

修士論文

Receding-Horizon 制御を用いた  
倒立振子の最適制御問題

澤田 圭介

2000 年 3 月 17 日

奈良先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科 情報システム学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に  
修士(工学) 授与の要件として提出した修士論文である。

澤田 圭介

審査委員： 西谷 紘一 教授  
小笠原 司 教授

# Receding-Horizon 制御を用いた 倒立振子の最適制御問題\*

澤田 圭介

## 内容梗概

通常は倒立振子を振り上げて安定化させる手法として、幾つかの制御則を切り替えて使用するのが一般的である。本研究では、制御則を切り替えずに一つの制御則で振り上げを実現するために、非線形最適フィードバック制御系を構成する。無限時間先までを最適とする一般的な最適制御系を構成するには、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の数値解を有限差分近似法などによって近似的に求める必要がある。しかしこの手法では繰り返し計算が必要で、計算にかなりの時間が必要となり、実時間での最適フィードバック制御は困難である。本研究では、有限時間の最適化を行なう Receding-Horizon 制御問題を、Ohtsuka らが提案する実時間最適化手法により実時間で解き、倒立振子の振り上げ制御に適用する。最適解を連続変形法により求める。Receding-Horizon 制御問題は、有限時間先までを評価する最適フィードバック則を構成する問題であることから、系の漸近安定性は保証されない。しかし収束計算の必要がなく有限回の計算で最適解が得られることから、設計パラメータを適切に選ぶことによって、一つのフィードバック則での振り上げが可能となる。提案手法を用いた数値シミュレーションを行ない、提案した制御手法の有効性を確認した。

## キーワード

倒立振子, Hamilton-Jacobi 偏微分方程式, 粘性解, 有限差分近似法, Receding-Horizon 制御問題, 連続変形法

---

\* 奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報システム学専攻 修士論文, NAIST-IS-MT9851048, 2000 年 3 月 17 日.

# Optimal Control of An Inverted Pendulum by Receding-Horizon Control\*

Keisuke Sawada

## Abstract

In this paper, we treat the problem of swinging up an inverted pendulum by using one feedback law. In general, the stabilization of an inverted pendulum in an up-swing is given by the change of several control laws. To realize the stabilization of an inverted pendulum without changing the control law, we construct a nonlinear optimal feedback system. We must use a numerical solution of the Hamilton-Jacobi partial differential equation by applying the finite differential numerical approximation to construct the optimal control system that is optimized for an infinite horizon. However, this method requires many repetitions of the calculation and a lot of calculation time, and it is difficult to construct the optimal feedback in real time.

In this work, we solve the Receding-Horizon control problem using a real time optimization method proposed by Ohtsuka, and apply the method to the up-swing of an inverted pendulum. To calculate an optimal solution, we use the continuation method. On the Receding-Horizon control problem, the asymptotical stability of the system is not guaranteed since the optimal feedback law is constructed by evaluating the finite terminal time. The effectiveness of the proposed method is confirmed through some simulations.

---

\* Master's Thesis, Department of Information Systems, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-MT9851048, March 17, 2000.

**Keywords:**

Inverted Pendulum, Hamilton-Jacobi partial differential equation, Viscosity Solution, Finite difference numerical approximation, Receding-Horizon Control, Continuation Method

# 目次

1. はじめに	1
2. 倒立振子系のモデリング	3
2.1 非ホロノミック拘束	3
2.2 状態空間モデルの導出	4
3. 非線形最適制御問題	7
3.1 非線形最適レギュレータ問題	8
3.1.1 Hamilton-Jacobi 偏微分方程式	9
3.1.2 粘性解	12
3.1.3 有限差分近似法	13
3.2 Receding-Horizon 制御問題	17
3.2.1 実時間最適化法	19
3.2.2 連続変形法	20
4. 数値シミュレーション	25
4.1 最適制御則の構成	25
4.2 シミュレーション結果	27
4.3 結果と考察	43
5. おわりに	44
謝辞	45
参考文献	46
付録	47
A. 連続変形法の高速度化手法	47
A.1 準ニュートン法	47
A.2 準ニュートン法による連続変形法の高速度化	47

## 目 次

1	倒立振り子系	4
2	倒立振り子の最適軌道:初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$	31
3	最適制御入力 $u^*$ :初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$	31
4	原点までの距離 ( $x_1$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$	32
5	台車速度 ( $x_2$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$	32
6	振り子角度 ( $x_3$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$	33
7	振り子角速度 ( $x_4$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$	33
8	倒立振り子の最適軌道:初期状態量 $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$	34
9	最適制御入力 $u^*$ :初期状態量 $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$	34
10	原点までの距離 ( $x_1$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$	35
11	台車速度 ( $x_2$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$	35
12	振り子角度 ( $x_3$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$	36
13	振り子角速度 ( $x_4$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$	36
14	倒立振り子の最適軌道:初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$	37
15	最適制御入力 $u^*$ :初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$	37
16	原点までの距離 ( $x_1$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$	38
17	台車速度 ( $x_2$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$	38
18	振り子角度 ( $x_3$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$	39
19	振り子角速度 ( $x_4$ ) の時間推移:初期状態量 $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$	39
20	倒立振り子の最適軌道 (外乱あり):初期状態量 $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$	40
21	最適制御入力 $u^*$ (外乱あり):初期状態量 $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$	40
22	原点までの距離 ( $x_1$ ) と外乱 ( $error$ ) の時間推移 (外乱あり):初期状態量 $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$	41
23	台車速度 ( $x_2$ ) の時間推移 (外乱あり):初期状態量 $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$	41
24	振り子角度 ( $x_3$ ) の時間推移 (外乱あり):初期状態量 $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$	42
25	振り子角速度 ( $x_4$ ) の時間推移 (外乱あり):初期状態量 $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$	42

## 表 目 次

1	倒立振子系パラメータ . . . . .	28
2	シミュレーションパラメータ . . . . .	28
3	初期状態 $x_0$ と各シミュレーション結果 . . . . .	30



## 1. はじめに

本論文では、倒立振子系の振り上げ倒立制御を目的とした実時間最適化手法について提案する。

倒立振子において、振り上げを考慮にいれず振子を倒れないように安定化することのみが目的である場合には、系を線形近似し Riccati 方程式を解くことで容易に最適解が導かれる。しかし平衡点において線形化を行なえば、最適である部分は平衡点近傍に限られてくる。また、振り上げによる安定化を考える場合には、通常いくつかの制御則を切り替えることにより安定化される [1]。そこで制御則を切り替えずに線形近似によらず系を非線形のまま扱う非線形最適制御問題により最適制御入力を求める。最適制御問題の中でも、非線形系を最適軌道で漸近安定化させる手法としては非線形最適レギュレータ問題が挙げられる。この手法では、与えられた評価関数を最小とする最適な入力を Hamilton-Jacobi 偏微分方程式を解いて適用することで最適解は得られる。

さらに振子の振り上げ制御を考える。倒立振子は、振子が真下の状態、すなわち安定平衡点をはさんで最適制御則が不連続となることが予想される。よって Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解もそのような点で微分不可能となると考えられることから、通常の微分方程式の解の概念を拡張した粘性解を用いる。粘性解とは、通常の偏微分方程式の解 (古典解) に加え微分不可能点を含むことを許す解である。Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を用いることで、倒立振子の安定平衡点で不連続となる一つの制御則により、倒立振子の振り上げ・安定化が実現できる。本論文では粘性解を有限差分近似法 [3] により導く手法を示す。

この手法を適用すれば最適解が得られるが、解を求める全ての範囲において繰り返し計算により解を導くため、状態数が多くなると莫大な時間が必要となる。また状態および時間に関する離散間隔の設定によっては計算が失敗する場合がある。

そこで本論文では、Ohtsuka ら [5][6] が提案する実時間最適化手法を用いた Receding-Horizon 制御問題を倒立振子の振り上げ制御問題に適用する。Receding-Horizon 制御問題とは、有限である評価区間を毎時刻評価して最適とするフィードバック制御則を求めるという最適制御問題である。状態が微小変化した際の共状態量の変化を連続変形法により求めることで、最適制御入力を得ることができる。

この手法により設計された最適制御則は，系の漸近安定性を保証しないが，収束計算の必要がなく有限回で最適解が得られるため実時間での最適フィードバック制御が可能となる．

本論文の構成としては，2 章では，倒立振子の状態空間モデルおよびその拘束について述べる．3 章において，非線形最適制御問題について説明し，非線形最適レギュレータ問題，粘性解および有限差分近似法について述べる．そして今回提案する Receding-Horizon 制御問題と実時間最適化手法である連続変形法について述べる．4 章では，倒立振子系に Receding-Horizon 制御を適用して非線形最適制御則を構成し，数値シミュレーションにより本制御の有効性を示す．最終章では結論を述べる．また付録 A に，Receding-Horizon 制御をより高速に実現するために，連続変形法に準ニュートン法を用いたより高速な数値計算手法を添付する．

## 2. 倒立振子系のモデリング

本章では非ホロノミック拘束について簡単に解説する．また非ホロノミックシステムである倒立振子系の概要を示し，状態方程式の導出を行なう．

### 2.1 非ホロノミック拘束

ある一般化座標  $x \in \mathbf{R}^n$  と入力  $u \in \mathbf{R}^m$  で表される非線形システム  $F: \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \quad (1)$$

において， $x$  と  $u$  によって解析的に表される方程式を拘束式とよぶ．

$$h(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \quad (2)$$

拘束式が一般化座標  $x$  と時間  $t$  のみに依存する方程式で表現できるとき，拘束はホロノミックであり，システムはホロノミックシステムと呼ばれる．

また次のように拘束式の中に速度  $\dot{x}$  や加速度  $\ddot{x}$  が存在する場合．

$$h(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0 \quad (3)$$

その拘束は非ホロノミックであり，システムは非ホロノミックシステムとなる．非ホロノミックシステムについては，Brockett の定理 [2] より滑らかな時不変状態フィードバック制御則によって，系の漸近安定化は不可能であることが知られており，拘束式の中に存在する微分項によって二種類に区別される．

- 拘束式内に状態と一階の微分項のみ存在するシステム (三輪移動体など) については，一階の非ホロノミックシステムと呼ばれ，滑らかな時不変の状態フィードバック則では漸近安定化できない．
- 拘束式内にさらに二階微分項が存在するシステム (倒立振子系など) は，二階の非ホロノミックシステムと呼ばれ，滑らかで時不変の状態フィードバック則でも漸近安定にできる場合がある．

次節にて示すが，倒立振り子は二階の非ホロノミックシステムである．そのため振り上げを考慮に入れずに倒立制御だけを倒立振り子系に適用するならば，平衡点での線形近似により系の漸近安定化はできるが，得られる軌道が最適であるとは限らない．そこで振り上げ制御も考慮に入れた大域的に有効な制御則を構築するため，倒立振り子系に非線形最適制御問題を適用する．制御系を構成するにあたり，まず最初にシステムのモデリングを行なう

## 2.2 状態空間モデルの導出

本論文が対象とする非ホロノミックシステムとして倒立振り子系を用いる．レール上の台車にフリーリンクで振子を取り付けられており，この台車を左右に動かし振子を振り上げ原点に倒立させることを目的とするシステムである．図 1 に示

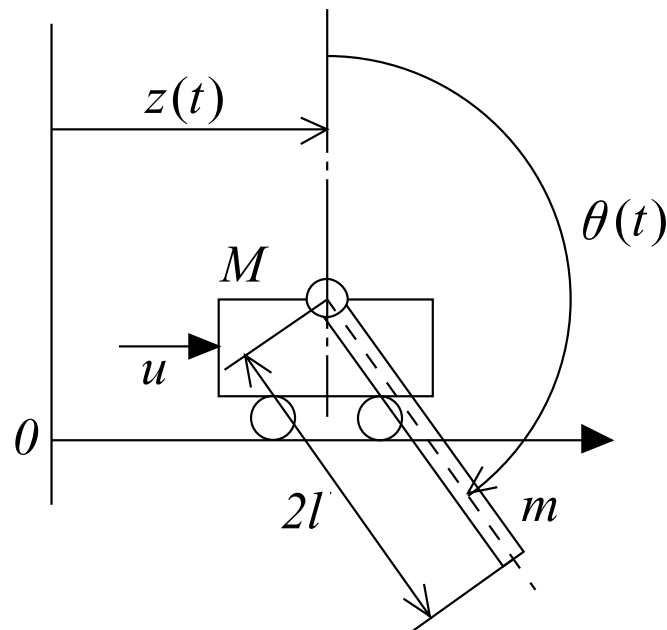


図 1 倒立振り子系

すような長さ  $2l$ ，質量  $m$  の棒状振子を考える．時刻  $t$  における台車の水平座標を  $z(t)$  とし，振子の鉛直上方より時計回りの回転角を  $\theta(t)[\text{rad}]$  とする．また  $J$  は振

子の重心回りの慣性モーメントであり， $M$  は台車質量， $g$  は重力加速度である．導出は後で記述するが，入力  $u$  は加速度とする．まず Lagrange 法を利用して状態空間モデルの導出を行なう．運動エネルギー  $K$  は，

$$K = \frac{m}{2}(\dot{P}_z^2 + \dot{P}_y^2) + \frac{J}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}\dot{z}^2 \quad (4)$$

$$P_z = z + l \sin \theta \quad (5)$$

$$P_y = l \cos \theta \quad (6)$$

であり，位置エネルギー  $V$  は，

$$V = mgl \cos \theta \quad (7)$$

である．この両式を Lagrange の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = f_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8)$$

に代入すると連立 2 階非線形微分方程式が得られる．

$$(M + m)\ddot{z} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = f \quad (9)$$

$$ml\ddot{z} \cos \theta + (J + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \quad (10)$$

