu=\alpha\beta \text{ and } \sigma^2=\alpha\beta^2$$

نتيجة 2: متوسط وتشتت التوزيع الأسي هما:

$$\mu=\beta \text{ and } \sigma^2=\beta^2$$

2.3. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تابع التوزيع التراكمي للتوزيع الأسي هو التابع التالي:

$$F(x)=P(X\leq x)=1-e^{-x/\beta}$$

مثال 13: لدينا نظام يحوي على عنصر نوع معين حيث زمن الفشل لهذا العنصر، مقدراً بالسنين، هو T. المتحول العشوائي T يخضع للتوزيع الأسي مع زمن وسطي للفشل $\beta=5$. تم تركيب 5 من هذه العناصر في منظومات مختلفة، ما هو احتمال أن يكون على الأقل عنصرين منها لا تزال تعمل في نهاية السنة الثامنة؟

الحل:

احتمال أن يكون عنصر ما يزال يعمل بعد 8 سنوات هو:

$$P(T > 8) = \frac{1}{5}\int_{8}^{\infty} e^{-t/5}dt = e^{-8/5} \approx 0.2$$

بفرض X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد العناصر التي تعمل بعد 8 سنوات. باستخدام توزيع ثنائي الحد نحصل على:

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{5} b(x; 5, 0.2) = 0.2627$$

مثال 14: اعتماداً على الاختبارات الشاملة، تم تحديد أن الزمن Y، مقدراً بالسنين، قبل أن يتطلب إصلاح كبير على آلة غسيل محددة، معطى بتابع التوزيع التالي:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4} & y \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

يتم اعتبار صفقة الغسالة عظيمة إذا لم يتطلب إصلاح كبير على آلة غسيل قبل 6 سنوات. ما هو احتمال أن تكون الصفقة عظيمة؟ وما هو احتمال أن يتطلب إجراء إصلاح في السنة الأولى؟

الحل:

يخضع المتحول Y إلى توزيع أسي بمتوسط $\mu = 4$. تابع التوزيع التراكمي هو:

$$F(y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-y/4}$$

بالتالي:

$$P(Y > 6) = 1 - F(6) = e^{-3/2} = 0.223$$

أي أن احتمال إجراء إصلاح كبير على الغسالة بعد السنة السادسة هو 0.223. بالتأكيد يمكننا استنتاج أن احتمال إجراء إصلاح كبير على الغسالة قبل السنة السادسة هو 0.777. بالتالي يمكن القول إن الغسالة ليست حقيقة صفقة عظيمة.

أما احتمال إجراء إصلاح كبير على الغسالة في السنة الأولى فهو:

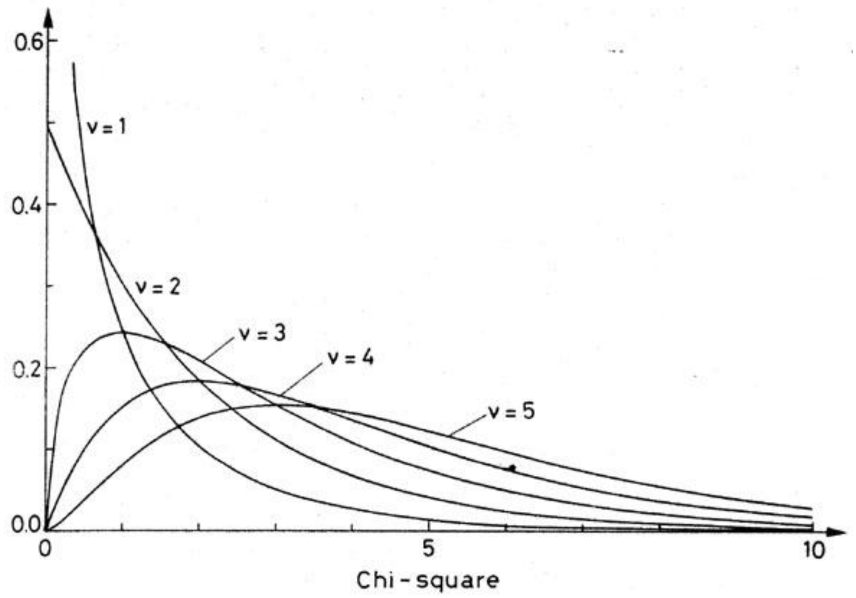
$$P(Y < 1) = F(1) = 1 - e^{-1/4} = 0.221$$

4. توزيع مربع كاي Chi−squared distribution:

توزيع مربع كاي هو من أكثر التوزيعات استخداما في مجال اختبار الفرضيات وتقديرها، ويمكن الحصول عليه من توزيع غاما بأخذ $\alpha = \nu / 2$ و $\beta = 2$.

