Introducción al Modelo de Solow

Aplicación empirica en los departamentos de Colombia

Iván Andrés Trujilllo

Facultad de Ingenieria
Pontificia Universidad Javeriana

Función de producción

Que es una función de producción?, que caracteristicas debe cumplir una función de producción?

La tecnología

Elemento multiplicador de los factores productivos. La tecnología no solo está asociada a la automatización, un algoritmo, una ecuación, un sistema es tecnología.

Crecimiento económico

Modelo de Solow

La evolución del capital percapita en el tiempo.

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt}.L - \frac{dL}{dt}K}{L^2} = \frac{\frac{dK}{dt}}{L} - \frac{\frac{dL}{dt}}{L}$$

Donde k es igual a $\frac{K}{L}$, y asumiendo que la población crece a una tasa constante y recordando que $\frac{dln(h(x))}{dx} = \frac{dh(x)}{h(x)}$.

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt}}{L} - nk$$

Tengamos en cuenta que el Z es nuestro producto.

$$Z = I + C$$

I, C son la inversión y el consumo respectivamente.
Ahora podemos desagregar la inversión en dos componentes, la depreciación y la inversión neta.

$$I = K^* + \delta K$$

de entrada se supone que, esta tasa de depreciación δ es constante. Además, el consumo no es otra cosa que la parte que no se ahorra del producto; $(1 - s)Z$.

así se obtiene;

$$Z = (1-\psi)Z + K^* + \delta K$$

$$Z = Z - \psi Z + K^* + \delta K$$

$$\frac{dK}{dt} = K^* = \psi Z - \delta K$$

El capital neto, es la parte del ahorro que no se ha contabilizado en la depreciación, esta última ecuación también será fundamental.

$$\frac{dk}{dt} = \frac{K^*}{L} - nk$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\psi Z - \delta K}{L} - nk$$

sin especificar una formula funcional para el producto Z que el crecimiento del capital percapita es la diferencia entre el ahorro de la producción por trabajador y el descuento de la depreciación y la tasa de crecimiento de la población.

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\psi Z}{L} - \delta k - nk = \frac{\psi Z}{L} - (\delta + n)k$$

si decimos que Z toma la forma funcional de la productoria, por que es neoclásica, entonces:

$$\frac{\psi \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}}{L} - (\delta + n)k$$

Si decimos que existe un $x_j = L$, entonces escribiremos el producto de manera intensiva esto es;

$$Z = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{L}\right)^{\alpha_i} L$$

de lo anterior se deduce que hemos supuesto $\phi = 1$ o lo que es lo mismo que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ (nuestra función presenta rendimientos constantes a escala).
para calcular la función de producción por trabajador $z = Z/L$ basta expresar;

$$z = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{L}\right)^{\alpha_i}$$

Podríamos ahora considerar la tasa de crecimiento del capital per capita, como una función del producto percapita.

$$\frac{dk}{dt} = \psi \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{L}\right)^{\alpha_i} - (\delta + n)k$$

Por lo tanto la tasa de crecimiento del capital por trabajador (Ωk) es;

$$\Omega k = \frac{\frac{dk}{dt}}{k} = k^{-1}\psi \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{L}\right)^{\alpha_i} - (\delta + n)$$

Capital de estado estacionario

$$\frac{dk}{dt} = \psi \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{\alpha_i} - (\delta + n)k$$

suponiendo que es homogenea de grado 1, entonces:

$$\frac{dk}{dt} = \psi \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_{i+1}}{x_j}\right)^{\alpha_{i+1}} k^{\alpha_i} - (\delta + n)k$$

ahora k^{α_i} es fijo. es nuestro factor productivo capital per capita.

$$k^{\bullet} = \left(\frac{\psi \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_{i+1}}{x_j}\right)^{\alpha_{i+1}}}{\delta + n}\right)^{\dfrac{1}{1-\alpha_i}}$$

Un caso particular

Un caso particular cuando $i = 3$, $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}E^{\tau}$ ahora escogemos nuestra función de manera intensiva, seleccionando para este caso los trabajadores L como lo ya hicimos anteriormente;
de lo cual

$$Y = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{E}{L}\right)^{\tau}L^{\tau+\alpha+\ 1-\alpha} = Ak^{\alpha}\left(\frac{E}{L}\right)^{\tau}L^{\tau+1}$$

Observe que nuestra función es homogénea de grado $\tau + 1$, se ha sugerido que $E = k$ o $E = K$.

$$Y = Ak^{\alpha}\left(\frac{k^{\tau}}{L^{\tau}}\right)L^{\tau+1}$$

$$Y = Ak^{\alpha}k^{\tau}L = Ak^{\alpha+\tau}L$$

entonces la producción por trabajador es simplemente $y = Ak^{\alpha+\tau}$.

para el caso donde $E = K$ debemos tener en cuenta que en lo posible necesitamos establecer una relación intensiva o per capita por lo que $K = kL$ de ahí se obtiene que;

$$Y = Ak^{\alpha}\left(\frac{kL}{L}\right)^{\tau} L^{\tau+1} = Ak^{\alpha+\tau}L^{\tau+1}$$

$$\frac{dk}{dt} = \psi Ak^{\alpha+\tau} - (\delta + n)k$$

$$\Omega k = \psi Ak^{\alpha+\tau-1} - (\delta + n)$$

Para analizar el comportamiento de la tasa de crecimiento con respecto al capital debemos entender los tres casos factibles.
$i)\tau + \alpha = 1, ii)\tau + \alpha < 1$, y $iii)\tau + \alpha > 1$.

Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá

simulación en python

faltan algunos ajustes

El siguiente link lo rediccionara a un cuaderno para poder simular diferentes niveles de capital estacionario.

Solow model: Lab in Colab (click aquí)

Aprender haciendo

función gamma

A los problemas se plantean soluciones, se evaluan y se comparan.

$$n! = (n-1)(n-2)(n-3)...1$$

esto es cierto si n pertence a los naturales, que pasaría si n pertenece a los reales?.
por que es práctico hallarlo?

hay que desaprender

Los conceptos y tecnologías evolucionan, cambian drásticamente, hay que aprender a desaprender y adaptarse. La capacidad de hacer ventajas comparativas entre métodos.

Tasa de crecimiento y tiempo

Si colombia crece al 3.7% anual cuanto tiempo tardará en triplicar su PIB actual?

Cual es la relación explicita def $\frac{dn}{dt}$?

$$n = \frac{ln(k)}{ln(1+r)} \tag{1}$$

donde k-veces el PIB y r es la tasa de crecimiento. ¿por qué?

Crecimiento económico: condición necesaria

Existe envidencia empirica sobre la relación de los derechos de propiedad, los derechos civiles de las mujeres entre otra gama de condiciones con respecto a países mas ricos

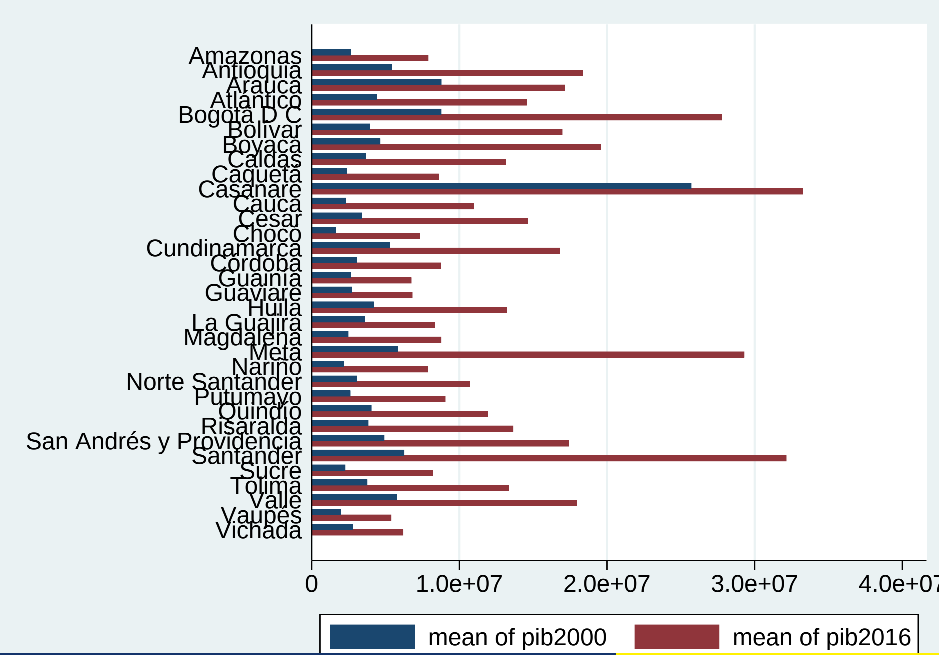
Cárdenas

Las propuestas de cárdenas son lineales, bien conocidas, y de antemano ortodoxas; inversión, tributación eficiente, seguridad. Sin embargo deja de punto algo muy importante dentro del enfoque de la economía clínica; un mismo síntoma puede tener diferentes causas.

Disparidad regional

La participación de la producción de Bogotá para el año 2000 en la producción nacional fue de aproximadamente el 25% y para el 2016 un $26,5\%$, en contraste, otros departamentos como Vichada, Vaupés, Sucre, Putumayo, entre otros; no alcanzaron ni siquiera una participación del 1%, ni al inicio ni al final del periodo de estudio (2000-2016).

Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá


Amazonas
Antioquia
Arauca
Atlántico
Bogotá D C
Bolivar
Boyacá
Caldas
Caquetá
Casanare
Cauca
Cesar
Chocó
Cundinamarca
Córdoba
Guainía
Guaviare
Huila
La Guajira
Magdalena
Meta
Nariño
Norte Santander
Putumayo
Quindío
Risaralda
San Andrés y Providencia
Santander
Sucre
Tolima
Valle
Vaupés
Vichada
0
1.0e+07
2.0e+07
3.0e+07
4.0e+07
mean of pib2000
mean of pib2016

la disparidad de la producción o de la actividad económica implica diferencias en el bienestar de los habitantes de las regiones (Barón y Rowland, 2004).

Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá

El trabajo de Cárdenas, Pontón, y Trujillo (1993) presenta las estimaciones de convergencia para el caso colombiano durante el periodo 1950-1989, utilizando los ingresos per cápita departamentales, concluyendo que para el periodo bajo análisis se presenta tanto la β - convergencia como la σ-convergencia. Es decir, que las disparidades regionales disminuyeron para el periodo de estudio, incluso encontraron una medida de convergencia del 4%, que es mucho mayor a la obtenida en otros estudios empíricos que se han realizado en otras regiones.

Bonet y Roca (2006) y Bonet y Meisel (2006) encuentran que los resultados no son concluyentes para el periodo de 1975 al 2000 y que por el contrario se presenta una situación de estabilidad teniendo a Bogotá como la unidad geográfica de mayores ingresos y chocó como la de menor ingreso para todo el periodo de estudio.

Imparcialidad de indicadores

Cárdenas M. (2005), demuestra la imparcialidad de los indicadores.

La beta y la sigma convergencia

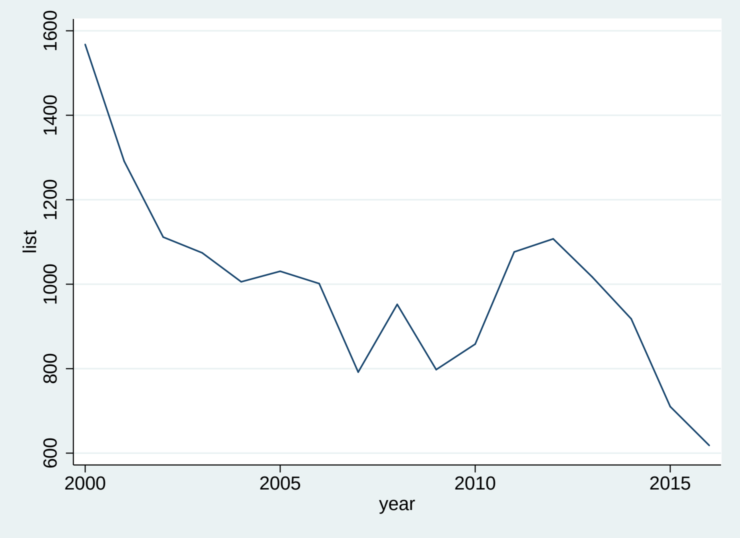
La β convergencia es un estimativo que trata de capturar si existe relación inversa entre la tasa de crecimiento de la renta y el nivel de dicha renta en un periodo inicial. Y la σ convergencia trata capturar los efectos de dispersión, esta puede ser medida con el índice de theil, y el coeficiente de variación entre otros Galvis y Meisel (2012).

el trabajo

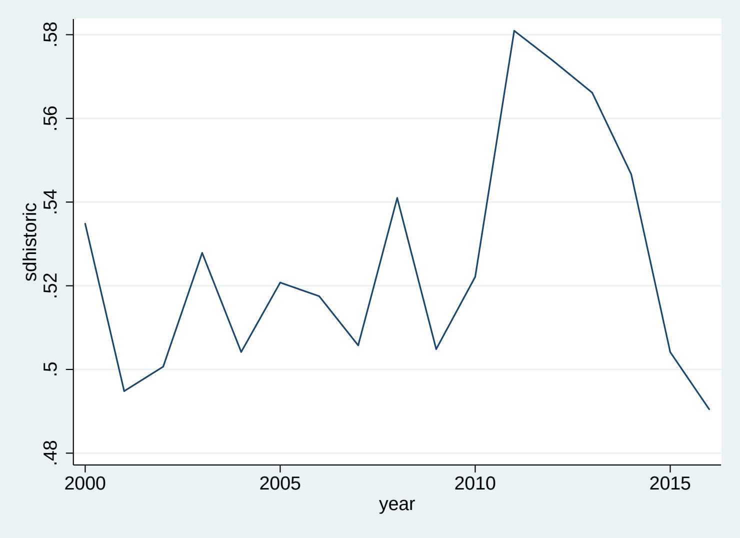
La variable que trabajaremos siguiendo a Barón (2004) donde utiliza el producto por habitante de los departamentos de Colombia para el periodo 2000-2016, como fuente de información se utiliza los datos del Departamento Nacional de Estadística.

Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá

Gamma convergencia



sigma convergencia



Clusters

por ultimo el comportamiento de algunas regiones en el tiempo es homogeneo utilizando el análisis cluster, nos damos cuenta quienes tuvieron un crecimiento homogeneo dado su valor inicial de PIB en el año 2000.

Los resultados del Log se interpretan como los departamentos que tuvieron un crecimiento dado el valor inicial de renta homogeneo. por ejemplo observe que el comportamiento de casanare fue atípico. El Huila y el Tolima se mantienen, mientras bogotá sigue tiene una ventaja relativa con respecto a los demás departamentos.

Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá