CÂY NHỊ PHÂN TÌM KIẾM CÂN BẰNG (AVL TREE)

DATA STRUCTURES AND ALGORITHMS

Cây nhị phân tìm kiếm cân bằng

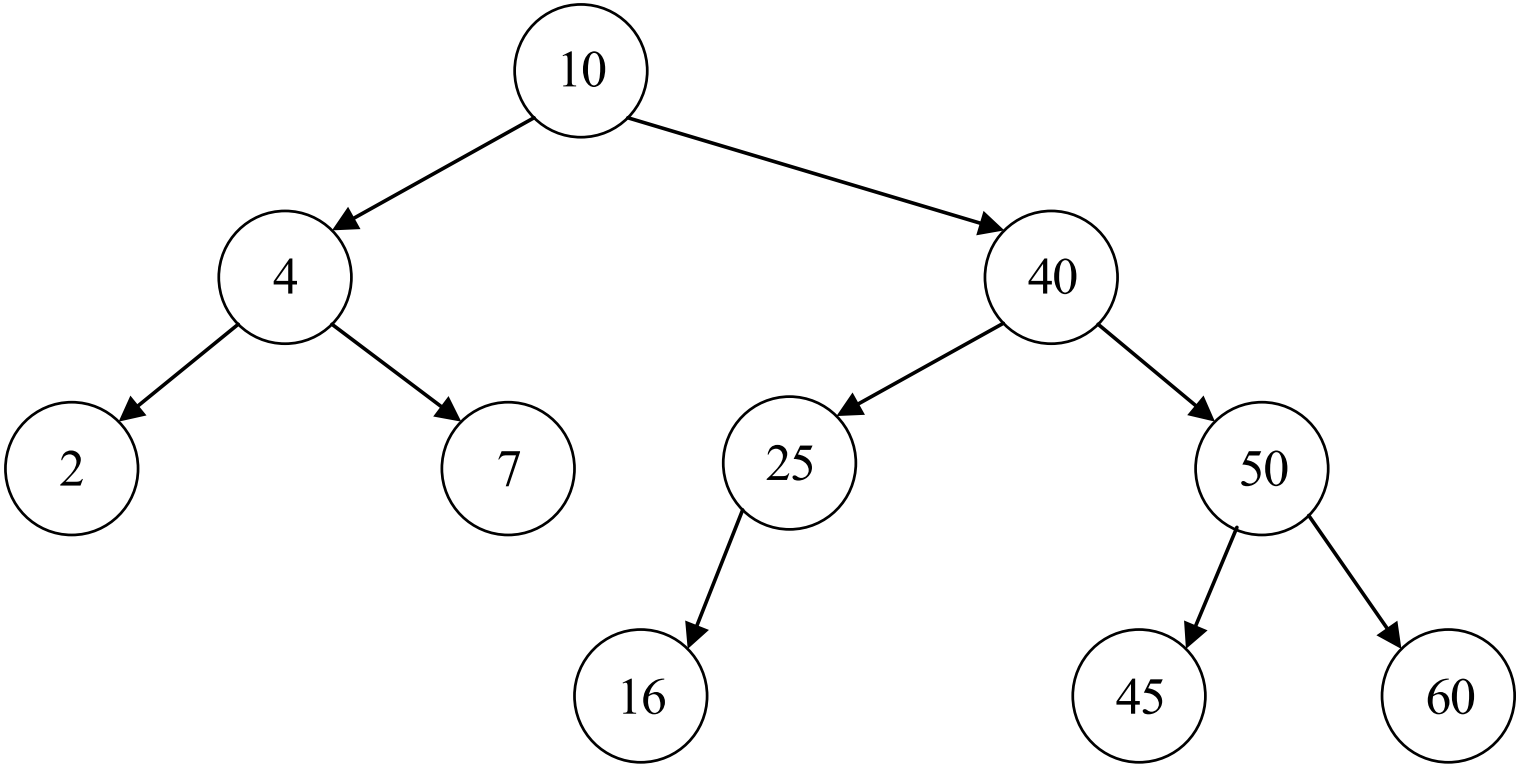
- Định nghĩa
- Tổ chức dữ liệu
- Các trường hợp mất cân bằng
- Các thao tác trên cây cân bằng
- Ứng dụng
- Bài tập

Định nghĩa

- Cây nhị phân tìm kiếm cân bằng là cây nhị phân tìm kiếm mà tại mỗi nút của chiều cao của cây con trái và chiều cao của cây con phải chênh lệch không quá một.
- **Cây AVL** được đặt theo tên của hai nhà phát minh Liên Xô, Georgy Adelson-Velsky và Evgenii Landis, trong bài báo được xuất bản năm 1962 "An algorithm for the organization of information”

Ví dụ

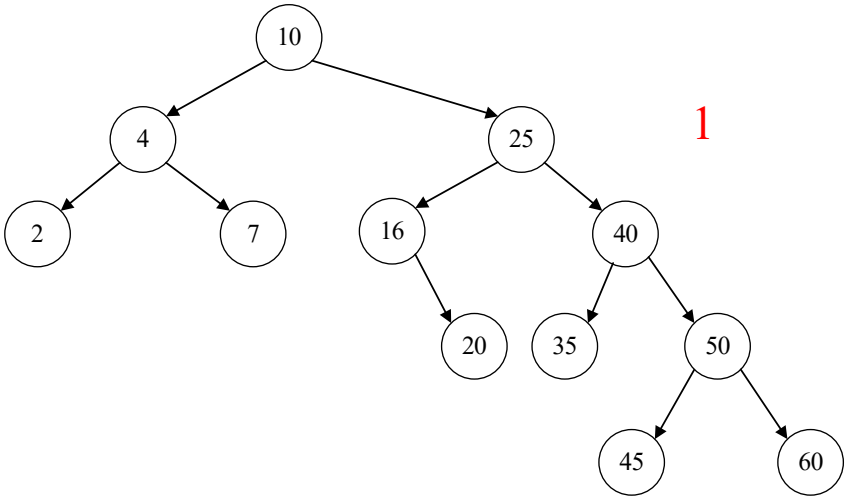
Tất cả các nút trong cây đều có độ cao cây con trái và cây con phải chênh lệch không quá 1.



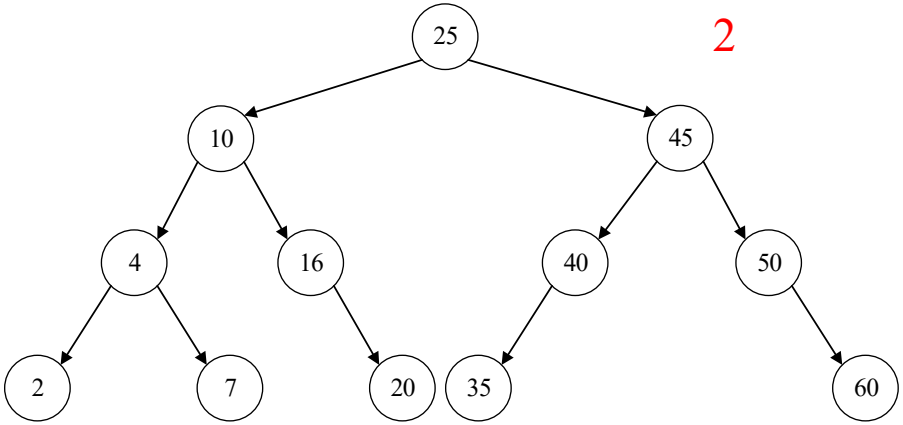
Câu hỏi:

- Hình nào sau đây là cây AVL?

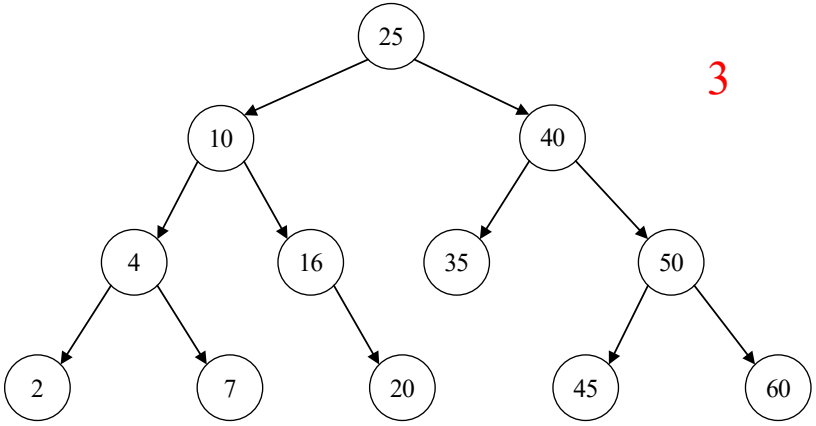
1



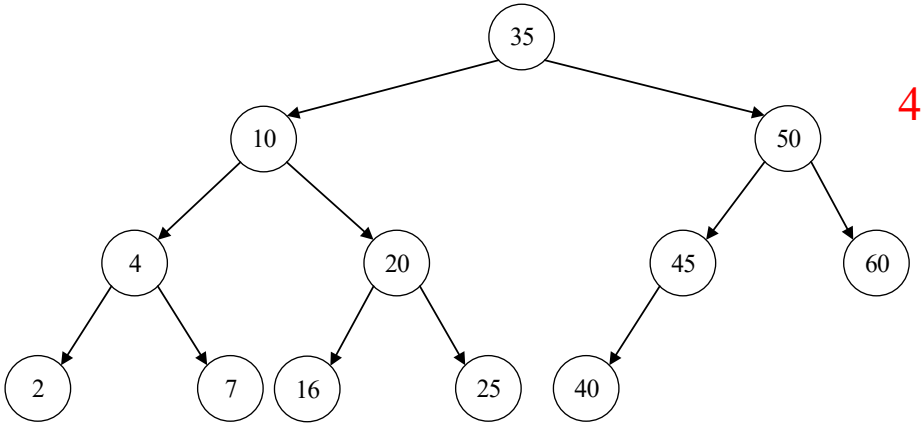
2



3



4



- Chỉ số cân bằng : độ lệch giữa cây trái và cây phải của một nút
- Các giá trị hợp lệ :
  - CSCB(p) = 0 $\Leftrightarrow$ Độ cao cây trái (p) = Độ cao cây phải (p)
  - CSCB(p) = 1 $\Leftrightarrow$ Độ cao cây trái (p) < Độ cao cây phải (p)
  - CSCB(p) = -1 $\Leftrightarrow$ Độ cao cây trái (p) > Độ cao cây phải (p)

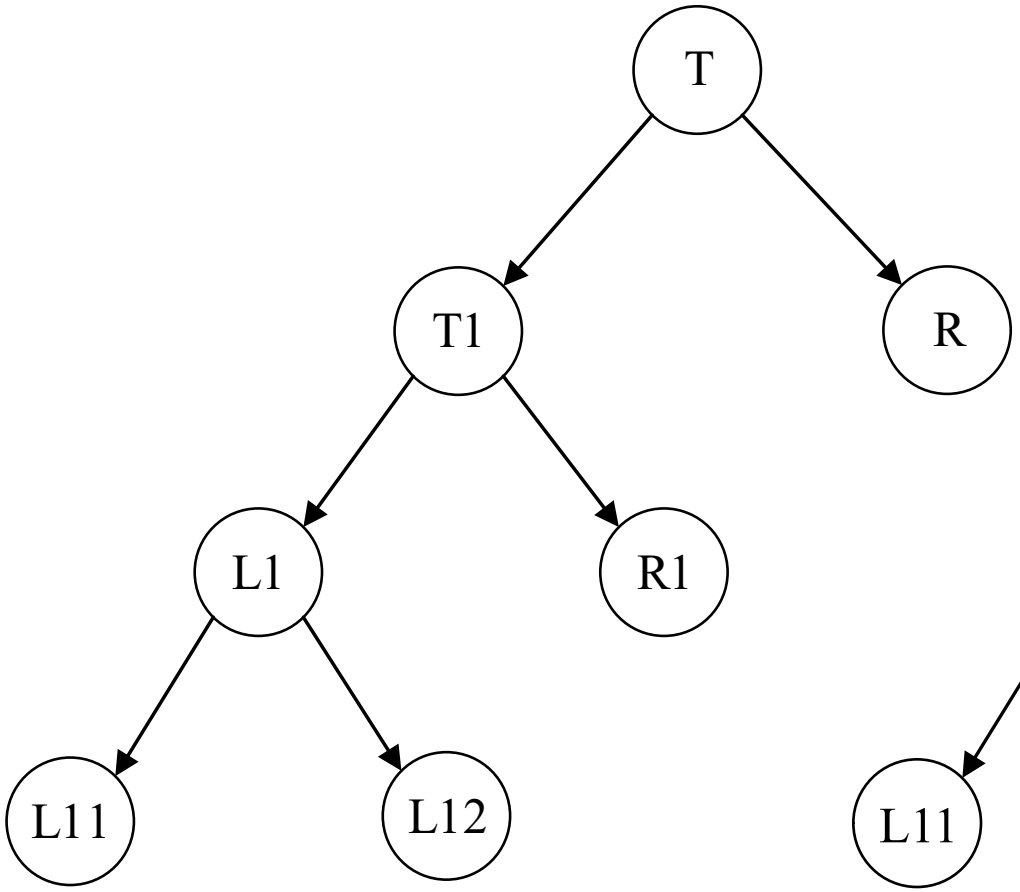
Tổ chức dữ liệu(tt)