تعريف 6: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع مربع كاي بوسيط $\nu > 0$ درجة حرية، إذا كان له تابع الاحتمال التالي:

$$f(x;\nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



1.4. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 9: متوسط وتشتت توزيع مربع كاي هما:

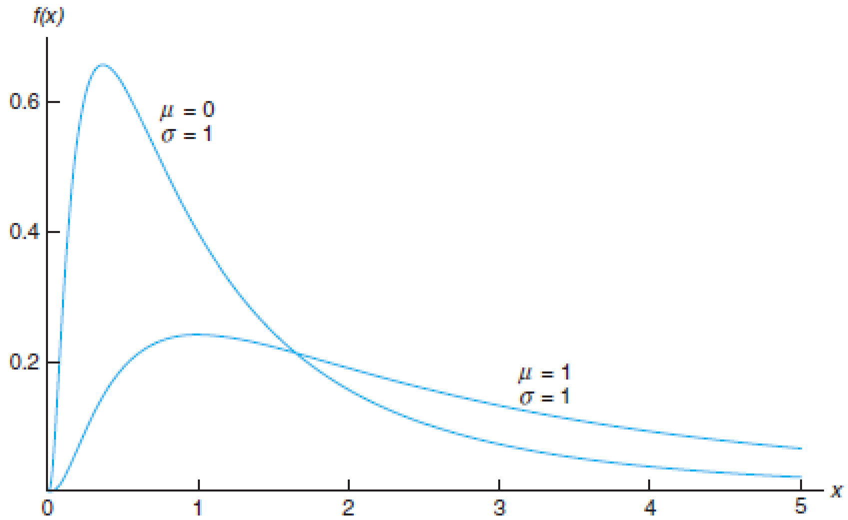
$$\mu = \nu \ \ and \ \sigma^2 = 2\nu$$

5. التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي lognormal distribution:

للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي أهمية كبيرة في دراسة تابع البقاء وخاصة للمرضى المصابين بمرض السرطان والذين يخضعون لجرعات من العلاج الكيميائي، إضافة إلى ذلك له أهمية في موضوع الرقابة على جودة الإنتاج. كما أنه يستخدم أيضاً في الاتصالات الخليوية حيث أن ظاهرة الخفوت fading نتيجة العوائق، حيث أن القيم الوسطية لمقدار خفوت الحجب تتبع التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي.

تعريف 7: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع طبيعي لوغاريتمي إذا كان المتحول العشوائي $Y=\ln(X)$ يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ. بالتالي تابع الاحتمال هو التالي:

$$f(x;\mu,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\ln(x)-\mu]^2} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$



1.5. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 10: متوسط وتشتت التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي هما:

$$\mu=e^{\mu+\sigma^2/2}\ \ and\ \ \sigma^2=e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$$

2.5. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تابع التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي هو التابع التالي:

$$F(x)=P(X\le x)=\frac{1}{2}\left[1+erf\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)$$

مثال 15: زمن حياة عنصر تحكم الكتروني، مقدرا بآلاف الأميال، يخضع تقريبياً لتوزيع طبيعي لوغاريتمي حيث $\mu = 5.149$ و $\sigma = 0.737$. أوجد الـــ 5% ($P(X < k) = 0.05$) من زمن الحياة لعناصر التحكم هذه.

الحل:

من الجداول نحصل على $P(Z < -1.645) = 0.05$، ليكن X زمن الحياة لعناصر التحكم، وبما أن $\ln(X)$ يخضع لتوزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 5.149$ وانحراف معياري $\sigma = 0.737$، بالتالي:

$$\ln(x) = 5.149 + 0.737(-1.645) = 3.937$$

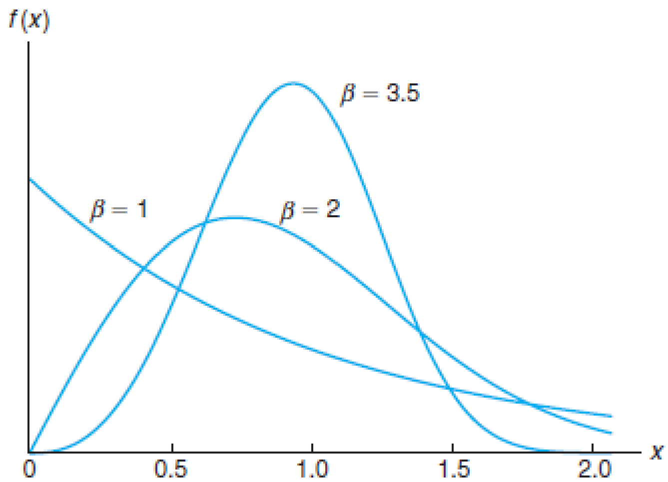
ومنه $x = 51.265$. وهذا يعني أنه فقط 5% من عناصر التحكم الالكترونية لهم زمن حياة أقل من 51.265 ميل.

6. التوزيع ويبل Weibull distribution:

إن اختيار التوزيع الأسي لفترة الحياة لحين الفشل يعتبر اختياراً كافياً، ولكن هناك بعض الحالات التي يكون فيها معدل الفشل متزايداً أو متناقصاً، عندها نستخدم توزيع ويبل. يستخدم توزيع ويبل في الكثير من الحالات، مثال على ذلك تحليل الوثوقية وحالات الإخفاق، التنبؤ بالأحوال الجوية، وفي وصف توزيع سرعة الرياح، في هندسة نظم الاتصالات: أنظمة الرادار (في تصميم نموذج لتشتت مستوى الإشارات)، في الاتصالات الخليوية لتمثيل مطال الإشارة الناتجة عن الخفوت (توزيع رايلي).

تعريف 8: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع ويبل بوسيطين $\alpha, \beta > 0$ إذا كان تابع الكثافة الاحتمالي هو التالي:

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}} & x>0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$



ملاحظة 3: عندما تكون $\beta = 1$ في توزيع ويبل فإن هذا التوزيع يتحول إلى توزيع أسي بوسيط $\beta = 1/\alpha$

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

تعريف 9: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع رايلي Rayleigh بوسيط $\sigma > 0$، إذا كان له تابع الاحتمال التالي (يوافق توزيع ويبل من أجل $\beta = 2$، وبفرض $(\alpha = 1/(2\sigma^2))$:

$$f(x;\sigma)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)} & x\ge 0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

1.6. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 11: متوسط وتشتت التوزيع ويبل هما:

$$\mu = \alpha^{-1/\beta}\Gamma(1+1/\beta)$$
$$\sigma^2 = \alpha^{-2/\beta}\{\Gamma(1+2/\beta) - [\Gamma(1+1/\beta]^2\}$$

نتيجة 3: متوسط وتشتت التوزيع رايلي هما:

$$\mu = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ and\ \sigma^2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

يتم الحصول على النتيجة السابقة بأخذ $\beta = 2$، وبفرض $\alpha = 1/(2\sigma^2)$، وباستخدام خواص التابع غاما الثلاث التي وجدناها سابقاً.

2.6. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تابع التوزيع التراكمي للتوزيع ويبل هو التابع التالي:

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\alpha x^\beta}, \quad x \ge 0$$

نتيجة 4: تابع التوزيع التراكمي للتوزيع رايلي هو:

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad x \ge 0$$

مثال 16: زمن حياة عنصر في آلة، مقدرا بالساعات، يخضع لتوزيع ويبل حيث $\alpha = 0.01$ و $\beta = 2$.
أوجد احتمال أن يفشل قبل 8 ساعات من الاستخدام؟

الحل:

$$F(8) = P(X \le 8) = 1 - e^{-0.01(8)^2} = 0.473$$

3.6. معدل الفشل failure rate:

معدل الفشل هو عدد مرات الفشل وذلك ضمن فترة زمنية محددة، ومعدل الفشل هذا يستخدم في قياس وثوقية reliability جهاز أو عنصر ما (القرص الصلب على سبيل المثال).

مبرهنة 12: معدل الفشل في اللحظة t من أجل توزيع ويبل يعطى بالعلاقة التالية:

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad t > 0$$

معدل الفشل $Z(t)$ يعبر عن معدل التغير عبر الزمن للاحتمال الشرطي بأن العنصر يستمر (يدوم) زمن إضافي Δt علماً أنه يقي مستمراً حتى اللحظة t. يمكن التمييز بين 3 حالات مختلفة:

1. إذا كان $\beta = 1$، فإن معدل الفشل يساوي ثابت $Z(t) = \alpha$. وهذا يوافق الحالة الخاصة للتوزيع الأسي الذي يوصف بأنه بلا ذاكرة.
2. إذا كان $\beta > 1$، فإن معدل الفشل $Z(t)$ يكون تابعاً متزايداً بالنسبة للزمن t. يحدث ذلك إذا كان هناك عملية تقادم aging، أي أن العناصر تصبح أكثر عرضة للفشل مع مرور الزمن.
3. إذا كان $\beta < 1$، فإن معدل الفشل $Z(t)$ يكون تابعاً متناقصاً بالنسبة للزمن t. أي أن العناصر تصبح أقل عرضة للفشل مع مرور الزمن.

في المثال السابق لدينا $\beta = 1$ و $Z(t) = 0.02t$، بالتالي العنصر المذكور يتقادم.

7. توزيع رايس Rice distribution:

يستخدم توزيع رايس في مجال معالجة الإشارة. بشكل عام الإشارات المعدلة بالطور phase modulated والملوثة بضجيج غوصي يتبع توزيع رايس، وفي في الاتصالات الخليوية لتمثيل مطال الإشارة الناتجة عن الخفوت.

تعريف 10: نقول عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيع رايس بوسيطين $\nu \geq 0$ و$\sigma > 0$ إذا كان تابع الكثافة الاحتمال هو التالي:

$$f(x;\nu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+\nu^2}{2\sigma^2}} I_0(\dfrac{x\nu}{\sigma^2}) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

حيث I_0 هي توابع بيسيل Bessel المعدّلة من النوع الأول ومن المرتبة 0، التي تعطى بالعلاقة التالية (مجموع):

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}$$

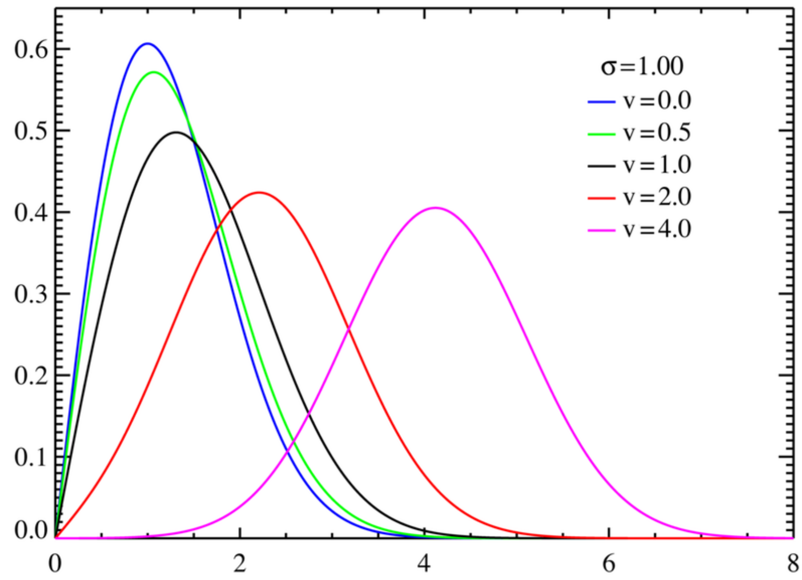
أو على شكل تكامل:

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta} d\theta$$

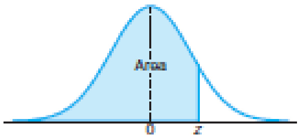
1.7. التوقع الرياضي والتشتت expected value and variance:

مبرهنة 13: متوسط وتشتت توزيع رايس هما:

$$\mu = e^{\mu+\sigma^2/2} \ and \ \sigma^2 = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$$



ملاحظة 4: يمثل توزيع رايلي حالة خاصة من توزيع رايس من أجل قيمة الوسيط $\nu = 0$. بمعنى أنه إذا كان لدينا المتحول العشوائي $X \sim Rice(z; 0, \sigma)$ ، فإن $X \sim Rayleigh(z; \sigma)$.



Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

(continued) Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

تمارين

1. ليكن X متحولاً عشوائياً له توزيع أسي بوسيط $\beta = 1/2$. المطلوب
a) إيجاد تابع الكثافة الاحتمالي وكذلك تابع الاحتمال التراكمي.
b) أوجد احتمال $P(1 < X \le 3)$ و $P(X \ge 2)$.

2. إذا X متحولاً عشوائياً له توزيع طبيعي بمتوسط 50 وتشتت 100. أوجد $P(42 < X \le 55)$.

3. إذا X متحولاً عشوائياً له توزيع طبيعي بمتوسط 40 وتشتت 36. أوجد قيمة:
a) a التي يقع عن يسارها 35% من المساحة تحت منحني تابع الكثافة.
b) b التي يقع عن يمينها 15% من المساحة تحت منحني تابع الكثافة.

4. تقدم لامتحان مقرر الإحصاء والاحتمالات 800 طالب وبعد إعلان النتائج تبين أن درجاتهم التي نالوها تتوزع وفق توزيع الطبيعي متوسطه 65 وانحرافه المعياري 10. فإذا تم تقسيم الطلاب إلى ثلاث فئات بحيث تحوي الفئة A الطلاب الذين نالوا درجات تزيد على 75 وتحوي الفئة B الطلاب الذين نالوا درجات ما بين 50 و 75 وتحوي الفئة C الطلاب الذين نالوا درجات أقل من 50 والمطلوب:
a) تعيين عدد الطلاب في كل فئة.
b) أقل علامة نالها طالب من العشرة الأوائل.

5. يتم إنتاج مسامير البرشام التي تستخدم لبرشمة صفيحة معدنية أقطار المسامير هذه تخضع لتوزيع طبيعي متوسطه 4 cm وانحرافه المعياري 0.25 cm، وبطريقة مستقلة يجري إنتاج صفائح معدنية ذات ثقوب دائرية تخضع لتوزيع طبيعي متوسطه 4.2 cm وانحرافه المعياري 0.15 cm، المطلوب:
a) ما هو احتمال أن يناسب المسمار ثقب الصفيحة؟
b) إذا اخترنا خمسة أزواج (مسمار وصفيحة) فما هو احتمال أن يكون زوجان منهما على الأقل متناسبين؟

6. في إحدى ألعاب الحظ توضع ست مغلفات متماثلة في الشكل ويوجد داخل كل منها بطاقة تدل على عدد الدولارات التي يربحها اللاعب عند سحبه للمغلف .فإذا كان كل من المغلفين الأول والثاني يحوي بطاقة تحمل الرقم 15 ويحوي المغلف الثالث بطاقة تحمل الرقم 10 ويحوي المغلف الرابع بطاقة تحمل الرقم 20 ويحوي كل من المغلفين الخامس والسادس بطاقة تحمل الرقم صفر. المطلوب:

a) إذا قام شخص ب 36 عملية سحب (مع الإعادة) فما هو احتمال أن يجمع مبلغاً يزيد على 350 دولاراً؟

b) ما هو أصغر مبلغ يمكن أن يحصل عليه باحتمال 95%؟

7. إذا قذفنا قطعة نقود متزنة 10 مرات، احسب احتمال أن نحصل على الكتابة ثلاث مرات أو أربعًا أو خمسً وذلك باستخدام التوزيع ذو الحدين من جهة والتقريب بالتوزيع الطبيعي من جهة ثانية. قارن بين النتيجتين، ماذا تستنتج؟

8. تركيز التلوث الذي تحدثه المصانع الكيماوية معروف على أنه يخضع إلى توزيع طبيعي لوغاريتمي. بفرض أن تركيز التلوث، مقدر بأجزاء من المليون parts per million، يخضع لتوزيع طبيعي لوغاريتمي حيث $\mu = 3.2$ و $\sigma = 1$. أوجد احتمال أن يتجاوز التركيز 8 أجزاء بالمليون.

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(80) درجة**

ملاحظة: بعض الأسئلة تحتاج إلى جداول التوزيع الطبيعي موجودة في نهاية صفحات الاختبار

.1 X متحول عشوائي يتبع توزيع منتظم على المجال $[2,5]$، فإن:

a) $\mu_X = 3.5; \quad \sigma_X^2 = 0.75$

b) $\mu_X = 1.5; \quad \sigma_X^2 = 0.75$

c) $\mu_X = 1.5; \quad \sigma_X^2 = 4.5$

d) $\mu_X = 3.5; \quad \sigma_X^2 = 4.5$

.2 X متحول عشوائي يتبع توزيع منتظم على المجال $[2,5]$، فإن:

a) $P(3 < X < 4) = 2/3$

b) $P(3 < X < 4) = 1/3$

c) $P(3 < X < 4) = 1/2$

d) لا شيء ما سبق

.3 $Z \sim N(z;0,1)$، حيث $P(Z > 1) = 0.8413$ بالتالي فإن $P(-1 < Z < 1)$

a) 0.1587

b) 0.6826

c) 0.3413

d) لا شيء ما سبق

.4 $X \sim N(x;50,5)$، بالتالي فإن $P(45 < X < 54)$ يساوي:

a) $P(-1 < Z < 0.8)$

b) $P(1 < Z < 1.8)$

c) $P(-1 < Z < 1.2)$

d) لا شيء ما سبق

.5 $Z \sim N(z;0,1)$ ، باستخدام الجداول $P(-2<Z<2)$ هو:

a) 0.0288

b) 0.9712

c) 0.9544

d) لا شيء ما سبق

.6 $Z \sim N(z;0,1)$ ، بحيث $P(Z>k)=0.2119$ باستخدام الجداول قيمة k هي:

a) 0.88

b) 0.8

c) 0.85

d) لا شيء ما سبق

.7 $X \sim N(x;50,5)$ ، حيث $P(x_1<X<x_2)=P(-z<Z<z)=0.8664$ بالتالي فإن قيمة x_2 (باستخدام الجداول) هي:

a) 55

b) 57.5

c) 43.5

d) لا شيء ما سبق

.8 X,Y متحولان عشوائيان مستقلان بحيث $X \sim N(x;25,4)$ و $Y \sim N(x;30,3)$ ، بالتالي فإن

a) $X+Y \sim N(x;22.5,7)$

b) $X+Y \sim N(x;55,7)$

c) $X+Y \sim N(x;22.5,5)$

d) $X+Y \sim N(x;55,5)$

.9 X,Y متحولان عشوائيان مستقلان بحيث $X \sim N(x;25,4)$ و $Y \sim N(x;30,3)$ ، بالتالي فإن:

a) $X-Y \sim N(x;-5,1)$

b) $X-Y \sim N(x;-5,5)$

c) $X-Y \sim N(x;5,5)$

d) $X-Y \sim N(x;5,1)$

10. $X \sim N(x; 25, 4)$ ، بالتالي فإن

a) $2X \sim N(x; 50, 4)$

b) $2X \sim N(x; 25, 4)$

c) $2X \sim N(x; 50, 8)$

d) $2X \sim N(x; 25, 8)$

11. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متحولات عشوائية مستقلة بحيث أن: $X_i \sim N(x; \mu, \sigma)$, من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$ ، بالتالي فإن:

a) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; n\mu, \sqrt{n}\sigma)$

b) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; n\mu, n\sigma)$

c) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; \mu, \sqrt{n}\sigma)$

d) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim N(x; \mu, n\sigma)$

12. في الاتصالات الخليوية لتمثيل مطال الإشارة الناتجة عن الخفوت نستخدم متحول عشوائي يتبع:

a) توزيع طبيعي

b) توزيع رايلي

c) توزيع مربع كاي

d) توزيع طبيعي لوغاريتمي

13. متحول عشوائي X يمثل مدة انتظار زبون في بنك قبل الحصول على الخدمة يتبع:

a) توزيع طبيعي

b) توزيع أسي

c) توزيع مربع كاي

d) توزيع طبيعي لوغاريتمي

14. أياً مما يلي لا يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لثنائي الحد؟

a) $n = 100,\ p = 0.1$

b) $n = 100,\ p = 0.01$

c) $n = 100,\ p = 0.3$

d) $n = 100,\ p = 0.51$

15. أياً من المتحولات العشوائية التالية يمكن أن يتبع توزيعاً طبيعياً؟

a) عدد مرات رمي حجر النرد لحين ظهور العدد 6.

b) عدد الأشخاص الذين على دور الانتظار ليتم تخديمهم في بنك.

c) أوزان طلاب الجامعة الافتراضية مقدراً بالكلغ.

d) عدد الحوادث المرورية في مدينة ما خلال أسبوع.

16. النسبة من المساحة الكلية تحت منحني التوزيع الطبيعي ضمن المجال $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ هي:

a) 34%

b) 99.7%

c) 68%

d) 95%

السؤال الثاني: **(20) درجة**

X, Y, T ثلاث متحولات عشوائية مستقلة بحيث $X \sim N(x;1,2)$ و $Y \sim N(x;3,4)$ و $T \sim N(x;4,9)$، المطلوب:

a) أوجد الاحتمال $P(1 \le X \le 3)$.

b) أوجد الاحتمال $P(X \le Y)$.

c) أوجد الاحتمال $P(3X - 2Y > 1)$.

d) أوجد الاحتمال $P(X + Y \le 2T - 4)$.

الحل:

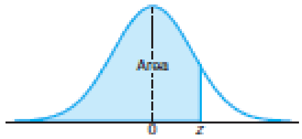
a) $$P(1 \le X \le 3) = P(\frac{1-1}{\sqrt{2}} \le Z \le \frac{3-1}{\sqrt{2}}) = P(0 \le X \le 0.71) = 0.2611$$

b) $$P(X \le Y) = P(X - Y \le 0)$$
$$X - Y \sim N(x; -2, \sqrt{6})$$
$$P(Z \le \frac{0-(-2)}{\sqrt{6}}) = P(Z \le 0.82) = 0.7939$$

c) $$P(3X - 2Y > 1)$$
$$E(3X - 2Y) = 3(1) - 2(3) = -3$$
$$Var(3X - 2Y) = 9(2) + 4(4) = 34$$
$$3X - 2Y \sim N(x; -3, \sqrt{34})$$
$$P(Z > \frac{1-(-3)}{\sqrt{34}}) = P(Z > 0.69) = 1 - P(Z < 0.69) = 0.2451$$

d) $$P(X + Y \le 2T - 4) = P(X + Y - 2T \le -4)$$
$$E(X + Y - 2T) = 1 + 3 - 2(4) = -4$$
$$Var(X + Y - 2T) = 2 + 4 + 4(9) = 42$$
$$X + Y - 2T \sim N(x; -4, \sqrt{42})$$
$$P(X + Y - 2T \le -4) = P(Z \le \frac{-4-(-4)}{\sqrt{42}}) = P(Z \le 0) = 0.5$$

توجيه في حال الخطأ: راجع الفقرة 2



Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

(continued) Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جداول التوزيع الطبيعي القياسي

توجيه في حال الخطأ	الإجابة الصحيحة	السؤال الأول
الفقرة 1	a	1
الفقرة 1	b	2
الفقرة 2	b	3
الفقرة 2	a	4
الفقرة 2	c	5
الفقرة 2	b	6
الفقرة 2	b	7
الفقرة 2	d	8
الفقرة 2	b	9
الفقرة 2	c	10
الفقرة 2	a	11
الفقرة 6	b	12
الفقرة 3	b	13
الفقرة 2	b	14
الفقرة 2	c	15
الفقرة 2	d	16