Measure, Integration & Real Analysis

27 October 2025

谢尔登·阿克斯勒

$$\int |fg| \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^{p'} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p'}$$

The print version of this book appears in
Springer's Graduate Texts in Mathematics series.

Dedicated to

Paul Halmos, Don Sarason, and Allen Shields,

the three mathematicians who most
helped me become a mathematician.

About the Author

谢尔顿·阿克斯勒是佛罗里达州迈阿密高中毕业典礼的致辞人。他以最高荣誉获得了普林斯顿大学的AB学位，随后获得了加利福尼亚大学伯克利分校的数学博士学位。

作为麻省理工学院的博士后摩尔讲师，Axler 获得了全校范围的教学奖。随后，他在密歇根州立大学担任助理教授、副教授和教授，并获得了首届 J. Sutherland Frame 教学奖和杰出教员奖。

Axler 于 1996 年获得美国数学协会颁发的 Lester R. Ford 奖，以表彰他在数学普及写作方面的贡献。除了发表大量研究论文外，他还是六本数学教科书的作者，涵盖了从本科到研究生的各个层次。他的书籍 *Linear Algebra Done Right* 已被超过 300 所大学和学院采用为教材。

Axler 曾担任 *Mathematical Intelligencer* 主编以及 *American Mathematical Monthly* 副主编。他曾是美国数学学会理事会成员，并且是数学科学研究所董事会成员。他还曾在 Springer 的《数学本科教材系列》、《数学研究生教材系列》、《Universitext》以及《Springer 数学专著》编辑委员会任职。

他因被任命为美国数学会会士以及加利福尼亚科学与技术委员会高级会士而获得这一荣誉。

Axler于1997年加入旧金山州立大学，担任数学系系主任。2002年，他成为旧金山州立大学理工学院院长。在担任院长十三年后，他回归常规教职，成为数学系的教授。

Cover figure: Hölder’s Inequality, which is proved in Section 7A.

Contents

Preface for Students

你即将深入数学的世界，重点在于深入理解与测度、积分和实分析相关的定义、定理和证明。本书旨在引导你领略这一学科的奇妙。

你不能像阅读小说一样阅读数学。如果你在不到一个小时的时间内匆匆翻过一页，那你可能是走得太快了。当你遇到短语 *as you should verify* 时，你应该进行验证，这通常需要你做一些书面工作。当步骤被省略时，你需要补充缺失的部分。你应该深思并内化每一个定义。对于每一个定理，你应该寻找例子，说明每个假设为什么是必要的。

在阅读完一节内容后，做练习题应该是你主要的学习方式。与其他学生的讨论和合作可能特别有效。主动学习比被动学习更能促进长期理解。因此，你会从努力解决一个练习题并最终得出解决方案中获益良多，可能还需要和其他学生一起合作。仅仅在互联网上寻找并阅读解决方案可能不会带来太多的学习效果。

作为一种视觉辅助，本书中定义以黄色框显示，定理以蓝色框显示，在纸质版和电子版中均如此。每个定理都有一个非正式的描述性名称。该手稿的电子版中，链接以蓝色显示。

请查看下方的网站（或 Springer 网站）以获取有关本书的更多信息。这些网站链接到本书的电子版，该电子版向全世界免费开放，因为本书是在 Springer 的开放获取（Open Access）项目下出版的。非常欢迎您就未来版本提出改进和更正方面的建议（请发送至下方的电子邮件地址）。

使用本书的前提是对本科基础实分析有良好的理解。您可以从以下网站或 Springer 网站下载名为 *Supplement for Measure, Integration & Real Analysis* 的文档。该补充材料可以作为本书中使用的本科基础实分析的复习。

祝愿在学习测度、积分和实分析的过程中取得成功并享受其中！

Sheldon Axler
Mathematics Department
San Francisco State University
San Francisco, CA 94132, USA

website: https://measure.axler.net
e-mail: measure@axler.net
Twitter: @AxlerLinear

Preface for Instructors

你即将教授一门课程，或者可能是一套为期两个学期的课程，内容涵盖测度、积分以及实分析。在本教材中，我力图以一种温和的方式呈现严肃的数学，强调帮助学生获得深刻的理解。因此，新材料往往是在一个令人感到舒适的语境中出现，而不是在最一般的设定下。例如，第 11 章中的傅里叶变换是在 R 而非 $\mathbf{R}^n$ 的背景下引入的，这样学生就可以专注于主要思想，而不必被在 $\mathbf{R}^n$ 中工作所需的额外记账式细节所干扰。

学生使用本教材的基本前提是对本科阶段初等实分析有良好的理解。学生可以从本书的网站（https://measure.axler.net）或 Springer 网站下载题为 *Supplement for Measure, Integration & Real Analysis* 的文档。该补充材料可作为对本书所使用的本科阶段初等实分析的复习。

作为一种视觉辅助，本书中定义以黄色框显示，定理以蓝色框显示，在纸质版和电子版中均如此。每个定理都有一个非正式的描述性名称。该手稿的电子版中，链接以蓝色显示。

数学只能通过实践来学习。幸运的是，实分析有许多很好的作业练习。在教授这门课程时，我通常在每节课中布置若干道练习作为作业，截止到下一节课。我每次作业只批改一道题，但学生事先并不知道是哪一道。我鼓励学生一起完成作业，或者来找我寻求帮助。不过，我也明确告诉他们，从互联网上获取现成解答是不允许的，而且会对他们的学习目标产生反效果。

如果进度较为从容，那么在第一学期完成第 1–5 章可能是一个不错的目标。如果进度稍快一些，那么在第一学期完成第 1–6 章可能更为合适。对于第二学期的课程，覆盖第 6 章至第 12 章中的某个子集应当能够形成一门不错的课程。大多数教师在第二学期都没有时间覆盖所有这些章节，因此需要做出一些取舍。下面按章节给出的本书要点概述，应能帮助你决定要讲哪些内容以及讲授的顺序：

- 第1章：本章篇幅很短，首先简要回顾黎曼积分。随后通过讨论黎曼积分的不足，阐明对更完善的积分理论的需求。

- 第2章：本章首先将外测度定义为区间长度函数在 R 上的自然延拓。在验证了外测度的一些良好性质之后，我们发现它并不是可加的。这一观察促使我们将注意力限制在博雷尔集的 σ-代数上，该代数被定义为包含所有开集的 R 上最小的 σ-代数。沿着这一路径，我们引出了测度。

在处理了一般测度的性质之后，我们回到 \(\mathbb{R} \) 的情形，展示将外测度限制在 Borel 集的 σ-代数上是可数可加的，从而是一个测度。随后，将 \(\mathbb{R} \) 的一个子集定义为勒贝格可测，当且仅当它与某个 Borel 集只相差一个外测度为 0 的集合。这个定义使得勒贝格可测集相比其他等价的竞争性定义，对学生来说显得更加自然。康托集与康托函数随之拓展了学生的直觉。

厄戈罗夫定理表明，可测函数序列的点态收敛接近一致收敛，在后续章节中有多种应用。卢津定理，在实数集R的背景下，听起来很精彩，但在本书中没有其他用途，因此如果时间紧迫，可以跳过。

- 第3章：本章以一种自然的方式定义了关于测度的积分，首先针对非负可测函数，然后针对实值可测函数。单调收敛定理和受控收敛定理是本章的重要结果，它们在适当条件下允许我们交换积分与极限。

- 第4章：本章的亮点是勒贝格微分定理，它使我们能够对积分进行微分。用来清晰证明这一结果的主要工具是哈代–利特尔伍德极大不等式，该不等式本身就既有趣又重要。本章还包括勒贝格密度定理，表明 R 的一个勒贝格可测子集在集合中的几乎每个点的密度为 1，而在不属于该集合的点上几乎处处密度为 0。

- 第5章：本章讨论乘积测度。这里最重要的结果是托内利定理和富比尼定理，它们使我们能够将关于乘积测度的积分作为迭代积分来计算，并在适当条件下改变积分的次序。作为乘积测度的一个应用，我们从 R 上的勒贝格测度得到 $\mathbf{R}^n$ 上的勒贝格测度。为使学生练习这些概念的使用，本章推导了 $\mathbf{R}^n$ 中单位球体积的一个公式。本章最后利用富比尼定理给出一个简单的证明，说明在具有足够连续性的条件下，混合偏导数不依赖于微分的次序。

- 第六章：在简要回顾了度量空间和向量空间之后，本章定义了赋范向量空间。这里的一个重要结果是关于将有界线性泛函从子空间扩展到整个空间的Hahn–Banach定理。接着，本章介绍了Banach空间。我们看到，完备性在关键定理中起着重要作用：开映射定理、有界逆定理、闭图定理和统一有界原理。

- 第7章：本章介绍了一类重要的巴拿赫空间 $L^p(\mu)$，其中 $1 \leq p \leq \infty$，且 μ 是一个测度，为学生提供了更多运用前几章中关于测度与积分理论结果的机会。称为赫尔德不等式和闵可夫斯基不等式的关键结果是这里的重要工具。本章还表明，当 $1 \leq p < \infty$ 时，ℓ^p 的对偶是 $\ell^{p'}$。

应按顺序涵盖第1至第7章，然后再涉及后续章节。完成第7章后，可以涵盖第8章或第12章。

- 第八章：本章重点讨论希尔伯特空间，希尔伯特空间在现代数学中起着核心作用。在证明了描述希尔伯特空间上有界线性泛函的Cauchy–Schwarz不等式和Riesz表示定理之后，本章讨论了正交归一基。这里的关键结果包括贝塞尔不等式、帕尔塞瓦尔恒等式和Gram–Schmidt过程。

- 第九章：直到本章为止，书中讨论的都是正测度。在本章中，实测度和复测度得到了考虑。这些概念引出了带有总变差范数的测度的巴拿赫空间。帮助描述实测度和复测度的关键结果包括汉分解定理、乔丹分解定理和勒贝格分解定理。使用冯·诺依曼巧妙的希尔伯特空间技巧证明了拉东-尼科丁定理。然后，拉东-尼科丁定理被用来证明，$L^p(\mu)$ 的对偶可以与 $L^{p'}(\mu)$ 确定，对于 $1 < p < \infty$ 和 μ 一个（正的）测度，完成了从第七章开始的一个项目。

  第9章中的内容在本书后续部分不会再被使用。因此，本章可以跳过，或者在后面某一章之后再进行讲解。

- 第10章：本章首先讨论希尔伯特空间之间有界线性映射的伴随算子。随后，本章其余部分给出了从一个希尔伯特空间到其自身的有界线性算子的关键结果。证明在复的非零希尔伯特空间上，每个有界算子都具有非空谱，需要一点关于解析函数的知识。文中还描述了若干特殊算子类的性质（自伴算子、正规算子、等距算子以及酉算子）。

  随后，本章进一步深入研究紧算子，证明了弗雷德霍姆择一定理。本章以两个重要结果作为结论：紧算子的谱定理以及紧算子的著名奇异值分解。在整个章节中，沃尔泰拉算子被用作示例来说明主要结果。

  一些教师可能更愿意在第8章之后立即讲授第10章，因为这两章都处在希尔伯特空间的语境中。我选择当前的编排，是为了让学生在两章希尔伯特空间内容之间有一个喘息的机会，认为暂时离开希尔伯特空间一段时间再回到它，可能会加强学生的理解，并提供一些多样性。不过，连续讲授这两章希尔伯特空间内容同样完全可行。

- 第11章：傅里叶分析是一个拥有两百年历史的庞大领域。本章对傅里叶级数和傅里叶变换作出温和而又现代的介绍。

  本章首先在傅里叶级数的背景下展开结果，随后在后文中回到傅里叶变换的背景下发展相应的平行概念。例如，黎曼–勒贝格引理的傅里叶系数版本在本章前部即被证明，而其傅里叶变换版本则在本章后部给出。其他例子还包括泊松核、卷积以及狄利克雷问题，这些内容最初都是在单位圆盘和单位圆的背景下讨论的；随后又在半平面和实数轴的背景下加以重访。

傅里叶级数的收敛性在 L^2 范数下得到了证明，并且（对于足够光滑的函数）也在逐点意义下成立。本书强调让学生掌握主要思想，而不是去证明所有可能的结果（例如，傅里叶级数的逐点收敛性只在二次连续可微的函数情形下证明，而不是采用更弱的假设）。

傅里叶反演公式的证明是傅里叶变换内容中的亮点。随后利用傅里叶反演公式证明傅里叶变换可以延拓为作用在 $L^2(\mathbf{R})$ 上的一个酉算子。

本章使用了一些关于希尔伯特空间的基本结果，因此不应在第8章之前学习。然而，如果你愿意跳过或对一个有助于将傅里叶变换描述为 $L^2(\mathbf{R})$ (see 11.87) 上的算子的结果进行简单处理，那么即使不学习第10章也可以学习本章。

- 第12章：对概率论的全面覆盖需要整整一本书，而不是单独的一章。本章利用本书前面对测度论的铺垫，介绍概率论的基本语言和侧重点。对于不打算继续深入学习概率论的学生，本章可以让他们对该学科有一个良好的初步认识。将继续学习更多概率论的学生，应当会从本章提供的先行起步以及测度论的背景中受益。

  将概率论与测度论区分开来的特征包括独立事件和独立随机变量的概念。除这些概念之外，本章还讨论标准差、条件概率、贝叶斯定理以及分布函数。本章最后给出了独立同分布随机变量的弱大数定律的证明。

  你可以在第7章之后的任何时间学习这一章。

请查看下方的网站（或 Springer 网站）以获取有关本书的更多信息。这些网站链接到本书的电子版，该电子版向全世界免费开放，因为本书是在 Springer 的开放获取（Open Access）项目下出版的。非常欢迎您就未来版本提出改进和更正方面的建议（请发送至下方的电子邮件地址）。

我很乐意了解我的书在哪些地方被用作教材。如果您在某门课程中将本书作为教材使用，请告知我。

祝你在测度、积分与实分析课程的教学中一切顺利，取得圆满成功！

谢尔登·阿克斯勒 数学系 旧金山州立大学 美国加利福尼亚州旧金山 94132

website: https://measure.axler.net
e-mail: measure@axler.net
Twitter: @AxlerLinear

Acknowledgments

我对过去数个世纪以来创建实分析的众多数学家负有巨大的思想债务。本书中的结果属于数学的共同遗产。一个定理的特殊情形可能最初由某位数学家证明，随后又被许多其他数学家加以强化和改进。为所有这些贡献准确地归功是一项困难的任务，我并未尝试去做。在任何情况下，读者都不应假定这里呈现的任何定理代表了我的原创贡献。然而，在撰写本书时，我力图思考呈现实分析及其定理证明的最佳方式，而不拘泥于大多数教材中使用的标准方法和证明。

这本书的手稿在出版前经过了几所大学的大量课堂测试。因此，我收到了许多宝贵的改进和修正建议。我对所有帮助测试手稿的教职工和学生深表感谢。我根据以下人员的建议或修正进行了修改，他们都帮助使这本书变得更好：

孙亚恩·阿查里亚，阿里·阿尔·赛特里，尼克·安德森，阿鲁纳·班达拉，凯文·布伊，托尼·凯拉特，埃里克·卡莫迪，蒂米·陈，费利克斯·陈，洛根·克拉克，萨姆·科斯基，叶尔博拉特·道列特亚罗夫，伊芙琳·伊斯代尔，亚当·弗兰克，本·弗伦奇，卢卡斯·格拉法科斯，盖瑞·格里格斯，迈克尔·汉森，米查·霍金斯，埃里克·林，尼尔森·黄，贾西姆·伊斯马埃尔，布罗迪·约翰逊，威廉·琼斯，莫赫森·卡尔霍里，汉娜·奈特，奥利弗·尼特尔，蔡春杰，李·拉尔森，文斯·李，林华，大卫·利夫纳特，史浩·卢伊，丹特·卢伯，拉尔戈·卢翁，斯蒂芬妮·马加拉内斯，扬·曼德尔，胡安·曼弗雷迪，扎克·梅菲尔德，塞萨尔·梅萨，卡勒布·纳斯塔西，蓝森·阮，喜代·冈田，柯蒂斯·奥林格，塞利奥·帕索斯，琳达·帕顿，伊莎贝尔·佩雷斯，里卡多·皮雷斯，哈尔·普林斯，诺亚·李，肯·里贝特，斯宾塞·鲁克，阿尔纳布·德伊·萨尔卡尔，韦恩·斯莫尔，艾米莉·史密斯，朱尔·塔斯拉克，基思·泰勒，伊格纳西奥·乌里亚尔特-图埃罗，亚历山大·维特蒙德，阮彦，爱德华·曾

洛雷塔·巴托洛尼（Loretta Bartolini），Springer的数学编辑，因其对本项目的多次重要贡献而应得到巨大的感谢。保拉·弗朗西斯（Paula Francis），本书的校对编辑，提供了许多有用的建议和修正，极大地改进了本书。

也感谢那些允许使用他们创作的照片来丰富本书的人们。完整名单请参见书末附近的图片致谢页。

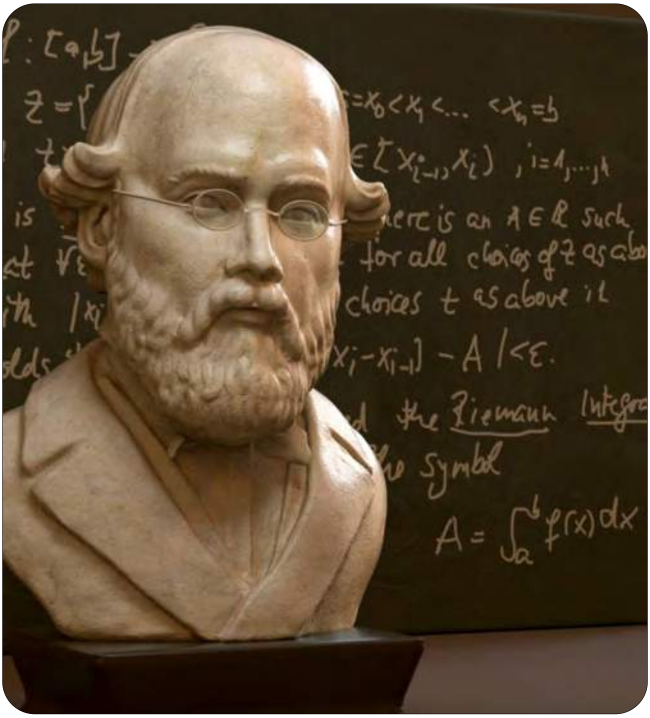
特别感谢我的好伴侣Carrie Heeter，她的理解和鼓励使我能够全身心投入这本书的创作。我们的猫Moon，它的照片在第44页，帮助我提供了放松的休息时间。

谢尔登·阿克斯勒

Chapter 1
Riemann Integration

本章简要回顾了黎曼积分。黎曼积分使用矩形来近似图形下的面积。本章首先通过仔细呈现定义来引入黎曼积分。第一节中的重要结果指出，闭区间上的连续实值函数是黎曼可积的。证明依赖于一个定理，即闭区间上的连续函数是均匀连续的。

本章的第二部分重点讨论了黎曼积分的若干缺陷。正如我们将看到的，黎曼积分并不能完成我们希望积分能做的所有事情。这些缺陷为未来章节中关于测度及相对于测度的积分的展开提供了动机。



Digital sculpture of Bernhard Riemann (1826–1866), whose method of integration is taught in calculus courses.

1A 回顾：黎曼积分

我们先给出在定义黎曼积分之前所需的一些定义。记 R 为实数的完备有序域。

1.1 定义 *partition*

设 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$。$[a, b]$ 的一个 *partition* 是一个形如 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 的有限列表，其中

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

我们使用 $[a, b]$ 的一个划分 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，将 $[a, b]$ 看作若干闭子区间的并，如下所示：

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n].$$

下一个定义引入了用于表示函数在其定义域的某个子集上取值的下确界和上确界的简洁记号。

1.2 定义 *notation for infimum and supremum of a function*

如果 f 是一个实值函数，并且 A 是 f 的定义域的一个子集，那么

$$\inf_A f = \inf\{f(x) : x \in A\} \quad \text{and} \quad \sup_A f = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

下黎曼和和上黎曼和（我们现在加以定义）用于近似非负函数图像下的面积（或者更一般地，用于近似与实值函数对应的带符号面积）。

1.3 定义 *lower and upper Riemann sums*

设 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ 是一个有界函数，且 P 是 $[a, b]$ 的一个分割 $x_0, \ldots, x_n$。*lower Riemann sum* $L(f、P、[a, b])$ 以及 *upper Riemann sum* $U(f、P、[a, b])$ 定义如下

$$L(f, P, [a, b]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f$$

和

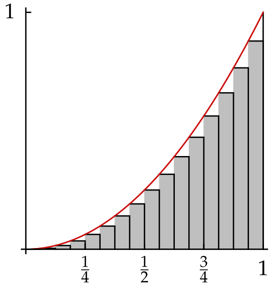
$$U(f, P, [a, b]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f.$$

我们的直觉表明，对于相邻点之间只有很小间隔的一个划分，下黎曼和应当略小于图形下的面积，而上黎曼和应当略大于图形下的面积。

下一个示例中的图片有助于传达这些近似的思想。j^{th} 矩形的底边长度为 $x_j - x_{j-1}$，并且其高度为 $\inf_{[x_{j-1},x_j]} f$，对于下黎曼和与高度上确界 $\sup_{[x_{j-1},x_j]} f$ 对于上黎曼和。

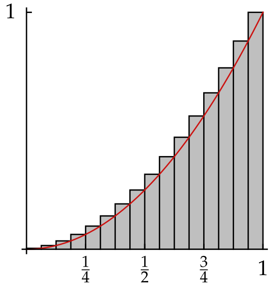
1.4 示例 *lower and upper Riemann sums*

定义 $f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ 为 $f(x) = x^2$。令 P_n 表示 $[0, 1]$ 的划分 0，$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，...，1。



$L(x2, P_{16}, [0, 1])$ *is the sum of the areas of these rectangles.*

这两幅图显示了 f 的图像，颜色为红色。该函数 f 的下确界在每个子区间的左端点 $[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ 处取得；上确界在右端点处取得。



$U(x2, P_{16}, [0, 1])$ *is the sum of the areas of these rectangles.*

对于分区 P_n，我们有 $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$ 对于每个 $j = 1, \ldots, n$。因此

$$L(x^2, P_n, [0,1]) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)^2}{n^2} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}$$

和

$$U(x^2, P_n, [0,1]) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{n^2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2},$$

如你应当验证的那样 [使用公式 $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$]。

下一个结果表明，在一个划分中加入更多的点会增加下黎曼和并减少上黎曼和。

1.5 *inequalities with Riemann sums*

假设 $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ 是一个有界函数，并且 P、P' 是 $[a, b]$ 的划分，使得定义 P 的列表是定义 P' 的列表的子列表。那么

$$L(f, P, [a,b]) \le L(f, P', [a,b]) \le U(f, P', [a,b]) \le U(f, P, [a,b]).$$

证明　为了证明第一个不等式，假设是分区 x_0，...，x_n，而 P' 是分区 x'_0，...，x'_N，属于 $[a，b]$。对于每个 $j = 1$，...，n，存在 $k \in \{0$，...，$N - 1\}$ 和一个正整数 m，使得 $x_{j-1} = x'_k < x'_{k+1} < \cdots < x'_{k+m} = x_j$。我们有

$$
\begin{aligned}
(x_j - x_{j-1}) \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f &= \sum_{i=1}^{m} (x'_{k+i} - x'_{k+i-1}) \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} (x'_{k+i} - x'_{k+i-1}) \inf_{[x'_{k+i-1}, x'_{k+i}]} f.
\end{aligned}
$$

上述不等式意味着 $L(f, P, [a, b]) \leq L(f, P', [a, b])$。

该结果中的中间不等式源于这样一个观察：任意非空实数集合的下确界小于或等于该集合的上确界。

本结果中最后一个不等式的证明与第一个不等式的证明类似，留给读者完成。

下面的结果表明，如果函数是固定的，那么每个下黎曼和都小于或等于每个上黎曼和。

1.6 *lower Riemann sums $\leq$ upper Riemann sums*

设 $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ 是一个有界函数，且 P、P' 是 $[a, b]$ 的分割。则

$$L(f, P, [a, b]) \leq U(f, P', [a, b]).$$

证明 令P''为通过合并定义P和P'的列表而得到的$[a, b]$的划分。则

$$
\begin{aligned}
L(f, P, [a, b]) &\leq L(f, P'', [a, b]) \\
&\leq U(f, P'', [a, b]) \\
&\leq U(f, P', [a, b]),
\end{aligned}
$$

其中上述三个不等式都来自式 1.5。

我们一直在研究下黎曼和与上黎曼和。现在我们定义下黎曼积分和上黎曼积分。

1.7 定义 *lower and upper Riemann integrals*

设 $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ 是一个有界函数。f 的 *lower Riemann integral* $L(f, [a, b])$ 以及 *upper Riemann integral* $U(f, [a, b])$ 定义为

$$L(f, [a, b]) = \sup_P L(f, P, [a, b])$$

和

$$U(f, [a, b]) = \inf_P U(f, P, [a, b]),$$

其中，上述的上确界和下确界是对区间 $[a, b]$ 的所有划分 P 取的。

在上述定义中，我们取下黎曼和（对所有划分）的上确界，因为向一个划分中加入更多的点会使下黎曼和增大（增加 1.5），并且应当提供对曲线下方面积更为准确的估计。类似地，在上述定义中，我们取上黎曼和（对所有划分）的下确界，因为向一个划分中加入更多的点会使上黎曼和减小（减少 1.5），并且应当提供对曲线下方面积更为准确的估计。

我们关于下黎曼积分与上黎曼积分的第一个结果是一个简单的不等式。

1.8 *lower Riemann integral $\leq$ upper Riemann integral*

假设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是一个有界函数。那么

$$L(f,[a,b])\leq U(f,[a,b]).$$

P 屋顶 所需的不等式由定义和 1 得出 .6.

下黎曼积分和上黎曼积分都可以合理地被视为函数图像下的面积。我们应该使用哪一个呢？例 1.4 中的图像表明，对于该例中的函数，这两个量是相同的；我们很快就会验证这一猜想。然而，正如我们将在下一节中看到的，确实存在一些函数，其下黎曼积分并不等于上黎曼积分。

与其在下黎曼积分和上黎曼积分之间作出选择，黎曼积分的标准做法是只考虑这两者相等的函数。这个决定具有巨大的优势，使得黎曼积分在处理两个函数之和时能够如我们所期望的那样表现（参见本节练习4）。

1.9 定义 *Riemann integrable; Riemann integral*

- 在一个闭有界区间上的有界函数，如果其下黎曼积分等于其上黎曼积分，则称为 *Riemann integrable*。
- 如果 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是黎曼可积的，则 *Riemann integral* $\int_a^b f$ 定义为

$$\int_a^b f=L(f,[a,b])=U(f,[a,b]).$$

让 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集。

1.10 示例 *computing a Riemann integral*

定义 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 由 $f(x)=x^2$。然后

$$U(f,[0,1])\leq\inf_{n\in\mathbf{Z}^+}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}=\sup_{n\in\mathbf{Z}^+}\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\leq L(f,[0,1]),$$

其中上述两个不等式来自例 1.4，而两个等式则很容易通过将上面两个分式的分子和分母同时除以 n^2 得到。

上述段落表明 $U(f,[0,1]) \leq \frac{1}{3} \leq L(f,[0,1])$。当与 1.8 结合时，这表明 $L(f,[0,1]) = U(f,[0,1]) = \frac{1}{3}$。因此 f 是黎曼可积的，并且

Our definition of Riemann integration is actually a small modification of Riemann's definition that was proposed by Gaston Darboux (1842–1917).

$$\int_0^1 f = \frac{1}{3}.$$

现在我们将讨论关于黎曼积分的一个关键结果。一致连续性提供了使该证明得以成立的主要工具。

1.11 *continuous functions are Riemann integrable*

每个闭合有界区间上的每个连续实值函数都是黎曼可积的。

证明 设 a，$b \in \mathbf{R}$，满足 $a < b$，并且 $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ 是一个连续函数（因此根据本科实分析中的一个标准定理，f 有界且一致连续）。令 $\varepsilon > 0$。由于 f 一致连续，存在 $\delta > 0$ 使得

1.12 $$|f(s) - f(t)| < \varepsilon \text{ for all } s, t \in [a,b] \text{ with } |s-t| < \delta.$$

设 $n \in \mathbf{Z}^+$ 满足 $\frac{b-a}{n} < \delta$。

设 P 为 $[a,b]$ 的等距分割 $a = x_0$、x_1、$\cdots$、$x_n = b$，并满足

$$x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}$$

对于每个 $j = 1, \ldots, n$。然后

$$\begin{aligned} U(f,[a,b]) - L(f,[a,b]) &\leq U(f,P,[a,b]) - L(f,P,[a,b]) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{j-1},x_j]} f - \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \Big) \\ &\leq (b-a)\varepsilon, \end{aligned}$$

其中第一行由 $U(f$、$[a,b])$ 以及 $L(f$、$[a,b])$ 的定义推出，而最后一行由 1.12 推出。

我们已经证明，对于所有 $\varepsilon > 0$，$U(f,[a,b]) - L(f,[a,b]) \leq (b-a)\varepsilon$。因此 1.8 表明 $L(f,[a,b]) = U(f,[a,b])$。因此 f 是黎曼可积的。 ■

$\int_a^b f$ 的另一种记法是 $\int_a^b f(x)\,dx$。这里 x 是一个哑变量，因此我们也可以写成 $\int_a^b f(t)\,dt$，或者使用另一个变量。当我们想写成类似 $\int_0^1 x^2\,dx$ 而不是使用函数记号时，这种记法就变得很有用。

下面的结果给出了黎曼积分的一个常用估计。

1.13 *bounds on Riemann integral*

设 $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ 是黎曼可积的。则

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f$$

证明 令P为平凡划分$a = x_0, x_1 = b$。则

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f = L(f, P, [a,b]) \leq L(f, [a,b]) = \int_a^b f,$$

证明结果中的第一个不等式。

The secon结果中的 d 不等式以类似的方法证明，并留给 rea 该。 ■

练习 1A

1 假设$f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ 是一个有界函数，使得

$$L(f, P, [a,b]) = U(f, P, [a,b])$$

对于区间 $[a,b]$ 的某个划分 P。证明f 在 $[a,b]$ 上是常函数。

2 假设 $a \leq s < t \leq b$。定义$f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } s < x < t, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明f 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的，并且 $\int_a^b f = t - s$。

3 假设$f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ 是一个有界函数。证明 f 是黎曼可积的，当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $[a,b]$ 的一个划分 P，使得

$$U(f, P, [a,b]) - L(f, P, [a,b]) < \varepsilon.$$

4 设f，$g\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ 是黎曼可积的。证明$f + g$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的，并且

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

5 假设$f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ 是黎曼可积的。证明函数 $-f$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的，并且

$$\int_a^b (-f) = -\int_a^b f.$$

假设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是黎曼可积的。假设 $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是一个函数，使得 $g(x) = f(x)$ 对于除了有限多个 $x \in [a, b]$ 外的所有情况成立。证明 g 在 $[a, b]$ 上是黎曼可积的。

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

7 假设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是一个有界函数。对 $n \in \mathbf{Z}^+$，令 P_n 表示将 $[a, b]$ 划分为 2^n 个等长区间的分割。证明:

$$L(f, [a,b]) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n, [a,b]) \text{ and } U(f, [a,b]) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n, [a,b]).$$

8 设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是黎曼可积的。证明:

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\bigl(a + \tfrac{j(b-a)}{n}\bigr).$$

9 假设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是黎曼可积的。证明如果 c、$d \in \mathbf{R}$ 且 $a \le c < d \le b$，则 f 在 $[c, d]$ 上是黎曼可积的。

[*To say that f is Riemann integrable on $[c, d]$ means that f with its domain restricted to $[c, d]$ is Riemann integrable.*]

10 设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是一个有界函数，且 $c \in (a, b)$。证明 f 在 $[a, b]$ 上是黎曼可积的，当且仅当 f 在 $[a, c]$ 上是黎曼可积的，并且 f 在 $[c, b]$ 上是黎曼可积的。此外，证明如果这些条件成立，则

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

11 假设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是黎曼可积的。定义 $F: [a, b] \to \mathbf{R}$ 为

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t = a, \\ \displaystyle\int_a^t f & \text{if } t \in (a, b]. \end{cases}$$

证明 F 在 $[a, b]$ 上连续。

12 假设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是黎曼可积的。证明 $|f|$ 是黎曼可积的，并且

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

13 假设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 是一个递增函数，这意味着 $c, d \in [a, b]$ 且 $c < d$ 蕴含 $f(c) \le f(d)$。证明 f 在 $[a, b]$ 上是黎曼可积的。

14 假设 f_1，f_2，... 是一列在 $[a, b]$ 上的黎曼可积函数，且 f_1，f_2，... 在 $[a, b]$ 上一致收敛到一个函数 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$。证明 f 是黎曼可积的，并且

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

1B 黎曼积分还不够好

黎曼积分运作得足够好，以至于每年在世界各地被教授给数以百万计的微积分学生。然而，黎曼积分也存在若干缺陷。在本节中，我们将讨论以下三个问题:

- 黎曼积分无法处理具有大量不连续点的函数;
- 黎曼积分不能处理无界函数;
- 黎曼积分在处理极限时效果不佳。

在第2章中，我们将开始构建一种理论来弥补这些问题。我们首先给出下面这个不是黎曼可积的函数的例子。

1.14 示例 *a function that is not Riemann integrable*

定义 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational,} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

如果 $[a,b] \subseteq [0,1]$ 且具有 $a < b$，则

$$\inf_{[a,b]} f = 0 \quad \text{and} \quad \sup_{[a,b]} f = 1$$

因为 $[a,b]$ 同时包含一个无理数和一个有理数。因此，对于 $[0,1]$ 的每一个划分 P，$L(f,P,[0,1]) = 0$ 且 $U(f,P,[0,1]) = 1$。于是 $L(f,[0,1]) = 0$ 且 $U(f,[0,1]) = 1$。因为 $L(f,[0,1]) \neq U(f,[0,1])$，我们得出 f 不是黎曼可积的。

这个例子令人困惑，因为（正如我们稍后将看到的），有理数远少于无理数。因此，在某种意义上，f 应该具有积分为 0。然而，f 的黎曼积分并未定义。

试图将黎曼积分的定义应用于无界函数将导致不良的结果，如下面的例子所示。

1.15 示例 *Riemann integration does not work with unbounded functions*

定义 $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{if } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

如果 x_0、x_1、……、x_n 是 $[0,1]$ 的一个划分，则 $\sup\limits_{[x_0,\, x_1]} f = \infty$。因此，如果我们试图应用
根据 f 的上黎曼和的定义，我们会有 $U(f,\ P,\ [0,1]) = \infty$，对 $[0,1]$ 的每一个划分 P。

然而 r，我们应当认为f的图像下的面积是2，而不是∞ ，因为

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 f = \lim_{a \downarrow 0}(2 - 2\sqrt{a}) = 2.$$

微积分课程通过将 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 定义为 $\lim_{a\downarrow 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 来处理前面的例子。如果使用这种方法并且

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

然后我们将$\int_0^1 f$定义为

$$\lim_{a\downarrow 0}\int_a^{1/2} f + \lim_{b\uparrow 1}\int_{1/2}^{b} f.$$

然而，对子域取黎曼积分然后再取极限的想法，在更复杂的函数情况下可能会失效，正如下一个例子所示。

1.16 示例 *area seems to make sense, but Riemann integral is not defined*

设 $r_1, r_2, \ldots$ 为一个序列，它恰好一次包含 (0, 1) 中的每一个有理数，且不包含任何其他数。对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，定义 $f_k \colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ 为

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x - r_k}} & \text{if } x > r_k, \\ 0 & \text{if } x \le r_k. \end{cases}$$

定义 $f \colon [0, 1] \to [0, \infty]$ 为

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{2^k}.$$

由于 [0,1] 的每一个非空开子区间都包含一个有理数，函数 f 在每一个这样的子区间上都是无界的。因此，f 的黎曼积分在 [0,1] 中任何包含不止一个元素的子区间上都是未定义的。

然而，每个 f_k 的图像下的面积都小于 2。定义 f 的公式随后表明，我们应当预期 f 的图像下的面积小于 2，而不是未定义。

下一个例子表明，由取值被 1 所界的黎曼可积函数序列的逐点极限不一定是黎曼可积的。

1.17 练习充足的 *Riemann integration does not work well with pointwis e limits*

设 $r_1, r_2, \ldots$ 为一个序列，它恰好一次包含区间 [0, 1] 中的每一个有理数，且不包含其他任何数。对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，定义 $f_k \colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ 为

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \{r_1, \ldots, r_k\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Th每个 f_k 都是黎曼可积的，并且 $\int_0^1 f_k =$ 为 0，正如你应该验证的那样。

定义 $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ 如下

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational,} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

清晰地

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{for each } x \in [0, 1].$$

然而，f 不是黎曼可积的（见例1.14），尽管 f 是一列被1界定的可积函数的逐点极限。

由于分析在很大程度上依赖于极限，一个良好的积分理论应当允许极限与积分的交换，至少在函数适当有界的情况下。因此，前面的例子指出了黎曼积分中的一个严重缺陷。

现在我们得到了一个正面的结果，但是正如我们将看到的，即便这个结果也表明黎曼积分存在一些问题。

1.18 *interchanging Riemann integral and limit*

设 $a, b, M \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$。设 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ 是定义在 $[a, b]$ 上的一列黎曼可积函数，使得

$$|f_k(x)| \leq M$$

对于所有 $k \in \mathbf{Z}^+$ 以及所有 $x \in [a, b]$。假设对每个 $x \in [a, b]$，$\lim_{k \to \infty} f_k(x)$ 存在。定义 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x).$$

如果 f 在 $[a, b]$ 上是黎曼可积的，那么

$$\int_a^b f = \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k.$$

上面的结果存在两个问题。第一个问题是不可取的假设，即极限函数 f 是黎曼可积的。理想情况下，这个性质应当从其他假设中推导出来，但例子 1.17 显示这并不一定成立。

上述结果的第二个问题在于，它的证明似乎比涉及黎曼积分的其他结果的证明更为复杂。我们在此不提供上述结果的证明。一个更强结果的简洁证明见于第3章，使用我们从下一章开始发展起来的测度论工具。

The difficulty in finding a simple Riemann-integration-based proof of the result above suggests that Riemann integration is not the ideal theory of integration.

练习 1B

定义 $f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ 如下：

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{if } a \text{ is irrational,} \\ \frac{1}{n} & \text{if } a \text{ is rational and } n \text{ is the smallest positive integer} \\ & \text{such that } a = \frac{m}{n} \text{ for some integer } m. \end{cases}$$

证明 f 是黎曼可积的，并计算 $\int_0^1 f$。

2 假设 $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ 是一个有界函数。证明 f 是黎曼可积的当且仅当

$$L(-f, [a, b]) = -L(f, [a, b]).$$

假设 $f, g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ 是有界函数。证明：

$$L(f, [a, b]) + L(g, [a, b]) \leq L(f + g, [a, b])$$

和

$$U(f + g, [a, b]) \leq U(f, [a, b]) + U(g, [a, b]).$$

4 给出有界函数 f，g：$[0, 1] \to \mathbf{R}$ 的一个例子，使得

$$L(f, [0, 1]) + L(g, [0, 1]) < L(f + g, [0, 1])$$

和

$$U(f + g, [0, 1]) < U(f, [0, 1]) + U(g, [0, 1]).$$

5 给出一个定义在 $[0, 1]$ 上的连续实值函数序列 $f_1, f_2, \cdots$，以及一个定义在 $[0, 1]$ 上的连续实值函数 f，使得

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$$

对于每个 $x \in [0, 1]$ 但

$$\int_0^1 f \neq \lim_{k \to \infty} \int_0^1 f_k.$$

Chapter 2
Measures

上一章的最后一节讨论了黎曼积分的若干不足之处。为弥补这些不足，本章将区间长度的概念推广到 R 的更大一类子集。这将引导我们进入测度理论，并在下一章进一步讨论关于测度的积分。

本章首先研究外测度，它看起来很有前景，但却缺少一个关键性质。这一缺陷引导我们引入 σ-代数和可测空间。随后，我们在抽象的背景下定义测度，使其可以应用于比 R 更一般的情形。接着，我们在 R 上构造勒贝格测度，作为区间长度概念的理想扩展。

Fifth-century AD Roman ceiling mosaic in what is now a UNESCO World Heritage site in Ravenna, Italy. Giuseppe Vitali, who in 1905 proved result 2.18 in this chapter, was born and grew up in Ravenna, where perhaps he saw this mosaic. Could the memory of the translation-invariant feature of this mosaic have suggested to Vitali the translation invariance that is the heart of his proof of 2.18?

2A R 上的外测度

外测度的动机与定义

黎曼积分源于通过近似矩形面积之和来逼近函数图像下的面积。这些矩形的高度近似函数在其定义域各子区间上的取值。每个近似矩形的宽度是相应子区间的长度。该长度即是在下、上黎曼和定义中出现的项 $x_j - x_{j-1}$（见 1.3）。

为了将积分扩展到比黎曼可积函数更大的函数类，我们将把函数的定义域写成若干比黎曼积分中使用的子区间更复杂的子集的并集。我们需要为这些子集的每一个赋予一个“大小”，其中这个大小是对区间长度的扩展。

例如，我们期望集合 $(1,3) \cup (7,10)$ 的大小为 5（因为第一个区间的长度为 2，第二个区间的长度为 3，并且 $2+3=5$）。

为比开区间的并更为复杂的 R 的子集赋予大小是一项非平凡的任务。本章聚焦于这一任务以及其向其他情境的扩展。在下一章中，我们将看到如何利用本章发展出的思想来构建一个内容丰富的积分理论。

我们首先给出开区间长度的预期定义，并引入表示该长度的记号。

2.1 定义 *length of open interval;* $\ell(I)$

开区间 I 的 *length* $\ell(I)$ 定义为

$$\ell(I) = \begin{cases} b-a & \text{if } I=(a,b) \text{ for some } a,b \in \mathbf{R} \text{ with } a<b, \\ 0 & \text{if } I=\varnothing, \\ \infty & \text{if } I=(-\infty,a) \text{ or } I=(a,\infty) \text{ for some } a \in \mathbf{R}, \\ \infty & \text{if } I=(-\infty,\infty). \end{cases}$$

假设 $A \subseteq$ R。A 的大小应当至多等于一列开区间的长度之和，这些开区间的并包含 A。对所有此类和取下确界，给出了 A 大小的一个合理定义，记为 $|A|$，并称为 A 的外测度。

2.2 定义 *outer measure;* $|A|$

集合 $A \subseteq$ R 的 *outer measure* $|A|$ 定义为

$$|A| = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : I_1, I_2, \ldots \text{ are open intervals such that } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\Big\}.$$

外测度的定义涉及一个无穷和。由区间 $[0, \infty]$ 中元素构成的序列 $t_1, t_2, \dots$ 的无穷和 $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$，若某个 $t_k = \infty$，则定义为 ∞。否则，$\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ 定义为部分和所形成的递增序列 $t_1, t_1 + t_2, t_1 + t_2 + t_3, \dots$ 的极限（可能为 ∞）；因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

2.3 示例 *finite sets have outer measure* 0

设 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ 是一个有限的实数集合。设 $\varepsilon > 0$。通过如下方式定义一列开区间 $I_1, I_2, \dots$:

$$I_k = \begin{cases} (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon) & \text{if } k \le n, \\ \varnothing & \text{if } k > n. \end{cases}$$

于是 $I_1, I_2, \dots$ 是一列开区间，其并集包含 A。显然 $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon n$。因此 $|A| \le 2\varepsilon n$。由于 ε 是任意的正数，这意味着 $|A| = 0$。

外测度的良好性质

外测度具有一些在本小节中讨论的良好性质。我们从一个改进上述例子的结果开始。

2.4 *countable sets have outer measure* 0

每个可数子集的 R 都具有外测度 0。

证明 假设 $A = \{a_1, a_2, \dots, \}$ 是 R 的可数子集。设 $\varepsilon > 0$。对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，让

$$I_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right).$$

然后 $I_1, I_2, \dots$ 是一列开区间，其并集包含 A。因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = 2\varepsilon,$$

我们有 $|A| \le 2\varepsilon$。因为 ε 是任意正数，这意味着 $|A| = 0$。 ■

上述结果以及有理数集合 Q 可数的结果意味着 Q 的外测度为 0。我们很快将展示有理数远少于实数（参见 2.17）。因此，方程 $|\mathbf{Q}| = 0$ 表示外测度具有我们希望任何合理的大小概念所具备的良好性质。

下一个结果表明，外部测度在集合包含方面做得正确。

2.5 *outer measure preserves order*

假设 A 和 B 是具有 $A \subseteq B$ 的 R 的子集。那么 $|A| \le |B|$。

证明 假设 I_1、I_2、... 是一列开区间，其并集包含 B。那么，这一列开区间的并集也包含 A。因此

$$|A| \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

对所有并集包含 B 的开区间序列取下确界，我们得到 $|A| \le |B|$。

我们预期如果集合向右或向左移动，R的子集的大小不应改变。下一个定义使我们能够更精确地描述。

2.6 定义 *translation; $t + A$*

如果 $t \in \mathbf{R}$ 且 $A \subseteq \mathbf{R}$，则 *translation* $t + A$ 定义为

$$t + A = \{t + a : a \in A\}.$$

如果 $t > 0$，则通过将集合 A 在实数线上向右移动 t 单位来获得 $t + A$；如果 $t < 0$，则通过将集合 A 在实数线上向左移动 $|t|$ 单位来获得 $t + A$。

平移不改变开区间的长度。具体地，若 $t \in \mathbf{R}$ 且 $a, b \in [-\infty, \infty]$，则 $t + (a, b) = (t + a, t + b)$，因此 $\ell\big(t + (a, b)\big) = \ell\big((a, b)\big)$。这里我们使用的标准约定是 $t + (-\infty) = -\infty$ 和 $t + \infty = \infty$。

下一个结果表明，平移不变性同样适用于外测度。

2.7 *outer measure is translation invariant*

假设 $t \in \mathbf{R}$ 且 $A \subseteq \mathbf{R}$。则 $|t + A| = |A|$。

证明 假设 $I_1, I_2, \ldots$ 是一个开区间的序列，其并集包含 A。那么 $t + I_1, t + I_2, \ldots$ 是一个开区间的序列，其并集包含 $t + A$。因此

$$|t + A| \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t + I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

对所有其并包含 A 的开区间序列 I_1、I_2、……，取最后一项的下确界，我们得到 $|t + A| \le |A|$。

为了得到另一方向的不等式，注意到 $A = -t + (t + A)$。因此，应用上一段中的不等式，将 A 替换为 $t + A$，并将 t 替换为 $-t$，我们得到 $|A| = |-t + (t + A)| \le |t + A|$。因此 $|t + A| = |A|$。

区间 (1, 4) 与 (3, 5) 的并集是区间 (1, 5)。因此

$$\ell\big((1,4)\cup(3,5)\big) < \ell\big((1,4)\big) + \ell\big((3,5)\big)$$

因为上述不等式的左边等于 4，右边等于 5。上述不等式的方向可以通过注意到区间 (3, 4) 来解释，区间 (3, 4) 是 (1, 4) 和 (3, 5) 的交集，其长度在不等式右边被计算了两次。

上面段落的例子应当为下一个结果中不等式的方向提供直觉。满足下述结果中不等式的性质称为 *countable subadditivity*，因为它适用于子集序列。

2.8 *countable subadditivity of outer measure*

假设 A_1、A_2、…… 是 R 的子集序列。那么

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|.$$

证明 若对某个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 有 $|A_k| = \infty$，则上述不等式显然成立。因此假设对所有 $k \in \mathbf{Z}^+$ 都有 $|A_k| < \infty$。

令 $\varepsilon > 0$。对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，令 $I_{1,k}$、$I_{2,k}$、…… 为一个开区间的序列，其并集包含 A_k，使得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{j,k}) \leq \frac{\varepsilon}{2^k} + |A_k|.$$

因此

2.9
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{j,k}) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|.$$

双重索引的开区间集合 $\{I_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}^+\}$ 可以重新排列成一个开区间的序列，其并集包含 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，步骤如下，其中在第 k (步从 $k = 2$ 开始，然后是 $k = 3, 4, 5, \dots$) 我们附加上那些索引和为 k 的 $k-1$ 个区间：

$$\underbrace{I_{1,1}}_{2},\ \underbrace{I_{1,2}, I_{2,1}}_{3},\ \underbrace{I_{1,3}, I_{2,2}, I_{3,1}}_{4},\ \underbrace{I_{1,4}, I_{2,3}, I_{3,2}, I_{4,1}}_{5},\ \underbrace{I_{1,5}, I_{2,4}, I_{3,3}, I_{4,2}, I_{5,1}}_{\text{sum of the two indices is 6}}, \dots .$$

不等式2.9表明，上述所列区间的长度之和小于或等于$\varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$。因此 $\big|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big| \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$。由于$\varepsilon$是任意的正数，这意味着 $\big|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$。

可数次可加性蕴含有限次可加性，这意味着

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq |A_1| + \cdots + |A_n|$$

f对所有 $A_1, \dots, A_n \subseteq$ 属于 R，因为我们可以取 $A_k = \varnothing$ 作为在 2.8 中 $k > n$。

如上所证明，外测度的可数次可加性为我们列出的外测度所具有的良好性质清单又增添了一条。

闭有界区间的外测度

我们还应证明外测度的另一个良好性质是：如果 $a < b$，那么闭区间 $[a, b]$ 的外测度是 $b - a$。确实，如果 $\varepsilon > 0$，那么 $(a - \varepsilon, b + \varepsilon), \varnothing, \varnothing, \ldots$ 是一列开区间，其并集包含 $[a, b]$。因此 $|[a, b]| \leq b - a + 2\varepsilon$。由于该不等式对所有 $\varepsilon > 0$ 都成立，我们得出结论

$$|[a, b]| \leq b - a.$$

你是否觉得反方向的不等式显然成立？如果是这样，请再想一想，因为证明反方向的不等式需要以某种形式使用 R 的完备性。例如，假设 R 是一个可数集（这并不是真的，正如我们很快将看到的那样，但 R 的不可数性并不显然）。那么我们将有 $|[a, b]| = 0$（由 2.4）。因此，在证明 $|[a, b]| \geq b - a$ 所需的要素中，正在发生着一些比你可能猜到的更为深刻的事情。

当我们证明 $|[a, b]| \geq b - a$ 时，下面的定义将会很有用。

2.10 定义 *open cover; finite subcover*

设 $A \subseteq \mathbf{R}$。

- 由 R 的开子集组成的一个集合 $\mathcal{C}$ 称为 A 的一个 *open cover*，如果 A 包含于 $\mathcal{C}$ 中所有集合的并集中。
- 如果A包含于$\mathcal{C}$中某个有限列表的集合的并中，则称A的一个开覆盖$\mathcal{C}$具有*finite subcover*。

2.11 示例 *open covers and finite subcovers*

- 集合 $\{(k, k + 2) : k \in \mathbf{Z}^+\}$ 是 $[2, 5]$ 的一个开覆盖，因为 $[2, 5] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(k, k + 2)$。这个开覆盖有一个有限子覆盖，因为 $[2, 5] \subseteq (1, 3) \cup (2, 4) \cup (3, 5) \cup (4, 6)$。
- 集合 $\{(k, k + 2) : k \in \mathbf{Z}^+\}$ 是 $[2, \infty)$ 的一个开覆盖，因为 $[2, \infty) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(k, k + 2)$。这个开覆盖没有有限子覆盖，因为不存在有限多个形如 $(k, k + 2)$ 的集合，其并集包含 $[2, \infty)$。
- 集合 $\{(0, 2 - \frac{1}{k}) : k \in \mathbf{Z}^+\}$ 是 $(1, 2)$ 的一个开覆盖，因为 $(1, 2) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(0, 2 - \frac{1}{k})$。这个开覆盖没有有限子覆盖，因为不存在有限多个形如 $(0, 2 - \frac{1}{k})$ 的集合，其并集包含 $(1, 2)$。

下一个结果将是我们在证明 $|[a, b]| \geq b - a$ 时的主要工具。尽管我们只需要按所述给出的结果，但务必参见本节的练习 4，它与下一个结果结合起来给出了 R 的闭有界子集的一个刻画。注意，下面的证明使用了实数的完备性性质（通过断言某个非空有界集合的上确界存在）。

2.12 *Heine–Borel Theorem*

R 中任意一个闭有界子集的每一个开覆盖都有一个有限子覆盖。

To provide visual clues, we usually denote closed sets by F and open sets by G.

