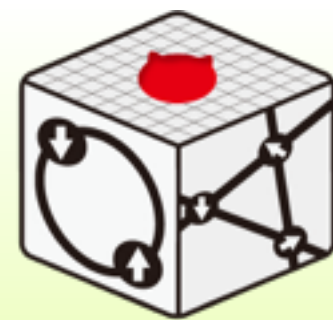


# mVMCの演習問題

三澤 貴宏

東京大学物性研究所 特任研究員 (PCoMS PI)



mVMC

## 基本

1. Heisenberg, Hubbard chain
2. Heisenberg, Hubbard 正方格子
3. 補助ツールI: fourier tool の使用
4. 補助ツールII: UHFを初期解にする

`mVMC-tutorial/HandsOn/2017_0830/Samples`  
以下にスクリプト例があります

発展 (mVMCで様々な量子相を作ってみましょう)

1. Hubbard +  $V \rightarrow$  電荷秩序
2. Heisenberg+J2  $\rightarrow$  ストライプ磁気秩序
3. Attractive Hubbard  $\rightarrow$  超伝導
4. 1D Kondo lattice  $\rightarrow$  近藤絶縁体
5. Kitaev model  $\rightarrow$  Kitaev spin 液体

# 1. Heisenberg chain

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

mVMC-tutorial/HandsOn/2017\_0830/Samples/1D\_Heisenberg

step 1. L=4でmVMCで最適化計算をしてみましょう

StdFace.defの例

```
L = 4
Lsub = 2
model = "Spin"
lattice = "chain"
J = 1.0
2Sz = 0
NVMCSample = 200
NSROptItrStep = 500
NSROptItrSmp = 50
NMPTrans = 1
NSPStot = 0
```

実行例

1. ./vmc.out -s StdFace.def

2. gnuplotで

plot ./output/zvo\_out\_001.dat u 1

Energy by  $H\Phi$

```
0 -2.00000000000 : S=0
1 -1.00000000000 : S=1
2 -0.00000000000
3 0.00000000000
4 0.00000000000
5 1.00000000000
```

# 1. Heisenberg chain

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

step 2. L=4でmVMCで相関関数計算をしてみましょう

StdFace\_aft.def

```
L                = 4
Lsub             = 2
model            = "Spin"
lattice          = "chain"
J                = 1.0
2Sz              = 0
NVMCSample       = 200
NVMCCalMode      = 1
NDataIdxStart    = 1
NDataQtySmp      = 5
NMPTrans         = 1
NSPStot          = 0
```

実行例

1. `cp ./output/zqp_opt.dat .`
2. `./vmcdry.out -s StdFace_aft.def ./zqp_opt.dat`

# 1. Heisenberg chain

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

## step 3. 物理量の平均値・標準誤差を計算してみましょう

output/zvo\_out\_001.dat  
output/zvo\_out\_002.dat  
output/zvo\_out\_003.dat  
output/zvo\_out\_004.dat  
output/zvo\_out\_005.dat

→独立なbinでのエネルギーの  
計算の値(一列目)

この平均値・標準誤差を  
計算すればよい

```
ln -s output aft
perl -w Aft_energy.pl
```

で計算できます。

同様に

output/zvo\_cisajs\_00n.dat  
output/zvo\_cisajsckalt\_00n.dat  
に独立なbinでの

1体・2体の相関関数の値が出力

この平均値・標準誤差を計算すればよい

```
ln -s output aft
perl -w Aft_Sq.pl
```

でスピン構造因子が計算できます。

# 1. Heisenberg chain

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

mVMC-tutorial/HandsOn/2017\_0830/Samples/1D\_Heisenberg

step 4.以上のことを一括して行なうのが X.sh です

```
sh ./X.sh
```

で構造因子の計算まで全て終わります

input.txtをいじるとサイズ・total spin(NSPStot)が変更られます

```
Lx 4  
Ly 1  
orb_num 1  
NSPStot 0
```

- Result\_Sq.dat をプロットしてみましょう
- サイズをいくつか変えて計算してみましょう
- S=1にして計算して励起状態が計算できるか試してみましょう

# 1. Heisenberg chain (references)

L=6:

0	-2.8027756377
1	-2.1180339887
2	-1.5000000000
3	-1.2807764064
4	-1.2807764064
5	-1.0000000000
6	-1.0000000000
7	-0.5000000000

L=8:

0	-3.6510934089
1	-3.1284190638
2	-2.6996281483
3	-2.4587385089
4	-2.4587385089
5	-2.1451483739
6	-2.1451483739
7	-1.8546376797

L=10:

0	-4.5154463545
1	-4.0922073467
2	-3.7705974354
3	-3.5432793743
4	-3.5432793743
5	-3.2461649167
6	-3.2461649167
7	-2.9759318691

# 1. Hubbard chain

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} (c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \text{h.c.}) + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$$

Step.1 L=4, U=4, t=1, half fillingで計算をしてみましょう.

StdFace.defの例

```
L = 4
Lsub = 2
model = "FermionHubbard"
lattice = "chain"
t = 1.0
U = 4.0
nelec = 4
2Sz = 0
NVMCSample = 200
NSROptItrStep = 500
NSROptItrSmp = 50
NMPTrans = 1
```

```
Energy by HΦ
0 -2.1027484835
1 -1.8064238518
2 -1.0681403934
3 -0.8284271247
4 -0.8284271247
5 0.0000000000
6 0.5814492811
7 2.0000000000
```



# 1. Hubbard chain

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} (c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \text{h.c.}) + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$$

Step. 2 物理量計算をやってみましょう

Step. 3 物理量の平均値・標準誤差を計算してみましょう

Step. 4 一括スクリプトで計算してみましょう(X.sh)

U, 電子数を変えるなどして色々計算してみましょう

HΦの計算結果と比べて見ましょう

HΦのスクリプト例

`./HPhi -s StdFace.def`

```
L = 4
model = "Hubbard"
lattice = "chain"
method = "fulldiag"
U = 4.0
t = 1.0
2Sz = 0
nelec = 4
```

```
L = 8
model = "Hubbard"
lattice = "chain"
method = "CG"
U = 4.0
t = 1.0
2Sz = 0
nelec = 8
exct = 8
```

# 1. Hubbard chain (references)

L=6:

0	-3.6687061788729571
1	-2.8983814740367304
2	-2.5163768731161431
3	-2.4229112638479289
4	-2.4229112638479293
5	-2.0927538294969210
6	-2.0927538294969210
7	-1.7690248232884345

L=8:

0	-4.6035262999892002
1	-4.2999927584330599
2	-4.0101539576440342
3	-3.7057642394839405
4	-3.7057642394839405
5	-3.4963563102152051
6	-3.4963563102152042
7	-3.2445570984649694

## 2. Heisenberg & Hubbard on the square lattice

- chainの場合とやることは同じです。計算が重くなるので、 $4 \times 4 = 16$  sites程度にしておいた方がよいです。
- `sp Result_Sq.dat` or `fourier tool` を使うと構造因子の3次元プロットがでます。

# 2. Heisenberg & Hubbard on the square lattice

## Heisenberg model

$(N_s = 4 \times 4)$	$E/N_s$	$S_{nn}$	$S_{nnn}$	$S(\mathbf{q}_{\text{peak}})$
ED	-0.70178020	-0.35089010	0.21376	0.09217
mVMC( $2 \times 2$ )	-0.701769(6)	-0.35088(3)	0.2136(2)	0.09212(6)
mVMC( $2 \times 2$ )+Lanczos	-0.701783(3)	-	-	-
mVMC( $4 \times 4$ )	-0.70178015(8)	0.35089007(4)	0.2139(4)	0.0922(1)
$(N_s = 6 \times 6)$	$E/N_s$	$S_{nn}$	$S_{nnn}$	$S(\mathbf{q}_{\text{peak}})$
ED	-0.6788721499	-0.33943607	0.207402499	0.069945
mVMC( $2 \times 2$ )	-0.67843(2)	-0.33921(1)	0.20738(1)	0.07019(4)
mVMC( $2 \times 2$ )+Lanczos	-	-	-	-
mVMC( $6 \times 6$ )	-0.678865(5)	-0.339433(3)	0.2072(2)	0.0698(1)
mVMC( $6 \times 6$ )+Lanczos	-0.678881(5)	-	-	-

Table 4: Comparisons with exact diagonalization for  $4 \times 4$  and  $6 \times 6$  Heisenberg model with  $J = 1$ . We note  $\mathbf{q}_{\text{peak}} = (\pi, \pi)$ . The relative errors  $\eta$  become 0.000001% for  $L = 4$  and 0.001% for  $L = 6$ , respectively.

## Hubbard model

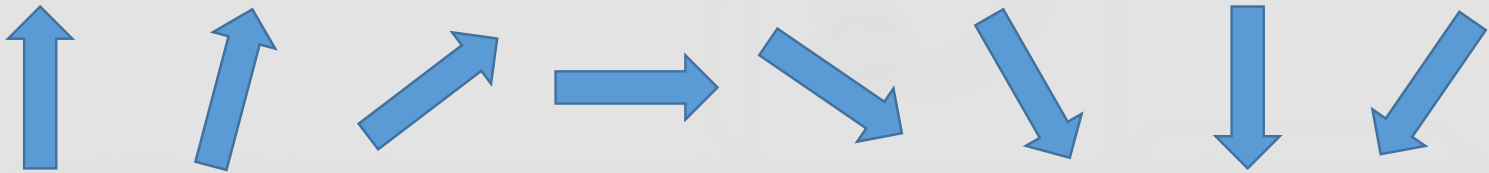
	$E/N_s$	$D$	$S_{nn}$	$S(\mathbf{q}_{\text{peak}})$
ED	-0.85136	0.11512	-0.2063	0.05699
mVMC( $2 \times 2$ )	-0.84982(4)	0.11529(5)	-0.2062(1)	0.05773(4)
mVMC( $2 \times 2$ )+Lanczos	-0.85105(3)	-	-	-
mVMC( $4 \times 4$ )	-0.85068(4)	0.1153(4)	-0.2062(5)	0.0573(2)
mVMC( $4 \times 4$ )+Lanczos	-0.85121(3)	-	-	-

Table 3: Comparisons with exact diagonalization for  $4 \times 4$  Hubbard model with  $U = 4$  and  $t = 1$  at half filling. Exact diagonalization (ED) is done by using  $\mathcal{H}\Phi$  [38, 39]. mVMC( $2 \times 2$ ) means  $f_{ij}$  has  $2 \times 2$  sublattice structures,  $\mathbf{q}_{\text{peak}} = (\pi, \pi)$ , and the parentheses denote the error bars in the last digit. Lanczos means that the first-step Lanczos calculations on top of the mVMC calculations.

### 3. fourier tool

## 相関関数のフーリエ変換

長距離の相関を調べる。



$$\langle \hat{A}_k^\dagger A_k \rangle = \frac{1}{N_{\text{Cell}}} \sum_{ij}^{N_{\text{site}}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)} \langle \hat{A}_i^\dagger A_j \rangle$$

ユーティリティ・プログラムとドキュメントはmVMC本体と別にある。

tool/fourier : フーリエ変換をするプログラム

tool/corplot : 3次元プロットをするプログラム

doc/userguid.html : からマニュアルを閲覧できる

# 計算結果

例/正方格子ハイゼンベルグ模型(16サイト)

sample/Standard/Spin/HeisenbergSquare/

```
$ パス/vmc.out -s StdFace.def
$ パス/vmc.out -s StdFace.def output/zqp_opt.dat
$ パス/fourier namelist.def geometry.dat
$ パス/corplot output/zvo_corr.dat
```

```
L = 4
W = 4
Lsub = 2
Wsub = 2
model = "Spin"
lattice = "tetragonal"
J = 1.0
NSROptItrStep = 200
2Sz = 0
NVMCCalMode = 1 [コメント(//)を外す]
```

##### Plot Start #####

Please specify target number from below (0 or Ctrl-C to exit):

Real Part Without ErrorBar

[ 1] Up-Up [ 2] Down-Down [ 3] Density-Density [ 4] SzSz [ 5] S+S- [ 6] S.S

Imaginary Part Without ErrorBar

[11] Up-Up [12] Down-Down [13] Density-Density [14] SzSz [15] S+S- [16] S.S

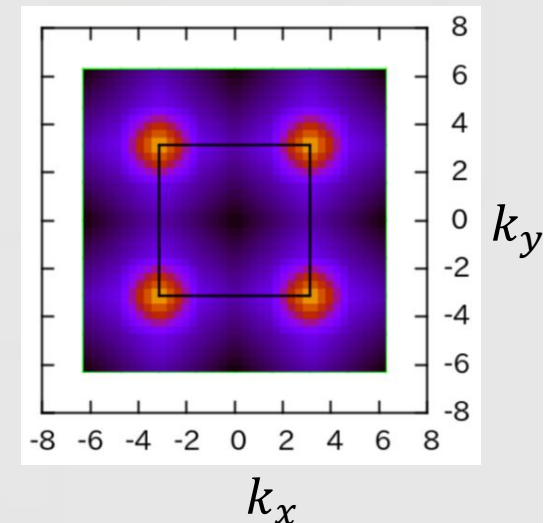
Real Part With ErrorBar

[21] Up-Up [22] Down-Down [23] Density-Density [24] SzSz [25] S+S- [26] S.S

Imaginary Part With ErrorBar

[31] Up-Up [32] Down-Down [33] Density-Density [34] SzSz [35] S+S- [36] S.S

Target : 6 (と打ってEnter)



既知の問題点

corplot内でgnuplotを呼び出しているが、  
4.4より前のバージョンのgnuplotでは描画できない。

# 注意: fourier toolとperl スクリプトの違い

perl スクリプト (Aft\_Sq.pl)

$$S(q) = \frac{1}{3N_s^2} \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \vec{S}_i \vec{S}_j \rangle e^{iq(r_i - r_j)}$$

$$N(q) = \frac{1}{N_s^2} \sum_{\langle i,j \rangle} \langle (\vec{N}_i - \langle \vec{N}_i \rangle) \cdot (\vec{N}_j - \langle \vec{N}_j \rangle) \rangle e^{iq(r_i - r_j)}$$

fourier tool

$$S(q) = \frac{1}{N_s} \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \vec{S}_i \vec{S}_j \rangle e^{iq(r_i - r_j)}$$

$$N(q) = \frac{1}{N_s} \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \vec{N}_i \vec{N}_j \rangle e^{iq(r_i - r_j)}$$

## 4. UHF解を初期条件にする

UHF解を初期条件にしてみましょう UHFの実行体は以下にあります

**/src/ComplexUHF/UHF**

**./UHF namelist.def**

**で計算可能**

**zqp\_AP0rbital\_opt.dat (fijの初期値)**

**が生成されます**

**注意: 初期条件を適切につくる必要があります**

**IniGreen.pl → 正方格子( $\pi, \pi$ )の磁気秩序を初期条件**

**namelist.def に Initial zinitial.def を追加**



## 4. UHF解を初期条件にする

```
sh ./IniUHF.sh
```

で平均場解からfijが生成される（UHFは実行するディレクトリにおいておく）

### IniUHF.shの中身

```
#[s]UHF
mkdir tmpUHF
cp IniGreen.pl ./tmpUHF
cp *def         ./tmpUHF
cp input.txt    ./tmpUHF
cp ./UHF        ./tmpUHF
cd ./tmpUHF
perl -w IniGreen.pl
echo "          Initial zinitial.def" >> namelist.def
./UHF namelist.def
cd -
#[e]UHF
cp tmpUHF/zqp_AP0rbital_opt.dat .
echo "          In0rbital  zqp_AP0rbital_opt.dat" >> namelist.def
```