拘束式である式 (10) 中に加速度  $\ddot{z}$  や角加速度  $\ddot{\theta}$  が存在するので，系は二階の非ホロノミックシステムである．ここで状態量  $x(t)$  は，

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

とする．問題を簡単化する為，入力  $u$  を  $z$  軸方向への加速度  $\ddot{z}$  とした．

$$u = \ddot{z} \quad (12)$$

以上より倒立振子系における 4 状態 1 入力の状態方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \\ x_4 \\ \frac{mgl \sin x_3 - ml \cos x_3 u}{J + ml^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

振子が真横になった際，状態方程式中において入力が効かなくなる．その為，多くの手法において振り上げ・倒立を行なう二つの制御則が必要となる．次章で述べる非線形最適レギュレータ問題と Receding-Horizon 制御問題の二つの制御手法については，共に制御則を切替える必要がないので，一つの最適制御則により与えられた評価関数を最小にするという意味で最適に振り上げ-安定化ができる．

### 3. 非線形最適制御問題

本章では，倒立振り子系に用いる非線形最適制御問題についてまとめる．最適制御問題とは，適当な評価関数を最小（あるいは最大）とするような制御入力を最適として求める問題である．非ホロノミックシステムに適用する最適制御則設計法として二つの最適制御問題を述べる．以下に，二つの最適制御則設計法とその特徴について示す．

#### 手法 1 非線形最適レギュレータ問題

レギュレータとは，与えられた初期状態から全ての状態変数を平衡点に導くフィードバック制御システムである．与えられた評価関数（規範関数）を無限時間評価することで，評価関数を最小（あるいは最大）とするような解を求め，それを利用することによって最適な制御入力を得ることができる．線形近似系では Riccati 方程式を解くことで最適解を得られるが，その制御則は平衡点近傍でしか有効ではない．そこで線形近似を用いずに非線形のまま系に最適レギュレータを適用する．系を漸近安定とする最適制御則は，Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解を導くことで得られる．しかし倒立振り子では，振子が真下となる状態，すなわち安定平衡点において，最適制御則が不連続となると考えられる．そのため Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解において，ほとんどの点で滑らかであるが一部の点では滑らかではない解が存在することになり，偏微分方程式を解くことができない．そこで，偏微分方程式の解（古典解）を微分不可能点を含むことまで拡張した粘性解 [2] を用い，偏微分項の近似手法である有限差分近似法 [3][4] を適用して Hamilton-Jacobi 偏微分方程式を解くことで最適解を導く．非線形最適レギュレータ制御問題と有限差分近似法を用いた制御則の特徴を以下に示す．

- 無限時間先までを評価し最適化（非線形最適レギュレータ問題）
- 漸近安定性を保証
- オフライン計算

#### 手法 2 Receding-Horizon 制御問題

最適レギュレータ問題においては，無限時間先まで評価しているため多く

の計算時間が必要となる．そこで問題を実時間で解くために，有限時間先までを評価する Receding-Horizon 制御問題を考える．この制御手法は，有限区間を毎時刻に評価することで，有限な評価区間でありながら無限時間先までフィードバック制御が可能な手法である．さらに Receding-Horizon 制御問題へ Ohtsuka ら [5][6] が提案する連続変形法を適用することで，実時間フィードバック則を構築し最適解を導く．Receding-Horizon 制御問題と連続変形法を用いた制御則の特徴を以下に示す．

- 毎時刻において有限時間先まで評価し最適化 (Receding-Horizon 制御問題)
- 漸近安定性は保証されない
- オンライン計算

以下では，まず最初に非線形最適レギュレータ問題により，評価関数を最小としつつ閉ループ系を漸近安定化ような入力を求める手法を述べる．その後に，Receding-Horizon 制御問題により，漸近安定性は保証されないがリアルタイムで最適状態フィードバック制御ができる制御手法について示す．

### 3.1 非線形最適レギュレータ問題

最適レギュレータとは，与えられた評価関数を最小する最適な軌道により，系の漸近安定化が可能な制御問題である．本節では，最適解を求めるための Hamilton-Jacobi 偏微分方程式を導出し，偏微分方程式から得られる解を用いた制御則は最適であり系に対して漸近安定性を保証していることを示す．また倒立振り子系に代表されるような非ホロノミックシステムに対して大域的に有効な制御則を構築するには，Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解に微分不可能点を含む場合があるので，偏微分方程式の解として微分不可能点を含む解も認める粘性解の概念を用いる．粘性解は大域的に唯一であり，最適である．さらに具体的に最適解を求めるために，偏微分項を離散化し近似することで粘性解を計算する手法である有限差分近似法を示す．



次の非線形系に対して非線形最適レギュレータを構成する．

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \quad (14)$$

$x \in \mathbf{R}^n$  は状態， $u \in \mathbf{R}^m$  は入力であり， $F : \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbf{R}^n$  である．また，最終時刻を  $T_f$  として評価関数を

$$J = \varphi(x(t + T_f)) + \int_t^{t+T_f} L(x(t), u(t)) dt \quad (15)$$

とする． $\varphi$  は状態が現在時刻  $t$  より  $T_f$  後の状態からなる終端条件 (目標条件) を表す関数であり， $L$  は  $x, u$  を評価するための項である．式 (15) を最小とするような解を最適解とする．

次より Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解により，評価関数を最小とし系を漸近安定化する最適解が求められることを述べる．

### 3.1.1 Hamilton-Jacobi 偏微分方程式

次の非線形系を考える．

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (16)$$

$$f(0) = 0 \quad (17)$$

ここで  $x \in \mathbf{R}^n$  は状態， $u \in \mathbf{R}^m$  は入力である． $f(x), g(x)$  は共に  $C^1$  級であるとし，平衡点  $x = 0$  において  $f(0) = 0$  が成り立つとする．式 (16) で表されるシステムにおいて，評価区間  $T$  を無限時間として評価関数  $J(x)$  を式 (18) とおき，非線形最適レギュレータを設計する．

$$J(x_0) = \int_0^\infty \{x^T Q x + u^T R u\} dt \quad (18)$$

$$J(x) \geq 0 \quad (19)$$

$$Q \geq 0, R > 0 \quad (20)$$

評価関数を最小とするような入力を最適として解を求める． $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}, R \in \mathbf{R}^{m \times m}$  は設計仕様として与えられる重み行列である．本論文では， $L(x, u)$  を  $u^2$  の関数

としている．この理由としては，最適制御則を導く際に，解析的に計算するためである．

ここで，システムにおいて与えることができる入力を  $U \in \mathbf{R}^m$  として，値関数 (最適コスト関数)  $V(x_0)$  を定義する．

$$V(x_0) = \min_{u^* \in U} J(x_0) \quad (21)$$

$$V(x) > 0, V(0) = 0 \quad (22)$$

式 (18) より，式 (21) を変形する．

$$\begin{aligned} V(x(t_0)) &= \min_{u \in U} \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \\ &= \min_{u \in U} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) dt + \int_{t_1}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \right\} \\ &= \min_{u \in U} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) dt + V(x(t_1)) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

となる． $V(x(t_0))$  を右辺へ移項し，両辺を  $t_1 - t_0$  で割り，値関数  $V$  が時間  $t$  と状態  $x$  の関数であることを考慮して， $t_1 \rightarrow t_0$  とすると

$$\min_{u \in U} \left( \frac{dV}{dx} + x^T Q x + u^T R u \right) = 0 \quad (24)$$

が得られる．式 (16) を式 (24) へ代入し，左辺を  $H(x, \partial V / \partial x, u)$  とする．

$$H(x, \frac{\partial V}{\partial x}, u) = x^T Q x + u^T R u + \frac{\partial V}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \quad (25)$$

$H(x, \partial V / \partial x, u)$  は Hamilton 関数と呼ばれる．最適制御入力  $u^*$  を適用したときの Hamilton 関数を

$$H(x, \frac{\partial V}{\partial x}, u^*) = H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) \quad (26)$$

とする．また式 (24) より

$$H^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}) = 0 \quad (27)$$

となる．

次に， $H$  を入力  $u$  に関して偏微分する．

$$\frac{\partial H}{\partial u} = g^T \frac{\partial V^T}{\partial x} + 2Ru \quad (28)$$

さらに右辺を 0 とおき入力  $u$  にかんして整理する．

$$u^* = -\frac{1}{2}R^{-1}g^T(x)\frac{\partial V^T}{\partial x} \quad (29)$$

式 (29) が得られる． $u^*$  は式 (18) で表された評価関数を最小とするような入力である．これを式 (25) の Hamilton 関数に代入すると

$$H^*\left(x, \frac{\partial V(x)}{\partial x}\right) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) - \frac{1}{4}\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)R^{-1}g(x)^T\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T + x^TQx = 0 \quad (30)$$

式 (30) で表される Hamilton-Jacobi 偏微分方程式となる．式 (22) を満たす Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解  $V(x)$  が存在すれば，式 (28) より最適制御則を求めることができる．

また，式 (30) より解が得られれば，式 (24) より

$$\dot{V} = -x^TQx - u^TRu < 0 \quad (x \neq 0) \quad (31)$$

となる．これより  $V(x)$  はリアプノフ関数となるので，閉ループ系は漸近安定となる．

つまり式 (22) を満たす Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解である  $V(x)$  が得られれば，式 (23) より評価関数を最小とし系を漸近安定へと導く最適制御入力  $u^*$  が求められる．

以上の議論は値関数  $V(x)$  が滑らかであると仮定してきたが，倒立振り子では連続ではあるが滑らかでない解が存在すると考えられる．もしそのような解となった場合に，Hamilton-Jacobi 偏微分方程式を解くことができなくなる．そこで解に微分不可能点が存在する場合でも，微分方程式の解として認める粘性解を用いる．

### 3.1.2 粘性解

通常の非線形最適レギュレータ問題において解かなければならない Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解は，連続で滑らかな解であり問題はない．しかし，倒立振子を対象とする場合に，Hamilton-Jacobi 偏微分方程式に連続であるが滑らかでない解が存在すると考えられるため解を導くことができない．そこで微分不可能点も解として認める粘性解を用いる．粘性解とは，古典解と呼ばれる通常の偏微分方程式の解を含み，連続ではあるが滑らかでない点(微分不可能点)をも偏微分方程式の解として扱う解の拡張概念である．また偏微分方程式の解が粘性劣解であり粘性優解あるとき，その解は粘性解となり，粘性解は大域的に唯一の最適解である．つまり，Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解  $V(x)$  を粘性解として求めていくことで得られる解は，全状態において最適であり唯一の解となる．

ここで値関数  $V(x)$  が Hamilton-Jacobi 偏微分方程式において粘性解である場合を考える．

$$H(x, V(x), \frac{\partial V(x)}{\partial x}) = 0 \quad (32)$$

$Z$  を  $\mathbb{R}^N$  の有界な開集合として， $C(Z)$  は  $Z$  での連続関数の全体とする．粘性劣解とは，式 (41) に関して  $Z$  上の各点  $\hat{x}$  において， $\alpha(x) \in C(Z)$  である試験関数が

$$V(x) - \alpha(x) \leq 0 \quad (33)$$

$$V(\hat{x}) = \alpha(\hat{x}) \quad (34)$$

上式で表された条件，つまり  $\hat{x}$  において  $V(x) - \alpha(x)$  が極大値をとるならば

$$H(\hat{x}, V(\hat{x}), \frac{\partial \alpha(\hat{x})}{\partial \hat{x}}) \leq 0 \quad (35)$$

式 (35) を満たすことを言う．

次に粘性優解とは， $\beta(x) \in C(Z)$  である試験関数が

$$V(x) - \beta(x) \geq 0 \quad (36)$$

$$V(\hat{x}) = \beta(\hat{x}) \quad (37)$$

上式で表された条件，つまり  $\hat{x}$  において  $V(x) - \beta(x)$  が極小値をとるならば

$$H(\hat{x}, V(\hat{x}), \frac{\partial \beta(\hat{x})}{\partial \hat{x}}) \geq 0 \quad (38)$$

式 (38) を満たすことを言う．

粘性解を用いる際に重要な点として，

- 偏微分方程式の解が粘性劣解であり粘性優解あるとき，その解は粘性解となる．
- 無数に存在する粘性劣解と粘性優解に対して，大域的に粘性解は唯一解である．
- 系が可到達なら，粘性解は必ず存在する．

がある．次節で有限差分近似法により粘性解  $V(x)$  を求める手法を示す．

### 3.1.3 有限差分近似法

Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解である  $V(x)$  を求める手法として，有限差分近似法を用いる．有限差分近似法とは， $V(x)$  の偏微分項を近似する手法である．以下に示すように，状態の離散間隔  $\Delta x$  により値関数  $V(x)$  の偏微分項の近似を行なう．

$$\frac{\partial V}{\partial x} F \approx \begin{cases} \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} F(x, u) (F \geq 0) \\ \frac{V(x - \Delta x) - V(x)}{\Delta x} F(x, u) (F < 0) \end{cases} \quad (39)$$

これより，全状態を離散化により格子状に区切り，偏微分項を離散化により近似して，繰り返し計算で全ての点において最適解である粘性解  $V(x)$  を求める手法である．ここでは，具体的に数値解を求める手法について述べる．

さきに粘性解  $V(x)$  を求める範囲を原点を含み原点に可到達な領域を含むものとしておく．

$$x_i \in [x_{i\min}, x_{i\max}] (i = 1, \dots, n) \quad (40)$$

初期時刻を  $t_0$  , 最終時刻を  $t_f$  とし , 有限区間における評価関数を考察する .