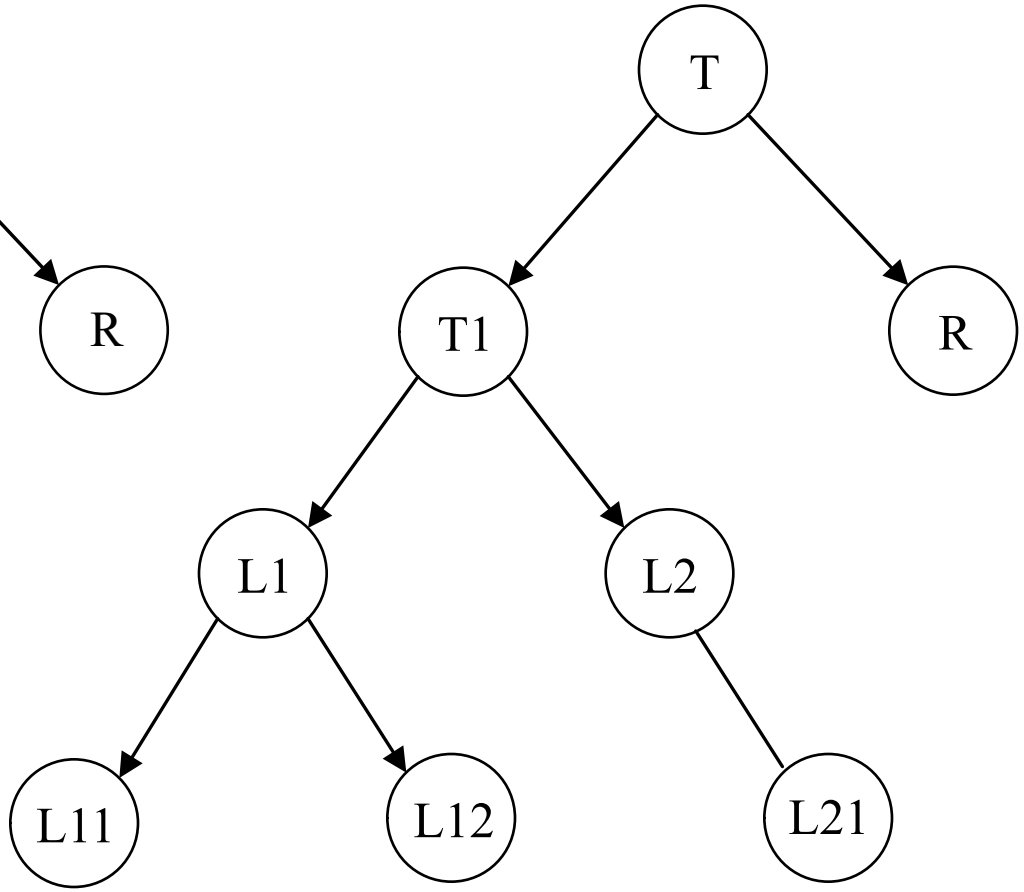
```
#define LH -1 //cây con trái cao hơn
#define EH 0  //cây con trái bằng cây con phải
#define RH 1  //cây con phải cao hơn


struct AVLNODE {
   DATA key;
   char balFactor; //chỉ số cân bằng
   AVLNODE* pLeft;
   AVLNODE* pRight;
};
typedef AVLNODE* AVLTREE;
```

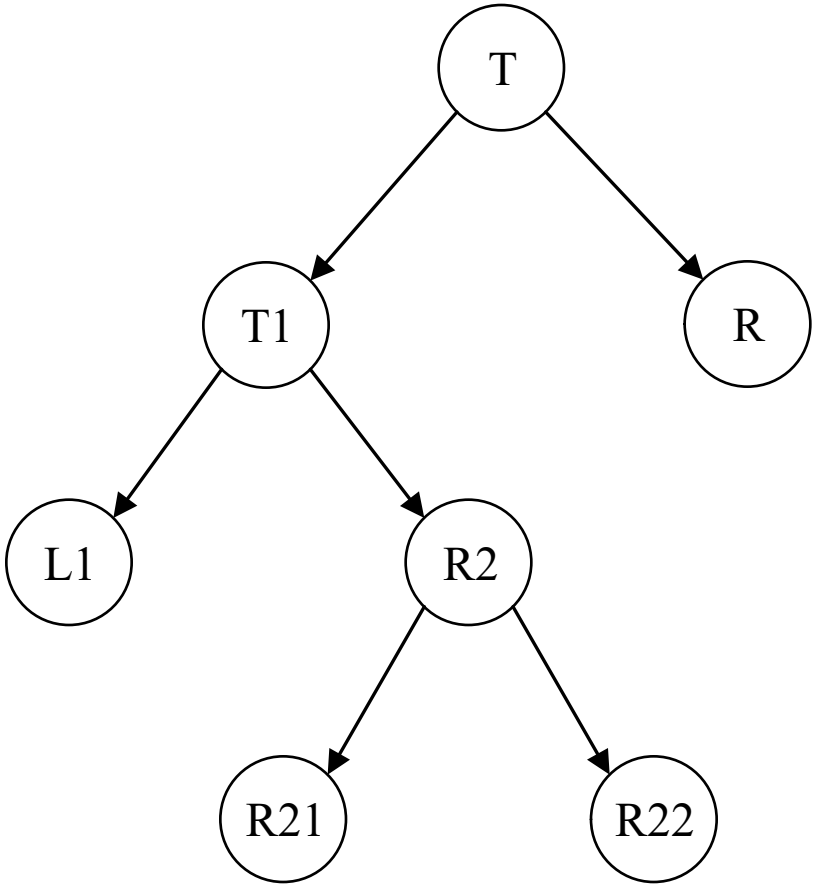
Các trường hợp mất cân bằng do lệch trái

Trường hợp 1: Cây mất cân bằng tại nút T, cây T1 lệch trái hoặc không lệch.

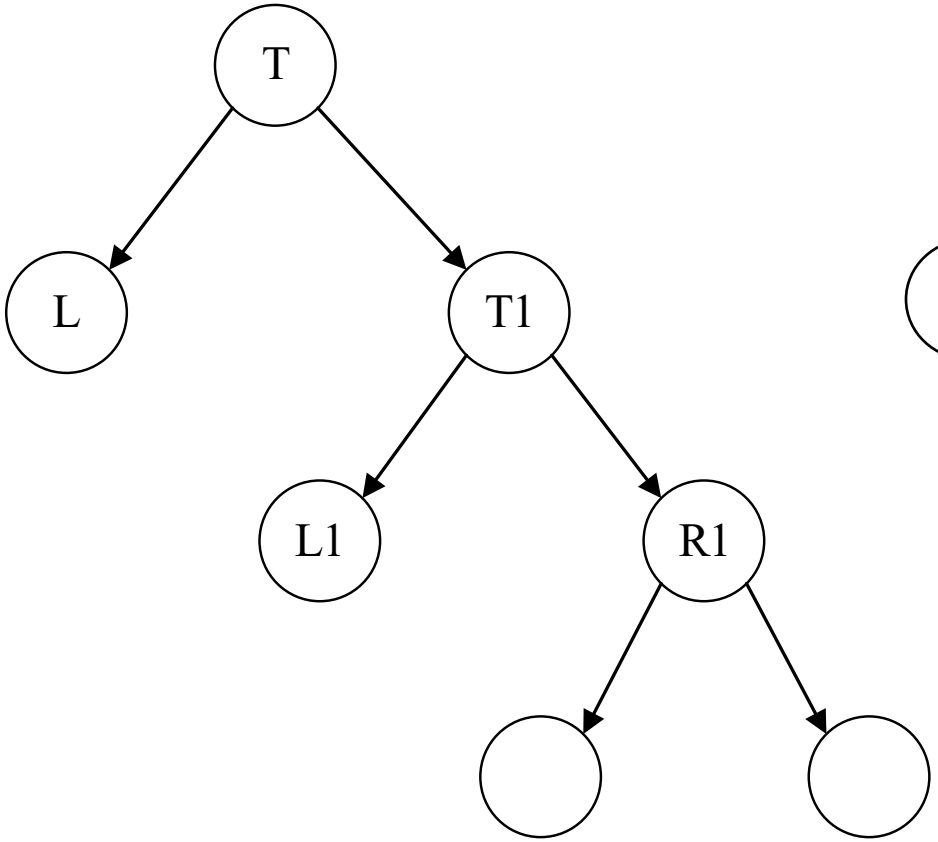


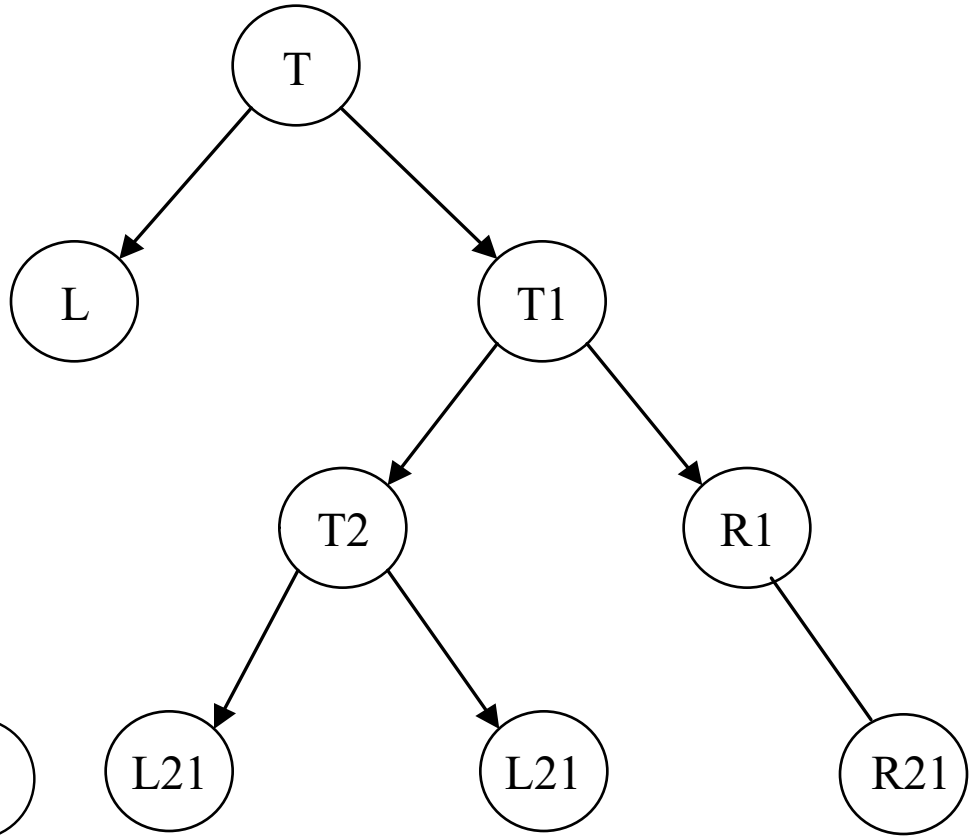


Trường hợp 2: Cây mất cân bằng tại nút T, cây T1 lệch phải



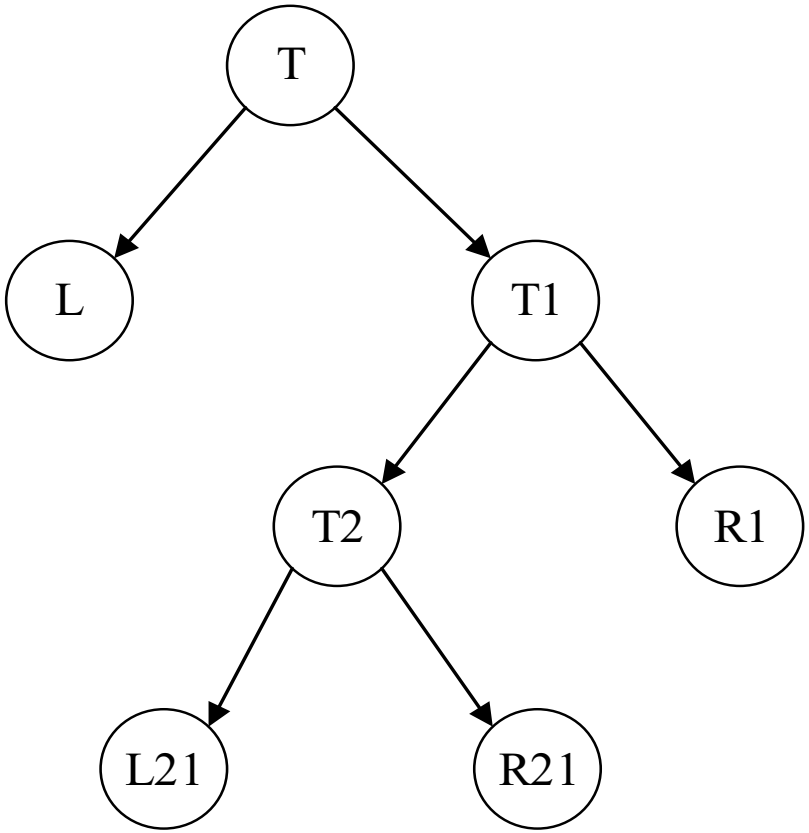
Trường hợp 3: Cây mất cân bằng tại nút T, cây T1 lệch phải hoặc không lệch





Các trường hợp mất cân bằng do lệch phải

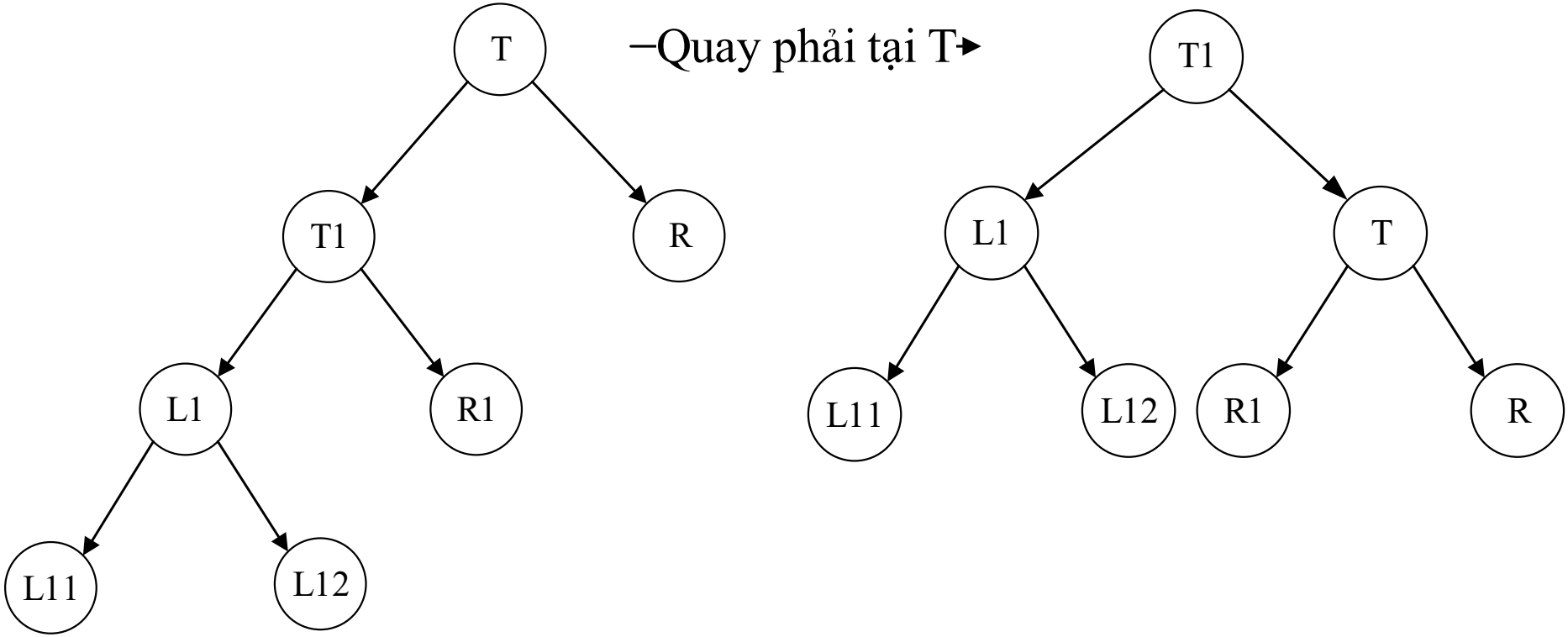
➢**Trường hợp 4: Cây mất cân bằng tại nút T, cây T1 lệch trái**