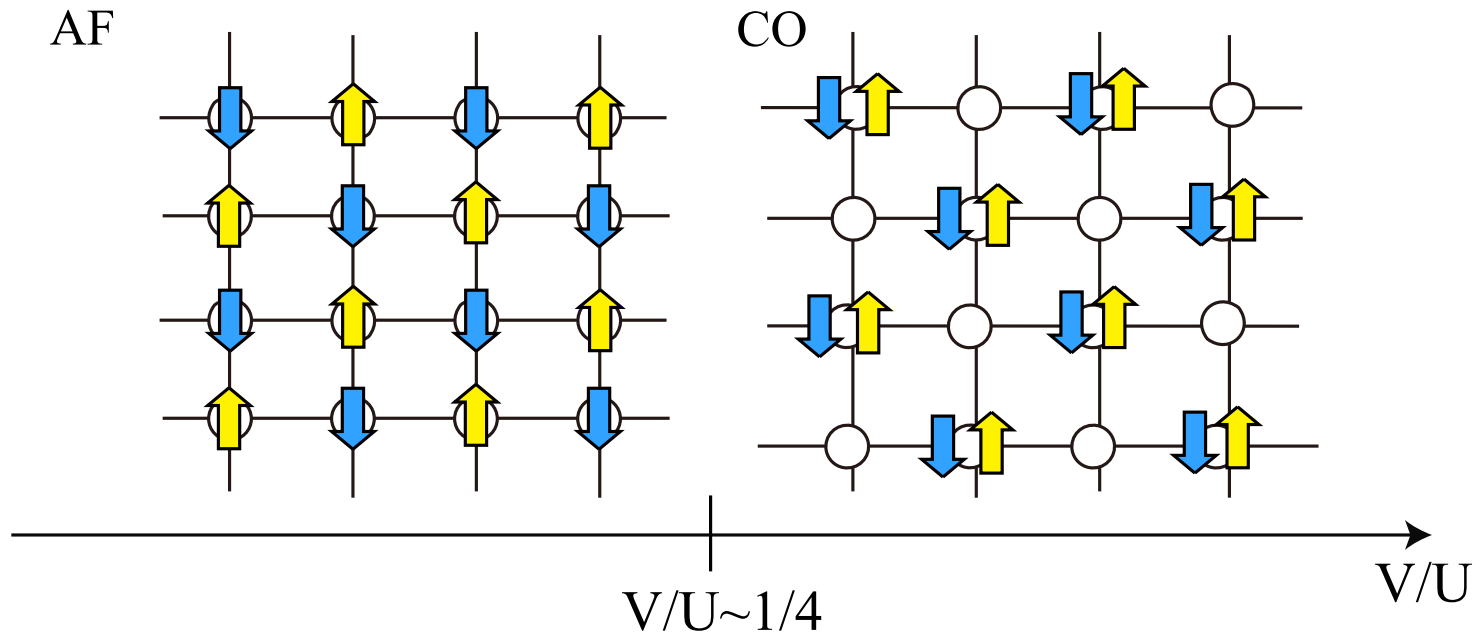
# 発展

1. Hubbard +  $V \rightarrow$  電荷秩序
2. Heisenberg+ $J_2 \rightarrow$  ストライプ磁気秩序
3. Attractive Hubbard  $\rightarrow$  1s 超伝導
4. 1D Kondo lattice  $\rightarrow$  近藤絶縁体
5. Kitaev model  $\rightarrow$  Kitaev spin 液体

4, 5は少し計算が重いです.

# 1. オフサイト斥力 $V$ の導入

$$H_V = V \sum_{\langle i,j \rangle} n_i n_j$$



電荷秩序が起きるかどうかをResult\_Nq.dat  
もしくはfourier tool を使って確認しましょう

# 1. オフサイト斥力 $V$ の導入

$$H_V = V \sum_{\langle i,j \rangle} n_i n_j$$

## StdFace.def の例

```
W          = 4
L          = 4
Wsub       = 2
Lsub       = 2
model      = "FermionHubbard"
lattice    = "Tetragonal"
t          = 1.0
U          = 4.0
V          = 2.0
nelec      = 16
2Sz        = 0
NVMCSample = 50
NSROptItrStep = 500
NSROptItrSmp = 50
NMPTTrans  = 4
```

## 書き換え方の例

1. `perl -w MakeMod.pl`  
でStdFace.defを生成

2. 生成したStdFace.def,  
StdFace\_2.def, StdFace\_aft.def  
で $V=2.0$ を追加

3. X.shの中の

```
perl -w MakeMod.pl
```

をコメントアウト

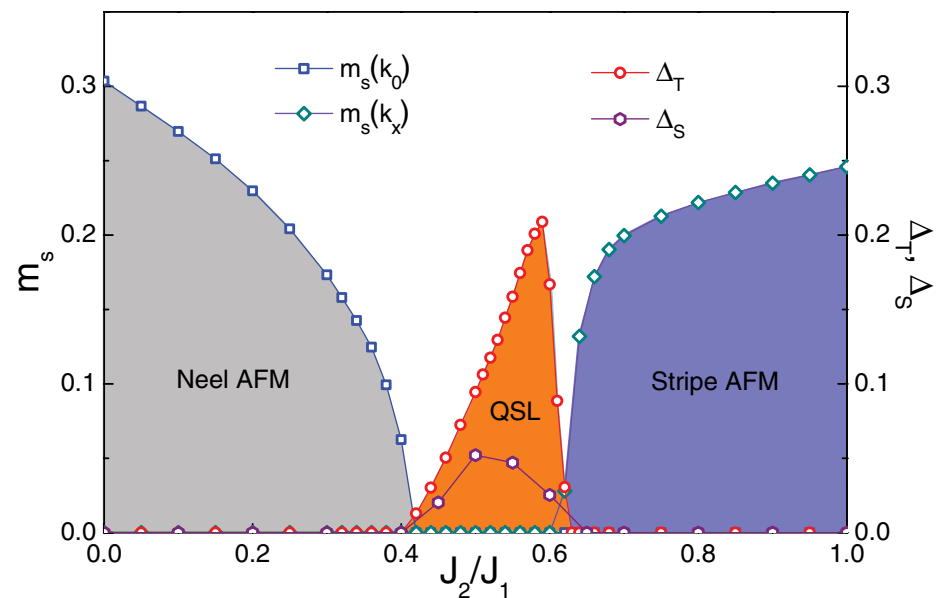
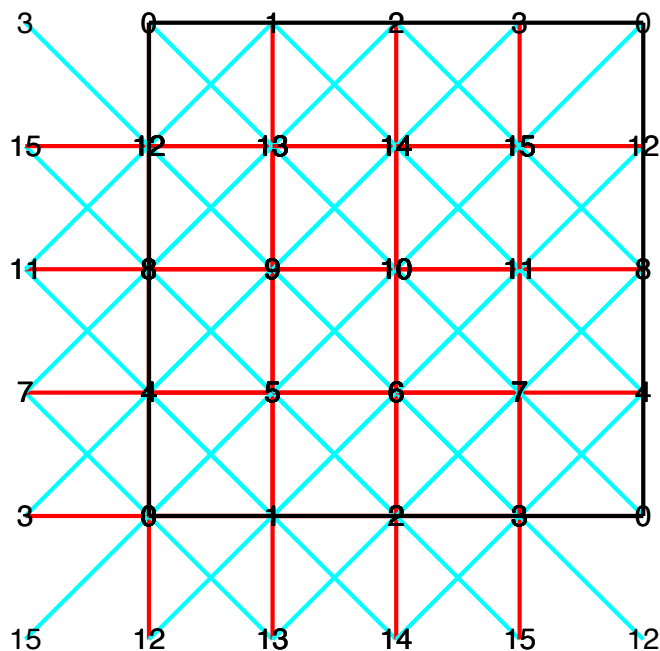
```
#perl -w MakeMod.pl
```

4. `sh ./X.sh`

## 2. J1-J2ハイゼンベルク模型

$$H = J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + J_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} S_i S_j$$

最近接 J1, 次近接 J2



PRB 86, 024424(2012)

lattice.gpで描画可能

J2/J1~0.5で非磁性の  
基底状態(スピン液体?)

## 2. J1-J2ハイゼンベルク模型

- J2=1でストライプ磁気秩序が起きるかどうかを

Result\_Sq.datもしくはfourier tool を使って確認しましょう

- J2=0.5近傍だとどうなるのでしょうか？

### StdFace.def の例

```
W          = 4
L          = 4
Wsub       = 2
Lsub       = 2
model      = "Spin"
lattice     = "Tetragonal"
J          = 1.0
J'         = 1.0
2Sz        = 0
NVMCSample = 50
NSROptItrStep = 500
NSROptItrSmp = 100
NMPTrans   = 1
NSPGaussLeg = 1
```