$$J(x_0) = \int_{t_0}^{t_f} (x^T x + u^T u) dt + \varphi(x(t_f)) \quad (41)$$

式 (41) は有限の区間  $t \in [t_0, t_f]$  における状態と入力の評価している . 式 (21) より初期時刻における状態  $x_0$  での評価関数の最小値は

$$V(t_0, x_0) = \min_{u \in U} J(x_0) \quad (42)$$

であり , 値関数  $V(t, x(t))$  は時間  $t$  と状態  $x$  の関数である .  $\varphi(x(t_f))$  は最終時刻  $t_f$  における状態の関数である . 終端時刻  $t_f$  を無限時間区間で考えると , 式 (41) は式 (18) と同じになる . つまり式 (41) を十分長い時間において繰り返し評価することで , 無限区間を評価したことと同じになる . 式 (41) を式 (43) へ変形する .

$$\begin{aligned} V(t_0, x(t_0)) &= \min_{u \in U} \int_{t_0}^{t_f} (x^T x + u^T u) dt + \varphi(x(t_f)) \\ &= \min_{u \in U} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (x^T x + u^T u) dt + \int_{t_1}^{t_f} (x^T x + u^T u) dt + \varphi(x(t_f)) \right\} \\ &= \min_{u \in U} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (x^T x + u^T u) dt + V(x(t_1)) \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

$V(t_0, x(t_0))$  を右辺へ移項し , 両辺を  $t_1 - t_0$  で割り , 値関数  $V$  が時間  $t$  と状態  $x$  の関数であることを考慮して ,  $t_1 \rightarrow t_0$  とすると

$$\min_{u \in U} \left( \frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + x^T x + u^T u \right) = 0 \quad (44)$$

となる . ここで式 (14) より

$$H(x, \frac{\partial V}{\partial x}) = \frac{\partial V}{\partial x} F(x, u) + x^T x + u^T u \quad (45)$$

とおく . 状態の離散間隔  $\Delta x_i$  は格子の分割数を  $\sigma_i$  としたとき

$$\Delta x_i = \frac{x_{i \max} - x_{i \min}}{\sigma_i} (i = 1, \dots, n) \quad (46)$$

となる，有限差分近似法による計算において，時間の離散間隔  $\Delta t$  と状態の離散間隔  $\Delta x_i$  は次の条件を満たす必要がある．

$$1 - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta t}{\Delta x_i} |F_i(x, u)| \right) \geq 0 \quad (47)$$

式 (47) は，最適解を系に適用した際に離散時間先において状態が格子間隔以上に変化しないようにする条件である．式 (44) を時間の離散間隔  $\Delta t$ ，状態の離散間隔  $\Delta x_i$  で離散化する．値関数  $V(x)$  に関する偏微分項を式 (48) のように一次近似する．

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V(t, x) - V(t - \Delta t, x)}{\Delta t} \quad (48)$$

離散化された Hamilton-Jacobi 偏微分方程式

$$\frac{V(t, x) - V(t - \Delta t, x)}{\Delta t} + \tilde{H}(x, \Delta_{x_i}^+ V, \Delta_{x_i}^- V) = 0 \quad (49)$$

離散化された Hamilton 関数

$$\tilde{H}(x, \Delta_{x_i}^+ V, \Delta_{x_i}^- V) = \min_{u \in U} \left\{ \sum_{i=1}^n (F_i(x, u) V_{x_i}^+ + F_i(x, u) V_{x_i}^-) + x^T x + u^T u \right\} \quad (50)$$

ここで  $V_{x_i}^\pm$  は，

$$\begin{cases} V_{x_i}^+ = \frac{V(t, x_i + \Delta x_i) - V(t, x_i)}{\Delta x_i} & (F_i \geq 0) \\ V_{x_i}^- = \frac{V(t, x_i) - V(t, x_i - \Delta x_i)}{\Delta x_i} & (F_i < 0) \end{cases} \quad (51)$$

と表され，状態で離散化された  $V(x)$  である． $V_{x_i}^\pm, F_i$  は状態が正の方向へ向かっていれば前進差分を用い，負の方向に進んでいれば後進差分を取ることを意味している．式 (49) を変形すると，

$$V(t - \Delta t, x) = V(t, x) + \Delta t \tilde{H}(x, \Delta_{x_i}^+ V, \Delta_{x_i}^- V) \quad (52)$$

となる．

有限差分近似法の手順としては，まず式 (47) を満たすように  $\Delta t, \Delta x_i$  を決定する．その際に適当な入力範囲も決めておく．

$$u \in [u_{\min}, u_{\max}] \quad (53)$$

格子の間隔が決まれば式 (50) が最小となるような入力を探索し，入力が見つければ式 (52) より  $V(t - \Delta t, x)$  を計算し記憶しておく．この計算を全格子点において行なった後に， $V(t, x) \leftarrow V(t - \Delta t, x)$  の値を移動する． $V(t - \Delta t, x)$  と  $V(t, x)$  の差が収束するまで上記の計算を繰り返す．以上により Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解である粘性解  $V(x)$  が計算できる．

有限差分近似法の計算手順を以下に示す．

Step 1. 原点に可到達な範囲で式 (40) を決め，式 (47) を満たすように  $\Delta t, \Delta x_i$  を決定．

Step 2. 入力を式 (53) の範囲で分割し，式 (50) で表される Hamilton 関数の右边を各入力に対して計算．

Step 3. 最小となる入力を，式 (52) へ代入し  $V(t - \Delta t, x)$  を計算．

Step 4. 全格子点において Step 2.，Step 3. を行なう．

Step 5.  $V(t, x) \leftarrow V(t - \Delta t, x)$  の値を代入する．

Step 6.  $V(t - \Delta t, x)$  と  $V(t, x)$  の差が決められた値よりも小さくなるまで Step 2.~Step 5. を繰り返す．

有限差分近似法は，原点に到達可能な範囲の状態に対して最適解を求める手法である．よって，初期値が原点から遠く離れている場合，(40) の範囲を大きくとる必要がある．そのような場合，全状態における計算量が増大するので，多くの計算時間が必要となる．

そこで次節では，最適制御問題を有限の時間で可解となる問題に置き換えた Receding-Horizon 制御問題による最適制御設計手法について述べる．



### 3.2 Receding-Horizon 制御問題

非線形最適レギュレータ問題では，無限時間先までを評価することによって，最適解である粘性解を求める手法を示した．この手法においては，理論的に漸近安定性が保証され大域的に最適である．しかし非線形最適レギュレータを構成するために有限差分近似法から粘性解を導くことはできるが，状態数が増えると計算量は増加し，多くの記憶容量が必要なため計算機のハードウェアに対する負担も大きくなる．

そこで Receding-Horizon 制御問題を倒立振子系に適用することを考える．Receding Horizon 制御問題の特徴としては，評価区間を有限時間として，毎時刻において評価関数を評価することで無限時間先までの状態フィードバック制御が可能であり，安定性は保証されないが，非線形の最適制御問題をリアルタイムで解ける形にした制御手法である．

次の非線形系を考える．

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \quad (54)$$

$x(t) \in \mathbf{R}^n$  は状態， $u(t) \in \mathbf{R}^m$  は入力であり， $F: \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbf{R}^n$  である．本制御手法では，時刻  $t$  での仮想的な時間軸上  $\tau$  において評価関数を  $T(t)$  だけ評価する．そこで仮想時間軸  $\tau$  を考慮に入れた状態量  $\tilde{x}(t, \tau) \in \mathbf{R}^n$  と入力  $\tilde{u}(t, \tau) \in \mathbf{R}^m$  を用い，評価区間を実時間の関数  $T(t)$  とし評価関数を

$$J = \varphi(\tilde{x}(t, T(t))) + \int_t^{t+T(t)} L(\tilde{x}(t, \tau), \tilde{u}(t, \tau)) d\tau \quad (55)$$

とする． $\varphi$  は状態が現在時刻  $t$  より  $T(t)$  後の状態からなる終端条件（目標条件）を表す関数であり， $L$  は  $\tilde{x}, \tilde{u}$  を評価する項である．Receding-Horizon 制御問題の概要としては，評価関数が評価する区間  $T(t)$  は  $t$  の変化に応じて変化し，実時間  $t$  が微小時刻  $\Delta t$  進むたびに仮想時間軸上  $\tau$  において評価関数を再評価することによって，現在時刻の最適制御入力を求める制御則設計手法である．

これより，評価関数を最小とする制御入力  $\tilde{u}^*$  が満たすべき必要条件を示す．また必要条件なので，それによって得られる入力は評価関数を最小とするが，系の漸近安定性は保証されない．

共状態量 (co-state) ベクトル  $p(t) \in \mathbf{R}^n$  を定義する．共状態量  $p$  とは，状態量  $x$  に関する値関数  $V(x)$  の傾きを最適軌道に沿って評価したものであることを意味しており，その時刻で状態が向かうべき方向を指す未知ベクトル量である．時刻が最終時刻  $T_f$  の場合に

$$p(T_f) = \varphi_x^T(x(T_f)) \quad (56)$$

となり，終端条件と呼ばれる終端時刻での状態量と共状態量の関係式が得られる．式 (29) より最小原理が導かれる．

$$\frac{\partial H}{\partial u^*} = 0 \quad (57)$$

Hamilton 関数が極小となるような入力の評価関数を最小にする意味において最適であることを示している．

以上より，仮想時間軸  $\tau$  を考慮に入れた共状態量  $\tilde{p}(t, \tau) \in \mathbf{R}^n$  により，Hamilton 関数を再定義する．

$$H(\tilde{x}(t, \tau), \tilde{p}(t, \tau), \tilde{u}(t, \tau)) = L(\tilde{x}(t, \tau), \tilde{u}(t, \tau)) + \tilde{p}^T(t, \tau) F(\tilde{x}(t, \tau), \tilde{u}(t, \tau)) \quad (58)$$

仮想時間軸上での最適解の必要条件は以下となる．

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tau}(t, \tau) = \frac{\partial H^T}{\partial \tilde{p}}, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau}(t, \tau) = -\frac{\partial H^T}{\partial \tilde{x}} \quad (59)$$

$$\tilde{p}(t, T) = \varphi_x^T(\tilde{x}(t, T)) \quad (60)$$

$$H_{\tilde{u}^*} = 0 \quad (61)$$

上式は Euler-Lagrange 方程式と呼ばれる．またこれより

$$\tilde{x}(t, 0) = x(t) \quad (62)$$

$$\tilde{p}(t, 0) = p(t) \quad (63)$$

$$\tilde{u}^*(t, 0) = u^*(t) \quad (64)$$

とする．目的は，与えられている状態量  $x(t)$  と終端時刻での共状態量  $\tilde{p}(t, T)$  を満たすように，Euler-Lagrange 方程式から  $p(t)$  を求めることである．そのために

は，終端条件より次式が成り立たなければならない．

$$E_1(x(t), p(t), T(t)) = \tilde{p}(t, T) - \varphi_{\tilde{x}}^T(\tilde{x}(t, T)) = 0 \quad (65)$$

その時刻での共状態量  $p(t)$  が得られれば最小原理より最適解が得られる．

$$u^*(t) = \arg \{H_u(x(t), p(t), u^*(t)) = 0\} \quad (66)$$

式 (66) は，式 (55) の  $L(\tilde{x}, \tilde{u})$  が  $\tilde{u}$  に関する 2 乗形式である場合，解析的に計算できる．

既知であるのは初期状態量のみであり，拘束式である終端条件を満たすように共状態量を求めなければならない．つまり Receding-Horizon 制御問題とは，二点境界値問題を毎時刻に解く手法である．

### 3.2.1 実時間最適化法

前節で Receding-Horizon 制御問題は移動する短い評価区間で制御入力を求める制御手法であることを示した．本節では実時間で最適解を得るための，Receding-Horizon 制御問題へ適用する数値計算法について述べる．

非線形最適レギュレータ問題においては，評価関数を最小とし系を漸近安定化させる制御則の設計法について述べたが，評価関数を最小とすることのみを目的とした最適化により制御則を設計する．これによって計算量が軽減される．そこで Receding-Horizon 制御問題での二点境界値問題を解く際に，Ohtsuka ら [5][6] が提案する最適解を短時間で導くことが可能な連続変形法を用いる．連続変形法とは，積分可能な状態と共状態量の関係式である常微分方程式を導くことで，状態量の変化に応じて共状態量を追跡し最適解を得る手法である．この数値計算法は収束計算を必要とせず，毎時刻での最適解が一定の計算量で得られるため，オンライン計算による実時間での状態フィードバック制御が可能となる．

まず Receding-Horizon 制御問題で用いる評価時間を実時間の関数として次のように表す．

$$T(t) = T_f(1 - e^{-qt}) \quad (67)$$

式 (67) により，時間の経過と共に評価時間を一定の値に収束させる．また初期時刻において評価時間をゼロとすることで，初期共状態量を初期状態量と終端条件から求められる自明な解となる．

$$p(0) = \varphi_x^T(x(0)) \quad (68)$$

通常 of 最適制御問題では評価区間がゼロであると意味を持たないが，連続変形法では最適解を状態の変化に応じて求めていく手法なので，自明な解から出発する必要がある．ここで評価時間を実時間の関数としているので，計算開始時刻近傍において得られる制御則は時変フィードバック則となるが，時間が経過するにつれて評価時間  $T$  が収束し一定の値に近づくので，制御則も時不変フィードバック則に近づく．

### 3.2.2 連続変形法

連続変形法とは，状態量が微小変化した際の共状態量の変化を求めていくことで，最適制御入力の計算を行なう計算法である．式 (69) で表される終端条件を満たすように，初期状態量  $x(t_0)$  から初期共状態量  $p(t_0)$  を求め最適軌道を求めることが目的である．

$$E_1(x(t), p(t), T(t)) = \hat{p}(t, T) - \varphi_{\tilde{x}}^T(\tilde{x}(t, T)) = 0 \quad (69)$$