证明 设F是R中的一个闭有界子集，且$\mathcal{C}$是F的一个开覆盖。

首先考虑 $F \ =$ 位于 $[a, b]$ 的情形，其中存在某些 a、$b \in$ R 且满足 $a < b$。因此 $\mathcal{C}$ 是$[a,\ b]$的开覆盖。设

$$D = \{d \in [a,b] : [a,d] \text{ has a finite subcover from } \mathcal{C}\}.$$

注意到$a \in D$ (，因为对于某个$G \in \mathcal{C}$)，$a \in G$。因此D不是空集。令

$$s = \sup D.$$

因此 $s \in [a, b]$。因此，存在一个开集 $G \in \mathcal{C}$，使得 $s \in G$。令 $\delta > 0$，使得 $(s - \delta, s + \delta) \subseteq G$。因为 $s = \sup D$，存在 $d \in (s - \delta,\ s]$ 和 $n \in \mathbf{Z}^+$ 和 G_1，...，$G_n \in \mathcal{C}$，使得

$$[a,d] \subseteq G_1 \cup \cdots \cup G_n.$$

现在

2.13
$$[a,d'] \subseteq G \cup G_1 \cup \cdots \cup G_n$$

对所有 $d' \in [s, s + \delta)$。因此，对所有 $d' \in [s, s + \delta)$ 有 $d' \in D \cap [a, b]$。这意味着 $s = b$。此外，2.13 与 $d' = b$ 表明 $[a, b]$ 从 $\mathcal{C}$ 中具有一个有限子覆盖，从而完成了在 $F = [a, b]$ 情形下的证明。

现在设 F 是 R 的任意闭有界子集，并且 $\mathcal{C}$ 是 F 的一个开覆盖。设 $a, b \in$ R，使得 $F \subseteq [a, b]$。现在 $\mathcal{C} \cup \{\mathrm{R} \setminus F\}$ 是 R 的一个开覆盖，因此也是 $[a, b]$ 的一个开覆盖（这里 R $\setminus F$ 表示 F 在 R 中的补集）。根据我们的第一种情况，存在 $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{C}$ 使得

$$[a,b] \subseteq G_1 \cup \cdots \cup G_n \cup (\mathbf{R} \setminus F).$$

因此

$$F \subseteq G_1 \cup \cdots \cup G_n,$$

完成证明。

Saint-Affrique, the small town in southern France where Émile Borel (1871–1956) was born. Borel first stated and proved what we call the Heine–Borel Theorem in 1895. Earlier, Eduard Heine (1821–1881) and others had used similar results.

现在我们可以证明闭区间具有符合预期的外测度。

2.14 *outer measure of a closed interval*

假设 a、$b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$。则 $|[a, b]| = b - a$。

证明 关于 $|[a, b]| \le b - a$ 的证明见本小节第一段。

为了证明不等式的另一个方向，设 $I_1, I_2, \ldots$ 是一列开区间，使得 $[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$。根据海涅–博雷尔定理（2.12），存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得

2.15 $$[a, b] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n.$$

我们现在将通过对 n 的归纳来证明上述包含关系意味着

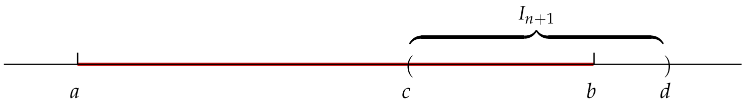
2.16 $$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \ge b - a.$$

这将进而意味着 $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \ge \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \ge b - a$，从而完成对 $|[a, b]| \ge b - a$ 的证明。

为了开始我们的归纳证明，注意到如果 $n = 1$，则 2.15 显然推出 2.16。现在进行归纳步骤：假设 $n > 1$，并且对于所有选择的 a、$b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$，2.15 都推出 2.16。假设 $I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}$ 是开区间，使得

$$[a, b] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n \cup I_{n+1}.$$

因此，b 至少在区间 I_1、...、I_n、I_{n+1} 中的一个内。通过重新标记，我们可以假设 $b \in I_{n+1}$。假设 $I_{n+1} = (c、d)$。如果 $c \le a$，则 $\ell(I_{n+1}) \ge b - a$，并且没有进一步需要证明的内容；因此，我们可以假设 $a < c < b < d$，如下图所示。



因此

$$[a, c] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n.$$

根据我们的归纳假设，我们有 $\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \ge c - a$。因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \ell(I_k) &\ge (c - a) + \ell(I_{n+1}) \\ &= (c - a) + (d - c) \\ &= d - a \\ &\ge b - a,\end{aligned}$$

完成证明。 ■

Alice was beginning to get very tired of sitting by her sister on the bank, and of having nothing to do: once or twice she had peeped into the book her sister was reading, but it had no pictures or conversations in it, "and what is the use of a book," thought Alice, "without pictures or conversation?"
– opening paragraph of 爱丽丝梦游仙境, *by Lewis Carroll*

上述结果容易推出，每个开区间的外测度等于其长度（见练习6）。

前述结果有如下重要的推论。你可能熟悉格奥尔格·康托尔（1845–1918）对下一个结果的原始证明。这里给出的使用外测度的证明为康托尔的证明提供了一个有趣的替代方案。

2.17 ***nontrivial intervals are uncountable***

R 中每个包含至少两个不同元素的区间都是不可数的。

证明 设 I 是一个包含 a 的区间，$b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$。则

$$|I| \geq |[a, b]| = b - a > 0,$$

上面的第一个不等式成立是因为外测度保持序关系（见 2.5），而上面的等式来自 2.14。由于 R 的每个可数子集的外测度为 0（见 2.4），我们可以得出 I 是不可数的。

外测度不是可加的

我们已经得到了一些结果，给出了外测度的良好性质。现在我们将要讨论外测度的一个不太令人满意的性质。

Outer measure led to the proof above that R *is uncountable. This application of outer measure to prove a result that seems unconnected with outer measure is an indication that outer measure has serious mathematical value.*

如果外测度是将大小作为区间长度的延拓来赋予的一种完美方式，那么两个不交集合的并集的外测度将等于两个集合的外测度之和。遗憾的是，下一个结果表明外测度并不具有这一性质。

在下一节中，我们开始展开对下一个结果的讨论，这将引导我们进入测度论。

2.18 ***nonadditivity of outer measure***

存在 R 的不相交子集 A 和 B，使得

$$|A \cup B| \neq |A| + |B|.$$

证明 $a \in [-1, 1]$，设 $\widetilde{a}$ 为 $[-1, 1]$ 中与 a 相差一个有理数的数集。换句话说，

$$\widetilde{a} = \{c \in [-1, 1] : a - c \in \mathbf{Q}\}.$$

如果a，$b \in [-1, 1]$ 且 $\widetilde{a} \cap \widetilde{b} \neq \emptyset$，则 $\widetilde{a} = \widetilde{b}$。（证明：假设存在 $d \in \widetilde{a} \cap \widetilde{b}$。则 $a - d$ 和 $b - d$ 是有理数；相减可得，我们得出 $a - b$ 是一个有理数。该等式 $a - c = (a - b) + (b - c)$ 现在这意味着，如果 $c \in$ 在 $[-1, 1]$，那么 $a - c$ 是有理数当且仅当 $b - c$ 是有理数。换句话说，$\widetilde{a} = \widetilde{b}$。）

Think of $\widetilde{a}$ *as the equivalence class of* a *under the equivalence relation that declares* $a c \in [-1, 1]$ *to be equivalent if* $a - c \in \mathbf{Q}$.

显然 $a \in \tilde{a}$ 对于每个 $a \in [-1, 1]$。因此 $[-1, 1] = \bigcup_{a \in [-1,1]} \tilde{a}$。

This step involves the Axiom of Choice, as discussed after this proof. The set V arises by choosing one element from each equivalence class.

让 V 是一个集合，包含在每个不同集合中的恰好一个元素。

$$\{\tilde{a} : a \in [-1, 1]\}.$$

换言之，对于每个 $a \in [-1, 1]$，集合 $V \cap \tilde{a}$ 恰好有一个元素。

让 r_1、r_2、…… 是一列不同的有理数，使得

$$[-2, 2] \cap \mathbf{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}.$$

然后

$$[-1, 1] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k + V),$$

其中，上述集合包含关系成立，因为如果 $a \in [-1, 1]$，则令 v 为 $V \cap \tilde{a}$ 的唯一元素，我们有 $a - v \in \mathrm{Q}$，这意味着存在某个 $k \in \mathrm{Z}^+$，使得 $a = r_k + v \in r_k + V$。

上述的集合包含关系、外测度的保序性（2.5）以及外测度的可数次可加性（2.8）蕴含

$$|[-1, 1]| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |r_k + V|.$$

我们知道 $|[-1, 1]| = 2$（由 2.14）。因此，外测度的平移不变性（2.7）使我们可以将上述不等式改写为

$$2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |V|.$$

因此 $|V| > 0$。

注意集合$r_1 + V$、$r_2 + V$、……是互不相交的。（证明：假设存在 $t \in (r_j + V) \cap (r_k + V)$。则对某些$v_1$、$v_2 \in V$，有$t = r_j + v_1 = r_k + v_2$，这意味着$v_1 - v_2 = r_k - r_j \in \mathrm{Q}$。现在我们对$V$的构造意味着$v_1 = v_2$，这又意味着$r_j = r_k$，从而意味着$j = k$。）

令 $n \in \mathrm{Z}^+$。显然

$$\bigcup_{k=1}^{n} (r_k + V) \subseteq [-3, 3]$$

因为 $V \subseteq [-1, 1]$ 并且每个 $r_k \in [-2, 2]$。上述集合包含关系意味着

2.19
$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} (r_k + V)\right| \leq 6.$$

然而

2.20
$$\sum_{k=1}^{n} |r_k + V| = \sum_{k=1}^{n} |V| = n\,|V|.$$

现在 2.19 和 2.20 建议我们选择 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $n|V| > 6$。因此

2.21
$$\Big|\bigcup_{k=1}^{n}(r_k + V)\Big| < \sum_{k=1}^{n}|r_k + V|.$$

如果我们对 R 的所有不相交子集 A、B 都有 $|A \cup B| = |A| + |B|$，那么通过对 n 的归纳，我们将对 R 的所有不相交子集 A_1，...，A_n 都有 $\Big|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big| = \sum_{k=1}^{n}|A_k|$。然而，2.21 告诉我们并不存在这样的结果。因此，存在 R 的不相交子集 A、B，使得 $|A \cup B| \neq |A| + |B|$。

选择公理属于集合论，它表述为：如果 $\mathcal{E}$ 是一个其元素为两两不相交的非空集合的集合，那么就存在一个集合 V，它在 $\mathcal{E}$ 的每一个作为元素的集合中恰好包含一个元素。我们使用选择公理构造了集合 V，该集合在上一条证明中被使用。

少数数学家反对使用选择公理。因此我们将记录在哪些地方需要使用它。即使你不喜欢使用选择公理，先前的结果也提醒我们不要试图证明外测度是可加的（任何这样的证明都需要与选择公理相矛盾，而选择公理与集合论的标准公理是相容的）。

练习 2A

1 证明如果 A 和 B 是 R 的子集，并且 $|B| = 0$，则 $|A \cup B| = |A|$。

2 假设 $A \subseteq \mathbf{R}$ 且 $t \in \mathbf{R}$。令 $tA = \{ta : a \in A\}$。证明 $|tA| = |t|\,|A|$。

[*Assume that* $0 \cdot \infty$ *is defined to be* 0.]

3 证明若 $A, B \subseteq \mathbf{R}$ 且 $|A| < \infty$, 则 $|B \setminus A| \geq |B| - |A|$。

4 假设 F 是 R 的一个子集，具有这样的性质：F 的每一个开覆盖都有一个有限子覆盖。证明 F 是闭且有界的。

5 假设 $\mathcal{A}$ 是 R 的闭子集所构成的一个集合，并且满足 $\bigcap_{F \in \mathcal{A}} F = \varnothing$。证明：如果 $\mathcal{A}$ 至少包含一个有界集合，那么存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 以及 $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{A}$，使得 $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \varnothing$。

6 证明如果 a、$b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$，则

$$|(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = b - a.$$

7 假设 a、b、c、d 是实数，且 $a < b$ 和 $c < d$。证明：

$$|(a,b) \cup (c,d)| = (b-a) + (d-c) \text{ if and only if } (a,b) \cap (c,d) = \varnothing.$$

8 证明若 $A \subseteq \mathbf{R}$ 且 $t > 0$，则 $|A| = |A \cap (-t,\ t)| + \big|A \cap \big(\mathbf{R} \setminus (-t,\ t)\big)\big|$。

9 证明 $|A| = \lim_{t \to \infty} |A \cap (-t, t)|$ 对所有 $A \subseteq \mathbf{R}$。

10 证明 $|[0,1] \setminus \mathbf{Q}| = 1$.

11 证明：如果 $I_1, I_2, \dots$ 是一列两两不相交的开区间，那么

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\Big| = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

12 假设 $r_1, r_2, \dots$ 是一个包含所有有理数的序列。令

$$F = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(r_k - \frac{1}{2^k}, r_k + \frac{1}{2^k}\Big).$$

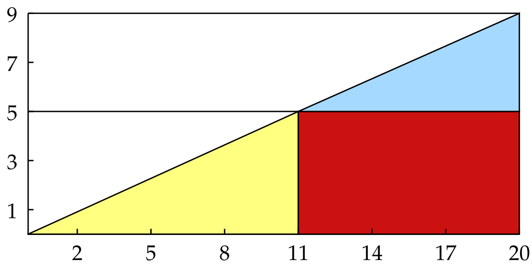
(a) 证明 F 是 R 的闭子集。

（b）证明：如果 I 是包含在 F 中的一个区间，则 I 至多包含一个元素。

（c）证明 $|F| = \infty$。

13 假设 $\varepsilon > 0$。证明存在 $[0,1]$ 的一个子集 F，使得 F 是闭集，F 的每个元素都是无理数，并且 $|F| > 1 - \varepsilon$。

14 考虑下图，该图精确地绘制到 s cale.



（a）证明顶点为 $(0,0)$、$(20,0)$ 和 $(20,9)$ 的直角三角形的面积为 90。[*We have not defined area yet, but just use the elementary formulas for the areas of triangles and rectangles that you learned long ago.*]

(b) 证明黄色（下方）的直角三角形面积为 27.5。（c）证明红色矩形的面积为 45。（d）证明蓝色（上方）的直角三角形面积为 18。（e）将（b）、（c）和（d）部分的结果相加，说明着色区域的面积为 90.5。（f）观察上图，大多数人会期望（a）和（e）部分得到相同的结果。然而在（a）中我们得到的面积是 90，而在（e）中得到的面积是 90.5。解释为什么这些结果不同。[*You may be tempted to think that what we have here is a two-dimensional example similar to the result about the nonadditivity of outer measure (2.18). However, genuine examples of nonadditivity require much more complicated sets than in this example.*]

2B 可测空间与函数

上一节中的最后一个结果表明，外测度不是可加的。这种令人失望的结果是否可以通过使用除外测度之外的某种概念来度量 R 的子集的大小而得到修正？下面的结果通过表明不存在一种具有所有理想性质的大小概念（在下述结果中用希腊字母 μ（μ）表示）来回答这一问题。

结果中的属性 (c) 称为 *countable additivity*。可数可加性是一个非常重要的属性，因为我们希望能够证明关于极限的定理（分析的核心！），这需要可数可加性。

2.22 ***nonexistence of extension of length to all subsets of*** **R**

不存在一个具有以下所有性质的函数 μ。

(a) μ 是从 R 的子集集合到 $[0, \infty]$ 的一个函数。

(b) $\mu(I) = \ell(I)$ 对于 R 的每一个开区间 I。

(c) $\mu\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ 对于每个不相交的序列 A_1，A_2，$\cdots\cdots$，R 的子集。

(d) $\mu(t + A) = \mu(A)$ 对于每个 $A \subseteq$ R 和每个 $t \in$ R。

We will show that μ has all the properties of outer measure that were used in the proof of 2.18.

证明 假设存在一个函数 μ，具有本结果陈述中列出的所有属性。

注意到 $\mu(\emptyset)\ = 0$，这是由 (b) 推出的，因为空集是长度为 0 的开区间。

如果 $A \subseteq B \subseteq$ R，则 $\mu(A) \leq \mu(B)$，这由 (c) 推出，因为我们可以将 B 写成互不相交的序列 $A, B \setminus A, \emptyset, \emptyset, \ldots$ 的并；因此

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + 0 + 0 + \cdots = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

如果 a，$b \in$ R 与 $a < b$，则 $(a,\ b) \subseteq [a,\ b] \subseteq (a - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$ 对于每个 $\varepsilon > 0$。因此 $b - a \leq \mu([a,\ b]) \leq b - a + 2\varepsilon$ 对于每个 $\varepsilon > 0$。于是 $\mu([a,\ b]) = b - a$。

如果 A_1、A_2、... 是 R 的子集序列，那么 A_1、$A_2 \setminus A_1$、$A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$、... 是 R 的一组互不相交的子集序列，其并集为 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$。因此

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) &= \mu\Big(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \big(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)\big) \cup \cdots\Big) \\
&= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu\big(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)\big) + \cdots \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),
\end{aligned}$$

其中第二个等式来自于μ的可数可加性。

我们已经表明 μ 具有在 2.18 的证明中所使用的外测度的全部性质。重复 2.18 的证明，我们看到存在 R 的不相交子集 A、B，使得 $\mu(A \cup B) \neq \mu(A) + \mu(B)$。因此，不相交序列 A、B、$\varnothing$、$\varnothing$、…… 不满足 (c) 所要求的可列可加性性质。这个矛盾完成了证明。

σ-代数

最后一个结果表明，在我们将“大小”的概念从区间推广到 R 的更一般子集的目标中，必须放弃其中一个理想的性质。我们不能放弃 2.22(b)，因为区间的大小必须等于其长度。我们不能放弃 2.22(c)，因为可数可加性是证明关于极限定理所必需的。我们不能放弃 2.22(d)，因为一个不具有平移不变性的大小不符合我们将大小作为长度推广的直观概念。

因此我们不得不放宽2.22(a)中关于大小对R的所有子集都定义的要求。经验表明，为了得到一个可行且允许取极限的理论，定义了大小的那些子集的集合应当在取补下封闭，并且在可数并下封闭。因此我们作如下定义。

2.23 定义 σ-algebra

假设 X 是一个集合，且 $\mathcal{S}$ 是由 X 的子集构成的一个集合。若满足以下三个条件，则称 $\mathcal{S}$ 为定义在 X 上的一个 *σ-algebra*：

- $\varnothing \in \mathcal{S}$;
- 如果 $E \in \mathcal{S}$，则 $X \setminus E \in \mathcal{S}$;
- 如果 $E_1, E_2, \ldots\ldots$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个元素序列，那么 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{S}$。

请务必核实下面三个要点中的所有例子确实都是 σ-代数。前两个要点的验证是显然的。对于第三个要点，需要使用“可数个可数集合的并仍是可数的”这一结果（参见 2.8 的证明，其中给出了如何将双重索引的列表转换为单重索引序列的示例）。练习中还包含了一些额外的 σ-代数的例子。

2.24 示例 *σ-algebras*

- 假设X是一个集合。那么显然，$\{\varnothing, X\}$是在X上的一个σ-代数。
- 设 X 是一个集合。那么显然，X 的所有子集构成的集合是 X 上的一个 σ-代数。
- 设 X 是一个集合。则由所有满足 E 是可数的或 $X \setminus E$ 是可数的 X 的子集 E 构成的集合是 X 上的一个 σ-代数。

现在我们来讨论 σ-代数的一些简单但重要的性质。

2.25 σ-algebras are closed under countable intersection

设 $\mathcal{S}$ 是集合 X 上的一个 σ-代数。则

（a）$X \in \mathcal{S}$；（b）若 D，$E \in \mathcal{S}$，则 $D \cup E \in \mathcal{S}$ 且 $D \cap E \in \mathcal{S}$ 且 $D \setminus E \in \mathcal{S}$；（c）若 E_1，E_2，…… 是 $\mathcal{S}$ 的元素序列，则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{S}$。

证明 因为$\varnothing \in \mathcal{S}$和$X = X \setminus \varnothing$，$\sigma$-代数(2.23)定义中的前两个要点表明$X \in \mathcal{S}$，从而证明(a)。

设 D，$E \in \mathcal{S}$。则 $D \cup E$ 是 $\mathcal{S}$ 中元素序列 D、E、$\varnothing$、$\varnothing$、$\ldots$ 的并集。因此，σ-代数（2.23）的定义中的第三个要点意味着 $D \cup E \in \mathcal{S}$。

德摩根定律告诉我们

$$X \setminus (D \cap E) = (X \setminus D) \cup (X \setminus E).$$

如果 D，$E \in \mathcal{S}$，那么上式的右侧属于 $\mathcal{S}$；因此 $X \setminus (D \cap E) \in \mathcal{S}$；从而 X 中 $X \setminus (D \cap E)$ 的补集属于 $\mathcal{S}$；换言之，$D \cap E \in \mathcal{S}$。

因为$D \setminus E = D \cap (X \setminus E)$，我们看到如果$D$、$E \in \mathcal{S}$，那么$D \setminus E \in \mathcal{S}$，完成(b)的证明。

De Morgan's Laws also show that if a collection of subsets of X contains the empty set, is closed under complementation, and is closed under countable intersections, then the collection is a σ-algebra.

最后，假设 $E_1, E_2, \ldots$ 是 $\mathcal{S}$ 中元素的一个序列。德摩根定律告诉我们:

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus E_k).$$

上述等式的右边属于$\mathcal{S}$。因此左边属于$\mathcal{S}$，这意味着$X \setminus (X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) \in \mathcal{S}$。换言之，$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{S}$，从而证明了(c)。 ■

在下面的术语中使用了词语 *measurable*，因为在下一节中我们将引入一个定义在可测集合上的大小函数，称为测度。

2.26 定义 *measurable space; measurable set*

- *measurable space* 是一个有序对（$X, \mathcal{S}$），其中 X 是一个集合，而 $\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 σ-代数。
- $\mathcal{S}$ 的一个元素称为一个 $\mathcal{S}$*-measurable set*，或者当 $\mathcal{S}$ 从上下文中清楚时，简称为 *measurable set*。

例如，如果$X = \mathbf{R}$ 和 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbf{R}$ 的所有可数子集或具有可数补集的子集的集合，那么有理数集合是 $\mathcal{S}$-可测的，但正实数集合不是 $\mathcal{S}$-可测的。

实数集的Borel子集

下一个结果保证，在集合 X 上存在一个最小的 σ-代数，包含给定的集合 $\mathcal{A}$，该集合是 X 的子集。

2.27 *smallest σ-algebra containing a collection of subsets*

假设 X 是一个集合，$\mathcal{A}$ 是 X 的子集集合。那么，所有包含 $\mathcal{A}$ 的 σ-代数在 X 上的交集是 σ-代数在 X 上。

证明 在 X 上至少存在一个包含 $\mathcal{A}$ 的 σ-代数，因为由 X 的所有子集组成的 σ-代数包含 $\mathcal{A}$。

设$\mathcal{S}$为所有包含$\mathcal{A}$的X上的σ-代数的交集。则$\varnothing \in \mathcal{S}$，因为$\varnothing$是每一个包含$\mathcal{A}$的X上的$\sigma$-代数的元素。

假设 $E \in \mathcal{S}$。因此，E 在每个包含 $\mathcal{A}$ 的 σ-代数上都存在。于是，$X \setminus E$ 在每个包含 $\mathcal{A}$ 的 σ-代数上都存在。因此，$X \setminus E \in \mathcal{S}$。

假设 E_1、E_2，... 是 $\mathcal{S}$ 的元素序列。因此，每个 E_k 都在包含 $\mathcal{A}$ 的每个 σ-代数上，这些代数定义在 X 上。因此，$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 在包含 $\mathcal{A}$ 的每个 σ-代数中。由此可得 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{S}$，这完成了证明 $\mathcal{S}$ 是定义在 X 上的 σ-代数的过程。 ■

将包含X的子集集合$\mathcal{A}$的所有σ-代数的交称为*smallest*是有意义的，因为这些σ-代数的交包含于每一个包含$\mathcal{A}$的σ-代数中。

2.28 示例 *smallest σ-algebra*

- 假设 X 是一个集合，而 $\mathcal{A}$ 是由 X 的恰好包含一个元素的子集组成的集合：
$$\mathcal{A} = \{\{x\} : x \in X\}.$$
那么，包含 $\mathcal{A}$ 的 X 上最小的 σ-代数是 X 的所有子集 E 的集合，其中 E 是可数的或 $X \setminus E$ 是可数的，正如你应当验证的那样。

- 假设 $\mathcal{A} = \{(0, 1), (0, \infty)\}$。那么，在 $\mathbf{R}$ 上包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ-代数是 $\{\varnothing, (0, 1), (0, \infty), (-\infty, 0] \cup [1, \infty), (-\infty, 0], [1, \infty), (-\infty, 1), \mathbf{R}\}$，正如你应当验证的那样。

现在我们来到一个至关重要的定义。

2.29 定义 *Borel set*

在$\mathbf{R}$上包含所有开放子集的最小σ代数称为$\mathbf{R}$的*Borel subsets*集合。这个σ代数的一个元素称为*Borel set*。

我们将 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集的集合定义为 $\mathbf{R}$ 上包含所有 $\mathbf{R}$ 的开子集的最小的 σ-代数。我们也可以将 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集的集合定义为 $\mathbf{R}$ 上包含所有开区间的最小的 σ-代数（因为 $\mathbf{R}$ 的每一个开子集都可以表示为一列开区间的并）。

2.30 示例 *Borel sets*

- R 的每个闭子集都是一个 Borel 集，因为 R 的每个闭子集都是 R 中某个开子集的补集。
- R 的每个可数子集都是一个 Borel 集，因为如果 $B = \{x_1, x_2, \dots\}$, 那么 $B = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$，而它是一个 Borel 集，因为每个 $\{x_k\}$ 都是一个闭集。
- 每个半开区间 $[a, b)$（其中 a、$b \in \mathbf{R}$）都是一个博雷尔集，因为 $[a, b)$ $= \bigcap_{k=1}^{\infty}(a - \frac{1}{k},\ b)$。
- 如果 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个函数，那么 f 连续的点集是一列开集的交（见本节练习12），因此是一个博雷尔集。

R 的任意一列开子集的交集都是一个博雷尔集。然而，所有此类交集所组成的集合并不等于博雷尔集的集合（这一点并不显然，但它在可数并下并不封闭）。R 的开子集的可数交集的可数并所组成的集合也不等于博雷尔集的集合（同样，这一点并不显然，但它在可数交下并不封闭）。以此类推 *ad infinitum*——不存在一种只涉及可数并、可数交和补集的有限过程来构造博雷尔集的全体。

我们稍后将看到，确实存在一些不是博雷尔集的 R 的子集。然而，任何你能够以具体方式写下来的 R 的子集都是博雷尔集。

逆像

下面的定义在本章其余部分中经常使用。

2.31 Definition ***inverse image;*** $f^{-1}(A)$

If $f\colon X \to Y$ is a function and $A \subseteq Y$, then the set $f^{-1}(A)$ is defined by

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

2.32 示例 *inverse images*

设 f: $[0, 4\pi] \to \mathbf{R}$，由 $f(x) = \sin x$ 定义。则

$$\begin{aligned} f^{-1}\big((0,\infty)\big) &= (0,\pi) \cup (2\pi, 3\pi), \\ f^{-1}\big([0,1]\big) &= [0,\pi] \cup [2\pi,3\pi] \cup \{4\pi\}, \\ f^{-1}\big(\{-1\}\big) &= \{\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{7\pi}{2}\}, \\ f^{-1}\big((2,3)\big) &= \varnothing, \end{aligned}$$

正如你应当核实的那样。

逆像具有良好的代数性质，如下面两个结果所示。

2.33 ***algebra of inverse images***

设 $f: X \to Y$ 是一个函数。则

(a) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ for every $A \subseteq Y$;

(b) $f^{-1}(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A)$ for every set $\mathcal{A}$ of subsets of Y;

(c) $f^{-1}(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A)$ for every set $\mathcal{A}$ of subsets of Y.

证明 设 $A \subseteq Y$。对于 $x \in X$，我们有

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y \setminus A) &\iff f(x) \in Y \setminus A \\ &\iff f(x) \notin A \\ &\iff x \notin f^{-1}(A) \\ &\iff x \in X \setminus f^{-1}(A). \end{aligned}$$

因此 $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$，这证明了 (a)。

为证明 (b)，假设 $\mathcal{A}$ 是 Y 的子集族。则

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Bigl(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\Bigr) &\iff f(x) \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \\ &\iff f(x) \in A \text{ for some } A \in \mathcal{A} \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ for some } A \in \mathcal{A} \\ &\iff x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A). \end{aligned}$$

因此 $f^{-1}(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A)$，这证明了 (b)。

部分 (c) 以与 (b) 相同的方式证明，唯一不同的是并集被交集替代，*for some* 被 *for every* 替代。 ∎

2.34 ***inverse image of a composition***

假设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to W$ 是函数。则

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\bigl(g^{-1}(A)\bigr)$$

对于每个 $A \subseteq W$.

证明 假设 $A \subseteq W$。对于 $x \in X$，我们有

$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{-1}(A) \iff (g \circ f)(x) \in A &\iff g\bigl(f(x)\bigr) \in A \\ &\iff f(x) \in g^{-1}(A) \\ &\iff x \in f^{-1}\bigl(g^{-1}(A)\bigr). \end{aligned}$$

因此 $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\bigl(g^{-1}(A)\bigr)$。 ∎

可测函数

下一个定义告诉我们，哪些实值函数相对于其定义域上的 σ-代数具有良好的性质。

2.35 定义 *measurable function*

设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间。函数 f: $X \rightarrow$ 到 R 被称为 $\mathcal{S}$-*measurable* (，或简称 *measurable*，如果从上下文中 $\mathcal{S}$ 是清楚的) 如果

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$$

对于每一个博雷尔集 $B \subseteq \mathbf{R}$。

2.36 示例 *measurable functions*

- 如果$\mathcal{S} = \{\varnothing, X\}$，那么从X到R的$\mathcal{S}$-可测函数只有常值函数。
- 如果 $\mathcal{S}$ 是 X 的所有子集的集合，那么从 X 到 R 的每个函数都是 $\mathcal{S}$-可测的。
- 如果 $\mathcal{S} = \{\varnothing, (-\infty, 0), [0, \infty), \mathbf{R}\}$ (是 R) 上的一个 σ-代数，那么函数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，当且仅当 f 在 $(-\infty, 0)$ 上为常数，且 f 在 $[0, \infty)$ 上为常数。

另一类例子来自特征函数，其定义如下。希腊字母 chi（χ）传统上用于表示特征函数。

2.37 定义 *characteristic function;* χ_E

假设 E 是集合 X 的一个子集。E 的 *characteristic function* 是函数 $\chi_E: X \rightarrow \mathbf{R}$ 定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E, \\ 0 & \text{if } x \notin E. \end{cases}$$

包含 E 的集合 X 并未在记号 χ_E 中被明确包含，因为 X 总是可以从上下文中清楚地看出。

2.38 示例 *inverse image with respect to a characteristic function*

设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间，$E \subseteq X$，且 $B \subseteq \mathbf{R}$。则

$$\chi_E{}^{-1}(B) = \begin{cases} E & \text{if } 0 \notin B \text{ and } 1 \in B, \\ X \setminus E & \text{if } 0 \in B \text{ and } 1 \notin B, \\ X & \text{if } 0 \in B \text{ and } 1 \in B, \\ \varnothing & \text{if } 0 \notin B \text{ and } 1 \notin B. \end{cases}$$

因此我们看到，χ_E 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，当且仅当 $E \in \mathcal{S}$

$\mathcal{S}$-可测函数的定义要求 R 的每一个 Borel 子集的逆像都属于 $\mathcal{S}$。下面的结果表明，为了验证一个函数是 $\mathcal{S}$-可测的，我们只需检查 R 的一个小得多的子集族的逆像。

Note that if $f : X \to \mathbf{R}$ is a function and $a \in \mathbf{R}$, then

$$f^{-1}\big((a,\infty)\big) = \{x \in X : f(x) > a\}.$$

2.39 *condition for measurable function*

设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，且 $f : X \to \mathbf{R}$ 是一个函数，使得

$$f^{-1}\big((a,\infty)\big) \in \mathcal{S}$$

对所有 $a \in \mathbf{R}$。则 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

证明 设

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbf{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{S}\}.$$

我们想要证明 R 的每个 Borel 子集都属于 $\mathcal{T}$。为此，我们将首先证明 $\mathcal{T}$是 R 上的一个 σ-代数。

当然 $\varnothing \in \mathcal{T}$，因为 $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{S}$。

如果 $A \in \mathcal{T}$，则 $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}$；因此

$$f^{-1}(\mathbf{R} \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{S}$$

根据 2.33(a)，因此 $\mathbf{R} \setminus A \in \mathcal{T}$。换言之，$\mathcal{T}$在取补运算下封闭。若 $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T}$, 则 $f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \ldots \in \mathcal{S}$; 因此

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_k) \in \mathcal{S}$$

由 2.33(b)，因此 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T}$。换言之，$\mathcal{T}$在可数并下封闭。因此 $\mathcal{T}$是 R 上的一个 σ-代数。

根据假设，$\mathcal{T}$包含 $\{(a,\infty) : a \in \mathbf{R}\}$。由于 $\mathcal{T}$在取补运算下封闭，$\mathcal{T}$也包含 $\{(-\infty, b] : b \in \mathbf{R}\}$。由于 σ-代数 $\mathcal{T}$在有限交下封闭（由 2.25），我们可以看到 $\mathcal{T}$包含 $\{(a, b] : a, b \in \mathbf{R}\}$。由于 $(a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{k}]$ 和 $(-\infty, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (-k, b - \frac{1}{k}]$，并且 $\mathcal{T}$在可数并下封闭，我们可以得出结论，$\mathcal{T}$包含 R 的每一个开子集。

因此，σ-代数 $\mathcal{T}$包含在 R 上包含 R 的所有开子集的最小 σ-代数。换言之，$\mathcal{T}$包含 R 的每一个博雷尔子集。因此，f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。 ∎

在上述结果中，我们可以将集合族 $\{(a、\infty) : a \in \mathbf{R}\}$ 替换为 R 的任意一个子集族，只要包含该子集族的最小 σ-代数包含 R 的 Borel 子集即可。关于这类 R 的子集族的具体例子，参见练习 3–6。

我们一直在处理从 X 到 R 的 $\mathcal{S}$-可测函数，背景是任意集合 X 和在 X 上的 σ-代数 $\mathcal{S}$。这个设置的一个重要特殊情况是当 X 是 R 的 Borel 子集，而 $\mathcal{S}$ 是 R 的 Borel 子集的集合，这些子集包含在 X (中（参见练习 11，了解另一种思考这个 σ-代数) 的方法）。在这个特殊情况下，$\mathcal{S}$-可测函数被称为 Borel 可测函数。

2.40 定义 *Borel measurable function*

假设 $X \subseteq \mathbf{R}$。一个函数 $f: X \to \mathbf{R}$ 被称为 *Borel measurable*，如果对于每个 Borel 集合 $B \subseteq \mathbf{R}$，$f^{-1}(B)$ 是一个 Borel 集合。

如果 $X \subseteq \mathbf{R}$，且存在一个 Borel 可测函数 $f: X \to \mathbf{R}$，那么 X 必须是一个 B orel 集合 [因为 $X = f^{-1}(\mathbf{R})$].

如果 $X \subseteq \mathbf{R}$ 且 $f: X \to \mathbf{R}$ 是一个函数，那么当且仅当对每个 $a \in \mathbf{R}$, $f^{-1}\big((a,\ \infty)\big)$ 是一个 Borel 集时，f 是一个 Borel 可测函数（使用 2.39）。

设 X 是一个集合，且 $f: X \to \mathbf{R}$ 是一个函数。f 的可测性取决于在 X 上选择的 σ-代数。如果该 σ-代数称为 $\mathcal{S}$，那么我们可以讨论 f 是否是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。如果 X 是 R 的一个博雷尔子集，那么 $\mathcal{S}$ 可能是包含于 X 的博雷尔集合的集合，在这种情况下，短语 *Borel measurable* 与 $\mathcal{S}$-可测的含义相同。然而，无论 $\mathcal{S}$ 是否是博雷尔集合的一个集合，在判断一个函数是否是 $\mathcal{S}$-可测时，我们都考虑 R 的博雷尔子集的逆像。

下一个结果表明，连续性与 Borel 可测性的概念之间具有良好的相互作用。

2.41 *every continuous function is Borel measurable*

定义在 R 的一个 Borel 子集上的每个连续的实值函数都是 Borel 可测函数。

证明 设 $X \subseteq \mathbf{R}$ 是一个 Borel 集，且 $f: X \to \mathbf{R}$ 是连续的。为证明 f 是 Borel 可测的，固定 $a \in \mathbf{R}$。

如果 $x \in X$ 且 $f(x) > a$，那么（由 f 的连续性）存在 $\delta_x > 0$，使得对所有 $y \in (x - \delta_x、x + \delta_x) \cap X$，$f(y) > a$。因此

$$f^{-1}\big((a,\infty)\big) = \Bigg(\bigcup_{x \in f^{-1}((a,\infty))} (x - \delta_x, x + \delta_x)\Bigg) \cap X.$$

上面大括号内的并集是 R 的一个开子集；因此它与 X 的交集是一个 Borel 集。由此我们可以得出 $f^{-1}\big((a、\infty)\big)$ 是 Borel 集。

由 2.39 可知 f 是一个 Borel 可测函数。 ■

接下来我们讨论另一类 Borel 可测函数。对于递减函数也可以给出类似的定义，并得到相应的类似结果。

2.42 定义 *increasing function; strictly increasing*

假设 $X \subseteq \mathbf{R}$，且 $f: X \to \mathbf{R}$ 是一个函数。

- f 若对于所有满足 $x < y$ 的 x、$y \in X$，有 $f(x) \leq f(y)$，则称为 *increasing*。
- f 如果对所有具有$x < y$的x、$y \in X$都有$f(x) < f(y)$，则称为*strictly increasing*。

2.43 *every increasing function is Borel measurable*

定义在 $\mathbf{R}$ 的一个 Borel 子集上的每个单调递增函数都是 Borel 可测函数。

证明 假设 $X \subseteq \mathbf{R}$ 是一个 Borel 集，且 $f: X \to \mathbf{R}$ 是递增的。为证明 f 是 Borel 可测的，取定 $a \in \mathbf{R}$。

令 $b = \inf f^{-1}\big((a, \infty)\big)$。那么很容易看出

$$f^{-1}\big((a,\infty)\big) = (b,\infty) \cap X \quad \text{or} \quad f^{-1}\big((a,\infty)\big) = [b,\infty) \cap X.$$

无论哪种方式，我们都可以得出结论：$f^{-1}\big((a、\infty)\big)$ 是一个 Borel 集。现在由 2.39 可知 f 是一个 Borel 可测函数
。

下一个结果表明，可测性与复合运算具有良好的相容性。

2.44 *composition of measurable functions*

假设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间，且 $f: X \to \mathbf{R}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。假设 g 是一个取实值的 Borel 可测函数，定义在 $\mathbf{R}$ 的一个子集上，该子集包含 f 的值域。则 $g \circ f: X \to \mathbf{R}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

证明 设 $B \subseteq \mathbf{R}$ 是一个 Borel 集。则（见 2.34）

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\big(g^{-1}(B)\big).$$

因为 g 是一个 Borel 可测函数，$g^{-1}(B)$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个 Borel 子集。因为 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，$f^{-1}\big(g^{-1}(B)\big) \in \mathcal{S}$。因此，上述等式蕴含 $(g \circ f)^{-1}(B) \in \mathcal{S}$。因此，$g \circ f$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

2.45 示例 *if f is measurable, then so are $-f$, $\frac{1}{2}f$, $|f|$, f^2*

设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，并且 $f: X \to \mathbf{R}$ 是 $\mathcal{S}$-可测的。则由 2.44 可知，函数 $-f$、$\frac{1}{2}f$、$|f|$、f^2 全都是 $\mathcal{S}$-可测函数，因为这些函数中的每一个都可以表示为 f 与一个连续（因此是 Borel 可测的）函数 g 的复合。

具体来说，取 $g(x) = -x$，然后 $g(x) = \frac{1}{2}x$，然后 $g(x) = |x|$，最后 $g(x) = x^2$。

可测性还与代数运算良好互动，如下一个结果所示。

2.46 *algebraic operations with measurable functions*

设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间，且 f，g：$X \to \mathbf{R}$ 是 $\mathcal{S}$-可测的。则

（a）$f+g$、$f-g$ 和 fg 是 $\mathcal{S}$-可测函数；

(b) 如果对所有 $x \in X$，$g(x) \neq 0$，则 $\frac{f}{g}$ 是一个 $\mathcal{S}$ 可测函数。

证明 假设 $a \in \mathbf{R}$。我们将证明

2.47 $$(f+g)^{-1}\big((a,\infty)\big) = \bigcup_{r\in\mathbf{Q}} \Big(f^{-1}\big((r,\infty)\big) \cap g^{-1}\big((a-r,\infty)\big)\Big),$$

这意味着（$f+g$）$^{-1}\big((a,\ \infty)\big) \in \mathcal{S}$。

为了证明 2.47，首先假设

$$x \in (f+g)^{-1}\big((a,\infty)\big).$$

因此 $a < f(x)+g(x)$。因此开区间 $\big(a-g(x),\ f(x)\big)$ 非空，因此它包含某个有理数 r。这意味着 $r < f(x)$，即 $x \in f^{-1}\big((r,\ \infty)\big)$，和 $a-g(x) < r$，这意味着 $x \in g^{-1}\big((a-r,\ \infty)\big)$。因此 x 是 2.47 右侧的一个元素，完成了证明 2.47 左侧包含在右侧的证明。

另一方向的包含性的证明更容易。具体而言，假设对于某个 $r \in \mathbf{Q}$，有 $x \in f^{-1}\big((r、\infty)\big) \cap g^{-1}\big((a-r、\infty)\big)$。因此

$$r < f(x) \quad \text{and} \quad a-r < g(x).$$

将这两个不等式相加，我们看到 $a < f(x)+g(x)$。因此 x 是 2.47 左侧的一个元素，从而完成了 2.47 的证明。因此 $f+g$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

例2.45告诉我们，$-g$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。因此，$f-g$，其等于 $f+(-g)$，是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

证明 fg 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数的最简单方法是使用该等式

$$fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}.$$

对一个 $\mathcal{S}$-可测函数进行平方运算会得到一个 $\mathcal{S}$-可测函数（见例 2.45），乘以 $\frac{1}{2}$ (的运算亦然（同样见例 2.45））。因此，上述等式蕴含 fg 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，从而完成 (a) 的证明。

假设对所有 $x \in X$，$g(x) \neq 0$。定义在 $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (a Borel 子集 R) 上的函数，将 x 映射到 $\frac{1}{x}$ 是连续的，因此是一个 Borel 可测函数（通过 2.41）。现在 2.44 推出 $\frac{1}{g}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。将这个结果与我们已经证明的关于 $\mathcal{S}$-可测函数的乘积结合起来，我们得出 $\frac{f}{g}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，从而证明了 (b)。

下一个结果表明，一列 $\mathcal{S}$-可测函数的逐点极限是 $\mathcal{S}$-可测的。这是一个非常理想的性质（回想一下，在某个区间上黎曼可积函数的集合在取逐点极限下并不封闭；见例 1.17）。

2.48 *limit of $\mathcal{S}$-measurable functions*

设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，且 $f_1, f_2, \ldots$ 是一列从 X 到 $\mathbf{R}$ 的 $\mathcal{S}$-可测函数。设对每个 $x \in X$，$\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ 都存在。定义 $f\colon X \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

则 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

证明 假设 $a \in \mathbf{R}$。我们将证明

2.49
$$f^{-1}\big((a,\infty)\big) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} f_k^{-1}\big((a + \tfrac{1}{j}, \infty)\big),$$

这意味着 $f^{-1}\big((a,\ \infty)\big) \in \mathcal{S}$。

为证明 2.49，首先假设 $x \in f^{-1}\big((a,\infty)\big)$。因此存在 $j \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $f(x) > a + \frac{1}{j}$。极限的定义于是蕴含存在 $m \in \mathbf{Z}^+$ 使得对所有 $k \geq m$ 都有 $f_k(x) > a + \frac{1}{j}$。因此 x 位于 2.49 的右侧，从而证明 2.49 的左侧包含于右侧。

为了证明反向的包含关系，设 x 属于 2.49 的右侧。因此存在 $j, m \in \mathbf{Z}^+$，使得对所有 $k \geq m$ 有 $f_k(x) > a + \frac{1}{j}$。当 $k \to \infty$ 时取极限，我们看到 $f(x) \geq a + \frac{1}{j} > a$。因此 x 属于 2.49 的左侧，从而完成了 2.49 的证明。因此 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。 ∎

有时我们需要考虑取值于 $[-\infty, \infty]$ 的函数。例如，即使我们在 2.53 中从一列实值函数开始，最终也可能得到取值于 $[-\infty, \infty]$ 的函数。因此，我们将 Borel 集的概念扩展到 $[-\infty, \infty]$ 的子集，如下所述。

2.50 定义 *Borel subsets of* $[-\infty, \infty]$

如果 $[-\infty, \infty]$ 的一个子集与 $\mathbf{R}$ 的交集是一个博雷尔集，则称其为 *Borel set*。

换言之，集合 $C \subseteq [-\infty, \infty]$ 是一个 Borel 集，当且仅当存在一个 Borel 集 $B \subseteq \mathbf{R}$，使得 $C = B$ 或 $C = B \cup \{\infty\}$ 或 $C = B \cup \{-\infty\}$ 或 $C = B \cup \{\infty,\ -\infty\}$。

你应当验证，根据上述定义，$[-\infty, \infty]$ 的 Borel 子集的集合是在 $[-\infty, \infty]$ 上的一个 σ-代数。

接下来，我们将 $\mathcal{S}$-可测函数的定义扩展到取值于 $[-\infty, \infty]$ 的函数。

2.51 定义 *measurable function*

设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间。函数 $f: X \to [-\infty, \infty]$ 称为 $\mathcal{S}$-*measurable*，如果

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$$

对于每个博雷尔集 $B \subseteq [-\infty, \infty]$.