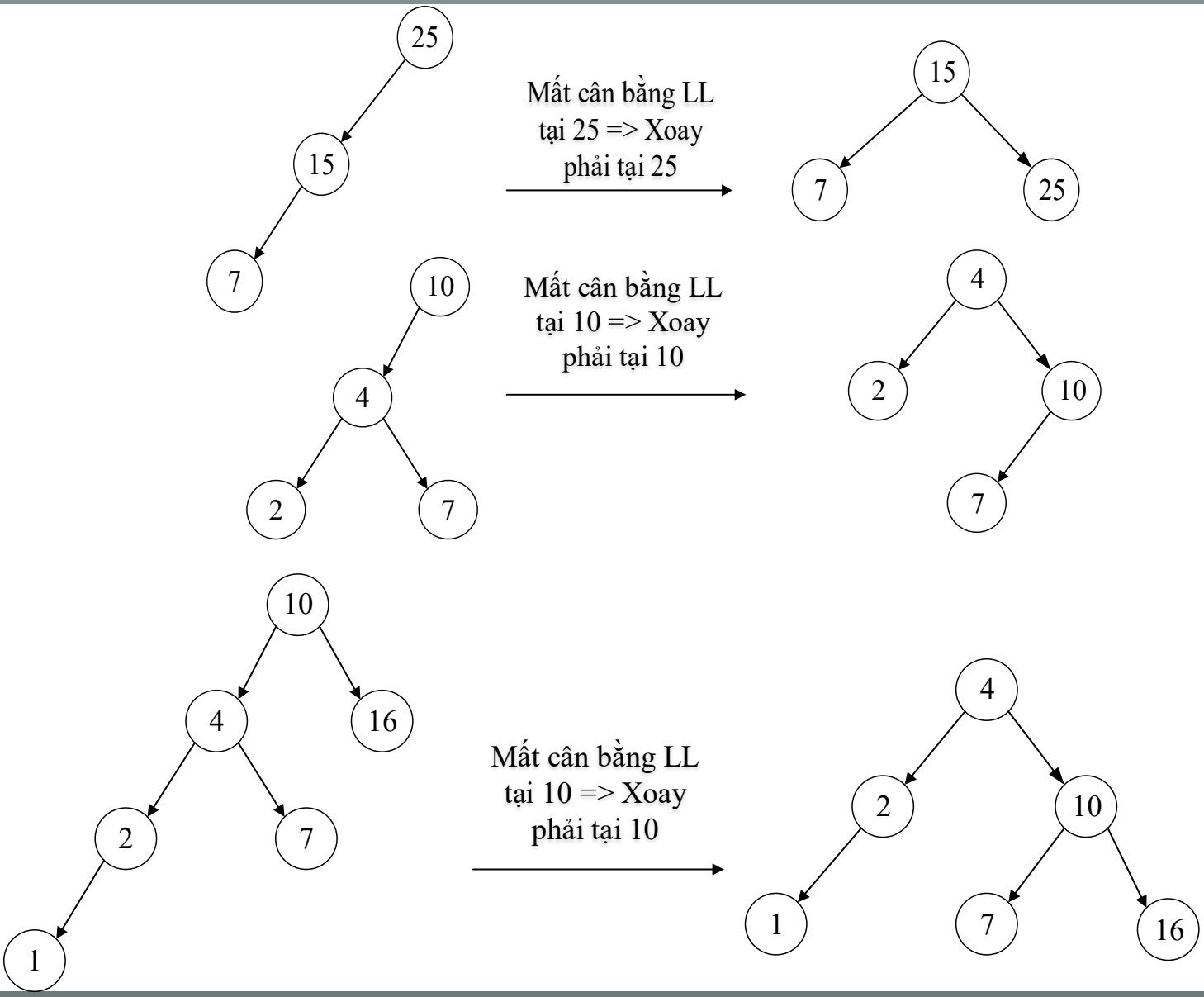
Các thao tác trên cây cân bằng

- Khi **thêm** hay **xoá** 1 nút trên cây, có thể làm cho cây mất tính cân bằng, khi ấy ta phải tiến hành cân bằng lại.
- Cây có khả năng mất cân bằng khi thay đổi chiều cao:
  - Lệch nhánh trái, thêm bên trái
  - Lệch nhánh phải, thêm bên phải
  - Lệch nhánh trái, hủy bên phải
  - Lệch nhánh phải, hủy bên trái
- Cân bằng lại cây: tìm cách bố trí lại cây sao cho chiều cao 2 cây con cân đối:
  - Kéo nhánh cao bù cho nhánh thấp
  - Phải bảo đảm cây vẫn là Nhị phân tìm kiếm

Cân bằng lại trường hợp 1: quay đơn Left-Left



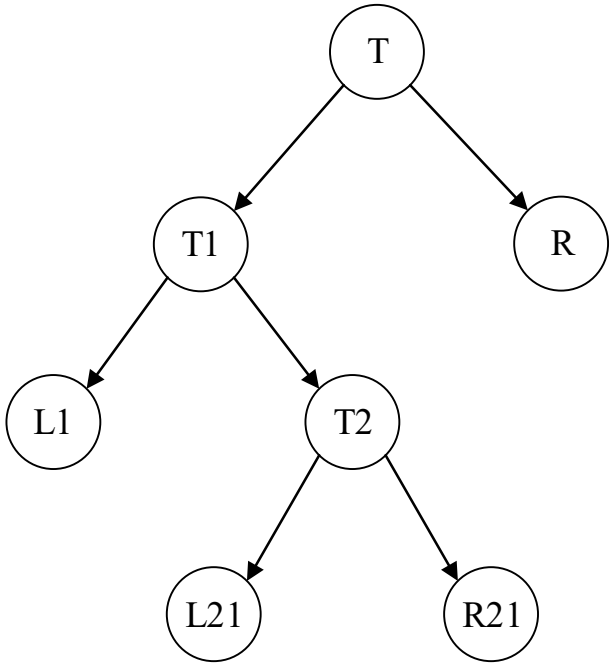
Ví dụ minh họa Trường hợp mất cân bằng LL:



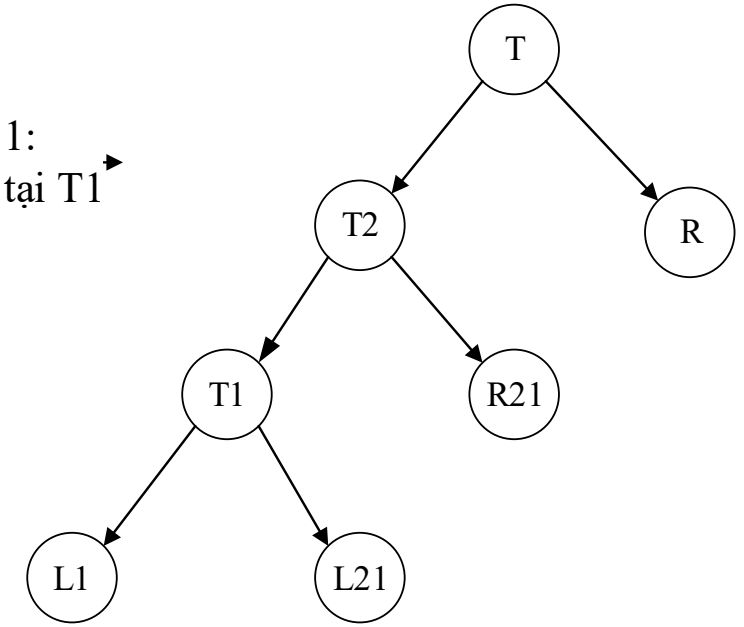
Cài đặt cân bằng lại cho trường hợp 1

```
void LL(AVLTREE &T) {
    AVLNODE* T1 = T->pLeft;
    T->pLeft = T1->pRight;
    T1->pRight = T;
    switch (T1->balFactor) {
        case LH:    T->balFactor = EH;
                    T1->balFactor = EH; break;
        case EH:    T->balFactor = LH;
                    T1->balFactor = RH; break;
    }
    T = T1;
}
```

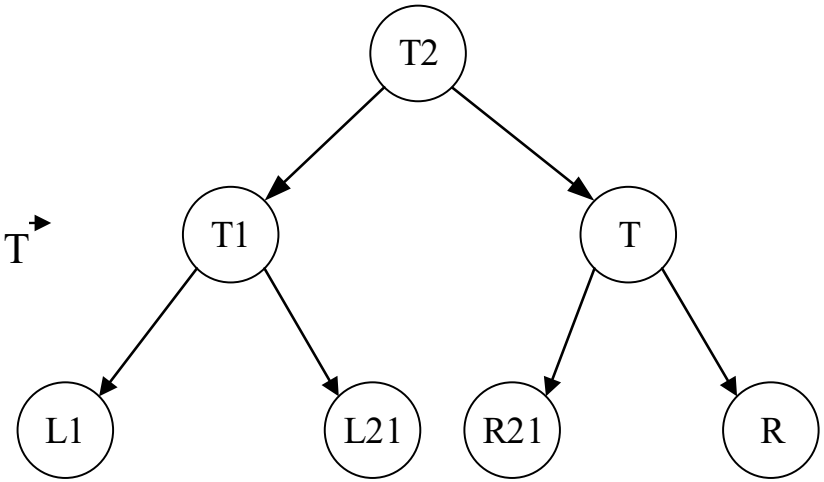
Cân bằng lại trường hợp 2 : quay kép Left-Right



