الفصل الثالث: المتحولات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

رقم الصفحة	العنوان

الكلمات المفتاحية:

متحول عشوائي، متحول عشوائي متقطع، متحول عشوائي مستمر، التوزيع الاحتمالي، تابع التوزيع الاحتمالي، تابع التوزيع التراكمي، التوزيع الاحتمالي المشترك، التوزيع الاحتمالي الهامشي، التوزيعات الاحتمالية الشرطية، التوقع الرياضي، التشتت، الانحراف المعياري، التغاير، معامل الترابط، سيرورة عشوائية.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على مفهوم المتحول العشوائي المتقطع والمستمر. بالإضافة إلى تابع التوزيع الاحتمالي والتراكمي في الحالة المتقطعة والمستمرة، والصفات الرئيسية لكل منهما. وكذلك الأمر بالنسبة للتوزيع المشترك لمتحولين عشوائيين، متقطعين ومستمرين، والتعرف على مفهوم الاستقلالية بينهما. ويتم التطرق إلى مفاهيم كل من التوقع الرياضي (متوسط المتحول العشوائي) والتشتت للمتحول العشوائي ودراسة خصائص كل منهما.

الأهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- المتحول العشوائي المتقطع والمستمر.
- التوزيعات الاحتمالية المتقطعة: تابعي التوزيع الاحتمالي والتراكمي.
- التوزيعات الاحتمالية المستمرة: تابعي التوزيع الاحتمالي والتراكمي.
- التوزيعات الاحتمالية المشتركة، الهامشية، الشرطية، الاستقلالية.
- التوقع الرياضي.
- تشتت المتحول العشوائي.

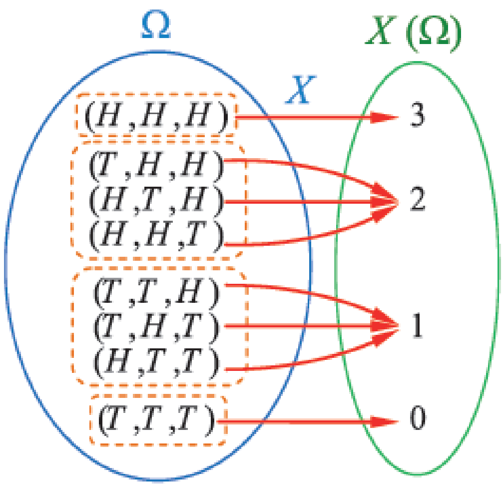
المخطط:

1. المتحول العشوائي.
2. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة.
3. التوزيعات الاحتمالية المستمرة.
4. التوزيعات الاحتمالية المشتركة.
5. التوقع الرياضي.
6. تشتت متحول عشوائي.
7. السيرورة العشوائية.

1. المتحول العشوائي random variable:

في كثير من الأحيان نرغب في التعامل مع قيم عددية مرتبطة بنقاط العينة للتجربة العشوائية بدلاً من التعامل مع نقاط العينة نفسها إذ أن نقاط العينة أو النتائج الممكنة للتجربة العشوائية تكون في بعض الأحيان عبارة عن صفات يصعب التعامل معها رياضياً. في هذه الحالة فإننا نقوم بتحويل هذه القيم الوصفية إلى قيم عددية حقيقية تسمى قيم المتحول العشوائي، وبالتالي فإن هذا التحويل يساعد في تسهيل الدراسة واستقراء النتائج وذلك باستخدام الطرق الحسابية والرياضية.

على سبيل المثال في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات، وكان اهتمامنا فقط على عدد ظهور الكتابة H، نكون عندها عرفنا متحولاً عشوائياً X يأخذ إحدى القيم التالية $0, 1, 2, 3$. أي نكون بذلك عرفنا على فضاء العينة $\Omega=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ تابعاً عددياً $X:\Omega\to\{0, 1, 2, 3\}$، يعطي لكل عنصر من عناصر فضاء العينة Ω قيمة عددية تمثل عدد مرات ظهور الكتابة. فمثلاً يأخذ المتحول X القيمة 0 $(X=0)$، أي عدم ظهور الكتابة ولا مرة) من أجل الحدث البسيط $\{TTT\}$، كما يأخذ القيمة 2 $(X=2)$، ظهور الكتابة مرتين) من أجل الحدث $\{HHT, HTH, THH\}$.



عدد حوادث المرور في مدينة دمشق في يوم ما هو قياس كمي، أما ولادة ذكر أو أنثى فهي ملاحظة وصفية (كيفية).

إذا رمزنا بـــ X لعدد الحوادث المرورية في مدينة دمشق ولحالة الولادة بـــ Y فمع نهاية كل يوم سنحصل على قيمة للمتحول X ومع كل حالة ولادة سنحصل على قيمة للمتحول Y.

ومن الطبيعي أن نقول عن متحول مثل X أو Y على أنه متحول عشوائي، لأن القيم التي يأخذها كل منهما مرتبطة بتجربة عشوائية.

ليكن على سبيل المثال لدى أسرة طفلان، لنرمز للذكر بالرمز B وللأنثى بالرمز G. بالتالي فإن فضاء العينة هو: $\Omega = \{GG, GB, BG, BB\}$، وليكن X متحول يمثل عدد الأطفال الذكور عند هذه العائلة. بالتالي فإن X هو متحول عشوائي يمكن أن تكون قيمه إما 0 (GG) أو 1 (BG, GB) أو 2 (BB).

تعريف 1: ليكن لدينا Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية. المتحول العشوائي عبارة عن تابع حقيقي يُلحق بكل عنصر من عناصر فضاء العينة Ω قيمة حقيقية. نرمز عادة للمتحول العشوائي بحرف كبير $X, Y, \ldots$، كما نرمز للقيم التي يأخذها بأحرف صغيرة $x, y, \ldots$.

تُقسم المتحولات العشوائية إلى نوعين أساسيين هما:

المتحولات العشوائية المتقطعة discrete random variables: إذا كانت مجموعة القيم الممكنة لتلك المتحولات مجموعة منتهية (كما هو الحال في تجربة رمي قطع نقدية ثلاث مرات) أو لا نهائية قابلة للعد (كما هو الحال بالنسبة لعدد الحوادث المرورية التي تقع يومياً).

المتحولات العشوائية المستمرة continuous random variables: إذا كانت مجموعة القيم الممكنة لتلك المتحولات مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد. بكلام أخر، مجموعة قيمها هي مجال من المحور الحقيقي (كما هو الحال في تجربة قياس طول الأشخاص).

مثال 1: مصنع لتصنيع عناصر (الكترونية، ميكانيكية، ...)، تلك العناصر يمكن تصنيفها على أنها معيبة defective أو غير معيبة not defective. نعرف المتحول العشوائي المتقطع X، على سبيل المثال بـــ: $X = 1$ إذا كان العنصر معيب، و $X = 0$ إذا كان العنصر غير معيب.

مثال 2: في الإحصاء نستخدم مفهوم أخذ العينات من أجل قبول أو رفض دفعات من مادة معينة (لمبات، عناصر الكترونية، ...). على سبيل المثال نأخذ عينة من 10 عناصر بشكل عشوائي من أصل 100 عنصر تحوي على 12 عنصر معيب. ليكن X المتحول العشوائي المتقطع المعرف على أنه عدد العناصر المعيبة في العينة المختارة. في هذه الحالة يمكن للمتحول العشوائي أن يأخذ أحد القيم الصحيحة المحصورة بين 0 و 10.

مثال 3: ليكن X المتحول العشوائي المستمر المعرف على أنه الزمن، مقدراً بالدقائق، اللازم لتخديم (تسديد فاتورة، شراء خط...) زبون في مركز خدمات الزبائن للهواتف الجوالة. في هذه الحالة يمكن للمتحول العشوائي أن يأخذ أي قيمة حقيقية x بحيث $x > 0$.

مثال 4: ليكن X المتحول العشوائي المستمر المعرف على أنه نسبة الأشخاص الذين يتم شفاءهم من مرض خطير (السرطان، الإيدز، ...). في هذه الحالة يمكن للمتحول العشوائي أن يأخذ أي قيمة حقيقية x تنتمي إلى المجال [0, 1] $(0 \le x \le 1)$.

2. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة discrete probability distributions:

1.2. المتحول العشوائي المتقطع discrete random variables:

تعريف 2: يكون المتحول العشوائي $X : \Omega \to R$ متحول عشوائي متقطع إذا كانت مجموعة القيم الممكنة لـ $X(\Omega)$ هي مجموعة منتهية أو قابلة للعد، أي أنها من الشكل $X(\Omega) = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ أو من الشكل $X(\Omega) = \{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$.

إذا كانت x إحدى القيم التي يأخذها المتحول العشوائي X، نعرف الحدث $\{X = x\}$ على أنه مجموعة الأحداث البسيطة التي يأخذ عندها المتحول العشوائي X القيمة x.

مثال 5: في تجربة إلقاء زوج من النرد مرة واحدة. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الوجهين الظاهرين.

a) أوجد مجموعة قيم المتحول العشوائي.

b) ما هو الحدث $\{X = 4\}$؟ وما هو احتمال وقوعه؟

c) ما هو الحدث $\{X = 6\}$؟ وما هو احتمال وقوعه؟

الحل:

a) $X(\Omega) = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$.

b) $\{X = 4\} = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$، واحتمال وقوع هذا الحدث هو $3/36 = 1/12$.

c) $\{X = 6\} = \{(1,5), (2,4), (3,3),, (4,2), (5,1)\}$، واحتمال وقوع هذا الحدث هو $5/36$.

مثال 6: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد المرات التي تظهر فيها الكتابة H.

a) فضاء العينة.

b) أوجد مجموعة قيم المتحول العشوائي.

c) عبر عن الحوادث التالية: $\{(H,H),(H,T),(T,H)\}$, $\{(H,T),(T,H)\}$.

d) عبر عن الحوادث التالية: $\{X \ge 1\}, \{X = 2\}, \{X = 1\}, \{X = 0\}$؟ وما هو احتمال وقوع كل منها؟

الحل:

a) $\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$.

b) $X(\Omega) = \{0,\ 1,\ 2\}$.

c) $\{(H,T), (T,H)\} = \{X = 1\}$

$\{(H,H), (H,T), (T,H)\} = \{X \ge 1\}$

d) $\{X=0\}=\{(T,T)\}$، احتمال حدوثها هو $1/4$
$\{X=1\}=\{(H,T),(T,H)\}$، احتمال حدوثها هو $1/2$
$\{X=2\}=\{(H,H)\}$، احتمال حدوثها هو $1/4$
$\{X\le 2\}=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$، احتمال حدوثها هو 1
F$\{X>3\}=\{\}=\Phi$، احتمال حدوثها هو 0

مثال 7: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتحولات العشوائية التالية:

a) المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد ظهور الكتابات H.
b) المتحول العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد ظهور الكتابات H.
c) المتحول العشوائي Z الذي يمثل عدد ظهور الكتابات H مطروحاً منه عدد ظهور الشعارات T.

الحل:

a) $X(\Omega)=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$
b) $Y(\Omega)=\{0,\ 1,\ 4,\ 9\}$
c) $Z(\Omega)=\{-3,\ -1,\ 1,\ 3\}$

2.2. تابع التوزيع الاحتمالي probability distribution function:

تعريف 3: ليكن X متحول عشوائي متقطع على فضاء العينة Ω مجموعة قيمه منتهية من الشكل $X(\Omega)=\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$. أو غير منتهيه. $X(\Omega)=\{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$ نسمي التابع التالي:

$$f_X(x): X(\Omega)\to R: x\mapsto f_X(x)=P\left(X=x\right)$$

(اختصاراً $f(x)$) تابع التوزيع الاحتمالي أو تابع الكتلة الاحتمالي probability mass function للمتحول العشوائي X.

يحقق التابع $\mathrm{f}_X(x)$ الخاصتين التاليتين:

a) $0\le f_X(x)\le 1$
b) $\sum_x f_X(x)=\sum_x P(X=x)=1$

مثال 8: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. ليكن X المتحول العشوائي الذي يعطي عدد المرات التي تظهر فيها الكتابة H. أوجد تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول X.

الحل:

وجدنا سابقاً أن فضاء العينة هو:

$$\Omega=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

بالتالي فإن قيم المتحول X هي $X(\Omega)=\{0, 1, 2, 3\}$. كما وجدنا أن $P(X=0)=1/8$ و $P(X=1)=P(X=2)=3/8$ وأخيراً $P(X=3)=1/8$. بالتالي فإن تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول X هو:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

مثال 9: في تجربة إلقاء زوج من النرد المتزن مرة واحدة. ليكن Y المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الوجهين الظاهرين. أوجد تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول Y.

الحل:

وجدنا سابقاً أن $Y(\Omega)=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

$\{Y=2\}=\{(1,1)\}$، بالتالي $P(Y=2)=1/36$.

$\{Y=3\}=\{(1,2),(1,2)\}$، بالتالي $P(Y=3)=2/36$.

$\{Y=4\}=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$، بالتالي $P(Y=4)=3/36$.

$\{Y=5\}=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$، بالتالي $P(Y=5)=4/36$.

وهكذا وبنفس طريقة الحساب، نحصل أخيراً على جدول التوزيع الاحتمالي التالي:

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Y=y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مثال 10: شحنة مؤلفة من 20 جهاز كمبيوتر محمول معدة لبيع بالتقسيط تحوي على 3 منها معيبة. اشترت إحدى المدارس جهازين منها تم اختيارها بشكل عشوائي. أوجد تابع التوزيع الاحتمالي لعدد الأجهزة المعيبة.

الحل:

بفرض X المتحول العشوائي الذي يشير إلى عدد الأجهزة المعيبة الموجودة في العينة التي اشترتها المدرسة، بالتالي القيم الممكنة لهذا المتحول هي $0, 1, 2$.

$$P(X=0)=\frac{C(3,0)C(17,2)}{C(20,2)}=\frac{68}{95}$$
$$P(X=1)=\frac{C(3,1)C(17,1)}{C(20,2)}=\frac{51}{190}$$
$$P(X=2)=\frac{C(3,2)C(17,0)}{C(20,2)}=\frac{3}{190}$$

بالتالي جدول التوزيع الاحتمالي هو التالي:

x	**0**	**1**	**2**
$P(X=x)$	$\frac{136}{190}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

3.2. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تعريف 4: نعرف تابع التوزيع التراكمي $F_X(x)$ (اختصاراً $F(x)$) لمتحول عشوائي متقطع X له تابع التوزيع الاحتمالي $f_X(x)$ كما يلي:

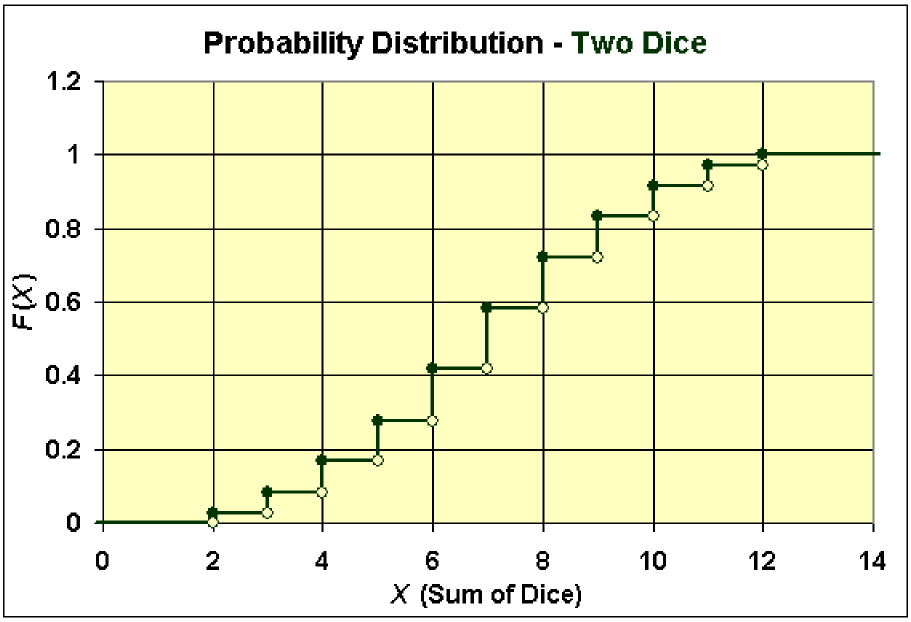
$$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x} f_X(t),\quad x\in R$$

مثال 11: في تجربة إلقاء زوج من النرد المتزن مرة واحدة (المثال رقم 9 السابق). أوجد تابع التوزيع التراكمي للمتحول العشوائي X (مجموع أرقام الوجهين الظاهرين).

الحل:

$$F_X(x)=P(X\le x)=0,\quad for\ x<2$$
$$F_X(2)=P(X\le 2)=P(X=2)=1/36,\quad for\ 2\le x<3$$
$$F_X(3)=P(X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)=1/12,\quad for\ 3\le x<4$$
$$F_X(4)=P(X\le 4)=1/6,\quad for\ 4\le x<5$$
$$F_X(5)=P(X\le 5)=5/18,\quad for\ 5\le x<6$$
$$F_X(6)=P(X\le 6)=5/12,\quad for\ 6\le x<7$$
$$F_X(7)=P(X\le 7)=7/12,\quad for\ 7\le x<8$$
$$F_X(8)=P(X\le 8)=13/36,\quad for\ 8\le x<9$$

$$F_X(9) = P(X \le 9) = 5/6, \quad for\ 9 \le x < 10$$
$$F_X(10) = P(X \le 10) = 11/12, \quad for\ 10 \le x < 11$$
$$F_X(11) = P(X \le 11) = 35/36, \quad for\ 11 \le x < 12$$
$$F_X(12) = P(X \le 12) = 1, \quad for\ x \ge 12$$



ملاحظة 1: يُمكن استخدام تابع التوزيع التراكمي $F_X(x)$ في حساب تابع التوزيع الاحتمالي، وذلك بملاحظة أن: $P(X=x)=F_X(x)-F_X(x^-)$. على سبيل المثال إذا أردنا حساب $P(X=5)$ في المثال السابق نجد:

$$P(X=5) = F_X(5) - F_X(4) = \frac{5}{18} - \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

3.التوزيعات الاحتمالية المستمرة continuous probability distributions:

1.3. المتحول العشوائي المستمر continuous random variables:

تعريف 5: يكون المتحول العشوائي $X:\Omega\rightarrow R$ متحول عشوائي مستمر إذا كانت مجموعة القيم الممكنة لـ $X(\Omega)$ هي مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد، أي أنها عبارة عن مجال من المحور الحقيقي أو اتحاد عدة مجالات.

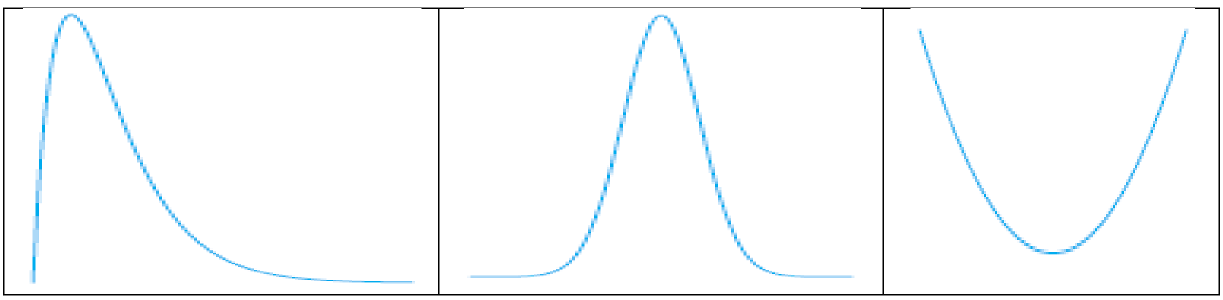
من الأمثلة عن الكميات التي يمكن تمثيلها بواسطة متحولات عشوائية مستمرة: درجة حرارة تفاعل كيميائي معين، نسبة تركيز مركب ما ضمن محلول كيميائي، طول الشخص، المسافة المقطوعة لجسم معين خلال وحدة الزمن.

