Résumé Complet sur les Matrices avec Exemples et Illustrations

Issam

Contents

1 Définition générale

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est un tableau rectangulaire de nombres :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2 Types de matrices

Type	Forme générale	Propriétés principales
Carrée	$n \times n$	diagonale, inverse possible si det $\neq 0$
Diagonale	d_i sur diagonale	$A^T = A$, multiplication facile
Identité	1 sur diagonale	$AI = IA = A$
Nulle	0 partout	$0 + A = A$, $0 \cdot A = 0$
Symétrique	$A = A^T$	valeurs propres réelles
Triangulaire	$a_{ij} = 0$ au-dessus ou en dessous	det $= \prod d_i$
Orthogonale	$A^T A = I$	$A^{-1} = A^T$

Exemple graphique d'une matrice 3×3

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

3 Opérations sur les matrices

3.1 Addition

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

3.2 Multiplication

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3 Transpose

$$A^T = (a_{ji})$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4 Déterminant et Inverse

4.1 Cas 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = ad - bc$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$$

4.2 Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

5 Rang d'une matrice

$$\text{rang}(A) = \text{nombre de lignes non nulles après réduction}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{réduction} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{rang} = 2$$

6 Systèmes linéaires

$$Ax = b$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 1, y = 2$$

7 Valeurs propres et vecteurs propres

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

Vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8 Diagonalisation

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \text{vecteurs propres}, \quad D = \text{valeurs propres diagonale}$$

Exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9 Décomposition SVD

$$A = U\Sigma V^T$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{SVD: } U, \Sigma, V^T$$

$$\boxed{\text{A}} \xrightarrow{\text{SVD}} \boxed{\text{U}} \quad \boxed{\Sigma} \quad \boxed{\text{V}^T}$$