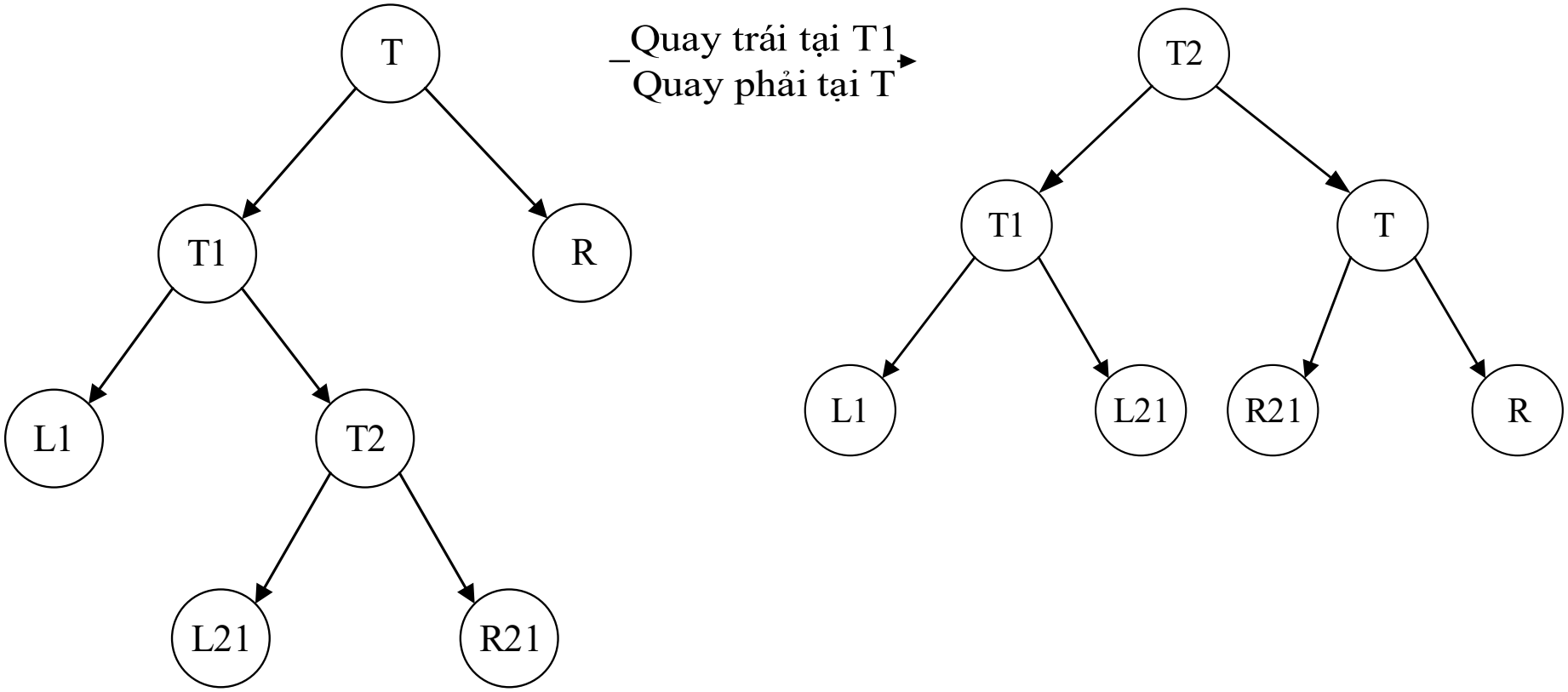
Bước 1:
– Quay trái tại T1



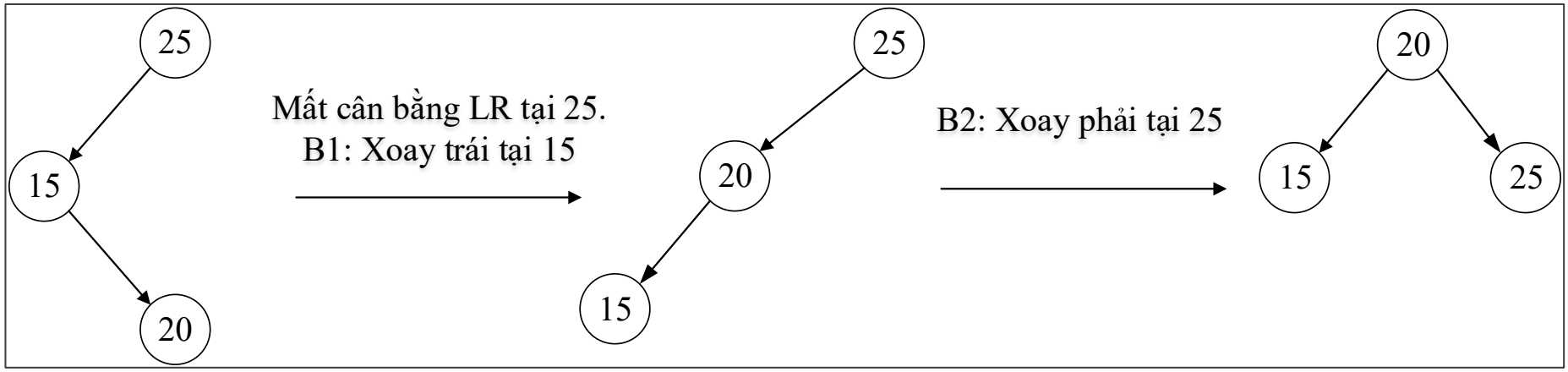
Bước 2
– Quay phải tại T

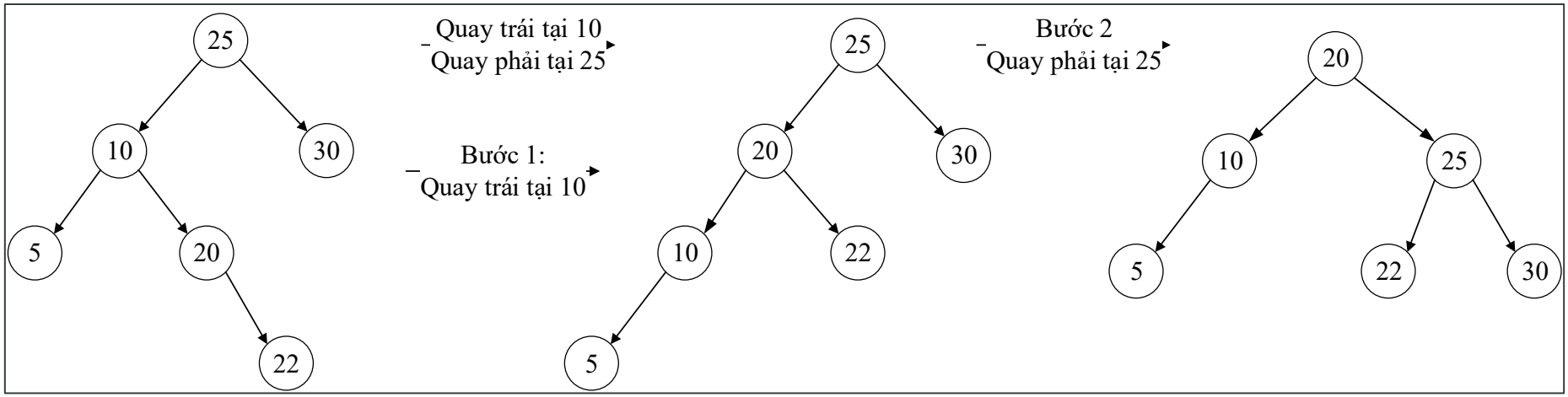


Cân bằng lại trường hợp 2 : quay kép Left-Right

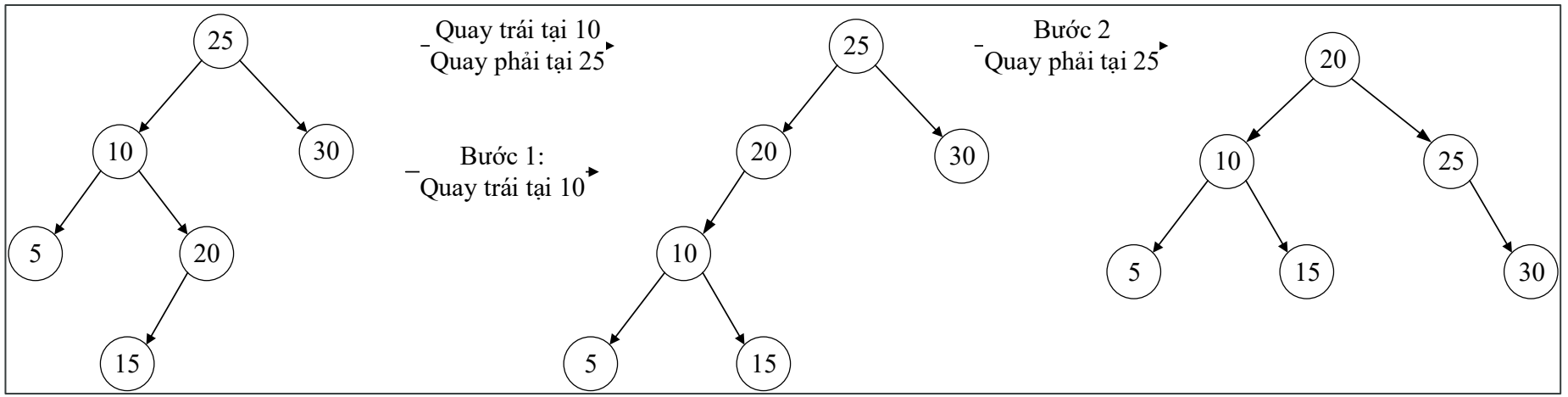


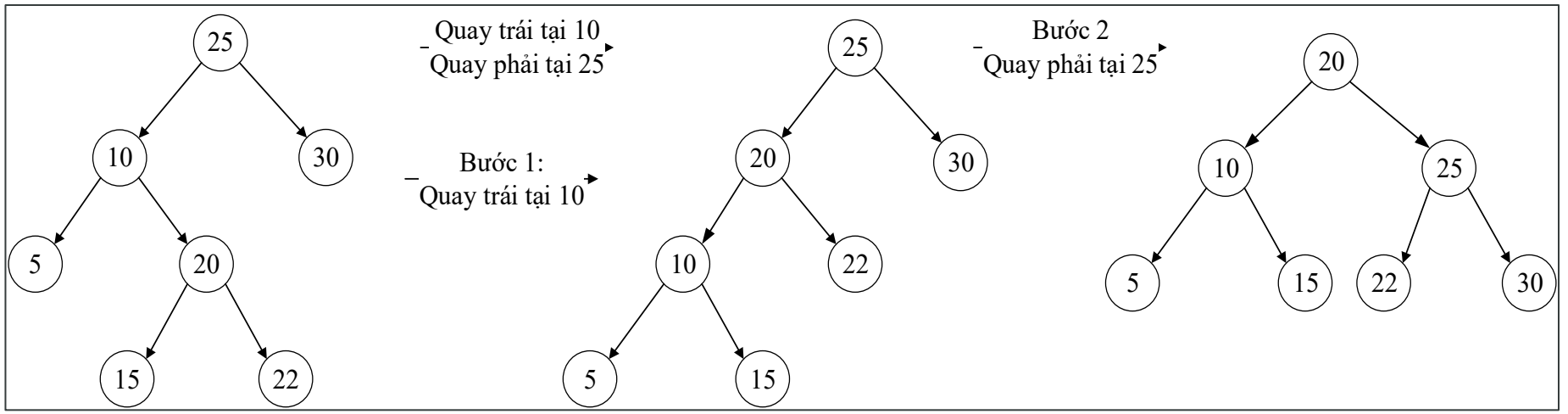
Ví dụ minh họa Trường hợp mất cân bằng LR:





Ví dụ minh họa Trường hợp mất cân bằng LR:

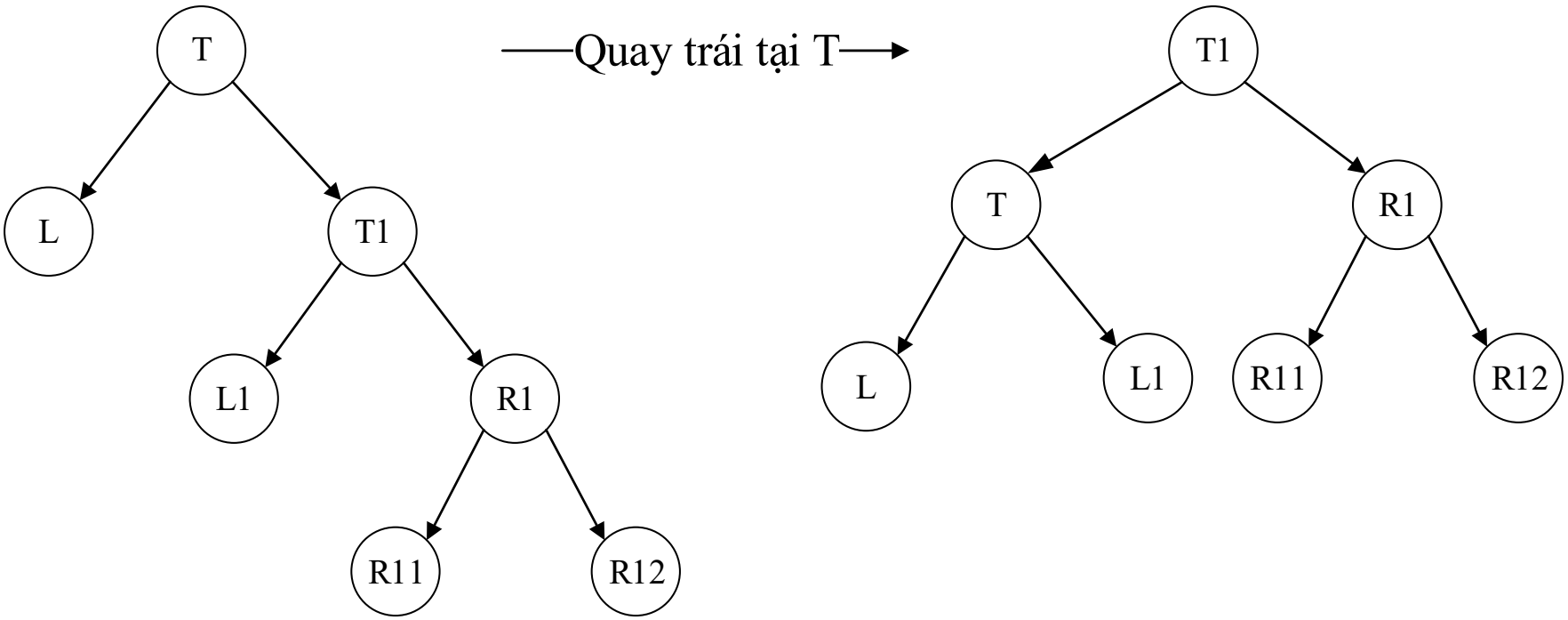




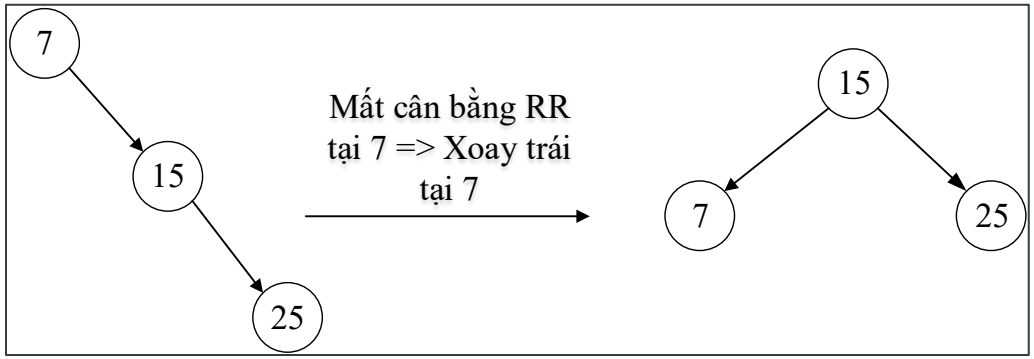
Cài đặt cân bằng lại cho trường hợp 2

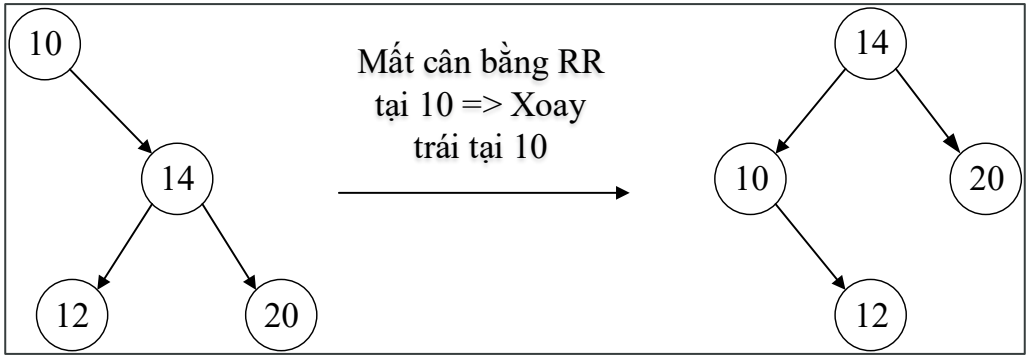
```
void LR(AVLTREE &T) {
    AVLNODE *T1 = T->pLeft;
    AVLNODE *T2 = T1->pRight;
    T->pLeft = T2->pRight;
    T2->pRight = T;
    T1->pRight = T2->pLeft;
    T2->pLeft = T1;
    switch (T2->balFactor) {
        case LH: T->balFactor = RH;
                 T1->balFactor = EH; break;
        case EH: T->balFactor = EH;
                 T1->balFactor = EH; break;
        case RH: T->balFactor = EH;
                 T1->balFactor = LH; break;
    }
    T2->balFactor = EH;
    T = T2;
}
```

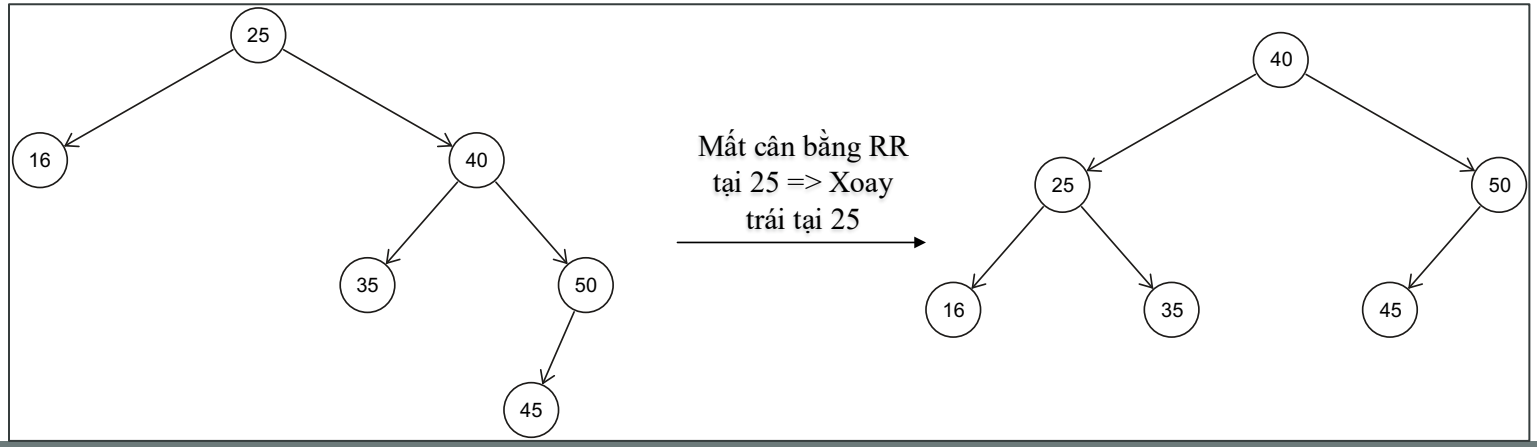
Cân bằng lại trường hợp 3



Ví dụ minh họa Trường hợp mất cân bằng RR:



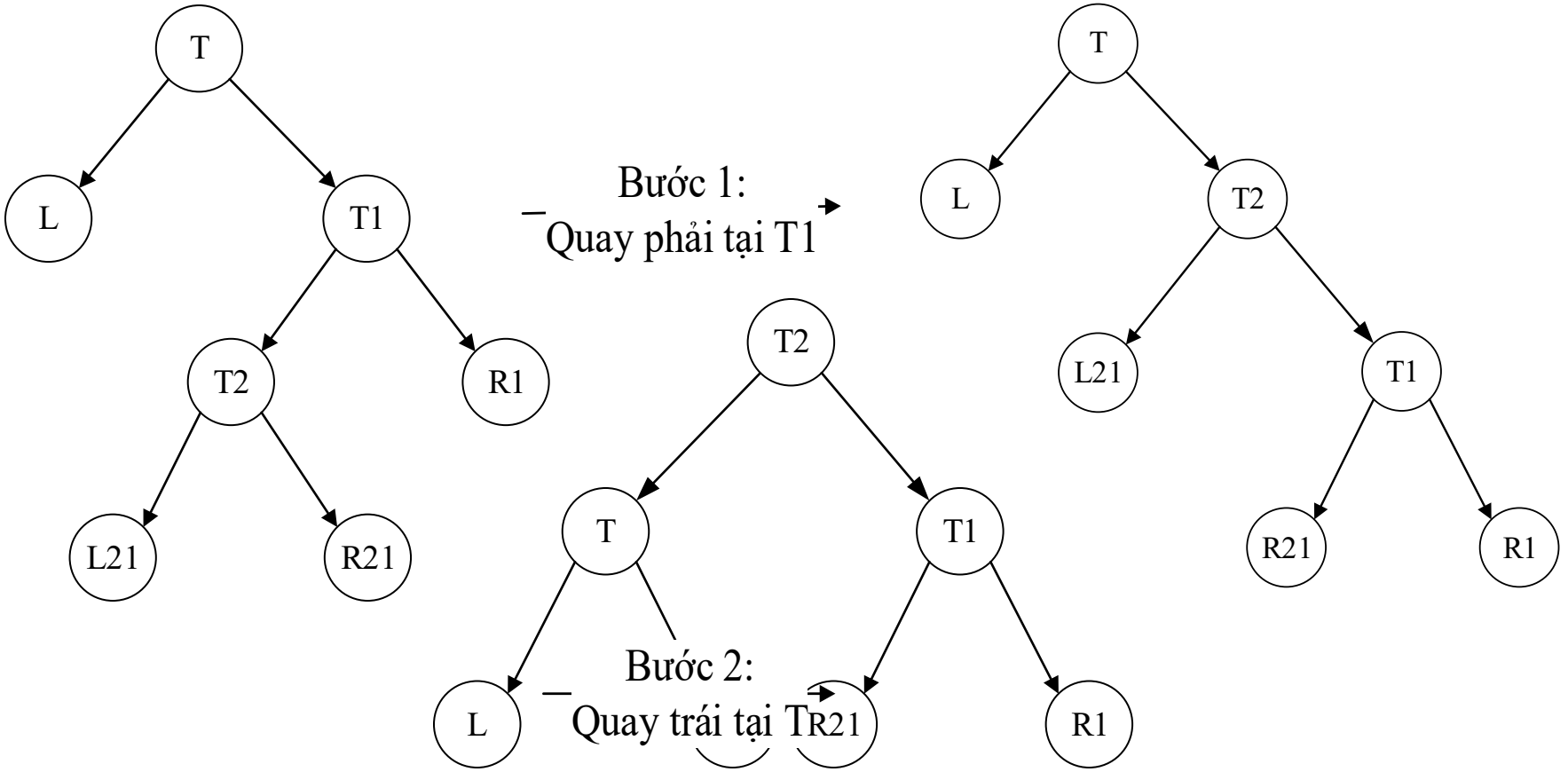




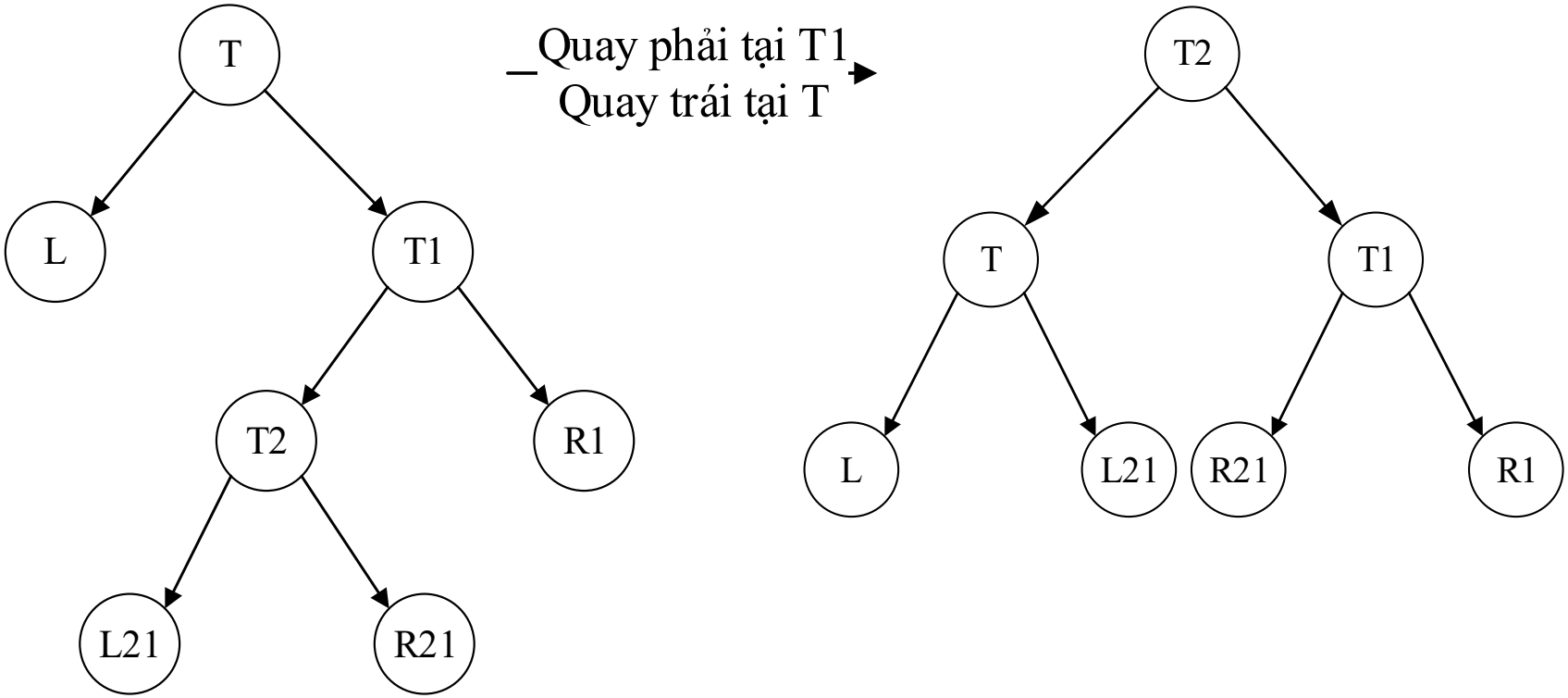
Cài đặt cân bằng lại cho trường hợp 3

```
void RR(AVLTREE &T) {
    AVLNODE* T1 = T->pRight;
    T->pRight = T1->pLeft;
    T1->pLeft = T;
    switch (T1->balFactor) {
        case RH:   T->balFactor = EH;
                   T->balFactor = EH; break;
        case EH:   T->balFactor = RH;
                   T1->balFactor = LH; break;
    }
    T = T1;
}
```

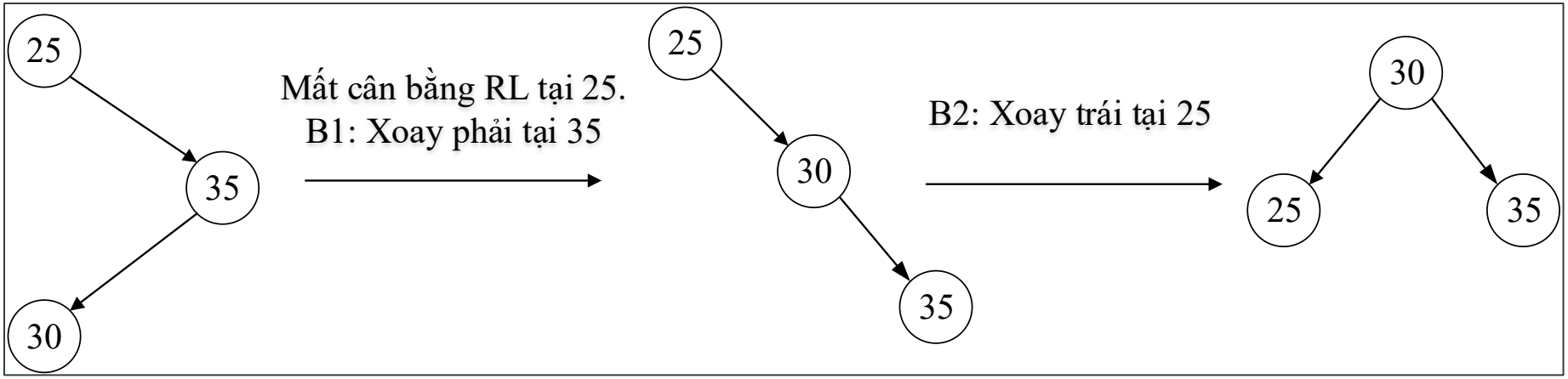
Cân bằng lại trường hợp 4

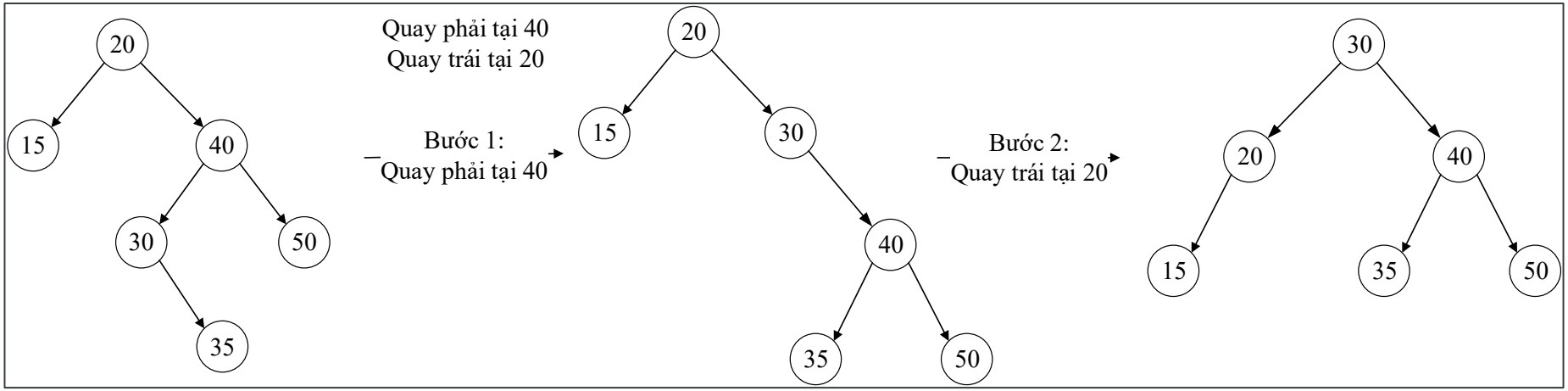


Cân bằng lại trường hợp 4: (tổng hợp 2 bước)