しかし離散化誤差等より式 (69) が満たされないので  $E_1 \neq 0$  となる．そこで適当な安定行列  $A_1$  を用い，誤差  $E_1$  の安定化を行う．

$$\dot{E}_1 = A_1 E_1 \quad (70)$$

実際に誤差  $E_1$  を  $t$  で微分し，式 (70) を用いて変形する．

$$\frac{dE_1}{dt}(x, p, T) = \frac{\partial E_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E_1}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial E_1}{\partial T} \dot{T} = A_1 E_1 \quad (71)$$

さらに  $\dot{p}$  に関して整理する．

$$\dot{p}(t) = F_p^{-1}(A_1 E_1 - F_x \dot{x}(t) - F_T \dot{T}(t)) \quad (72)$$

式 (72) が得られる。もし，誤差  $E_1$  に関する偏微系数  $E_{1x}, E_{1p}, E_{1T}$  がわかれば常微分方程式となるので，実時間の積分により各時刻での共状態量  $p(t)$  が得られる。

しかし，式 (72) を正確に解くには多くの計算量が必要とされる。そこで Euler-Lagrange 方程式である式 (59) と終端条件の式 (61) を実時間  $t$  で微分する。

$$\frac{d\tilde{x}_\tau}{dt} = F_{\tilde{x}}\dot{\tilde{x}} + F_{\tilde{u}}\dot{\tilde{u}} \quad (73)$$

$$\frac{d\tilde{p}_\tau}{dt} = -H_{\tilde{x}\tilde{x}}\dot{\tilde{x}} - H_{\tilde{x}\tilde{p}}\dot{\tilde{p}} - H_{\tilde{x}\tilde{u}}\dot{\tilde{u}} \quad (74)$$

$$H_{\tilde{u}\tilde{x}}\dot{\tilde{x}} + H_{\tilde{u}\tilde{p}}\dot{\tilde{p}} + H_{\tilde{u}\tilde{u}}\dot{\tilde{u}} = 0 \quad (75)$$

また以下とする。

$$H_{\tilde{x}\tilde{p}} = F_{\tilde{x}}^T \quad (76)$$

$$H_{\tilde{u}\tilde{p}} = F_{\tilde{u}}^T \quad (77)$$

式 (75) を  $\dot{\tilde{u}}$  に関して変形する。

$$\dot{\tilde{u}} = -H_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1}(H_{\tilde{u}\tilde{x}}\dot{\tilde{x}} + F_{\tilde{u}}^T\dot{\tilde{p}}) \quad (78)$$

さらに，式 (73) と式 (74) を式 (75) へ代入し  $\dot{\tilde{u}}$  を消去すると，時間の関数である  $T(t)$  を含むため式 (79) で表される時変微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_\tau \\ \tilde{p}_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_\tau \\ \tilde{p}_\tau \end{bmatrix} \quad (79)$$

行列  $A, B, C$  は以下となる。

$$A = F_{\tilde{x}} - F_{\tilde{u}}H_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1}H_{\tilde{u}\tilde{x}} \quad (80)$$

$$B = F_{\tilde{u}}H_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1}F_{\tilde{u}}^T \quad (81)$$

$$C = H_{\tilde{x}\tilde{x}} - H_{\tilde{x}\tilde{u}}H_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1}H_{\tilde{u}\tilde{x}} \quad (82)$$

そこで式 (79) から，新たに関数  $S(t, \tau) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $c(t, \tau) \in \mathbf{R}^n$  を用い，状態量と共状態量の関係式を次のように定義する。

$$\dot{\tilde{p}}(t, \tau) = S(t, \tau)\dot{\tilde{x}}(t, \tau) + c(t, \tau) \quad (83)$$

連続変形法は，式 (83) より現在時刻の  $\dot{p}$  を用いて  $p(t + \Delta t)$  を求め，式 (66) より最適制御入力  $u^*$  を求める手法である．次に，式 (83) を仮想時間  $\tau$  で微分

$$\frac{d\tilde{p}_\tau}{dt} = S_\tau \tilde{x}_t + S \frac{d\tilde{x}_\tau}{dt} + c_\tau \quad (84)$$

式 (79) を上式に代入すると，仮想時間軸上の微分方程式が得られる．

$$S_\tau(t, \tau) = -A^T S - SA + SBS - C \quad (85)$$

$$c_\tau(t, \tau) = -(A^T - SB)c \quad (86)$$

続いて，終端時刻での  $S(t, T), c(t, T)$  を求める．式 (69) と式 (70) より

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{d\tilde{p}(t, T)}{dt} - H_{\tilde{x}}^T \frac{dT}{dt} - \varphi(\tilde{x}(t, T)) \left\{ \frac{d\tilde{x}(t, T)}{dt} + F \frac{dT}{dt} \right\} = A_1 E_1 \quad (87)$$

さらに変形すると，

$$\dot{\tilde{p}}(t, T) = \varphi_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}(t, T)) \dot{\tilde{x}}(t, T) + \{(H_{\tilde{x}}^T + \varphi_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}(t, T))F)\dot{T} + A_1 E_1\} \quad (88)$$

となり，終端時刻  $\tau = T$  での  $S(t, T), c(t, T)$  が得られる．

$$S(t, T) = \varphi_{\tilde{x}\tilde{x}} \Big|_{\tau=T} \quad (89)$$

$$c(t, T) = (H_{\tilde{x}}^T + \varphi_{\tilde{x}\tilde{x}} f) \Big|_{\tau=T} \dot{T} + A_1 E_1 \quad (90)$$

ここまでで  $S(t, \tau)$  は状態量の変化に対する共状態量の変化を表し， $c(t, \tau)$  は生じる誤差を押え込む関数であるといえる． $S(t, T), c(t, T)$  を式 (85) と式 (86) より仮想時間軸において逆時間に  $T(t)$  だけ計算し  $S(t, 0), c(t, 0)$  を得る．これを式 (83) に代入する．

$$\dot{p}(t) = S(t, 0)\dot{x}(t) + c(t, 0) \quad (91)$$

式 (91) を実時間にて積分することで，微小時間  $\Delta t$  だけ先の共状態量を得ることができ，式 (66) より最適制御入力を計算する．

以上の議論をまとめる．式 (68) より初期共状態量  $p(0)$  を自明な解として出発し，時刻  $t$  において評価区間  $T(t)$  だけ先の状態量  $\tilde{x}(t, T)$  と共状態量  $\tilde{p}(t, T)$  が得

られれば，式 (89) 式 (90) より  $S(t, T), c(t, T)$  が求まる．さらに式 (85) と式 (86) により時刻  $t$  での  $S(t, 0), c(t, 0)$  を計算し，式 (91) により微小時間先  $\Delta t$  の共状態量を求める．この手順を繰り返すことで毎時刻に最適制御入力  $u^*$  が得られる．つまり，Receding-Horizon 制御問題に連続変形法を適用したことにより，移動する評価区間  $T(t)$  を毎時刻において評価し，式 (91) により共状態量を更新することで，有限時間の評価区間で無限時間先までの最適フィードバックが可能である手法となる．さらに最適解を計算するときに，常微分方程式を積分することのみで解が得られるので実時間の最適フィードバック制御となる．

計算時間については，仮想時間軸上で  $S(t, \tau), c(t, \tau)$  を求めるときと，逆時間に  $S(t, 0), c(t, 0)$  を計算するときに最も計算量が必要とされる．その際，共に差分近似を用いた場合に，離散間隔を  $\Delta t$  として評価時間  $T(t)$  を一定の数  $\sigma_T$  で離散化する．仮想時間軸上での離散間隔  $\Delta T(t)$  は

$$\Delta T(t) = \frac{T(t)}{\sigma_T} \quad (92)$$

となり，差分近似により  $S(t, \tau), c(t, \tau)$  や  $S(t, 0), c(t, 0)$  を求める．つまり時間  $t$  の経過により  $\Delta T(t)$  は増加するが，計算量としては  $\sigma_T$  回の積分を 2 回するだけなので常に一定である．そこで所定の時間分の数値シミュレーションを行ない，それよりも早く計算が終了すれば実時間の最適フィードバック制御であると言える．

次に，連続変形法を用いた場合の計算法について述べる．

Step 1. まず初期時刻  $t = 0$  とする． $x(0) = 0$  を測定し， $T(0) = 0$  より初期共状態量  $p(0) = \varphi_x^T(x(0))$  を計算する．

Step 2. 式 (66) より最適制御入力  $u^*$  を求める．

Step 3. 時刻  $t$  を  $\Delta t$  だけ進める．

$$t = t + \Delta t$$

Step 4.  $x(t)$  を測定．

Step 5. 初期条件を  $\tilde{x}(t - \Delta t, 0) = x(t - \Delta t), \tilde{p}(t - \Delta t, 0) = p(t - \Delta t)$  とし，仮想時間軸上  $\tau$  での離散間隔  $\Delta T$  を式 (89) として与え，Euler-Lagrange 方程式を  $\tau = T(t - \Delta t)$  まで解く．

Step 6. 式 (89) と式 (90) より  $\tau = T(t - \Delta t)$  での  $S(t - \Delta t, T)$  と  $c(t - \Delta t, T)$  を計算する .

Step 7. Step 5. と同じように離散間隔を  $\Delta T$  として , 式 (85) を  $\tau = T$  から  $\tau = 0$  まで逆時間に解く .

Step 8. 式 (91) を 1 ステップだけ数値積分し共状態量を求める .

$$p(t) = p(t - \Delta t) + S(t - \Delta t, 0)(x(t) - x(t - \Delta t)) + c(t - \Delta t, 0)\Delta t$$

Step 9. Step 2. へ戻る .



## 4. 数値シミュレーション

本章では、倒立振り子系に Receding-Horizon 制御問題を適用した際のシミュレーション結果を示す。全てのシミュレーションに使用した計算機は DEC AlphaServer1200 であり、また使用言語は C++ である。

### 4.1 最適制御則の構成

倒立振り子系にたいして、最適制御則を構築する。Receding-Horizon 制御問題において、重み行列を  $Q_f$  として、最小とする評価関数を式 (93) とした。

$$J = \tilde{x}(t, T)^T Q_f \tilde{x}(t, T) + \int_t^{t+T(t)} (\tilde{x}(t, \tau)^T \tilde{x}(t, \tau) + \tilde{u}(t, \tau)^2) d\tau \quad (93)$$

評価区間  $T(t)$  は

$$T(t) = 1.0(1 - e^{-0.5t}) \quad (94)$$

とした。式 (93) と倒立振り子系の状態方程式より、Hamilton 関数が得られる。

$$H(x, p, u) = L(x, u) + p^T F \quad (95)$$

$$\begin{aligned} &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + u^2 + p_1 x_2 + p_2 u + p_3 x_4 \\ &\quad + \frac{p_4}{J + ml^2} (mgl \sin x_3 - ml \cos x_3 u) \end{aligned} \quad (96)$$

最適制御入力  $u^*$  については、式 (66) の最小原理より

$$H_{u^*} = p_2 - \frac{p_4 ml \cos x_3}{J + ml^2} + 2u^* = 0 \quad (97)$$

なので、これより

$$u^* = \frac{1}{2} \left( \frac{p_4 ml \cos x_3}{J + ml^2} - p_2 \right) \quad (98)$$

となる．次にシミュレーションで用いた微分値を示す．Euler-Lagrange 方程式の微分値

$$\dot{x} = \frac{\partial H^T}{\partial p} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \\ x_4 \\ \frac{1}{J + ml^2}(mgl \sin x_3 - ml \cos x_3 u) \end{bmatrix} \quad (99)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H^T}{\partial x} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 - p_1 \\ -2x_3 - \frac{p_4}{J + ml^2}(mgl \cos x_3 + ml \sin x_3 u) \\ -2x_4 - p_3 \end{bmatrix} \quad (100)$$

さらに

$$H_{xx} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{p_4}{J + ml^2}(mgl \sin x_3 - ml \cos x_3 u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$H_{xu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_4 ml \sin x_3}{J + ml^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$H_{ux} = (H_u)_x^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{p_4 ml \sin x_3}{J + ml^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (103)$$

状態方程式の微分値

$$f_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J + ml^2}(mgl \cos x_3 + ml \sin x_3 u) & 0 \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$f_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{ml \cos x_3}{J + ml^2} \end{bmatrix} \quad (105)$$

目標条件の微分値

$$\varphi_x = \begin{bmatrix} 2Q_{f1}x_1 & 2Q_{f2}x_2 & 2Q_{f3}x_3 & 2Q_{f4}x_4 \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$\varphi_{xx} = \begin{bmatrix} 2Q_{f1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2Q_{f2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{f3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2Q_{f4} \end{bmatrix} \quad (107)$$

これらより数値シミュレーションを行なった．

## 4.2 シミュレーション結果

本節では，様々な条件下で Receding-Horizon 制御問題を倒立振子系に適用した際の有効性を検証する．また Receding-Horizon 制御問題が持つロバスト性の検証も行なう．さらに得られる計算時間によって，リアルタイムの状態フィードバック制御が実現可能であることを示す．

重み行列  $Q_f$  を以下に示す．

$$Q_f = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (108)$$

重み行列  $Q_f$  の設定については，振子の振り上げを最大の目的としているので，振子の角度  $\theta$  (状態  $x_3$ ) に関する部分を最も大きな値とした．さらに台車を原点に収束させなければならないので，原点からの距離  $z$  (状態  $x_1$ ) に関する部分を次に大きくした．振子が原点に収束すれば相対的に，台車の速度  $\dot{z}$  (状態  $x_2$ ) や角速度  $\dot{\theta}$  (状態  $x_4$ ) に関する重みが大きくなることから，この二つに関する重みについては小さい値とした．表 1 にシミュレーションに用いた倒立振子系のパラメータを示す．