ملاحظة 2: ينتج من التعريف أنه لا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي لمتحول مستمر بواسطة جدول توزيع احتمالي.

لنفرض أننا نهتم بمعرفة أطوال مجموعة من الطلاب، من أجل أية قيمتين 163.5 سم و164.5 سم على سبيل المثال، فإنّه يوجد عدد غير منته. كما أن اختيار طالب طوله تماماً 164 سم هو أمر مستحيل ويمكن القول بأنه حدث احتماله صفر.لكن الأمر مختلف تماماً عندما نريد حساب احتمال اختيار طالب طوله على الأقل 163 سم وبما لا يتجاوز ال 165 سم. إذاً في هذه الحالة نتعامل مع مجالات عوضاً عن نقاط. أي أننا نقوم بحساب احتمالات من الشكل $P(a<X<b)$ أو $P(Y\geq c)$ أو $P(W<e)$ ...

على الرغم من أننا لا نستطيع جدولة التوزيع الاحتمالي للمتحول المستمر (كما هو الحال بالنسبة للمتحول العشوائي المتقطع) إلا أننا نستطيع التعبير عنه بعلاقة رياضية. هذه العلاقة هي عبارة عن تابع عددي حقيقي غير سالب، ندعوه تابع الكثافة الاحتمالي، من خلاله نستطيع إيجاد احتمالات الأحداث المعبر عنها بواسطة المتحول العشوائي.

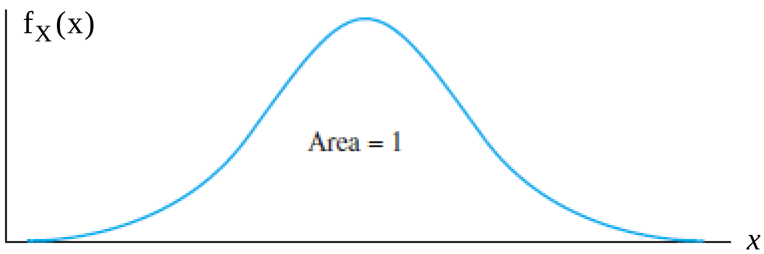
معظم توابع التوزيع الاحتمالية المستخدمة في التطبيقات الإحصائية هي توابع مستمرة تأخذ أشكال متعددة (بعضاً منها يبينه الشكل التالي). بما أن المساحات ستستخدم لحساب الاحتمالات، والاحتمالات هي قيم موجبة، بالتالي تقع هذه التوابع كلها فوق المحور x.

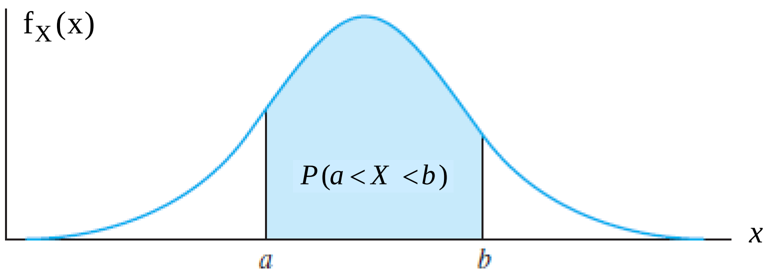


2.3. تابع الكثافة الاحتمالي probability density function:

تعريف 6: يكون التابع $f_X(x)$ تابع كثافة احتمالي probability density function (pdf) للمتحول العشوائي المستمر X، والمعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية، إذا تحقق ما يلي:

1. $f_X(x) \geq 0, \quad x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$





ملاحظة 3: أياً كان المتحول العشوائي المستمر X لدينا:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

3.3. تابع التوزيع التراكمي cumulative distribution function:

تعريف 7: نعرف تابع التوزيع التراكمي $F_X(x)$ (اختصاراً $F(x)$) لمتحول عشوائي مستمر X، حيث تابع كثافته الاحتمالي هو $f_X(x)$ كما يلي:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \quad -\infty < x < \infty$$

نتيجة 1: ينتج مباشرة من التعريف السابق النتيجتين التاليتين:

- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
- $f_X(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x)$ ، في حال وجود المشتق.

مثال 12: ليكن المتحول العشوائي المستمر X وتابع كثافته الاحتمالي هو التالي (حيث c ثابت موجب):

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

a) أوجد قيمة الثابت c.

b) أوجد تابع التوزيع التراكمي $F_X(x)$.

c) أوجد $P(1 < X < 3)$.

الحل:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt = 1 = \int_0^{\infty} ce^{-t}\,dt = c\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = c$

بالتالي لدينا $c = 1$.

b) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt,$

من أجل $x < 0$، نحصل على $F_X(x) = 0$. أما من أجل $x \geq 0$، لدينا:

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)\,dt = \int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x}$$

بالتالي:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

يمكننا التأكد من أن مشتق التابع $F_X(x)$ يُنتج $f_X(x)$.

$$P(1 < X < 3) = F_X(3) - F_X(1) = [1 - e^{-3}] - [1 - e^{-1}] = e^{-1} - e^{-3}$$

أو أنه يمكن حسابه بطريقة ثانية:

$$P(1 < X < 3) = \int_1^3 f_X(t)\,dt = \int_1^3 e^{-t}\,dt = e^{-1} - e^{-3}$$

مثال 13: وزارة الطاقة تطرح مشاريع مناقصة وعادة تقدر قيمة المناقصة المعقولة على أنها القيمة b. حددت الوزارة بأن تابع الكثافة الاحتمالي لربح المناقصة هو التالي:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{8b}, & \frac{2}{5}b \leq y \leq 2b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد تابع التوزيع التراكمي $F_Y(y)$ واستخدامه في حساب احتمال أن يكون ربح المناقصة هو أقل من القيمة الأولية المقدرة b.

الحل:

من أجل $2b/5 \leq y \leq 2b$ لدينا:

$$F_Y(y) = \int_{2b/5}^{y} \frac{5}{8b} dy = \left[\frac{5y}{8b}\right]_{2b/5}^{y} = \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}$$

بالتالي فإن:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 2b/5 \\ \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4} & 2b/5 \le y < 2b \\ 1 & y \ge 2b \end{cases}$$

لحساب احتمال أن يكون ربح المناقصة هو أقل من القيمة الأولية المقدرة b:

$$P(Y \le b) = F_Y(b) = 5/8 - 1/4 = 3/8$$

4. التوزيعات الاحتمالية المشتركة joint probability distributions:

نحتاج في كثير من الحالات عند وصف تجربة عشوائية لأكثر من متحول عشوائي، فعندما نلقي زوج من النرد مرة واحدة يمكن أن نرمز لمجموع رقمي الوجهين الظاهرين بـــالمتحول العشوائي X ونرمز للقيمة العظمى لهذين الرقمين بـــالمتحول العشوائي Y، فمجموعة نتائج هذه التجربة يمكن أن ندلّ عليها بوساطة الثنائيات (الأزواج) (x, y) حيث يدل المسقط الأول على نتيجة X والمسقط الثاني يدل على نتيجة Y.

وعند سؤالنا مجموعة من الأشخاص عن أوزانهم وأطوالهم فيمكن أن نرمز بـــ X على طول الشخص وبـــ Y على وزن الشخص وبالتالي من أجل كل شخص ستكون ثنائية (x, y) حيث x هو طول الشخص و y هو وزنه.

ليكن X, Y متحولان عشوائيان، التوزيع الاحتمالي لوقوعهما في آن واحد يمكن تمثيله بتابع $f(x, y)$ لكل زوج (x, y) ضمن نطاق المتحولين العشوائيين X, Y. نشير إلى هذا التابع بالتوزيع الاحتمالي المشترك للمتحولين X, Y.

1.4. التوزيع المشترك لمتحولين joint probability distribution of two variables:

تعريف 8: ندعو الشعاع (X, Y) شعاعاً عشوائياً إذا كانت كل من مركبتيه X و Y متحولاً عشوائياً. كما نقول إن الشعاع العشوائي (X, Y) متقطع إذا كانت مجموع القيم التي يأخذها مجموعة منتهية أو غير منتهية قابلة للعد. ونقول إن الشعاع العشوائي مستمراً إذا كانت مجموع القيم التي يأخذها مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد.

كما ذكرنا سابقاً فإن قيم الشعاع العشوائي (X, Y) هي ثنائيات (x, y)، وبالتالي يمكن مقابلة كل نتيجة للتجربة بنقطة (x, y) من R^2 (المستوي Oxy).

1.1.4. المتحول العشوائي متقطع:

ليكن X و Y متحولين عشوائيين متقطعين معرفين على فضاء العينة Ω و $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots\}$ (مجموعة قيم المتحول X) و $X(\Omega)=\{y_1, y_2, \ldots\}$ (مجموعة قيم المتحول Y)، عندئذ تكون مجموعة قيم الشعاع العشوائي (X, Y) هي: $\{(x_i, y_j); i, j > 1\}$.

يقع الحدث $\{X = x_i, Y = y_j\}$ إذا وقع كل من الحدثين $\{X = x_i\}$ و $\{Y = y_j\}$ معاً، ونرمز لاحتمال وقوعه بالتابع $f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ (أو اختصاراً $f(x_i, y_j)$) من أجل $i, j = 1, 2, \ldots$.

تعريف 9: نقول عن التابع $f_{X,Y}(x, y)$ أنه تابع التوزيع الاحتمالي المشترك للمتحولين العشوائيين المتقطعين X, Y إذا تحققت الشروط التالية:

1. $0 \le f_{X,Y}(x, y) \le 1$

2. $\sum_{x}\sum_{y} f_{X,Y}(x, y) = 1$

3. $P(X = x, Y = y) = f_{X,Y}(x, y)$

ومن أجل أية منطقة A من المستوي الحقيقي فإن: $P[(X,Y)\in A] = \sum\sum_{A} f_{X,Y}(x,y)$

مثال 14: يحوي صندوق 8 كرات، منها 3 كرات زرقاء وكرتين حمراء و3 كرات خضراء. سحبنا عشوائياً كرتين معاً من الصندوق. ليكن المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد الكرات الزرقاء المسحوبة و Y عدد الكرات الحمراء المسحوبة، أوجد:

a) تابع التوزيع الاحتمالي المشترك $f_{X,Y}(x, y)$.

b) أوجد $P(X = 0, Y \le 1)$.

c) أوجد $P[(X,Y)\in A]$، حيث A تمثل المنطقة $\{(x, y) \mid x + y \le 1\}$.