下一个结果与 2.39 类似，表明在通过取原像来判断一个取值于 $[-\infty, \infty]$ 的函数是否是 $\mathcal{S}$-可测时，我们不必考虑 $[-\infty, \infty]$ 的所有 Borel 子集。

2.52 *condition for measurable function*

设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，且 $f: X \to [-\infty, \infty]$ 是一个函数，使得

$$f^{-1}\big((a, \infty]\big) \in \mathcal{S}$$

对所有 $a \in \mathbf{R}$。则 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

上述结果的证明留给读者（亦见本节练习27）。

我们以证明一列$\mathcal{S}$-可测函数的逐点下确界和逐点上确界是$\mathcal{S}$-可测的来结束本节。

2.53 *infimum and supremum of a sequence of $\mathcal{S}$-measurable functions*

假设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，$f_1, f_2, \ldots$ 是从 X 到 $[-\infty, \infty]$ 的一列 $\mathcal{S}$-可测函数。定义 $g, h: X \to [-\infty, \infty]$ 通过

$$g(x) = \inf\{f_k(x) : k \in \mathbf{Z}^+\} \quad \text{and} \quad h(x) = \sup\{f_k(x) : k \in \mathbf{Z}^+\}.$$

那么 g 和 h 是 $\mathcal{S}$-可测函数。

证明 设 $a \in \mathbf{R}$。上确界的定义意味着

$$h^{-1}\big((a, \infty]\big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k{}^{-1}\big((a, \infty]\big),$$

正如你应当验证的那样。上述方程与 2.52 一起意味着 h 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

请注意

$$g(x) = -\sup\{-f_k(x) : k \in \mathbf{Z}^+\}$$

对所有 $x \in X$。因此，关于上确界的结果表明 g 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。 ∎

练习 2B

1 证明 $\mathcal{S} = \{\bigcup_{n\in K}(n, n+1] : K \subseteq \mathbf{Z}\}$ 是 R 上的一个 σ-代数。

2 验证例子 2.28 中的两个要点。

3 假设 $\mathcal{S}$ 是 R 上包含 $\{(r, s] : r, s \in \mathbf{Q}\}$ 的最小 σ-代数。证明 $\mathcal{S}$ 是 R 的博雷尔子集的集合。

假设 $\mathcal{S}$ 是包含 $\{(r, n] : r \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{Z}\}$ 的 R 上最小的 σ-代数。证明 $\mathcal{S}$ 是 R 的 Borel 子集的集合。

5 假设 $\mathcal{S}$ 是 R 上包含 $\{(r, r+1) : r \in \mathbf{Q}\}$ 的最小 σ-代数。证明 $\mathcal{S}$ 是 R 的 Borel 子集的集合。

假设 $\mathcal{S}$ 是包含 $\{[r, \infty) : r \in \mathbf{Q}\}$ 的 R 上最小的 σ-代数。证明 $\mathcal{S}$ 是 R 的 Borel 子集的集合。

7 证明 R 的 Borel 子集的集合是平移不变的。更精确地说，证明如果 $B \subseteq \mathbf{R}$ 是一个 Borel 集，且 $t \in \mathbf{R}$，那么 $t + B$ 是一个 Borel 集。

8 证明 R 的 Borel 子集集合是膨胀不变的。更精确地说，证明如果 $B \subseteq \mathbf{R}$ 是一个 Borel 集合且 $t \in \mathbf{R}$，则 tB (定义为 $\{tb : b \in B\}$) 是一个 Borel 集合。

给出一个可测空间的例子（X，$\mathcal{S}$)）以及一个函数 $f : X \to \mathbf{R}$，使得 $|f|$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，但 f 不是 $\mathcal{S}$-可测的。

10 证明具有无限次出现数字5的小数展开的实数集合是Borel集合。

11 设 $\mathcal{T}$是集合 Y 上的一个 σ-代数，并且 $X \in \mathcal{T}$。令 $\mathcal{S} = \{E \in \mathcal{T}: E \subseteq X\}$。

(a) 证明 $\mathcal{S} = \{F \cap X : F \in \mathcal{T}\}$. (b) 证明 $\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 σ-代数。

12 假设 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个函数。

(a) 对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，令

$$G_k = \{a \in \mathbf{R} : \text{there exists } \delta > 0 \text{ such that } |f(b) - f(c)| < \tfrac{1}{k} \text{ for all } b, c \in (a-\delta, a+\delta)\}.$$

证明对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，G_k 是 R 的一个开子集。

(b) 证明f连续的点集等于$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$。

(c) 结论：f 连续的点集是一个 Borels 集。

13 假设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，$E_1, \ldots, E_n$ 是 X 的两两不交子集，且 $c_1, \ldots, c_n$ 是互不相同的非零实数。证明 $c_1\chi_{E_1} + \cdots + c_n\chi_{E_n}$ 当且仅当 $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{S}$ 时是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

14 (a) 假设 $f_1, f_2, \ldots$ 是从集合 X 到 R 的一列函数。解释为什么

$$\{x \in X : \text{the sequence } f_1(x), f_2(x), \ldots \text{ has a limit in } \mathbf{R}\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} (f_j - f_k)^{-1}\big((-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})\big).$$

(b) 假设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，并且 $f_1, f_2, \ldots$ 是从 X 到 R 的 $\mathcal{S}$-可测函数的序列。证明

$$\{x \in X : \text{the sequence } f_1(x), f_2(x), \ldots \text{ has a limit in } \mathbf{R}\}$$

是 X 的一个 $\mathcal{S}$-可测子集。

15 假设 X 是一个集合，并且 E_1、E_2、…… 是 X 的一列两两不交的子集，使得 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = X$。令 $\mathcal{S} = \{\bigcup_{k \in K} E_k$： $K \subseteq \mathrm{Z}^+\}$。

(a) 证明 $\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 σ-代数。 (b) 证明：从 X 到 R 的函数是 $\mathcal{S}$-可测的，当且仅当该函数对每个 $k \in \mathrm{Z}^+$ 在 E_k 上为常数。

16 设 $\mathcal{S}$ 是在集合 X 和 $A \subseteq X$ 上的一个 σ-代数。令

$$\mathcal{S}_A = \{E \in \mathcal{S} : A \subseteq E \text{ or } A \cap E = \emptyset\}.$$

() 证明 $\mathcal{S}_A$ 是 X 上的一个 σ-代数。

(b) 假设 $f\colon X \to \mathrm{R}$ 是一个函数。证明：f 关于 $\mathcal{S}_A$ 可测，当且仅当 f 关于 $\mathcal{S}$ 可测，且 f 在 A 上为常数。

17 假设 X 是实数域 R 的一个 Borel 子集，且 $f\colon X \to \mathrm{R}$ 是一个函数，使得 $\{x \in X : f$ 在 $x\}$ 这一可数集合上不连续。证明 f 是一个 Borel 可测函数。

18 假设 $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 在 R 的每个元素处可微。证明 f' 是一个从 R 到 R 的 Borel 可测函数。

19 假设 X 是一个非空集合，且 $\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 σ-代数，它由 X 的所有子集组成，这些子集要么是可数的，要么在 X 中具有可数的补集。给出 X 上 $\mathcal{S}$-可测的实值函数的刻画。

20 假设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间，并且 $f, g : X \to \mathrm{R}$ 是 $\mathcal{S}$-可测函数。证明：如果对所有 $x \in X$ 有 $f(x) > 0$，则 f^g (，其在 $x \in X$ 处的取值等于 $f(x)^{g(x)}$)，是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

21 证明 2.52。

22 设 $B \subseteq \mathrm{R}$，且 f: $B \to \mathrm{R}$ 是一个递增函数。证明 f 在 B 的每个元素处连续，除了 B 的一个可数子集之外。

23 假设 $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 是一个严格递增的函数。证明其反函数 $f^{-1}: f(\mathrm{R}) \to \mathrm{R}$ 是一个连续函数。

[*Note that this exercise does not have as a hypothesis that f is continuous.*]

24 设 $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 是一个严格递增函数，且 $B \subseteq \mathrm{R}$ 是一个 Borel 集。证明 $f(B)$ 是一个 Borel 集。

25 设 $B \subseteq \mathrm{R}$，且 $f: B \to \mathrm{R}$ 是一个递增函数。证明存在一个序列 $f_1, f_2, \ldots$，它们是从 B 到 R 的严格递增函数，使得

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

对于每个 $x \in B$。

26 设 $B \subseteq \mathrm{R}$ 且 $f: B \to \mathrm{R}$ 是一个有界的增函数。证明存在一个增函数 $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$，使得对所有 $x \in B$，$g(x) = f(x)$。

27 证明或给出反例：如果 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，并且

$$f: X \to [-\infty, \infty]$$

是一个函数，使得 $f^{-1}\big((a, \infty)\big) \in \mathcal{S}$ 对于每个 $a \in \mathrm{R}$，则 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

28 假设 $f: B \to \mathrm{R}$ 是一个 Borels 可测函数。定义 $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 如下

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in B, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbf{R} \setminus B. \end{cases}$$

证明 g 是一个 Borel 可测函数。

29 给出一个可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 和一个族 $\{f_t\}_{t\in\mathbf{R}}$，使得每个 f_t 都是从 X 到 [0, 1] 的 $\mathcal{S}$-可测函数，但函数 $f: X \to [0, 1]$ 定义为

$$f(x) = \sup\{f_t(x) : t \in \mathbf{R}\}$$

不是 $\mathcal{S}$-可测的。

[*Compare this exercise to 2.53, where the index set is* Z^+ *rather than* R.]

展示 30

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{k\to\infty}\big(\cos(j!\pi x)\big)^{2k}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational,} \\ 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

对于每个 $x \in \mathrm{R}$。

[*This example is due to Henri Lebesgue.*]

2C 测度及其性质

测度的定义与示例

下一个定义的最初动机源于试图扩展区间长度的概念。然而，下面的定义使我们能够在更多情境中讨论大小。例如，我们稍后将看到，平面中一个集合的面积或更高维中一个集合的体积都符合这一结构。术语 *measure* 使我们能够用一个词来代替分别为 *length*、*area* 和 *volume* 重复定理。

2.54 定义 *measure*

假设 X 是一个集合，且 $\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 σ-代数。$(X, \mathcal{S})$ 上的一个 *measure* 是一个函数 $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$，使得 $\mu(\varnothing) = 0$ 且

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

对于$\mathcal{S}$中每一个不相交的集合序列$E_1, E_2, \cdots\cdots$ 。

构成上述定义关键部分的可数可加性使我们能够证明良好的极限定理。注意到可数可加性蕴含有限可加性：如果 μ 是定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个测度，并且 $E_1, \ldots, E_n$ 是 $\mathcal{S}$ 中两两不交的集合，那么

$$\mu(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n),$$

这可由将方程 $\mu(\varnothing) = 0$ 和可数可加性应用于 $\mathcal{S}$ 中集合的互不相交序列 $E_1, \cdots, E_n, \varnothing, \varnothing, \cdots$ 而得。

In the mathematical literature, sometimes a measure on $(X, \mathcal{S})$ is just called a measure on X if the σ-algebra $\mathcal{S}$ is clear from the context.

The concept of a measure, as defined here, is sometimes called a 正测度 (*although the phrase* 非负测度 *would be more accurate*).

2.55 示例 *measures*

- 如果 X 是一个集合，那么 *counting measure* 是在 X 的所有子集构成的 σ-代数上定义的测度 μ，其定义为：当 E 是一个恰好包含 n 个元素的有限集合时取 $\mu(E) = n$，而当 E 不是有限集合时取 $\mu(E) = \infty$。

- 设 X 是一个集合，$\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 σ-代数，并且 $c \in X$。定义 $(X, \mathcal{S})$ 上的 *Dirac* 测度 δ_c 为

$$\delta_c(E) = \begin{cases} 1 & \text{if } c \in E, \\ 0 & \text{if } c \notin E. \end{cases}$$

这一度量是为纪念数学家兼物理学家保罗·狄拉克（1902–1984）而命名的，他因在原子层面将相对论与量子力学相结合的工作，于1933年获得诺贝尔物理学奖。

- 假设 X 是一个集合，$\mathcal{S}$ 是 σ 代数在 X 上，且 $w : X \to [0, \infty]$ 是一个函数。定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的测度 μ 如下：

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} w(x)$$

对于 $E \in \mathcal{S}$。[这里的和被定义为所有有限子和 $\sum_{x \in D} w(x)$ 的上确界，其中 D 遍历 E 的所有有限子集。]

- 假设 X 是一个集合，$\mathcal{S}$ 是 σ 代数，定义在 X 上，由 X 的所有子集构成，这些子集要么是可数的，要么是其补集在 X 中是可数的。通过以下方式定义测度 μ 在 $(X, \mathcal{S})$ 上：

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{if } E \text{ is countable,} \\ 3 & \text{if } E \text{ is uncountable.} \end{cases}$$

- 假设 $\mathcal{S}$ 是 R 上的 σ 代数，包含 R 的所有子集。那么，将一个集合 $E \subseteq \mathbf{R}$ 映射到 $|E|$ (E) 的外测度的函数不是一个测度，因为它不是有限可加的（见 2.18）。

- 假设 $\mathcal{B}$ 是 R 上的 σ 代数，由 R 的所有 Borel 子集组成。我们将在下一节中看到，外测度是 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的一个测度。

以下术语经常很有用。

2.56 定义 *measure space*

一个*measure space*是一个有序三元组（$X, \mathcal{S}, \mu$），其中X是一个集合，$\mathcal{S}$ 是X上的一个σ-代数，而μ是在（$X, \mathcal{S}$）上的一个测度。

测度的性质

假设在下一个结果的部分 (b) 中需要 $\mu(D) < \infty$ 以避免形式为 $\infty - \infty$ 的未定义表达式。

2.57 *measure preserves order; measure of a set difference*

设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，且D、$E \in \mathcal{S}$满足$D \subseteq E$。则

(a) $\mu(D) \leq \mu(E)$;

(b) $\mu(E \setminus D) = \mu(E) - \mu(D)$ provided that $\mu(D) < \infty$.

证明 因为 $E = D \cup (E \setminus D)$，且这是一个不交并，我们有

$$\mu(E) = \mu(D) + \mu(E \setminus D) \geq \mu(D),$$

这证明了 (a)。如果 $\mu(D) < \infty$，则从上述方程式的两边减去 $\mu(D)$ 可证明 (b)。■

测度的可数可加性性质适用于两两不交的可数并。以下的可数次可加性性质适用于不一定是两两不交的可数并。

2.58 *countable subadditivity*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{S}$。那么

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

证明 设 $D_1 = \varnothing$ 和 $D_k = E_1 \cup \cdots \cup E_{k-1}$ 对于 $k \geq 2$. 然后

$$E_1 \setminus D_1, E_2 \setminus D_2, E_3 \setminus D_3, \ldots$$

是一个不相交的子集序列 X，其并集等于 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$。因此

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus D_k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \setminus D_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k),
\end{aligned}$$

上述第二行源自 μ 的可加性，最后一行源自 2.57(a)。

请注意，可数次次可加性意味着有限次次可加性：如果μ是$(X, \mathcal{S})$上的测度，并且E_1，...，E_n是$\mathcal{S}$中的集合，则

$$\mu(E_1 \cup \cdots \cup E_n) \leq \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n),$$

这可由将方程 $\mu(\varnothing) = 0$ 与可数次次可加性应用于 $\mathcal{S}$ 中集合的序列 $E_1, \ldots, E_n$, $\varnothing, \varnothing, \ldots$ 得出。

下一结果显示，随着联合的增加，措施表现良好。

2.59 *measure of an increasing union*

假设（X，$\mathcal{S}$，μ）是一个测度空间，且 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是 $\mathcal{S}$ 中一列递增的集合。则有

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k).$$

证明 如果对于某个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 有 $\mu(E_k) = \infty$，则上述方程成立，因为两边都等于 ∞。因此我们只需考虑对所有 $k \in \mathbf{Z}^+$ 都有 $\mu(E_k) < \infty$ 的情形。

为方便起见，令 $E_0 = \varnothing$。则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \setminus E_{j-1}),$$

其中右侧的并集是一个不交并。因此

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \setminus E_{j-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j \setminus E_{j-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \big(\mu(E_j) - \mu(E_{j-1})\big) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(E_k),
\end{aligned}$$

Another mew.

如所愿。■

测度在递减交方面也表现良好（但参见练习10，它表明下面的假设 $\mu(E_1) < \infty$不能被省略）。

2.60 *measure of a decreasing intersection*

假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，并且 $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一列递减集合，且 $\mu(E_1) < \infty$。则

$$\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k).$$

德摩根定律之一的证明告诉我们

$$E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k).$$

现在，$E_1 \setminus E_1 \subseteq E_1 \setminus E_2 \subseteq E_1 \setminus E_3 \subseteq \cdots$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一个递增的集合序列。因此，将 2.59 应用于上述等式，意味着

$$\mu\Big(E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_1 \setminus E_k).$$

利用 2.57(b) 将上述方程改写为

$$\mu(E_1) - \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \mu(E_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(E_k),$$

这意味着我们所期望的结果。■

下一个结果是直观上合理的——我们期望两个集合的并集的度量等于第一个集合的度量加上第二个集合的度量，减去已经被计算了两次的集合的度量。

2.61 *measure of a union*

假设（X，$\mathcal{S}$，μ）是一个测度空间，且D、$E \in \mathcal{S}$，并带有$\mu(D \cap E) < \infty$。那么

$$\mu(D \cup E) = \mu(D) + \mu(E) - \mu(D \cap E).$$

证明 我们有

$$D \cup E = \big(D \setminus (D \cap E)\big) \cup \big(E \setminus (D \cap E)\big) \cup \big(D \cap E\big).$$

上述等式的右侧是一个不交并。因此

$$\begin{aligned}
\mu(D \cup E) &= \mu\big(D \setminus (D \cap E)\big) + \mu\big(E \setminus (D \cap E)\big) + \mu\big(D \cap E\big) \\
&= \big(\mu(D) - \mu(D \cap E)\big) + \big(\mu(E) - \mu(D \cap E)\big) + \mu(D \cap E) \\
&= \mu(D) + \mu(E) - \mu(D \cap E),
\end{aligned}$$

如所愿。 ■

练习 2C

1 解释为什么不存在一个测度空间（$X, \mathcal{S}, \mu$），使其具有如下性质：$\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}\} = [0, 1)$。

Let $2^{\mathbf{Z}^+}$ ***denote the*** σ***-algebra on*** $\mathbf{Z}^+$ ***consisting of all subsets of*** $\mathbf{Z}^+$.

假设 μ 是 $(\mathbf{Z}^+, 2^{\mathbf{Z}^+})$ 上的一个测度。证明存在一个序列 $w_1, w_2, \ldots$ 在 $[0, \infty]$ 中，使得

$$\mu(E) = \sum_{k \in E} w_k$$

对于每个集合 $E \subseteq \mathbf{Z}^+$。

给出一个在 $(\mathbf{Z}^+, 2^{\mathbf{Z}^+})$ 上的度量 μ 的例子，使得

$$\{\mu(E) : E \subseteq \mathbf{Z}^+\} = [0, 1].$$

给出一个测度空间的例子 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 使得

$$\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}\} = \{\infty\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+1].$$

5 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，使得 $\mu(X) < \infty$。证明：如果 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一组两两不交的集合，并且对于每个 $A \in \mathcal{A}$ 都有 $\mu(A) > 0$，那么 $\mathcal{A}$ 是一个可数集。

6 找出所有位于 $[3, \infty)$ 的 $c \in$，使得存在一个测度空间 $(X, \mathcal{S}, \mu)$，满足

$$\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}\} = [0,1] \cup [3,c].$$

7 给出一个测度空间（$X, \mathcal{S}, \mu$）的例子，使得

$$\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}\} = [0,1] \cup [3,\infty].$$

8 给出一个集合 X 的例子，一个由 X 的子集组成的 σ-代数 $\mathcal{S}$，一个由 X 的子集组成的集合 $\mathcal{A}$，使得在 X 上包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ-代数是 $\mathcal{S}$，以及在 $(X, \mathcal{S})$ 上的两个测度 μ 和 ν，使得对所有 $A \in \mathcal{A}$ 和 $\mu(X) = \nu(X) < \infty$ 都有 $\mu(A) = \nu(A)$，但 $\mu \neq \nu$。

9 假设 μ 和 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的度量。证明 $\mu + \nu$ 是 $(X, \mathcal{S})$ 上的度量。[这里 $\mu + \nu$ 是两个函数的通常和：如果 $E \in \mathcal{S}$，则 $(\mu + \nu)(E) = \mu(E) + \nu(E)$。]

10 给出一个测度空间（$X, \mathcal{S}, \mu$）的例子，以及 $\mathcal{S}$ 中集合的一个递减序列 $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$，使得

$$\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \neq \lim_{k\to\infty} \mu(E_k).$$

11 假设（X，$\mathcal{S}$，μ）是一个测度空间，并且 C、D、$E \in \mathcal{S}$ 满足

$$\mu(C \cap D) < \infty, \quad \mu(C \cap E) < \infty, \quad \mu(D \cap E) < \infty.$$

找出并证明一个关于$\mu(C \cup D \cup E)$的公式，用$\mu(C)$、$\mu(D)$、$\mu(E)$、$\mu(C \cap D)$、$\mu(C \cap E)$、$\mu(D \cap E)$和$\mu(C \cap D \cap E)$表示。

12 假设 X 是一个集合，$\mathcal{S}$ 是 X 的所有子集 E 所构成的 σ-代数，使得 E 是可数的或 $X \setminus E$ 是可数的。给出在 $(X, \mathcal{S})$ 上所有测度的集合的完整描述。

二维勒贝格测度

外测度在 Borel 集上的可加性

回忆一下，存在不相交的集合 $A, B \subseteq \mathbf{R}$ 使得 $|A \cup B| \neq |A| + |B|$ (见2.18)。因此，外测度尽管名为“测度”，却并不是定义在 $\mathbf{R}$ 的所有子集的 σ-代数上的一个测度。

本节的主要目标是证明：当外测度限制在 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集上时，它是一个测度。在整个本节中，要注意不要试图通过将测度的性质应用到外测度上来简化证明，即使这些性质在直觉上看起来似乎是合理的。例如，存在 $\mathbf{R}$ 的子集 $A \subseteq B \subseteq$，具有 $|A| < \infty$ 但 $|B \setminus A| \neq |B| - |A|$（参见 2.57(b)）。

下一个结果是我们迈向证明将外测度限制在博雷尔集上是一个测度这一目标的第一步。

2.62 ***additivity of outer measure if one of the sets is open***

设 A 和 G 是 $\mathbf{R}$ 的不相交子集，且 G 是开集。则

$$|A \cup G| = |A| + |G|.$$

证明 我们可以假设 $|G| < \infty$，否则 $|A \cup G|$ 和 $|A| + |G|$ 都等于 ∞。

次可加性（见 2.8）意味着 $|A \cup G| \leq |A| + |G|$。因此我们只需在另一方向上证明该不等式。

首先考虑这样一种情形：对于某些 $a, b \in \mathbf{R}$ 且满足 $a < b$，有 $G = (a, b)$。我们可以假设 $a, b \notin A$ (，因为将一个集合至多改变两个点并不会改变它的外测度)。设 $I_1, I_2, \cdots$ 是一列开区间，其并集包含 $A \cup G$。对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，令

$$J_n = I_n \cap (-\infty, a), \quad K_n = I_n \cap (a, b), \quad L_n = I_n \cap (b, \infty).$$

然后

$$\ell(I_n) = \ell(J_n) + \ell(K_n) + \ell(L_n).$$

现在 $J_1, L_1, J_2, L_2, \ldots$ 是一列开区间，其并集包含 A，而 $K_1, K_2, \ldots$ 是一列开区间，其并集包含 G。因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \big(\ell(J_n) + \ell(L_n)\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n) \\ &\geq |A| + |G|.\end{aligned}$$

上述不等式意味着$|A \cup G| \geq |A| + |G|$，从而完成了在这一特殊情况下$|A \cup G| = |A| + |G|$的证明。

对 m 作归纳，我们现在可以得出结论：如果 $m \in \mathbf{Z}^+$ 且 G 是由 m 个彼此不相交并且都与 A 不相交的开区间组成的并集，那么 $|A \cup G| = |A| + |G|$。

现在假设 G 是一个与 A 不相交的 $\mathbf{R}$ 中任意开子集。则 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ 对于某个不相交开区间序列 $I_1, I_2, \cdots$，且每个都与 A 不相交。现在对于每个 $m \in \mathbf{Z}^+$ 我们有

$$\begin{aligned}|A \cup G| &\geq \left|A \cup \left(\bigcup_{n=1}^{m} I_n\right)\right| \\ &= |A| + \sum_{n=1}^{m} \ell(I_n).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|A \cup G| &\geq |A| + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \\ &\geq |A| + |G|,\end{aligned}$$

完成对$|A \cup G| = |A| + |G|$的证明。 ■

下面的结果表明，如果两个集合中至少有一个是闭的，那么它们的不相交并的外测度与我们预期的一样。

2.63 *additivity of outer measure if one of the sets is closed*

假设 A 和 F 是 R 的不相交子集，且 F 是闭集。Th 源文本：en翻译文本：

$$|A \cup F| = |A| + |F|.$$

证明 设 $I_1, I_2, \ldots$ 是一列开区间，其并集包含 $A \cup F$。令 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$。于是 G 是一个满足 $A \cup F \subseteq G$ 的开集。因此 $A \subseteq G \setminus F$，这意味着

2.64 $$|A| \leq |G \setminus F|.$$

因为 $G \setminus F = G \cap (\mathbf{R} \setminus F)$，我们知道 $G \setminus F$ 是一个开集。因此我们可以将 2.62 应用于不交并 $G = F \cup (G \setminus F)$，得到

$$|G| = |F| + |G \setminus F|.$$

在式 2.64 的两边加上 $|F|$，然后利用上面的方程得到

$$\begin{aligned}|A| + |F| &\leq |G| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).\end{aligned}$$

因此 $|A| + |F| \leq |A \cup F|$，这意味着 $|A| + |F| = |A \cup F|$。 ■

回顾一下，Borel 集合的全体是 R 上包含 R 的所有开子集的最小的 σ-代数。下一个结果提供了一个极其有用的工具，用于用闭集来逼近一个 Borel 集合。

2.65 *approximation of Borel sets from below by closed sets*

设 $B \subseteq \mathbf{R}$ 是一个 Borel 集。则对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个闭集 $F \subseteq B$，使得 $|B \setminus F| < \varepsilon$。

证明 设

$$\mathcal{L} = \{D \subseteq \mathbf{R} : \text{for every } \varepsilon > 0, \text{ there exists a closed set } F \subseteq D \text{ such that } |D \setminus F| < \varepsilon\}.$$

证明的策略是表明$\mathcal{L}$是一个σ-代数。然后因为$\mathcal{L}$包含R的每一个闭子集（如果$D \subseteq$ R是闭的，在$\mathcal{L}$的定义中取$F = D$），通过取补集我们可以得出$\mathcal{L}$包含R的每一个开子集，从而包含R的每一个Borel子集。

要开始证明 $\mathcal{L}$ 是一个 σ-代数，我们需要证明 $\mathcal{L}$ 对可数交集封闭。因此，假设 D_1，D_2，... 是 $\mathcal{L}$ 中的一个序列。令 $\varepsilon > 0$。对于每个 $k \in$ Z$^+$，存在一个闭集 F_k，使得

$$F_k \subseteq D_k \quad \text{and} \quad |D_k \setminus F_k| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

因此 $\bigcap_{k=1}^\infty F_k$ 是一个闭集，并且

$$\bigcap_{k=1}^\infty F_k \subseteq \bigcap_{k=1}^\infty D_k \quad \text{and} \quad \Big(\bigcap_{k=1}^\infty D_k\Big) \setminus \Big(\bigcap_{k=1}^\infty F_k\Big) \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty (D_k \setminus F_k).$$

最后一个集合包含关系以及外测度的可数次可加性（见 2.8）意味着

$$\Big|\Big(\bigcap_{k=1}^\infty D_k\Big) \setminus \Big(\bigcap_{k=1}^\infty F_k\Big)\Big| < \varepsilon.$$

因此 $\bigcap_{k=1}^\infty D_k \in \mathcal{L}$，从而证明 $\mathcal{L}$ 在可数交下封闭。

现在我们想证明 $\mathcal{L}$ 对补集是封闭的。假设 $D \in \mathcal{L}$ 和 $\varepsilon > 0$。我们想要展示存在一个 R $\setminus D$ 的封闭子集，其与 R $\setminus D$ 的集合差的外测度小于 ε，这将使我们得出 R $\setminus D \in \mathcal{L}$。

首先，我们考虑$|D| < \infty$的情况。设$F \subseteq D$是一个闭集，使得$|D \setminus F| < \frac{\varepsilon}{2}$。外测度的定义意味着存在一个开集$G$，使得$D \subseteq G$和$|G| < |D| + \frac{\varepsilon}{2}$。现在，R $\setminus G$是一个闭集，并且R $\setminus G \subseteq$ R $\setminus D$。此外，我们有

$$\begin{aligned}(\mathbf{R} \setminus D) \setminus (\mathbf{R} \setminus G) &= G \setminus D \\ &\subseteq G \setminus F.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|(\mathbf{R} \setminus D) \setminus (\mathbf{R} \setminus G)| &\leq |G \setminus F| \\ &= |G| - |F| \\ &= (|G| - |D|) + (|D| - |F|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |D \setminus F| \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

其中第二行的等式来自于将2.63应用于不相交的并集 $G = (G \setminus F) \cup F$，而第四行则使用了对并集 $D = (D \setminus F) \cup F$ 应用的次可加性。最后的不等式显示了 $\mathbf{R} \setminus D \in \mathcal{L}$，如所期望的。

现在，仍然假设 $D \in \mathcal{L}$ 和 $\varepsilon > 0$，我们考虑 $|D| = \infty$ 的情形。对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，令 $D_k = D \cap [-k, k]$。由于 $D_k \in \mathcal{L}$ 和 $|D_k| < \infty$，前一种情形意味着 $\mathbf{R} \setminus D_k \in \mathcal{L}$。显然 $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$。因此

$$\mathbf{R} \setminus D = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathbf{R} \setminus D_k).$$

因为 $\mathcal{L}$ 在可数交下封闭，上述等式蕴含 $\mathbf{R} \setminus D \in \mathcal{L}$，这就完成了证明 $\mathcal{L}$ 是一个 σ-代数。 ∎

现在我们可以证明，如果这两个集合中至少有一个是博雷尔集，那么它们的不交并的外测度正如我们所期望的那样。

2.66 *additivity of outer measure if one of the sets is a Borel set*

设 A 和 B 是 $\mathbf{R}$ 的不相交子集，且 B 是一个 Borel 集。则

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

证明 设 $\varepsilon > 0$。设 F 为一个闭集，使得 $F \subseteq B$ 且 $|B \setminus F| < \varepsilon$ (（见 2.65)）。因此

$$\begin{aligned} |A \cup B| &\geq |A \cup F| \\ &= |A| + |F| \\ &= |A| + |B| - |B \setminus F| \\ &\geq |A| + |B| - \varepsilon, \end{aligned}$$

其中，上述第二行和第三行由 2.63 推导而来 [第三行使用 $B = (B \setminus F) \cup F$]。

因为上述不等式对所有 $\varepsilon > 0$ 都成立，我们有 $|A \cup B| \geq |A| + |B|$，这意味着 $|A \cup B| = |A| + |B|$。 ∎

你可能早就怀疑，并非 $\mathbf{R}$ 的每个子集都是 Borel 集。现在我们可以证明这一怀疑。

2.67 *existence of a subset of* $\mathbf{R}$ *that is not a Borel set*

存在一个集合 $B \subseteq \mathbf{R}$，使得 $|B| < \infty$，并且 B 不是一个 Borel 集。

证明 在 2.18 的证明中，我们表明存在不相交的集合 $A, B \subseteq \mathbf{R}$，使得 $|A \cup B| \neq |A| + |B|$。对于任何这样的集合，我们必须有 $|B| < \infty$，因为否则 $|A \cup B|$ 和 $|A| + |B|$ 都等于 ∞ (，这可由不等式 $|B| \leq |A \cup B|$) 得出。现在 2.66 蕴含 B 不是一个 Borel 集。 ∎

我们现在构建的工具使我们能够证明，外测度在限制到博雷尔集时是一个测度。

2.68 *outer measure is a measure on Borel sets*

外测度是定义在 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的一个测度，其中 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbf{R}$ 的博雷尔子集的 σ-代数。

证明 设 $B_1, B_2, \ldots$ 是 $\mathbf{R}$ 的一列互不相交的 Borel 子集。则对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，我们有

$$\begin{aligned}\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big| &\geq \Big|\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |B_k|,\end{aligned}$$

其中，上面的第一行由 2.5 推出，而最后一行由 2.66（以及对 n 的归纳）得到。令 $n \to \infty$ 取极限，我们得到 $\big|\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\big| \geq \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$。另一方向的不等式由外测度的可数次可加性（2.8）得到。因此

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big| = \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|.$$

因此，外测度是在 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集所构成的 σ-代数上的一个测度。 ■

上述结果意味着下面的定义是有意义的。

2.69 定义 *Lebesgue measure*

Lebesgue measure 是 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的测度，其中 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集的 σ-代数，它将每个 Borel 集合赋予其外测度。

换言之，一个集合的勒贝格测度与其外测度是相同的，只是术语 *Lebesgue measure* 不应适用于任意集合，而只适用于 Borel 集（以及我们很快将看到的所谓勒贝格可测集）。不同于外测度，勒贝格测度实际上是一个测度，如 2.68 所示。勒贝格测度以其发明者亨利·勒贝格（Henri Lebesgue）命名。

The cathedral in Beauvais, the French city where Henri Lebesgue (1875–1941) was born. Much of what we call Lebesgue measure and Lebesgue integration was developed by Lebesgue in his 1902 PhD thesis. Émile Borel was Lebesgue's PhD thesis advisor. CC-BY-SA 詹姆斯·米切尔

勒贝格可测集

我们已经完成了本节的主要目标，即证明将外测度限制在 Borel 集上时，它是一个测度。正如我们将在本小节中看到的，外测度实际上是在一类稍大一些的集合上成为测度的，这类集合称为勒贝格可测集。

数学文献中包含许多关于勒贝格可测集的不同定义。这些定义都是等价的——在一种方法中的勒贝格可测集定义，在另一种方法中会成为一个定理。这里选择的方法的优点在于强调：勒贝格可测集与博雷尔集的差异仅在于一个外测度为 0 的集合。这里的观点是，应当将外测度为 0 的集合视为无关紧要的小集合。

2.70 定义 *Lebesgue measurable set*

如果存在一个 Borel 集 $B \subseteq A$ 使得 $|A \setminus B| = 0$，则称集合 $A \subseteq \mathbf{R}$ 为 *Lebesgue measurable*。

每个 Borel 集都是勒贝格可测的，因为如果 $A \subseteq \mathbf{R}$ 是一个 Borel 集，那么我们可以在上述定义中取 $B = A$。

下面的结果给出了若干个等价条件来刻画勒贝格可测性。条件 (a) 与 (d) 的等价性正是我们的定义，因此在证明中不再讨论。

尽管存在勒贝格可测但不是博雷尔的集合，但你几乎不会遇到这样的集合。下面结果最重要的应用是：如果 $A \subseteq \mathbf{R}$ 是一个博雷尔集合，那么 A 满足条件 (b)、(c)、(e) 和 (f)。条件 (c) 表明每个博雷尔集合几乎是闭集的可数并，条件 (f) 则表明每个博雷尔集合几乎是开集的可数交。

2.71 *equivalences for being a Lebesgue measurable set*

假设 $A \subseteq \mathbf{R}$。则以下陈述是等价的。

(a) A 是勒贝格可测的。

(b) 对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个闭集 $F \subseteq A$，使得 $|A \setminus F| < \varepsilon$。 (c) 存在闭集 F_1、F_2、 $\dots$， 包含于 A，使得 $\left|A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right| = 0$。 (d) 存在一个 Borel 集 $B \subseteq A$，使得 $|A \setminus B| = 0$。 (e) 对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个开集 $G \supseteq A$，使得 $|G \setminus A| < \varepsilon$。 (f) 存在开集 G_1、G_2、 $\dots$， 包含 A，使得 $\left|\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right) \setminus A\right| = 0$。 (g) 存在一个 Borel 集 $B \supseteq A$，使得 $|B \setminus A| = 0$。

证明 令$\mathcal{L}$表示满足(b)的R中集合$A \subseteq$的集合。我们已经证明每个Borel集都属于$\mathcal{L}$(（见2.65)）。作为该证明的关键部分，并且我们将在本证明中自由使用这一点，我们证明了$\mathcal{L}$是R上的一个σ-代数（见2.65的证明）。除了包含Borel集之外，$\mathcal{L}$还包含每一个外测度为0的集合[因为如果$|A| = 0$，我们可以在(b)中取$F = \varnothing$]。

(b) $\Longrightarrow$ (c)：假设 (b) 成立。因此，对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，存在一个闭集 $F_n \subseteq A$，使得 $|A \setminus F_n| < \frac{1}{n}$。现在 –

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subseteq A \setminus F_n$$

对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$. 因此 $|A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k| \leq |A \setminus F_n| < \frac{1}{n}$ 对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$. 因此 $|A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k| = 0$，从而完成了(b) 蕴含 (c) 的证明。

(c) $\Longrightarrow$ (d): 因为每一个可数的闭集并集都是一个博雷尔集，我们可以看出 (c) 蕴含 (d)。

(d) $\Longrightarrow$ (b)：假设(d)成立。因此存在一个Borel集$B \subseteq A$，使得$|A \setminus B| = 0$。现在

$$A = B \cup (A \setminus B).$$

我们知道$B \in \mathcal{L}$ (因为B是一个Borel集合)并且$A \setminus B \in \mathcal{L}$ (因为$A \setminus B$的外测度为0)。由于$\mathcal{L}$是一个σ-代数，上述显示的方程意味着$A \in \mathcal{L}$。换句话说，(b)成立，完成了证明(d)蕴含(b)的过程。

在证明的这一阶段，我们现在知道(b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d)。

(b) $\Longrightarrow$ (e)：假设 (b) 成立。因此 $A \in \mathcal{L}$。令 $\varepsilon > 0$。由于 $\mathbf{R} \setminus A \in \mathcal{L}$ (，而这之所以成立是因为 $\mathcal{L}$ 在取补下是闭合的)，存在一个闭集 $F \subseteq \mathbf{R} \setminus A$，使得

$$|(\mathbf{R} \setminus A) \setminus F| < \varepsilon.$$

现在 $\mathbf{R} \setminus F$ 是一个开集，且 $\mathbf{R} \setminus F \supseteq A$。因为 $(\mathbf{R} \setminus F) \setminus A = (\mathbf{R} \setminus A) \setminus F$，上述不等式蕴含 $|(\mathbf{R} \setminus F) \setminus A| < \varepsilon$。因此 (e) 成立，从而完成了 (b) 推出 (e) 的证明。

(e) $\Longrightarrow$ (f): 假设 (e) 成立。因此对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，存在一个开集 $G_n \supseteq A$，使得 $|G_n \setminus A| < \frac{1}{n}$。现在 –

$$\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\Big) \setminus A \subseteq G_n \setminus A$$

对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$。因此 $|\big(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\big) \setminus A| \leq |G_n \setminus A| \leq \frac{1}{n}$ 对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$。故而 $|\big(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\big) \setminus A| = 0$，完成了（e）蕴含（f）的证明。

(f) $\Longrightarrow$ (g)：因为任意可数个开集的交都是一个博雷尔集，我们看到 (f) 蕴含 (g)。

(g) $\Longrightarrow$ (b)：假设 (g) 成立。因此存在一个 Borel 集 $B \supseteq A$，使得 $|B \setminus A| = 0$。现在

$$A = B \cap \big(\mathbf{R} \setminus (B \setminus A)\big).$$

我们知道 $B \in \mathcal{L}$ (，因为 B 是一个 Borel 集)，并且 $\mathbf{R} \setminus (B \setminus A) \in \mathcal{L}$ (，因为该集合是一个外测度为 0 的集合的补集)。由于 $\mathcal{L}$ 是一个 σ-代数，上面显示的等式意味着 $A \in \mathcal{L}$。换言之，(b) 成立，从而完成了 (g) 蕴含 (b) 的证明。

我们的蕴含链现在表明，(b) 到 (g) 都是等价的。 ∎

In practice, the most useful part of Exercise 6 is the result that every Borel set with finite measure is almost a finite disjoint union of bounded open intervals.

除了前一结果中的等价条件之外，请参见本节的练习13，其中给出了另一个与 Lebesgue 可测性等价的条件。另见练习6，它表明具有有限外测度的集合是 Lebesgue 可测当且仅当它几乎是有限个有界开区间的不相交并时，它是可测的。

现在我们可以证明外测度在勒贝格可测集上是一个测度。

2.72 *outer measure is a measure on Lebesgue measurable sets*

(a) R 上勒贝格可测子集的集合 $\mathcal{L}$ 是 R 上的一个 σ-代数。

(b) 外测度是 $(\mathbf{R}, \mathcal{L})$ 上的一个测度。

证明 由于在 2.71 中 (a) 与 (b) 等价，R 上勒贝格可测子集的集合 $\mathcal{L}$ 就是 2.71 中满足 (b) 的集合的全体。正如 2.71 的证明第一段所指出的，这个集合是 R 上的一个 σ-代数，从而证明了 (a)。

为证明第二个要点，设 $A_1, A_2, \ldots$ 是一列两两不交的勒贝格可测集。根据勒贝格可测集的定义（2.70），对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，存在一个 Borel 集 $B_k \subseteq A_k$，使得 $|A_k \setminus B_k| = 0$。现在

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right| &\geq \left|\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|,\end{aligned}$$

上述第二行成立，因为 B_1、B_2，…… 是一列不相交的 Borel 集合，而外测度是 Borel 集合上的测度（见 2.68）；上述最后一行成立，因为 $B_k \subseteq A_k$，并且根据外测度的次可加性（见 2.8），我们有
$|A_k| = |B_k \cup (A_k \setminus B_k)| \leq |B_k| + |A_k \setminus B_k| = |B_k|$。

上述不等式与外测度的可数次可加性（见 2.8）相结合，推出
$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$，从而完成了 (b) 的证明。■

如果 A 是一个外测度为 0 的集合，那么 A 是勒贝格可测的（因为我们可以在定义 2.70 中取 $B = \varnothing$）。因此，我们对勒贝格可测集合的定义蕴含：勒贝格可测集合的全体是在 R 上包含 Borel 集合和外测度为 0 的集合的最小的 σ-代数。因此，勒贝格可测集合的全体也是在 R 上包含开集和外测度为 0 的集合的最小的 σ-代数。

因为外测度甚至不是有限可加的（见 2.18），2.72(b) 蕴含存在 R 的子集不是勒贝格可测的。

我们先前将勒贝格测度定义为限制在博雷尔集合上的外测度（见 2.69）。术语 *Lebesgue measure* 在数学文献中有时按我们先前给出的含义使用，有时则按下面的含义使用。

2.73 定义 *Lebesgue measure*

Lebesgue measure 是定义在 $(\mathbf{R}, \mathcal{L})$ 上的一个测度，其中 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbf{R}$ 的勒贝格可测子集所成的 σ-代数，它将每个勒贝格可测集赋予其外测度。

关于 *Lebesgue measure* 的两个定义仅在测度的定义域上有所不同——σ-代数是博雷尔集合还是勒贝格可测集合？你也许可以从上下文判断所指的是哪一个。在本书中，除非无关紧要，否则都会明确指定定义域。

如果你正在阅读一篇数学论文，而勒贝格测度的定义域没有被明确说明，那么使用博雷尔集合还是勒贝格可测集合大概并不重要（因为每一个勒贝格可测集合都只是在一个外测度为 0 的集合上与某个博雷尔集合不同，而在处理测度时，测度为 0 的集合上发生的事情通常并不重要）。由于分析中通常运算所产生的所有集合都是博雷尔集合，除非你所阅读的内容明确另有说明，否则你可以假定 *Lebesgue measure* 表示定义在博雷尔集合上的外测度。

一篇数学论文也可能在不作进一步说明的情况下提及 $\mathbf{R}$ 的一个 *measurable* 子集。除非从上下文中可以清楚看出是其他的 σ-代数，否则作者很可能指的是博雷尔集或勒贝格可测集。同样，这种选择大概并不重要，但使用博雷尔集会更清晰、更简单。

The emphasis in some textbooks on Lebesgue measurable sets instead of Borel sets probably stems from the historical development of the subject, rather than from any common use of Lebesgue measurable sets that are not Borel sets.

定义在勒贝格可测集上的勒贝格测度相对于定义在博雷尔集上的勒贝格测度确实有一个小小的优势：任何外测度为 0 的集合的任意子集都是勒贝格可测的，但不一定是博雷尔集。然而，任何产生 $\mathbf{R}$ 的子集的自然过程都会得到一个博雷尔集。因此，这个小优势在实践中并不常出现。

Cantor 集合与 Cantor 函数

每个可数集合的外测度为0（见2.4）。一个合理的问题是反命题是否成立。换句话说，是否每个外测度为0的集合都是可数的？本小节介绍的康托尔集提供了这个问题的答案。

Cantor集还为其他合理的猜想提供了反例。例如，本节中的习题17展示了两个勒贝格测度为0的集合的和可以具有正的勒贝格测度。

2.74 定义 *Cantor set*

该 *Cantor set* C 是 $[0,1] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n)$，其中 $G_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 和 G_n 对于 $n > 1$ 是 $[0,1]$ 的区间中的中间三分之一的开区间的并集 $\setminus (\bigcup_{j=1}^{n-1} G_j)$。

设想康托集C的一种方式是从区间$[0,1]$开始，然后考虑这样一个过程：在每一步中，从上一步留下的所有区间中去除各自的中间三分之一的开区间。在第一步，我们去除$G_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$。

G_1 is shown in red.

在第一步之后，我们得到 $[0,1] \setminus G_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$。因此，我们取 $[0, \frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3}, 1]$ 的中三分之一开区间。换句话说，我们有

$$G_2 = (\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}).$$

$G_1 \cup G_2$ is shown in red.

现在 $[0,1] \setminus (G_1 \cup G_2) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$。因此

$$G_3 = (\tfrac{1}{27}, \tfrac{2}{27}) \cup (\tfrac{7}{27}, \tfrac{8}{27}) \cup (\tfrac{19}{27}, \tfrac{20}{27}) \cup (\tfrac{25}{27}, \tfrac{26}{27}).$$

$G_1 \cup G_2 \cup G_3$ is shown in red.

三进制表示提供了一种思考康托尔集的有用方式。正如在十进制表示中 $\frac{1}{10} = 0.1 = 0.09999\ldots$ 一样，对于分母是 3 的幂的分数，三进制表示并不唯一。例如，$\frac{1}{3} = 0.1_3 = 0.02222\ldots_3$，其中下标 3 表示三进制表示。

注意，G_1 是区间 $[0,1]$ 中那些三进制表示在小数点后第一位为 1 的数的集合（对于那些具有两种三进制表示的数，这意味着这两种表示在第一位都必须为 1）。另外，$G_1 \cup G_2$ 是区间 $[0,1]$ 中那些三进制表示在小数点后第一位或第二位为 1 的数的集合。以此类推。因此，$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ 是区间 $[0,1]$ 中那些三进制表示中某一位为 1 的数的集合。

因此我们得到康托集的如下描述。在下面的结果中，短语 *a base* 3 *representation* 表示：如果一个数有两个以 3 为底的表示，那么当且仅当其中至少有一个不含 1 时，它属于康托集。例如，$\frac{1}{3}$（等于 $0.02222\ldots_3$，也等于 0.1_3）以及 $\frac{2}{3}$（等于 0.2_3，也等于 $0.12222\ldots_3$）都在康托集中。

2.75 *base* 3 *description of the Cantor set*

康托尔集 C 是区间 $[0, 1]$ 中那些其三进制表示只包含 0 和 2 的数的集合。

It is unknown whether or not every number in the Cantor set is either rational or transcendental (meaning not the root of a polynomial with integer coefficients).

每个G_n中每个区间的两个端点都在康托尔集中。然而，康托尔集中的许多元素并不是任何G_n中任何区间的端点。例如，练习14要求你证明$\frac{1}{4}$ 和 $\frac{9}{13}$ 在康托尔集中；两者都不这些数中的一个是任何G_n中任何区间的端点。康托尔集中的一个无理数的例子是$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n!}}$。

接下来的结果给出了康托集的一些初等性质。

2.76 C *is closed, has measure* 0, *and contains no nontrivial intervals*

(a) 康托尔集是 $\mathbf{R}$ 的一个闭子集。(b) 康托尔集的勒贝格测度为 0。(c) 康托尔集不包含任何具有多于一个元素的区间。

证明 在康托集的定义中使用的每个集合G_n都是开区间的并。因此每个G_n都是开集。因此$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$是开集，从而其补集是闭集。康托集等于$[0, 1] \cap \big(\mathbf{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\big)$，它是两个闭集的交。因此康托集是闭的，完成了(a)的证明。

通过对 n 的归纳，每个 G_n 都是 2^{n-1} 个两两不相交的开区间的并，每个区间的长度为$\frac{1}{3^n}$。因此 $|G_n| = \frac{2^{n-1}}{3^n}$。集合 $G_1, G_2, \ldots$ 是两两不相交的。因此

$$
\begin{aligned}
\Big|\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\Big| &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots \\
&= \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots\Big) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

因此，等于 $[0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ 的康托集，其勒贝格测度为 $1 - 1$ [由 2.57(b)]。换言之，康托集的勒贝格测度为 0，从而完成了 (b) 的证明。

一个勒贝格测度为0的集合不能包含具有多个元素的区间。因此，（b）蕴含（c）。

现在我们可以定义一个令人惊叹的函数。

2.77 定义 *Cantor function*

Cantor函数 $\Lambda : [0, 1] \to [0, 1]$ 定义为通过将三进制表示转换为二进制表示，如下所示。

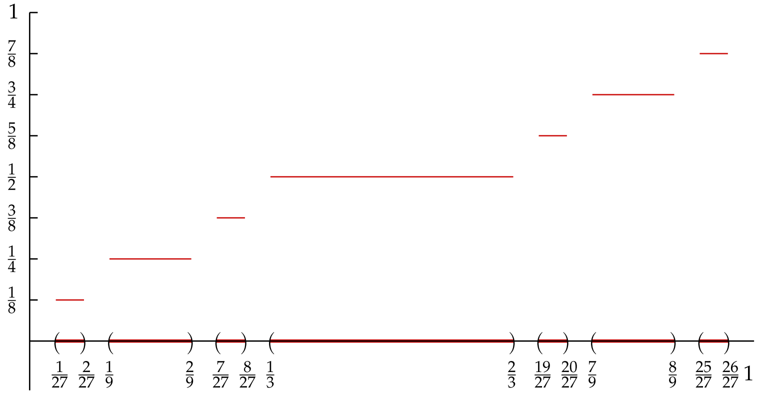
- 如果 $x \in C$，那么 $\Lambda(x)$ 是通过对 x 的仅包含 0 和 2 的唯一三进制表示，将每个 2 替换为 1，并将得到的字符串解释为一个二进制数来计算的。

- 如果 $x \in [0, 1] \setminus C$，那么 $\Lambda(x)$ 通过对 x 的三进制表示在第一个 1 之后截断、将第一个 1 之前的每个 2 替换为 1，并将所得字符串解释为一个二进制数来计算。

2.78 示例 *values of the Cantor function*

- $\Lambda(0.0202_3) = 0.0101_2$；换句话说，$\Lambda\left(\frac{20}{81}\right) = \frac{5}{16}$。
- $\Lambda(0.220121_3) = 0.1101_2$；换句话说 $\Lambda\left(\frac{664}{729}\right) = \frac{13}{16}$。
- 设 $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$。那么 $x \notin C$，因为 x 在康托集定义的第一步中被移除了。x 的每一个三进制表示都以 0.1 开头。因此我们将其截断并把 0.1 解释为二进制数，得到 $\frac{1}{2}$。因此，康托函数 Λ 在区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 上取常值 $\frac{1}{2}$，如下图所示。

- 假设 $x \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$。然后 $x \notin C$，因为 x 在康托集定义的第二步中被移除。每个 x 的三进制表示都以 0.21 开头。因此，我们截断，将 2 替换为 1，并将 0.11 解释为二进制数，得到 $\frac{3}{4}$。因此，康托函数 Λ 在区间 $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ 上具有常数值 $\frac{3}{4}$，如下面的图所示。



Graph of the Cantor function on the intervals from first three steps.

如下一结果所示，康托函数以某种神秘的方式设法将 $[0,1]$ ***onto*** $[0,1]$，尽管康托函数在康托集的补集中每个开区间上都是常数——见例 2.78 中的图像。

2.79 *Cantor function*

康托函数Λ是一个从$[0,1]$到$[0,1]$的连续、递增函数。此外，$\Lambda(C)=[0,1]$。

证明 我们首先证明 $\Lambda(C)=$ 属于 $[0,1]$。为此，假设 $y\in$ 属于 $[0,1]$。在 y 的二进制表示中，将每个 1 替换为 2，并按三进制解释所得的字符串，得到一个数 $x\in$ 属于 $[0,1]$。由于 x 的三进制表示只包含 0 和 2，数 x 属于康托集 C。康托函数的定义表明 $\Lambda(x)=y$。因此 $y\in\Lambda(C)$。从而 $\Lambda(C)=$ 属于 $[0,1]$，如所欲证。

对三进制和二进制表示的意义以及Cantor函数的定义进行一些仔细思考，可以看出Λ是一个递增函数。这个步骤留给读者。

如果 $x\in[0,1]\setminus C$，那么 Cantor 函数 Λ 在包含 x 的开区间上是常数，因此 Λ 在 x 处是连续的。如果 $x\in C$，那么再通过一些关于三进制和二进制表示的仔细思考，可以得出 Λ 在 x 处是连续的。

或者，你可以跳过上面的段落，注意到定义在 $[0,1]$ 上且值域等于 $[0,1]$ 的增函数必然是连续的（不过你应该思考一下为什么这成立）。 ■

现在我们可以使用康托函数来证明康托集是不可数的，尽管它是一个外测度为 0 的闭集。

2.80 C *is uncountable*

Cantor集是不可数的。

证明 若 C 是可数的，则 $\Lambda(C)$ 也是可数的。然而，2.79 表明 $\Lambda(C)$ 是不可数的。 ■

正如我们在下述结果中所见，康托函数表明，即使是连续函数，也可以将一个勒贝格测度为 0 的集合映射到不可测集合。

2.81 *continuous image of a Lebesgue measurable set can be nonmeasurable*

存在一个勒贝格可测集 $A\subseteq[0,1]$，使得 $|A|=0$，且 $\Lambda(A)$ 不是勒贝格可测集。

证明 设 E 是 $[0,1]$ 的一个非勒贝格可测的子集（这样的集合的存在性来自于 2.72 之后的讨论）。令 $A=C\cap\Lambda^{-1}(E)$。则 $|A|=$ 为 0，因为 $A\subseteq C$ 和 $|C|=$ 为 0（由 2.76）。因此 A 是勒贝格可测的，因为 R 中外测度为 0 的每个子集都是勒贝格可测的。

由于 Λ 将 C 映射到 $[0,1]$ 上（见 2.79），我们有 $\Lambda(A)=E$。 ■

练习 2D

1 (a) 证明由区间 (0, 1) 中那些其十进制展开包含一百个连续的 4 的数所组成的集合是 R 的一个 Borel 子集。

(b) (a) 中集合的勒贝格测度是多少?

2 证明存在一个有界集合 $A \subseteq \mathbf{R}$，使得对于每一个闭集 $F \subseteq A$，$|F| \le |A| - 1$。

3 证明存在一个集合 $A \subseteq \mathbf{R}$，使得 $|G \setminus A| = \infty$ 对于每一个包含 A 的开集 G 都成立。

4 短语 *nontrivial interval* 用来表示 R 的一个包含多于一个元素的区间。请记住，区间可能是开区间、闭区间，或两者皆非。

(a) 证明 R 中任意一族非平凡区间的并可以表示为该族中某个可数子族的并。(b) 证明 R 中任意一族非平凡区间的并是一个 Borel 集。(c) 证明存在 R 中一族闭区间，其并不是一个 Borel 集。

5 证明如果 $A \subseteq \mathbf{R}$ 是勒贝格可测的，那么存在一个递增的闭集序列 $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots$，包含在 A 中，使得

$$\left| A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right| = 0.$$

6 假设 $A \subseteq \mathbf{R}$ 且 $|A| < \infty$。证明 A 是勒贝格可测的，当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个集合 G，它是有限多个互不相交的有界开区间的并，使得 $|A \setminus G| + |G \setminus A| < \varepsilon$。

证明如果 $A \subseteq \mathbf{R}$ 是勒贝格可测的，那么存在一个递减的开集序列 $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots$，包含 A，使得

$$\left| \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \right) \setminus A \right| = 0.$$

8 证明 R 的勒贝格可测子集的集合在平移下是不变的。更准确地说，证明如果 $A \subseteq \mathbf{R}$ 是勒贝格可测的，且 $t \in \mathbf{R}$，则 $t + A$ 是勒贝格可测的。

9 证明 R 的勒贝格可测子集的集合在伸缩下不变。更精确地说，证明如果 $A \subseteq \mathbf{R}$ 是勒贝格可测的并且 $t \in \mathbf{R}$，那么 tA (（其定义为 $\{ta : a \in A\}$)）是勒贝格可测的。

证明如果 A 和 B 是 R 的不相交子集，且 B 是勒贝格可测的，那么 $|A \cup B| = |A| + |B|$。

11 证明：如果 $A \subseteq \mathbf{R}$ 且 $|A| > 0$，则存在 A 的一个不是勒贝格可测的子集。

12 假设 $b < c$ 和 $A \subseteq (b, c)$。证明 A 是勒贝格可测的，当且仅当 $|A| + |(b, c) \setminus A| = c - b$。

13 设 $A \subseteq \mathbf{R}$。证明 A 是勒贝格可测的，当且仅当

$$|(-n, n) \cap A| + |(-n, n) \setminus A| = 2n$$

对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$。

证明 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{9}{13}$ 都在康托尔集内。

证明 $\frac{13}{17}$ 不在康托集内。

列出在康托集定义（2.74）中其并集为G_4的八个开区间。

17 设C表示康托尔集。证明$\{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y : x, y \in C\} = [0, 1]$。

18 证明实数集 R 中的每个开区间要么包含无限多个元素，要么不包含 Cantor 集中的任何元素。

19 评估 $\int_0^1 \Lambda$，其中 Λ 是Cantor函数。

20 求下列各项的值：

（a）$\Lambda(\frac{9}{13})$；（b）$\Lambda(0.\overline{93})$。

21 求以下各集合：

（a）$\Lambda^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$；（b）$\Lambda^{-1}(\{\frac{5}{16}\})$。

22（a） 假设 x 是区间 [0, 1] 中的一个有理数。解释为什么 $\Lambda(x)$ 是ational.

（b）假设$x \in C$使得$\Lambda(x)$是有理数。解释为什么x是有理数。

23 证明存在一个函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得每一个非空开区间在 f 下的像都是 R。

24 对于 $A \subseteq \mathbf{R}$，该量

$$\sup\{|F| : F \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 的一个闭合有界子集，且 } F \subseteq A\}$$

被称为A的*inner measure*。

(a) 证明如果 A 是 R 的一个勒贝格可测子集，则 A 的内测度等于 A 的外测度。

(b) 证明内测度不是 R 的所有子集的 σ-代数上的一个测度。

2E 可测函数的收敛

回顾一下，可测空间是一个二元组（$X, \mathcal{S}$），其中 X 是一个集合，而 $\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 σ-代数。我们将函数 $f: X \to \mathbf{R}$ 定义为 $\mathcal{S}$-可测的，如果对于每一个 Borel 集 $B \subseteq \mathbf{R}$ 都有 $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$。在第 2B 节中，我们证明了一些关于 $\mathcal{S}$-可测函数的结果；那是在我们引入测度这一概念之前。

在本节中，我们回到对可测函数的研究，但现在重点放在依赖于测度的结果上。本节的亮点是埃戈罗夫定理和卢津定理的证明。

逐点收敛与一致收敛

本节首先介绍一些你可能在之前的课程中见过的定义。

2.82 定义 *pointwise convergence; uniform convergence*

设X是一个集合，f_1，f_2，……是从X到R的函数序列，且f是从X到R的函数。

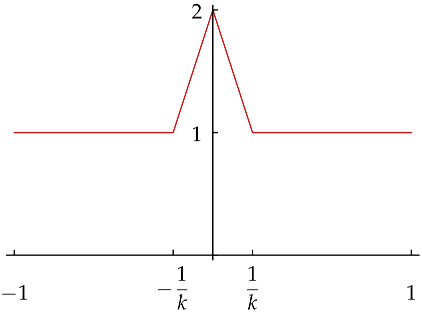
- 序列 f_1、f_2、⋯ *converges pointwise* 在 X 到 f 上如果
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$
对于每个 $x \in X$。
换句话说，$f_1, f_2, \ldots$ *converges pointwise* 在 X 到 f 上，如果对每个 $x \in X$ 且对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得对所有整数 $k \geq n$，$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$。
- 序列 f_1、f_2、……*converges uniformly* 在 X 到 f 上收敛到 f，如果对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得 $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ 对所有整数 $k \geq n$ 和所有 $x \in X$ 都成立。

2.83 示例 *a sequence converging pointwise but not uniformly*

假设 $f_k: [-1, 1] \to \mathbf{R}$ 是其图像如图所示的函数，而 $f: [-1, 1] \to \mathbf{R}$ 是由以下方式定义的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq 0, \\ 2 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

然后 $f_1, f_2, \ldots$ 在 $[-1, 1]$ 上逐点收敛到 f，但 $f_1, f_2, \ldots$ 并不在 $[-1, 1]$ 上一致收敛到 f，这一点你应当加以验证。



The graph of f_k.

像连续性与一致连续性之间的差异一样，逐点收敛与一致收敛之间的差异也在于量词的顺序。花些时间仔细检查定义。如果一系列函数在某个集合上一致收敛，那么它们在同一集合上也逐点收敛；然而，反之则不成立，正如例子 2.83 所示。

例 2.83 还表明，连续函数的逐点极限未必是连续的。然而，下一个结果告诉我们，连续函数的一致极限是连续的。

2.84 ***uniform limit of continuous functions is continuous***

假设 $B \subseteq$ 属于 $\mathbf{R}$ 且 $f_1, f_2, \ldots$ 是从 B 到 $\mathbf{R}$ 的一列函数，在 B 上均匀收敛到一个函数 $f : B \to \to \mathbf{R}$。假设 $b \in B$ 和 f_k 在每个 $k \in \in \mathbf{Z}^+$ 处连续。那么 f 在 b 处连续。

证明 设 $\varepsilon > 0$。令 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得 对所有 $x \in B$，$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$。因为 f_n 在 b 处连续，存在 $\delta > 0$，使得 对所有 $x \in (b - \delta,\ b + \delta) \cap B$，$|f_n(x) - f_n(b)| < \frac{\varepsilon}{3}$。

现在假设 $x \in (b - \delta,\ b + \delta) \cap B$。然后

$$\begin{aligned}|f(x) - f(b)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(b)| + |f_n(b) - f(b)| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

因此，f 在 b 处是连续的。 ■

厄戈罗夫定理

一列逐点收敛的函数不一定均匀收敛。然而，下面的结果表明，在具有有限总测度的测度空间上，逐点收敛的函数列几乎一致收敛，从某种意义上讲，它在除了一组可以具有任意小测度的集合之外的区域一致收敛。

Dmitri Egorov (1869–1931) proved the theorem below in 1911. You may encounter some books that spell his last name as 埃戈罗夫.

作为下一个结果的一个例子，考虑区间 $[-1, 1]$ 上的勒贝格测度 λ，以及例 2.83 中的函数序列 $f_1, f_2, \ldots$，它在 $[-1, 1]$ 上逐点收敛但不一致收敛。设 $\varepsilon > 0$。于是取 $E = [-1, -\frac{\varepsilon}{4}] \cup [\frac{\varepsilon}{4}, 1]$，我们有 $\lambda([-1, 1] \setminus E) < \varepsilon$，并且 $f_1, f_2, \ldots$ 在 E 上一致收敛，正如下一个结果的结论所示。

2.85 ***Egorov's Theorem***

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个带有 $\mu(X) < \infty$ 的测度空间。设 $f_1, f_2, \ldots$ 是一列从 X 到 $\mathbf{R}$ 的 $\mathcal{S}$-可测函数，在 X 上逐点收敛到一个函数 $f : X \to \mathbf{R}$。则对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个集合 $E \in \mathcal{S}$，使得 $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$，且 $f_1, f_2, \ldots$ 在 E 上一致收敛到 f。

证明 设 $\varepsilon > 0$。暂时固定 $n \in \mathbf{Z}^+$。逐点收敛的定义意味着

2.86 $$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| < \tfrac{1}{n}\} = X.$$

对于 $m \in \mathbf{Z}^+$，令

$$A_{m,n} = \bigcap_{k=m}^{\infty} \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| < \tfrac{1}{n}\}.$$

每个 $A_{m,n} \in \mathcal{S}$ 都是可测的，因为每个 $f_k - f$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数（由 2.48 和 2 .46）。现在 $A_{1,n} \subseteq A_{2,n} \subseteq \cdots$ 是一列递增的集合，且 2.86 可以重写为

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,n} = X.$$

上述方程（由 2.59）意味着 $\lim_{m\to\infty} \mu(A_{m,n}) = \mu(X)$。因此，存在 $m_n \in \mathbf{Z}^+$ 使得

2.87 $$\mu(X) - \mu(A_{m_n,n}) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

让

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m_n,n}.$$

然后

$$\begin{aligned}
\mu(X \setminus E) &= \mu\Big(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m_n,n}\Big)\\
&= \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_{m_n,n})\Big)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X \setminus A_{m_n,n})\\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由 2.87 推得。

为了完成证明，我们必须验证 f_1、f_2、$\cdots$ 在 E 上一致收敛于 f。为此，假设 $\varepsilon' > 0$。令 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得 $\frac{1}{n} < \varepsilon'$。那么 $E \subseteq A_{m_n,n}$，-这意味着

$$|f_k(x) - f(x)| < \tfrac{1}{n} < \varepsilon'$$

对于所有 $k \geq m_n$ 和所有 $x \in E$，因此 f_1，f_2，... 确实在 E 上一致收敛到 f。 ■

通过简单函数的近似

2.88 定义 *simple function*

如果一个函数只取有限多个值，则称其为*simple*。

假设 $(X,\mathcal{S})$ 是一个可测空间，$f\colon X\to\mathbf{R}$ 是一个简单函数，且 $c_1,\dots,c_n$ 是 f 的不同非零值。那么

$$f=c_1\chi_{E_1}+\cdots+c_n\chi_{E_n},$$

其中 $E_k=f^{-1}(\{c_k\})$。因此，当且仅当 E_1，...，$E_n\in\mathcal{S}$ (时，这个函数 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，如你应当验证的那样)。

2.89 *approximation by simple functions*

设（$X,\mathcal{S}$）是一个可测空间，且 $f\colon X\to[-\infty,\infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测的。则存在一个从 X 到 R 的函数序列 $f_1,f_2,\dots$，使得

(a) 每个 f_k 都是一个简单的 $\mathcal{S}$-可测函数;

(b) $|f_k(x)|\le|f_{k+1}(x)|\le|f(x)|$ for all $k\in\mathbf{Z}^+$ and all $x\in X$;

(c) $\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$ 对每个 $x\in X$;

(d) $f_1,f_2,\dots$ 在 X 上一致收敛到 f，如果 f 有界。

证明 证明的思想是：对于每个 $k\in\mathbf{Z}^+$ 和 $n\in\mathbf{Z}$，区间 $[n,n+1)$ 被划分为 2^k 个大小相等的半开子区间。若 $f(x)\in[0,k]$，我们将 $f_k(x)$ 定义为 $f(x)$ 所落入的子区间的左端点；若 $f(x)\in[-k,0)$，我们将 $f_k(x)$ 定义为 $f(x)$ 所落入的子区间的右端点；若 $|f(x)|>k$，我们将 $f_k(x)$ 定义为 $\pm k$。具体地，令

$$f_k(x)=\begin{cases}\frac{m}{2^k} & \text{if } 0\le f(x)\le k \text{ and } m\in\mathbf{Z} \text{ is such that } f(x)\in\left[\frac{m}{2^k},\frac{m+1}{2^k}\right),\\ \frac{m+1}{2^k} & \text{if } -k\le f(x)<0 \text{ and } m\in\mathbf{Z} \text{ is such that } f(x)\in\left[\frac{m}{2^k},\frac{m+1}{2^k}\right),\\ k & \text{if } f(x)>k,\\ -k & \text{if } f(x)<-k.\end{cases}$$

每个 $f^{-1}([\frac{m}{2^k},\frac{m+1}{2^k}))\in\mathcal{S}$，因为 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。因此，每个 f_k 都是一个 $\mathcal{S}$-可测的简单函数；换言之，(a) 成立。

此外，(b) 之所以成立，是因为我们对 f_k 的定义。

f_k 的定义意味着

2.90 $$|f_k(x)-f(x)|\le\frac{1}{2^k}\quad\text{for all } x\in X \text{ such that } f(x)\in[-k,k].$$

由此可见，(c)成立。

最后，2.90 表明 (d) 成立。

卢津定理

我们的下一个结果令人惊讶。它表明，任意的 Borel 可测函数是几乎连续的，意思是说，将其限制在一个大的闭集上是连续的。这里，短语 *large closed set* 的意思是，我们可以使该闭集的补集具有任意小的测度。

Nikolai Luzin (1883–1950) proved the theorem below in 1912. Most mathematics literature in English refers to the result below as 卢津定理. However, 卢津 is the correct transliteration from Russian into English; 卢津 is the transliteration into German.

注意对……的解释

卢津定理的结论是，$f|_B$ 在 B 上是一个连续函数。这并不等同于说 f (在其原始定义域) 上在 B 的每一点都是连续的。例如，$\chi_{\mathbf{Q}}$ 在 R 的每一点处都是不连续的。然而，$\chi_{\mathbf{Q}}|_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}$ 在 R \ Q 上是一个连续函数（因为该函数在其定义域上恒等于 0）。

2.91 *Luzin's Theorem*

假设 $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 是一个 Bore 可测函数。那么对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个闭集 $F \subseteq \mathrm{R}$，使得 $|\mathrm{R} \setminus F| < \varepsilon$ 并且 $g|_F$ 是 F 上的连续函数。

证明 首先考虑这样一个特殊情形：$g = d_1\chi_{D_1} + \cdots + d_n\chi_{D_n}$，其中存在一些互不相同的非零 $d_1, \ldots, d_n \in \mathrm{R}$，以及一些互不相交的 Borel 集 $D_1, \ldots, D_n \subseteq \mathrm{R}$。假设 $\varepsilon > 0$。对每个 $k \in \{1, \ldots, n\}$，存在（由 2.71）一个闭集 $F_k \subseteq D_k$ 和一个开集 $G_k \supseteq D_k$，使得

$$|G_k \setminus D_k| < \frac{\varepsilon}{2n} \quad \text{and} \quad |D_k \setminus F_k| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

因为$G_k \setminus F_k = (G_k \setminus D_k) \cup (D_k \setminus F_k)$，对于每个$k \in \{1, \ldots, n\}$，我们有 $|G_k \setminus F_k| < \frac{\varepsilon}{n}$。

让

$$F = \Big(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\Big) \cup \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbf{R} \setminus G_k).$$

那么 F 是 R 的一个闭子集，且 $\mathrm{R} \setminus F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(G_k \setminus F_k)$。因此 $|\mathrm{R} \setminus F| < \varepsilon$。

因为 $F_k \subseteq D_k$，我们看到 g 在 F_k 上恒等于 d_k。因此 $g|_{F_k}$ 对每个 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 都是连续的。因为

$$\bigcap_{k=1}^{n} (\mathbf{R} \setminus G_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbf{R} \setminus D_k),$$

我们看到 g 在 $\bigcap_{k=1}^{n}(\mathrm{R} \setminus G_k)$ 上恒等为 0。因此 $g|_{\bigcap_{k=1}^{n}(\mathbf{R}\setminus G_k)}$ 是连续的。综合以上，我们得出 $g|_F$ 是连续的（使用本节的练习 9），从而完成了这一特殊情形下的证明。

现在考虑一个任意的 Borel 可测函数 $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$。由 2.89，存在一个由从 R 到 R 的函数组成的序列 $g_1, g_2, \ldots$，它在 R 上逐点收敛到 g，其中每个 g_k 都是一个简单的 Borel 可测函数。

假设 $\varepsilon > 0$。根据已经证明的特例，对于每个 $k \in \mathrm{Z}^+$，存在一个闭集合 $C_k \subseteq \mathrm{R}$，使得 $|\mathrm{R} \setminus C_k| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ 且 $g_k|_{C_k}$ 是连续的。设

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

因此，C 是一个闭集，并且 $g_k|_C$ 对于每一个 $k \in \mathrm{Z}^+$ 都是连续的。请注意

$$\mathbf{R} \setminus C = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbf{R} \setminus C_k);$$

因此 $|\mathrm{R} \setminus C| < \frac{\varepsilon}{2}$。

对于每个 $m \in \mathrm{Z}$，序列 $g_1|_{(m,m+1)}$，$g_2|_{(m,m+1)}$，…… 在 $(m,\ m+1)$ 上逐点收敛到 $g|_{(m,m+1)}$。因此，根据埃戈罗夫定理（2.85），对于每个 $m \in \mathrm{Z}$，存在一个 Borell 集合 $E_m \subseteq (m,\ m+1)$，使得 g_1，g_2，…… 在 E_m 上一致收敛到 g。

$$|(m, m+1) \setminus E_m| < \frac{\varepsilon}{2^{|m|+3}}.$$

因此 g_1，g_2，…… 在 $C \cap E_m$ 上对于每个 $m \in \mathrm{Z}$ 一致收敛到 g。因为每个 $g_k|_C$ 都是连续的，我们得出结论（使用 2.84）$g|_{C\cap E_m}$ 对于每个 $m \in \mathrm{Z}$ 是连续的。因此 $g|_D$ 是连续的，其中

$$D = \bigcup_{m\in\mathbf{Z}} (C \cap E_m).$$

因为

$$\mathbf{R} \setminus D \subseteq \mathbf{Z} \cup \Big(\bigcup_{m\in\mathbf{Z}} ((m, m+1) \setminus E_m) \Big) \cup (\mathbf{R} \setminus C),$$

我们有$|\mathrm{R} \setminus D| < \varepsilon$。

存在一个闭集 $F \subseteq D$，使得 $|D \setminus F| < \varepsilon - |\mathrm{R} \setminus D|$ (通过 2.65)。现在

$$|\mathbf{R} \setminus F| = |(\mathbf{R} \setminus D) \cup (D \setminus F)| \le |\mathbf{R} \setminus D| + |D \setminus F| < \varepsilon.$$

因为连续函数在较小定义域上的限制仍然是连续的，$g|_F$ 是连续的，从而完成了证明。

W我们需要下面的结果来得到卢津定理的另一种版本。 eorem.

2.92 ***continuous extensions of continuous functions***

- 定义在 R 的闭子集上的每一个连续函数都可以延拓为定义在整个 R 上的连续函数。
- 更准确地说，如果 $F \subseteq \mathrm{R}$ 是闭的，且 $g : F \to \mathrm{R}$ 是连续的，那么存在一个连续函数 $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$，使得 $h|_F = g$。

证明 假设 $F \subseteq \mathrm{R}$ 是闭的，且 $g : F \to \mathrm{R}$ 是连续的。因此 $\mathrm{R} \setminus F$ 是一族两两不相交的开区间 $\{I_k\}$ 的并。对于每个形如 (a, ∞) 或形如 $(-\infty, a)$ 的区间，对区间中的所有 x 定义 $h(x) = g(a)$。

对于每个形如 (b, c) 且具有 $b < c$ 和 b 的区间 I_k，$c \in \mathrm{R}$，定义 h 在 $[b, c]$ 上为线性函数，使得 $h(b) = g(b)$ 且 $h(c) = g(c)$。

定义$h(x) = g(x)$，适用于所有$x \in \mathrm{R}$，其中$h(x)$未被前两段定义。然后$h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$是连续的，并且$h|_F = g$。 ■

下一个结果给出了一个稍微修改过的方式来表述Luzin定理。你可以将这个版本理解为：一个Borel可测函数的值可以在一个Lebesgue测度较小的集合上被改变，从而得到一个连续函数。

2.93 *Luzin's Theorem, second version*

假设 $E \subseteq \mathrm{R}$ 且 $g : E \to \mathrm{R}$ 是一个 Borel 可测函数。那么对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个闭集 $F \subseteq E$ 和一个连续函数 $h : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$，使得 $|E \setminus F| < \varepsilon$ 和 $h|_F = g|_F$。

专业版假设 $\varepsilon > 0$。将 g 扩展为一个函数 $\tilde{g} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$，通过定义 进行

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in E, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbf{R} \setminus E. \end{cases}$$

根据卢津定理（2.91）的第一种版本，存在一个闭集 $C \subseteq \mathrm{R}$，使得 $|\mathrm{R} \setminus C| < \varepsilon$，并且 $\tilde{g}|_C$ 在 C 上是一个连续函数。存在一个闭集 $F \subseteq C \cap E$，使得 $|(C \cap E) \setminus F| < \varepsilon - |\mathrm{R} \setminus C|$ (by 2.65)。因此

$$|E \setminus F| \leq \big|\big((C \cap E) \setminus F\big) \cup (\mathbf{R} \setminus C)\big| \leq |(C \cap E) \setminus F| + |\mathbf{R} \setminus C| < \varepsilon.$$

现在$\tilde{g}|_F$是F上的连续函数。另外，$\tilde{g}|_F = g|_F$ (，因为$F \subseteq E$)。使用2.92将$\tilde{g}|_F$扩展为连续函数h：$\mathrm{R} \to \mathrm{R}$。 ■

The building at Moscow State University where the mathematics seminar organized by Egorov and Luzin met. Both Egorov and Luzin had been students at Moscow State University and then later became faculty members at the same institution. Luzin's PhD thesis advisor was Egorov.

勒贝格可测函数

2.94 定义 ***Lebesgue measurable function***

一个函数 $f: A \to \mathbf{R}$，其中 $A \subseteq \mathbf{R}$，若对每一个 Borel 集 $B \subseteq \mathbf{R}$，$f^{-1}(B)$ 是一个勒贝格可测集，则称其为 *Lebesgue measurable*。

如果 $f: A \to \mathbf{R}$ 是一个勒贝格可测函数，那么 A 是 $\mathbf{R}$ 的一个勒贝格可测子集[因为 $A = f^{-1}(\mathbf{R})$]。如果 A 是 $\mathbf{R}$ 的一个勒贝格可测子集，那么上述定义就是一个 $\mathcal{S}$-可测函数的标准定义，其中 $\mathcal{S}$ 是 A 的所有勒贝格可测子集所构成的 σ-代数。

以下列表总结并回顾了一些关键的定义和结果：

- Borel 集是 $\mathbf{R}$ 上包含所有开子集的最小 σ-algebra 中的一个元素。
- 一个勒贝格可测集合是$\mathbf{R}$上最小的σ-代数的元素，该代数包含了$\mathbf{R}$的所有开子集和所有外测度为0的$\mathbf{R}$子集。
- 术语 *Lebesgue set* 与术语 *Borel set* 相对应是很合理的。然而，*Lebesgue set* 另有含义，因此我们需要使用 *Lebesgue measurable set*。
- 每个勒贝格可测集都与某个博雷尔集只相差一个外测度为 0 的集合。这个博雷尔集可以取为包含在该勒贝格可测集之内，或者取为包含该勒贝格可测集。
- 将外测度限制在 Borel 集的 σ-代数上，称为勒贝格测度。
- 将外测度限制在勒贝格可测集合的 σ-代数上，也称为勒贝格测度。
- 外测度不是定义在 $\mathbf{R}$ 的所有子集的 σ-代数上的一个测度。
- 一个函数 $f: A \to \mathbf{R}$，其中 $A \subseteq \mathbf{R}$，若对每一个 Borel 集 $B \subseteq \mathbf{R}$，$f^{-1}(B)$ 都是一个 Borel 集，则称其为 Borel 可测。
- 一个函数 $f: A \to \mathbf{R}$，其中 $A \subseteq \mathbf{R}$，若对每个 Borel 集 $B \subseteq \mathbf{R}$，$f^{-1}(B)$ 都是勒贝格可测集，则称该函数为勒贝格可测的。

尽管存在不是博雷尔集的勒贝格可测集，但你几乎不可能遇到这样的集合。类似地，一个不是博雷尔可测的勒贝格可测函数，在你所做的任何事情中也几乎不会出现。为简化关于勒贝格可测函数通过博雷尔集的逆像来定义所可能引起的混淆，一个很好的做法是只考虑博雷尔可测函数。

> *"Passing from Borel to Lebesgue measurable functions is the work of the devil. Don't even consider it!"*
> *–Barry Simon (winner of the American Mathematical Society Steele Prize for Lifetime Achievement), in his five-volume series* 分析学综合课程

下一个结果表明，如果我们采纳这样一种观点：发生在外测度为 0 的集合上的事情并不重要，那么我们不妨将注意力限制在 Borel 可测函数上。

"He professes to have received no sinister measure."
– 度量与度量, *by William Shakespeare*

2.95 *every Lebesgue measurable function is almost Borel measurable*

假设 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个勒贝格可测函数。那么，存在一个 Bore 可测函数 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得

$$|\{x \in \mathbf{R} : g(x) \neq f(x)\}| = 0.$$

证明 存在一列从 R 到 R 的勒贝格可测简单函数 $f_1, f_2, \cdots$，它们在 R 上逐点收敛到 f (，由 2.89) 可知。设 $k \in \subset \mathbf{Z}^+$。则存在 $c_1, \cdots, c_n \in \subset \mathbf{R}$ 以及两两不交的勒贝格可测集合 $A_1, \cdots, A_n \subseteq \subset \mathbf{R}$，使得

$$f_k = c_1\chi_{A_1} + \cdots + c_n\chi_{A_n}.$$

对于每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，存在一个 Borels 集合 $B_j \subseteq A_j$，使得 $|A_j \setminus B_j| = 0$ [由 2.71 中 (a) 和 (d) 的等价性得到]. 设

$$g_k = c_1\chi_{B_1} + \cdots + c_n\chi_{B_n}.$$

则 g_k 是一个 Borel 可测函数，并且 $|\{x \in \mathbf{R} : g_k(x) \neq f_k(x)\}| = 0$。

如果 $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in \mathbf{R} : g_k(x) \neq f_k(x)\}$，则 $g_k(x) = f_k(x)$ 对所有 $k \in \mathbf{Z}^+$ 成立，因此 $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)$。

$$E = \{x \in \mathbf{R} : \lim_{k\to\infty} g_k(x) \text{ exists in } \mathbf{R}\}.$$

于是 E 是 R 的一个 Borel 子集 [根据第2B节练习14(b)]。另外，

$$\mathbf{R} \setminus E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in \mathbf{R} : g_k(x) \neq f_k(x)\}$$

因此 $|\mathbf{R} \setminus E| = 0$。对于 $x \in \mathbf{R}$，令

2.96
$$g(x) = \lim_{k\to\infty}(\chi_E g_k)(x).$$

如果 $x \in E$，那么根据 E 的定义，上述极限存在；如果 $x \in \mathbf{R} \setminus E$，那么上述极限存在，因为 $(\chi_E g_k)(x) = 0$ 对于所有 $k \in \mathbf{Z}^+$.

对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，函数 $\chi_E g_k$ 是 Borel 可测的。因此，2.96 蕴含 g 是一个 Borel 可测函数（由 2.48）。因为

$$\{x \in \mathbf{R} : g(x) \neq f(x)\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x \in \mathbf{R} : g_k(x) \neq f_k(x)\},$$

我们有 $|\{x \in \mathbf{R} : g(x) \neq f(x)\}| = 0$，完成证明。 ■

练习 2E

1 假设 X 是一个有限集合。解释为什么从 X 到 R 的一列函数，在 X 上逐点收敛，也在 X 上均匀收敛。

2 给出一个从 Z^+ 到 R 的函数序列的例子，该序列在 Z^+ 上逐点收敛，但在 Z^+ 上不一致收敛。

给出一个从[0, 1]到R的连续函数序列f_1，f_2，...，它逐点收敛到一个函数f: [0, 1] $\to$ R，而这个函数不是有界的。

4 证明或给出反例：如果 $A\subseteq$ 属于 R 且 f_1、f_2、... 是从 A 到 R 的一列一致连续的函数，并且该序列一致收敛于一个函数 $f: A\to\to$ R，那么 f 在 A 上是一致连续的。

举例说明，当没有假设 $\mu(X)<\infty$ 时，Egorov 定理可能会失败。

6 设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是具有 $\mu(X)<\infty$ 的测度空间。设 f_1, f_2, ... 是从 X 到 R 的一列 $\mathcal{S}$-可测函数，使得对于每个 $x\in X$，$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=\infty$。证明，对于每个 $\varepsilon>0$，存在一个集合 $E\in\mathcal{S}$，使得 $\mu(X\setminus E)<\varepsilon$ 且 f_1, f_2, ... 在 E (上一致收敛于 ∞，意味着对于每个 $t>0$，存在 $n\in Z^+$，使得对于所有整数 $k\geq n$ 和所有 $x\in E$)，有 $f_k(x)>t$。

[*The exercise above is an Egorov-type theorem for sequences of functions that converge pointwise to* ∞.]

7 设 F 是 R 的一个闭有界子集，且 $g_1, g_2, \ldots$ 是定义在 F (上的连续实值函数的一个递增序列，因此对所有 $x\in F$) 有 $g_1(x)\leq g_2(x)\leq\cdots$，并且对每个 $x\in F$，$\sup\{g_1(x), g_2(x), \ldots\}<\infty$。在 F 上定义一个实值函数 g 为

$$g(x)=\lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

证明 g 在 F 上连续，当且仅当 $g_1, g_2, \ldots$ 在 F 上一致收敛于 g。

[*The result above is called Dini's Theorem.*]

8 假设 μ 是在 $(Z^+, 2^{Z^+})$ 上定义的测度，定义为

$$\mu(E)=\sum_{n\in E}\frac{1}{2^n}.$$

证明，对于每个 $\varepsilon>0$，都存在一个集合 $E\subseteq Z^+$，使得 $\mu(Z^+\setminus E)<\varepsilon$，并且$f_1$，$f_2$，... 在 E 上对每个从 Z^+ 到 R 的函数序列 f_1，f_2，... 都一致收敛于 Z^+。

[*This result does not follow from Egorov's Theorem because here we are asking for E to depend only on* ε. *In Egorov's Theorem, E depends on* ε *and on the sequence* $f_1, f_2, \ldots$.]

9 设 $F_1, \ldots, F_n$ 是 R 的互不相交的闭子集。证明如果

$$g\colon F_1 \cup \cdots \cup F_n \to \mathbf{R}$$

是一个函数，使得对每个 $k \in \{1, \ldots, n\}$，$g|_{F_k}$ 都是连续函数，则 g 是连续函数。

10 假设 $F \subseteq$ R 具有如下性质：从 F 到 R 的每个连续函数都可以扩展为从 R 到 R 的连续函数。证明 F 是 R 的一个闭子集。

11 证明或给出一个反例：如果 $F \subseteq$ R 具有这样的性质：从 F 到 R 的每一个有界连续函数都可以扩展为从 R 到 R 的连续函数，那么 F 是 R 的一个闭子集。

12 举一个从 R 到 R 的 Borel 可测函数 f 的例子，使得不存在一个集合 $B \subseteq$ R，使得 $|\mathrm{R} \setminus B| = 0$，且 $f|_B$ 在 B 上是连续函数。

13 证明或给出一个反例：如果对每个 $t \in$ R，f_t : R $\to$ R 是一个 Borel 可测函数，并且 f: R $\to (-\infty, \infty]$ 被定义为

$$f(x) = \sup\{f_t(x) : t \in \mathbf{R}\},$$

则 f 是一个 Borel 可测函数。

14 假设 $b_1, b_2, \ldots$ 是一个实数序列。定义 f: R $\to [0, \infty]$ 如下定义

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k |x - b_k|} & \text{if } x \notin \{b_1, b_2, \ldots\}, \\ \infty & \text{if } x \in \{b_1, b_2, \ldots\}. \end{cases}$$

证明 $|\{x \in \mathrm{R} : f(x) < 1\}| = \infty$。

[*This exercise is a variation of a problem originally considered by Borel. If* $b_1, b_2, \ldots$ *contains all the rational numbers, then it is not even obvious that* $\{x \in \mathrm{R} : f(x) < \infty\} \neq \varnothing$.]

15 假设 B 是一个 Borel 集，且 f: $B \to$ R 是一个勒贝格可测函数。证明存在一个 Borel 可测函数 $g : B \to$ R，使得

$$|\{x \in B : g(x) \neq f(x)\}| = 0.$$

Chapter 3
Integration

为弥补第1B节中讨论的黎曼积分的不足，在上一章中我们将测度论作为区间长度概念的扩展加以发展。在证明了有关测度的基本结果之后，我们现在已准备好利用测度来发展相对于测度的积分。

正如我们将看到的，这种新的积分方法解决了黎曼积分的许多问题。尤其是，我们将建立关于交换极限与积分的良好定理。

Statue in Milan of Maria Gaetana Agnesi,
who in 1748 published one of the first calculus textbooks.
A translation of her book into English was published in 1801.
In this chapter, we develop a method of integration more powerful
than methods contemplated by the pioneers of calculus.

3A 关于度量的积分

非负函数的积分

我们将首先定义一个非负函数关于度量的积分。然后通过将一个实值函数写成两个非负函数的差，我们将定义一个实值函数关于度量的积分。我们从以下定义开始这个过程。

3.1 定义 $\mathcal{S}$*-partition*

假设 $\mathcal{S}$ 是集合 X 上的 σ-代数。$\mathcal{S}$*-partition* 的 X 是一个有限集合 $A_1, \dots,$ A_m，其中包含 $\mathcal{S}$ 中的互不相交的集合，满足 $A_1 \cup \cdots \cup A_m = X$。

下一个定义应当会让你想起下黎曼和的定义（见 1.3）。然而，现在我们处理的是一个任意的测度，并且

We adopt the convention that $0 \cdot \infty$ *and* $\infty \cdot 0$ *should both be interpreted to be* 0.

因此，X 不必是 R 的子集。更重要的是，即使在 X 是 R 中的闭区间 $[a, b]$，且 μ 是 $[a, b]$ 上 Borel 子集的勒贝格测度的情况下，下面定义中的集合 A_1，...，A_m 也不必是 $[a, b]$ 的子区间——它们只需要是 Borel 集合。

3.2 定义 *lower Lebesgue sum*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$f\colon X \to [0, \infty]$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，且 P 是 $\mathcal{S}$-划分 $A_1, \dots, A_m$ 的 X。*lower Lebesgue sum* $\mathcal{L}(f, P)$ 定义为

$$\mathcal{L}(f, P) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) \inf_{A_j} f.$$

假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间。我们将关于 μ 的一个 $\mathcal{S}$-可测函数 f 的积分记为 $\int f \,d\mu$。我们对积分的基本要求是：我们希望对所有 $E \in \mathcal{S}$，$\int \chi_E \,d\mu$ 等于 $\mu(E)$，并且我们希望 $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$。正如我们将看到的，下面的定义满足这两个要求（尽管这并不明显）。从积分等于函数图像下方面积的角度思考为什么下面的定义是合理的（在 R 的一个区间上的勒贝格测度这一特殊情形下）。

3.3 定义 *integral of a nonnegative function*

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $f\colon X \to [0, \infty]$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。相对于 μ 的 f 的 *integral*，记为 $\int f \,d\mu$，定义为

$$\int f \,d\mu = \sup\{\mathcal{L}(f, P) : P \text{ is an } \mathcal{S}\text{-partition of } X\}.$$

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $f\colon X \to [0, \infty]$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。每个 $\mathcal{S}$-划分 $A_1, \dots, A_m$ 的 X 都导致通过 $\mathcal{S}$-可测简单函数 $\sum_{j=1}^{m} (\inf_{A_j} f)\chi_{A_j}$ 从下方对 f 的逼近。这表明

$$\sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) \inf_{A_j} f$$

应该是我们直观概念中 $\int f \,\mathrm{d}\mu$ 的下界近似。取这些近似的上确界得到我们对 $\int f \,\mathrm{d}\mu$ 的定义。

下面的结果给出了我们对积分进行求值的第一个例子。

3.4 *integral of a characteristic function*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $E \in \mathcal{S}$。那么

$$\int \chi_E \,\mathrm{d}\mu = \mu(E).$$

证明 若 P 是 X 的一个 $\mathcal{S}$-划分，由 E 及其补集 $X \setminus E$ 构成，则显然有 $\mathcal{L}(\chi_E, P) = \mu(E)$。因此 $\int \chi_E \,\mathrm{d}\mu \geq \mu(E)$。

为了证明不等式的另一个方向，假设 P 是 $\mathcal{S}$ 的划分 $A_1, \dots, A_m$ 的 X。则 $\mu(A_j) \inf_{A_j} \chi_E$ 若 $A_j \subseteq E$，则等于 $\mu(A_j)$，否则等于 0。因此

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\chi_E, P) &= \sum_{\{j\,:\,A_j \subseteq E\}} \mu(A_j) \\
&= \mu\Big(\bigcup_{\{j\,:\,A_j \subseteq E\}} A_j\Big) \\
&\leq \mu(E).
\end{aligned}$$

因此 $\int \chi_E \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(E)$，完成证明。 ■

The symbol d *in the expression* $\int f\,\mathrm{d}\mu$ *has no independent meaning, but it often usefully separates* f *from* μ*. Because the* d *in* $\int f\,\mathrm{d}\mu$ *does not represent another object, some mathematicians prefer typesetting an upright* d *in this situation, producing* $\int f\,\mathrm{d}\mu$*. However, the upright* d *looks jarring to some readers who are accustomed to italicized symbols. This book takes the compromise position of using slanted* d *instead of math-mode italicized* d *in integrals.*

3.5 示例 *integrals of* $\chi_{\mathbf{Q}}$ *and* $\chi_{[0,1] \setminus \mathbf{Q}}$

假设 λ 是 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度。作为上述结果的一个特例，我们有 $\int \chi_{\mathbf{Q}} \,\mathrm{d}\lambda = 0$（因为 $|\mathbf{Q}| = 0$）。回顾一下，$\chi_{\mathbf{Q}}$ 在区间 $[0, 1]$ 上不是黎曼可积的。因此，即使在我们关于相对于测度进行积分的理论发展的这一早期阶段，我们也已经修正了黎曼积分的一个缺陷。

请注意，3.4 还意味着 $\int \chi_{[0,1] \setminus \mathbf{Q}} \,\mathrm{d}\lambda = 1$（因为 $|[0, 1] \setminus \mathbf{Q}| = 1$），这是我们想要的。相比之下，$\chi_{[0,1] \setminus \mathbf{Q}}$ 在 $[0, 1]$ 上的下黎曼积分等于 0，这不是我们想要的。

3.6 示例 *integration with respect to counting measure is summation*

假设 μ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度，且 $b_1, b_2, \ldots$ 是一列非负数。将 b 视为从 $\mathbf{Z}^+$ 到 $[0, \infty)$ 的函数，其定义为 $b(k) = b_k$。则

$$\int b \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

正如你应当核实的那样。

关于测度的积分可以称为 *Lebesgue integration*。下一个结果表明，勒贝格积分在由互不相交集合的示性函数的线性组合表示的简单函数上具有预期的行为。

3.7 *integral of a simple function*

假设（X，$\mathcal{S}$，μ）是一个测度空间，E_1，$\cdots$，E_n 是 $\mathcal{S}$ 中的互不相交的集合，并且 c_1，$\cdots$，$c_n \in [0$，$\infty]$。则

$$\int \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}\Big) \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k).$$

证明 不失一般性，我们可以假设 $E_1, \ldots, E_n$ 是 X 的一个 $\mathcal{S}$-划分 [通过将 n 替换为 $n+1$，并将 $E_{n+1} = X \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_n)$ 和 $c_{n+1} =$ 设为 0]。

如果 P 是 X 的 $\mathcal{S}$-划分 E_1, $\cdots$, E_n，则 $\mathcal{L}\big(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$，$P\big) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k)$。因此

$$\int \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}\Big) \, d\mu \geq \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k).$$

为了证明不等式在相反方向上的成立，假设 P 是 X 的一个 $\mathcal{S}$-划分 $A_1, \ldots, A_m$。则

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}, P\Big) &= \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) \min_{\{i \colon A_j \cap E_i \neq \varnothing\}} c_i \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_j \cap E_k) \min_{\{i \colon A_j \cap E_i \neq \varnothing\}} c_i \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_j \cap E_k) c_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j \cap E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k).
\end{aligned}$$

上述不等式表明 $\int \big(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}\big) \, d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k)$，从而完成证明。

下一个简单的结果给出了积分的一个并不令人意外的性质。

3.8 *integration is order preserving*

设（X，$\mathcal{S}$，μ）是一个测度空间，且 f，g：$X \to [0, \infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测函数，使得对所有 $x \in X$ 有 $f(x) \le g(x)$。则 $\int f\, d\mu \le \int g\, d\mu$。

证明 假设 P 是 X 的一个 $\mathcal{S}$-划分 $A_1, \ldots, A_m$。则

$$\inf_{A_j} f \le \inf_{A_j} g$$

对于每个 $j = 1$，$\cdots$，m。因此 $\mathcal{L}(f,\ P) \le \mathcal{L}(g,\ P)$。于是 $\int f\, d\mu \le \int g\, d\mu$。■

单调收敛定理

为了证明单调收敛定理（以及若干其他结果），我们需要使用下面对非负函数积分定义的一个温和的重述。

3.9 *integrals via finite simple functions*

假设（X，$\mathcal{S}$，μ）是一个测度空间，且 $f : X \to [0,\ \infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测的。那么

3.10
$$\int f\, d\mu = \sup\Big\{\sum_{j=1}^{m} c_j \mu(A_j) : A_1, \ldots, A_m \text{ are disjoint sets in } \mathcal{S},\ c_1, \ldots, c_m \in [0, \infty), \text{ and } f(x) \ge \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}(x) \text{ for every } x \in X\Big\}.$$

证明 首先注意到，3.10的左侧大于或等于右侧，依据3.7和3.8。

为了证明3.10右侧大于或等于左侧，首先假设对于每个$A \in \mathcal{S}$，当$\mu(A) >$ 为0时，$\inf_A f < \infty$。然后对于P，一个$\mathcal{S}$-划分A_1，…，A_m的非空子集X，取$c_j = \inf_{A_j} f$，这表明$\mathcal{L}(f,\ P)$在3.10右侧的集合中。因此，$\int f\, d\mu$的定义表明3.10右侧大于或等于左侧。

唯一剩下需要考虑的情况是存在一个集合 $A \in \mathcal{S}$，使得 $\mu(A) > 0$ 且 $\inf_A f = \infty$ [这意味着对于所有 $x \in A$，都有 $f(x) = \infty$]。在这种情况下，对于任意 $t \in (0,\ \infty)$，我们可以取 $m = 1$，$A_1 = A$，和 $c_1 = t$。这些选择表明 3.10 的右侧至少为 $t\mu(A)$。因为 t 是一个任意的正数，这表明 3.10 的右侧等于 ∞，显然它大于或等于左侧，从而完成了证明。

■

接下来的结果允许我们在某些情况下交换极限和积分。我们将在下一节看到更多此类定理。

3.11 *Monotone Convergence Theorem*

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ 是一列 $\mathcal{S}$-可测函数的递增序列。定义 $f : X \to [0, \infty]$ 为

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

然后

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

证明 根据2.53，函数f是$\mathcal{S}$-可测的。

因为每个$x \in X$都有$f_k(x) \leq f(x)$，我们有$\int f_k \, d\mu \leq \int f \, d\mu$对于每个$k \in \mathbf{Z}^+$ (by 3.8)。因此，$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu \leq \int f \, d\mu$。

为了证明不等式的另一方向，假设 A_1，...，A_m 是 $\mathcal{S}$ 中的不相交集合，而 c_1，...，$c_m \in [0，\infty)$ 是满足以下条件的集合

3.12 $$f(x) \geq \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}(x) \quad \text{for every } x \in X.$$

让 $t \in (0, 1)$。对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，令

$$E_k = \Big\{x \in X : f_k(x) \geq t \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}(x)\Big\}.$$

然后 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是一个递增的集合序列，属于 $\mathcal{S}$，其并集等于 X。因此，对于每个 $j \in \{1, \ldots, m\}$ (，$\lim_{k\to\infty} \mu(A_j \cap E_k) = \mu(A_j)$ 为 2.59)。

如果 $k \in \mathbf{Z}^+$，则

$$f_k(x) \geq \sum_{j=1}^{m} t c_j \chi_{A_j \cap E_k}(x)$$

对于每个 $x \in X$。因此（通过 3.9）

$$\int f_k \, d\mu \geq t \sum_{j=1}^{m} c_j \mu(A_j \cap E_k).$$

取上述不等式两边的极限 $k \to \infty$ 得到

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu \geq t \sum_{j=1}^{m} c_j \mu(A_j).$$

现在令 t 增加到 1，取极限可以看出

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu \geq \sum_{j=1}^{m} c_j \mu(A_j).$$

取上述不等式对所有$\mathcal{S}$划分A_1，...，A_m的X以及所有c_1，...，$c_m \in[0，\infty)$满足3.12的情况取上确界（使用3.9），得出$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu \geq \int f \, d\mu$，完成证明。 ∎

积分具有可加性的证明将使用单调收敛定理以及我们的下一个结果。将一个简单函数 $h : X \to [0, \infty]$ 表示为 $\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ 的形式并不是唯一的。要求数 $c_1, \ldots, c_n$ 彼此不同，并且集合 $E_1, \ldots, E_n$ 非空、两两不交且满足 $E_1 \cup \cdots \cup E_n = X$，即可得到所谓简单函数的 *standard representation*［取 $E_k = h^{-1}(\{c_k\})$，其中 $c_1, \ldots, c_n$ 是 h 的不同取值］。下面的引理表明，简单可测函数的所有表示（包括包含不互不相交集合的表示）都会给出与积分所期望的相同的和。

3.13 ***integral-type sums for simple functions***

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间。设 $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in$ 位于 $[0, \infty]$，并且 $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{S}$ 满足 $\sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j} = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{B_k}$。则

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{n} b_k \mu(B_k).$$

证明 我们假设 $A_1 \cup \cdots \cup A_m = X$ (，否则添加项 $0\chi_{X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m)}$)。设 A_1 和 A_2 不是不相交的。则我们可以写

3.14 $$a_1 \chi_{A_1} + a_2 \chi_{A_2} = a_1 \chi_{A_1 \setminus A_2} + a_2 \chi_{A_2 \setminus A_1} + (a_1 + a_2) \chi_{A_1 \cap A_2},$$

其中，上述等式右侧出现的三个集合是互不相交的。

现在$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$和$A_2 = (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$；这些并集中的每一个都是不交并。于是$\mu(A_1) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)$和 $\mu(A_2) = \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_1 \cap A_2)$。因此

$$a_1 \mu(A_1) + a_2 \mu(A_2) = a_1 \mu(A_1 \setminus A_2) + a_2 \mu(A_2 \setminus A_1) + (a_1 + a_2) \mu(A_1 \cap A_2).$$

上述方程结合 3.14 表明，如果我们用三个互不相交的集合 $A_1 \setminus A_2$、$A_2 \setminus A_1$、$A_1 \cap A_2$ 替换两个集合 A_1、A_2，并对系数 a_1、...、a_m 作出适当调整，那么求和 $\sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j)$ 的值保持不变（尽管 m 增加了 1）。

在每一步之后，对 $A_1, \cdots\cdots, A_m$ 中所有相交的子集对重复这一过程；经过有限步，我们可以在不改变 $\sum^{m}$ 的值的情况下，将初始列表 $A_1, \cdots\cdots, A_m$ 转换为一组两两不相交的子集。
$_{j=1} a_j \mu(A_j)$.

下一步是使数 $a_1, \ldots, a_m$ 彼此不同。这是通过将对应于每个 a_j 的集合替换为这些集合的并集，并利用测度 μ 的有限可加性来证明和 $\sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j)$ 的值不发生变化。

最后，去掉所有满足 $A_j = \varnothing$ 的项，得到简单函数的标准表示。我们现在已经证明，$\sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j)$ 的原始值等于使用简单函数 $\sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$ 的标准表示时得到的值。同样的过程也可以用于表示 $\sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{B_k}$，从而证明 $\sum_{k=1}^{n} b_k \mu(B_k)$ 等于采用标准表示所得到的值。因此，函数 $\sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$ 与 $\sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{B_k}$ 的相等性蕴含等式 $\sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{n} b_k \mu(B_k)$。

现在我们可以证明，我们的积分定义对于那些可能无法用标准表示形式表达的简单可测函数是恰当的。下面的结果与 3.7 的主要不同在于，下面结果中的集合 $E_1, \ldots, E_n$ 不要求互不相交。与前一个结果一样，如果积分的线性已经被证明，那么下一个结果将会立即推出。

If we had already proved that integration is linear, then we could quickly get the conclusion of the previous result by integrating both sides of the equation $\sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j} = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{B_k}$ with respect to μ. However, we need the previous result to prove the next result, which is used in our proof that integration is linear.

3.15 *integral of a linear combination of characteristic functio ns*

设（X, $\mathcal{S}$, μ）是一个测度空间，E_1, . . ., $E_n \in \mathcal{S}$, 以及 c_1, . . ., $c_n \in [0, \infty]$。则

$$\int \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k} \Big)\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k).$$

证明 所需的结果可通过将简单函数 $\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ 写成简单函数的标准表示形式，然后应用 3.7 和 3.13 得到。

现在我们可以证明积分在非负函数上具有可加性。

3.16 *additivity of integration*

设 (X, $\mathcal{S}$, μ) 是一个测度空间，且 f, g 是从 $X \to$ 到 $[0, \infty]$ 的 $\mathcal{S}$-可测函数。则

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

证明 所需结论对简单的非负 $\mathcal{S}$-可测函数成立（由 3.15）。因此我们用这样的函数进行逼近。

具体而言，令f_1、f_2、……以及g_1、g_2、……为简单的非负$\mathcal{S}$-可测函数的递增序列，使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{and} \quad \lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$$

对于所有 $x \in X$ (，关于此类递增序列的存在性，见 2.89)。则

$$\begin{aligned}
\int (f+g)\, d\mu &= \lim_{k\to\infty} \int (f_k + g_k)\, d\mu \\
&= \lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu + \lim_{k\to\infty} \int g_k\, d\mu \\
&= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu,
\end{aligned}$$

其中第一和第三个等式由单调收敛定理推出，第二个等式由（3.15）得出。

下黎曼积分不是可加的，即使对于有界的非负可测函数也是如此。例如，如果$f = \chi_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}$ 和 $g = \chi_{[0,1]\setminus\mathbf{Q}}$，则

$$L(f,[0,1]) = 0 \quad \text{and} \quad L(g,[0,1]) = 0 \quad \text{but} \quad L(f+g,[0,1]) = 1.$$

相反，如果 λ 是 [0, 1] 上的 Borel 子集的勒贝格测度，则

$$\int f\,d\lambda = 0 \quad \text{and} \quad \int g\,d\lambda = 1 \quad \text{and} \quad \int (f+g)\,d\lambda = 1.$$

更一般地，我们刚刚证明了对于每个测度 μ 和所有非负可测函数f和 g，有 $\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu$。回想一下，关于测度的积分是通过下Lebesgue和的方式定义的，类似于下Riemann积分通过下Riemann和的定义（唯一的例外是允许可测集，而不仅仅是区间，在分割中）。然而，我们刚刚看到，相对于测度的积分（本可以称为下Lebesgue积分）具有比下Riemann积分更为优越的性质（可加性！）。

实值函数的积分

以下定义为我们提供了一种标准方法，将任意实值函数表示为两个非负函数的差。

3.17 定义 f^+; f^-

假设$f\colon X \to [-\infty,\infty]$ 是一个函数。通过以下方式定义从 X 到 $[0,\infty]$ 的函数 f^+ 和 f^-:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{if } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{if } f(x) < 0. \end{cases}$$

请注意，如果$f\colon X \to [-\infty,\infty]$ 是一个函数，那么

$$f = f^+ - f^- \quad \text{and} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

上述分解使我们能够将积分的定义扩展到取负值和正值的函数。

3.18 定义 *integral of a real-valued function;* $\int f\,\mathrm{d}\mu$

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间，且$f\colon X \to [-\infty,\infty]$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，并且 $\int f^+\,\mathrm{d}\mu$ 和 $\int f^-\,\mathrm{d}\mu$ 中至少有一个是有限的。f关于 μ 的 *integral*，记作 $\int f\,\mathrm{d}\mu$，定义为

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \int f^+\,\mathrm{d}\mu - \int f^-\,\mathrm{d}\mu.$$

如果$f \geq 0$，则$f^+ = f$和$f^- = 0$；因此该定义与之前的非负函数积分的定义一致。

条件 $\int |f|\,d\mu < \infty$ 等价于条件 $\int f^+\,d\mu < \infty$ 和 $\int f^-\,d\mu < \infty$ (，因为 $|f| = f^+ + f^-$)。

3.19 示例 *a function whose integral is not defined*

假设 λ 是 R 上的勒贝格测度，$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是由以下定义的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0, \\ -1 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

然后 $\int f\,d\lambda$ 没有定义，因为 $\int f^+\,d\lambda = \infty$ 和 $\int f^-\,d\lambda = \infty$。

下一个结果表明，一个数与函数的乘积的积分正如我们所期望的那样。

3.20 *integration is homogeneous*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ 是一个函数，使得 $\int f\,d\mu$ 被定义。如果 $c \in \mathbf{R}$，则

$$\int cf\,d\mu = c\int f\,d\mu.$$

证明 首先考虑f是一个非负函数且$c \geq$为0的情况。如果P是$\mathcal{S}$的X-分割，则显然有$\mathcal{L}(cf、P) = c\mathcal{L}(f、P)$。因此$\int cf\,d\mu = c\int f\,d\mu$。

现在考虑一般情况，其中 f 取值于 $[-\infty, \infty]$。假设 $c \geq 0$。那么

$$\begin{aligned}\int cf\,d\mu &= \int (cf)^+\,d\mu - \int (cf)^-\,d\mu \\ &= \int cf^+\,d\mu - \int cf^-\,d\mu \\ &= c\Big(\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\Big) \\ &= c\int f\,d\mu,\end{aligned}$$

其中第三行由本证明的第一段推出。

最后，现在假设 $c < 0$ （仍然假设 f 取值范围在 $[-\infty, \infty]$ 之间）。那么 $-c > 0$ 和

$$\begin{aligned}\int cf\,d\mu &= \int (cf)^+\,d\mu - \int (cf)^-\,d\mu \\ &= \int (-c)f^-\,d\mu - \int (-c)f^+\,d\mu \\ &= (-c)\Big(\int f^-\,d\mu - \int f^+\,d\mu\Big) \\ &= c\int f\,d\mu,\end{aligned}$$

完成证明。 ∎

现在我们证明，关于测度的积分具有良好积分理论所要求的可加性。

3.21 *additivity of integration*

设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，且 $f, g : X \to \mathbf{R}$ 是 $\mathcal{S}$-可测函数，使得 $\int |f|\, d\mu < \infty$ 且 $\int |g|\, d\mu < \infty$。则

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

清晰证明

$$\begin{aligned}(f+g)^+ - (f+g)^- &= f+g \\ &= f^+ - f^- + g^+ - g^-.\end{aligned}$$

因此

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

上式等式的两边都是非负函数的和。因此，对 μ 进行积分并使用 3.16 可得

$$\int (f+g)^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu + \int g^-\, d\mu = \int (f+g)^-\, d\mu + \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu.$$

将上述方程重新排列得到

$$\int (f+g)^+\, d\mu - \int (f+g)^-\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu,$$

其中左边不是$\infty - \infty$的形式，因为$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$和$(f+g)^- \leq f^- + g^-$。上述方程可以重写为

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu,$$

完成证明。 ■

Gottfried Leibniz (1646–1716) invented the symbol $\int$ to denote integration in 1675.

下一个结果类似于 3.8，但现在函数允许取实值。

3.22 *integration is order preserving*

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $f, g : X \to \mathbf{R}$ 是 $\mathcal{S}$-可测函数，使得 $\int f\, d\mu$ 和 $\int g\, d\mu$ 都是有定义的。并且假设对所有 $x \in X$ 都有 $f(x) \leq g(x)$。则有 $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$。

证明 $\int f\, d\mu = \pm\infty$ 或 $\int g\, d\mu = \pm\infty$ 的情形留给读者。因此我们假设 $\int |f|\, d\mu < \infty$ 且 $\int |g|\, d\mu < \infty$。

积分的可加性（3.21）和齐次性（3.20，取 $c = -1$）意味着

$$\int g\, d\mu - \int f\, d\mu = \int (g-f)\, d\mu.$$

最后一个积分是非负的，因为对所有 $x \in X$，$g(x) - f(x) \geq 0$。 ■

在下一个结果中出现的不等式被频繁使用。

3.23 *absolute value of integral $\leq$ integral of absolute value*

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $f: X \to [-\infty, \infty]$ 是一个函数，使得 $\int f\,d\mu$ 有定义。则

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu.$$

证明 因为 $\int f\,d\mu$ 已定义，f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，并且 $\int f^+\,d\mu$ 和 $\int f^-\,d\mu$ 中至少有一个是有限的。因此

$$\begin{aligned}\left|\int f\,d\mu\right| &= \left|\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\right|\\ &\leq \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu\\ &= \int (f^+ + f^-)\,d\mu\\ &= \int |f|\,d\mu,\end{aligned}$$

如所愿。

练习 3A

1 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $f: X \to [0, \infty]$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，使得 $\int f\,d\mu < \infty$。解释为什么

$$\inf_E f = 0$$

对于每个集合 $E \in \mathcal{S}$ 与 $\mu(E) = \infty$。

2 假设 X 是一个集合，$\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 σ-代数，并且 $c \in X$。定义 $(X, \mathcal{S})$ 上的狄拉克测度 δ_c 为

$$\delta_c(E) = \begin{cases} 1 & \text{if } c \in E, \\ 0 & \text{if } c \notin E. \end{cases}$$

证明：如果 $f: X \to [0, \infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，则 $\int f\,d\delta_c = f(c)$。
[*Careful:* $\{c\}$ *may not be in* $\mathcal{S}$.]

3 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $f: X \to [0, \infty]$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。证明

$$\int f\,d\mu > 0 \text{ if and only if } \mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) > 0.$$

4 给出一个 Borel 可测函数 $f\colon [0,1] \to (0,\ \infty)$，使得 $L(f,\ [0,1]) = 0$。

[Recall that $L(f, [0,1])$ denotes the lower Riemann integral, which was defined in Section 1A. If λ is Lebesgue measure on $[0,1]$, then the previous exercise states that $\int f\,d\lambda > 0$ for this function f, which is what we expect of a positive function. Thus even though both $L(f, [0,1])$ and $\int f\,d\lambda$ are defined by taking the supremum of approximations from below, Lebesgue measure captures the right behavior for this function f and the lower Riemann integral does not.]

5 验证关于相对于计数测度的积分等于求和的断言（例 3.6）。

6 假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，$f\colon X \to [0,\infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，并且 P 和 P' 是 X 的 $\mathcal{S}$-划分，使得 P' 中的每个集合都包含在 P 中的某个集合里。证明 $\mathcal{L}(f,\ P) \le \mathcal{L}(f,\ P')$。

7 假设 X 是一个集合，$\mathcal{S}$ 是 X 的所有子集构成的 σ-代数，并且 $w : X \to [0,\infty]$ 是一个函数。通过以下方式在 $(X, \mathcal{S})$ 上定义一个测度 μ

$$\mu(E) = \sum_{x\in E} w(x)$$

对于 $E \subseteq X$。证明如果 $f\colon X \to [0,\infty]$ 是一个函数，则

$$\int f\,d\mu = \sum_{x\in X} w(x) f(x),$$

其中，上述无穷和被定义为对 E (first sum) 或 X (second sum) 的所有有限子集上的各项求和的上确界。

8 假设 λ 表示 R 上的勒贝格测度。给出一个从 R 到 $[0,\infty)$ 的简单 Borel 可测函数序列 $f_1, f_2, \ldots$ 的例子，使得对每个 $x \in \mathbf{R}$，$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$，但 $\lim_{k\to\infty} \int f_k\,d\lambda = 1$。

9 假设 μ 是可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个测度，且 $f\colon X \to [0,\infty]$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。定义 $\nu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ 为

$$\nu(A) = \int \chi_A f\,d\mu$$

对于$A \in \mathcal{S}$。证明ν是$(X, \mathcal{S})$上的一个测度。

10 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $f_1, f_2, \ldots$ 是一列非负的 $\mathcal{S}$-可测函数。定义 $f\colon X \to [0,\infty]$ 为 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$。证明：

$$\int f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k\,d\mu.$$

11 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $f_1, f_2, \ldots$ 是从 X 到 R 的 $\mathcal{S}$-可测函数，使得 $\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k|\,d\mu < \infty$。证明存在 $E \in \mathcal{S}$，使得 $\mu(X \setminus E) = 0$，且对每个 $x \in E$ 都有 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$。

12 证明存在一个 Borel 可测函数 $f: \mathbf{R} \to (0, \infty)$，使得对于 R 中的每一个非空开区间 $I \subseteq$，有 $\int \chi_I f \,\mathrm{d}\lambda = \infty$，其中 λ 表示 R 上的勒贝格测度。

13 给出一个例子来说明，如果去掉 $f_1, f_2, \ldots$ 为非负函数这一假设，单调收敛定理（3.11）可能失效。

14 举例说明如果将单调收敛定理中的递增函数列假设替换为递减函数列假设，定理可能会失效。[
This exercise shows that the Monotone Convergence Theorem should be called the Increasing Convergence Theorem. However, see Exercise 20.]

15 假设 λ 是 R 上的勒贝格测度，且 $f: \mathbf{R} \to [-\infty, \infty]$ 是一个 Borel 可测函数，使得 $\int f \,\mathrm{d}\lambda$ 是良好定义的。

(a) 对于 $t \in \mathbf{R}$，定义 $f_t : \mathbf{R} \to [-\infty, \infty]$ 通过 $f_t(x) = f(x - t)$。证明 $\int f_t \,\mathrm{d}\lambda = \int f \,\mathrm{d}\lambda$ 对所有 $t \in \mathbf{R}$ 都成立。 (b) 对于 $t \in \mathbf{R}$，定义 $f_t : \mathbf{R} \to [-\infty, \infty]$ 通过 $f_t(x) = f(tx)$。证明 $\int f_t \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{|t|} \int f \,\mathrm{d}\lambda$ 对所有 $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ 成立。 —

16 假设 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 是集合 X 和 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ 上的 σ-代数。设 μ_1 是 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个测度，μ_2 是 $(X, \mathcal{T})$ 上的一个测度，并且对所有 $E \in \mathcal{S}$ 有 $\mu_1(E) = \mu_2(E)$。证明：如果 $f: X \to [0, \infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，则 $\int f \,\mathrm{d}\mu_1 = \int f \,\mathrm{d}\mu_2$。

For $x_1, x_2, \ldots$ ***be a sequence in*** $[-\infty, \infty]$***, define*** 下极限 $\underset{k\to\infty}{}$

$$\liminf_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \inf\{x_k, x_{k+1}, \ldots\}.$$

Note that $\inf\{x_k, x_{k+1}, \cdots\cdots\}$ ***is an increasing function of k; thus the limit above on the right exists in*** $[-\infty, \infty]$.

17 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $f_1, f_2, \ldots$ 是定义在 X 上的一列非负的 $\mathcal{S}$-可测函数。定义函数 $f: X \to [0, \infty]$，由 $f(x) =$ 下极限 给出。
$\underset{k\to\infty}{} f_k(x).$

(a) 证明 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

(b) 证明：

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

(c) 给出一个例子，说明即使 $\mu(X) < \infty$，且函数族 $\{f_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 是一致有界的，(b) 中的不等式也可以是严格不等式。

[*The result in (b) is called Fatou's Lemma. Some textbooks prove Fatou's Lemma and then use it to prove the Monotone Convergence Theorem. Here we are taking the reverse approach—you should be able to use the Monotone Convergence Theorem to give a clean proof of Fatou's Lemma.*]

18 给出一个实数序列 $x_1, x_2, \ldots$ 的例子，使得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ exists in } \mathbf{R},$$

但是 $\int x \, d\mu$ 未定义，其中 μ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度，而 x 是从 $\mathbf{Z}^+$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数，定义为 $x(k) = x_k$。

证明，如果$(X, \mathcal{S}, \mu)$是一个测度空间且$f\colon X \to [0, \infty)$是$\mathcal{S}$-可测的，那么

$$\mu(X) \inf_X f \leq \int f \, d\mu \leq \mu(X) \sup_X f.$$

20 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $f_1, f_2, \ldots$ 是一列单调（意味着递增或递减）$\mathcal{S}$-可测函数序列。定义 $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ 为

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

证明，如果 $\int |f_1| \, d\mu < \infty$，则

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

21 亨利·勒贝格就他的积分方法写道如下：

> 我必须支付一笔确定的款项，这笔钱我已经收在口袋里。我把口袋里的纸币和硬币掏出来，按我找到它们的顺序交给债权人，直到达到总额为止。这就是黎曼积分。但我也可以用不同的方式进行。在把口袋里的所有钱都掏出来之后，我按照相同的面值将纸币和硬币归类，然后把这几堆钱依次付给债权人。这就是我的积分。

使用 3.15 解释 Lebesgue 的意思，并解释为什么相对于测度的函数积分可以被视为对函数值域的划分，而与此相对的 Riemann 积分则依赖于对函数定义域的划分。

[*The quote above is taken from page 796 of* 普林斯顿数学指南, *edited by Timothy Gowers.*]

3B 积分的极限与极限的积分

本节中我们证明的关于交换极限与积分的定理，使我们能够刻画黎曼可积函数。我们还发展了一些良好的逼近工具，这些工具将在后续章节中发挥作用
。

有界收敛定理

我们通过引入一些有用的符号来开始这一节。

3.24 定义 *integration on a subset;* $\int_E f\,d\mu$

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $E \in \mathcal{S}$。如果 $f: X \to [-\infty, \infty]$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，那么 $\int_E f\,d\mu$ 定义为

$$\int_E f\,d\mu = \int \chi_E f\,d\mu$$

如果右 上面的方程右侧已定义；否则 $\int_E f\,d\mu$ 是未定义的 定义的。

或者，您可以将 $\int_E f\,d\mu$ 看作 $\int f|_E\,d\mu_E$，其中 μ_E 是通过将 μ 限制为包含在 E 中的 $\mathcal{S}$ 元素得到的度量。

请注意，根据上述定义，符号 {v*} $\int_X f\,d\mu$ 的含义与 $\int f\,d\mu$ 相同。下面这个简单的结果说明了这种新记号的用法。

3.25 *bounding an integral*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$E \in \mathcal{S}$，和 $f: X \to [-\infty, \infty]$ 是一个函数，使得 $\int_E f\,d\mu$ 被定义。那么

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \mu(E) \sup_E |f|.$$

证明 令 $c = \sup_E |f|$我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\,d\mu\right| &= \left|\int \chi_E f\,d\mu\right| \\ &\leq \int \chi_E |f|\,d\mu \\ &\leq \int c\chi_E\,d\mu \\ &= c\mu(E),\end{aligned}$$

第二行来自 3.23，第三行来自 3.8，第四行来自 3.15。■

下一个结果可以作为支配收敛定理（3.31）的一个特例来证明，我们将在本节稍后证明该定理。因此你可以在这里跳过证明。然而，有时通过看到一个重要特例的更简明证明，你会获得更多的理解。因此你可能会想阅读接下来给出的有界收敛定理的简易证明。

3.26 *Bounded Convergence Theorem*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是具有 $\mu(X) < \infty$ 的测度空间。假设 $f_1, f_2, \cdots$ 是从 X 到 $\mathbf{R}$ 的 $\mathcal{S}$-可测函数序列，并在 X 上逐点收敛到函数 $f: X \to \mathbf{R}$。若存在 $c \in (0、\infty)$ 使得

$$|f_k(x)| \le c$$

对于所有 $k \in \mathbf{Z}^+$ 以及所有 $x \in X$，则

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Note the key role of Egorov's Theorem, which states that pointwise convergence is close to uniform convergence, in proofs involving interchanging limits and integrals.

证明 函数 f 根据 2.48 是 $\mathcal{S}$-可测的。

假设 c 满足该定理的假设。令 $\varepsilon > 0$。由 Egorov 定理 (2.85)，存在 $E \in \mathcal{S}$，使得 $\mu(X \setminus E) < \frac{\varepsilon}{4c}$ 且 $f_1, f_2, \ldots$ 在 E 上一致收敛到 f。现在

$$\begin{aligned}
\left|\int f_k \, d\mu - \int f \, d\mu\right| &= \left|\int_{X\setminus E} f_k \, d\mu - \int_{X\setminus E} f \, d\mu + \int_E (f_k - f) \, d\mu\right| \\
&\le \int_{X\setminus E} |f_k| \, d\mu + \int_{X\setminus E} |f| \, d\mu + \int_E |f_k - f| \, d\mu \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \mu(E) \sup_E |f_k - f|,
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由 3.25 得出。由于 f_1、f_2、…… 一致收敛到 f 于 E 和 $\mu(E) < \infty$ 上，当 k 充分大时，上述不等式右端小于 ε，从而完成证明。■

积分定理中的测度为零的集合

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间。若 $f, g: X \to [-\infty, \infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测函数且

$$\mu(\{x \in X : f(x) \ne g(x)\}) = 0,$$

那么，积分的定义意味着 $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$ (，或者两个积分都是未定义的)。由于在测度为 0 的集合上发生的事情通常并不重要，下面的定义是有用的。

3.27 定义 *almost every*

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间。若 $\mu(X \setminus E) =$ 为 0，则称集合 $E \in \mathcal{S}$ 含有 X 的 μ-*almost every* 元素。若测度 μ 在上下文中是明确的，则可以使用短语 *almost every*（一些作者将其缩写为 *a. e.*）。

例如，几乎每个实数都是无理数（相对于R上的常用勒贝格测度），因为$|\mathbf{Q}| = 0$。

关于积分的定理几乎总是可以放宽，使得假设只需在几乎处处成立，而不必处处成立。例如，考虑有界收敛定理（3.26），其一项假设是：

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$$

对于所有 $x \in X$，假设有界收敛定理的假设成立，但上面的方程仅在几乎处处成立，即存在一个集合 $E \in \mathcal{S}$，使得 $\mu(X \setminus E) = 0$，并且对于所有 $x \in E$，上面的方程成立。通过以下方式定义新函数 g_1、g_2、... 和 g：

$$g_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{if } x \in E, \\ 0 & \text{if } x \in X \setminus E \end{cases} \quad \text{and} \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in E, \\ 0 & \text{if } x \in X \setminus E. \end{cases}$$

然后

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = g(x)$$

对所有 $x \in X$。因此有界收敛定理推出

$$\lim_{k \to \infty} \int g_k \, d\mu = \int g \, d\mu,$$

这立即意味着

$$\lim_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu$$

因为 $\int g_k \, d\mu = \int f_k \, d\mu$ 和 $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$。

支配收敛定理

下一个结果告诉我们，如果一个非负函数具有有限的积分，那么它在所有小集合（在测度意义下）上的积分也是小的。

3.28 *integrals on small sets are small*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$g : X \to [0, \infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，且 $\int g \, d\mu < \infty$。那么对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$\int_B g \, d\mu < \varepsilon$$

对于每个满足$\mu(B) < \delta$的集合$B \in \mathcal{S}$。

证明 假设 $\varepsilon > 0$. 令 $h : X \to [0, \infty)$ 为一个简单的 $\mathcal{S}$-可测函数，使得 $0 \leq h \leq g$ 和

$$\int g\, d\mu - \int h\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2};$$

t他 e函数 h 存在，并具有这些性质，来源于 3.9。 让

$$H = \max\{h(x) : x \in X\}$$

并令$\delta >0$，使得$H\delta < \frac{\varepsilon}{2}$.

假设 $B \in \mathcal{S}$ 和 $\mu(B) < \delta$。然后

$$\begin{aligned}\int_B g\, d\mu &= \int_B (g-h)\, d\mu + \int_B h\, d\mu\\ &\leq \int (g-h)\, d\mu + H\mu(B)\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + H\delta\\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

如所愿。 ■

一些定理，例如埃戈罗夫定理 (2.85)，其假设是整个空间的测度是有限的。下一个结果有时允许我们通过将注意力限制于一个有限测度的关键集合来绕过这个假设。

3.29 *integrable functions live mostly on sets of finite measure*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$g : X \to [0, \infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，并且 $\int g\, d\mu < \infty$。那么对于每一个 $\varepsilon > 0$，存在 $E \in \mathcal{S}$ 使得 $\mu(E) < \infty$ 且

$$\int_{X \setminus E} g\, d\mu < \varepsilon.$$

证明 假设 $\varepsilon > 0$。设 P 是 X 的一个 $\mathcal{S}$-划分 $A_1, \ldots, A_m$，使得

3.30 $$\int g\, d\mu < \varepsilon + \mathcal{L}(g, P).$$

令E为那些A_j的并集，使得$\inf\limits_{A_j} g > 0$。则$\mu(E) < \infty$ (，因为否则我们将得到$\mathcal{L}(g, P) = \infty$，这与$\int g\, d\mu < \infty$)这一假设相矛盾。现在

$$\begin{aligned}\int_{X \setminus E} g\, d\mu &= \int g\, d\mu - \int \chi_E g\, d\mu\\ &< \bigl(\varepsilon + \mathcal{L}(g, P)\bigr) - \mathcal{L}(\chi_E g, P)\\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

其中第二行来自3.30以及非负函数的积分定义，最后一行成立是因为对于每个不包含在E中的A_j，有$\inf\limits_{A_j} g = 0$。 ■

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ 是定义在 X 上的一列 $\mathcal{S}$-可测函数，使得对每个（或几乎处处）$x \in X$ 有 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$。一般而言，并不成立 $\lim_{k\to\infty} \int f_k \,d\mu = \int f \,d\mu$ (，参见练习 1 和 2)。

我们已经有两个关于交换极限与积分的良好定理。然而，这两个定理的假设都较为严格。具体而言，单调收敛定理（3.11）要求所有函数都是非负的，并且要求函数序列是递增的。有界收敛定理（3.26）要求整个空间的测度是有限的，并且要求函数序列被某个常数一致有界。

下一个定理是该领域中的重大成果。它不要求函数序列非负，不要求函数序列递增，不要求整个空间的测度有限，也不要求函数序列一致有界。所有这些假设都仅由一个要求所取代：函数序列在逐点意义下被某个具有有限积分的函数所控制。

注意到有界收敛定理可以由下面的结果立即推出（取 g 为一个适当的常值函数，并使用有界收敛定理中的假设 $\mu(X) < \infty$）。

3.31 *Dominated Convergence Theorem*

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$f : X \to [-\infty, \infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，并且 $f_1, f_2, \ldots$ 是从 X 到 $[-\infty, \infty]$ 的 $\mathcal{S}$-可测函数，使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

对几乎每个 $x \in X$。如果存在一个 $\mathcal{S}$-可测函数 $g : X \to [0, \infty]$ 使得

$$\int g \,d\mu < \infty \quad \text{and} \quad |f_k(x)| \le g(x)$$

对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 且对几乎处处的 $x \in X$，则

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \,d\mu = \int f \,d\mu.$$

证明 设 $g : X \to [0, \infty]$ 满足本定理的假设。如果 $E \in \mathcal{S}$，则

$$\begin{aligned} \left|\int f_k \,d\mu - \int f \,d\mu\right| &= \left|\int_{X\setminus E} f_k \,d\mu - \int_{X\setminus E} f \,d\mu + \int_E f_k \,d\mu - \int_E f \,d\mu\right| \\ &\le \left|\int_{X\setminus E} f_k \,d\mu\right| + \left|\int_{X\setminus E} f \,d\mu\right| + \left|\int_E f_k \,d\mu - \int_E f \,d\mu\right| \\ &\le 2\int_{X\setminus E} g \,d\mu + \left|\int_E f_k \,d\mu - \int_E f \,d\mu\right|. \end{aligned} \tag{3.32}$$

情况 1：假设 $\mu(X) < \infty$。
令 $\varepsilon > 0$。由 3.28，存在 $\delta > 0$，使得

3.33
$$\int_B g\,d\mu < \frac{\varepsilon}{4}$$

对于每一个满足 $\mu(B) < \delta$ 的集合 $B \in \mathcal{S}$。由埃戈罗夫定理（2.85），存在一个集合 $E \in \mathcal{S}$，使得 $\mu(X \setminus E) < \delta$，并且 $f_1, f_2, \ldots$ 在 E 上一致收敛到 f。由此 3.32 和 3.33 推出

$$\left|\int f_k\,d\mu - \int f\,d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_E (f_k - f)\,d\mu\right|.$$

由于 f_1、f_2、…… 在 E 和 $\mu(E) < \infty$ 上一致收敛到 f，右边的最后一项对所有足够大的 k 都小于 $\frac{\varepsilon}{2}$。因此 $\lim_{k\to\infty} \int f_k\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu$，从而完成了情形 1 的证明。

情况 2：假设 $\mu(X) = \infty$。
设 $\varepsilon > 0$。由 3.29，存在 $E \in \mathcal{S}$ 使得 $\mu(E) < \infty$ 且

$$\int_{X\setminus E} g\,d\mu < \frac{\varepsilon}{4}.$$

上述不等式和式(3.32)推出

$$\left|\int f_k\,d\mu - \int f\,d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_E f_k\,d\mu - \int_E f\,d\mu\right|.$$

由情形1将其应用于序列 $f_1|_E, f_2|_E, \ldots$，右侧的最后一项在所有充分大的 k 时小于 $\frac{\varepsilon}{2}$。因此 $\lim_{k\to\infty} \int f_k\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu$，从而完成了情形2的证明。

黎曼积分与勒贝格积分

现在我们可以使用我们已经发展出的工具来刻画黎曼可积函数。在下面的定理中，最后一个等式的左边表示黎曼积分。

3.34 *Riemann integrable $\Longleftrightarrow$ continuous almost everywher e*

假设 $a < b$ 和 $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ 是一个有界函数。那么 f 是黎曼可积的，当且仅当

$$|\{x \in [a, b] : f \text{ is not continuous at } x\}| = 0.$$

此外，如果 f 是黎曼可积的，且 λ 表示 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度，那么 f 是勒贝格可测的，并且

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f\,d\lambda.$$

证明 假设 $n \in \mathbf{Z}^+$。考虑划分 P_n，将 $[a, b]$ 划分为 2^n 个大小相等的子区间。设 $I_1, \ldots, I_{2^n}$ 为相应的闭区间，每个长度为 $(b-a)/2^n$。

3.35 $$g_n = \sum_{j=1}^{2^n} \bigl(\inf_{I_j} f\bigr)\chi_{I_j} \quad \text{and} \quad h_n = \sum_{j=1}^{2^n} \bigl(\sup_{I_j} f\bigr)\chi_{I_j}.$$

f的下和上黎曼和对于划分P_n由积分给出。具体而言，

3.36 $$L(f, P_n, [a, b]) = \int_{[a,b]} g_n \, d\lambda \quad \text{and} \quad U(f, P_n, [a, b]) = \int_{[a,b]} h_n \, d\lambda,$$

其中 λ 是 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度。

在 3.35 中给出的 g_n 和 h_n 的定义实际上只是这些定义的初稿。在每一个同时属于区间 $I_1, \ldots, I_{2^n}$ (中两个区间的点上都会出现一个小问题；换言之，就是在这些区间除 a 和 b) 之外的端点处。在每一个这样的点上，将 g_n 的值改为 f 在包含该点的两个区间的并集上的下确界，并将 h_n 的值改为 f 在包含该点的两个区间的并集上的上确界。这样的修改只在有限多个点上改变 g_n 和 h_n。因此，3.36 中的积分不受影响。进行这一修改是为了使 3.38 成立（否则，3.38 中的两个集合至多可能相差可数多个点，这在实质上并不会改变证明，但在审美上就不那么令人满意）。

显然，$g_1 \leq g_2 \leq \cdots$ 是一个在 $[a, b]$ 上递增的函数序列，而 $h_1 \geq h_2 \geq \cdots$ 是一个递减的函数序列。定义函数 $f^{\mathrm{L}} : [a, b] \to \mathbf{R}$ 和 $f^{\mathrm{U}} : [a, b] \to \mathbf{R}$，如下所示

$$f^{\mathrm{L}}(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \quad \text{and} \quad f^{\mathrm{U}}(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x).$$

取极限 $n \to \infty$ 作为方程 3.36 中的两个方程，并使用有界收敛定理 (3.26) 以及 1A 节中的练习 7，我们可以看出 f^L 和 f^U 是 Lebesgue 可测函数，并且

3.37 $$L(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f^{\mathrm{L}} \, d\lambda \quad \text{and} \quad U(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f^{\mathrm{U}} \, d\lambda.$$

现在 3.37 表明 f 是黎曼可积的，当且仅当

$$\int_{[a,b]} (f^{\mathrm{U}} - f^{\mathrm{L}}) \, d\lambda = 0.$$

因为对所有 $x \in$ 在 $[a, b]$，都有 $f^{\mathrm{L}}(x) \leq f(x) \leq f^{\mathrm{U}}(x)$，上述等式当且仅当成立

$$|\{x \in [a, b] : f^{\mathrm{U}}(x) \neq f^{\mathrm{L}}(x)\}| = 0.$$

证明的其余细节可以通过注意到这一点来完成

3.38 $$\{x \in [a, b] : f^{\mathrm{U}}(x) \neq f^{\mathrm{L}}(x)\} = \{x \in [a, b] : f \text{ is not continuous at } x\}. \quad \blacksquare$$

我们先前将记号 $\int_a^b f$ 定义为 f 的黎曼积分。由于对于黎曼可积函数，黎曼积分与勒贝格积分是一致的（见 3.34），我们现在将 $\int_a^b f$ 重新定义为表示勒贝格积分。

3.39 定义 $\int_a^b f$

假设 $-\infty \leq a < b \leq \infty$ 和 $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ 是Lebesgue可测的。那么

- $\int_a^b f$ 且 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示 $\int_{(a,b)} f\,d\lambda$，其中 λ 是 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度；
- $\int_b^a f$ 定义为 $-\int_a^b f$。

上述第二个要点中的定义是为了使得像以下这样的方程成立：

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

即使例如 $a < b < c$，仍然有效。

通过良好函数的逼近

在下一个定义中，符号 $\|f\|_1$ 应该是 $\|f\|_{1,\mu}$，因为它依赖于度量 μ 以及 f。然而，μ 通常可以从上下文中推断出来。在某些书籍中，您可能会看到符号 $\mathcal{L}^1(X、\mathcal{S}、\mu)$ 来代替 $\mathcal{L}^1(\mu)$。

3.40 定义 $\|f\|_1$; $\mathcal{L}1(\mu)$

假设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间。如果 $f\colon X \to [-\infty,\infty]$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，则 $\mathcal{L}^1$-*norm* 的 f 记作 $\|f\|_1$，并定义为

$$\|f\|_1 = \int |f|\,d\mu.$$

Lebesgue space $\mathcal{L}^1(\mu)$ 定义为

$\mathcal{L}1(\mu) = \{f : f$ 是从 X 到 $\mathbf{R}$ 且 $\|f\|_1 < \infty\}$ 的 $\mathcal{S}$-可测函数。

上述使用的术语和符号虽然$\|\cdot\|_1$可能不是一个真正的规范（将在第6章定义），但它们是方便的。

3.41 示例 $\mathcal{L}^1(\mu)$ *functions that take on only finitely many values*

假设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间，E_1，...，E_n 是 X 的不相交子集。假设 a_1，...，a_n 是不同的非零实数。那么

$$a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_n\chi_{E_n} \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

当且仅当 $E_k \in \mathcal{S}$ 和 $\mu(E_k) < \infty$ 对所有 $k \in \{1,\ldots,n\}$ 成立时。此外，

$$\|a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_n\chi_{E_n}\|_1 = |a_1|\mu(E_1) + \cdots + |a_n|\mu(E_n).$$

3.42 示例 ℓ^1

如果 μ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度，且 $x = (x_1, x_2, \dots)$ 是一个实数序列（可视为 $\mathbf{Z}^+$ 上的一个函数），那么 $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$。在这种情况下，$\mathcal{L}^1(\mu)$ 常记为 ℓ^1 (，读作 *little-el-one*)。换言之，ℓ^1 是所有满足 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$ 的实数序列（$x_1, x_2, \dots$）的集合。

以下结果的简单证明留给读者。

3.43 ***properties of the $\mathcal{L}^1$-norm***

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$。则

- $\|f\|_1 \geq 0$;
- $\|f\|_1 = 0$ 当且仅当 $f(x) = 0$ 对几乎所有的 $x \in X$;
- $\|cf\|_1 = |c|\|f\|_1$ 对所有 $c \in \mathbf{R}$;
- $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

下一个结果表明，$\mathcal{L}^1(\mu)$ 中的每个函数都可以在 $\mathcal{L}^1$-范数下由只取有限多个值的可测函数逼近。

3.44 ***approximation by simple functions***

设 μ 是一个测度且 $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$。则对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个简单函数 $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ 使得

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

证明 设 $\varepsilon > 0$。则存在简单函数 g_1、$g_2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$，使得 $0 \leq g_1 \leq f^+$ 且 $0 \leq g_2 \leq f^-$ 且

$$\int (f^+ - g_1)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{and} \quad \int (f^- - g_2)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

其中我们使用了 3.9 来保证具有这些性质的 g_1、g_2 的存在。令 $g = g_1 - g_2$。则 g 是 $\mathcal{L}^1(\mu)$ 中的一个简单函数，并且

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_1 &= \|(f^+ - g_1) - (f^- - g_2)\|_1 \\
&= \int (f^+ - g_1)\, d\mu + \int (f^- - g_2)\, d\mu \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

如所愿。 ∎

3.45 定义 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$; $\|f\|_1$

- 记号 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 表示 $\mathcal{L}^1(\lambda)$，其中 λ 是定义在 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集或 $\mathbf{R}$ 的勒贝格可测子集上的勒贝格测度。
- 在处理 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 时，记号 $\|f\|_1$ 表示 f 的绝对值关于 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度的积分。

3.46 定义 *step function*

一个 *step function* 是一个函数 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，其形式为

$$g = a_1\chi_{I_1} + \cdots + a_n\chi_{I_n},$$

where $I_1, \ldots, I_n$ 是 $\mathbf{R}$ 的区间，而 $a_1, \ldots, a_n$ 是非零实 nu mbers.

假设 g 是上述形式的一个阶梯函数，并且区间 $I_1, \ldots, I_n$ 彼此不相交。则

$$\|g\|_1 = |a_1|\,|I_1| + \cdots + |a_n|\,|I_n|.$$

特别地，$g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 当且仅当所有区间 $I_1, \ldots, I_n$ 都是有界的。

阶跃函数定义中的区间可以是开区间、闭区间或半开区间。我们将在积分中使用阶跃函数，其中区间端点的包含与否并不重要。

Even though the coefficients $a_1, \ldots, a_n$ in the definition of a step function are required to be nonzero, the function 0 that is identically 0 on $\mathbf{R}$ is a step function. To see this, take $n = 1$, $a_1 = 1$, and $I_1 = \varnothing$.

3.47 *approximation by step functions*

假设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$。那么对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个阶梯函数 $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 使得

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

证明 假设 $\varepsilon > 0$。由 3.44，存在 $\mathbf{R}$ 上的 Borel（或 Lebesgue）可测子集 $A_1, \ldots, A_n$ 以及非零数 $a_1, \ldots, a_n$，使得对所有 $k \in \{1, \ldots, n\}$，有 $|A_k| < \infty$，并且

$$\Bigl\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{A_k}\Bigr\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于每个 $k \in \{1, ..., n\}$，存在一个包含 A_k 的 $\mathbf{R}$ 的开子集 G_k，其勒贝格测度可以任意接近 $|A_k|$ [根据 2.71 的部分 (e)]。$\mathbf{R}$ 的每个开子集，包括每个 G_k，都是可数个不相交的开区间的并。因此，对于每个 k，存在一个集合 E_k，它是包含在 G_k 中的有限个有界开区间的并，其勒贝格测度可以任意接近 $|G_k|$。因此，对于每个 k，存在一个集合 E_k，它是有限个有界区间的并，使得

$$\begin{aligned}|E_k \setminus A_k| + |A_k \setminus E_k| &\le |G_k \setminus A_k| + |G_k \setminus E_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{2|a_k|n};\end{aligned}$$

换句话说,

$$\|\chi_{A_k} - \chi_{E_k}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2|a_k|n}.$$

现在

$$\begin{aligned}\Big\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{E_k}\Big\|_1 &\le \Big\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{A_k}\Big\|_1 + \Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{A_k} - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{E_k}\Big\|_1 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |a_k|\|\chi_{A_k} - \chi_{E_k}\|_1 \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

每个 E_k 是有界区间的有限并集。因此，上述不等式完成了证明，因为 $\sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{E_k}$ 是一个阶梯函数。

卢津定理（2.91 和 2.93）提供了一种令人惊叹的方法，通过连续函数来逼近博雷可测函数。然而，下面的逼近定理通常比卢津定理更为实用。例如，下一个结果在勒贝格微分定理（4.10）的证明中起着重要作用。

3.48 *approximation by continuous functions*

假设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$。那么对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个连续函数 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得

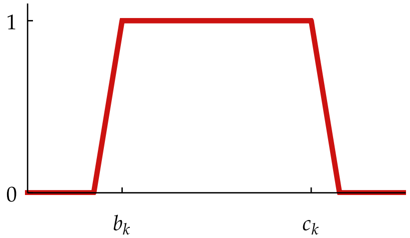
$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

和 $\{x \in \mathbf{R} : g(x) \neq 0\}$ 是一个有界集合。

证明 对于每个 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ 以及 $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$，我们有

$$\begin{aligned}\Big\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k g_k\Big\|_1 &\le \Big\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{[b_k,c_k]}\Big\|_1 + \Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k(\chi_{[b_k,c_k]} - g_k)\Big\|_1 \\ &\le \Big\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{[b_k,c_k]}\Big\|_1 + \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,\|\chi_{[b_k,c_k]} - g_k\|_1,\end{aligned}$$

其中上述不等式由 3.43 得出。由 3.47，可选择 a_1，...，a_n，b_1，...，b_n，c_1，...，$c_n \in \mathbf{R}$，使 $\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{[b_k,c_k]}\|_1$ 任意小。于是这里的图表表明，存在连续函-数 g_1，...，$g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$，使 $\sum_{k=1}^{n}|a_k|\|\chi_{[b_k,c_k]} - g_k\|_1$ 任意小。现在取 $g = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k$。



The graph of a continuous function g_k such that $\|\chi_{[b_k,\, c_k]} - g_k\|_1$ is small.

练习 3B

给出一个从 $\mathbf{Z}^+$ 到 $[0, \infty)$ 的函数序列 $f_1, f_2, \ldots$ 的例子，使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k(m) = 0$$

对于每个 $m \in \mathbf{Z}^+$，但 $\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = 1$，其中 μ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度。

2 给出一个从 $\mathbf{R}$ 到 $[0, 1]$ 的连续函数序列 $f_1, f_2, \ldots$，使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$$

对于每个 $x \in \mathbf{R}$，但 $\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda = \infty$，其中 λ 是 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度。

假设 λ 是 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度，$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个博雷尔可测函数，满足 $\int |f| \, d\lambda < \infty$。定义 $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为

$$g(x) = \int_{(-\infty, x)} f \, d\lambda.$$

证明 g 在 $\mathbf{R}$ 上是一致连续的。

4 (a) 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个具有 $\mu(X) < \infty$ 的测度空间。假设 $f\colon X \to [0, \infty)$ 是一个有界的 $\mathcal{S}$-可测函数。证明：

$$\int f \, d\mu = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) \sup_{A_j} f : A_1, \ldots, A_m \text{ is an } \mathcal{S}\text{-partition of } X \Big\}.$$

(b) 证明如果假设 f 是有界的被替换为假设 $\int f \, d\mu < \infty$，则 (a) 的结论可能失败。 (c) 证明如果删除了条件 $\mu(X) < \infty$，则 (a) 的结论可能失败。

[*Part (a) of this exercise shows that if we had defined an upper Lebesgue sum, then it could be used to define* $\int f \, d\mu$ *when* f *is bounded and* $\mu(X) < \infty$. *However, parts (b) and (c) show that the hypotheses that* f *is bounded and that* $\mu(X) < \infty$ *are needed if defining the integral via the equation above. The definition of the integral via the lower Lebesgue sum does not require these hypotheses, showing the advantage of using the lower Lebesgue sum.*]

5 令 λ 表示 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度。假设 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个博雷可测函数，满足 $\int |f| \, d\lambda < \infty$。证明：

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[-k, k]} f \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

6 令 λ 表示 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度。举一个连续函数 $f\colon [0, \infty) \to \mathbf{R}$ 的例子，使得 $\lim_{t\to\infty} \int_{[0,t]} f \, d\lambda$ 存在（在 $\mathbf{R}$ 中），但 $\int_{[0,\infty)} f \, d\lambda$ 未定义。

7 令 λ 表示 R 上的勒贝格测度。给出一个连续函数 $f\colon (0,1) \to \mathbf{R}$ 的例子，使得 $\lim_{n\to\infty} \int_{(\frac{1}{n},1)} f \, d\lambda$ 存在（在 R 中），但 $\int_{(0,1)} f \, d\lambda$ 未定义。

8 验证 3.38 中的断言。

9 验证例 3.41 中的断言。

10 (a) 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，使得 $\mu(X) < \infty$。设 p、r 为满足 $p < r$ 的正数。证明：如果 $f\colon X \to [0,\infty)$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，且 $\int f^r \, d\mu < \infty$，则 $\int f^p \, d\mu < \infty$。

（b）给出一个例子，说明如果没有$\mu(X) < \infty$这一假设，（a）中的结论可能是错误的。

11 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间且 $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$。证明集合 $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ 是具有有限 μ-测度的集合的可数并。

12 假设

$$f_k(x) = \frac{(1-x)^k \cos \frac{k}{x}}{\sqrt{x}}.$$

证明 $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k = 0$ 。

13 给出一个定义在 [0, 1] 上的非负 Borel 可测函数序列 $f_1, f_2, \ldots$ 的一个例子，使得以下两个条件同时成立。

- 极限 $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k = 0$;
- $\sup_{k\ge m} f_k(x) = \infty$ 对于每个 $m \in \mathbf{Z}^+$ 以及每个 $x \in [0,1]$。

14 令 λ 表示 R 上的勒贝格测度。

（a）令 $f(x) = 1/\sqrt{x}$。证明 $\int_{[0,1]} f \, d\lambda = 2$。

(b) 令 $f(x) = 1/(1+x^2)$. 证明 $\int_{\mathbf{R}} f \, d\lambda = \pi$. (c) 令 $f(x) = (\sin x)/x$. 说明积分 $\int_{(0,\infty)} f \, d\lambda$ 未定义，但 $\lim_{t\to\infty} \int_{(0,t)} f \, d\lambda$ 在 R 中存在。

15 证明或给出反例：如果 G 是 (0, 1) 的一个开子集，则 χ_G 在 [0, 1] 上是黎曼可积的。

16 设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$。

(a) 对于 $t \in \mathbf{R}$，定义 $f_t\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为 $f_t(x) = f(x-t)$。证明

$$\lim_{t\to 0} \|f - f_t\|_1 = 0.$$

(b) 对于 $t > 0$，定义 $f_t\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 由 $f_t(x) = f(tx)$。证明:

$$\lim_{t\to 1} \|f - f_t\|_1 = 0.$$

Chapter 4
Differentiation

是否存在一个勒贝格可测集，恰好填充每个区间的一半？为了对这个问题有所感知，考虑集合 $E = [0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}] \cup [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$。这个集合 E 具有以下性质：

$$|E \cap [0,b]| = \frac{b}{2}$$

对于 $b = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. 是否存在一个勒贝格可测集合 $E \subseteq [0, 1]$，或许像康托尔集那样构造，使得上述方程对所有 $b \in [0, 1]$ 都成立？

在本章中，我们将通过考虑微分问题来回答这个问题。我们首先开发了一个强大的工具，称为哈迪-利特伍德最大不等式。这个工具用于证明微积分基本定理的几乎处处版本。这些结果引导我们得到一个关于勒贝格可测集密度的重要定理。

Trinity College at the University of Cambridge in England. G. H. Hardy (1877–1947) and John Littlewood (1885–1977) were students and later faculty members here. If you have not already done so, you should read Hardy's remarkable book 《一个数学家的辩白》（*do not skip the fascinating Foreword by C. P. Snow*） *and see the movie* 《知无涯者》, *which focuses on Hardy, Littlewood, and Srinivasa Ramanujan (1887–1920).*

4A Hardy–Littlewood 极大函数

马尔可夫不等式

下面的结果称为马尔可夫不等式，它有一个简洁而巧妙的证明。我们将在本章后面充分利用这一结果（见 4.10 的证明）。马尔可夫不等式还可推出切比雪夫不等式（见本节练习 2）。

4.1 *Markov's inequality*

设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，且$h \in \mathcal{L}^1(\mu)$。则

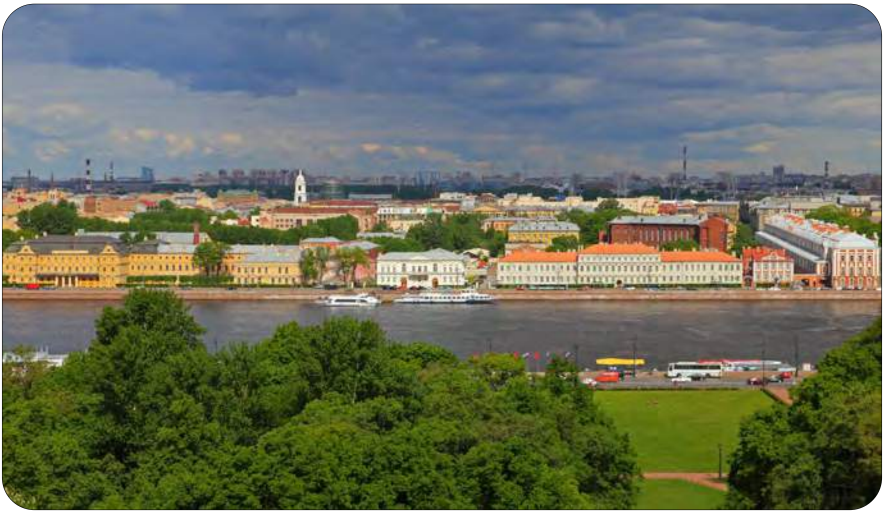
$$\mu(\{x \in X : |h(x)| \geq c\}) \leq \frac{1}{c}\|h\|_1$$

对于每个 $c > 0$。

证明 假设 $c > 0$。则

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : |h(x)| \geq c\}) &= \frac{1}{c}\int_{\{x \in X : |h(x)| \geq c\}} c \, d\mu \\ &\leq \frac{1}{c}\int_{\{x \in X : |h(x)| \geq c\}} |h| \, d\mu \\ &\leq \frac{1}{c}\|h\|_1,\end{aligned}$$

如所愿。 ■



St. Petersburg University along the Neva River in St. Petersburg, Russia. Andrey Markov (1856–1922) was a student and then a faculty member here.

Vitali 覆盖引理

4.2 定义 3 *times a bounded nonempty open interval*

假设 I 是 R 的一个有界非空开区间。那么 $3 * I$ 表示与 I 具有相同中心且长度是 I 的三倍的开区间。

4.3 示例 3 *times an interval*

如果 $I = (0, 10)$，那么 $3 * I = (-10, 20)$。

下一个结果是证明 Hardy–Littlewood 极大不等式（4.8）的一个关键工具。

4.4 *Vitali Covering Lemma*

假设 I_1，...，I_n 是 R 的一组有界非空开区间列表。那么，存在一个不相交的子列表 I_{k_1}，...，I_{k_m}，使得

$$I_1 \cup \cdots \cup I_n \subseteq (3 * I_{k_1}) \cup \cdots \cup (3 * I_{k_m}).$$

4.5 示例 *Vitali Covering Lemma*

假设 $n = 4$ 且

$$I_1 = (0, 10), \quad I_2 = (9, 15), \quad I_3 = (14, 22), \quad I_4 = (21, 31).$$

然后

$$3 * I_1 = (-10, 20), \quad 3 * I_2 = (3, 21), \quad 3 * I_3 = (6, 30), \quad 3 * I_4 = (11, 41).$$

因此

$$I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \subseteq (3 * I_1) \cup (3 * I_4).$$

在这个例子中，I_1、I_4 是 I_1、I_2、I_3、I_4 中唯一能够导出 Vitali 覆盖引理结论的子列表。

4.4 的证明 令 k_1 满足

$$|I_{k_1}| = \max\{|I_1|, \ldots, |I_n|\}.$$

假设 k_1，$\cdots$，k_j 已经被选定。令 k_{j+1} 使得在满足 I_{k_1}，$\cdots$，$I_{k_{j+1}}$ 两两不相交这一条件下，$|I_{k_{j+1}}|$ 尽可能大。如果不存在这样的 k_{j+1} 使得 I_{k_1}，$\cdots$，$I_{k_{j+1}}$ 互不相交，则该过程终止。

The technique used here is called a greedy algorithm because at each stage we select the largest remaining interval that is disjoint from the previously selected intervals.

因为我们从一个有限的列表开始，因此该过程必须在一定次数 m 选择后最终终止。

假设 $j \in \{1, \cdots\cdots, n\}$。为了完成证明，我们必须证明

$$I_j \subseteq (3 * I_{k_1}) \cup \cdots \cup (3 * I_{k_m}).$$

如果 $j \in \{k_1, \ldots, k_m\}$，则上述包含显然成立。

因此假设 $j \notin \{k_1, \ldots, k_m\}$。由于该过程在未选择 j 的情况下终止，区间 I_j 并非与 $I_{k_1}, \ldots, I_{k_m}$ 中的所有区间都互不相交。设 I_{k_L} 为该列表中第一个与 I_j 不互不相交的区间；因此 I_j 与 $I_{k_1}, \ldots, I_{k_{L-1}}$ 互不相交。由于 j 在步骤 L 中未被选取，我们得出 $|I_{k_L}| \geq |I_j|$。由于 $I_{k_L} \cap I_j \neq \varnothing$，这一最后的不等式蕴含（简单练习）$I_j \subseteq 3 * I_{k_L}$，从而完成证明。 ■

哈代-利特伍德极大不等式

现在我们将介绍一个精彩的定义，事实证明它极其有用。

4.6 定义 *Hardy–Littlewood maximal function; h^**

设 $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个勒贝格可测函数。则 h 的 *Hardy–Littlewood maximal function* 是函数 $h^* : \mathbf{R} \to [0, \infty]$，定义为

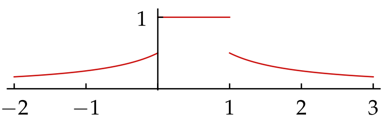
$$h^*(b) = \sup_{t>0} \frac{1}{2t} \int_{b-t}^{b+t} |h|.$$

换言之，$h^*(b)$ 是以 b 为中心的所有有界区间上 $|h|$ 的平均值的上确界。

4.7 示例 *Hardy–Littlewood maximal function of $\chi_{[0,1]}$*

像往常一样，令 $\chi_{[0,1]}$ 表示区间 $[0, 1]$ 的特征函数。然后，

$$(\chi_{[0,1]})^*(b) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-b)} & \text{if } b \leq 0, \\ 1 & \text{if } 0 < b < 1, \\ \frac{1}{2b} & \text{if } b \geq 1, \end{cases}$$



The graph of $(\chi_{[0,1]})^*$ on $[-2, 3]$.

正如你应当核实的那样。

如果 $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是勒贝格可测的，且 $c \in \mathbf{R}$，那么 $\{b \in \mathbf{R} : h^*(b) > c\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个开子集，正如你在本节练习 9 中被要求证明的那样。因此 h^* 是一个博雷尔可测函数。

设 $h \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 且 $c > 0$。马尔可夫不等式 (4.1) 估计了 $|h|$ 大于 c 的集合的大小。我们的下一个结果估计了 h^* 大于 c 的集合的大小。下一个结果中证明的 Hardy–Littlewood 极大不等式是证明勒贝格微分定理 (4.10) 的一个关键要素。注意，这一下一个结果比马尔可夫不等式要深刻得多。

4.8 ***Hardy–Littlewood maximal inequality***

设 $h \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$。则

$$|\{b \in \mathbf{R} : h^*(b) > c\}| \leq \frac{3}{c}\|h\|_1$$

对于每个 $c > 0$。

证明 设 F 是 $\{b \in \mathbf{R} : h^*(b) > c\}$ 的一个闭且有界的子集。我们将证明 $|F| \leq \frac{3}{c}\int_{-\infty}^{\infty}|h|$，这将推出我们所需的结果［见第 2D 节练习 24(a)］。

对于每个$b \in F$，存在$t_b > 0$，使得

4.9
$$\frac{1}{2t_b}\int_{b-t_b}^{b+t_b}|h| > c.$$

清晰地

$$F \subseteq \bigcup_{b \in F}(b - t_b, b + t_b).$$

海涅–博雷尔定理（2.12）告诉我们，这个对一个闭且有界集合的开覆盖存在一个有限子覆盖。换句话说，存在 $b_1, \ldots, b_n \in F$ 使得

$$F \subseteq (b_1 - t_{b_1}, b_1 + t_{b_1}) \cup \cdots \cup (b_n - t_{b_n}, b_n + t_{b_n}).$$

到 使记号更简洁，将上面的开区间重新标记为 I_1 ，……，I_n。

现在将 Vitali 覆盖引理（4.4）应用于列表 $I_1, \ldots, I_n$，得到一个两两不相交的子列表 $I_{k_1}, \ldots, I_{k_m}$，使得

$$I_1 \cup \cdots \cup I_n \subseteq (3 * I_{k_1}) \cup \cdots \cup (3 * I_{k_m}).$$

因此

$$\begin{aligned}
|F| &\leq |I_1 \cup \cdots \cup I_n| \\
&\leq |(3 * I_{k_1}) \cup \cdots \cup (3 * I_{k_m})| \\
&\leq |3 * I_{k_1}| + \cdots + |3 * I_{k_m}| \\
&= 3(|I_{k_1}| + \cdots + |I_{k_m}|) \\
&< \frac{3}{c}\Big(\int_{I_{k_1}}|h| + \cdots + \int_{I_{k_m}}|h|\Big) \\
&\leq \frac{3}{c}\int_{-\infty}^{\infty}|h|,
\end{aligned}$$

其中，上面的倒数第二个不等式来自于 4.9（注意，对于与 I_{k_j} 相对应的 b 的选择，有 $|I_{k_j}| = 2t_b$），而最后一个不等式成立是因为 $I_{k_1}, \ldots, I_{k_m}$ 彼此不相交。

最后一个不等式完成了证明。 ■

练习 4A

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $h: X \to \mathbf{R}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。证明 :

$$\mu(\{x \in X : |h(x)| \geq c\}) \leq \frac{1}{c^p} \int |h|^p \, d\mu$$

对于所有正数 c 和 p。

2 假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，其中 $\mu(X) = 1$ 且 $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$。证明:

$$\mu\Bigl(\Bigl\{x \in X : \Bigl|h(x) - \int h \, d\mu\Bigr| \geq c\Bigr\}\Bigr) \leq \frac{1}{c^2}\Bigl(\int h^2 \, d\mu - \Bigl(\int h \, d\mu\Bigr)^2\Bigr)$$

对于所有 $c > 0$。

[*The result above is called Chebyshev's inequality; it plays an important role in probability theory. Pafnuty Chebyshev* (*1821–1894*) *was Markov's thesis advisor.*]

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间。假设 $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ 和 $\|h\|_1 > 0$。证明存在至多一个数字 $c \in (0, \infty)$，使得

$$\mu(\{x \in X : |h(x)| \geq c\}) = \frac{1}{c}\|h\|_1.$$

4 证明 Vitali 覆盖引理（4.4）中的常数 3 不能被更小的正数所取代。

5 证明维塔利覆盖引理（4.4）的证明中最后一句留下作为练习的断言。

6 验证例 4.7 中关于 $\chi_{[0,\,1]}$ 的 Hardy–Littlewood 最大函数的公式。

7 寻找$[0, 1] \cup [2, 3]$的特征函数的哈迪–利特伍德最大函数的公式。

8 求函数 h 的 Hardy–Littlewood 极大函数的一个公式，其中 $h: \mathbf{R} \to [0, \infty)$ 定义为

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

9 假设 $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是勒贝格可测的。证明:

$$\{b \in \mathbf{R} : h^*(b) > c\}$$

对于每个 $c \in \mathbf{R}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个开子集。

10 证明或给出反例：如果 $h : \mathrm{R} \to [0, \infty)$ 是一个递增函数，那么 h^* 是一个递增函数。

11 给出一个Borel可测函数的例子 $h : \mathrm{R} \to [0, \infty)$，使得 $h^*(b) < \infty$ 对于所有 $b \in \mathrm{R}$ 都成立，但 $\sup\{h^*(b) : b \in \mathrm{R}\} = \infty$。

12 证明 $|\{b \in \mathrm{R} : h^*(b) = \infty\}| = 0$ 对于每个 $h \in \mathcal{L}^1$ (R).

13 证明存在 $h \in \mathcal{L}^1(\mathrm{R})$，使得对于每个 $b \in \mathrm{Q}$，$h^*(b) = \infty$。

14 假设 $h \in \mathcal{L}^1(\mathrm{R})$。证明

$$|\{b \in \mathbf{R} : h^*(b) \geq c\}| \leq \frac{3}{c}\|h\|_1$$

对于每个 $c > 0$.

[*This result slightly strengthens the Hardy–Littlewood maximal inequality* (*4.8*) *because the set on the left side above includes those* $b \in \mathrm{R}$ *such that* $h^*(b) = c$. *A much deeper strengthening comes from replacing the constant* 3 *in the Hardy–Littlewood maximal inequality with a smaller constant. In 2003, Antonios Melas answered what had been an open question about the best constant. He proved that the smallest constant that can replace* 3 *in the Hardy–Littlewood maximal inequality is* $(11 + \sqrt{61})/12 \approx 1.56752$*; see* 数学年刊 *157* (*2003*)*, 647–688.*]

4B 积分的导数

勒贝格微分定理

下一个结果表明，在小区间上，函数在 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 中与其取值之间的平均差异几乎处处都很小。下面结果中的分数分母里的 2 可以去掉，但保留它可以使积分区间的长度与分母 $2t$ 恰当地相匹配。

下一个结果称为勒贝格微分定理，尽管并未看到任何导数的踪影。不过，我们很快就会看到该结果的另一种版本是如何处理导数的。艰苦的工作体现在这个第一个版本的证明中。

4.10 *Lebesgue Differentiation Theorem, first version*

假设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$。则

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t} \int_{b-t}^{b+t} |f - f(b)| = 0$$

对几乎每个 $b \in \mathbf{R}$。

在给出勒贝格微分定理第一版本的形式化证明之前，我们先暂停一下，为该证明提供一些动机。如果 $b \in \mathbf{R}$ 且 $t > 0$，则 3.25 给出了一个简单的估计

$$\frac{1}{2t} \int_{b-t}^{b+t} |f - f(b)| \leq \sup\{|f(x) - f(b)| : |x - b| \leq t\}.$$

如果f在b处连续，则当$t \downarrow 0$时，该不等式的右侧的极限为0，从而在f在$\mathbf{R}$上连续的特殊情形下证明了4.10。

为了证明勒贝格微分定理，我们将利用（3.48）用连续函数来逼近 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 中的任意函数。上一段表明该连续函数具有所需的行为。我们将使用 Hardy–Littlewood 极大不等式（4.8）来说明这种逼近能够产生近似所需的行为。现在我们已准备好给出证明的形式化细节。

4.10 的证明 令 $\delta > 0$。由 3.48，对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，都存在一个连续函数 $h_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得

4.11
$$\|f - h_k\|_1 < \frac{\delta}{k2^k}.$$

让

$$B_k = \{b \in \mathbf{R} : |f(b) - h_k(b)| \leq \tfrac{1}{k} \text{ and } (f - h_k)^*(b) \leq \tfrac{1}{k}\}.$$

然后

4.12
$$\mathbf{R} \setminus B_k = \{b \in \mathbf{R} : |f(b) - h_k(b)| > \tfrac{1}{k}\} \cup \{b \in \mathbf{R} : (f - h_k)^*(b) > \tfrac{1}{k}\}.$$

将马尔可夫不等式（4.1）应用于函数$f - h_k$，并结合（4.11），可得

4.13 $$\left|\{b \in \mathbf{R} : |f(b) - h_k(b)| > \tfrac{1}{k}\}\right| < \frac{\delta}{2^k}.$$

哈迪-李特伍德最大不等式 (4.8) 应用于函数 $f - h_k$ 和 4.11 时意味着

4.14 $$\left|\{b \in \mathbf{R} : (f - h_k)^*(b) > \tfrac{1}{k}\}\right| < \frac{3\delta}{2^k}.$$

现在，由 4.12、4.13 和 4.14 可知

$$|\mathbf{R} \setminus B_k| < \frac{\delta}{2^{k-2}}.$$

让

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k.$$

然后

4.15 $$|\mathbf{R} \setminus B| = \left|\bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbf{R} \setminus B_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\mathbf{R} \setminus B_k| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{k-2}} = 4\delta.$$

假设 $b \in B$ 和 $t > 0$。然后对于每个 $k \in \mathrm{Z}^+$ 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2t}\int_{b-t}^{b+t} |f - f(b)| &\leq \frac{1}{2t}\int_{b-t}^{b+t} \big(|f - h_k| + |h_k - h_k(b)| + |h_k(b) - f(b)|\big) \\
&\leq (f - h_k)^*(b) + \Big(\frac{1}{2t}\int_{b-t}^{b+t} |h_k - h_k(b)|\Big) + |h_k(b) - f(b)| \\
&\leq \frac{2}{k} + \frac{1}{2t}\int_{b-t}^{b+t} |h_k - h_k(b)|.
\end{aligned}$$

由于 h_k 是连续的，对所有 $t > 0$ 足够接近 0 时, –最后一项小于 $\frac{1}{k}$（“足够接近”到什么程度取决于 k）。换句话说，对每个 $k \in \mathrm{Z}^+$，我们有

$$\frac{1}{2t}\int_{b-t}^{b+t} |f - f(b)| < \frac{3}{k}$$

对于所有 $t >$ 充分接近 0 的 0。

因此，我们得出结论：

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t}\int_{b-t}^{b+t} |f - f(b)| = 0$$

对于所有 $b \in B$。

设 A 表示这样的数的集合：$a \in \mathrm{R}$，使得

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t}\int_{a-t}^{a+t} |f - f(a)|$$

要么不存在，要么为非零。我们已经证明 $A \subseteq (\mathrm{R} \setminus B)$。因此

$$|A| \leq |\mathbf{R} \setminus B| < 4\delta,$$

其中最后一个不等式来自 4.15。由于 δ 是一个任意的正数，最后一个不等式意味着 $|A| = 0$，从而完成证明。 ∎

导数

你应该还记得微积分课程中的以下定义。

4.16 定义 ***derivative; g'; differentiable***

设 $g: I \to \mathbf{R}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 的一个开区间 I 上的函数，且 $b \in I$。g 在 b 处的 *derivative*，记作 $g'(b)$，定义为

$$g'(b) = \lim_{t \to 0} \frac{g(b+t) - g(b)}{t}$$

如果上述极限存在，则称 g 在 b 处为 *differentiable*。

我们现在转向微积分基本定理，以及一种避免连续性假设的强有力推广。这些结果表明，微分与积分可以被视为互为逆运算。

你在微积分课上见过下面的结果，只是现在函数f只要求是勒贝格可测的（并且其绝对值具有有限的勒贝格积分）。当然，在下一个结果中，我们还需要要求f在关键点b处连续，因为在单个数值处改变f的取值并不会改变函数g。

4.17 ***Fundamental Theorem of Calculus***

假设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$。定义 $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 如下

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} f.$$

Supp如果 $b \in \mathbf{R}$ 且 f 在 b 处连续，则 g 在 b 处可微。 和

$$g'(b) = f(b).$$

证明 如果 $t \neq 0$，则

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(b+t) - g(b)}{t} - f(b) \right| &= \left| \frac{\int_{-\infty}^{b+t} f - \int_{-\infty}^{b} f}{t} - f(b) \right| \\ &= \left| \frac{\int_b^{b+t} f}{t} - f(b) \right| \\ &= \left| \frac{\int_b^{b+t} \bigl(f - f(b)\bigr)}{t} \right| \qquad (4.18) \\ &\leq \sup_{\{x \in \mathbf{R} : |x-b| < |t|\}} |f(x) - f(b)|. \end{aligned}$$

如果 $\varepsilon > 0$，那么根据 f 在 b 处的连续性，最后的量对于足够接近 0 的 t 小于 ε。因此，g 在 b 和 $g'(b) = f(b)$ 处是可微的。■

$\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 上的一个函数不必在任何地方连续。因此，微积分基本定理（4.17）在对这种函数的积分进行求导时可能提供不了任何信息。然而，下面的结果表明，即使被积函数完全不具有连续性，几乎处处一切仍然是良好的。

4.19 ***Lebesgue Differentiation Theorem, second version***

设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$。定义 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} f.$$

则 $g'(b) = f(b)$ 对几乎所有 $b \in \mathbf{R}$.

证明 假设 $t \neq 0$。则由 4.18 可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(b+t)-g(b)}{t} - f(b)\right| &= \left|\frac{\int_b^{b+t}(f - f(b))}{t}\right| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_b^{b+t}|f - f(b)| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_{b-t}^{b+t}|f - f(b)|\end{aligned}$$

对所有 $b \in \mathbf{R}$。根据勒贝格微分定理（4.10）的第一种表述，当 $t \to 0$ 时，最后一个量的极限为 0，且对几乎每个 $b \in \mathbf{R}$ 都成立。因此，$g'(b) = f(b)$ 对几乎每个 $b \in \mathbf{R}$ 都成立。■

现在我们可以回答本章开篇提出的问题。

4.20 ***no set constitutes exactly half of each interval***

不存在一个勒贝格可测集合 $E \subseteq [0, 1]$，使得

$$|E \cap [0, b]| = \frac{b}{2}$$

for all $b \in [0, 1]$.

证明 假设确实存在一个具有上述性质的勒贝格可测集合 $E \subseteq [0, 1]$。定义 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为

$$g(b) = \int_{-\infty}^{b} \chi_E\,.$$

因此，对所有 $b \in [0, 1]$，$g(b) = \frac{b}{2}$。因此，对所有 $b \in (0, 1)$，$g'(b) = \frac{1}{2}$。

勒贝格微分定理（4.19）意味着 $g'(b) = \chi_E(b)$ 对几乎所有 $b \in$ 属于 $\mathbf{R}$ 都成立。然而，χ_E 从不取值 $\frac{1}{2}$，这与前一段的结论相矛盾。这个矛盾完成了证明。■

下一个结果表明，$\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 中的一个函数几乎处处等于其在小区间上的平均值的极限。这些双侧结果比单侧结果更自然地推广到更高维（取以 b 为中心的球上的平均值）。

4.21 $\mathcal{L}1(\mathbf{R})$ *function equals its local average almost everywhere*

设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$。则

$$f(b) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t} \int_{b-t}^{b+t} f$$

对于几乎所有的 $b \in \mathbf{R}$.

证明 假设 $t > 0$。则

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{2t} \int_{b-t}^{b+t} f \right) - f(b) \right| &= \left| \frac{1}{2t} \int_{b-t}^{b+t} \bigl(f - f(b)\bigr) \right| \\ &\leq \frac{1}{2t} \int_{b-t}^{b+t} |f - f(b)|. \end{aligned}$$

所需的结果现由勒贝格微分定理的第一种形式（4.10）推出。

再次，上述结果的结论在f连续的每一个数b处都成立。上述结果的显著之处在于，即使f处处不连续，该结论仍然对几乎每一个实数b成立。

密度

下一一定义捕捉了一个集合在以数字 b 为中心的小区间中的比例概念。

4.22 定义 *density*

设 $E \subseteq \mathbf{R}$。数 $b \in \mathbf{R}$ 处 E 的 *density* 是

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{|E \cap (b-t, b+t)|}{2t}$$

如果此极限存在（否则 E 在 b 处的密度是未定义的）。

4.23 示例 *density of an interval*

$$\text{The density of } [0,1] \text{ at } b = \begin{cases} 1 & \text{if } b \in (0,1), \\ \frac{1}{2} & \text{if } b = 0 \text{ or } b = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

接下来的美丽结果展示了本章中开发的技术的强大功能。

4.24 *Lebesgue Density Theorem*

假设 $E \subseteq \mathbf{R}$ 是一个勒贝格可测集。那么 E 的密度在 E 的几乎每个元素处为 1，而在 $\mathbf{R} \setminus E$ 的几乎每个元素处为 0。

证明首先假设 $|E| < \infty$。因此 $\chi_E \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$。因为

$$\frac{|E \cap (b-t, b+t)|}{2t} = \frac{1}{2t}\int_{b-t}^{b+t} \chi_E$$

对于每个 $t > 0$ 且每个 $b \in \mathbf{R}$，所需的结果可立即由 4.21 得出。

现在考虑$|E| = \infty$的情况[这意味着$\chi_E \notin \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$，因此无法使用如4.21所述的公式]。对于$k \in \mathbf{Z}^+$，令$E_k = E \cap (-k, k)$。如果$|b| < k$，则$b$处的$E$的密度等于$b$处的$E_k$的密度。根据前一段应用于$E_k$，存在集合$F_k \subseteq E_k$和$G_k \subseteq \mathbf{R} \setminus E_k$，使得$|F_k| = |G_k| = 0$，并且$E_k \setminus F_k$中每个元素的$E_k$的密度等于1，$\{\mathbf{R} \setminus E_k\} \setminus G_k$中每个元素的$E_k$的密度等于0。

令 $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ 和 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$。然后 $|F| = |G| = 0$，且 E 的密度在 $E \setminus F$ 的每个元素处为 1，在 $(\mathbf{R} \setminus E) \setminus G$ 的每个元素处为 0。 ■

由下一个结果提供的坏Borel集导致了一个坏的Borel可测函数。具体地，设E为4.25中的坏Borel集。然后χ_E是一个在处处不连续的Borel可测函数。此外，函数χ_E不能在测度为0的集合上修改，使其在任何地方连续（与函数$\chi_{\mathbf{Q}}$相对）。

The Lebesgue Density Theorem makes the example provided by the next result somewhat surprising. Be sure to spend some time pondering why the next result does not contradict the Lebesgue Density Theorem. Also, compare the next result to 4.20.

尽管上文讨论的函数 χ_E 在任何地方都不连续，并且该函数在测度为 0 的集合上的任何修改也都不连续，但由下式定义的函数 g

$$g(b) = \int_0^b \chi_E$$

在几乎所有地方可微（由 4.19 得出）。

以下4.25的证明基于沃尔特·鲁丁的一个思想。

4.25 *bad Borel set*

存在一个Borel集合 $E \subseteq \mathbf{R}$，使得

$$0 < |E \cap I| < |I|$$

对于每个非空有界开区间 I。

证明 我们在构造中使用如下事实:

4.26 假设 G 是 R 的一个非空开子集。则存在一个闭集 $F \subseteq G \setminus \mathbf{Q}$，使得 $|F| > 0$。

为证明4.26，令J为包含于G中的一个闭区间，使得$0 < |J|$。令r_1、r_2、⋯⋯为所有有理数的一个列表。令

$$F = J \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(r_k - \frac{|J|}{2^{k+2}}, r_k + \frac{|J|}{2^{k+2}}\Big).$$

则 F 是 R 的一个闭子集，且 $F \subseteq J \setminus \mathbf{Q} \subseteq G \setminus \mathbf{Q}$。另有，$|J \setminus F| \leq \frac{1}{2}|J|$,- 因为 $J \setminus F \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(r_k - \frac{|J|}{2^{k+2}}, r_k + \frac{|J|}{2^{k+2}}\Big)$。因此

$$|F| = |J| - |J \setminus F| \geq \tfrac{1}{2}|J| > 0,$$

完成4.26的证明。

为了构造具有所需性质的集合 E，令 I_1、I_2、⋯⋯ 为一个序列，该序列由所有端点为有理数的非空有界开区间（属于 R）组成。令 $F_0 = \widehat{F}_0 = \varnothing$，并按归纳法构造序列 F_1、F_2、⋯⋯ 以及 $\widehat{F}_1$、$\widehat{F}_2$、⋯⋯ 的 R 中闭子集如下：假设 $n \in \mathbf{Z}^+$，并且 F_0、⋯⋯、F_{n-1} 以及$\widehat{F}_0$、⋯⋯、$\widehat{F}_{n-1}$ 已被选取为不包含任何有理数的闭集。因此

$$I_n \setminus (\widehat{F}_0 \cup \ldots \cup \widehat{F}_{n-1})$$

是一个非空的开集（非空因为它包含 I_n 中的所有有理数）。将 4.26 应用于上述开集，我们看到存在一个包含于上述集合中的闭集 F_n，使得 F_n 不包含任何有理数，并且 $|F_n| > 0$。再次应用 4.26，但这一次是对开集

$$I_n \setminus (F_0 \cup \ldots \cup F_n),$$

由于它包含 I_n 中的所有有理数，因此它是非空的，我们看到存在一个包含于上述集合中的闭集 $\widehat{F}_n$，使得 $\widehat{F}_n$ 不包含任何有理数，且 $|\widehat{F}_n| > 0$。

现在令

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

我们的构造意味着：对所有 k，$n \in \mathbf{Z}^+$，$F_k \cap \widehat{F}_n = \varnothing$。因此，对所有 $n \in \mathbf{Z}^+$，$E \cap \widehat{F}_n = \varnothing$。从而，对所有 $n \in \mathbf{Z}^+$，$\widehat{F}_n \subseteq I_n \setminus E$。

设 I 是一个非空有界的开区间。则存在某个 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $I_n \subseteq I$。因此

$$0 < |F_n| \leq |E \cap I_n| \leq |E \cap I|.$$

此外，

$$|E \cap I| = |I| - |I \setminus E| \leq |I| - |I_n \setminus E| \leq |I| - |\widehat{F}_n| < |I|,$$

完成证明。■

EXERCISES 4B

For $f \in \mathcal{L}1(\mathrm{R})$ and I an interval of R with $0 < |I| < \infty$, let f_I denote the average of f on I. In other words, $f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f$.

1 假设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{R})$。证明

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{2t}\int_{b-t}^{b+t}|f - f_{[b-t,\,b+t]}| = 0$$

对几乎所有 $b \in \mathrm{R}$。

2 设 $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{R})$。证明

$$\lim_{t\downarrow 0}\sup\Big\{\frac{1}{|I|}\int_I |f - f_I| : I \text{ is an interval of length } t \text{ containing } b\Big\} = 0$$

对几乎所有的 $b \in \mathrm{R}$。

3 假设 $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 是一个勒贝格可测函数，且 $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathrm{R})$。证明

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{2t}\int_{b-t}^{b+t}|f - f(b)|^2 = 0$$

对于几乎每个 $b \in \mathrm{R}$.

4 证明勒贝格微分定理（4.19）在将关于 $\int_{-\infty}^{\infty}|f| < \infty$ 的假设削弱为对所有 $x \in \mathrm{R}$ 满足 $\int_{-\infty}^{x}|f| < \infty$ 的要求时仍然成立。

5 设 $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 是一个勒贝格可测函数。证明

$$|f(b)| \le f^*(b)$$

对几乎所有的 $b \in \mathrm{R}$。

6 证明：若 $h \in \mathcal{L}^1(\mathrm{R})$ 且对所有 $s \in \mathrm{R}$ 有 $\int_{-\infty}^{s} h = 0$，则对几乎每个 $s \in \mathrm{R}$ 有 $h(s) = 0$。

7 给出一个 R 的 Borel 子集的例子，其在 0 处的密度未定义。

8 给出一个 R 的 Borel 子集的例子，使其在 0 处的密度为 $\frac{1}{3}$。–

9 证明：如果 $t \in [0, 1]$，则存在一个博雷尔集 $E \subseteq \mathrm{R}$，使得 E 在 0 处的密度为 t。

10 假设 E 是 R 的一个勒贝格可测子集，使得 E 的密度在 E 的每个元素处等于 1，并且在 $\mathrm{R} \setminus E$ 的每个元素处等于 0。证明 $E = \varnothing$ 或 $E = \mathrm{R}$。

Chapter 5
Product Measures

勒贝格测度在R上的定义推广了区间长度的概念。在本章中，我们将看到二维勒贝格测度在R^2上如何推广矩形面积的概念。更一般地，我们构造了作为两个测度乘积的新测度。

一旦这些新度量被构造出来，就会出现如何计算相对于这些新度量的积分的问题。20世纪头十年证明的美丽定理允许我们将相对于积度量的积分计算为涉及产生积度量的两个度量的迭代积分。此外，我们将看到，在合理条件下，我们可以交换迭代积分的顺序。

Main building of Scuola Normale Superiore di Pisa, the university in Pisa, Italy, where Guido Fubini (1879–1943) received his PhD in 1900. In 1907 Fubini proved that under reasonable conditions, an integral with respect to a product measure can be computed as an iterated integral and that the order of integration can be switched. Leonida Tonelli (1885–1943) also taught for many years in Pisa; he also proved a crucial theorem about interchanging the order of integration in an iterated integral.

5A 测度空间的积

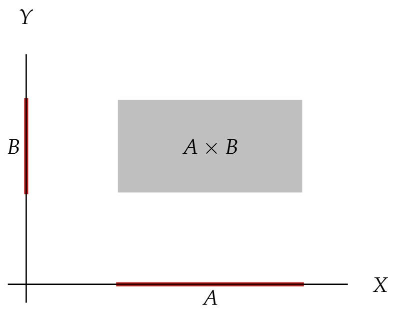
σ代数的乘积

我们构建产品度量的第一步是构造两个 σ -代数的积。我们从以下定义开始。

5.1 定义 *rectangle*

假设 X 和 Y 是集合。$X \times Y$ 中的 *rectangle* 是形如 $A \times B$ 的集合，其中 $A \subseteq X$ 和 $B \subseteq Y$。

在思考上述定义的矩形时，请记住这里所示的图形。然而，请记住，A 和 B 不必像图中所示那样是区间。实际上，区间的概念在任意集合的普遍性中是没有意义的。



现在我们可以定义两个 σ-代数的乘积。

5.2 定义 *product of two σ-algebras; $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$; measurable rectangle*

假设 $(X, \mathcal{S})$ 和 $(Y, \mathcal{T})$ 是可测空间。那么

- *product* $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$被定义为在 $X \times Y$ 上包含的最小 σ-代数

$$\{A \times B : A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}\};$$

- 在 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中的一个 *measurable rectangle* 是形如 $A \times B$ 的集合，其中 $A \in \mathcal{S}$ 且 $B \in \mathcal{T}$。

使用上面第二个要点中引入的术语，我们可以说 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$是包含 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中所有可测矩形的最小 σ-代数。本节的练习 1 要求你证明 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中的可测矩形是 $X \times Y$ 中唯一在 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中的矩形。

The notation $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ is not used because $\mathcal{S}$ and $\mathcal{T}$ are sets (of sets), and thus the notation $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ already is defined to mean the set of all ordered pairs of the form (AB), where $A \in \mathcal{S}$ and $B \in \mathcal{T}$.

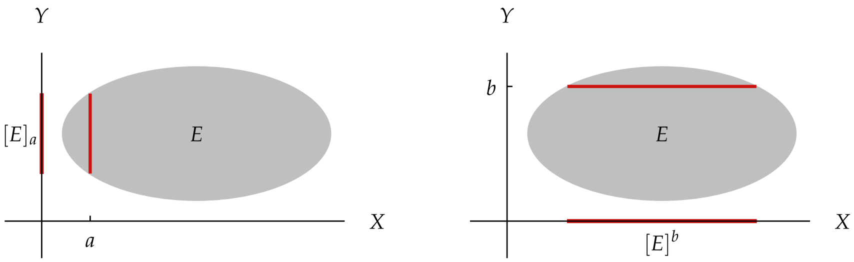
截面的概念在我们对乘积测度的构建中起着至关重要的作用。首先，我们定义集合的截面，然后定义函数的截面。

5.3 定义 *cross sections of sets;* $[E]_a$ *and* $[E]^b$

设 X 和 Y 是集合且 $E \subseteq X \times Y$。那么对于 $a \in X$ 和 $b \in Y$，*cross sections* $[E]_a$ 和 $[E]^b$ 定义为

$$[E]_a = \{y \in Y:\ (a, y) \in E\} \text{ 和 } [E]^b = \{x \in X:\ (x, b) \in E\}。$$

5.4 示例 *cross sections of a subset of* $X \times Y$



5.5 示例 *cross sections of rectangles*

假设 X 和 Y 是集合，并且 $A \subseteq X$ 和 $B \subseteq Y$。如果 $a \in X$ 并且 $b \in Y$，那么

$$[A \times B]_a = \begin{cases} B & \text{if } a \in A, \\ \varnothing & \text{if } a \notin A \end{cases} \quad \text{and} \quad [A \times B]^b = \begin{cases} A & \text{if } b \in B, \\ \varnothing & \text{if } b \notin B, \end{cases}$$

正如你应当核实的那样。

下一个结果表明，截面保持可测性。

5.6 *cross sections of measurable sets are measurable*

假设 $\mathcal{S}$ 是 σ-代数定义在 X 上，且 $\mathcal{T}$是 σ-代数定义在 Y 上。如果 $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$，则

$$[E]_a \in \mathcal{T} \text{ for every } a \in X \quad \text{and} \quad [E]^b \in \mathcal{S} \text{ for every } b \in Y.$$

证明 设 $\mathcal{E}$ 表示由 $X \times Y$ 的子集 E 组成的集合，其中该结果的结论成立。然后 $A \times B \in \mathcal{E}$ 对所有 $A \in \mathcal{S}$ 以及所有 $B \in \mathcal{T}$ (由例 5.5) 成立。集合 $\mathcal{E}$ 在取补和可数并下是封闭的，因为

$$[(X \times Y) \setminus E]_a = Y \setminus [E]_a$$

和

$$[E_1 \cup E_2 \cup \cdots]_a = [E_1]_a \cup [E_2]_a \cup \cdots$$

对于$X \times Y$的所有子集E、E_1、E_2、...以及所有$a \in X$，正如你应当验证的那样；相对于所有$b \in Y$的截面也有类似的陈述。

因为$\mathcal{E}$是一个包含$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中所有可测矩形的$\sigma$-代数，我们得出$\mathcal{E}$包含$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$。 ■

现在我们定义函数的截面。

5.7 定义 *cross sections of functions;* $[f]_a$ *and* $[f]^b$

设 X 和 Y 是集合，且 $f\colon X\times Y\to\mathbf{R}$ 是一个函数。那么对于 $a\in X$ 和 $b\in Y$，截面函数 $[f]_a\colon Y\to\mathbf{R}$ 和 $[f]^b\colon X\to\mathbf{R}$ 定义为

$$[f]_a(y)=f(a,y)\text{ for }y\in Y\quad\text{and}\quad[f]^b(x)=f(x,b)\text{ for }x\in X.$$

5.8 示例 *cross sections*

- 假设 $f\colon\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 由 $f(x$ 定义，$y)=5x^2+y^3$。T 母鸡

$$[f]_2(y)=20+y^3\quad\text{and}\quad[f]^3(x)=5x^2+27$$

  对于所有 $y\in\mathbf{R}$ 以及所有 $x\in\mathbf{R}$，正如你应该验证的那样。

- 设 X 和 Y 是集合，且 $A\subseteq X$ 和 $B\subseteq Y$。如果 $a\in X$ 且 $b\in Y$，则

$$[\chi_{A\times B}]_a=\chi_A(a)\chi_B\quad\text{and}\quad[\chi_{A\times B}]^b=\chi_B(b)\chi_A,$$

  正如你应当核实的那样。

下一个结果表明，截面保持可测性，不过这一次是在函数而非集合的语境下。

5.9 *cross sections of measurable functions are measurable*

设 $\mathcal{S}$ 是 X 上的一个 σ-代数，且 $\mathcal{T}$是 Y 上的一个 σ-代数。设 $f\colon X\times Y\to\mathbf{R}$ 是一个 $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$-可测函数。则

$$[f]_a\text{ is a }\mathcal{T}\text{-measurable function on }Y\text{ for every }a\in X$$

和

$$[f]^b\text{ is an }\mathcal{S}\text{-measurable function on }X\text{ for every }b\in Y.$$

P屋顶 假设D是R的一个Borel子集，并且$a\in X$。如果$y\in Y$,母鸡

$$\begin{aligned}y\in([f]_a)^{-1}(D)&\iff[f]_a(y)\in D\\&\iff f(a,y)\in D\\&\iff(a,y)\in f^{-1}(D)\\&\iff y\in[f^{-1}(D)]_a.\end{aligned}$$

因此

$$([f]_a)^{-1}(D)=[f^{-1}(D)]_a.$$

B因为 f 是一个 $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$-可测函数，$f^{-1}(D)\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$。因此该方程
a上述和 5.6 表明，$([f]_a)^{-1}(D)\in\mathcal{T}$。因此，$[f]_a$ 是一个 $\mathcal{T}$-可测函数。同样的思想表明，对每个 $b\in Y$，$[f]^b$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。 ■

单调类定理

以下标准的两步技术通常适用于证明每个 σ -代数中的集合具有某种属性:

1. 证明在生成 σ -代数的集合族中的每个集合都有以下性质;

2显示具有该属性的集合是一个 σ-代数。 ebra.

例如，5.6的证明使用了上述技巧——首先我们展示了$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中的每个可测矩形都具有所需的性质，然后我们展示了具有所需性质的集合的集合是一个σ-代数（这完成了证明，因为$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$是包含可测矩形的最小$\sigma$-代数）。

上述技术应尽可能使用。然而，在某些情况下，似乎没有合理的方法来验证具有所需性质的集合族是一个 σ -代数。我们将在下一个小节中遇到这种情况。为了解决这个问题，我们需要引入另一种技术，这涉及到所谓的单调类
。

以下定义将用于我们关于单调类的主要定理。

5.10 定义 *algebra*

假设 W 是一个集合，$\mathcal{A}$ 是 W 的子集集合。如果满足以下三个条件，则称 $\mathcal{A}$ 是 W 上的 *algebra*。

- $\varnothing \in \mathcal{A}$.
- 如果 $E \in \mathcal{A}$，则 $W \setminus E \in \mathcal{A}$。
- 如果 E 和 F 是 $\mathcal{A}$ 的元素，则 $E \cup F \in \mathcal{A}$。

因此，一个代数在取补和有限并下是封闭的；一个σ-代数在取补和可数并下是封闭的。

5.11 示例 *collection of finite unions of intervals is an algebra*

设 $\mathcal{A}$ 为实数集 R 上所有区间的有限并所构成的集合。这里我们包括所有区间——开区间、闭区间、有界区间、无界区间、只由一个点组成的集合，以及既非开也非闭的区间，因为它们包含一个端点而不包含另一个端点。

显然 $\mathcal{A}$ 对有限并运算封闭。你还应该验证 $\mathcal{A}$ 对补集运算封闭。因此 $\mathcal{A}$ 是 R 上的一个代数。

5.12 示例 *collection of countable unions of intervals is not an algebra*

设 $\mathcal{A}$ 是 R 的区间的可数并的全体。
显然 $\mathcal{A}$ 在有限并下封闭（并且也在可数并下封闭）。你应该验证 $\mathcal{A}$ 在取补下并不封闭。因此 $\mathcal{A}$ 既不是代数，也不是 R 上的 σ-代数。

下面的结果给出了一个我们将加以利用的代数结构的例子。

5.13 ***the set of finite unions of measurable rectangles is an algebra***

设（$X, \mathcal{S}$）和（$Y, \mathcal{T}$）是可测空间。则

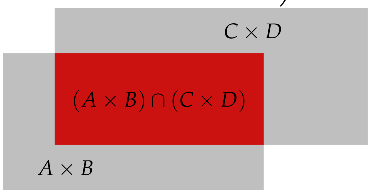
（a）$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中可测矩形的有限并所构成的集合是 $X \times Y$ 上的一个代数;

（b）$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中任意可测矩形的有限并都可以写成 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中两两不相交的可测矩形的有限并。

证明 令 $\mathcal{A}$ 表示 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中可测矩形的有限并的集合。显然 $\mathcal{A}$ 在有限并下封闭。

集合 $\mathcal{A}$ 在有限交下也是封闭的。为验证这一断言，注意如果 $A_1, \dots, A_n$, $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{S}$ 和 $B_1, \dots, B_n, D_1, \dots, D_m \in \mathcal{T}$，则

$$\Big((A_1 \times B_1) \cup \cdots \cup (A_n \times B_n)\Big) \bigcap \Big((C_1 \times D_1) \cup \cdots \cup (C_m \times D_m)\Big)$$
$$= \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m} \Big((A_j \times B_j) \cap (C_k \times D_k)\Big)$$
$$= \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m} \Big((A_j \cap C_k) \times (B_j \cap D_k)\Big),$$



Intersection of two rectangles is a rectangle.

这意味着 $\mathcal{A}$ 在有限交下封闭。

如果 $A \in \mathcal{S}$ 和 $B \in \mathcal{T}$，那么

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = \Big((X \setminus A) \times Y\Big) \cup \Big(X \times (Y \setminus B)\Big).$$

因此，$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中每个可测矩形的补集都属于 $\mathcal{A}$。因此，$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中有限个可测矩形的并的补集属于 $\mathcal{A}$ (，使用德摩根定律以及上一段中的结果，即 $\mathcal{A}$ 在有限交下封闭)。换言之，$\mathcal{A}$ 在取补下封闭，从而完成了 (a) 的证明。

为了证明(b)，注意如果$A \times B$和$C \times D$是$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中的可测矩形，那么（如上图所示可以验证）

5.14 $$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \times B) \cup \Big(C \times (D \setminus B)\Big) \cup \Big((C \setminus A) \times (B \cap D)\Big).$$

上述等式将 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中两个可测矩形的并表示为 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中三个互不相交的可测矩形的并。

现在考虑 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中任意有限个可测矩形的并集。如果这不是一个互不相交的并集，则在该并集中选择任意一对不互不相交的可测矩形，并按照 5.14 中的方法，用三个互不相交的可测矩形的并集替换这两个可测矩形。重复这一过程，直到得到由可测矩形组成的互不相交的并集。■

现在我们将单调类定义为在可数递增并以及可数递减交下封闭的一族集合。

5.15 定义 *monotone class*

设 W 是一个集合，$\mathcal{M}$ 是 W 的子集的集合。若满足以下两个条件，则称 $\mathcal{M}$ 为 W 上的一个 *monotone class*。

- 如果$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$是在$\mathcal{M}$中的一列递增的集合序列，则$\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$。
- 如果$E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$是在$\mathcal{M}$中的递减集合序列，则$\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$。

显然，每个σ-代数都是一个单调类。然而，正如下一个例子所示，有些单调类甚至在有限并下也不封闭。

5.16 示例 *a monotone class that is not an algebra*

假设 $\mathcal{A}$ 是 R 上所有区间的集合。则 $\mathcal{A}$ 对可数递增并与可数递减交封闭。因此 $\mathcal{A}$ 是 R 上的一个单调类。然而，$\mathcal{A}$ 对有限并不封闭，且 $\mathcal{A}$ 对取补不封闭。因此 $\mathcal{A}$ 既不是代数，也不是 R 上的 σ-代数。

如果 $\mathcal{A}$ 是某个集合 W 的子集族，那么所有定义在 W 上且包含 $\mathcal{A}$ 的单调类的交集是一个包含 $\mathcal{A}$ 的单调类。因此，这个交集是定义在 W 上并包含 $\mathcal{A}$ 的最小单调类。

下一个结果在用于证明 σ-代数中的每个集合都具有某个性质的标准技术不起作用时，提供了一个有用的工具。

5.17 *Monotone Class Theorem*

设 $\mathcal{A}$ 是集合 W 上的一个代数。则包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ-代数是包含 $\mathcal{A}$ 的最小单调类。

证明 令 $\mathcal{M}$ 表示包含 $\mathcal{A}$ 的最小单调类。由于每个 σ-代数都是单调类，$\mathcal{M}$ 包含于包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ-代数中。为证明反向包含，首先假设 $A \in \mathcal{A}$。令

$$\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{M} : A \cup E \in \mathcal{M}\}.$$

于是$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ (，因为$\mathcal{A}$中两个集合的并仍在$\mathcal{A}$)中。稍加思考即可看出$\mathcal{E}$是一个单调类。因此，包含$\mathcal{A}$的最小单调类包含于$\mathcal{E}$，这意味着$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$。因此我们已经证明了对每个$E \in \mathcal{M}$都有$A \cup E \in \mathcal{M}$。

现在令

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{M} : D \cup E \in \mathcal{M} \text{ for all } E \in \mathcal{M}\}.$$

上一段显示了 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$。稍作思考后可以发现 $\mathcal{D}$ 是一个单调类。因此，正如上一段所述，我们得出结论 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$。因此，我们已经证明了对于所有 D，$E \in \mathcal{M}$，$D \cup E \in \mathcal{M}$。

上面的段落显示了单调类 $\mathcal{M}$ 在有限并运算下是闭合的。现在如果 E_1、E_2、... $\in \mathcal{M}$，那么

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots = E_1 \cup (E_1 \cup E_2) \cup (E_1 \cup E_2 \cup E_3) \cup \cdots ,$$

这是一个递增的集合序列的并集，见前一段$\mathcal{M}$ (。我们得出结论，$\mathcal{M}$ 在可数并集下是闭合的。

最终，让

$$\mathcal{M}' = \{E \in \mathcal{M} : W \setminus E \in \mathcal{M}\}.$$

然后 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}'$ (因为 $\mathcal{A}$ 对补集封闭)。再一次，你应该验证 $\mathcal{M}'$ 是一个单调类。因此 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$。我们得出结论 $\mathcal{M}$ 对补集封闭。

前两段显示了 $\mathcal{M}$ 对可数并和对补集是封闭的。因此 $\mathcal{M}$ 是一个包含 $\mathcal{A}$ 的 σ-代数。因此 $\mathcal{M}$ 包含了包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ-代数，从而完成了证明。

度量的乘积

以下定义将会有用。

5.18 定义 *finite measure; σ-finite measure*

- 一个在可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的测度 μ 被称为 *finite*，如果 $\mu(X) < \infty$。
- 度量被称为 *σ-finite*，如果整个空间可以写成有限测度集合的可数并集。
- 更精确地说，测度 μ 在可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上被称为 *σ-finite*，如果存在一列集合 X_1、X_2、... 属于 $\mathcal{S}$，使得

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \quad \text{and} \quad \mu(X_k) < \infty \text{ for every } k \in \mathbf{Z}^+.$$

5.19 示例 *finite and σ-finite measures*

- 勒贝格测度在区间 [0, 1] 上是一个有限测度。
- 勒贝格测度在R上不是有限测度，而是σ-有限测度。
- 在R上的计数测度不是σ-有限测度（因为有限集合的可数并是可数集合）。

下一个结果将使我们能够定义两个 σ-有限测度的乘积。

5.20 *measure of cross section is a measurable function*

设$(X, \mathcal{S}, \mu)$和$(Y, \mathcal{T}, \nu)$是σ-有限测度空间。若$E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$，则

(a) $x \mapsto \nu([E]_x)$ 是 X 上的一个 $\mathcal{S}$-可测函数;

(b) $y \mapsto \mu([E]^y)$ 是 Y 上的一个 $\mathcal{T}$-可测函数。

证明 我们将证明(a)。如果 $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$，则由5.6)可知，对每个$x \in X$ (都有$[E]_x \in \mathcal{T}$；因此，函数$x \mapsto \nu([E]_x)$在X上是良定义的。

我们首先考虑 ν 为有限测度的情形。令

$$\mathcal{M} = \{E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T} : x \mapsto \nu([E]_x) \text{ is an } \mathcal{S}\text{-measurable function on } X\}.$$

我们需要证明 $\mathcal{M} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$。

如果 $A \in \mathcal{S}$ 且 $B \in \mathcal{T}$，则由例 5.5) 可知，对每个 $x \in X$ (，有 $\nu([A \times B]_x) = \nu(B)\chi_A(x)$。因此，函数 $x \mapsto \nu([A \times B]_x)$ 作为定义在 X) 上的函数，等于函数 $\nu(B)\chi_A$ (，而它是在 X 上的一个 $\mathcal{S}$-可测函数。于是 $\mathcal{M}$ 包含 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中所有的可测矩形。

令 $\mathcal{A}$ 表示 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中可测矩形的有限并的集合。假设 $E \in \mathcal{A}$。则由 5.13(b)，E 是互不相交的可测矩形 $E_1, \dots, E_n$ 的并。因此

$$\begin{aligned}
\nu([E]_x) &= \nu([E_1 \cup \cdots \cup E_n]_x) \\
&= \nu([E_1]_x \cup \cdots \cup [E_n]_x) \\
&= \nu([E_1]_x) + \cdots + \nu([E_n]_x),
\end{aligned}$$

其中最后一个等式成立，是因为 ν 是一个测度，并且 $[E_1]_x, \dots, [E_n]_x$ 两两不交。上述等式与前一段的结论结合表明，$x \mapsto \nu([E]_x)$ 是 $\mathcal{S}$-可测函数的有限和，因此是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。因此 $E \in \mathcal{M}$。我们现在已经证明了 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$。

我们的下一个目标是证明 $\mathcal{M}$ 在 $X \times Y$ 上是一个单调类。为此，首先假设 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是 $\mathcal{M}$ 中一个递增的集合序列。 则

$$\begin{aligned}
\nu\Big([\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k]_x\Big) &= \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} ([E_k]_x)\Big) \\
&= \lim_{k\to\infty} \nu([E_k]_x),
\end{aligned}$$

其中我们使用了 2.59。因为 $\mathcal{S}$-可测函数的逐点极限是 $\mathcal{S}$-可测的（由 2.48），上述等式表明 $x \mapsto \nu([\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k]_x)$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。因此 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$。我们现在已经证明 $\mathcal{M}$ 在可数递增并集下是封闭的。

现在假设 $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一列递减的集合。则

$$\begin{aligned}\nu\Big([\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k]_x\Big) &= \nu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}([E_k]_x)\Big)\\ &= \lim_{k\to\infty} \nu([E_k]_x),\end{aligned}$$

其中我们使用了2.60（这正是我们使用ν是有限测度这一假设的地方）。由于$\mathcal{S}$-可测函数的逐点极限是$\mathcal{S}$-可测的（由2.48），上述等式表明$x \mapsto \nu([\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k]_x)$是一个$\mathcal{S}$-可测函数。因此$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$。我们现在已经证明$\mathcal{M}$在可数递减交下是封闭的。

我们已经证明 $\mathcal{M}$ 是一个单调类，并且它包含由 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中所有可测矩形的有限并所构成的代数 $\mathcal{A}$［由 5.13(a)，$\mathcal{A}$ 的确是一个代数］。单调类定理（5.17）推出 $\mathcal{M}$ 包含包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ-代数。换言之，$\mathcal{M}$ 包含 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$。这一结论在 ν 为有限测度的情形下完成了 (a) 的证明。

现在考虑 ν 是一个 σ-有限测度的情形。因此，存在一列位于 $\mathcal{T}$中的集合 $Y_1, Y_2, \ldots$，使得 $\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = Y$，并且对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 都有 $\nu(Y_k) < \infty$。用 $Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$ 替换每个 Y_k，我们可以假设 $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$。如果 $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$，那么

$$\nu([E]_x) = \lim_{k\to\infty} \nu([E \cap (X \times Y_k)]_x).$$

函数 $x \mapsto \nu([E \cap (X \times Y_k)]_x)$ 是定义在 X 上的一个 $\mathcal{S}$-可测函数，这一点可通过考虑将 ν 限制到 Y_k 上、由 $\mathcal{T}$中包含于 Y_k 的集合所构成的 σ-代数而得到的有限测度来说明。上述等式现已推出 $x \mapsto \nu([E]_x)$ 是定义在 X 上的一个 $\mathcal{S}$-可测函数，从而完成了 (a) 的证明。

(b) 的证明类似。 ■

5.21 定义 *integration notation*

假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，且 $g : X \to [-\infty, \infty]$ 是一个函数。该记号

$$\int g(x)\, d\mu(x) \quad \text{means} \quad \int g\, d\mu,$$

其中 $d\mu(x)$ 表示除 x 之外的变量应视为常数。

5.22 示例 *integrals*

如果 λ 是 [0, 4] 上的勒贝格测度，则

$$\int_{[0,4]} (x^2 + y)\, d\lambda(y) = 4x^2 + 8 \quad \text{and} \quad \int_{[0,4]} (x^2 + y)\, d\lambda(x) = \frac{64}{3} + 4y.$$

下一个定义的意图是：只有当内层积分以及随后外层积分都成立时，$\int_X \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)\, d\mu(x)$ 才被定义。

5.23 定义 *iterated integrals*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ 是测度空间，且 $f\colon X \times Y \to \mathbf{R}$ 是一个函数。那么

$$\int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) \quad \text{means} \quad \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\Big)\, d\mu(x).$$

换句话说，要计算 $\int_X \int_Y f(x,\ y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)$，首先（暂时）固定 $x \in X$ 并计算 $\int_Y f(x,\ y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ [如果这个积分是合理的]。然后计算关于 μ 的函数 $x \mapsto \int_Y f(x,\ y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ 的积分 [如果这个积分是合理的]。

5.24 示例 *iterated integrals*

如果 λ 是 [0, 4] 上的Lebesgue测度，则

$$\begin{aligned}\int_{[0,4]} \int_{[0,4]} (x^2 + y)\, d\lambda(y)\, d\lambda(x) &= \int_{[0,4]} (4x^2 + 8)\, d\lambda(x)\\ &= \frac{352}{3}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\int_{[0,4]} \int_{[0,4]} (x^2 + y)\, d\lambda(x)\, d\lambda(y) &= \int_{[0,4]} \Big(\frac{64}{3} + 4y\Big)\, d\lambda(y)\\ &= \frac{352}{3}.\end{aligned}$$

这个例子中的两个迭代积分最终都等于 $\frac{352}{3}$，尽管在求解的中间步骤中它们看起来并不相同。正如我们将在下一节看到的，当改变积分顺序时，积分的相等性并非巧合。

$(\mu \times \nu)(E)$的定义如下所示是有意义的，因为下面的内积分等于$\nu([E]_x)$，根据5.6（或者使用5.9）是有意义的，然后外积分根据5.20(a)是有意义的。

以下定义中对σ-有限测度的限制并不令人困扰，因为我们寻求的主要结果在没有这个假设的情况下是无效的（见下一节中的例子5.30）。

5.25 定义 *product of two measures;* $\mu \times \nu$

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ 是 σ-有限测度空间。对于 $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$，定义 $(\mu \times \nu)(E)$ 为

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \int_Y \chi_E(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).$$

5.26 示例 *measure of a rectangle*

假设（X，$\mathcal{S}$，μ）和（Y，$\mathcal{T}$，ν）是σ-有限测度空间。如果$A \in \mathcal{S}$且$B \in \mathcal{T}$，则

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(A \times B) &= \int_X \int_Y \chi_{A \times B}(x, y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \nu(B)\chi_A(x)\, d\mu(x) \\ &= \mu(A)\nu(B).\end{aligned}$$

因此，一个可测矩形的乘积测度等于对应各集合测度的乘积。

对于（$X, \mathcal{S}, \mu$）和（$Y, \mathcal{T}, \nu$）σ-有限测度空间，我们将乘积 $\mu \times \nu$ 定义为一个从 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$到 $[0, \infty]$ 的函数（见 5.25）。现在我们证明该函数是一个测度。

5.27 *product of two measures is a measure*

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ 是 σ-有限测度空间。则 $\mu \times \nu$ 是 $(X \times Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$ 上的一个测度。

证明 显然 $(\mu \times \nu)(\varnothing) = 0$.

假设 $E_1, E_2, \ldots$ 是 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中的一列两两不交的集合。则

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) &= \int_X \nu\Big([\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k]_x\Big)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} ([E_k]_x)\Big)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \nu([E_k]_x)\Big)\, d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \nu([E_k]_x)\, d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(E_k),\end{aligned}$$

其中第四个等式源自单调收敛定理（3.11；或见第 3A 节练习 10）。上述等式表明 $\mu \times \nu$ 满足作为一个测度所要求的可列可加性条件。 ∎

练习 5A

1 假设（$X, \mathcal{S}$）和（$Y, \mathcal{T}$）是可测空间。证明：如果 A 是 X 的非空子集，且 B 是 Y 的非空子集，并且满足 $A \times B \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$，则 $A \in \mathcal{S}$ 和 $B \in \mathcal{T}$。

2 假设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间。证明如果 $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$，则

$$\{x \in X : (x, x) \in E\} \in \mathcal{S}.$$

3 设 $\mathcal{B}$ 表示 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集所成的 σ-代数。证明存在一个集合 $E \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$，使得对每个 $a \in \mathbf{R}$，都有 $[E]_a \in \mathcal{B}$ 且 $[E]^a \in \mathcal{B}$，但 $E \notin \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$。

4 设（$X, \mathcal{S}$）和（$Y, \mathcal{T}$）是可测空间。证明：如果 $f : X \to \mathbf{R}$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，并且 $g : Y \to \mathbf{R}$ 是 $\mathcal{T}$-可测的，并且 $h : X \times Y \to \mathbf{R}$ 由 $h(x, y) = f(x)g(y)$ 定义，则 h 是（$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$）-可测的。

5 验证例 5.11 中的断言：由 $\mathbf{R}$ 中区间的有限并构成的集合族在取补运算下是封闭的。

6 验证例 5.12 中的断言：由 $\mathbf{R}$ 上区间的可数并所构成的集合在取补运算下并不封闭。

7 假设 $\mathcal{A}$ 是集合 W 的子集的一个非空族。证明：$\mathcal{A}$ 在 W 上是一个代数，当且仅当 $\mathcal{A}$ 在有限交和取补运算下封闭。

8 假设 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个测度。证明以下条件等价。

（a）测度 μ 是 σ-有限的。

(b) 存在一列在 $\mathcal{S}$ 中的递增的集合序列 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$，使得对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ 且 $\mu(X_k) < \infty$。(c) 存在一列在 $\mathcal{S}$ 中的两两不交的集合 $X_1, X_2, X_3, \ldots$，使得对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ 且 $\mu(X_k) < \infty$。

9 假设 μ 和 ν 是 σ-有限测度。证明 $\mu \times \nu$ 是一个 σ-有限测度。

10 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ 是 σ-有限测度空间。证明如果 ω 是 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ 上的一个测度，使得对所有 $A \in \mathcal{S}$ 和所有 $B \in \mathcal{T}$ 都有 $\omega(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$，则 $\omega = \mu \times \nu$。

[*The exercise above means that $\mu \times \nu$ is the unique measure on $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ that behaves as we expect on measurable rectangles.*]

5B 迭代积分

托内利定理

重新查看上一节中的例子5.24，并注意到当我们交换积分顺序时，迭代积分的值保持不变，尽管交换积分顺序导致了不同的中间结果。我们的下一个结果表明，如果被积函数是非负的且度量是σ-有限的，那么可以交换积分顺序
。

5.28 *Tonelli's Theorem*

假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）和（$Y, \mathcal{T}, \nu$）是 σ-有限测度空间。假设 $f\colon X \times Y \to \to [0, \infty]$ 是 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$-可测的。则有

(a) $$x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \text{ is an } \mathcal{S}\text{-measurable function on } X,$$

(b) $$y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \text{ is a } \mathcal{T}\text{-measurable function on } Y,$$

和

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$

证明 我们首先考虑一种特殊情形，其中 $f = \chi_E$ 对于某个 $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$。在这种情况下，

$$\int_Y \chi_E(x,y)\, d\nu(y) = \nu([E]_x) \text{ for every } x \in X$$

和

$$\int_X \chi_E(x,y)\, d\mu(x) = \mu([E]^y) \text{ for every } y \in Y.$$

由 5.20 可知，在这种情况下 (a) 和 (b) 成立。

首先假设 μ 和 ν 是有限测度。令

$$\mathcal{M} = \Big\{E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T} : \int_X \int_Y \chi_E(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X \chi_E(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)\Big\}.$$

如果 $A \in \mathcal{S}$ 和 $B \in \mathcal{T}$，那么 $A \times B \in \mathcal{M}$ 因为定义 $\mathcal{M}$ 的方程两边相等 $\mu(A)\nu(B)$。

设 $\mathcal{A}$ 表示 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中可测矩形的有限并所成的集合。则 5.13(b) 蕴含 $\mathcal{A}$ 的每个元素都是 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中可测矩形的互不相交并。前一段现在推出 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$。

单调收敛定理 (3.11) 表明 $\mathcal{M}$ 在可数递增并的下是闭合的。有界收敛定理 (3.26) 表明 $\mathcal{M}$ 在可数递减交的下是闭合的（这里我们使用了 μ 和 ν 是有限测度的假设）。

我们已经证明，$\mathcal{M}$ 是一个单调类，它包含由 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$中所有可测矩形的有限并所组成的代数 $\mathcal{A}$［根据 5.13(a)，$\mathcal{A}$ 的确是一个代数］。

单调类定理（5.17）表明，$\mathcal{M}$ 包含包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ-代数。换言之，$\mathcal{M}$ 包含 $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$。因此

5.29 $$\int_X\int_Y \chi_E(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x)=\int_Y\int_X \chi_E(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

对于每个 $E\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$。

现在放宽 μ 和 ν 为有限测度的假设。将 X 写成 $\mathcal{S}$ 中具有有限测度的集合 $X_1\subseteq X_2\subseteq\cdots$ 的递增并集，并将 Y 写成 $\mathcal{T}$中具有有限测度的集合 $Y_1\subseteq Y_2\subseteq\cdots$ 的递增并集。假设 $E\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$。将有限测度情形应用于把测度和 σ-代数限制在 X_j 和 Y_k 的情形，我们可以得出，对所有 j，$k\in\mathbf{Z}^+$，式 5.29 在将 E 替换为 $E\cap(X_j\times Y_k)$ 后成立。固定 $k\in\mathbf{Z}^+$，并使用单调收敛定理（3.11）得出，对所有 $k\in\mathbf{Z}^+$，式 5.29 在将 E 替换为 $E\cap(X\times Y_k)$ 后成立。再一次使用单调收敛定理即可表明:

$$\int_{X\times Y}\chi_E\,d(\mu\times\nu)=\int_X\int_Y \chi_E(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x)=\int_Y\int_X \chi_E(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

对于所有 $E\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$，其中上面的第一个等式来自于 $(\mu\times\nu)(E)$ 的定义（见 5.25）。

现在我们从特征函数转向 $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$-可测函数 $f\colon X\times Y\to[0,\infty]$ 的一般情形。通过如下方式定义一列从 $X\times Y$ 到 $[0,\infty)$ 的简单 $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$-可测函数 $f_1,f_2,\ldots$

$$f_k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{m}{2^k} & \text{if } f(x,y)<k \text{ and } m \text{ is the integer with } f(x,y)\in\Big[\dfrac{m}{2^k},\dfrac{m+1}{2^k}\Big),\\[2ex] k & \text{if } f(x,y)\ge k.\end{cases}$$

请注意

$$0\le f_1(x,y)\le f_2(x,y)\le f_3(x,y)\le\cdots\quad\text{and}\quad\lim_{k\to\infty}f_k(x,y)=f(x,y)$$

对于所有 $(x,y)\in X\times Y$。

每个 f_k 都是形如 $c\chi_E$ 的函数的有限和，其中 $c\in\mathbf{R}$ 且 $E\in\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$。因此，本定理的结论对每个函数 f_k 都成立。

单调收敛定理表明

$$\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)=\lim_{k\to\infty}\int_Y f_k(x,y)\,d\nu(y)$$

对每个 $x\in X$。因此，函数 $x\mapsto\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ 是在 X 上由一列 $\mathcal{S}$-可测函数构成的逐点极限。因此 (a) 成立，而 (b) 亦因类似理由成立。

该定理陈述中的最后一行对每个 f_k 都成立。单调收敛定理现在蕴含该定理陈述中的最后一行对 f 也成立，从而完成证明。 ∎

参见本节练习1中的一个例子（使用有限测度），该例表明如果缺少被积函数非负这一假设，托内利定理可能会失效。下一个例子表明，σ-有限测度这一假设同样不能被去除。

5.30 示例 *Tonelli's Theorem can fail without the hypothesis of σ-finite*

设 $\mathcal{B}$ 是 [0,1] 的 Borel 子集的 σ-代数，λ 是 ([0,1], $\mathcal{B}$) 上的勒贝格测度，且 μ 是 ([0,1], $\mathcal{B}$) 上的计数测度。令 D 表示 $[0,1] \times [0,1]$ 的对角线；换言之，

$$D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}.$$

然后

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \chi_D(x,y)\, d\mu(y)\, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} 1\, d\lambda = 1,$$

但是

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \chi_D(x,y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y) = \int_{[0,1]} 0\, d\mu = 0.$$

下面这个托内利定理的有用推论表明，对于由非负数构成的二重和，我们可以交换求和次序。练习 2 要求你找出一个由实数组成的二重和，在其中交换求和次序会改变该二重和的值。

5.31 *double sums of nonnegative numbers*

如果 $\{x_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}^+\}$ 是一个由非负数组成的双重指标集合，则

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_{j,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{j,k}.$$

证明 应用 Tonelli 定理（5.28）于 $\mu \times \mu$，其中 μ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度。 ■

富比尼定理

我们的下一个目标是富比尼定理，它与托内利定理具有相同的结论，但具有不同的假设。托内利定理要求被积分的函数是非负的。相反，富比尼定理要求该函数的绝对值的积分是有限的。在使用富比尼定理来计算 f 的积分时，通常会先将托内利定理应用于 $|f|$，以验证富比尼定理的假设。

Historically, Fubini's Theorem (proved in 1907) came before Tonelli's Theorem (proved in 1909). However, presenting Tonelli's Theorem first, as is done here, seems to lead to simpler proofs and better understanding. The hard work here went into proving Tonelli's Theorem; thus our proof of Fubini's Theorem consists mainly of bookkeeping details.

正如你将在富比尼定理的证明中看到的，5.32(a)中的函数仅在几乎所有的 $x \in X$上定义，而5.32(b)中的函数仅在几乎所有的$y \in Y$上定义。为了方便起见，你可以认为这些函数在它们未定义的零测度集合上等于0。

5.32 *Fubini's Theorem*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ 是 σ-有限测度空间。假设$f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ 是 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$-可测的，并且 $\int_{X\times Y} |f| \, d(\mu \times \nu) < \infty$。那么

$$\int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) < \infty \text{ for almost every } x \in X$$

和

$$\int_X |f(x,y)| \, d\mu(x) < \infty \text{ for almost every } y \in Y.$$

此外,

(a) $$x \mapsto \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \text{ is an } \mathcal{S}\text{-measurable function on } X,$$

(b) $$y \mapsto \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \text{ is a } \mathcal{T}\text{-measurable function on } Y,$$

和

$$\int_{X\times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \, d\nu(y).$$

证明 Tonelli 定理 (5.28) 应用于非负函数 $|f|$，意味着 $x \mapsto \int_Y |f(x,\ y)| \, d\nu(y)$ 是 $\mathcal{S}$-可测函数，定义在 X 上。因此

$$\Big\{x \in X : \int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) = \infty\Big\} \in \mathcal{S}.$$

托内利定理应用于 $|f|$ 还告诉我们

$$\int_X \int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) \, d\mu(x) < \infty$$

因为上面的迭代积分等于 $\int_{X\times Y} |f| \, d(\mu \times \nu)$。上面的不等式意味着

$$\mu\Big(\Big\{x \in X : \int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) = \infty\Big\}\Big) = 0.$$

请记住，f^+ 和 f^- 是非负的 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$-可测函数，使得 $|f| = f^+ + f^-$ 和 $f = f^+ - f^-$ (见 3.17)。将托内利定理应用于f^+ 和f^-，我们可以得到

5.33 $$x \mapsto \int_Y f^+(x,y) \, d\nu(y) \quad \text{and} \quad x \mapsto \int_Y f^-(x,y) \, d\nu(y)$$

是从X到[0, ∞]的$\mathcal{S}$-可测函数。由于$f^+ \leq |f|$和$f^- \leq |f|$，集合$\{x \in X : \int_Y f^+(x、y)\, d\nu(y) = \infty\}$和$\{x \in X : \int_Y f^-(x、y)\, d\nu(y) = \infty\}$具有$\mu$-测度为0。因此，这两个集合的交集，即满足$\int_Y f(x$的$x \in X$的集合，$y)\, d\nu(y)$未定义的集合，也具有$\mu$-测度为0。

从5.33中的第一个函数中减去第二个函数，我们可以看到，对于那些我们遇到的$\infty - \infty$ (具有μ-测度为0的$x \in X$，我们定义该函数为0，如上所述)，并且它等于$\int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$，在其他地方是$\mathcal{S}$-可测函数，定义在X上。

现在

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) &= \int_{X\times Y} f^+\, d(\mu\times\nu) - \int_{X\times Y} f^-\, d(\mu\times\nu)\\
&= \int_X\int_Y f^+(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) - \int_X\int_Y f^-(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x)\\
&= \int_X\int_Y \bigl(f^+(x,y) - f^-(x,y)\bigr)\, d\nu(y)\, d\mu(x)\\
&= \int_X\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x),
\end{aligned}$$

其中，上面第一行来自于对一个不是非负的函数的积分定义（注意，右侧第一行的两个项都不等于 ∞，因为 $\int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\times\nu) < \infty$），第二行来自于将托内利定理应用于 f^+ 和 f^-。

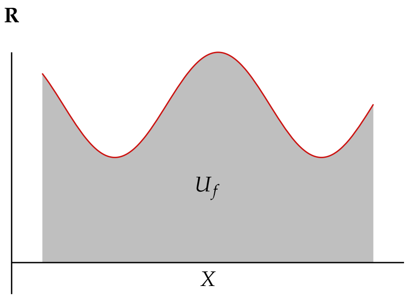
我们现在已经证明了富比尼定理中所有涉及先对 Y 积分的各个方面。同样的过程也为涉及先对 X 积分的富比尼定理各个方面提供了证明。 ■

图像下的面积

5.34 定义 *region under the graph; U_f*

设 X 是一个集合，且 $f : X \to [0, \infty]$ 是一个函数。则 f 的 *region under the graph*，记为 U_f，定义为

$$U_f = \{(x,t) \in X \times (0,\infty) : 0 < t < f(x)\}.$$



该图说明了为什么我们称 U_f 为 f 的图像下方的区域，即使在 X 不是 R 的子集的情况下也是如此。类似地，下一段中的非正式术语 *area* 应当让你联想到图中的面积，尽管我们实际上处理的是积空间中 U_f 的测度。

下面结果中的第一个等式可以被看作是恢复了黎曼将积分理解为图形下方面积的观念（尽管现在是在一个更为一般的背景下，允许任意的 σ-有限测度）。下面结果中的第二个等式可以被看作是强化了勒贝格的观念：通过沿着与黎曼方向垂直的方向进行积分来计算曲线下的面积。

5.35 *area under the graph of a function equals the integral*

设（X，$\mathcal{S}$，μ）是一个σ-有限测度空间，且f：$X \to [0,\infty]$ 是一个$\mathcal{S}$-可测函数。令$\mathcal{B}$表示$(0,\infty)$的Borel子集的σ-代数，并令λ表示在$((0,\infty)$，$\mathcal{B})$上的勒贝格测度。则$U_f \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$和

$$(\mu \times \lambda)(U_f) = \int_X f\, d\mu = \int_{(0,\infty)} \mu(\{x \in X : t < f(x)\})\, d\lambda(t).$$

证明 对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，令

$$E_k = \bigcup_{m=0}^{k^2-1} \Big(f^{-1}\big([\tfrac{m}{k}, \tfrac{m+1}{k})\big) \times \big(0, \tfrac{m}{k}\big) \Big) \quad \text{and} \quad F_k = f^{-1}([k,\infty]) \times (0,k).$$

那么 E_k 是 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$-可测矩形的有限并，而 F_k 是一个 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$- 可测矩形。因为

$$U_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \cup F_k),$$

我们得出结论：$U_f \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$。

由积测度 $\mu \times \lambda$ 的定义可知

$$\begin{aligned}(\mu \times \lambda)(U_f) &= \int_X \int_{(0,\infty)} \chi_{U_f}(x,t)\, d\lambda(t)\, d\mu(x) \\ &= \int_X f(x)\, d\mu(x),\end{aligned}$$

从而完成了本定理结论中第一个等式的证明。

Tonelli 定理（5.28）告诉我们，可以在上述二重积分中交换积分顺序，从而得到

$$\begin{aligned}(\mu \times \lambda)(U_f) &= \int_{(0,\infty)} \int_X \chi_{U_f}(x,t)\, d\mu(x)\, d\lambda(t) \\ &= \int_{(0,\infty)} \mu(\{x \in X : t < f(x)\})\, d\lambda(t),\end{aligned}$$

从而完成了本定理结论中第二个等式的证明。 ■

马尔可夫不等式（4.1）意味着，如果 f 和 μ 如上述结果所示，则

$$\mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \le \frac{\int_X f\, d\mu}{t}$$

对所有 $t > 0$。因此，如果 $\int_X f\, d\mu < \infty$，那么上述结果应被认为在某种程度上比马尔可夫不等式更强（因为 $\int_{(0,\infty)} \frac{1}{t}\, d\lambda(t) = \infty$）。 –

EXERCISES 5B

1 (a) 令 λ 表示 [0, 1] 上的勒贝格测度。证明

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,d\lambda(y)\,d\lambda(x)=\frac{\pi}{4}$$

和

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,d\lambda(x)\,d\lambda(y)=-\frac{\pi}{4}.$$

(b) 解释为什么 (a) 既不违反托内利定理，也不违反富比尼定理。

2 (a) 给出一个双重索引的实数集合 $\{x_{m,n} : m, n \in \mathbf{Z}^+\}$ 的例子，使得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x_{m,n}=0 \quad\text{and}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}x_{m,n}=\infty.$$

(b) 解释为什么 (a) 既不违反 Tonelli 定理，也不违反 Fubini 定理。

3 假设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，且 $f\colon X \to [0, \infty]$ 是一个函数。令 $\mathcal{B}$ 表示 $(0, \infty)$ 上 Borel 子集的 σ-代数。证明当且仅当 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数时，$U_f \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$ 成立。

4 假设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，且 $f\colon X \to \mathbf{R}$ 是一个函数。令 $\operatorname{graph}(f) \subseteq X \times \mathbf{R}$ 表示 f 的图像:

$$\operatorname{graph}(f)=\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\}.$$

让 $\mathcal{B}$ 表示 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集的 σ-代数。证明当 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数时，$\operatorname{graph}(f) \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$。

5C Lebesgue积分在R^{n}上的应用

在本节中，假设 m 和 n 是正整数。因此，例如，5.36 应包括假设 m 和 n 是正整数，但定理和定义变得更容易陈述，而无需明确重复这一假设。

R^n 的 Borel 子集

我们先快速回顾与 R^n 相关的符号和关键概念。

回想一下，R^n 是所有 n 元组实数的集合：

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$

从 R^n 到 $[0, \infty)$ 的函数 $\|\cdot\|_\infty$ 定义为

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

对于 $x \in$ R^n 和 $\delta > 0$，*open cube* $B(x,\ \delta)$ 边长为 2δ 定义为

$$B(x, \delta) = \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - x\|_\infty < \delta\}.$$

如果 $n =$ 为 1，那么开立方体就只是一个有界的开区间。如果 $n =$ 为 2，那么开立方体更恰当地可以称为开正方形。然而，在所有维度中使用“立方体”的术语的优点在于不需要为不同的维度使用不同的词。

一个子集 G 的 R^n 称为 *open*，如果对于每个 $x \in G$，存在 $\delta > 0$，使得 $B(x，\delta) \subseteq G$。等价地，R^n 的一个子集 G 称为 *open*，如果 G 的每个元素都包含在一个包含于 G 的开立方体中。

R^n 的任意（有限或无限）个开子集的并是 R^n 的一个开子集。此外，R^n 的任意有限个开子集的交是 R^n 的一个开子集。

R^{n}的一个子集称为*closed*，如果它在R^{n}中的补集是开集。一个集合$A \subseteq$ R^n 称为*bounded*，如果$\sup\{\|a\|_\infty : a \in A\} < \infty$。

我们采用以下常见约定：

$$\text{R}^m \times \text{R}^n \text{ 被等同于 } \text{R}^{m+n}。$$

为了理解这一约定的必要性，注意到 R$^2 \times$ R $\neq$ R^3，因为 R$^2 \times$ R 和 R^3 包含不同类型的对象。具体来说，R$^2 \times$ R 的一个元素是一个有序对，其中第一个元素属于 R^2，第二个元素属于 R；因此，R$^2 \times$ R 的一个元素看起来像 $\big((x_1, x_2), x_3\big)$。而 R^3 的一个元素是一个由实数组成的有序三元组，其形式为 (x_1, x_2, x_3)。然而，我们可以以显然的方式将 $\big((x_1, x_2), x_3\big)$ 与 (x_1, x_2, x_3) 视为相同。因此，我们说 R$^2 \times$ R “等于” R^3。更一般地，我们将 R$^m \times$ R^n 自然地识别为 R^{m+n}。

为了检查你是否理解上述讨论的识别，请确保你明白为什么 $B(x、\delta) \times B(y、\delta) = B\big((x、y)、\delta\big)$ 对于所有 $x \in$ R^m、$y \in$ R^n 和 $\delta > 0$。

我们现在可以证明两个开集的乘积是开集。 设置。

5.36 *product of open sets is open*

设 G_1 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个开子集，且 G_2 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集。则 $G_1 \times G_2$ 是 $\mathbf{R}^{m+n}$ 的一个开子集。

证明 设$(x, y) \in G_1 \times G_2$。则存在 $\mathbf{R}^m$ 中以 x 为中心的开立方体 D，以及 $\mathbf{R}^n$ 中以 y 为中心的开立方体 E，使得 $D \subseteq G_1$ 且 $E \subseteq G_2$。通过缩小 D 或 E 的尺寸，我们可以假设立方体 D 和 E 具有相同的边长。因此，$D \times E$ 是 $\mathbf{R}^{m+n}$ 中以 (x, y) 为中心且包含于 $G_1 \times G_2$ 的一个开立方体。

我们已经证明，$G_1 \times G_2$ 中的任意一点都是包含于 $G_1 \times G_2$ 中的一个开立方体的中心。因此，$G_1 \times G_2$ 是 $\mathbf{R}^{m+n}$ 的一个开子集。 ■

当 $n = 1$ 时，下面关于 $\mathbf{R}^1$ 的 Borel 子集的定义与我们之前对 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集的定义（2.29）一致。

5.37 定义 *Borel set; $\mathcal{B}_n$*

- $\mathbf{R}^n$ 的一个 *Borel subset* 是包含 $\mathbf{R}^n$ 的所有开子集的 $\mathbf{R}^n$ 上最小的 σ-代数中的一个元素。
- $\mathbf{R}^n$ 的 Borel 子集的 σ-代数记作 $\mathcal{B}_n$。

回顾一下，$\mathbf{R}$ 的一个子集是开集当且仅当它可以表示为可数个互不相交的开区间的并。下面结果中的(a)部分在 $\mathbf{R}^n$ 中给出了一个类似的结果，尽管我们必须放弃互不相交这一方面。

5.38 *open sets are countable unions of open cubes*

(a) $\mathbf{R}^n$ 的一个子集是开集，当且仅当它是 $\mathbf{R}^n$ 中可数个开立方体的并。

（b）$_n\mathcal{B}$是包含所有开立方体的在 $\mathbf{R}^n$ 上的最小 σ-代数 在 $\mathbf{R}^n$。

证明 我们将证明(a)，这显然推出(b)。

可数个开立方体的并是开集，其证明留作读者的练习（事实上，任意多个开立方体的并都是开集）。

为证明另一方向，设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集。对于每个 $x \in G$，存在一个以 x 为中心并且包含于 G 的开立方体。因此存在一个更小的立方体 C_x，使得 $x \in C_x \subseteq G$ 以及 C_x 的中心的所有坐标都是有理数，并且 C_x 的边长是一个有理数。现在

$$G = \bigcup_{x \in G} C_x.$$

然而，只有可数多个不同的立方体，其中心具有所有有理坐标且边长为有理数。因此，G 是开立方体的可数并。 ■

下一个结果告诉我们，来自不同维度的博雷尔集合族能够很好地契合在一起。

5.39 *product of the Borel subsets of* $\mathbf{R}^m$ *and the Borel subsets of* $\mathbf{R}^n$

$\mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{m+n}$.

证明 假设 E 是 $\mathbf{R}^{m+n}$ 中的一个开立方体。因此 E 是 $\mathbf{R}^m$ 中一个开立方体与 $\mathbf{R}^n$ 中一个开立方体的乘积。因而 $E \in \mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n$。因此，包含 $\mathbf{R}^{m+n}$ 中所有开立方体的最小 σ-代数包含于 $\mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n$。现在，5.38(b) 蕴含 $\mathcal{B}_{m+n} \subseteq \mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n$。

为了证明另一方向的集合包含关系，暂时固定 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集 G。令

$$\mathcal{E} = \{A \subseteq \mathbf{R}^m : A \times G \in \mathcal{B}_{m+n}\}.$$

于是，$\mathcal{E}$ 包含 $\mathbf{R}^m$ (的每一个开子集，这由 5.36) 得出。此外，$\mathcal{E}$ 在可数并下是封闭的，因为

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \times G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \times G).$$

此外，$\mathcal{E}$ 对取补运算封闭，因为

$$(\mathbf{R}^m \setminus A) \times G = \Big((\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n) \setminus (A \times G)\Big) \cap (\mathbf{R}^m \times G).$$

因此，$\mathcal{E}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 上的一个 σ-代数，它包含 $\mathbf{R}^m$ 的所有开子集，这意味着 $\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{E}$。换言之，我们已经证明：如果 $A \in \mathcal{B}_m$ 且 G 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集，那么 $A \times G \in \mathcal{B}_{m+n}$。

现在暂时固定 $\mathbf{R}^m$ 的一个 Borel 子集 A。令

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq \mathbf{R}^n : A \times B \in \mathcal{B}_{m+n}\}.$$

上一段的结论表明，$\mathcal{F}$ 包含 $\mathbf{R}^n$ 的每一个开子集。与上一段相同，我们也看到 $\mathcal{F}$ 是一个 σ-代数。因此 $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{F}$。换言之，我们已经证明：如果 $A \in \mathcal{B}_m$ 且 $B \in \mathcal{B}_n$，那么 $A \times B \in \mathcal{B}_{m+n}$。因此 $\mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{m+n}$，从而完成证明。

前面的结果蕴含了一个良好的结合性质。具体地，如果 m、n 和 p 是正整数，那么应用 5.39 两次得到

$$(\mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n) \otimes \mathcal{B}_p = \mathcal{B}_{m+n} \otimes \mathcal{B}_p = \mathcal{B}_{m+n+p}.$$

同样地，再应用两次 5.39 可得

$$\mathcal{B}_m \otimes (\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_p) = \mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_{n+p} = \mathcal{B}_{m+n+p}.$$

因此（$\mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n$）$\otimes \mathcal{B}_p = \mathcal{B}_m \otimes (\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_p)$；因此在取两个以上的 Borel σ-代数的乘积时，我们可以省略括号。更一般地，我们也可以直接将 $\mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_p$ 定义为 $\mathbf{R}^{m+n+p}$ 上包含 $\{A \times B \times C : A \in \mathcal{B}_m, B \in \mathcal{B}_n, C \in \mathcal{B}_p\}$ 的最小 σ-代数，并得到同样的 σ-代数（见本节练习 3）。

$\mathbf{R}^n$上的勒贝格测度

5.40 定义 ***Lebesgue measure;*** λ_n

Lebesgue measure 在 $\mathbf{R}^n$ 上以 λ_n 表示，并通过归纳方式定义为

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} \times \lambda_1,$$

其中 λ_1 是 $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_1)$ 上的勒贝格测度。

由于$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{n-1} \otimes \mathcal{B}_1$ (根据5.39)，测度λ_n被定义在$\mathbf{R}^n$的Borel子集上。将$\mathbf{R}^n$中的一个典型点看作(x, y)，其中$x \in$属于$\mathbf{R}^{n-1}$且$y \in$属于$\mathbf{R}$，我们可以利用两个测度的乘积的定义(5.25)来写出

$$\lambda_n(E) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{\mathbf{R}} \chi_E(x, y)\, d\lambda_1(y)\, d\lambda_{n-1}(x)$$

对于 $E \in \mathcal{B}_n$。当然，我们可以使用托内利定理（5.28）来交换上述方程中积分的次序。

由于勒贝格测度是最常用的测度，数学家往往省略对测度的显式标注，而只使用一个变量名。换言之，如果在积分中没有显式给出测度，并且上下文也未表明存在其他测度，那么应当假定所涉及的测度是在相应维度上的勒贝格测度。例如，上述等式中交换积分次序后的结果可以写成

$$\lambda_n(E) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \chi_E(x, y)\, dx\, dy$$

对于 $E \in \mathcal{B}_n$；这里 $\mathrm{d}x$ 表示 $\mathrm{d}\lambda_{n-1}(x)$，而 $\mathrm{d}y$ 表示 $\mathrm{d}\lambda_1(y)$。

在上述给出 $\lambda_n(E)$ 的公式的方程中，对 $\mathbf{R}^{n-1}$ 上的积分可以改写为在 $\mathbf{R}^{n-2}$ 与 $\mathbf{R}$ 上的迭代积分，并且该过程可以重复进行，直到得到仅在 $\mathbf{R}$ 上的迭代积分。随后可以反复应用托内利定理来交换这些迭代积分中成对的积分次序，从而得到任意次序的迭代积分。

类似的评论同样适用于在 $\mathbf{R}^n$ 上对除特征函数之外的函数进行积分。例如，若 $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ 是一个 $\mathcal{B}_3$-可测函数，使得要么 $f \geq 0$，要么 $\int_{\mathbf{R}^3} |f|\, d\lambda_3 < \infty$，则由 Tonelli 定理或 Fubini 定理可得

$$\int_{\mathbf{R}^3} f\, d\lambda_3 = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_j\, dx_k\, dx_m,$$

其中 j、k、m 为 1、2、3 的任意排列。

尽管我们将 λ_n 定义为 $\lambda_{n-1} \times \lambda_1$，但对于任意满足 $j + k = n$ 的正整数 j、k，也可以将 λ_n 定义为 $\lambda_j \times \lambda_k$。这种看似不同的定义将根据 5.39) 导致相同的 σ-代数 $\mathcal{B}_n$ (，并得到相同的测度 λ_n [因为 $\lambda_n(E)$ 的这两种可能定义都可以写成关于 λ_1 的 n 积分的完全相同的迭代]。

$\mathbf{R}^n$ 中单位球的体积

下一个结果的证明为使用勒贝格测度 λ_n 提供了很好的实践经验。回顾一下，$tE = \{tx : x \in E\}$。

5.41 *measure of a dilation*

假设 $t > 0$。如果 $E \in \mathcal{B}_n$，那么 $tE \in \mathcal{B}_n$ 和 $\lambda_n(tE) = t^n \lambda_n(E)$.

证明 设

$$\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{B}_n : tE \in \mathcal{B}_n\}.$$

然后，$\mathcal{E}$ 包含 $\mathbf{R}^n$ (的每一个开子集，因为如果 E 在 $\mathbf{R}^n$ 中是开的，那么 tE 在 $\mathbf{R}^n$) 中也是开的。此外，$\mathcal{E}$ 在取补和可数并下是封闭的，因为

$$t(\mathbf{R}^n \setminus E) = \mathbf{R}^n \setminus (tE) \quad \text{and} \quad t\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (tE_k).$$

因此，$\mathcal{E}$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 σ-代数，并且包含 $\mathbf{R}^n$ 的开子集。因此 $\mathcal{E} = \mathcal{B}_n$。换言之，对所有 $E \in \mathcal{B}_n$，$tE \in \mathcal{B}_n$。

为证明 $\lambda_n(tE) = t^n \lambda_n(E)$，首先考虑情形 $n = 1$。$\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度是外测度的一个限制。一个集合的外测度由其并包含该集合的可数区间族的长度之和所决定。将该集合乘以 t 对应于将每一个这样的区间乘以 t，这会使每一个这样的区间的长度乘以 t。换言之，$\lambda_1(tE) = t\lambda_1(E)$。

现在假设 $n > 1$。我们将对 n 进行归纳，并假设所需结果对 $n-1$ 成立。如果 $A \in \mathcal{B}_{n-1}$ 和 $B \in \mathcal{B}_1$，则

$$\begin{aligned}
\lambda_n\big(t(A \times B)\big) &= \lambda_n\big((tA) \times (tB)\big) \\
&= \lambda_{n-1}(tA) \cdot \lambda_1(tB) \\
&= t^{n-1}\lambda_{n-1}(A) \cdot t\lambda_1(B) \\
&= t^n \lambda_n(A \times B), \qquad (5.42)
\end{aligned}$$

给出 $A \times B$ 的期望结果。

对于 $m \in \mathbf{Z}^+$，令 C_m 为 $\mathbf{R}^n$ 中以原点为中心、边长为 m 的开立方体。令

$$\mathcal{E}_m = \{E \in \mathcal{B}_n : E \subseteq C_m \text{ and } \lambda_n(tE) = t^n \lambda_n(E)\}.$$

由 5.42 并结合 5.13(b)，我们看到，包含于 C_m 中的可测矩形的有限并属于 $\mathcal{E}_m$。你应当验证 $\mathcal{E}_m$ 在可数递增并（使用 2.59）以及可数递减交（使用 2.60 ）下是封闭的；其中 2.60 的有限测度条件成立，因为我们是在 C_m 内进行的 。由 5.13 以及单调类定理（5.17），我们得出 $\mathcal{E}_m$ 是 C_m 上由 C_m 的 Borel 子集构成的 σ-代数。因此，对所有满足 $E \subseteq C_m$ 的 $E \in \mathcal{B}_n$，都有 $\lambda_n(tE) = t^n \lambda_n(E)$。

现在假设 $E \in \mathcal{B}_n$。则 2.59 表明

$$\lambda_n(tE) = \lim_{m\to\infty} \lambda_n\big(t(E \cap C_m)\big) = t^n \lim_{m\to\infty} \lambda_n(E \cap C_m) = t^n \lambda_n(E),$$

如所愿。 ■

5.43 定义 *open unit ball in* R^n; B_n

R^n中的*open unit ball*记作B_n，并定义为

$$\mathbf{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 < 1\}.$$

开单位球 B_n 在 R^n (中是开集，这一点你应该验证)，因此属于 Borel 集的集合 $\mathcal{B}_n$。

5.44 *volume of the unit ball in* R^n

$$\lambda_n(\mathbf{B}_n) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} & \text{if } n \text{ is even,} \\[2ex] \dfrac{2^{(n+1)/2}\,\pi^{(n-1)/2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot n} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

证明 因为 $\lambda_1(\mathrm{B}_1) = 2$ 和 $\lambda_2(\mathrm{B}_2) = \pi$，当 $n = 1$ 且当 $n = 2$ 时，所述公式是正确的。

现在假设 $n > 2$。我们将对 n 进行归纳，假设所声称的公式对于较小的 n 的取值成立。将 R^n =、R^2 ×、R^{n-2} 和 $\lambda_n = \lambda_2 \times \lambda_{n-2}$ 视为如此。于是

5.45
$$\lambda_n(\mathbf{B}_n) = \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^{n-2}} \chi_{\mathbf{B}_n}(x, y)\, dy\, dx.$$

暂时固定 $x = (x_1, x_2) \in$ 属于 R^2。如果 ${x_1}^2 + {x_2}^2 \geq$ 为 1，则对所有 $y \in$ 属于 R^{n-2}，$\chi_{\mathbf{B}_n}(x, y) =$ 为 0。如果 ${x_1}^2 + {x_2}^2 <$ 为 1 且 $y \in$ 属于 R^{n-2}，则 $\chi_{\mathbf{B}_n}(x, y) =$ 当且仅当 $y \in (1 - {x_1}^2 - {x_2}^2)^{1/2}\mathrm{B}_{n-2}$ 时为 1。因此，5.45 中的内层积分等于

$$\lambda_{n-2}\Big((1 - {x_1}^2 - {x_2}^2)^{1/2}\mathbf{B}_{n-2}\Big)\chi_{\mathbf{B}_2}(x),$$

其乘以5.41等于

$$(1 - {x_1}^2 - {x_2}^2)^{(n-2)/2}\lambda_{n-2}(\mathbf{B}_{n-2})\chi_{\mathbf{B}_2}(x).$$

因此，5.45 成为该方程

$$\lambda_n(\mathbf{B}_n) = \lambda_{n-2}(\mathbf{B}_{n-2}) \int_{\mathbf{B}_2} (1 - {x_1}^2 - {x_2}^2)^{(n-2)/2}\, d\lambda_2(x_1, x_2).$$

为了计算这个积分，切换到你在微积分中学过的常用极坐标（$\mathrm{d}\lambda_2 = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$），得到

$$\begin{aligned} \lambda_n(\mathbf{B}_n) &= \lambda_{n-2}(\mathbf{B}_{n-2}) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (1 - r^2)^{(n-2)/2} r\, dr\, d\theta \\ &= \frac{2\pi}{n}\lambda_{n-2}(\mathbf{B}_{n-2}). \end{aligned}$$

最后一个等式和归纳假设给出了所需的结果。 ∎

该表给出了使用 5.44 计算得到的 $\lambda_n(\mathrm{B}_n)$ 的前五个取值。该表的最后一列给出了 $\lambda_n(\mathrm{B}_n)$ 的十进制近似值，精确到小数点后两位。由此表你可能会猜测 $\lambda_n(\mathrm{B}_n)$ 是关于 n 的递增函数，尤其是因为包含球 B_n 的最小立方体具有 n 维勒贝格测度 2^n。然而，本节的练习 12 表明 $\lambda_n(\mathrm{B}_n)$ 的行为大不相同。

n	$\lambda_n(\mathbf{B}_n)$	$\approx \lambda_n(\mathbf{B}_n)$
1	2	2.00
2	π	3.14
3	$4\pi/3$	4.19
4	$\pi^2/2$	4.93
5	$8\pi^2/15$	5.26

通过富比尼定理证明混合偏导数的相等性

5.46 定义 ***partial derivatives; $D_1 f$ and $D_2 f$***

假设 G 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个开子集，且 $f\colon G \to \mathbf{R}$ 是一个函数。对于 $(x, y) \in G$，*partial derivatives* $(D_1 f)(x、y)$ 和 $(D_2 f)(x, y)$ 的定义如下：

$$(D_1 f)(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t}$$

和

$$(D_2 f)(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t}$$

如果这些极限存在。

使用函数截面的符号（见5.7），我们可以将D_1和D_2的定义写成以下形式：

$$(D_1 f)(x,y) = ([f]^y)'(x) \quad \text{and} \quad (D_2 f)(x,y) = ([f]_x)'(y).$$

5.47 示例 *partial derivatives of x^y*

让 $G =\ \{(xy) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$ 并定义 $f\colon G \to \mathbf{R}$ 由 $f(x,y) = x^y$ 然后

$$(D_1 f)(x,y) = yx^{y-1} \quad \text{and} \quad (D_2 f)(x,y) = x^y \ln x,$$

正如您应当验证的那样，对这些偏导数再求偏导数，我们得到

$$\big(D_2(D_1 f)\big)(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$$

和

$$\big(D_1(D_2 f)\big)(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x,$$

正如你应该验证的那样。最后两个方程显示了 $D_1(D_2 f) = D_2(D_1 f)$ 作为 G 上的函数。

在上面的例子中，这两个混合偏导数最终彼此相等，尽管中间结果看起来相当不同。下一个结果表明，上述例子中的行为是典型的，而非巧合。

下面结果的一些证明并不使用富比尼定理。然而，富比尼定理可以导出下面这个简洁的证明。

Although the continuity hypotheses in the result below can be slightly weakened, they cannot be eliminated, as shown by Exercise 14 in this section.