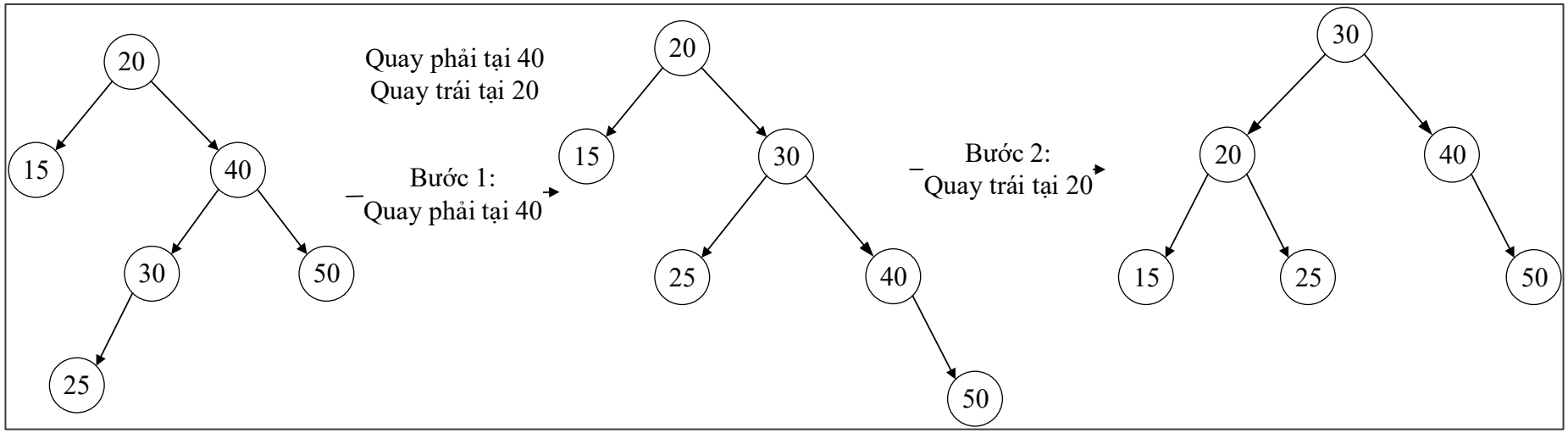


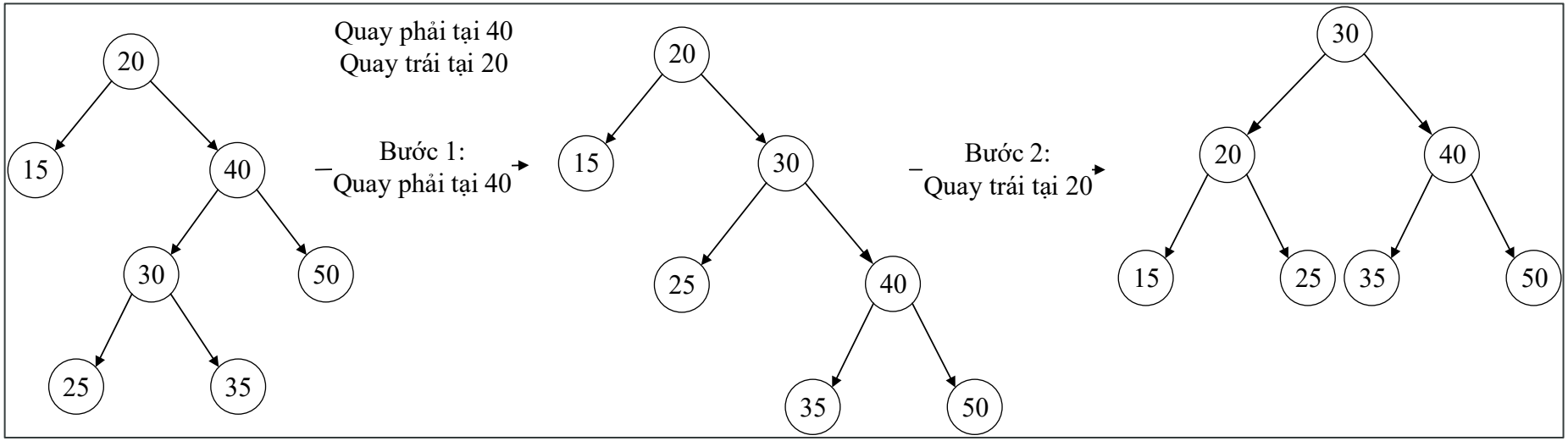
Ví dụ minh họa Trường hợp mất cân bằng RL:





Ví dụ minh họa Trường hợp mất cân bằng RL:





Cài đặt cân bằng lại cho trường hợp 4

```
void RL(AVLTREE &T) {
    AVLNODE *T1 = T->pRight;
    AVLNODE *T2 = T1->pLeft;
    T->pRight = T2->pLeft;
    T2->pLeft = T;
    T1->pLeft = T2->pRight;
    T2->pRight = T1;
    switch (T2->balFactor) {
        case RH: T->balFactor = LH;
                 T1->balFactor = EH; break;
        case EH: T->balFactor = EH;
                 T1->balFactor = EH; break;
        case LH:T->balFactor = EH;
                 T1->balFactor = RH; break;
    }
    T2->balFactor = EH;
    T = T2;
}
```

Thêm 1 nút

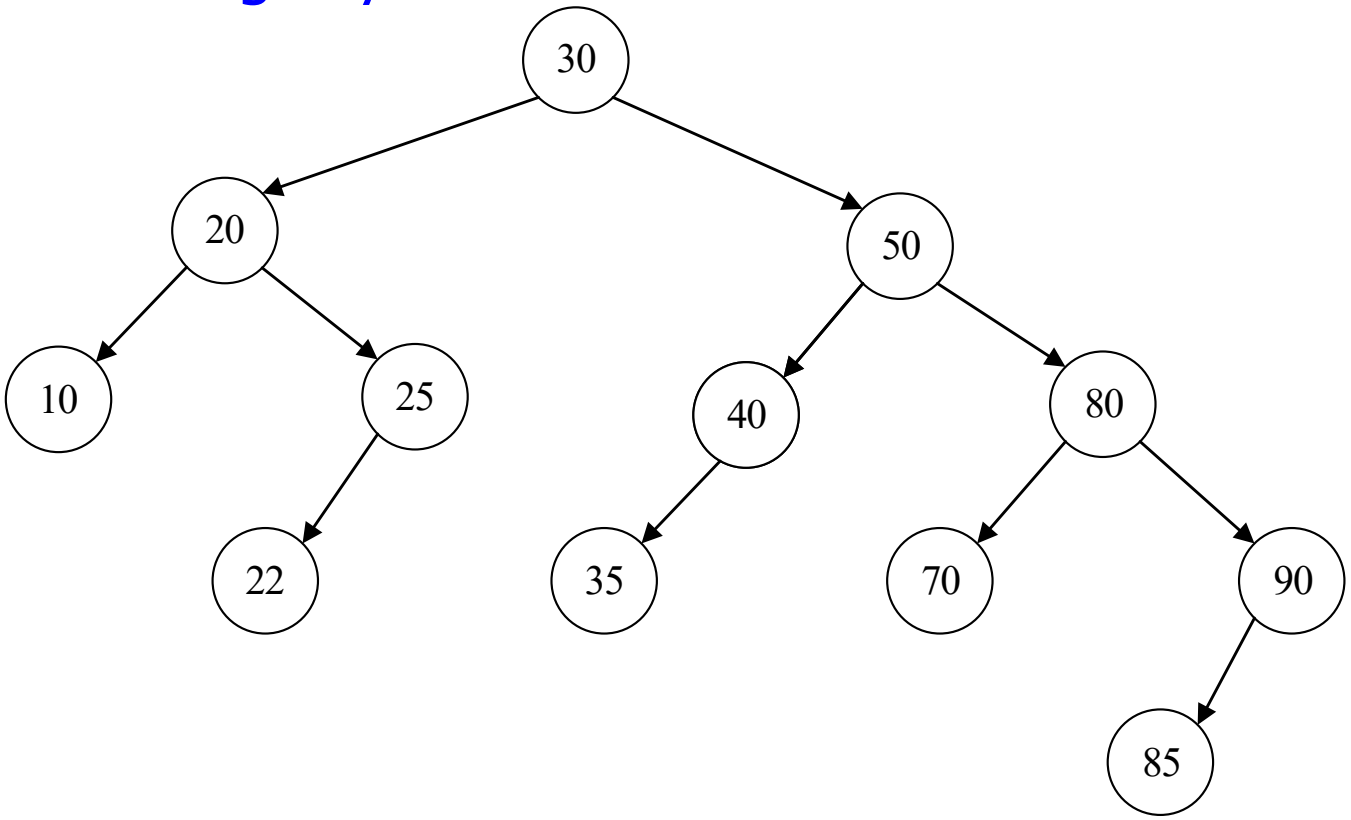
- Thêm bình thường như trường hợp cây NPTK
- Nếu cây tăng trưởng chiều cao
  - Lần ngược về gốc để phát hiện nút bị mất cân bằng
  - Tiến hành cân bằng lại nút đó bằng thao tác cân bằng thích hợp
- Việc cân bằng lại chỉ cần thực hiện 1 lần nơi mất cân bằng

Hủy 1 nút

- Hủy bình thường như trường hợp cây NPTK
- Nếu cây giảm chiều cao:
  - Lần ngược về gốc để phát hiện nút bị mất cân bằng
  - Tiến hành cân bằng lại nút đó bằng thao tác cân bằng thích hợp
  - Tiếp tục lần ngược lên nút cha…
- Việc cân bằng lại có thể lan truyền lên tận gốc

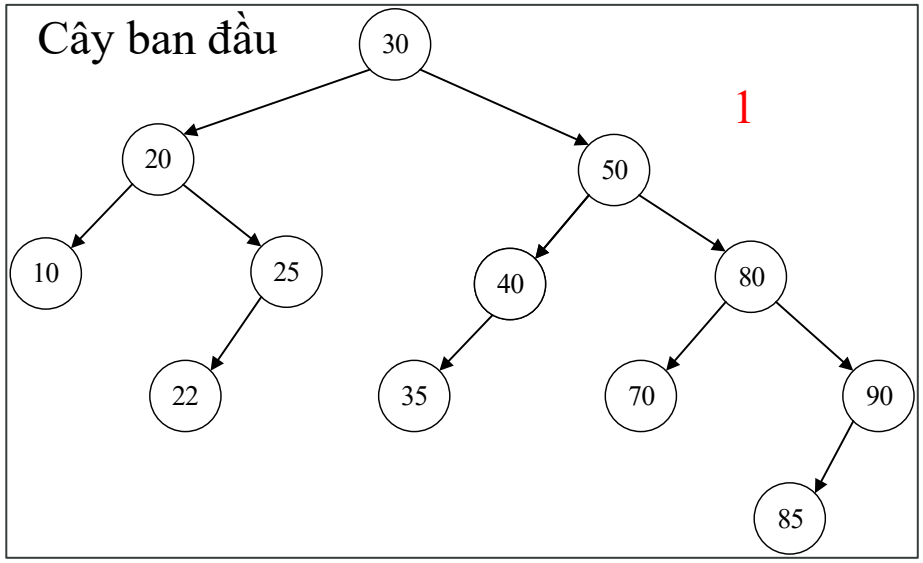
Ví dụ 1:

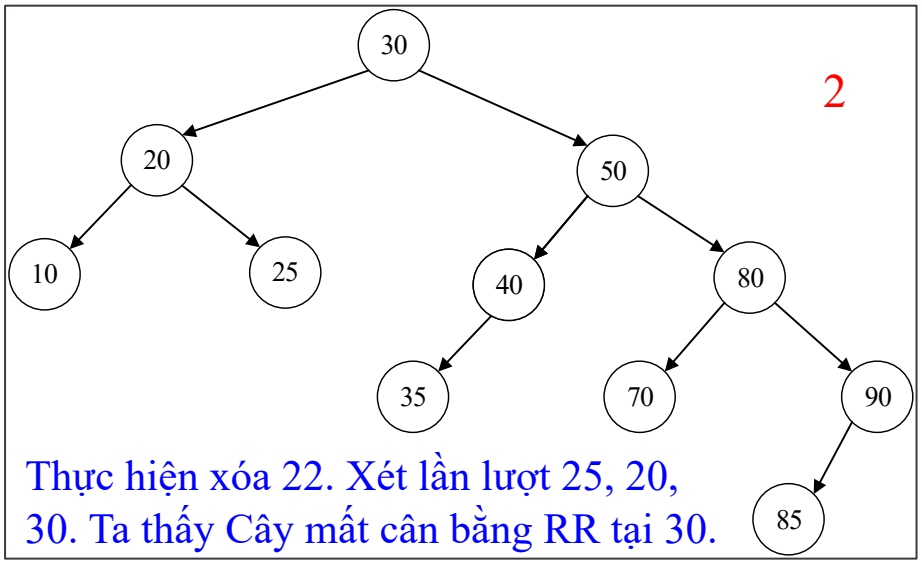
- Hủy số 22 trong cây sau:

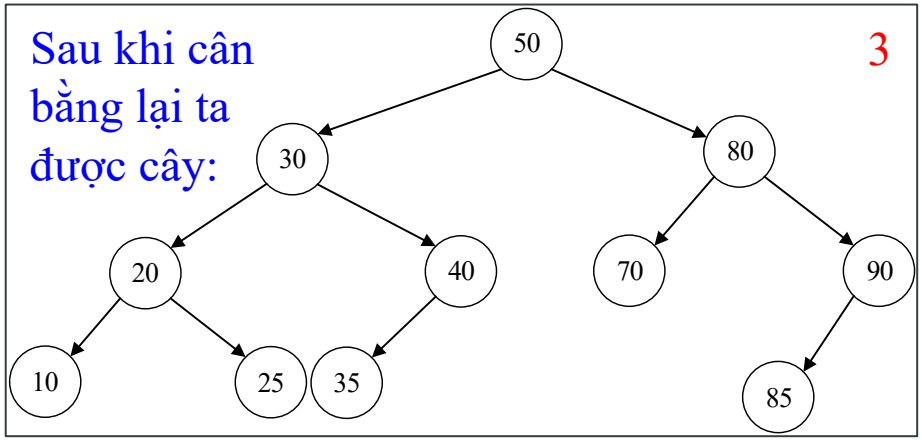


- Ta nhận thấy sau khi xóa số 22 thì chiều cao cây con trái của node 25 thay đổi => Lần lượt xét sự mất cân bằng của các node 25, 20, 30 và cân bằng lại nếu bị mất cân bằng.