$m[kg]$	0.1
$l[m]$	0.115
$J[kgm^2]$	$1.526 \times 10^{-3}$
$g[kg/s^s]$	9.8

表 1 倒立振子系パラメータ

表 2 に連続変形法で用いた各設定値を示す．

シミュレーション時間 $[s]$	10
安定化行列 $A_1$	$-20I$
離散間隔 $\Delta t[s]$	0.01
仮想時間軸 $\tau$ の分割数 $\sigma_T$	300

表 2 シミュレーションパラメータ

以上の値により四つの条件下でシミュレーションを行なった．

条件.1 倒立振子系に Receding-Horizon 制御問題を適用したときの有効性を確認するため，初期状態を原点から右方向に 2m の地点で振子が真下に静止している状態とした． $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$

条件.2 倒立振子系において，Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解が微分不可能点となる状態の一つとして考えられるのは， $z = 0$  かつ振子が真下 ( $\theta = \pm\pi$ ) となる状態である．そこで初期状態を振子が原点において真下において静止している状態とした． $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$

条件.3 振子の角度が  $\pi/2$  である状態は，式 (13) より状態方程式において入力がかかない．通常の手法ではこの状態を避けるために，このような状態となる部分で制御則を切替えて振り上げ-安定化を行なう．本手法では一つの制御則により，振り上げ倒立制御が可能であるので，初期状態を台車が原点から右方向に 2m の地点で，倒立振子の角度が  $\pi/2$  である状態とした． $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$

条件.4 最適制御問題とは，与えられた評価関数  $J(x)$  を最小とするような制御入力を現在の状態に基づいて計算する制御手法である．そのため外乱などにたいして，得られる制御則にはある程度のロバスト性が存在するはずである．また制御則が開ループであると，外乱により誤差が蓄積することによって状態が発散してしまう．そこで状態フィードバック制御である Receding-Horizon 制御問題が持つロバスト性について検証するため， $x(t)$  を測定したときに，毎時刻において  $z[m](x_1)$  へ測定誤差として

$$error = 0.05 \sin(2\pi t) \quad (109)$$

を加えた．初期状態を原点から右方向に 0.5m の地点で振子が真下において静止している状態とした． $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$

図 2,8,14,20 において，各時刻での振子の状態を振子が左方向に向かっている際は実線で示し，右方向に向かっている際は破線で示した．また振子の長さを 4 倍にして軌跡を示してある．図 3,9,15,21 において最適制御入力  $u^*$  の時間推移を示した．さらに各状態成分の時間推移を以下に示す．図 4,10,16,22 では原点からの距

離  $z(x_1)$  , 図 5,11,17,23 では台車の速度  $\dot{z}(x_2)$  , 図 6,12,18,24 では振子の角度  $\theta(x_3)$  , 図 7,13,19,25 では振子の角速度  $\dot{\theta}(x_4)$  を各々示した . 特に図 22 においては , 原点からの距離  $z$  の時間推移と共に  $z$  と加えられる外乱の時間変化を示した . 以下に四つの初期状態  $x_0$  と各シミュレーション結果について示す .

	$x_0 = [z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}]^T$	外乱	振子軌跡	入力 $u^*$	$z(x_1)$	$\dot{z}(x_2)$	$\theta(x_3)$	$\dot{\theta}(x_4)$
条件.1	$[2.0, 0, \pi, 0]^T$	なし	図 2	図 3	図 4	図 5	図 6	図 7
条件.2	$[0, 0, \pi, 0]^T$	なし	図 8	図 9	図 10	図 11	図 12	図 13
条件.3	$[2.0, 0, \pi/2, 0]^T$	なし	図 14	図 15	図 16	図 17	図 18	図 19
条件.4	$[0.5, 0, \pi, 0]^T$	あり	図 20	図 21	図 22	図 23	図 24	図 25

表 3 初期状態  $x_0$  と各シミュレーション結果

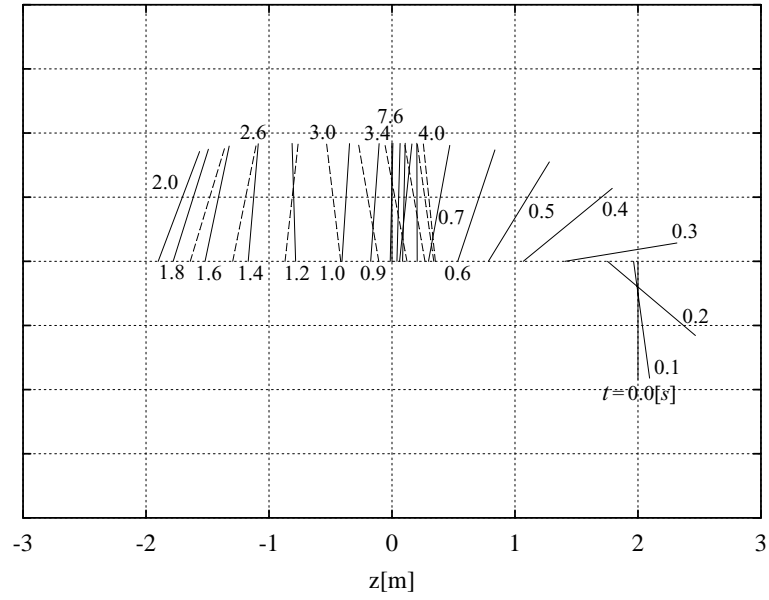


図 2 倒立振り子の最適軌道:初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$

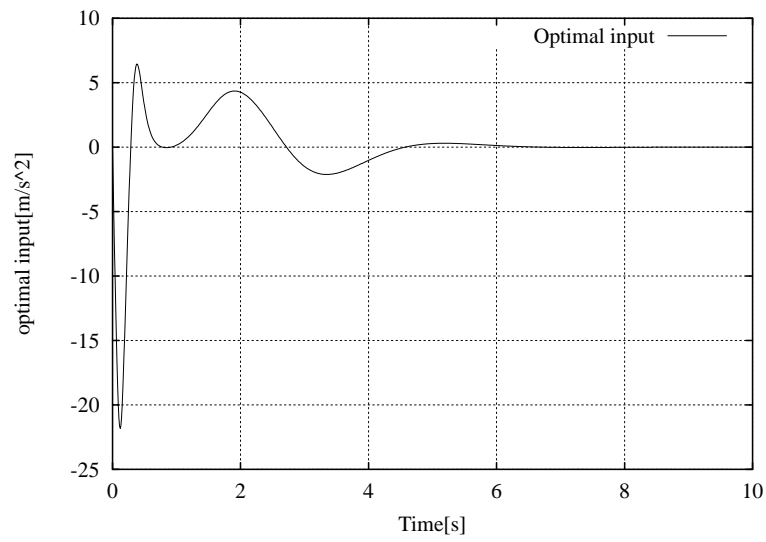


図 3 最適制御入力  $u^*$ :初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$

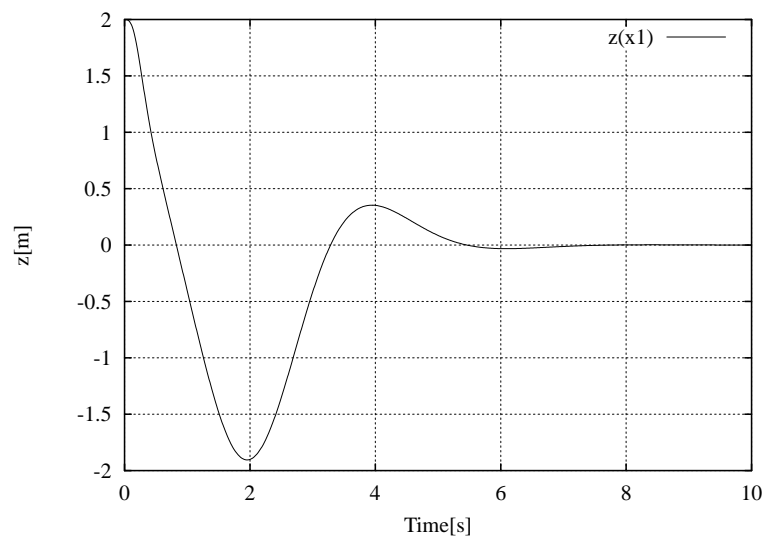


図 4 原点までの距離 ( $x_1$ ) の時間推移:初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$

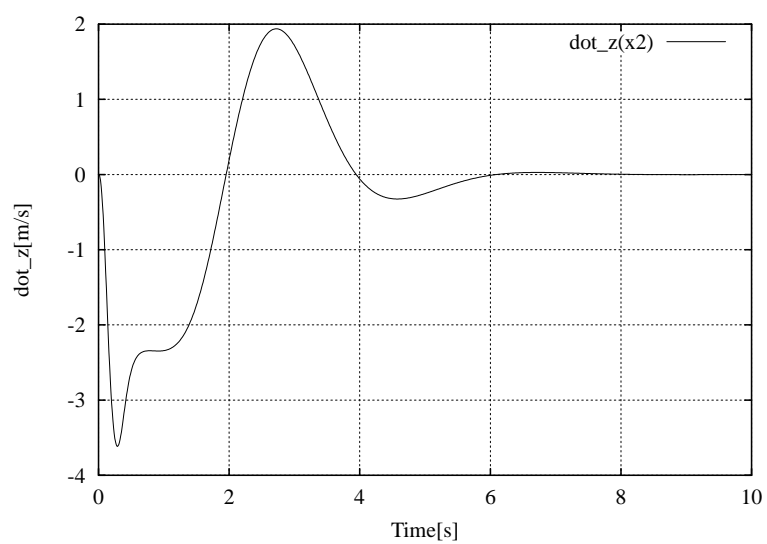


図 5 台車速度 ( $x_2$ ) の時間推移:初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$



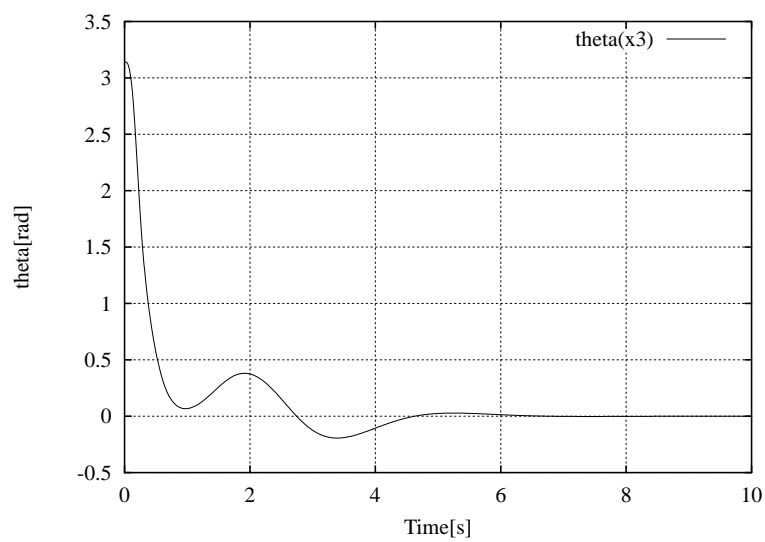


図 6 振子角度 ( $x_3$ ) の時間推移:初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$

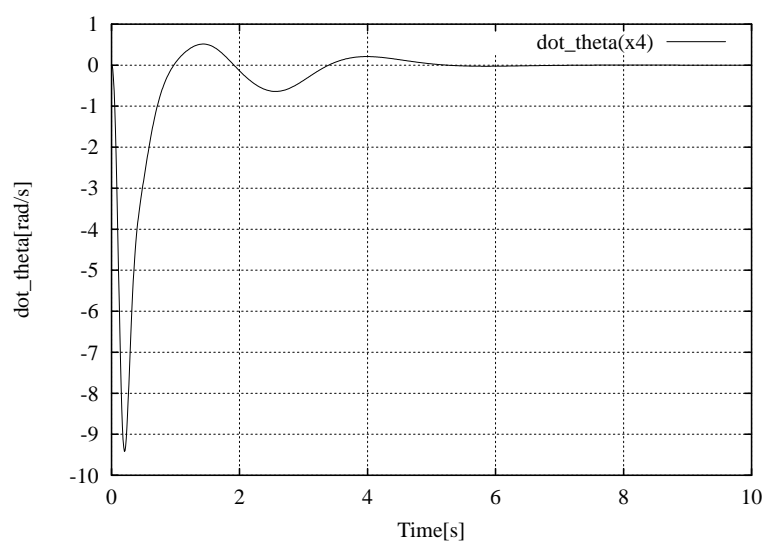


図 7 振子角速度 ( $x_4$ ) の時間推移:初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi, 0]^T$

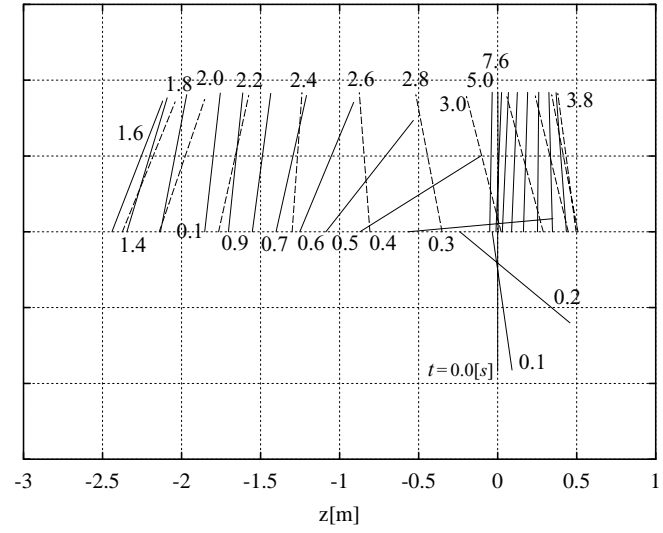


図 8 倒立振り子系の最適軌道:初期状態量  $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$

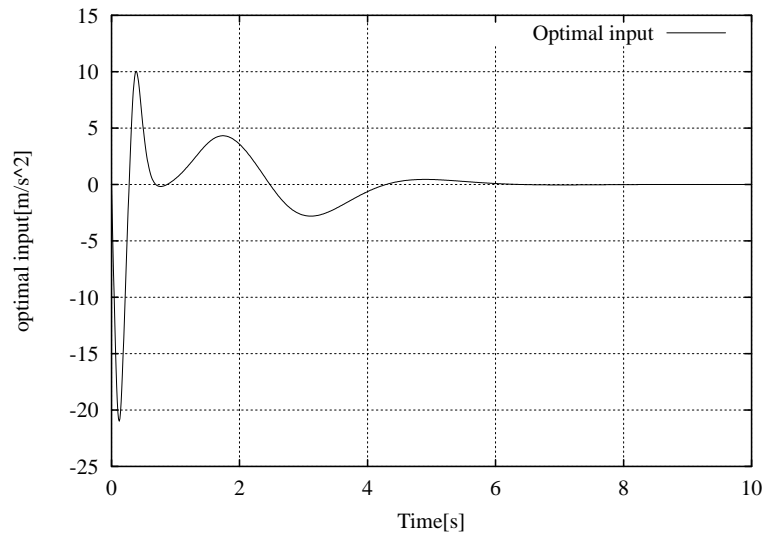


図 9 最適制御入力  $u^*$ :初期状態量  $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$

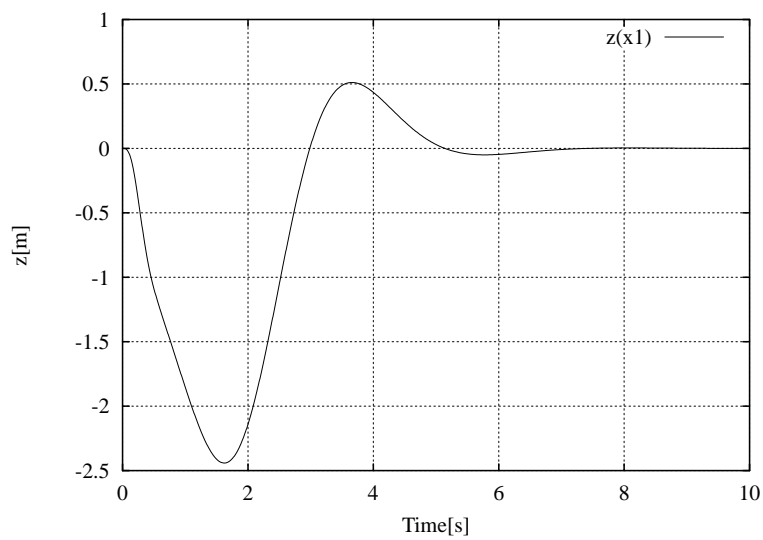


図 10 原点までの距離 ( $x_1$ ) の時間推移:初期状態量  $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$

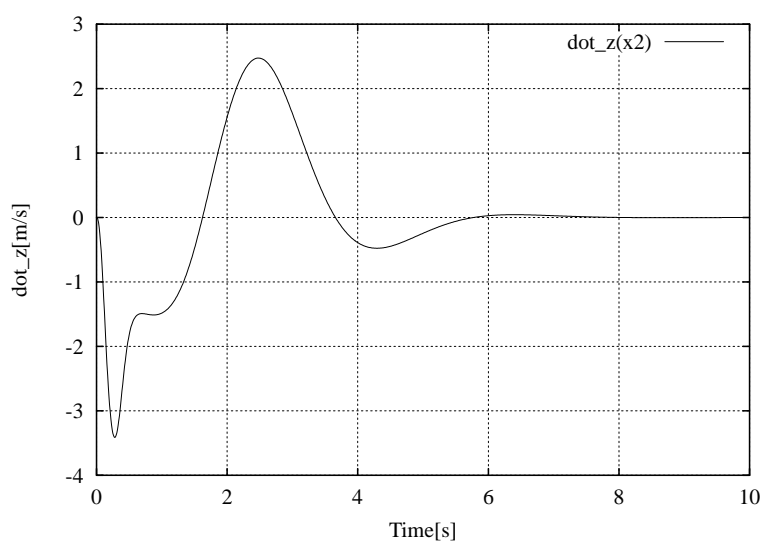


図 11 台車速度 ( $x_2$ ) の時間推移:初期状態量  $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$

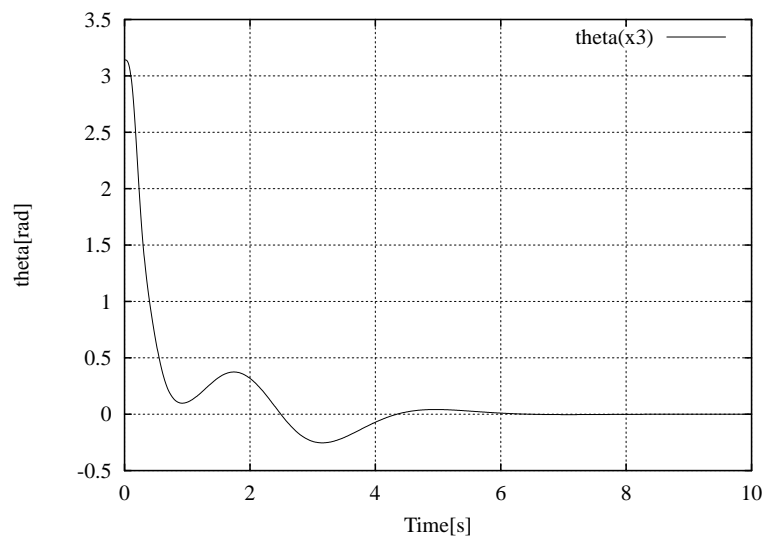


図 12 振子角度 ( $x_3$ ) の時間推移:初期状態量  $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$

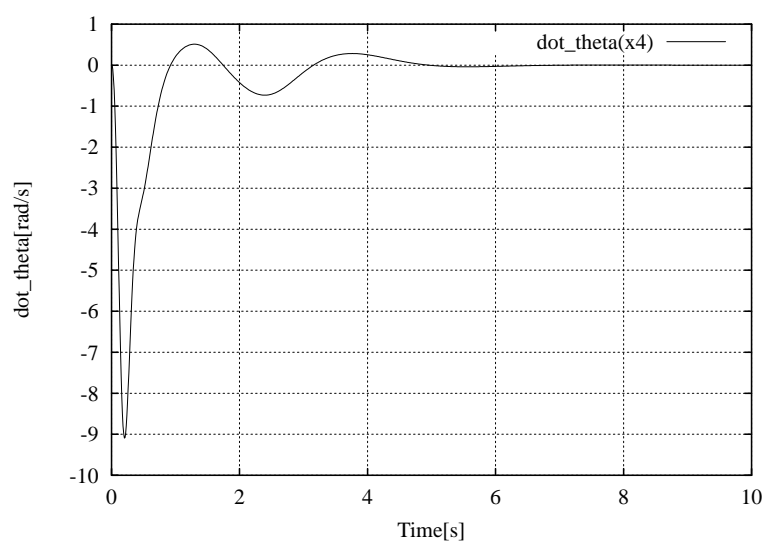


図 13 振子角速度 ( $x_4$ ) の時間推移:初期状態量  $x_0 = [0, 0, \pi, 0]^T$

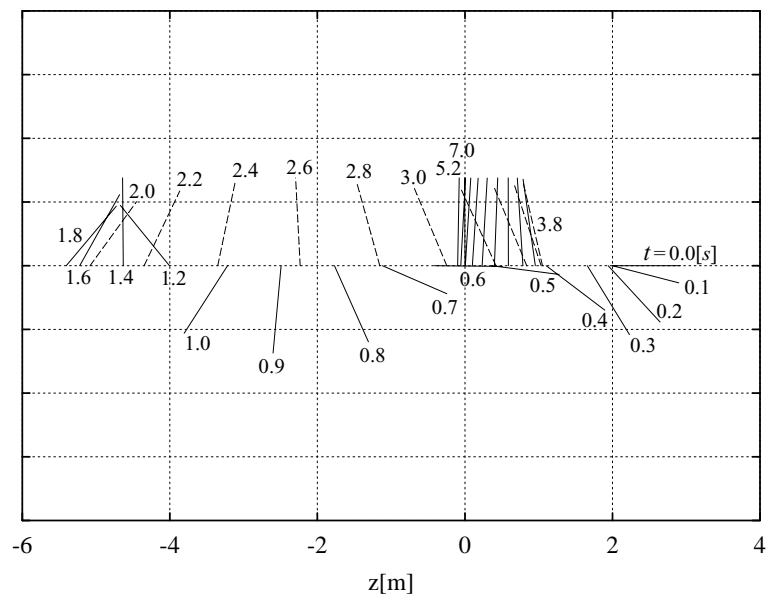


図 14 倒立振り子の最適軌道:初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$

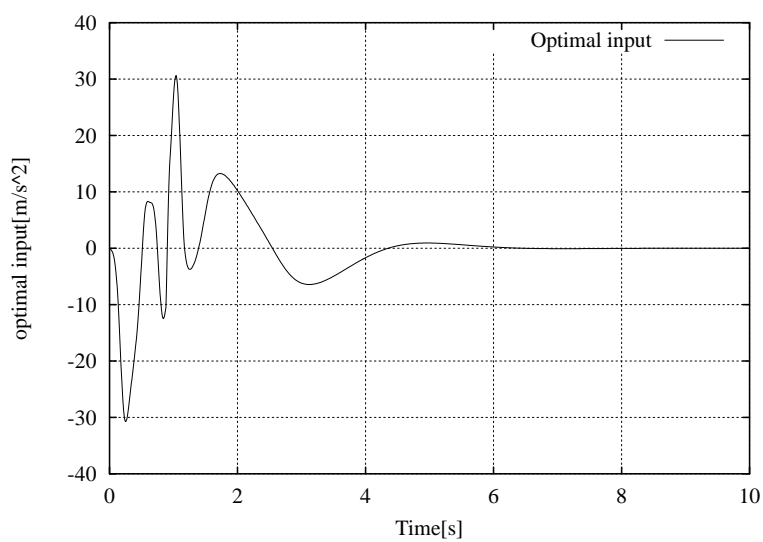


図 15 最適制御入力  $u^*$ :初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$

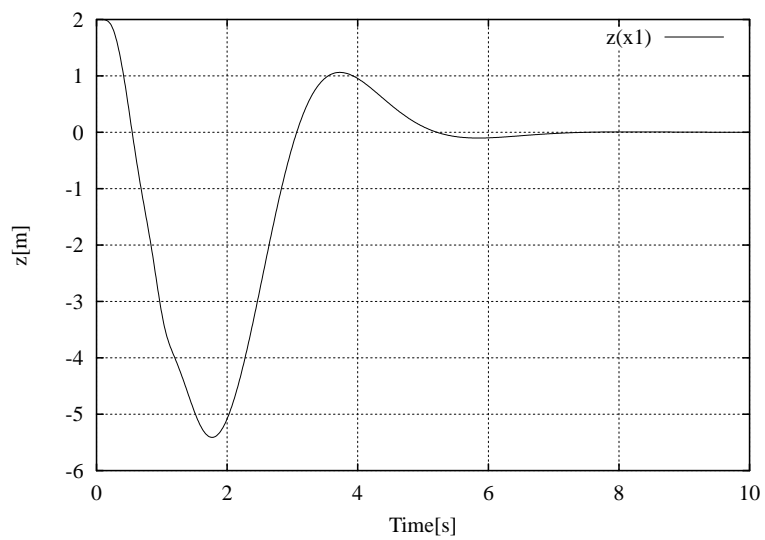


図 16 原点までの距離 ( $x_1$ ) の時間推移: 初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$

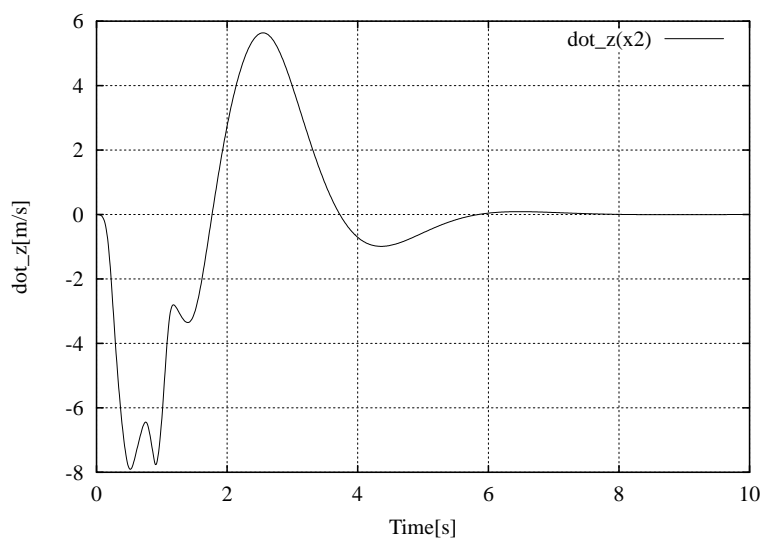


図 17 台車速度 ( $x_2$ ) の時間推移: 初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$