الحل:

من الواضح أن قيم الثنائيات الممكنة هي:

$$(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0)$$

a) لنحسب على سبيل المثال القيمة $f_{X,Y}(0,1)$: وهي تمثل عدم الحصول على كرة زرقاء والحصول على كرة حمراء أي الحصول على كرة خضراء وأخرى حمراء، بالتالي قيمة الاحتمال هي:

$$\frac{2}{8}.\frac{3}{7}+\frac{3}{8}.\frac{2}{7}=\frac{3}{14}$$

ولحساب القيمة $f_{X,Y}(0,0)$: وهي تمثل عدم الحصول لا على زرقاء ولا على حمراء، أي الحصول على كرتين خضراوين، بالتالي قيمة الاحتمال هي:

$$\frac{3}{8}.\frac{2}{7}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$$

لحساب القيمة $f_{X,Y}(1,2)$: وهي تمثل الحصول على كرة زرقاء وكرتين حمراوين، وهذا الاحتمال لا يمكن أن يحدث لأن السحب فقط كرتين، بالتالي قيمة الاحتمال هي الصفر.

حسابات مختلفة تقودنا إلى الجدول التالي:

$X \setminus Y$	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	المجموع
$X = 0$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{14}$
$X = 1$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{15}{28}$
$X = 2$	$\frac{3}{28}$	0	0	$\frac{3}{28}$
المجموع	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$	1

b) $P(X=0, Y\le 1) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(0,1) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} = \frac{9}{28}$

c) $P[(X,Y)\in A] = P(X+Y\le 1) =$

$$= f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(1,0) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{9}{28} = \frac{9}{14}$$

مثال 15: في تجربة إلقاء زوج من النرد مرة واحدة، ليكن X متحول عشوائي يدل على أصغر عدد ظهر و Y متحول عشوائي يدل على مجموع العددين الناتجين. أوجد تابع التوزيع الاحتمالي المشترك.

الحل:

من الواضح أن قيم الثنائيات الممكنة هي:

(1, 2), (1, 3), …, (1, 11), (1, 12)
(2, 2), (2, 3), …, (2, 11), (2, 12)
….
(6, 2), (6, 3), …, (6, 11), (6, 12)

لنحسب على سبيل المثال القيمة $f_{X,Y}(1,2)$ والتي تمثل الحصول على واحد وواحد، بالتالي قيمة الاحتمال هي $1/36$ (حالة واحدة من أصل 36 حالة ممكنة). ولحساب القيمة $f_{X,Y}(1,5)$ التي تمثل الحصول على واحد وأربعة، بالتالي قيمة الاحتمال هي $2/36$ (حالتان من أصل 36 حالة ممكنة). أما لحساب القيمة $f_{X,Y}(1,9)$ والتي لا يمكن الحصول عليها بوجود القيمة 1 لأحد القطعتين، بالتالي قيمة الاحتمال هي 0.

حسابات مختلفة تقودنا إلى الجدول التالي:

$X \setminus Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	المجموع
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{11}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{9}{36}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
المجموع	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

2.1.4. المتحول العشوائي مستمر:

تعريف 9: نقول عن التابع $f_{X,Y}(x,y)$ أنه تابع التوزيع الاحتمالي المشترك للمتحولين العشوائيين المستمرين X, Y إذا تحققت الشروط التالية:

$$0 \leq f_{X,Y}(x,y) \leq 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$$

من أجل أية منطقة A من المستوي الحقيقي فإن:

$$P[(X,Y)\in A] = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \;.$$

مثال 16: ليكن لدينا المتحولان العشوائيان المستمران X, Y ، وحيث تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما $f_{X,Y}(x,y)$ هو:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + cy^2 & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

a) أوجد الثابت c

b) أوجد $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{2})$

الحل:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 (x + cy^2)\,dxdy$$

$$1 = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + cy^2 x\right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$1 = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} + cy^2\right] dy$$

$$1 = \left[\frac{1}{2}y + cy^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}c$$

بالتالي فإن: $c = 3/2$

b)

$$P(0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} (x + \frac{3}{2}y^2)\,dxdy$$

$$= \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 x\right] dy$$

$$= \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{8} + \frac{3}{4}y^2\right] dy = \frac{3}{32}$$

2.4. التوزيعات الهامشية marginal distribution:

تعريف 10: ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً تابعه الاحتمالي $f_{X,Y}(x,y)$ عندئذ التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من X و Yهما على الترتيب من أجل الحالة المتقطعة:

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

ومن أجل الحالة المستمرة:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

مثال 17: أوجد تابع التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من المتحولين العشوائيين X و Y للمثال 14 السابق.

الحل:

لنحسب على سبيل المثال $f_X(0)$ ، من التعريف ينتج:

$$f_X(0) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(0,2) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14}$$

حسابات مختلفة تقودنا إلى الجدولين التاليين:

x	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

y	0	1	2
$f_Y(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

مثال 18: أوجد تابع التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من X و Y للمثال 16 السابق.

الحل:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^1 (x+\frac{3}{2}y^2)\,dy=\left[xy+\frac{1}{2}y^3\right]_0^1=x+\frac{1}{2}$$

بالتالي:

$$f_X(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0\le x\le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$=\int_0^1 (x+\frac{3}{2}y^2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2x\right]_0^1=\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}$$

بالتالي:

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}, & 0\le y\le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

3.4.التوزيعات الشرطية conditional distributions:

ليكن X,Y متحولين عشوائيين متقطعين أو مستمرين معرفين على الفضاء Ω وليكن $A=\{X=x\}$ و $B=\{Y=y\}$ حدثين من Ω عندئذ:

$$P(A|B)=P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

تعريف 11: ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً تابعه الاحتمالي $f_{X,Y}(x,y)$ عندئذ التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتحول العشوائي X علماً أن $Y=y$ هو:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

وبنفس الطريقة نعرف التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتحول العشوائي Y علماً أن $X=x$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

مثال 19: أوجد تابع التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتحول العشوائي X علماً أن $Y=1$ للمثال 14 السابق. استخدمه في إيجاد $P(X=0|Y=1)$.

الحل:

من أجل حساب $f_{X|Y}(x|y)$ علينا بداية حساب $f_Y(1)$:

$$f_Y(1) = f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(2,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}$$

بالتالي:

$$f_{X|Y}(x|1) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} = \frac{7}{3} f_{X,Y}(x,1), \quad x = 0,1,2$$

$$f_{X|Y}(0|1) = \frac{7}{3} f_{X,Y}(0,1) = \frac{7}{3}.\frac{3}{14} = \frac{1}{2}$$

$$f_{X|Y}(1|1) = \frac{7}{3} f_{X,Y}(1,1) = \frac{7}{3}.\frac{3}{14} = \frac{1}{2}$$

$$f_{X|Y}(2|1) = \frac{7}{3} f_{X,Y}(2,1) = \frac{7}{3}.0 = 0$$

وتابع التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتحول العشوائي X علماً أن $Y=1$ هو:

x	0	1	2
$f_X(x\|1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

أخيراً، $P(X=0|Y=1) = f_{X|Y}(0|1) = \frac{1}{2}$. أي أنه إذا علمنا أن واحدة من الكرتين المسحوبتين حمراء فإن احتمال أن تكون الكرة الأخرى زرقاء هو $1/2$.

مثال 20: أوجد تابع التوزيع الاحتمالي الشرطي $f_{Y|X}(y|x)$ للمثال 16 السابق. استخدمه في إيجاد $P(X>1/2|Y=1/2)$.

الحل:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+\frac{3}{2}y^2}{x+\frac{1}{2}} = \frac{2x+3y^2}{2x+1},$$

$$0 \le x, y \le 1$$

$$P(X > 1/2 \mid Y = 1/2) = \int_{1/2}^{1} f_{Y|X}(y \mid x = \frac{1}{2})\, dy$$

$$= \int_{1/2}^{1} (\frac{1}{2} + \frac{3}{2} y^2)\, dy = \left[\frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y^3\right]_{1/2}^{1} = \frac{11}{16}$$

4.4.استقلالية المتحولات العشوائية independence of random variables:

تعريف 12: ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً متقطعاً أو مستمراً تابعه الاحتمالي $f_{X,Y}(x, y)$ وتوزيعهما الاحتماليان الهامشيان هما $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ على الترتيب. المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان إذا وفقط إذا كان:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x).f_Y(y)$$

من أجل كل الثنائيات (x, y).

مثال 21: برهن أن المتحولين العشوائيين X, Y في المثال 14 السابق غير مستقلين.

الحل:

لتكن النقطة $(0,\ 1)$، ولنوجد الاحتمالات التالية: $f_{X,Y}(0,1)$ و $f_X(0)$ و $f_Y(1)$

$$f_{X,Y}(0,1) = \frac{3}{14}$$

$$f_X(0) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(0,2) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14}$$

$$f_Y(1) = f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(2,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}$$

من الواضح أن $f_{X,Y}(0,1) \ne f_X(0).f_Y(1)$. وبالتالي فإن المتحولين العشوائيين X و Y غير مستقلين.