Ví dụ 1:

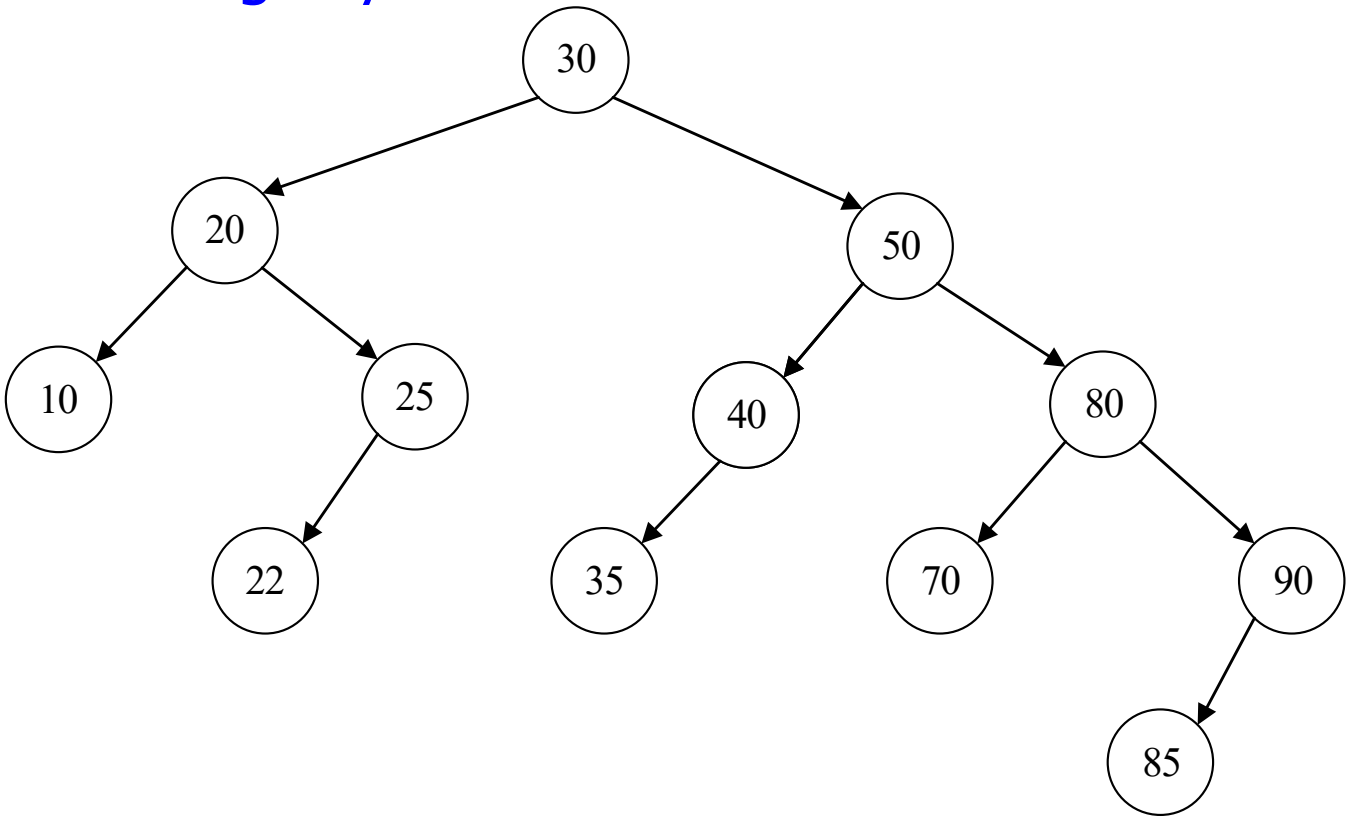

Cây ban đầu
1
30
20
50
10
25
40
80
22
35
70
90
85


2
30
20
50
10
25
40
80
35
70
90
85
Thực hiện xóa 22. Xét lần lượt 25, 20, 30. Ta thấy Cây mất cân bằng RR tại 30.


Sau khi cân bằng lại ta được cây:
3
50
30
80
20
40
70
90
10
25
35
85

Ví dụ 2: (Hủy lan truyền)

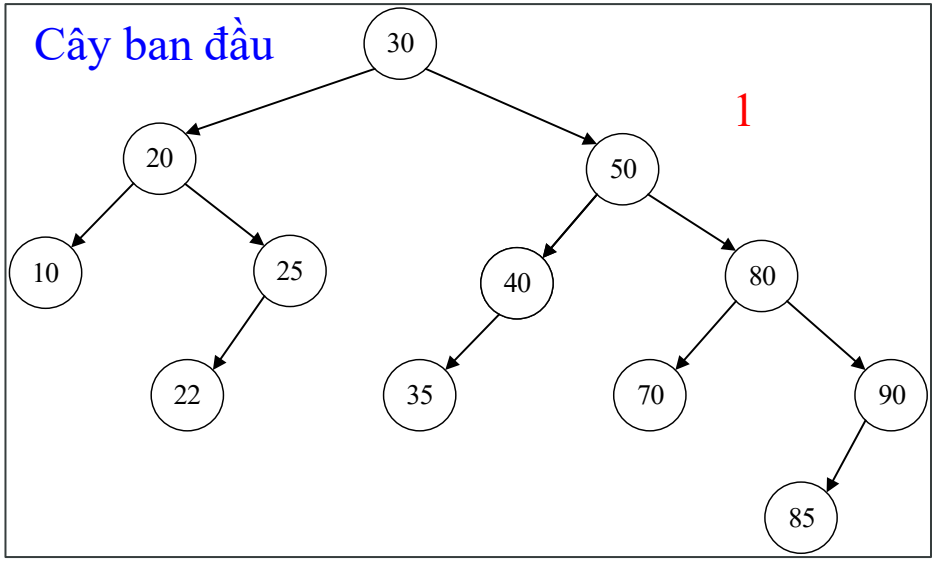
- Hủy số 10 trong cây sau:



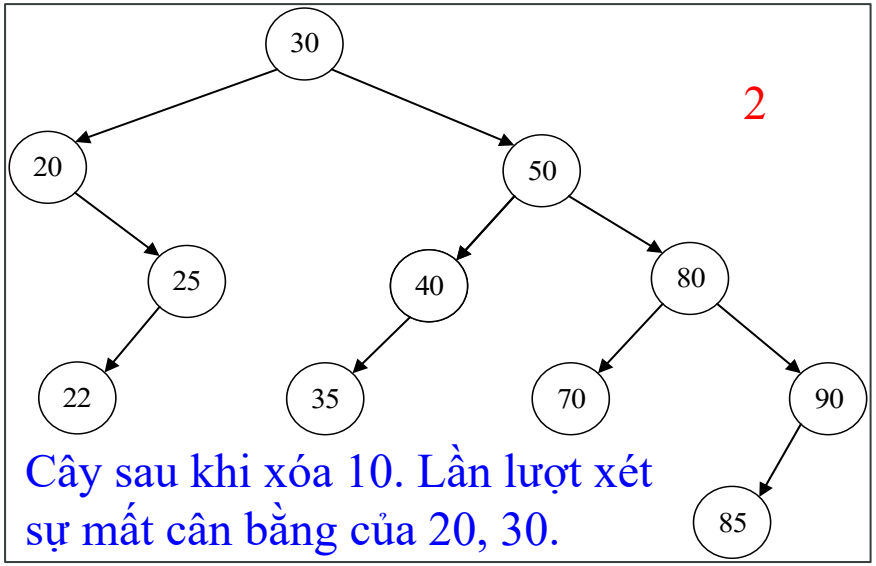
- Ta nhận thấy sau khi xóa số 10 thì chiều cao cây con trái của node 20 thay đổi => Lần lượt xét sự mất cân bằng của các node 20, 30 và cân bằng lại nếu bị mất cân bằng.

Ví dụ 2: (Hủy lan truyền)

Cây ban đầu

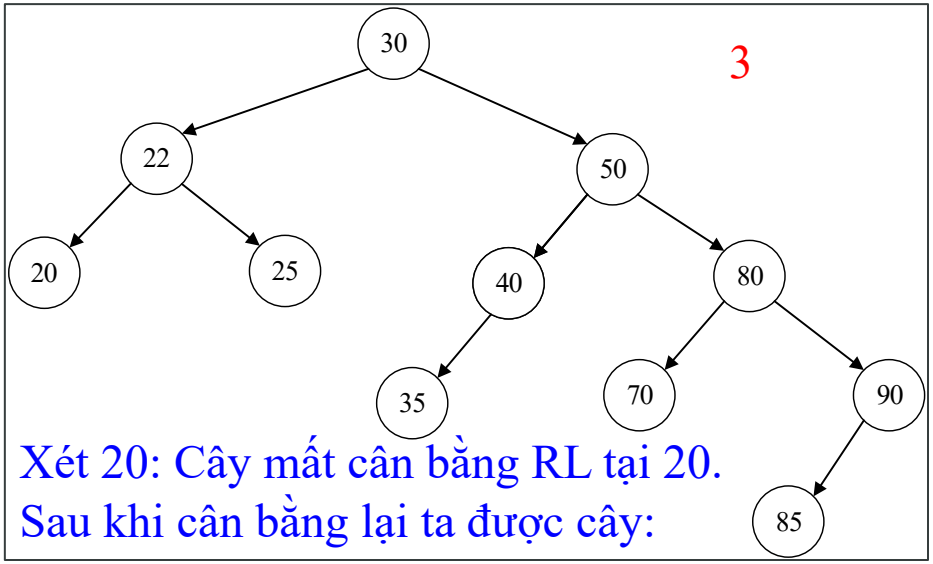


1



2

Cây sau khi xóa 10. Lần lượt xét sự mất cân bằng của 20, 30.

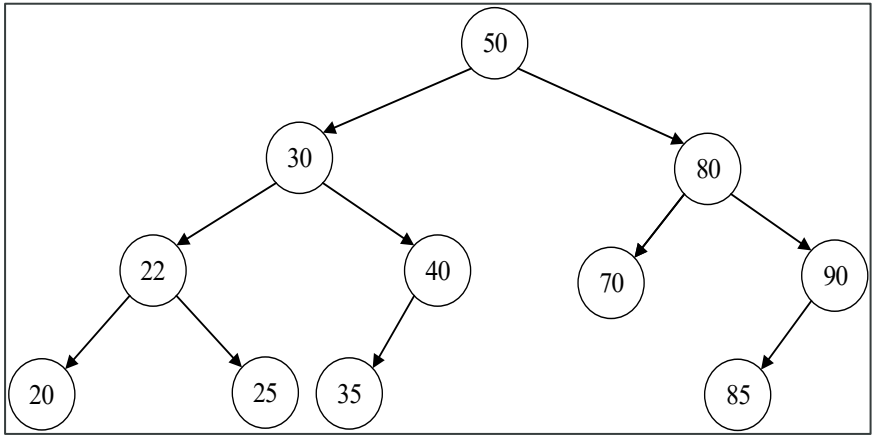


3

Xét 20: Cây mất cân bằng RL tại 20.
Sau khi cân bằng lại ta được cây:

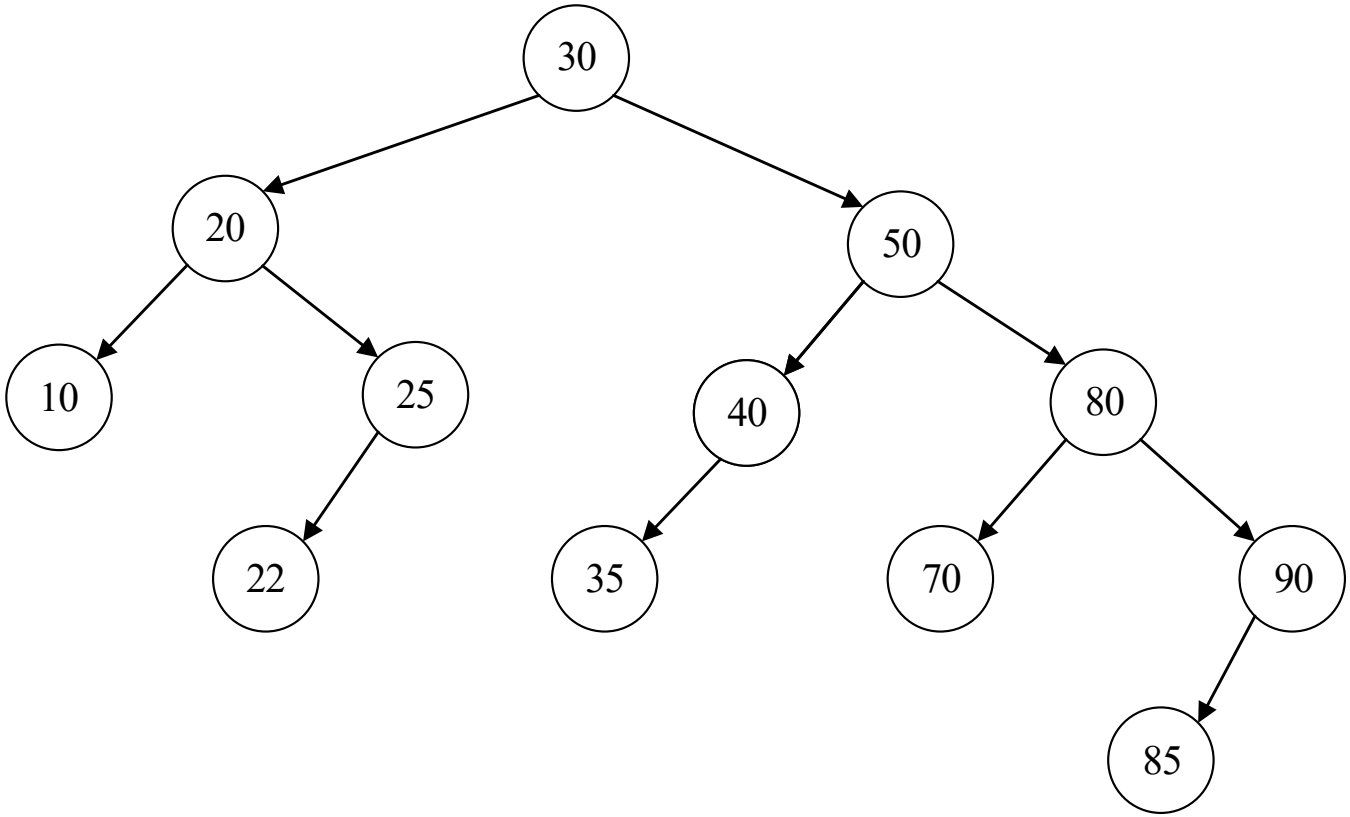
Xét 30: Cây mất cân bằng RR tại 30.
Sau khi cân bằng lại ta được cây:

4

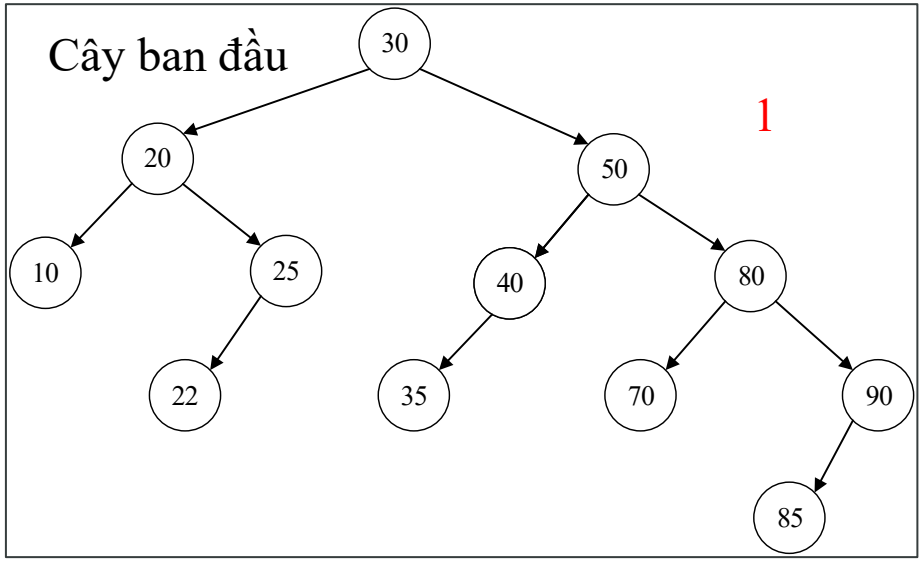


Ví dụ 3.1:

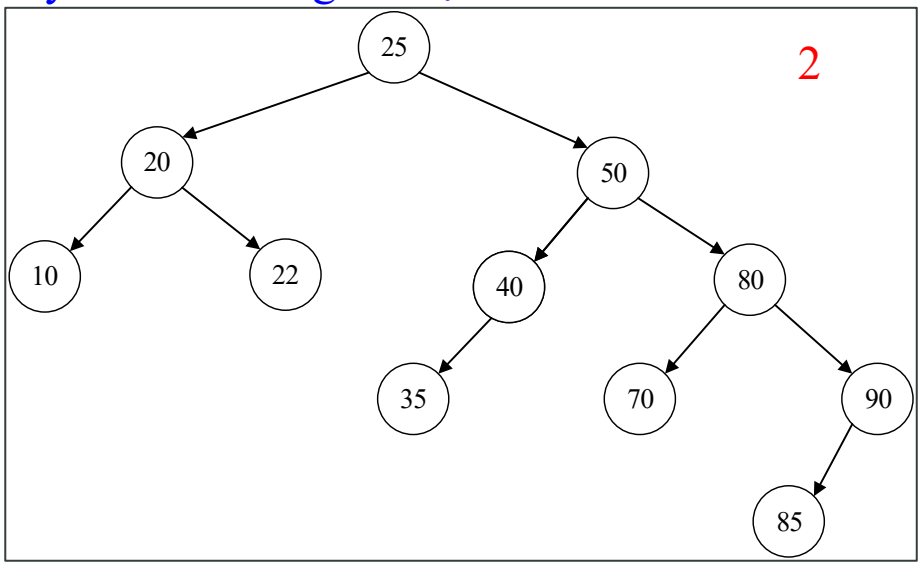
- Hủy số 30 trong cây sau: (Chọn 25 thay thế)



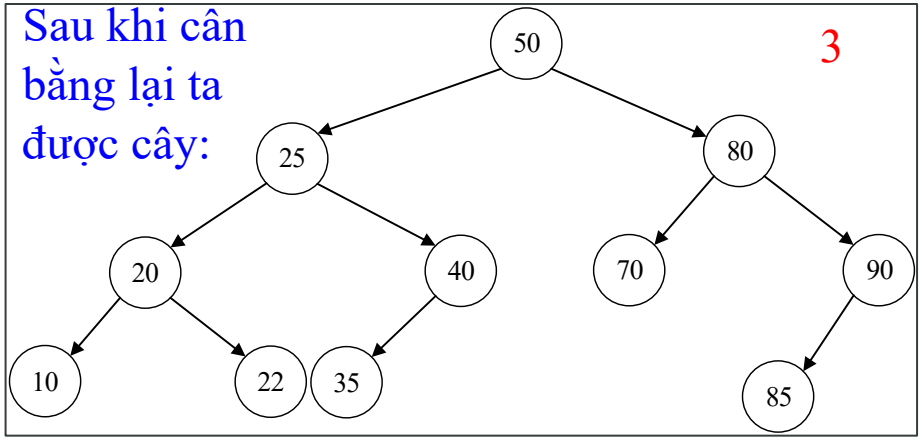
Ví dụ 3.1:



Thực hiện xóa 30. Lấy 25 thay thế. Xét lần lượt sự mất cân bằng ở node 20, 25. Ta thấy cây mất cân bằng RR tại 25.

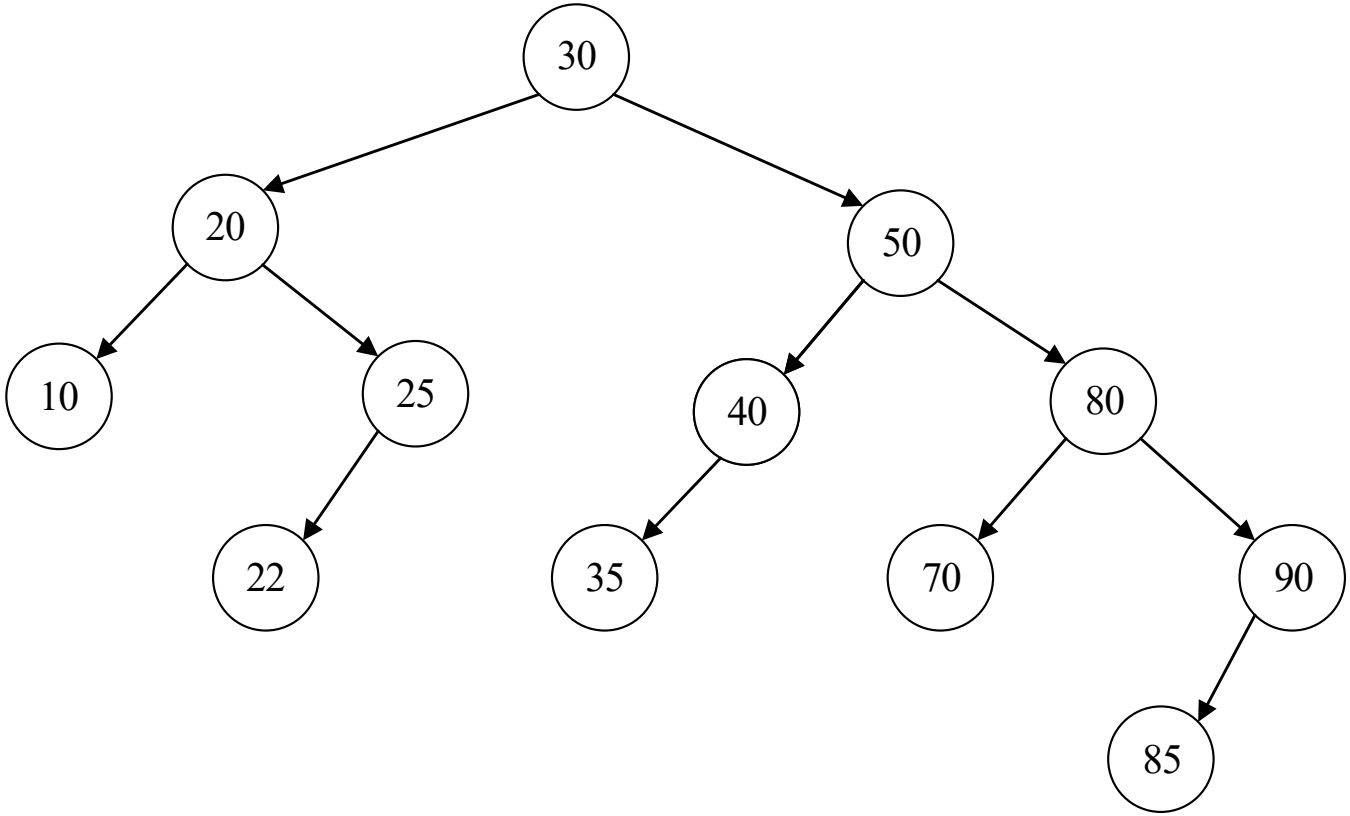


Sau khi cân bằng lại ta được cây:

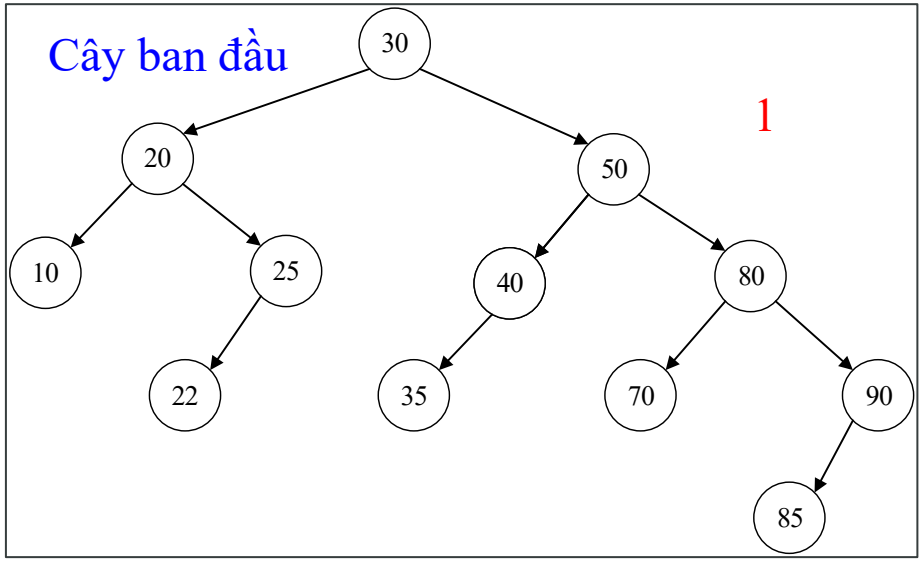


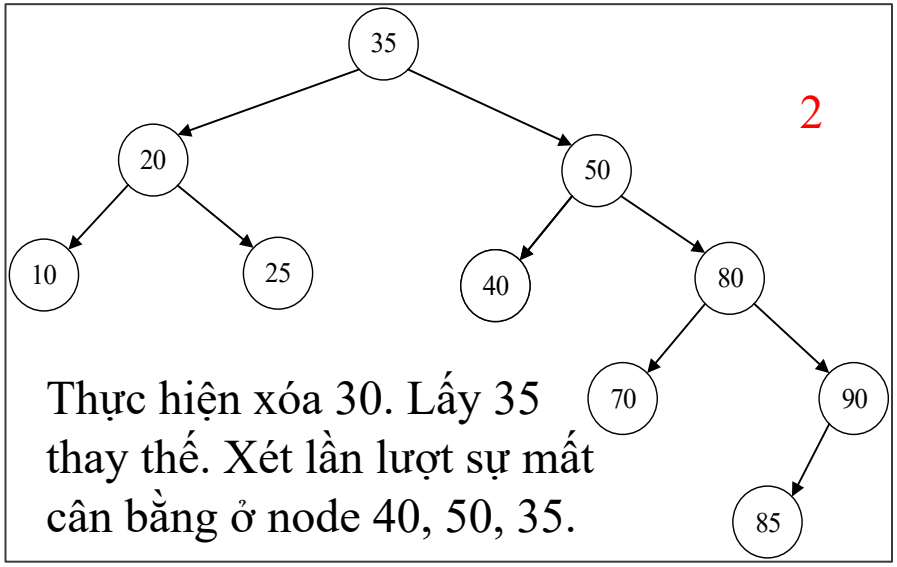
Ví dụ 3.2:

- Hủy số 30 trong cây sau: (Chọn 35 thay thế)

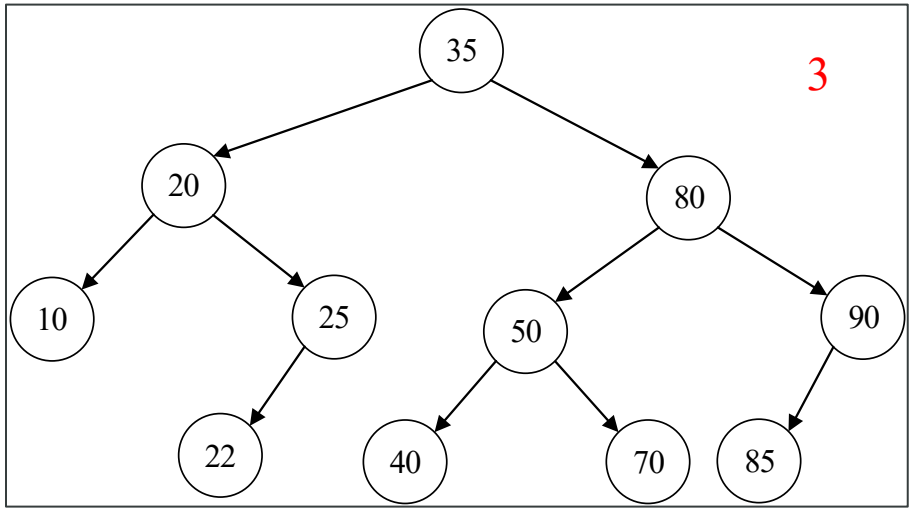


Ví dụ 3.2:





Xét 50: Cây mất cân bằng RR tại 50. Sau khi cân bằng lại ta được cây:



Bài tập

1. Xét thuật giải tạo cây nhị phân tìm kiếm cân bằng. Nếu thứ tự các khóa nhập vào như sau:

3 5 2 20 11 30 9 18 4

thì hình ảnh cây tạo được như thế nào?

Sau đó, nếu hủy lần lượt các nút 5, 20 thì cây sẽ thay đổi như thế nào trong từng bước hủy, vẽ sơ đồ.

Bài tập

2. Cài đặt chương trình mô phỏng trực quan các thao tác trên cây nhị phân tìm kiếm.

3. Cài đặt chương trình mô phỏng trực quan các thao tác trên cây nhị phân tìm kiếm cân bằng.

4. Viết chương trình cho phép tạo, tra cứu và sửa chữa từ điển Anh-Việt.


SUCCESS