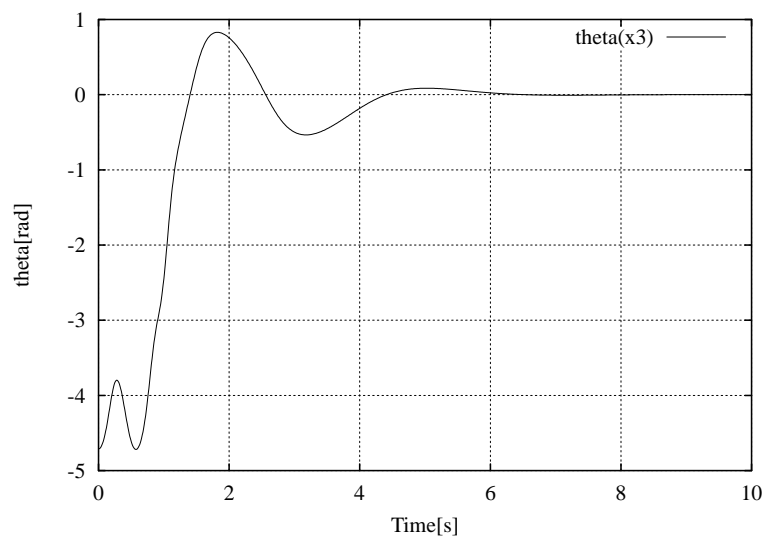


図 18 振子角度 ( $x_3$ ) の時間推移:初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$

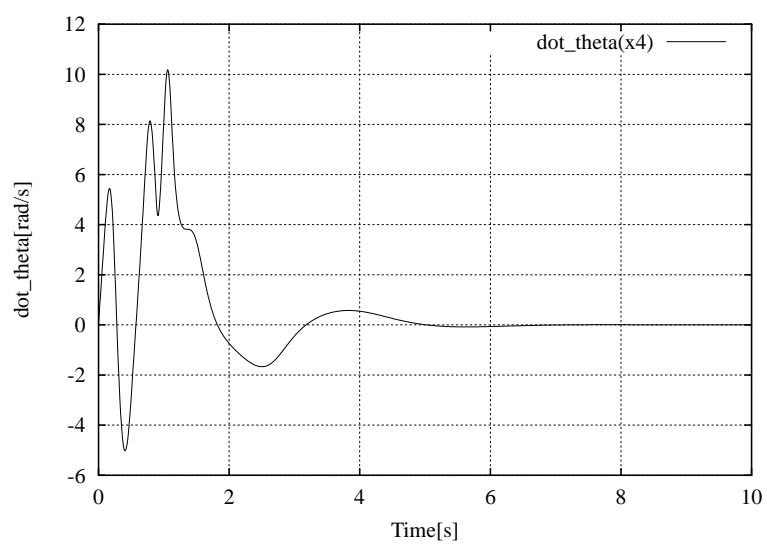


図 19 振子角速度 ( $x_4$ ) の時間推移:初期状態量  $x_0 = [2.0, 0, \pi/2, 0]^T$

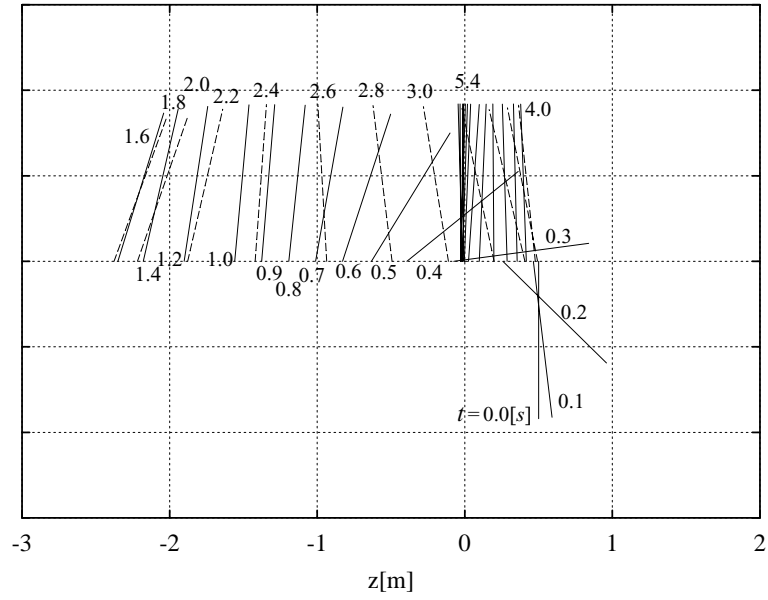


図 20 倒立振り子の最適軌道 (外乱あり):初期状態量  $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$

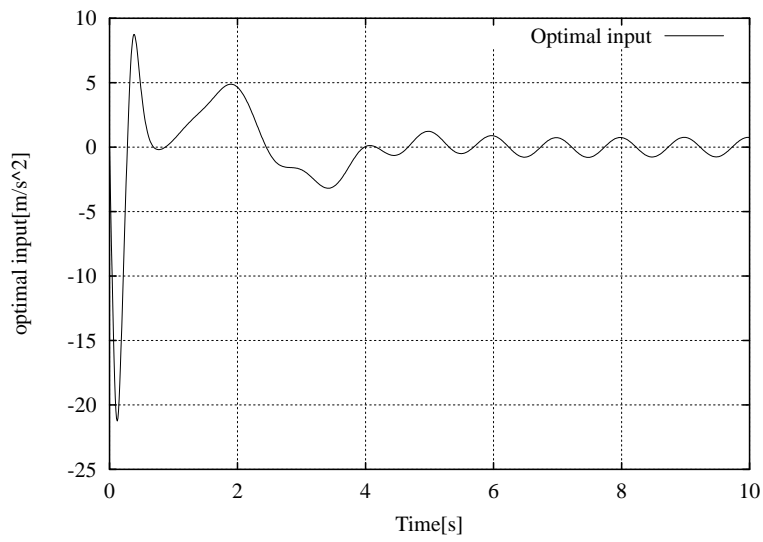


図 21 最適制御入力  $u^*$  (外乱あり):初期状態量  $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$



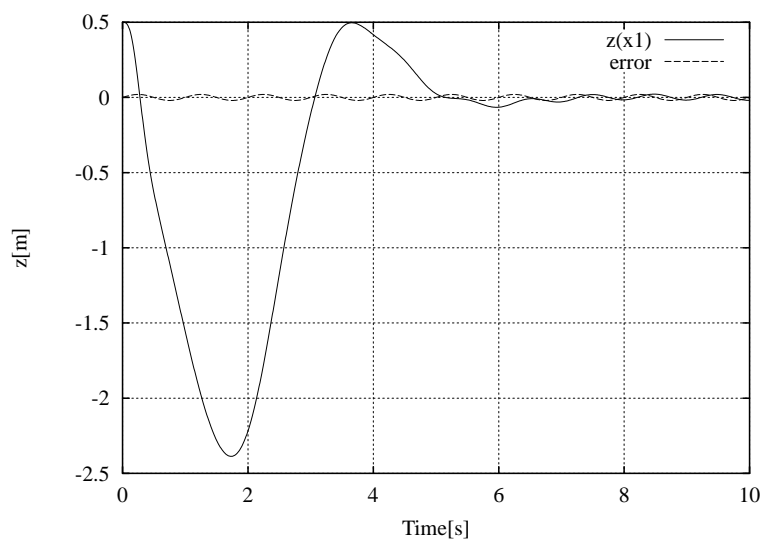


図 22 原点までの距離 ( $x_1$ ) と外乱 ( $error$ ) の時間推移 (外乱あり):初期状態量  $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$

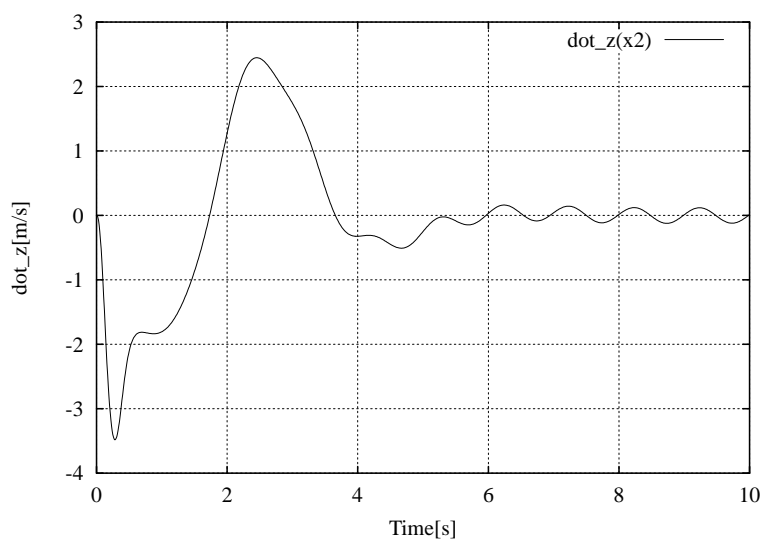


図 23 台車速度 ( $x_2$ ) の時間推移 (外乱あり):初期状態量  $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$

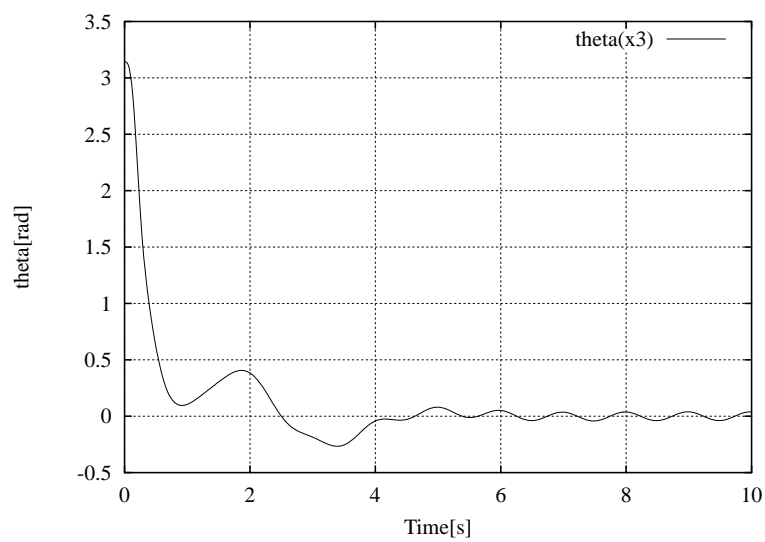


図 24 振子角度 ( $x_3$ ) の時間推移 (外乱あり):初期状態量  $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$

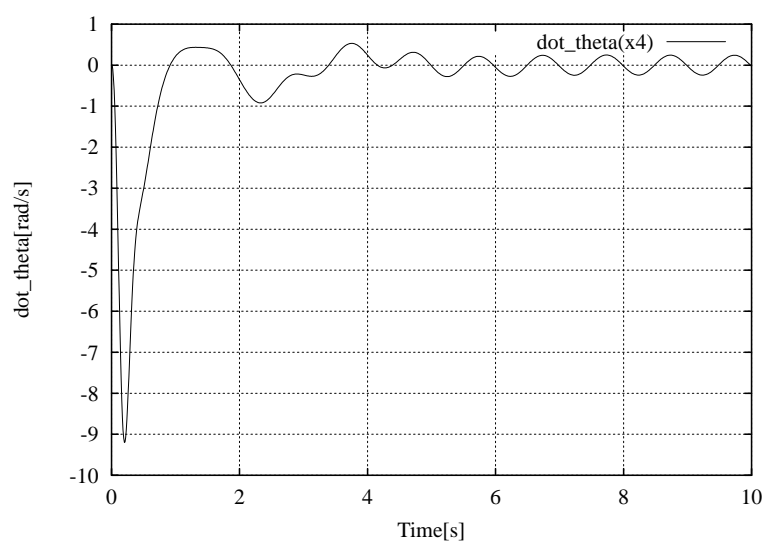


図 25 振子角速度 ( $x_4$ ) の時間推移 (外乱あり):初期状態量  $x_0 = [0.5, 0, \pi, 0]^T$

### 4.3 結果と考察

各数値シミュレーションにより得られた結果について考察する．

条件.1のシミュレーション結果より，倒立振子がReceding-Horizon 制御問題によって振り上げられ，原点に倒立していることがわかる．初期状態を安定平衡点(条件.2)や入力がかかない状態(条件.3)とした際も，原点において安定化されているので，大域的に有効な制御則であることがわかる．さらに条件.4では，原点近傍において振子が倒れず安定となっているので，状態フィードバック制御則が持つロバスト性を確認できた．全てのシミュレーションにおいて，10 秒のシミュレーション時間に対して8 秒前後で数値計算が終了しているので，リアルタイム最適フィードバック制御が実現できると言える．

## 5. おわりに

本論文では、非ホロノミックシステムである倒立振子系に対して Receding-Horizon 制御問題を適用し、一つの制御則でのリアルタイム最適フィードバック制御を提案した。

2 章では、倒立振子系の状態方程式および系の持つ性質について示した。その際に、倒立振子系では入力がかかない状態が存在し、そのような状態は振子が真横になった瞬間であることについて示した。

3 章においては、非線形最適制御問題を用いることにより、評価関数を最小とする意味で最適な大域的に有効である入力を得られる最適制御則を構築する手法を示した。その中で非線形最適制御問題として、非線形最適レギュレータ問題と Receding-Horizon 制御問題の二つの手法を述べた。

非線形最適レギュレータ問題では、解の概念を拡張し、微分不可能点も解として認める粘性解を用い、偏微分項の近似手法である有限差分近似法により Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の粘性解を導く手法を示した。