5. التوقع الرياضي mathematical expectation:

ناقشنا في الفصل الأول متوسط عينة، والذي كان عبارة عن المتوسط الحسابي للمعطيات. الآن لنرمي قطعتين من النقود 16 مرة وليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الكتابة H في الرمية الواحدة، بالتالي فإن قيم X هي $0, 1, 2$. لنفرض أن التجربة أعطنا 4 مرات ولا كتابة، 7 مرات كتابة واحدة و 5 مرات كتابتين. العدد الوسطي لظهور الكتابة في الرمية الواحدة لقطعتي النقود بالتالي:

$$\frac{0(4)+1(7)+2(5)}{16}=1.06$$

يمكن إعادة كتابة الحساب السابق على النحو المكافئ التالي:

$$0(\frac{4}{16})+1(\frac{7}{16})+2(\frac{5}{16})=1.06$$

تمثل الأعداد $4/16, 7/16, 5/16$ التكرار النسبي relative frequency لقيم X المختلفة $(0, 1, 2)$. في الحقيقة، إذن، يمكن حساب متوسط عينة من المعطيات من خلال معرفة القيم المختلفة التي تحدث وكذلك تكرارها النسبي، بدون معرفة العدد الكلي لمعطيات العينة. بالتالي إذا كان $4/16$ من الرميات يُنتج من دون كتابة، و $7/16$ من الرميات يُنتج كتابة واحدة، و $5/16$ من الرميات يُنتج كتابتين، فإن العدد الوسطي لظهور الكتابة في الرمية الواحدة سيكون 1.06 بغض النظر عن العدد الكلي للرميات أكان 16 أو 1000 أو حتى 10000.

تُستخدم طريقة التكرار النسبي هذه في حساب العدد الوسطي للكتابة في الرمية الواحدة لقطعتي النقود التي نتوقعها على المدى الطويل (أي إذا كررنا عملية الرمي عدد كبير جداً من المرات). وسوف نشير إلى هذا العدد الوسطي على أنه المتوسط للمتحول العشوائي X mean of the random variable (أو القيمة المتوقعة expected value $E(X)$، أو التوقع الرياضي mathematical expectation للمتحول العشوائي)، ونرمز له بالرمز μ_X.

لنرجع إلى مثال رمي قطعتين من النقود المتزنة مرة واحدة، فضاء العينة هو:

$$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

ينتج من ذلك أن:

$$P(X=0)=1/4,\quad P(X=1)=1/2,\quad P(X=2)=1/4$$

تمثل هذه الاحتمالات التكرار النسبي للأحداث الموافقة لها على المدى الطويل. لذلك:

$$\mu_X=E(X)=0.(\frac{1}{4})+1.(\frac{1}{2})+2.(\frac{1}{4})=1$$

تعني هذه النتيجة بأنه عندما يتم رمي قطعتين من النقود المتزنة عدد كبير وكبير جداً من المرات سنحصل، بشكل وسطي، على كتابة H واحدة بالرمية الواحدة.

تعريف 13: التوقع الرياضي أو (المتوسط) لمتحول عشوائي متقطع X تابعه الاحتمالي $f_X(x)$ هو المقدار:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x} x.\, f_X(x)$$

والتوقع الرياضي لمتحول عشوائي مستمر X تابع كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ هو المقدار:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f_X(x)\, dx$$

مثال 22: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. ليكن X المتحول العشوائي الذي يعطي عدد المرات التي تظهر فيها الكتابة H. احسب التوقع الرياضي للمتحول X.

الحل:

وجدنا سابقاً أن $X(\Omega) = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ وأن جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

بالتالي فإن التوقع الرياضي:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x=0}^{3} x.\, f_X(x) = 0.(\frac{1}{8}) + 1.(\frac{3}{8}) + 2.(\frac{3}{8}) + 3.(\frac{1}{8}) = \frac{3}{2}$$

مثال 23: يطلق رامٍ طلقتين على هدف. احتمال إصابته الهدف بالطلقة الأولى (الحدث A) 6/10، واحتمال إصابته الهدف بالطلقة الثانية (الحدث B) 9/10. إذا أصاب الرامي الهدف بالطلقة الأولى يربح 8 نقاط وإن لم يصبها يخسر 6 نقاط، وإذا أصاب الرامي الهدف بالطلقة الثانية يربح 3 نقاط وإن لم يصبها يخسر 8 نقاط. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد النقاط التي ينالها الرامي في نهاية المباراة، ما هو توقعه الرياضي.

الحل:

إذا أصاب الرامي الهدف في الرميتين نال 11 = 3 + 8 نقطة.

وإن لم يصيب في الرمية الأولى، لكن أصاب في الرمية الثانية نال: 3− = 3 + 6− نقطة.

وإن أصاب في الرمية الأولى، لكنه لم يصيب في الرمية الثانية نال: 0 = 8 − 8 نقطة.

وإن لم يصيب الرامي الهدف في الرميتين نال 14− = 8 − 6− نقطة.

بالتالي فإن قيم المتحول العشوائي هي:

$$X(\Omega) = \{-14,\ -3,\ 0,\ 11\}$$

الحدثان A, B مستقلان، بالتالي لدينا:

$$f_X(-14) = P(X = -14) = P(A' \cap B') = P(A').P(B') = \frac{4}{10}.\frac{1}{10} = \frac{4}{100}$$

$$f_X(-3) = P(X = -3) = P(A' \cap B) = P(A').P(B) = \frac{4}{10}.\frac{9}{10} = \frac{36}{100}$$

$$f_X(0) = P(X = 0) = P(A \cap B') = P(A).P(B') = \frac{6}{10}.\frac{1}{10} = \frac{6}{100}$$

$$f_X(11) = P(X = 11) = P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{6}{10}.\frac{9}{10} = \frac{54}{100}$$

جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	-14	-3	0	11
$P(X = x)$	$\frac{4}{100}$	$\frac{36}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{54}{100}$

بالتالي فإن التوقع الرياضي:

$$E(X) = -14.(\frac{4}{100}) - 3.(\frac{36}{100}) + 0.(\frac{6}{100}) + 11.(\frac{54}{100}) = \frac{430}{100} = 4.3$$

مثال 24: في لعبة يرمي لاعب قطعتي نقود إحداهما متزنة والأخرى غير متزنة. إذا كان احتمال الحصول على الشعار في القطعة غير المتزنة هو $1/4$ واحتمال الحصول على الكتابة هو $3/4$. إذا كانت النتيجة شعارين يربح n ل.س وإذا كانت شعار وكتابة يربح 40 ل.س وخلاف ذلك يخسر 100 ل.س. المطلوب: احسب توقع ربح هذا اللاعب بدلالة n وبين متى تكون اللعبة رابحة بالنسبة للاعب.

الحل:

ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مقدار ربح اللاعب: إذا كانت النتيجة TT فإنه يربح n ل.س، وإذا كانت TH أو HT فإنه يربح 40 ل.س، أما إذا كانت النتيجة HH فإنه يخسر 100 ل.س.

بالتالي فإن قيم المتحول العشوائي هي: $X(\Omega) = \{-100,\ 40,\ n\}$

$$P(X = n) = \frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = -100) = \frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P\ \ X\ = \ 40\ = P(X = 40) = \frac{1}{2}$$

جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	-100	40	n
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

بالتالي فإن التوقع الرياضي:

$$E(X)=-100.(\frac{3}{8})+40.(\frac{1}{2})+n.(\frac{1}{8})=\frac{n-140}{8}$$

من أجل $n=140$ اللعبة لا رابحة ولا خاسرة ($E(X)=0$)، أما من أجل $n>140$ فإن اللعبة رابحة ($E(X)>0$)، وأخيراً من أجل $n<140$ فإن اللعبة خاسرة ($E(X)<0$).

مثال 25: ليكن X متحول عشوائي يشير إلى فترة حياة جهاز الكتروني مقدرا بالساعات. تابع الكثافة الاحتمالي هو التالي:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{20000}{x^3}, & x>100\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

أوجد فترة الحياة المتوقعة لهذا الجهاز الالكتروني.

الحل:

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x.f_X(x)dx=\int_{100}^{\infty}x.\frac{20000}{x^3}dx=200$$

1.5.خواص التوقع الرياضي properties of mathematical expectation:

ليكن لدينا المتحول العشوائي X، وليكن a,b أعداد حقيقية.

مبرهنة 1: ليكن لدينا متحول عشوائي X، فإنه لدينا العلاقة التالية:

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

نتيجة 1: بوضع $a=0$ في العلاقة السابقة ينتج، $E(b)=b$.

نتيجة 2: بوضع $b=0$ في العلاقة السابقة ينتج، $E(aX)=aE(X)$.

مبرهنة 2: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي $f_X(x)$ ، وليكن التابع $g(x)$. التوقع الرياضي للتابع $g(X)$ في الحالة المتقطعة هو المقدار:

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(x).\, f_X(x)$$

وفي الحالة المستمرة هو المقدار:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x).\, f_X(x)\,dx$$

مثال 26: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

أوجد التوقع الرياضي للتابع $g(X)$ في الحالتين:

$g(X) = 2X - 1$ و $g(X) = X^2$

الحل:

وجدنا سابقاً أن $E(X) = 3/2$ ، بالتالي فإن:

$$E(2X - 1) = 2(3/2) - 1 = 2$$

أما من أجل $g(X) = X^2$ فإن التوقع الرياضي للتابع X^2 هو:

$$E[X^2] = \sum_{x} x^2.\, f_X(x)$$

$$= 0^2(\frac{1}{8}) + 1^2(\frac{3}{8}) + 2^2(\frac{3}{8}) + 3^2(\frac{1}{8}) = \frac{24}{8} = 3$$

مثال 27: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد $E[X^2]$

الحل:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2.\, f_X(x)\,dx=\int_0^1 x^2.(x+\frac{1}{2})\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}\right]_0^1=\frac{5}{12}$$

تعريف 14: ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً، تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما هو $f_{X,Y}(x,y)$ ، عندئذ التوقع الرياضي للمتحول العشوائي $g(X,Y)$ ، من أجل الحالة المتقطعة هو :

$$E[g(X,Y)]=\sum_x\sum_y g(x,y).\, f_{X,Y}(x,y)$$

ومن أجل الحالة المستمرة:

$$E[g(X,Y)]=\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y).\, f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

مثال 28: ليكن لدينا X,Y متحولين عشوائيين لهما تابع التوزيع الاحتمالي المشترك كما هو مبين في الجدول التالي:

$X \setminus Y$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	المجموع
$X=0$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{14}$
$X=1$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{15}{28}$
$X=2$	$\frac{3}{28}$	0	0	$\frac{3}{28}$
المجموع	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$	1

أوجد التوقع الرياضي للتابع $g(X,Y)=XY$.