### 書き換え方の例

1. `perl -w MakeMod.pl`  
でStdFace.defを生成

2. 生成したStdFace.def,  
StdFace\_2.def, StdFace\_aft.def  
でJ'= 1.0 を追加

3. X.shの中の

`perl -w MakeMod.pl`  
をコメントアウト

`#perl -w MakeMod.pl`

4. `sh ./X.sh`

# 3.attractive Hubbard model

- Uを負にするだけ
- 1s (等方的)の超伝導相関を計算してみましょう  
(half fillingだと電荷秩序と超伝導が共存していることに注意しましょう)

## 書き換え方の例

1. perl -w MakeMod.pl  
でStdFace.defを生成
2. 生成したStdFace.def,  
StdFace\_2.def, StdFace\_aft.def  
でU=-4.0 に変更
3. X.shの中の  
perl -w MakeMod.pl  
をコメントアウト  
#perl -w MakeMod.pl
4. sh ./X.sh

$$P_{1s}(\vec{r}) = \frac{1}{2N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \langle \Delta_{1s}^\dagger(\vec{r}_i) \Delta_{1s}(\vec{r}_i + \vec{r}) + \Delta_{1s}(\vec{r}_i) \Delta_{1s}^\dagger(\vec{r}_i + \vec{r}) \rangle$$

$$\Delta_{1s}(\vec{r}_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{i\uparrow} c_{i\downarrow} - c_{i\downarrow} c_{i\uparrow}).$$

- 1sの相関関数を計算する  
スクリプトは以下にあります  
Samples/SC\_Correlation

## 使い方

1. sh X.sh
2. perl -w ForSCCor.pl → SC\_cisajscktaltdc.def
3. namelist.defの  
TwoBodyG greentwo.def → TwoBodyG SC\_cisajscktaltdc.def
4. vmc.out namelist.def
5. ln -s output SC
6. perl -w Aft\_SC1.pl

# 4. 1D Kondo lattice model

## StdFace.def の例

```
L           = 8
Lsub        = 2
model       = "Kondo"
lattice     = "chain"
t           = 1.0
J           = 1
nelec       = 8
2Sz         = 0
NVMCSample  = 200
NSROptItrStep = 2000
NSROptItrSmp  = 200
NMPTrans    = 2
NSPGaussLeg  = 8
```

$S=0, S=1$  の計算をして

スピンギャップを計算してみましょう

$(S = 0)$	$E/N_s$	$S_{\text{loc}}$	$S_{\text{nn}}^f$	$S(\pi)$
ED	-1.394104	-0.3151569745	-0.3386218911	0.05685112698
mVMC(2)	-1.39352(1)	-0.3142(6)	-0.3365(2)	0.0575(1)
mVMC(2)+Lanczos	-1.39399(2)	-	-	-
mVMC(8)	-1.39400(1)	-0.3158(3)	-0.3382(3)	0.0567(1)
mVMC(8)+Lanczos	-1.394099(5)	-	-	-
$(S = 1)$	$E/N_s$	$S_{\text{loc}}$	$S_{\text{nn}}^f$	$S(\pi)$
ED	-1.382061	-0.27480917	-0.224015671	0.057478
mVMC(2)	-1.38128(3)	-0.2743(3)	-0.2248(4)	0.05811(6)
mVMC(2)+Lanczos	-1.38187(1)	-	-	-
mVMC(8)	-1.38171(3)	-0.2750(4)	-0.2249(7)	0.0577(1)
mVMC(8)+Lanczos	-1.382011(2)	-	-	-

Table 5: Comparisons with exact diagonalization for one-dimensional Kondo-lattice model for  $J = 1$  and  $t = 1$ . Upper (Lower) panel shows the results for spin singlet (triplet) sector. In the triplet sector ( $S = 1$ ), we take total momentum as  $K = \pi$ , which gives the lowest energy in  $S = 1$ , while we take total momentum as  $K = 0$  for  $S = 1$ .