次に、有限区間の評価関数を毎時刻において評価することによって、無限時間先まで有効な制御則を設計できる Receding-Horizon 制御問題について示した。さらに Receding-Horizon 制御問題での計算法として連続変形法を用いることで、状態と共状態の関係式により常微分方程式を積分することのみで最適解を得ることができ、実時間での状態フィードバック制御が可能であることを示した。

4 章では、Receding-Horizon 制御問題において示した手法を倒立振子系に適用し、数値シミュレーションを行なった。得られた結果より、論文で提案する手法の制御性能について考察し、それが有効であることを確認した。

今後の課題としては、実機に適用する際に問題になると思われる入力・状態制限を考慮した場合の最適フィードバック則を構築するための手法を提案するということが考えられる。

## 謝辞

本研究を進めるにあたって，主導教官として御指導，御助言をいただいた奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科システム制御・管理講座西谷紘一教授に深く感謝いたします．

お忙しい中，副指導教官になっていただきましたロボティクス講座の小笠原司教授に感謝いたします．

また，非線形制御理論に関する知識および常日頃より多大なる御指導，御助言をいただいた今福啓助手に感謝いたします．

最後に，この二年間の学生生活においてお世話になりましたシステム制御・管理講座の皆様は厚くお礼申し上げます．

## 参考文献

- [1] 大住, 泉川 : 非線形制御による倒立振子の振り上げと安定化, 計測自動制御学会, vol.33, no.10, 1010-1018, 1997
- [2] Brockett, R.W. : Asymptotic stability and feedback stabilization, in differential geometric control theory, (R.Brockett, R.Millman, and, H.Sussman, eds.), vol.27 of Progress in Mathematics, pp.181-208, 1983.
- [3] Wendell H.Fleming and H.Mete Soner : Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, Springer-Verlag, New York, 1993
- [4] Harold J.Kushner and Paul G.Dupuis : Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time, Springer-Verlag, New York, 1992
- [5] Toshiyuki Ohtuka and Hironori A.Fujii : Real-time optimization algorithm for nonlinear receding-horizon control, Automatica, vol.33, no.6, pp.1147-1154, 1997
- [6] 大塚敏之 : 非線形最適フィードバック制御のための実時間最適手法計測と制御, vol.36, no.11, 776-781, 1997
- [7] Toshiyuki Ohtsuka : Continuous-Type Quasi-Newton Method for Nonlinear Receding Horizon Control, The 22nd SICE Symposium on Dynamical System Theory, Preprints, pp.203-208, Utsunomiya, October 26-28, 1999
- [8] 茨木 俊秀, 福島 雅夫 : 最適化の手法, 共立出版株式会社, 1993

## 付録

### A. 連続変形法の高速度化手法

本論文では，連続変形法により Receding-Horizon 制御問題を実時間で解く手法を提案した．4 状態 1 入力である倒立振子系においてはリアルタイムに解を導くことが可能であるが，さらに状態数や入力が増えた際に実時間でのフィードバック制御は困難となる．そこで準ニュートン法の概念より，連続変形法をさらに高速な数値計算法 [7] とする手法を示す．

#### A.1 準ニュートン法

準ニュートン法は，最適制御問題において局所最適解を求めるための代表的な手法 [8] である勾配法的一种である．勾配法の簡単な概要としては，状態  $x \in \mathbf{R}^n$  を含む最小としたい関数  $H \in \mathbf{R}$  の偏微分値  $\partial H / \partial x$  から， $H$  の極小値を探索する方向を  $-\partial H / \partial x$  として， $H$  が極小となる部分を探す手法である．その際に，適当な正定値対象行列  $\alpha \in \mathbf{R}^{n \times n}$  を用い， $-\alpha(\partial H / \partial x)$  とすればより高速な探索が可能となる．そこで各反復において定義式よりパラメータ  $\alpha$  を更新しながら，適切に局所最適解を求める手法が準ニュートン法である．これを用い Receding-Horizon 制御問題において最適解を導く手順を述べる．

#### A.2 準ニュートン法による連続変形法の高速度化

連続変形法において，仮想時間軸上において  $T(t)$  先までを評価した後に，式 (85), (86) より逆時間に計算する必要がある．本手法では，この逆時間に計算する過程を定義式により簡略化する．

次の非線形系を考える．

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \quad (110)$$

$x(t) \in \mathbf{R}^n$  は状態， $u(t) \in \mathbf{R}^m$  は入力であり， $F : \mathbf{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbf{R}^n$  である．連続変形法と同じように離散化誤差について考察する．仮想時間軸  $\tau$  を考慮に入れた状態

量  $\tilde{x}(t, \tau) \in \mathbf{R}^n$  と共状態量  $\tilde{p}(t, \tau) \in \mathbf{R}^n$  より, 式 (111) で表される終端条件を満たすように, 初期状態量  $x(t_0)$  から初期共状態量  $p(t_0)$  を求め最適軌道を求めることが目的である.

$$E_1(x(t), p(t), T(t)) = \tilde{p}(t, T) - \varphi_{\tilde{x}}^T(\tilde{x}(t, T)) = 0 \quad (111)$$

しかし離散化誤差等より上式が満たされないので  $E_1 \neq 0$  となる. まず, 安定行列  $A_1$  を用い  $E_1(t, T(t))$  の安定化を行ない

$$\dot{E}_1 = A_1 E_1 \quad (112)$$

とする. 式 (112) より式 (113) となる.

$$\dot{p}(t) = E_{1p}^{-1} \left( A_1 E_1 - E_{1x} \dot{x} - E_{1T} \dot{T} \right) \quad (113)$$

しかし式 (113) を正確に解く際は,  $\tau$  軸上において多くの計算量が必要とされる. そこで上式を新たな行列  $\Lambda(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\gamma(t) \in \mathbf{R}^n$  で置き換える.

$$\Lambda(t) = E_{1p}^{-1} A_1 \quad (114)$$

$$\gamma(t) = -E_{1p}^{-1} (E_{1x} \dot{x} + E_{1T} \dot{T}) \quad (115)$$

式 (114) と式 (115) を式 (113) に代入すると, 次のようになる.

$$\dot{p}(t) = \Lambda(t) A_1 E_1 + \gamma(t) \quad (116)$$

ここで式 (116) により共状態量の関係式を仮定したことにより, 式 (112) について  $\dot{E}_1 - A_1 E_1 \neq 0$  となる. そこで生じる誤差を  $E_2$  として (117) を定義し, 式 (116) を用いて更に変形すると式 (118) となる.

$$E_2 = \Lambda(t) \left( \dot{E}_1 - A_1 E_1 \right) \quad (117)$$

$$= \Lambda(t) \dot{E}_1 - \dot{p}(t) + \gamma(t) \quad (118)$$

誤差  $E_2$  を漸近安定化する必要があるので, 適当な安定行列  $A_2$  により式 (119) とする.

$$\dot{E}_2 = A_2 E_2 \quad (119)$$



式 (118) と式 (119) をまとめて次式が導かれる .

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \Lambda^{-1} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (120)$$

式 (120) より  $\Lambda^{-1}(t)$  が有界であるなら ,  $E_1(t), E_2(t)$  は急速に減少することがわかる . また式 (118) と式 (119) より ,  $\dot{\Lambda}(t)$  と  $\dot{\gamma}(t)$  の関係式が得られる .

$$\begin{bmatrix} \dot{\Lambda}(t) & \dot{\gamma}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ 1 \end{bmatrix} = A_2 E_2 + \ddot{p}(t) - \Lambda(t) \ddot{E}_1 \quad (121)$$

ここで式 (121) により最適である  $\dot{\Lambda}(t)$  と  $\dot{\gamma}(t)$  を求めなければならないが , ノルム  $\|[\dot{\Lambda}, \dot{\gamma}]\|$  を最小にするという意味で  $[\dot{\Lambda}, \dot{\gamma}]$  を解くために , 以下の *Lemma1.* を使用する .

*Lemma1.* 二つのベクトル  $s, y$  が与えられ ,

$$\min_{X s=y} \|X\|_F \quad (122)$$

次式を満たすような唯一の  $X$  は

$$X = \frac{y s^T}{\|s\|^2} \quad (123)$$

と表される .  $\square$

*Lemma1.* を式 (121) に適用することで , *Theorem1.* が導かれる .

*Theorem1.*

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \dot{\Lambda} & \dot{\gamma} \end{bmatrix} \right\|_{E_1} \quad (124)$$

式 (124) を満たすような唯一の解は

$$\begin{bmatrix} \dot{\Lambda} & \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \frac{A_2 E_2 + \ddot{p} - \Lambda \ddot{E}_1}{\|\dot{E}_1\|^2 + 1} \begin{bmatrix} \dot{E}_1^T & 1 \end{bmatrix} \quad (125)$$

と表される .  $\square$

毎時刻において式 (125) を  $\Delta t$  で積分することにより ,  $\Delta t$  先の  $\Lambda, \gamma$  を求めることができる . 同じように式 (116) を  $\Delta t$  で積分することで共状態量を計算する .

初期時刻における  $\Lambda(0), \gamma(0)$  及び  $\dot{\Lambda}(0), \dot{\gamma}(0)$  を求める．初期時刻において式 (120) が  $p(0)$  や  $\Lambda(0), \gamma(0)$  を含むことから， $E_1(0) \neq 0, E_2(0) \neq 0$  であると状態が収束しない可能性がある．そこで  $E_1(0) = 0, E_2(0) = 0$  とする．評価区間を式 (67) として  $T(0) = 0$  からある一定の値  $T_f$  まで緩やかに増加させることとする．その為，初期時刻での共状態量  $p(0)$  は自明な解となる．

$$p(0) = \varphi_x^T(x(0)) \quad (126)$$

次に式 (111) を微分する．

$$\dot{E}_1 = \tilde{p}_t(t, T) - \varphi_{\tilde{x}\tilde{x}}\tilde{x}_t(t, T) - \varphi_{\tilde{x}t} + \{\tilde{p}_\tau(t, T) - \varphi_{\tilde{x}\tilde{x}}\tilde{x}_\tau(t, T)\}\dot{T} \quad (127)$$

$T(0) = 0$  のときは，

$$x(0) = \tilde{x}(0, 0) \quad (128)$$

$$p(0) = \tilde{p}(0, 0) \quad (129)$$

なので，式 (127) は，

$$\dot{E}_1 - \dot{p}(0) + \dot{T}(0)H_x^T + \{1 + \dot{T}(0)\}\varphi_{xx}F + \varphi_{xt} = 0 \quad (130)$$

となる．式 (118) と式 (127) から次式が得られる．

$$\begin{cases} \Lambda(0) = I \\ \gamma(0) = \dot{T}(0)H_x^T + \{1 + \dot{T}(0)\}\varphi_{xx}F + \varphi_{xt} \end{cases} \quad (131)$$

更に式 (125) には  $\ddot{p}(0), \ddot{E}_1(0)$  が必要となる．そこで  $E_1, E_2$  の微分値は初期時刻において全てゼロとすることで，式 (125) より以下が得られる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\Lambda}(0) & \dot{\gamma}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ddot{p}(0) \end{bmatrix} \quad (132)$$

$\ddot{p}(0)$  については式 (131) より式 (133) とする．

$$\ddot{p}(0) = \frac{d}{dt} \left[ \dot{T}(0)H_x^T + \{1 + \dot{T}(0)\}\varphi_{xx}F + \varphi_{xt} \right] \Big|_{t=0} \quad (133)$$

以上により最適解の計算を行なう．準ニュートン法において  $\dot{E}_1, \ddot{E}_1$  及び  $\ddot{p}$  が必要となるが，全て後進差分により求める．簡単な計算の手順を次に示す．

Step.1 まず初期時刻  $t = 0$  とする． $x(0) = 0$  を測定し， $T(0) = 0$  より初期共状態量  $p(0) = \varphi_x^T[x(0)]$  を計算する．

Step.2 式 (66) より最適制御入力  $u^*$  を求める．

Step.3 初期条件を  $\tilde{x}(t, 0) = x(t), \tilde{p}(t, 0) = p(t)$  として Euler-Lagrange 方程式を  $\tau = T(t)$  まで解く．

Step.4  $t = 0$  であるなら，式 (131) より  $\Lambda(0), \gamma(0)$  を求め，式 (132) より  $\dot{\Lambda}(0)$  と  $\dot{\gamma}(0)$  を計算する． $t \neq 0$  であるなら，式 (125) より  $\dot{\Lambda}(t), \dot{\gamma}(t)$  を計算する．

Step.5 式 (116) を 1 ステップだけ数値積分し共状態量  $p(t + \Delta t)$  を求める．

$$p(t + \Delta t) = \{\Lambda(t)A_1E_1(t) + \gamma(t)\}\Delta t + p(t)$$

Step.6 1 ステップだけ数値積分し  $\Lambda(t + \Delta t), \gamma(t + \Delta t)$  を求める．

$$\Lambda(t + \Delta t) = \dot{\Lambda}(t)\Delta t + \Lambda(t)$$

$$\gamma(t + \Delta t) = \dot{\gamma}(t)\Delta t + \gamma(t)$$

Step.7 時刻  $t$  を  $\Delta t$  だけ進める．

$$t := t + \Delta t$$

Step.8  $x(t)$  を測定．

Step.9 Step 2. へ戻る．

連続変形法とは違い，準ニュートン法は仮想時間軸  $\tau$  において逆時間に計算する過程が簡略化されている．そのため前者より瞬間的に誤差  $E_1, E_2$  が大きくなるが，式 (85) と式 (86) を逆時間に計算するという手順が簡略化され，より高速な数値計算手法となっている．