

Lista 3

Ítallo Silva - 118110718 | |

Questão 1

Questão 2

Questão 3

Questão 4

Questão 5

Questão 6

Questão 7

Seja p a proporção de mulheres, então $p = 0,30$.

Pelo TLC, sabemos que $\hat{p} \sim N\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right)$, substituindo p e n , temos que $\hat{p} \sim N(0,3; 0,021)$.

A probabilidade que buscamos é dada por $P(|\hat{p} - p| < 0,01) = P(-0,01 < \hat{p} - p < 0,01)$. Somando p na igualdade temos $P(|\hat{p} - p| < 0,01) = P(0,29 < \hat{p} < 0,31)$.

Padronizando, temos: $P(0,29 < \hat{p} < 0,31) = P\left(\frac{0,29-0,30}{\sqrt{0,021}} < Z < \frac{0,31-0,30}{\sqrt{0,021}}\right) = P(-0,07 < Z < 0,07) = P(Z < 0,07) - P(Z < -0,07) = 0,5279 - 0,4721 = 0,056$.

Assim $P(|\hat{p} - p| < 0,01) = 0,056$.

Questão 8

a)

Temos que $S_n \sim \text{Bin}(8; 0,20)$, assim:

```
dist <- list('n' = as.character(seq(0,8)),
            '$P(S_n = n)$' = round(dbinom(seq(0,8), 8, 0.2), 3)) %>%
  as_tibble() %>%
  t() %>%
  as_tibble()
```

```
rownames(dist) <- c("n", "$P(S_n = n)$")
dist %>% knitr::kable(digits = 3, col.names = rep("", 9))
```

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(S_n = n)$	0,168	0,336	0,294	0,147	0,046	0,009	0,001	0,000	0,000

b)

Temos que 25% de peças defeituosas corresponde a $25\% \cdot 8 = 2$ peças. Assim, desejamos obter $P(S_n \leq 2)$. Usando R:

```
p <- pbinom(2, 8, 0.20)
```

Assim, $P(S_n \leq 2) = 0,7969$.

c)

Pelo TCL, temos que $S_n \sim N(np; npq)$, onde $n = 8$, $p = 0,20$ e $q = 0,80$, assim $S_n \sim N(1,6; 1,28)$. Agora, calculemos $P(S_n \leq 2)$, correspondente a no máximo 25% de peças com defeito:

$$P(S_n \leq 2) \rightarrow P\left(Z \leq \frac{2-1,6}{\sqrt{1,28}}\right) = P(Z \leq 0,35).$$

Usando a tabela temos que $P(Z \leq 0,35) = 0,6368$. Calculando no R, temos:

```
p <- pnorm(0.35)
```

Logo $P(Z \leq 0,35) = 0,6368$. A probabilidade foi bem diferente, isso se deve ao fato do n ser pequeno e $n \cdot p < 5$, assim fazendo a aproximação não ser muito boa.

d)

Considerando um sorteio de 30 peças. Temos que $25\% \cdot 30 = 7,5$.

Usando a distribuição binomial (item b), temos:

```
pb <- pbinom(7, 30, 0.20) # Como a variável é discreta 7, pode ser usando ao invés de 7,5
```

Usando a aproximação pela Normal (item c), temos:

$$S_n \sim N(np; npq) \rightarrow S_n \sim N(6; 4,8), \text{ assim calculando no R:}$$

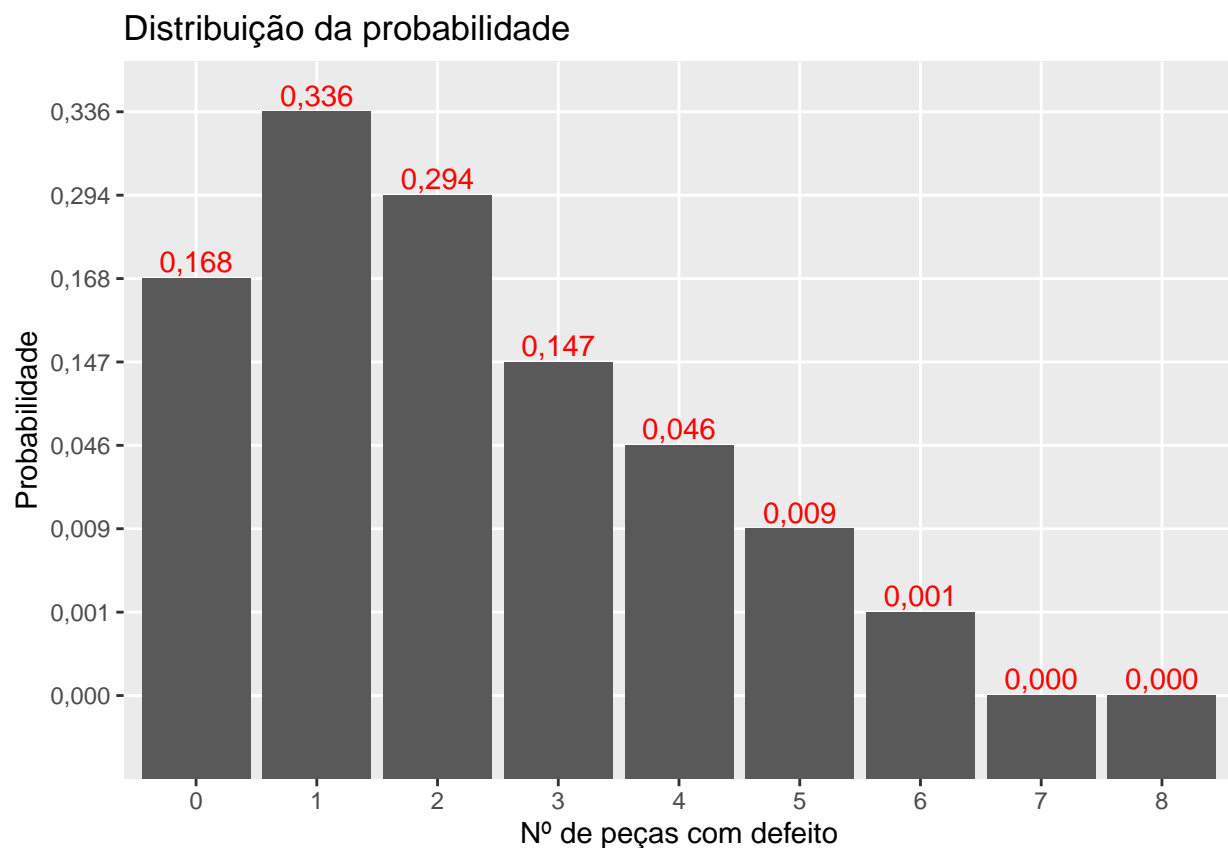
```
pn <- pnorm(7.5, mean = 6, sd = sqrt(4.8))
```

Pela binomial temos $P(S_n \leq 7,5) = 0,7608$ e pela normal temos $P(S_n \leq 7,5) = 0,7532$. Com $n = 30$, temos uma aproximação bem mais próxima do que as calculadas com $n = 5$, nos itens b e c.

e)

Representação do item a

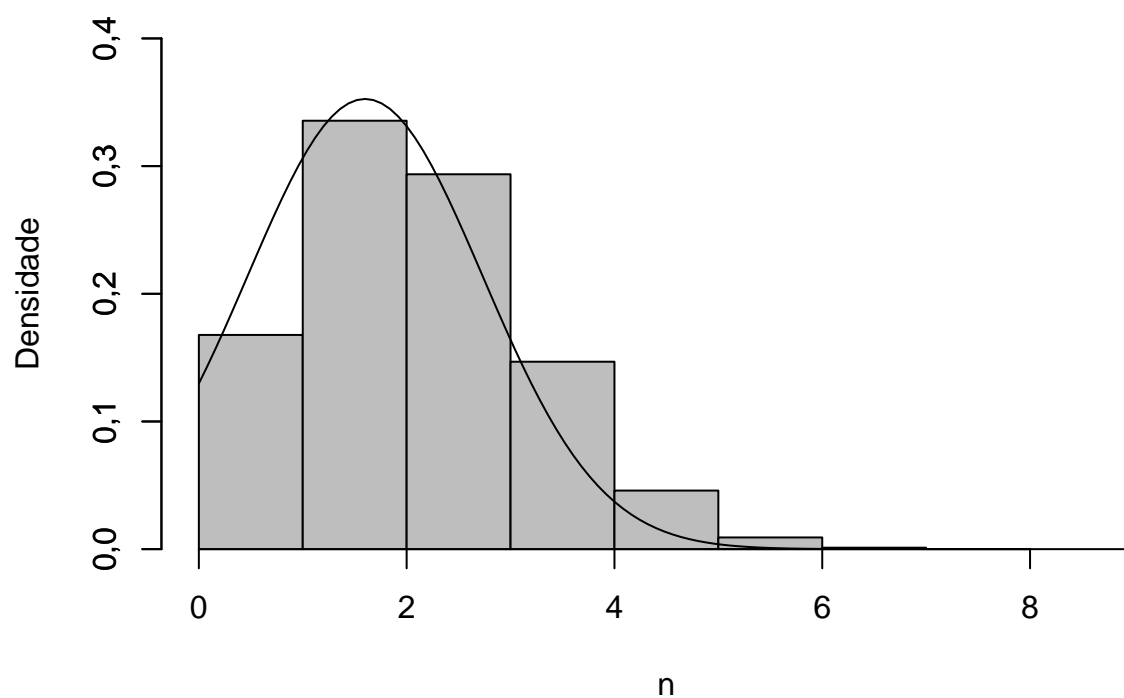
```
dist %>% t() %>% as_tibble() %>%
  ggplot(aes(x = n, y = `P(S_n = n)`)) +
  geom_bar(stat = "identity", position = 'dodge') +
  labs(title = "Distribuição da probabilidade",
       x = "Nº de peças com defeito",
       y = "Probabilidade") +
  geom_text(mapping = aes(x = n, y = `P(S_n = n)`), label = `P(S_n = n)`),
           color = 'red',
           nudge_y = 0.2)
```