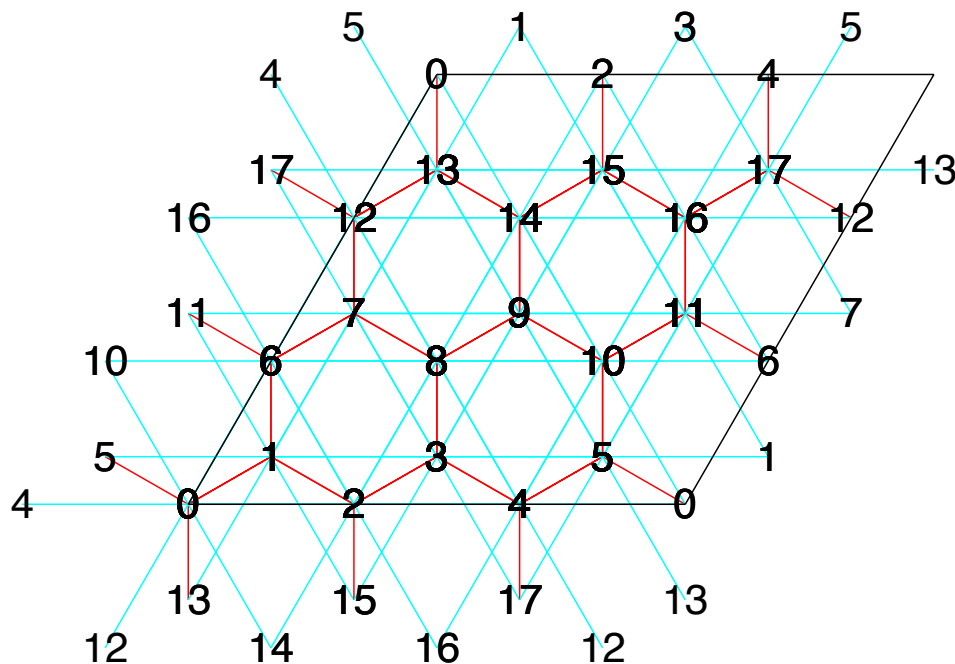
See, H. Tsunetsugu *et al.*, PRB 46, 3175 (1992),  
H. Tsunetsugu *et al.*, RMP 69, 809 (1997)



# 5: Kitaev model

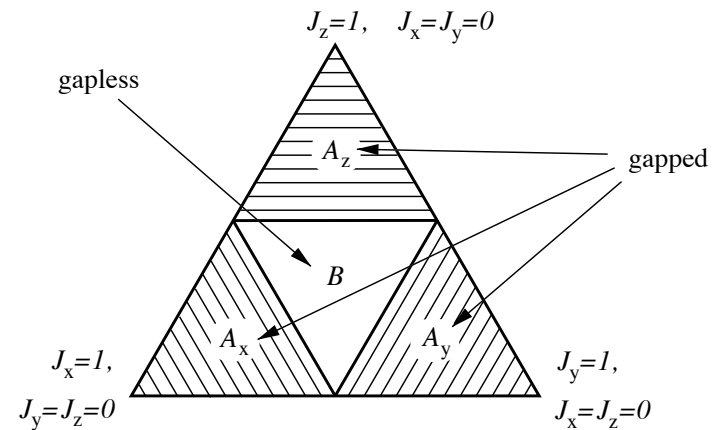
$$H = -J_x \sum_{x\text{-bond}} S_i^x S_j^x - J_y \sum_{y\text{-bond}} S_i^y S_j^y - J_z \sum_{z\text{-bond}} S_i^z S_j^z$$

3方向のそれぞれが  
 $J_x, J_y, J_z$ で相互作用



lattice.jpで描画可能

相図



Annals of Physics 321, 2-111 (2016)

可解模型→スピン液体

# 5: Kitaev model

$$H = -J_x \sum_{x\text{-bond}} S_i^x S_j^x - J_y \sum_{y\text{-bond}} S_i^y S_j^y - J_z \sum_{z\text{-bond}} S_i^z S_j^z$$

## StdFace.def の例

```
W          = 2
L          = 3
model      = "SpinGC"
lattice    = "Honeycomb"
NVMCSample = 200
NSROptItrStep = 5000
NSROptItrSmp = 100
NMPTTrans  = 6
J0x        = -1.0
J0y        = 0.0
J0z        = 0.0
J1x        = 0.0
J1y        = -1.0
J1z        = 0.0
J2x        = 0.0
J2y        = 0.0
J2z        = -1.0
```

乱数スタートは収束が遅いので注意  
→収束をどうしたら加速するか？  
[open problem]