الحل:

$$E[XY]=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xy.\, f_{X,Y}(x,y)=(1)(1)\, f_{X,Y}(1,1)=\frac{3}{14}$$

مبرهنة 2: ليكن X,Y متحولين عشوائيين مستقلين حيث التوقع الرياضي لكل منهما موجود، عندئذ لدينا العلاقة التالية:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

مثال 29: هل المتحولين العشوائيين X, Y في المثال السابق مستقلين؟

الحل:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x=0}^{2} x.f_X(x) = 0(\frac{5}{14}) + 1(\frac{15}{28}) + 2(\frac{3}{28}) = \frac{3}{4}$$

$$E(Y) = \mu_Y = \sum_{y=0}^{2} y.f_Y(y) = 0(\frac{15}{28}) + 1(\frac{3}{7}) + 2(\frac{1}{28}) = \frac{1}{2}$$

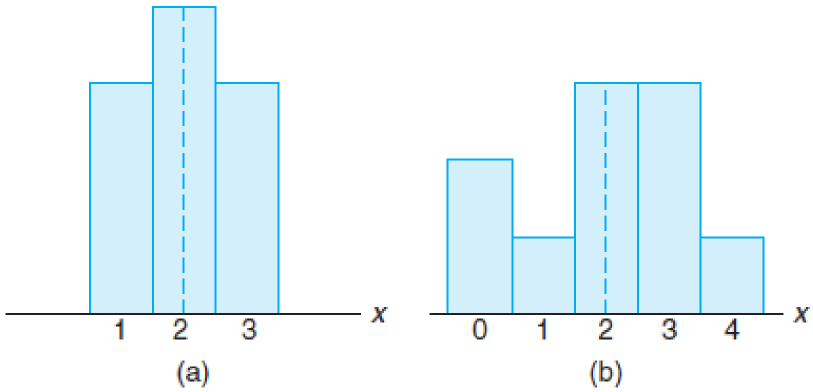
من الواضح أن:

$$\frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \neq \frac{3}{14}$$

أي أن: $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ والمتحولين العشوائيين X, Y مرتبطين.

6. تشتت متحول عشوائي variance of a random variable:

إن التوقع الرياضي لمتحول عشوائي X له أهمية خاصة في الإحصاء لأنه يصف أين يتركز التوزيع الاحتمالي، لكنه لا يعطي توصيفاً كافياً عن شكل التوزيع. بالتالي نحن بحاجة إلى توصيف كيفية التغيير في التوزيع، يبين الشكل التالي المدرج التكراري لمتحولين عشوائيين متقطعين لهما نفس التوقع الرياضي (المتوسط)، $\mu = 2$ ، ولكنهما يختلفان إلى حد كبير في تشتت العناصر حول هذا المتوسط.



تعريف 13: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعة الاحتمالي $f_X(x)$ وتوقعه الرياضي μ_X ، نعرف تشتت المتحول العشوائي X ، ونرمز له بالرمز $Var(X)$ أو σ_X^2 ، في الحالة المتقطعة، المقدار:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X-\mu_X)^2] = \sum_x (x-\mu_X)^2 . f_X(x)$$

وفي الحالة المستمرة، المقدار:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 . f_X(x)\,dx$$

نسمي المقدار σ_X بالانحراف المعياري للمتحول العشوائي X .

مثال 30: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. جدول التوزيع الاحتمالي هو التالي:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

أوجد تشتت المتحول X .

الحل:

وجدنا سابقاً أن $\mu_X = 3/2$ ، بالتالي:

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \sum_{x=0}^{3}(x-\frac{3}{2})^2 . f_X(x)$$

$$= (0-\frac{3}{2})^2.(\frac{1}{8}) + (1-\frac{3}{2})^2.(\frac{3}{8}) + (2-\frac{3}{2})^2.(\frac{3}{8}) + (3-\frac{3}{2})^2.(\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$$

مثال 31: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد تشتت المتحول X .

الحل:

علينا أولاً إيجاد μ_X

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x . f_X(x)\,dx = \int_0^1 x.(x+\frac{1}{2})\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

بالتالي فإن:

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\frac{7}{12})^2.(x+\frac{1}{2})\,dx = \frac{11}{144}$$

مبرهنة 3: تشتت المتحول العشوائي X هو:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 .$$

مثال 32: لنأخذ تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، وجدنا أن $E(X) = 3/2$ وأن $E(X^2) = 3$. بالتالي فإن:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = 3 - (\frac{3}{2})^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من التعريف مباشرة.

1.6. خواص التشتت variance properties:

ليكن لدينا المتحول العشوائي X ، وليكن a, b أعداد حقيقية، فإنه لدينا الخواص التالية:

- $Var(a)=0$
- $Var(X \pm b)=Var(X)$
- $Var(aX)=a^2 Var(X)$
- $Var(aX \pm b)=a^2 Var(X)$

مبرهنة 4: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي $f_X(x)$ ، تشتت المتحول العشوائي $g(X)$ في الحالة المتقطعة هو:

$$\sigma_{g(X)}^2 = E\{[g(X)-\mu_{g(X)}]^2\} = \sum_x [g(x)-\mu_{g(X)}]^2 . f_X(x)$$

وفي الحالة المستمرة:

$$\sigma_X^2 = E\{[g(X)-\mu_{g(X)}]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x)-\mu_{g(X)}]^2 . f_X(x)\,dx$$

مثال 33: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة ثلاث مرات متتالية. وجدنا أن تشتت المتحول العشوائي X يساوي 3/4. أوجد التشتت للتابع: $g(X)=2X-1$.

الحل:

$$Var(2X-1)=2^2 Var(X)=4(3/4)=3$$

2.6.التغاير covariance:

تعريف 14: ليكن X,Y متحولين عشوائيين تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما $f_{X,Y}(x,y)$. نعرف تغاير covariance المتحولين X,Y في الحالة المتقطعة بـــ:

$$\sigma_{X,Y} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y) . f_{X,Y}(x,y)$$

وفي الحالة المستمرة، المقدار:

$$\sigma_{X,Y} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) . f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

مبرهنة 5: تغاير متحولين عشوائيين X,Y لهما التوقعان الرياضيان μ_X و μ_Y على الترتيب، تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma_{X,Y} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

نتيجة 2: ليكن X, Y متحولين عشوائيين مستقلين، بالتالي لدينا:

$$\sigma_{X,Y} = 0$$

ملاحظة 4: إذا كان $\sigma_{X,Y} = 0$ فليس بالضرورة أن يكون X, Y مستقلان كما يبينه المثال التالي:

مثال 34: ليكن لدينا متحول عشوائي X تابعه الاحتمالي:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

وليكن $Y = X^2$. عندئذ:

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x.\, f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x(\frac{1}{2})\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2.\, f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2(\frac{1}{2})\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$E(XY) = E(X^3) = \int_{-1}^{1} x^2.\, f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^3(\frac{1}{2})\, dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_{-1}^{1} = 0$$

بالتالي:

$$\sigma_{X,Y} = E(XY) - \mu_X \mu_Y = 0 - 0(1/3) = 0$$

لكن التابع Y هو تابع لـــ X، بالتالي X, Y غير مستقلان (مرتبطان).

مثال 35: X, Y متحولين عشوائيين لهما تابع التوزيع الاحتمالي المشترك المبين في الجدول التالي (المثال 14):

$X \backslash Y$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	المجموع
$X=0$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{14}$
$X=1$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{15}{28}$
$X=2$	$\frac{3}{28}$	0	0	$\frac{3}{28}$
المجموع	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$	1

أوجد تغاير المتحولين العشوائيين X, Y .

الحل:

وجدنا سابقاً أن:

$E(XY)=3/14$ و $\mu_X=3/4$ و $\mu_Y=1/2$

بالتالي فإن:

$$\sigma_{X,Y}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=\frac{3}{14}-\frac{3}{4}.\frac{1}{2}=-\frac{9}{56}$$

مثال 36: ليكن المتحولين العشوائيين المستمرين X, Y ، حيث تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+\frac{3}{2}y^2 & 0\le x,y\le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد تغاير المتحولين العشوائيين X, Y

الحل:

وجدنا سابقاً أن تابعي التوزيع الاحتماليين الهامشيين لكل من X و Y هما:

$$f_X(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0\le x\le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}, & 0\le y\le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\mu_X=\int_{-\infty}^{\infty} x.\,f_X(x)\,dx=\int_0^1 x.(x+\frac{1}{2})\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_0^1=\frac{7}{12}$$

$$\mu_Y=\int_{-\infty}^{\infty} y.\,f_Y(y)\,dy=\int_0^1 y.(\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2})\,dy=\left[\frac{3y^4}{8}+\frac{y^2}{4}\right]_0^1=\frac{5}{8}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+\frac{3}{2}y^2)\,dxdy=\frac{17}{48}$$

بالتالي:

$$\sigma_{X,Y}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=\frac{17}{48}-\frac{7}{12}.\frac{5}{8}=-\frac{1}{96}$$

مثال 37: النسبة X للذكور والنسبة Y للإناث الذين يشاركون في الماراتون ويكملوا السباق حتى النهاية، وحيث تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما:

$$\mathrm{f}_{\mathrm{X,Y}}(\mathrm{x,y})=\begin{cases}8xy, & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

أوجد تغاير المتحولين العشوائيين X,Y

الحل:

أولاً علينا إيجاد توابع التوزيع الاحتمالية الهامشية:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^x 8xy\,dy=8x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x=4x^3$$

$$f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_y^1 8xy\,dx=8y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^1=4y(1-y^2)$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y(1-y^2), & 0\le y\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

ثانياً، من توابع التوزيع الاحتمالية الهامشية نحسب التوقع الرياضي

$$\mu_X=\int_{-\infty}^{\infty} x.\,f_X(x)\,dx=\int_0^1 4x^4\,dx=\left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{5}$$

$$\mu_Y=\int_{-\infty}^{\infty} y.\,f_Y(y)\,dy=\int_0^1 4y^2(1-y^2)\,dy=4\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\frac{8}{15}$$

ثالثاً، من تابع التوزيع الاحتمالي المشترك نحسب $E(XY)$

$$E(XY)=\int_0^1\int_y^1 8x^2y^2\,dxdy=\frac{4}{9}$$

بالتالي:

$$\sigma_{X,Y}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=\frac{4}{9}-\frac{4}{5}.\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$$

لا يوفر التغاير بين متحولين عشوائيين معلومات فيما يتعلق بطبيعة العلاقة بين هذين المتحولين، حيث لا تُشير طويلة magnitude التغاير إلى أي شيء بخصوص هذه العلاقة، لطالما أن التغاير ليست بدون واحدة scale-free. فطويلتها تعتمد على الواحدة المستخدمة في قياس كل من X و Y. لذلك سنعرف نسخة بدون واحدة من التغاير ندعوها معامل الترابط.

3.6.معامل الترابط correlation coefficient:

تعريف 15: ليكن X, Y متحولين عشوائيين لهما التغاير $\sigma_{X,Y}$ والتوقعان الرياضيان μ_X و μ_Y على الترتيب. نعرف معامل الترابط correlation coefficient للمتحولين العشوائيين X و Y، ونرمز له بالرمز $\rho_{X,Y}$:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

ملاحظة 5: يعبّر معامل الترابط $\rho_{X,Y}$ على مدى الترابط بين المتحولين العشوائيين X و Y وقيمته تحقق العلاقة التالية:

$$-1 \le \rho_{X,Y} \le 1$$

يأخذ معامل الترابط القيمة 0 ($\rho_{X,Y} = 0$) عندما يكون $\sigma_{X,Y}$ أي عندما يكون المتحولين العشوائيين X و Y مستقلين (لا يوجد أي علاقة ترابط بينهما). ولكن عندما يكون بين المتحولين تماماً علاقة ارتباط خطي $Y \equiv a + bX$، فإن معامل الترابط يأخذ القيمة 1 ($\rho_{X,Y} = 1$) عندما يكون $b > 0$ ويأخذ القيمة -1 ($\rho_{X,Y} = -1$) عندما يكون $b < 0$.

مثال 38: ليكن X, Y متحولين عشوائيين لهما تابع التوزيع الاحتمالي المشترك المبين في المثال 34 السابق. أوجد معامل الترابط بين المتحولين العشوائيين X و Y.

الحل:

وجدنا سابقاً أن:

$\mu_X = 3/4$ و $\mu_Y = 1/2$ و $\sigma_{X,Y} = -9/56$

ولنحسب الآن المقادير التالية:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2.f_X(x) = 0^2(\frac{5}{14}) + 1^2(\frac{15}{28}) + 2^2(\frac{3}{28}) = \frac{27}{28}$$

$$E(Y^2) = \sum_{y=0}^{2} y^2.f_Y(y) = 0^2(\frac{15}{28}) + 1^2(\frac{3}{7}) + 2^2(\frac{1}{28}) = \frac{4}{7}$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{27}{28} - (\frac{3}{4})^2 = \frac{45}{112}$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{4}{7} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{28}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \frac{-9/56}{\sqrt{45/112}\sqrt{9/28}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

مثال 39: ليكن المتحولين العشوائيين المستمرين X, Y، حيث تابع التوزيع الاحتمالي المشترك لهما المبين في المثال 36. أوجد معامل الترابط بين المتحولين العشوائيين X و Y.

الحل:

وجدنا سابقاً أن:

$$\mu_X = \frac{7}{12} \text{ و } \mu_Y = \frac{5}{8} \text{ و } \sigma_{X,Y} = -\frac{1}{96} \text{ و } E(X^2) = \frac{5}{12} \text{ و } \sigma_X^2 = \frac{11}{144}$$

ولنحسب الآن المقادير التالية:

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 . f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2 .(\frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2})\,dy = \left[\frac{3y^5}{10} + \frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{7}{15}$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{7}{15} - (\frac{5}{8})^2 = \frac{73}{960}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \frac{-1/96}{\sqrt{11/144}\sqrt{73/960}} = \frac{-\sqrt{960}}{8\sqrt{803}}$$

مبرهنة 6: ليكن المتحولين العشوائيين X, Y وليكن a, b, c أعداد حقيقية، فإنه لدينا العلاقة التالية:

$$Var(aX + bY + c) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\sigma_{X,Y}$$

نتيجة 3: ليكن X, Y متحولين عشوائيين مستقلين و a, b عددان حقيقيان، بالتالي:

$$Var(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$$

نتيجة 4: وبشكل عام ليكن لدينا المتحولات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والأعداد الحقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_n$، بالتالي:

$$\begin{aligned} &Var\left(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n\right) = \\ &\quad = Var\left(a_1X_1\right) + Var\left(a_2X_2\right) + \ldots + Var\left(a_nX_n\right) \\ &\quad = a_1^2 Var(X_1) + a_2^2 Var(X_2) + \ldots + a_n^2 Var(X_n) \end{aligned}$$

مثال 40: ليكن المتحولين العشوائيين X, Y، بحيث $Var(X) = 2$ و $Var(Y) = 4$ و $\sigma_{X,Y} = -2$.

أوجد $Var(Z)$، حيث $Z = 3X - 4Y + 8$.

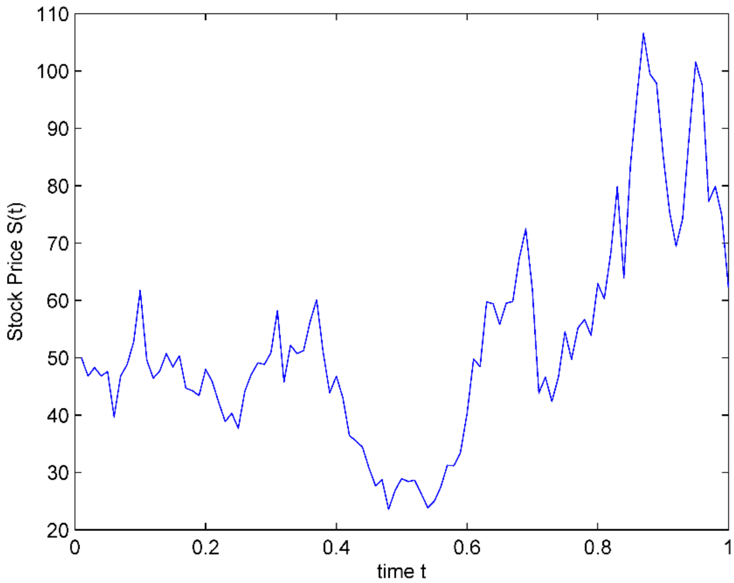
الحل:

$$Var(Z) = Var(3X - 4Y + 8) = 3^2 Var(X) + 4^2 Var(Y) + 2(3)(-4)\sigma_{X,Y}$$

$$Var(Z) = 3^2(2) + 4^2(4) + 2(3)(-4)(-2) = 130$$

7. السيرورة العشوائية random process:

في الكثير من تطبيقات الحياة العملية، نهتم بمراقبة قيم متحول عشوائي عبر فترة من الزمن. على سبيل المثال مراقبة سعر السهم $S(t)$ لشركة ما خلال الأشهر القليلة المقبلة، كما يبينه الشكل التالي:



من الملاحظ أنه من أجل قيمة محددة ل $t_1 \in [0,\infty[$، فإن $S(t_1)$ هو متحول عشوائي له تابع كثافة احتمالي، ومن أجل قيمة أخرى $t_2 \in [0,\infty[$، فإن $S(t_2)$ هو متحول عشوائي آخر ومن الممكن أن يكون له تابع كثافة احتمالي آخر. ويمكن القول بأن السيرورة العشوائية $S(t)$ تتألف من عدد غير قابل للعد من المتحولات العشوائية.

عندما نعتبر قيم التابع $S(t)$ من أجل قيم الزمن $t \in [0,\infty[$، نقول عنها عن $S(t)$ أنه سيرورة عشوائية random process أو stochastic process، ويعبر عنه كما يلي: $\{S(t), t \in [0,\infty[\}$. هذا ويمكن القول بأن السيرورة العشوائية هي تابع عشوائي للزمن. وبما أن الزمن t هو عدد حقيقي بالتالي فإن السيرورة العشوائية مستمرة الزمن continuous-time random process.

من الأمثلة المألوفة والشائعة عن السيرورات العشوائية بالإضافة إلى أسواق الأسهم المالية: تبدلات أسعار الصرف، والإشارات مثل الكلام، الصوت، والصورة، والبيانات الطبية كمخطط ورسومات التخطيط القلبي، وكذلك ضغط الدم، وتغيرات درجات الحرارة في الجو أو في جسم الإنسان أو الكائن الحي خلال فترة من الزمن. وتستخدم السيرورات العشوائية في مجال هندسة الاتصالات في دراسة الضجيج الذي يظهر في الدارات الإلكترونية.

ليكن أيضاً على سبيل المثال $N(t)$ عدد الزبائن التي تراجع بنك ما من الساعة $t = 9$ صباحاً وحتى الرابعة بعد الظهر $t = 16$، أي أن t متحول حقيقي $t \in [9,16]$. من الواضح أن $N(t) \in \{0,1,2,\ldots\}$ من أجل

أي قيمة ل $t \in [9,16]$، كما أنه من الواضح أيضاً أنه من أجل أي قيمة t_1 فإن $N(t_1)$ هو متحول عشوائي متقطع. بالتالي يمكن القول على أن $N(t)$ هي سيرورة عشوائية متقطعة القيمة، وفي نفس الوقت سيرورة عشوائية مستمرة الزمن.

بالمقابل يمكن الحصول على سيرورة عشوائية متقطعة الزمن discrete–time من الشكل $\{S(t), t \in J\}$، حيث $J = \{t_1, t_2, \ldots\}$. وعادة نعرف $X(t_n) = X(n)$ أو $X(t_n) = X_n$، وذلك من أجل $n = 1, 2, \ldots$. بالتالي فإن السيرورة عشوائية متقطعة الزمن هي سلسلة sequence من المتحولات العشوائية، والتي نشير إليها أحياناً بالسلاسل العشوائية random sequences:

$\{X_n,\ n \in N\}$ or $\{X_n,\ n \in Z\}$

من أشهر وأهم السلاسل العشوائية هي سلاسل ماركوف Markov، والتي يطلق عليها السلاسل عديمة الذاكرة، فهي تتكهن بالمستقبل انطلاقاً من الحاضر ولا تحتاج إلى معرفة الماضي. بمعنى آخر نقول عن السلسلة $\{X_n,\ n \in N\}$ أنها سلسلة ماركوف، إذا تحقق ما يلي:

$$P(X_{n+1} = x \mid X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_n) = P(X_{n+1} = x \mid X_n)$$

مثال 41: لتكن السيرورة العشوائية $X(t)$ المعرفة كما يلي:

$$\{X(t) = A + Bt,\ t \in [0, \infty[\}$$

حيث A, B متحولان طبيعيان مستقلان بمتوسط 1 وانحراف معياري 1، أي أن:

$$f(x) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}, \quad -\infty < x < \infty \right.$$

المطلوب:

a) عرف المتحول العشوائي $Y = X(1)$. أوجد تابع الكثافة الاحتمالي له.

b) ليكن $Z = X(2)$، أوجد $E(YZ)$.

الحل:

a) لدينا: $Y = X(1) = A+$، وبما أن A, B مستقلان ويخضعان للتوزيع الطبيعي، بالتالي فالمتحول $Y = A + B$ هو طبيعي أيضاً:

$$E(Y) = E(A) + E(B) = 1 + 1 = 2$$

$$Var(Y) = Var(A+B) = Var(A) + Var(B) = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$f_Y(y) = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}(x-2)^2}, \quad -\infty < y < \infty \right.$$

$$E(YZ) = E[(A+B)(A+2B)] = E(A^2 + \ 3AB \ + \ 2B^2)$$
$$= E(A^2) + 3E(AB) + 2E(B^2)$$

لكن لدينا $Var(A) = E(A^2) - E^2(A)$، بالتالي: $E(A^2) = E(B^2) = 2$، كما أن $E(AB) = E(A)E(B)$. مما سبق ينتج أن:

$$E(YZ) = 2 + 3(1) + 2(2) = 9$$

تمارين

1. خمس بطاقات تحمل الأرقام $1, 2, 3, 4, 5$ نسحب ثلاث بطاقات منها بشكل عشوائي ومن دون إعادة. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع الأرقام المسحوبة، المطلوب كتابة جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول X.

2. ليكن X متحول عشوائي تابع الكثافة الاحتمالي له معرف بالعلاقة:

$$f_X(x)=\begin{cases} x & 0\le x<c \\ 2-x & c\le x<2 \end{cases}$$

والمطلوب:

a) عين قيمة الثابت c.

b) أوجد تابع التوزيع التراكمي $F(X)$.

c) احسب $P(X>1/2)$.

d) احسب التوقع الرياضي والتشتت للمتحول X.

3. ليكن لدينا التابع $f_{X,Y}(x,y)$ التالي:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x,y\le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

a) تأكد من أن $f_{X,Y}(x,y)$ هو تابع كثافة احتمالي مشترك للمتحولين العشوائيين المشتركين X,Y

b) أوجد الكثافة الهامشية لكل من X و Y.

c) احسب $P(0<X<0.5, Y>0)$.

4. ليكن لدينا تابع كثافة احتمالي مشترك للمتحولين العشوائيين المشتركين X,Y:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 2e^{-x-2y} & 0<x,y<\infty \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

أوجد قيمة كل من الاحتمالات التالية:

$$P(X>1, Y<1),\quad P(X<Y),\quad P(X<a)$$

5. ليكن لدينا تابع كثافة احتمالي مشترك للمتحولين العشوائيين المشتركين X, Y :

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}10xy^2 & 0<x<y<1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

a) أوجد الكثافة الهامشية لكل من X و Y والكثافة الشرطية $P(Y \mid X)$.

b) احسب الاحتمال $P(Y>1/2, X=1/4)$.

6. يحوي صندوق أربع بطاقات تحمل الأرقام 1, 2, 3, 4. نسحب عشوائياً من الصندوق بطاقتين ومن دون إعادة. ليكن X يدل على مجموع الرقمين و Y على اكبر الرقمين المسحوبين. المطلوب:

a) كتابة جدول التوزيع الاحتمالي المشترك لــ X, Y.

b) إيجاد عامل الارتباط $\rho_{X,Y}$ وبين فيما إذا كان المتحولان مستقلان أم لا.

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة واحدة**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(80) درجة**

1. تابع التوزيع التراكمي $F_X(x)$ لمتحول عشوائي X له تابع التوزيع الاحتمالي $f_X(x)$ هو بالتعريف
   a) $F_X(x) = P(X \le x)$
   b) $F_X(x) = P(X \ge x)$
   c) $F_X(x) = P(X = x)$
   d) لا شيء مما سبق

2. التوقع الرياضي $E(X) = \mu_X$ للمتحول العشوائي X الدال على العدد الظاهر في تجربة إلقاء حجر النرد (6 أوجه) مرة واحدة هو
   a) 21
   b) 1/6
   c) 3.5
   d) 1/8

3. تشتت $Var(X) = \sigma_X^2$ للمتحول العشوائي X الدال على العدد الظاهر في تجربة إلقاء حجر النرد (6 أوجه) مرة واحدة هو
   a) 91/12
   b) 35/6
   c) 91/6
   d) 35/12

خمس بطاقات تحمل الأرقام 1,2,3,4,5 نسحب ثلاث بطاقات منها بشكل عشوائي (من دون إعادة) وليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة (معطيات الأسئلة 4, 5, 6)

4. مجموعة قيم المتحول العشوائي هي
   a) $X(\Omega)=\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
   b) $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
   c) $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
   d) $X(\Omega) = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

5. الاحتمال $P(X=6)$ هو

a) $2/7$

b) $1/7$

c) $1/5$

d) $1/10$

6. الاحتمال $P(X \le 8)$ هو

a) $3/5$

b) $1/10$

c) $2/5$

d) $1/5$

7. المتحول العشوائي X بحيث $\mu_X = 1$ و $\sigma_X^2 = 4$، المتحول العشوائي $Y = 2-3X$، بالتالي:

a) $\mu_Y = -1,\ \sigma_Y = 6$

b) $\mu_Y = -3,\ \sigma_Y = 6$

c) $\mu_Y = -1,\ \sigma_Y = 36$

d) $\mu_Y = -3,\ \sigma_Y = 12$

8. المتحولان العشوائيان X, Y بحيث $\mu_X = 10,\ \mu_Y = 15$ و $\sigma_X^2 = 9,\ \sigma_Y^2 = 16$، المتحول العشوائي $Z = X - Y$، بالتالي:

a) $\mu_Z = 5,\ \sigma_Z = 5$

b) $\mu_Z = -5,\ \sigma_Z = 25$

c) $\mu_Z = -5,\ \sigma_Z = 5$

d) $\mu_Z = -5,\ \sigma_Z = 25$

9. المتحولان العشوائيان X,Y بحيث $\mu_X = 1/2,\ \mu_Y = 1/3$ و $E(XY) = 1/8$، تغاير المتحولين العشوائيين X,Y $(\sigma_{X,Y})$ هو

a) $1/24$

b) $-1/24$

c) $7/24$

d) لا شيء مما سبق

10. المتحولان العشوائيان X,Y بحيث $Y = 2X - 1$. معامل الترابط لهما هو

a) 1

b) -1

c) 0

d) $1/2$

11. ليكن المتحول العشوائي المستمر X تابع كثافته الاحتمالي هو التالي (حيث c ثابت موجب):

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & 0 \le x \le 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

قيمة c هي

a) $1/4$

b) $1/2$

c) 1

d) 2

ليكن المتحول العشوائي المستمر X تابع كثافته الاحتمالي هو التالي (معطيات الأسئلة 12, 13, 14, 15):

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

12. التوقع الرياضي $E(X) = \mu_X$ للمتحول X هو:

a) $1/2$

b) $1/3$

c) $2/3$

d) لا شيء ما سبق

13. $E[X^2]$ هو:

a) $1/2$

b) $1/3$

c) $2/3$

d) لا شيء ما سبق

14. التشتت $Var(X)=\sigma_X^2$ للمتحول X هو:

a) $1/2$

b) $1/3$

c) $1/18$

d) لا شيء ما سبق

15. قيمة الاحتمال $P(1/4<X<1/2)$ هي:

a) $3/16$

b) $3/4$

c) $1/4$

d) لا شيء ما سبق

16. المتحولان العشوائيان X,Y، بحيث $Var(X)=2$ و $Var(Y)=3$ و $\sigma_{X,Y}=-2$. $Z=2X-3Y+5$. $Var(Z)$ هو:

a) 35

b) 59

c) 11

d) لا شيء مما سبق

السؤال الثاني: **(20) درجة**

صندوق يحوي 6 بطاقات تحمل الأرقام $1, 2, 3, 4, 5, 6$. نسحب عشوائياً بطاقتين من الصندوق من دون إعادة، نعرف المتحول العشوائي X الذي يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين

a) عين مجموعة قيم المتحول X.

b) أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتحول X.

c) أوجد التوقع الرياضي للمتحول X.

d) أوجد تشتت المتحول X.

الحل:

a) $X(\Omega)=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 2

b)

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 2

c) $$\mu_X = E(X) = \sum_{x=3}^{11} x.\, f_X(x) = 7$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 5

d) $$E(X^2) = \sum_{x=3}^{11} x^2.\, f_X(x) = \frac{805}{15} = \frac{161}{3}$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X) = \frac{161}{3} - 7^2 = \frac{14}{3}$$

توجيه في حال الخطأ: الفقرة 6

السؤال الأول	الإجابة الصحيحة	توجيه في حال الخطأ
1	a	الفقرة 2.3
2	c	الفقرة 5
3	d	الفقرة 6
4	a	الفقرة 2
5	d	الفقرة 2
6	c	الفقرة 2
7	a	الفقرة 5 و6
8	c	الفقرة 5 و6
9	b	الفقرة 6.2
10	a	الفقرة 6.3
11	b	الفقرة 3.2
12	c	الفقرة 5
13	a	الفقرة 4 و5
14	c	الفقرة 6
15	a	الفقرة 3
16	b	الفقرة 6