Representação do item b e c

```
f <- function(x) { dnorm(x, mean = 1.6, sd = sqrt(1.28)) }

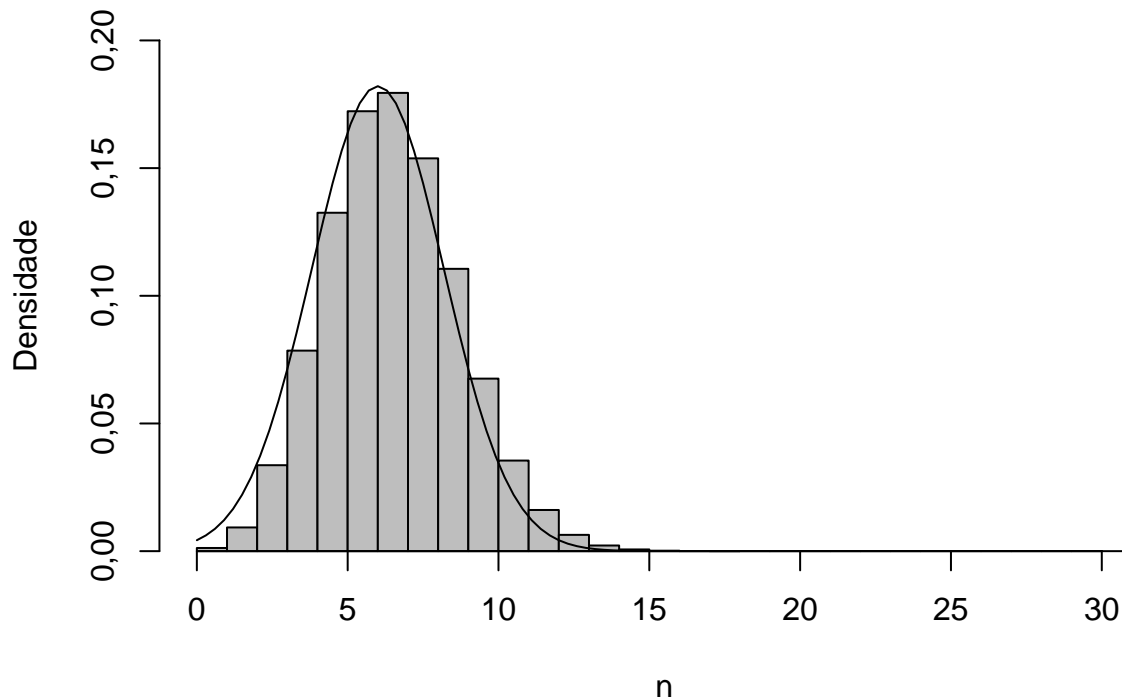
barplot(dbinom(seq(0, 8), 8, 0.2), ylim = c(0, .4), space = 0, xlab = "n", ylab = "Densidade")
curve(f, from = 0, to = 8, add = TRUE)
axis(1)
axis(2)
```



Representação do item d

```
f <- function(x) { dnorm(x, mean = 6, sd = sqrt(4.8)) }

barplot(dbinom(seq(0, 30), 30, 0.2), ylim = c(0, .2), axes = FALSE, space = 0, xlab = "n", ylab = "Dens.")
curve(f, from = 0, to = 30, add = TRUE)
axis(1)
axis(2)
```



Questão 9

A parada é desnecessária caso o processo ainda esteja dentro da margem de 10% itens defeituosos. No pior caso, sendo o próprio 10%.

Sendo assim, o número Y de peças defeituosas no sorteio de 20 peças tem distribuição $Y \sim \text{Bin}(20; 0,1)$ e a proporção de peças com defeito \hat{p} tem distribuição aproximadamente $N(0,1; \frac{0,1-0,9}{20}) = N(0,1; 0,0045)$.

Queremos $P(\hat{p} > 0,15) \rightarrow P(Z > 0,75) = 1 - P(Z < 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$. Assim a probabilidade de uma parada desnecessária é 22,66%.

Questão 10

a)

Considerando a questão anterior, temos que a proporção \hat{p} de peças em uma caixa de 100 unidades tem distribuição aproxima por $N(0,1; 0,0009)$. E queremos $P(\hat{p} > 0,1)$, assim:

$$P(\hat{p} > 0,1) = P\left(Z > \frac{0,1-0,1}{\sqrt{0,0009}}\right) = P(Z > 0) = 50\%.$$

b)

Queremos $P(\hat{p} = 0)$, sendo assim não é recomendado utilizar a distribuição normal já que queremos uma probabilidade pontual, mas podemos utilizar a distribuição binomial $\hat{p} \sim \text{Bin}(100; 0.1)$. Sendo assim, $P(\hat{p} = 0) \approx 2,65 \times 10^{-5} \approx 0$.

c)

```
f <- function(x) { dnorm(x, mean = 10, sd = 3) }  
  
barplot(dbinom(seq(0, 100), 100, 0.1), space = 0, ylim = c(0, .15), axes = FALSE, xlab = "n", ylab = "D  
curve(f, add = TRUE)  
axis(1)  
axis(2)
```