下面证明中出现的积分是有意义的，因为定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的连续实值函数是可测的（因为对于连续函数，每个开集的逆像都是开集），并且因为定义在 $\mathbf{R}^2$ 的闭有界子集上的连续实值函数是有界的。

5.48 *equality of mixed partial derivatives*

设 G 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个开子集，且 $f\colon G \to \mathbf{R}$ 是一个函数，使得 $D_1 f$、$D_2 f$、$D_1(D_2 f)$ 和 $D_2(D_1 f)$ 都存在并且在 G 上是连续函数。则

$$D_1(D_2 f) = D_2(D_1 f)$$

在 G。

证明 固定（a, b）$\in G$。对于 $\delta > 0$，令 $S_\delta = [a, a+\delta] \times [b, b+\delta]$。如果 $S_\delta \subseteq G$

$$\begin{aligned}
\int_{S_\delta} D_1(D_2 f)\, d\lambda_2 &= \int_b^{b+\delta} \int_a^{a+\delta} \bigl(D_1(D_2 f)\bigr)(x, y)\, dx\, dy \\
&= \int_b^{b+\delta} \bigl[(D_2 f)(a+\delta, y) - (D_2 f)(a, y)\bigr]\, dy \\
&= f(a+\delta, b+\delta) - f(a+\delta, b) - f(a, b+\delta) + f(a, b),
\end{aligned}$$

其中，第一个等式来自 Fubini 定理（5.32），第二个和第三个等式来自微积分基本定理。

对 $\int_{S_\delta} D_2(D_1 f)\, d\lambda_2$ 进行类似的计算会得到相同的结果。因此

$$\int_{S_\delta} [D_1(D_2 f) - D_2(D_1 f)]\, d\lambda_2 = 0$$

对于所有满足 $S_\delta \subseteq G$ 的 δ。如果 $\bigl(D_1(D_2 f)\bigr)(a、b) > \bigl(D_2(D_1 f)\bigr)(a、b)$，则由 $D_1(D_2 f)$ 和 $D_2(D_1 f)$ 的连续性可知，当 δ 充分小时，上述方程中的被积函数在 S_δ 上为正，这与上述积分等于 0 相矛盾。类似地，不等式 $\bigl(D_1(D_2 f)\bigr)(a、b) < \bigl(D_2(D_1 f)\bigr)(a、b)$ 在 δ 较小时也与上述方程相矛盾。因此我们得出结论

$$\bigl(D_1(D_2 f)\bigr)(a, b) = \bigl(D_2(D_1 f)\bigr)(a, b),$$

如所愿。 ■

练习 5C

1 证明：集合 $G \subseteq \mathbf{R}^n$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是开集，当且仅当对于每个 $(b_1, \ldots, b_n) \in G$，存在 $r > 0$ 使得

$$\left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n : \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} < r\right\} \subseteq G.$$

2 证明存在一个集合 $E \subseteq \mathbf{R}^2$ (，将 $\mathbf{R}^2$ 视为等同于 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$)，使得截面 $[E]_a$ 和 $[E]^a$ 对于每个 $a \in \mathbf{R}$ 都是 $\mathbf{R}$ 的开子集，但 $E \notin \mathcal{B}_2$。

3 假设（$X, \mathcal{S}$）、（$Y, \mathcal{T}$）以及（$Z, \mathcal{U}$）是可测空间。我们可以将 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$ 定义为 $X \times Y \times Z$ 上包含的最小 σ-代数

$$\{A \times B \times C : A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}, C \in \mathcal{U}\}.$$

证明：如果我们将乘积（$X \times Y$）$\times Z$ 和 $X \times (Y \times Z)$ 与 $X \times Y \times Z$ 作显然的同一识别，则

$$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{U} = (\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}) \otimes \mathcal{U} = \mathcal{S} \otimes (\mathcal{T} \otimes \mathcal{U}).$$

4 证明 $\mathbf{R}^n$ 上的勒贝格测度是平移不变的。更准确地说，证明如果 $E \in \mathcal{B}_n$ 且 $a \in \mathbf{R}^n$，那么 $a + E \in \mathcal{B}_n$ 和 $\lambda_n(a + E) = \lambda_n(E)$，其中

$$a + E = \{a + x : x \in E\}.$$

5 假设 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是 $\mathcal{B}_n$-可测的，且 $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$。定义 $f_t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为 $f_t(x) = f(tx)$。

(a) 证明 f_t 是 $\mathcal{B}_n$-可测的。 (b) 证明如果 $\int_{\mathbf{R}^n} f \, d\lambda_n$ 被定义，则

$$\int_{\mathbf{R}^n} f_t \, d\lambda_n = \frac{1}{|t|^n} \int_{\mathbf{R}^n} f \, d\lambda_n.$$

6 假设 λ 表示 $(\mathbf{R}, \mathcal{L})$ 上的勒贝格测度，其中 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbf{R}$ 的勒贝格可测子集所构成的 σ-代数。证明存在 $\mathbf{R}^2$ 的子集 E 和 F，使得

- $F \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ 并且 $(\lambda \times \lambda)(F) = 0$;
- $E \subseteq F$ 但是 $E \notin \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$。

[*The measure space* $(\mathbf{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ *has the property that every subset of a measurable set with measure* 0 *is measurable. This exercise asks you to show that the measure space* $(\mathbf{R}^2, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}, \lambda \times \lambda)$ *does not have this property.*]

7 假设 $m \in \mathbf{Z}^+$。验证在 5.41 的证明中出现的集合族 $\mathcal{E}_m$ 是一个单调类。

证明 R^n 中的开单位球是 R^n 的一个开子集。

假设 G_1 是 R^m 的一个非空子集，G_2 是 R^n 的一个非空子集。证明当且仅当 G_1 是 R^m 的一个开子集且 G_2 是 R^n 的一个开子集时，$G_1 \times G_2$ 是 $\mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^n$ 的一个开子集。[
One direction of this result was already proved (*see 5.36*)*; both directions are stated here to make the result look prettier and to be comparable to the next exercise, where neither direction has been proved.*]

10 假设 F_1 是 R^m 的一个非空子集，且 F_2 是 R^n 的一个非空子集。证明 $F_1 \times F_2$ 是 $\mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^n$ 的闭子集，当且仅当 F_1 是 R^m 的闭子集，并且 F_2 是 R^n 的闭子集
。

假设 E 是 $\mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^n$ 的一个子集，

$$A = \{x \in \mathbf{R}^m : (x, y) \in E \text{ for some } y \in \mathbf{R}^n\}.$$

(a) 证明如果 E 是 $\mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^n$ 的开子集，则 A 是 R^m 的开子集。（b）证明或给出反例：如果 E 是 $\mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^n$ 的闭子集，则 A 是 R^m 的闭子集。

12（a）证明 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(\mathrm{B}_n) =$ 为 0。

(b) 找到最大化 $\lambda_n(\mathrm{B}_n)$ 的 n 值。

13 对于熟悉伽马函数 Γ 的读者：证明

$$\lambda_n(\mathbf{B}_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

对于每个正整数 n。

14 定义 $f\colon \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ 为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) 证明 $D_1(D_2 f)$ 和 $D_2(D_1 f)$ 在 R^2 上处处存在。

(b) 证明 $\big(D_1(D_2 f)\big)(0, 0) \neq \big(D_2(D_1 f)\big)(0, 0)$。

（c）解释为什么（b）并不违反 5.48。

Chapter 6
Banach Spaces

本章首先简要回顾度量空间的基本要点。随后，我们将关于可测函数和积分的结果推广到复值函数。之后，我们快速回顾向量空间的框架，这使我们能够考虑在加法和数乘下封闭的、自然的可测函数集合。

赋范向量空间和巴拿赫空间在本章第三节中引入，在现代分析中发挥着极其重要的作用。研究的重点主要集中在这些向量空间上的线性映射。本章中我们将要发展的关于线性映射的关键结果包括哈恩–巴拿赫定理、开映射定理、闭图定理以及一致有界性原理。

Market square in Lviv, a city that has had several names and has been in several countries because of changing international borders. From 1772 until 1918, the city was in Austria and was called Lemberg. Between World War I and World War II, the city was in Poland and was called Lwów. During this time, mathematicians in Lwów, particularly Stefan Banach (1892–1945) and his colleagues, developed the basic results of modern functional analysis, using tools of analysis to study infinite-dimensional vector spaces. Since World War II ended, Lviv has been in Ukraine, which was part of the Soviet Union until Ukraine became an independent country in 1991.

6A 度量空间

开集、闭集与连续性

分析中的许多内容是在度量空间的背景下进行的，度量空间是一个带有距离概念并满足某些性质的集合。我们希望距离函数具备的性质在下面的定义中得到刻画，在这里你应当将 $d(f,g)$ 视为度量 f 与 g 之间的距离。

具体而言，我们希望度量空间中两个元素之间的距离是一个非负数，并且当且仅当这两个元素相同时距离为 0。我们希望两个元素之间的距离不依赖于我们列出它们的顺序。最后，我们希望满足三角不等式（见下方最后一个要点），即两个元素之间的距离小于或等于在其中插入一个中间元素时所得到的距离之和。

现在我们已经准备好给出正式定义。

6.1 定义 *metric space*

A *metric* 在一个非空集合 V 上是一个函数 $d: V \times V \to [0, \infty)$chu那个

- $d(f,$ 对所有 $f \in V,\ f) = 0$;
- 如果 f、$g \in V$ 和 $d(f$、$g) = 0$，则 $f = g$;
- $d(f,\ g) = d(g,\ f)$ 对所有 $f,\ g \in V$;
- $d(f,\ h) \le d(f,\ g) + d(g,\ h)$ 对于所有 $f,\ g,\ h \in V$。

A *metric space* 是一个二元组（V, d），其中 V 是一个非空集合，在且 V d 上是的一个 metric

6.2 示例 *metric spaces*

- 设 V 是一个非空集合。在 $V \times V$ 上定义 d，规定 $d(f,g)$ 在 $f \neq g$ 时取 1，在 $f = g$ 时取 0。则 d 是 V 上的一个度量。
- 在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上由 $d(x,y) = |x - y|$ 定义 d。则 d 是 $\mathbf{R}$ 上的一个度量。
- 对于 $n \in \mathbf{Z}^+$，在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 上定义 d:
$$d\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) = \max\{|x_1 - y_1|,\ldots,|x_n - y_n|\}.$$
那么 d 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个度量。
- 在 $C([0,1]) \times C([0,1])$ 上定义 d 为 $d(f,\ g) = \sup\{|f(t) - g(t)|:\ t \in [0,1]\}$；其中 $C([0,1])$ 是 $[0,1]$ 上连续实值函数的集合。则 d 是 $C([0,1])$ 上的一个度量。
- 在 $\ell^1 \times \ell^1$ 上由 $d\big((a_1,a_2,\ldots),(b_1,b_2,\ldots)\big) = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k - b_k|$ 定义 d；这里 ℓ^1 是满足 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$ 的实数序列 $(a_1,a_2,\ldots)$ 的集合。于是 d 是 ℓ^1 上的一个度量。

本节中的材料对本书的大多数读者来说可能是复习。因此，较平常更多的细节留给读者自行核实。核实这些细节并完成练习是巩固你对这些概念理解的最佳方式。你应该能够将熟悉的定义和证明从

This book often uses symbols such as f, g, h as generic elements of a generic metric space because many of the important metric spaces in analysis are sets of functions; for example, see the fourth bullet point of Example 6.2.

将R或R^{n}的上下文转换为度量空间的上下文。

我们需要使用度量空间的拓扑特性，我们现在将介绍这些特性。

6.3 定义 *open ball; $B(f,r)$; closed ball; $\overline{B}(f,r)$*

假设 (V, d) 是一个度量空间，$f \in V$，且 $r > 0$。

- 以 f 为中心、半径为 r 的 *open ball* 记作 $B(f,r)$，并定义为
$$B(f,r) = \{g \in V : d(f,g) < r\}.$$
- *closed ball* 以 f 为中心，半径为 r 的圆表示为 $\overline{B}(f,r)$，并由以下定义：
$$\overline{B}(f,r) = \{g \in V : d(f,g) \le r\}.$$

滥用术语，许多书籍（包括本书）会使用诸如 *suppose V is a metric space* 之类的表述，却不提及度量 d。当出现这种情况时，你应当假定附近潜藏着一个度量 d，即使它没有被明确命名。

我们接下来的定义规定：如果子集中每个元素都是某个包含于该子集中的开球的中心，则度量空间的一个子集称为开集。

6.4 定义 *open*

一个度量空间 V 的子集 G 称为 *open*，如果对于每个 $f \in G$，存在 $r > 0$，使得 $B(f,r) \subseteq G$。

6.5 *open balls are open*

假设 V 是一个度量空间，$f \in V$，且 $r > 0$。那么 $B(f,r)$ 是 V 的一个开子集。

证明 设 $g \in B(f,r)$。我们需要证明以 g 为中心的一个开球包含于 $B(f,r)$。为此，注意到如果 $h \in B\big(g, r - d(f,g)\big)$，则

$$d(f,h) \le d(f,g) + d(g,h) < d(f,g) + \big(r - d(f,g)\big) = r,$$

这意味着 $h \in B(f,r)$。因此 $B\big(g, r - d(f,g)\big) \subseteq B(f,r)$，这意味着 $B(f,r)$ 是开放的。 ■

闭集是用开集来定义的。

6.6 定义 *closed*

一个子度量空间 V 的一个集合被称为 *closed*，如果它在 V 中的补集是开放的。

例如，在度量空间中，每个闭球 $B(f$、$r)$ 都是闭集，正如你在练习 3 中被要求证明的那样。

现在我们定义度量空间中一个子集的闭包。

6.7 定义 *closure*; $\overline{E}$

设 V 是一个度量空间且 $E \subseteq V$。E 的 *closure*，记为 $\overline{E}$，定义为

$$\overline{E} = \{g \in V : B(g, \varepsilon) \cap E \neq \varnothing \text{ for every } \varepsilon > 0\}.$$

度量空间中的极限是通过化归到实数情形来定义的，在该情形下极限已经被定义。

6.8 定义 *limit in metric space;* $\lim_{k\to\infty} f_k$

设 (V, d) 是一个度量空间，$f_1, f_2, \ldots$ 是 V 中的一个序列，并且 $f \in V$。则

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \text{ means } \lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0.$$

换句话说，若对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得，V 中的序列 $f_1, f_2, \ldots$ 收敛到 $f \in V$。

$$d(f_k, f) < \varepsilon \text{ for all integers } k \geq n.$$

下一个结果表明，一个集合的闭包是该集合中元素的所有极限的集合。此外，当且仅当一个集合等于其闭包时，该集合是闭的。下一个结果的证明留作练习，以便为使用这些概念提供良好的练习。

6.9 *closure*

设 V 是一个度量空间且 $E \subseteq V$。则

(a) $\overline{E} = \{g \in V$：存在 f_1、f_2、…… 在 E 中，使得 $\lim_{k\to\infty} f_k = g\}$；

(b) $\overline{E}$ 是所有包含 E 的 V 的闭子集的交；(c) $\overline{E}$ 是 V 的一个闭子集；(d) E 当且仅当 $E = \overline{E}$ 时是闭的；(e) E 当且仅当 E 包含 E 的元素的每一个收敛序列的极限时是闭的。

下面给出的连续性定义采用了与从 R 的一个子集到 R 的函数的定义相同的模式。

6.10 定义 *continuous*

假设 (V, d_V) 和 (W, d_W) 是度量空间，且 $T : V \to W$ 是一个函数。

- 对于$f \in V$，如果对于每个$\varepsilon > 0$，都存在$\delta > 0$，使得函数T在f处称为 *continuous*

$$d_W\big(T(f), T(g)\big) < \varepsilon$$

对于所有具有 $d_V(f$ 的 $g \in V$，$g) < \delta$。

- The 函数 T 若 T 在 f 处连续，则称为 *continuous*，对于 eve ry $f \in V$。

下面的结果给出了连续性的等价条件。回顾一下，$T^{-1}(E)$ 称为 E 的逆像，其定义为 $\{f \in V : T(f) \in E\}$。因此，下面 (a) 与 (c) 的等价性可以重述为：一个函数当且仅当每个开集的逆像都是开集时是连续的。下面 (a) 与 (d) 的等价性可以重述为：一个函数当且仅当每个闭集的逆像都是闭集时是连续的。

6.11 *equivalent conditions for continuity*

假设 V 和 W 是度量空间，且 $T : V \to W$ 是一个函数。那么以下陈述是等价的。

(a) T 是连续的。

(b) 在 V 中 $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ 的极限推出在 W 中 $\lim_{k\to\infty} T(f_k) = T(f)$ 的极限。(c) 对于每一个开集 $G \subseteq W$，$T^{-1}(G)$ 是 V 的一个开子集。(d) 对于每一个闭集 $F \subseteq W$，$T^{-1}(F)$ 是 V 的一个闭子集。

证明　我们首先证明 (b) 推出 (d)。假设 (b) 成立。假设 F 是 W 的一个闭子集。我们需要证明 $T^{-1}(F)$ 是闭的。为此，假设 f_1，f_2，... 是 $T^{-1}(F)$ 中的一个序列，并且 $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ 对某些 $f \in V$ 成立。因为 (b) 成立，我们知道 $\lim_{k\to\infty} T(f_k) = T(f)$。因为 $f_k \in T^{-1}(F)$ 对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 成立，我们知道 $T(f_k) \in F$ 对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 成立。因为 F 是闭的，这意味着 $T(f) \in F$。因此 $f \in T^{-1}(F)$，这意味着 $T^{-1}(F)$ 是闭的 [由 6.9(e)]，完成证明 (b) 推出 (d)。

证明 (c) 和 (d) 等价来自于方程　　离子

$$T^{-1}(W \setminus E) = V \setminus T^{-1}(E)$$

对于每个 $E \subseteq W$，以及这样一个事实：一个集合当且仅当其补集（在相应的度量空间中）是闭的时，该集合是开的。

这个结果其余部分的证明留作练习，这将有助于加深你对这些概念的理解。

柯西序列与完备性

下面的定义对于说明（在某些度量空间中）一个序列存在极限很有用，即使我们并没有一个很好的极限候选。

6.12 定义 *Cauchy sequence*

在度量空间（V, d）中的一个序列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ 被称为一个 *Cauchy sequence*，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得对所有整数 $j \geq n$ 和 $k \geq n$，都有 $d(f_j, f_k) < \varepsilon$。

6.13 *every convergent sequence is a Cauchy sequence*

度量空间中的每个收敛序列都是柯西序列。

证明 假设 $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ 在一个度量空间 (V, d) 中。假设 $\varepsilon > 0$。则存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $d(f_k,\ f) < \frac{\varepsilon}{2}$ 对所有 $k \geq n$。如果 j，$k \in \mathbf{Z}^+$ 满足 $j \geq n$ 和 $k \geq n$，那么

$$d(f_j, f_k) \leq d(f_j, f) + d(f, f_k) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此，$f_1, f_2, \ldots$ 构成一个柯西序列，从而完成证明。 ■

满足上述结果逆命题的度量空间有一个特殊的名称。

6.14 定义 *complete metric space*

一个度量空间V称为*complete*，如果V中的每个柯西序列都收敛到V中的某个元素。

6.15 示例

- 例6.2中的五个度量空间都是完备的，你应当自行验证。
- 度量空间 $\mathbf{Q}$，其度量由 $d(x、y) = |x - y|$ 定义，并不是完备的。要看到这一点，对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，令

$$x_k = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \cdots + \frac{1}{10^{k!}}.$$

如果$j < k$，那么

$$|x_k - x_j| = \frac{1}{10^{(j+1)!}} + \cdots + \frac{1}{10^{k!}} < \frac{2}{10^{(j+1)!}}.$$

因此，x_1、x_2、……是在 $\mathbf{Q}$ 中的一个柯西序列。然而，x_1、x_2、……并不收敛到 $\mathbf{Q}$ 中的某个元素，因为该序列的极限将具有十进制展开 0.1100010000000000000000001……，它既不是有限小数也不是循环小数。因此，$\mathbf{Q}$ 不是一个完备的度量空间。

Entrance to the École Polytechnique, Paris, where Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) was a student and a faculty member. Cauchy wrote almost 800 mathematics papers and the highly influential textbook 分析课程 *(published in 1821), which greatly influenced the development of analysis.*

每个非空子集都是一个度量空间。具体来说，假设（V，d）是一个度量空间，且U是V的一个非空子集。那么，将d限制到$U \times U$上，就会得到U上的一个度量。除非另有说明，否则应假设子集上的度量是该子集从大集合继承的限制度量。

将下面结果中的两个要点结合起来表明，完备度量空间的一个子集当且仅当它是闭的时，才是完备的。

6.16 *connection between complete and closed*

(a) 一个度量空间的完全子集是闭合的。 (b) 一个度量空间的闭合子集是完全的。

证明 我们从证明 (a) 开始。假设 U 是度量空间 V 的一个完备子集。假设 f_1、f_2、... 是 U 中收敛到某个 $g \in V$ 的序列。那么 f_1、f_2、... 是 U (中的柯西序列，由 6.13) 得出。因此，由于 U 的完备性，该序列 f_1、f_2、... 收敛到 U 的某个元素，这个元素必须是 g (（见习题 7)）。因此，$g \in U$。现在 6.9(e) 表明 U 是 V 的一个闭子集，从而完成了 (a) 的证明。

为了证明（b），假设 U 是完备度量空间 V 的一个闭子集。为了证明 U 是完备的，假设 f_1、f_2、…… 是 U 中的一个柯西序列。那么 f_1、f_2、…… 也是 V 中的一个柯西序列。根据 V 的完备性，这个序列收敛于某个 $f \in V$。因为 U 是闭的，这意味着 $f \in U$ (见 6.9)。因此，柯西序列 f_1、f_2、…… 收敛于 U 的一个元素，从而证明 U 是完备的。因此（b）已被证明。 ∎

练习 6A

1 验证例 6.2 中所给出的每一个度量确实都是一个度量。

2 证明度量空间的每个有限子集都是闭的。

3 证明度量空间中的每一个闭球都是闭集。

4 假设 V 是一个度量空间。

(a) 证明 V 的任意一族开子集的并集是 V 的一个开子集。 (b) 证明 V 的任意有限族开子集的交集是 V 的一个开子集。

假设 V 是一个度量空间。

(a) 证明每个闭子集集合的交集是V的一个闭子集。 (b) 证明每个有限闭子集集合的并集是V的一个闭子集。

6 (a) 证明如果 V 是一个度量空间，$f \in V$，和 $r > 0$，那么 $\overline{B(f, r)} \subseteq \overline{B}(f, r)$。 (b) 给出一个度量空间 V，$f \in V$，和 $r > 0$ 的例子，使得 $\overline{B(f, r)} \neq \overline{B}(f, r)$。

7 证明度量空间中的每个序列至多有一个极限。

8 证明 6.9。

9 证明度量空间 V 的每个开子集都是 V 的某些闭子集的并。

10 证明或给出反例：如果 V 是一个度量空间，且 U、W 是 V 的子集，则 $\overline{U \cup W} = \overline{U} \cup \overline{W}$。

11 证明或给出反例：如果 V 是一个度量空间，并且 U、W 是 V 的子集，则 $\overline{U \cap W} = \overline{U} \cap \overline{W}$。

假设 (U, d_U), (V, d_V) 和 (W, d_W) 是度量空间。另假设 $T : U \to V$ 和 $S : V \to W$ 是连续函数。

(a) 使用连续性的定义，证明 $S \circ T : U \to W$ 是连续的。 (b) 使用 6.11(a) 和 6.11(b) 的等价性，证明 $S \circ T : U \to W$ 是连续的。 (c) 使用 6.11(a) 和 6.11(c) 的等价性，证明 $S \circ T : U \to W$ 是连续的。

13 证明6.11中未在文中证明的部分。

14 设一个度量空间中的柯西序列有一个收敛的子序列。证明该柯西序列收敛。

15 验证例 6.2 中的五个度量空间都是完备度量空间。

16 假设（U, d）是一个度量空间。令 W 表示由 U 的元素组成的所有柯西序列的集合。

（a）对于 W 中的 $(f_1, f_2, \ldots)$ 和 $(g_1, g_2, \ldots)$，定义 $(f_1, f_2, \ldots) \equiv (g_1, g_2, \ldots)$ 表示

$$\lim_{k \to \infty} d(f_k, g_k) = 0.$$

证明 $\equiv$ 是 W 上的等价关系。

(b) 令 V 表示在上述等价关系下 W 中元素的等价类集合。对于 $(f_1, f_2, \ldots) \in W$，令 $(f_1, f_2, \ldots)\widehat{\ }$ 表示 $(f_1, f_2, \ldots)$ 的等价类。定义 $d_V : V \times V \to [0, \infty)$ 为

$$d_V\big((f_1, f_2, \ldots)\widehat{\ }, (g_1, g_2, \ldots)\widehat{\ }\big) = \lim_{k \to \infty} d(f_k, g_k).$$

证明这个对 d_V 的定义是合理的，并且 d_V 是 V 上的一个度量。

（c）证明（V, d_V）是一个完备度量空间。

（d）证明从 U 到 V 的映射，将 $f \in U$ 映射为 $(f, f, f, \ldots)\widehat{\ }$，是保距的，这意味着

$$d(f, g) = d_V\big((f, f, f, \ldots)\widehat{\ }, (g, g, g, \ldots)\widehat{\ }\big)$$

对于所有 f、$g \in U$。

（e）解释为什么（d）表明每个度量空间都是某个完备度量空间的子集。

6B 向量空间

复值函数的积分

复数被发明出来是为了能够对负数取平方根。这个想法是假设我们有一个 -1 的平方根，记作 i，并且它遵守通常的算术规则。以下是形式化定义：

6.17 定义 *complex numbers;* $\mathbf{C}$*; addition and multiplication in* $\mathbf{C}$

- 一个 *complex number* 是一个有序对（a, b），其中 a、$b \in \mathbf{R}$，但我们将其写作 $a + bi$ 或 $a + ib$。
- 所有复数的集合用 $\mathbf{C}$ 表示：
$$\mathbf{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbf{R}\}.$$
- *Addition* 和 *multiplication* 在 $\mathbf{C}$ 中定义为
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$
这里 a、b、c、$d \in \mathbf{R}$。

如果 $a \in \mathbf{R}$，那么我们将 $a + 0i$ 与 a 视为同一。因此我们把 $\mathbf{R}$ 看作 $\mathbf{C}$ 的一个子集。我们也通常将 $0 + bi$ 写作 bi，并且通常将 $0 + 1i$ 写作 i。你应该验证 $i^2 = -1$。

The symbol i was first used to denote $\sqrt{-1}$ by Leonhard Euler (1707–1783) in 1777.

根据上述定义，$\mathbf{C}$ 满足常规的算术规则。具体而言，按照上述定义的加法和乘法，$\mathbf{C}$ 是一个域，如你应当验证的那样。因此，复数的减法和除法按任何域中的定义进行。

域 $\mathbf{C}$ 不能被构造为有序域。然而，绝对值这一有用的概念仍然可以在 $\mathbf{C}$ 上定义。

Much of this section may be review for many readers.

6.18 定义 *real part;* $\operatorname{Re} z$*; imaginary part;* $\operatorname{Im} z$*; absolute value; limits*

假设 $z = a + bi$，其中 a 和 b 是实数。

- z 的 *real part*，记作 $\operatorname{Re} z$，定义为 $\operatorname{Re} z = a$。
- z 的 *imaginary part*，记作 $\operatorname{Im} z$，定义为 $\operatorname{Im} z = b$。
- z 的 *absolute value*，记作 $|z|$，由 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 定义。
- 如果 z_1、z_2、... $\in \mathbf{C}$ 和 $L \in \mathbf{C}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = L$ 意味着 $\lim\limits_{k\to\infty} |z_k - L| = 0$。

对于作为实数的 b，将 $|b|$ 视为实数的通常定义，与刚刚给出的、在把 b 看作复数时对 $|b|$ 的新定义是一致的。注意，如果 $z_1, z_2, \ldots$ 是一个复数序列，且 $L \in \mathbf{C}$，则

$$\lim_{k\to\infty} z_k = L \iff \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} z_k = \operatorname{Re} L \text{ and } \lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} z_k = \operatorname{Im} L.$$

我们将把关于复值函数的可测性和积分的问题归结为关于该函数的实部和虚部的相应问题。我们从下面的定义开始这一过程。

6.19 定义 *measurable complex-valued function*

设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间。函数 $f: X \to \mathbf{C}$ 称为 $\mathcal{S}$-*measurable*，如果 $\operatorname{Re} f$ 和 $\operatorname{Im} f$ 都是 $\mathcal{S}$-可测函数。

请参见本节中的练习 5，其中列出了两个与复值函数的可测性等价的自然条件。

我们将频繁使用以下结果。有关复值可测函数的代数组合，参见本节的练习 6。

6.20 $|f|^p$ *is measurable if* f *is measurable*

假设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，$f: X \to \mathbf{C}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，且 $0 < p < \infty$。那么 $|f|^p$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

证明 函数 $(\operatorname{Re} f)^2$ 和 $(\operatorname{Im} f)^2$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，因为一个 $\mathcal{S}$-可测函数的平方是可测的（参见例2.45）。因此，函数 $(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2$ 是 $\mathcal{S}$-可测的（因为两个 $\mathcal{S}$-可测函数的和是 $\mathcal{S}$-可测的，见2.46）。现在 $\big((\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2\big)^{p/2}$ 是 $\mathcal{S}$-可测的，因为它是定义在 $[0, \infty)$ 上的连续函数与一个 $\mathcal{S}$-可测函数的复合函数（参见2.44和2.41）。换句话说，$|f|^p$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。 ∎

现在我们通过将复值函数分解为其实部和虚部来定义积分。

6.21 定义 *integral of complex-valued function*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $f: X \to \mathbf{C}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，具有 $\int |f| \, d\mu < \infty$。那么 $\int f \, d\mu$ 定义为

$$\int f \, d\mu = \int (\operatorname{Re} f) \, d\mu + i \int (\operatorname{Im} f) \, d\mu.$$

复值可测函数的积分仅在函数的绝对值具有有限积分时定义。相比之下，每个非负可测函数的积分都是定义的（尽管其值可能是 ∞），如果 f 是实值的，则 $\int f \, d\mu$ 被定义为 $\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$，前提是 $\int f^+ \, d\mu$ 和 $\int f^- \, d\mu$ 中至少有一个是有限的。

你可以很容易地证明，如果 $f, g : X \to \mathbf{C}$ 是 $\mathcal{S}$-可测函数，并且 $\int |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$ 和 $\int |g|\,\mathrm{d}\mu < \infty$，那么

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$$

同样地，复数乘法的定义得出这样的结论

$$\int \alpha f\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu$$

对于所有 $\alpha \in \mathbf{C}$（见练习 8）。

下述关于复值函数积分的结果中的不等式，并不能直接由对应的实值函数结果推出。然而，下面证明中使用的一个小技巧确实给出了一个相当简洁的证明。

6.22 ***bound on the absolute value of an integral***

设（X，$\mathcal{S}$，μ）是一个测度空间，且 $f : X \to \mathbf{C}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，使得 $\int |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$。则

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu.$$

证明 如果 $\int f\,\mathrm{d}\mu = 0$，该结果显然成立。因此假设 $\int f\,\mathrm{d}\mu \neq 0$。令

$$\alpha = \frac{\left|\int f\,d\mu\right|}{\int f\,d\mu}.$$

然后

$$\begin{aligned}
\left|\int f\,d\mu\right| = \alpha \int f\,d\mu &= \int \alpha f\,d\mu \\
&= \int \operatorname{Re}(\alpha f)\,d\mu + i\int \operatorname{Im}(\alpha f)\,d\mu \\
&= \int \operatorname{Re}(\alpha f)\,d\mu \\
&\leq \int |\alpha f|\,d\mu \\
&= \int |f|\,d\mu,
\end{aligned}$$

其中第二个等式由练习 8 得到，第四个等式成立是因为 $\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right| \in \mathbf{R}$，第四行中的不等式成立是因为对于每个复数 z 都有 $\operatorname{Re} z \leq |z|$，而最后一行中的等式成立是因为 $|\alpha| = 1$。■

由于上述结果，如果这些定理陈述中的函数 f_1、f_2、……以及 f 被允许取复值，则有界收敛定理（3.26）和支配收敛定理（3.31）仍然成立。

我们现在定义复数的共轭。

6.23 定义 *complex conjugate; $\bar{z}$*

假设 $z \in \mathbf{C}$。$z \in \mathbf{C}$ 的 *complex conjugate*，记作 $\bar{z}$（，读作 z-bar)，定义为

$$\bar{z} = \operatorname{Re} z - (\operatorname{Im} z)i.$$

例如，如果 $z = 5 + 7i$，那么 $\bar{z} = 5 - 7i$。注意，复数 z 当且仅当 $z = \bar{z}$ 时是实数。

下一个结果给出了复共轭的基本性质。

6.24 *properties of complex conjugates*

假设 $w, z \in \mathbf{C}$。则

- z 和 $\bar{z}$ 的乘积；$z\bar{z} = |z|^2$
- z 和 $\bar{z}$ 的和与差 $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ 和 $z - \bar{z} = 2(\operatorname{Im} z)i$;
- 复合共轭的加法性和乘法性 $\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$ 和 $\overline{wz} = \bar{w}\,\bar{z}$;
- 复共轭的复共轭 $\bar{\bar{z}} = z$;
- 复共轭的绝对值 $|\bar{z}| = |z|$;
- 复数值函数的复共轭的积分 $\displaystyle\int \bar{f}\, d\mu = \overline{\int f\, d\mu}$ whenever $\int |f|\, d\mu < \infty$.

证明 第一项成立是因为

$$z\bar{z} = (\text{实部 } z + i \text{ 虚部 } z)(\text{实部 } z - i \text{ 虚部 } z) = (\text{实部 } z)^2 + (\text{虚部 } z)^2 = |z|^2.$$

为证明最后一项，设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $f \colon X \to \mathbf{C}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，使得 $\int |f|\, d\mu < \infty$。则

$$\begin{aligned}\int \bar{f}\, d\mu = \int (\operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f)\, d\mu &= \int \operatorname{Re} f\, d\mu - i \int \operatorname{Im} f\, d\mu \\ &= \overline{\int \operatorname{Re} f\, d\mu + i \int \operatorname{Im} f\, d\mu} \\ &= \overline{\int f\, d\mu}.\end{aligned}$$

其余各项的直接证明留给读者。 ■

向量空间与子空间

向量空间的结构和语言将帮助我们关注可测函数集合的某些特征。为了能够方便地给出定义并证明同时适用于实数和复数的定理，我们采用如下记号。

6.25 定义 F

从现在起，F 表示 R 或 C 之一。

在下面的定义中，我们使用f和g来表示V的元素，因为在关键的例子中，V的元素是从集合X到F的函数。

6.26 定义 *addition; scalar multiplication*

- 集合V上的一个*addition*是一个函数，它为每一对元素f、$g \in V$指定一个元素$f + g \in V$。
- 在集合 V 上的 *scalar multiplication* 是一个将元素 $\alpha f \in V$ 分配给每个 $\alpha \in \mathbf{F}$ 和每个 $f \in V$ 的函数。

现在我们准备给出向量空间的正式定义。

6.27 定义 *vector space*

一个 *vector space* (在 F) 上是一个集合 V，并且在 V 上定义了加法、在 V 上定义了数乘，使得以下性质成立。

交换律
$f + g = g + f$ for all $f, g \in V$.

结合性
（$f + g$）$+ h = f + (g + h)$ 以及（$\alpha\beta$）$f = \alpha(\beta f)$ 对于所有 f、g、$h \in V$ 和 α、

加法恒等元素
存在一个元素 $0 \in V$，使得对于所有 $f \in$，$f + 0 = f$。 V.

加法逆元
对于每个 $f \in V$，都存在 $g \in V$，使得 $f + g = 0$。

乘法单位元
$1f = f$ 对所有 $f \in V$。

分配律
$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ 并且（$\alpha + \beta$）$f = \alpha f + \beta f$ 对所有 α、$\beta \in \mathbf{F}$ 以及 f，$g \in V$。

你将遇到的大多数向量空间都是下一个例子中给出的向量空间 $\mathbf{F}^X$ 的子集
。

6.28 示例 *the vector space* $\mathbf{F}^X$

假设 X 是一个非空集合。令 $\mathbf{F}^X$ 表示从 X 到 F 的函数集合。对 $\mathbf{F}^X$ 的加法和数乘按惯常方式定义：对于 f、$g \in$ 属于 $\mathbf{F}^X$ 且 $\alpha \in$ 属于 F，定义

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{and} \quad (\alpha f)(x) = \alpha\big(f(x)\big)$$

对于 $x \in X$。然后，如你应当验证的那样，$\mathbf{F}^X$ 是一个向量空间；该向量空间中的加法单位元是函数 $0 \in \mathbf{F}^X$，其定义为：对所有 $x \in X$，$0(x) = 0$。

6.29 示例 $\mathbf{F}^n$; $\mathbf{F}^{\mathbf{Z}^+}$

前面例子的特例：如果 $n \in \mathbf{Z}^+$ 且 $X = \{1, \ldots, n\}$，则 $\mathbf{F}^X$ 是熟悉的空间 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$，取决于 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 还是 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$。

另一个特殊情况：$\mathbf{F}^{\mathbf{Z}^+}$ 是所有实数序列或复数序列的向量空间，同样取决于 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 还是 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$。

通过考虑子空间，我们可以极大地扩展向量空间的例子。

6.30 定义 ***subspace***

V 的一个子集 U 称为 V 的一个 *subspace*，如果 U 也是一个向量空间（使用与 V 上相同的加法和标量乘法）。

下一结果给出了检查一个向量空间的子集是否是子空间的最简单方法。

6.31 ***conditions for a subspace***

当且仅当 U 满足以下三个条件时，V 的一个子集 U 是 V 的一个子空间。

- 加法单位元 $0 \in U$。
- 在加法下封闭 f，$g \in U$ 蕴含 $f + g \in U$。
- 在标量乘法下封闭 $\alpha \in \mathbf{F}$，且 $f \in U$ 蕴含 $\alpha f \in U$。

证明 如果U是V的子空间，那么根据向量空间的定义，U满足上述三个条件。

相反，假设 U 满足上述三个条件。上述第一个条件确保 V 的加法单位元在 U 中。

上述第二个条件确保在 U 上的加法是有意义的。第三个条件确保在 U 上的标量乘法是有意义的。

如果$f \in V$，那么$0f = (0+0)f = 0f + 0f$。在该等式两边加上$0f$的加法逆元，表明$0f = 0$。现在如果$f \in U$，那么根据上述第三个条件，$(-1)f$也在U中。因为$f + (-1)f = \big(1 + (-1)\big)f = 0f = 0$，我们看到$(-1)f$是$f$的一个加法逆元。因此$U$的每个元素在$U$中都有一个加法逆元。

向量空间定义的其他部分，例如结合律和交换律，对U会自动成立，因为它们在更大的空间V中成立。因此，U是一个向量空间，从而是V的一个子空间。

6.31中的三个条件通常使我们能够快速确定给定的V子集是否是V的子空间，如下所示。下面的所有例子，除了第一条要点，涉及测度理论中的概念。

6.32 示例 *subspaces of* $\mathbf{F}^X$

- 定义在$[0,1]$上的连续实值函数的集合$C([0,1])$是$\mathbf{R}$上的一个向量空间，因为两个连续函数的和仍是连续的，而连续函数的常数倍仍是连续的。换句话说，$C([0,1])$是$\mathbf{R}^{[0,1]}$的一个子空间。

- 设（X，$\mathcal{S}$）是一个可测空间。那么，从X到$\mathbf{F}$的$\mathcal{S}$-可测函数的集合是$\mathbf{F}^X$的一个子空间，因为两个$\mathcal{S}$-可测函数的和仍是$\mathcal{S}$-可测的，而一个$\mathcal{S}$-可测函数的常数倍也是$\mathcal{S}$- 可测的。

- 设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间。则从X到$\mathbf{F}$的$\mathcal{S}$-可测函数f的集合$\mathcal{Z}(\mu)$，使得f = 几乎处处为 0［意思是$\mu\big(\{x \in X\colon f(x) \neq 0\}\big) = 0$］，是$\mathbf{F}$上的一个向量空间，因为两个$\mu$-测度为 0 的集合的并仍是一个$\mu$-测度为 0 的集合［这意味着$\mathcal{Z}(\mu)$在加法下封闭］。注意到$\mathcal{Z}(\mu)$是$\mathbf{F}^X$的一个子空间。

- 假设（X，$\mathcal{S}$）是一个可测空间。那么，从X到$\mathbf{F}$的有界可测函数的集合是$\mathbf{F}^X$的一个子空间，因为两个有界的$\mathcal{S}$-可测函数之和仍是一个有界的$\mathcal{S}$-可测函数，而一个有界的$\mathcal{S}$-可测函数的常数倍仍是一个有界的$\mathcal{S}$-可测函数。

- 假设$(X, \mathcal{S}, \mu)$是一个测度空间。那么，从X到$\mathbf{F}$的f-可测函数集$\mathcal{S}$，使得$\int f\,d\mu = 0$，是$\mathbf{F}^X$的一个子空间，这是由于积分的标准性质。

- 假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间。那么，从X到$\mathbf{F}$的$\mathcal{S}$-可测函数中满足$\int |f|\,d\mu < \infty$的集合是$\mathbf{F}^X$的一个子空间。该集合在加法下封闭，因为$\int |f+g|\,d\mu \leq \int |f|\,d\mu + \int |g|\,d\mu$，并且在标量乘法下封闭，因为$\int |\alpha f|\,d\mu = |\alpha| \int |f|\,d\mu$。

- 所有由$\mathbf{F}$的元素组成的序列（$a_1, a_2, \ldots$）的集合ℓ^1，使得$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$是$\mathbf{F}^{\mathbf{Z}^+}$的一个子空间。注意，$\ell^1$是前一个要点的一个特例（取$\mu$为$\mathbf{Z}^+$上的计数测度）。

练习 6B

1 证明如果 a、$b \in \mathbf{R}$ 且 $a + bi \neq 0$，则

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

2 假设 $z \in \mathbf{C}$。证明

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq \sqrt{2}\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\}.$$

3 设 $z \in \mathbf{C}$。证明 $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} \cancel{z|2 \leq |z| \leq |}\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$。

4 假设 $w, z \in \mathbf{C}$。证明 $|wz| = |w|\,|z|$ 和 $|w + z| \leq |w| + |z|$。

5 假设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，且 $f\colon X \to \mathbf{C}$ 是一个复值函数。对于下面的条件 (b) 和 (c)，将 $\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{R}^2$ 视为同一。证明下列各项是等价的。

(a) f 是 $\mathcal{S}$-可测的。 (b) 对 $\mathbf{R}^2$ 中的每个开集 G，$f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$。 (c) 对每个 Borel 集合 $B \in \mathcal{B}_2$，$f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$。

6 假设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间，并且 f，g：$X \to \mathbf{C}$ 是 $\mathcal{S}$-可测的。证明：

(a) $f + g$、$f - g$ 和 fg 是 $\mathcal{S}$-可测函数；(b) 如果对所有 $x \in X$，$g(x) \neq 0$，则 $\frac{f}{g}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

7 假设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间，且 $f_1, f_2, \ldots$ 是从 X 到 $\mathbf{C}$ 的一列 $\mathcal{S}$-可测函数。假设对每个 $x \in X$，极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ 都存在。定义 $f\colon X \to \to \mathbf{C}$ 为

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

证明 f 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数。

8 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $f\colon X \to \mathbf{C}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，使得 $\int |f|\, d\mu < \infty$。证明如果 $\alpha \in \mathbf{C}$，则

$$\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.$$

9 设 V 是一个向量空间。证明 V 的任意一族子空间的交集是 V 的一个子空间。

10 假设 V 和 W 是向量空间。定义 $V \times W$ 为

$$V \times W = \{(f, g) : f \in V \text{ and } g \in W\}.$$

在 $V \times W$ 上定义加法和标量乘法为

$$(f_1, g_1) + (f_2, g_2) = (f_1 + f_2, g_1 + g_2) \quad \text{and} \quad \alpha(f, g) = (\alpha f, \alpha g).$$

证明 $V \times W$ 在这些运算下是一个向量空间。

6C 赋范向量空间

范数与完备范数

本节以一个关键定义开始。

6.33 定义 *norm; normed vector space*

在一个向量空间 V (上，定义域为 $\mathbf{F}$) 的 *norm* 是一个函数 $\|\cdot\|: V \to [0, \infty)$，满

- $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0$（正定）；
- $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$ 对于所有$\alpha \in \mathbf{F}$ 和 $f \in V$ (同质性);
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ 对于所有 f，$g \in V$ (三角不等式)。

一个 *normed vector space* 是一对（$V, \|\cdot\|$），其中 V 是一个向量空间，$\|\cdot\|$ 是定义在 V 上的一个范数。

6.34 示例 *norms*

- 设 $n \in \mathbf{Z}^+$。在 $\mathbf{F}^n$ 上定义 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 为
$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_1 = |a_1| + \cdots + |a_n|$$
和
$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_\infty = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}.$$
那么 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $\mathbf{F}^n$ 上的范数，这一点你应该自行验证。
- 在ℓ^1 (上，关于ℓ^1)的定义见例6.32中的最后一个要点，定义$\|\cdot\|_1$为
$$\|(a_1, a_2, \ldots)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$
那么 $\|\cdot\|_1$ 是 ℓ^1 上的一个范数，正如你应当验证的那样。
- 设 X 是一个非空集合，且 $b(X)$ 是 $\mathbf{F}^X$ 的一个子空间，由从 X 到 $\mathbf{F}$ 的有界函数组成。对于 f（一个从 X 到 $\mathbf{F}$ 的有界函数），定义 $\|f\|$ 为
$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$
那么 $\|\cdot\|$ 是 $b(X)$ 上的一个范数，这一点你应该验证。
- 让 $C([0, 1])$ 表示从区间 $[0, 1]$ 到 $\mathbf{F}$ 的连续函数的向量空间。定义 $\|\cdot\|$ 在 $C([0, 1])$ 上为
$$\|f\| = \int_0^1 |f|.$$
然后 $\|\cdot\|$ 是 $C([0, 1])$ 上的一个范数，如你应该验证的。

有时不符合定义的例子能帮助你获得理解。

6.35 示例 *not norms*

- 令 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 表示由 Borel（或 Lebesgue）可测函数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{F}$ 构成的向量空间，使得 $\int |f| \, d\lambda < \infty$，其中 λ 是 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度［我们现在修改 3.45 中 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 的定义，以允许 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ 的可能性］。在 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 上定义 $\|\cdot\|_1$ 为
$$\|f\|_1 = \int |f| \, d\lambda.$$
然后 $\|\cdot\|_1$ 满足齐次性条件和三角不等式在 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 上，正如你应该验证的那样。然而，$\|\cdot\|_1$ 不是 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 上的范数，因为正定条件没有得到满足。具体来说，如果 E 是 $\mathbf{R}$ 的一个非空 Borell 集合，且其勒贝格测度为 0（例如，E 可能由 $\mathbf{R}$ 的一个单一元素组成），则 $\|\chi_E\|_1 = 0$ 但 $\chi_E \neq 0$。在下一章，我们将讨论一个对 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 的修改，解决这个问题。

- 如果 $n \in \mathbf{Z}^+$ 和 $\|\cdot\|$ 在 $\mathbf{F}^n$ 上定义为
$$\|(a_1, \ldots, a_n)\| = |a_1|^{1/2} + \cdots + |a_n|^{1/2},$$
然后 $\|\cdot\|$ 满足正定条件和三角不等式（如你应该验证的那样）。然而，像上面定义的 $\|\cdot\|$ 不是一个范数，因为它不满足齐次性条件。

- 如果$\|\cdot\|_{1/2}$在$\mathbf{F}^n$上定义为
$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_{1/2} = \left(|a_1|^{1/2} + \cdots + |a_n|^{1/2}\right)^2,$$
那么 $\|\cdot\|_{1/2}$ 满足正定条件和齐次性条件。然而，如果 $n > 1$，那么 $\|\cdot\|_{1/2}$ 不是 $\mathbf{F}^n$ 上的一个范数，因为不满足三角不等式（这一点你应当自行验证）。

下面的结果表明，每个赋范向量空间在自然的意义下也是一个度量空间。

6.36 *normed vector spaces are metric spaces*

假设 $(V, \|\cdot\|)$ 是一个赋范向量空间。定义 $d : V \times V \to [0, \infty)$ 由
$$d(f, g) = \|f - g\|.$$
那么 d 是 V 上的一个度量。

证明 假设f，g，$h \in V$。则
$$\begin{aligned} d(f, h) = \|f - h\| &= \|(f - g) + (g - h)\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - h\| \\ &= d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$
因此，三角不等式对度量的要求得到了满足。其他度量所需性质的验证留给读者。 ■

从现在起，在赋范向量空间的语境中，所有度量空间的概念都应相对于前一个结果中引入的度量来理解。然而，通常没有必要显式引入度量 d——只需使用两个元素之差的范数即可。例如，设 $(V, \|\cdot\|)$ 是一个赋范向量空间，$f_1, f_2, \ldots$ 是 V 中的一个序列，并且 $f \in V$。那么，在赋范向量空间的语境中，极限的定义 (6.8) 变为如下表述：

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \text{ means } \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0.$$

作为另一个例子，在赋范向量空间的语境下，柯西序列的定义（6.12）变为如下表述：

> 在赋范向量空间（$V, \|\cdot\|$）中的一个序列 $f_1, f_2, \ldots$ 是一个柯西序列，如果对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得 $\|f_j - f_k\| < \varepsilon$ 对所有整数 $j \geq n$ 和 $k \geq n$ 都成立。

在赋范向量空间中，任何有极限的序列都是柯西序列（见 6.13）。满足该逆命题的赋范向量空间有一个特殊的名称。

6.37 定义 *Banach space*

完备的赋范向量空间称为*Banach space*。

换言之，如果V中的每一个柯西序列都收敛到V中的某个元素，那么赋范向量空间V就是一个巴拿赫空间。

下面例 6.38 和 6.39 中的断言的验证留给读者作为练习。

In a slight abuse of terminology, we often refer to a normed vector space V without mentioning the norm $\|\cdot\|$. When that happens, you should assume that a norm $\|\cdot\|$ lurks nearby, even if it is not explicitly displayed.

6.38 示例 *Banach spaces*

- 向量空间 $C([0,1])$ 在由 $\|f\| = \sup\limits_{[0,1]} |f|$ 定义的范数下是一个巴拿赫空间。
- 由 $\|(a_1, a_2, \cdots\cdots)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 定义范数的向量空间 ℓ^1 是一个巴拿赫空间。

6.39 示例 *not a Banach space*

- 由 $\|f\| = \int_0^1 |f|$ 定义的范数下的向量空间 $C([0,1])$ 不是一个巴拿赫空间。
- 在由 $\|(a_1, a_2, \ldots)\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbf{Z}^+} |a_k|$ 定义的范数下的向量空间 ℓ^1 不是一个巴拿赫空间。

6.40 定义 *infinite sum in a normed vector space*

设 $g_1, g_2, \cdots\cdots$ 是赋范向量空间 V 中的一个序列。则 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ 定义为

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k$$

如果这个极限存在，则称该无穷级数*converge*。

回想一下你在微积分课程中学到的，如果 a_1、a_2、... 是一列实数，满足 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$，那么 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛。接下来的结果指出，范数向量空间的类似性质表征了巴拿赫空间。

6.41 $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| < \infty \implies \sum_{k=1}^{\infty} g_k\ \textit{converges}\right) \iff$ ***Banach space***

设 V 是一个赋范向量空间。则 V 是一个巴拿赫空间，当且仅当对于 V 中任意满足 $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| < \infty$ 的序列 $g_1, g_2, \cdots\cdots$，$\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ 收敛。

证明 首先假设 V 是一个巴拿赫空间。假设 $g_1, g_2, \cdots$ 是 V 中的一个序列并满足 $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| < \infty$。假设 $\varepsilon > 0$。令 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得 $\sum_{m=n}^{\infty} \|g_m\| < \varepsilon$。对于 $j \in \mathbf{Z}^+$，令 f_j 表示由下式定义的部分和

$$f_j = g_1 + \cdots + g_j.$$

如果 $k > j \geq n$，则

$$\begin{aligned} \|f_k - f_j\| &= \|g_{j+1} + \cdots + g_k\| \\ &\leq \|g_{j+1}\| + \cdots + \|g_k\| \\ &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \|g_m\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 f_1、f_2、$\cdots\cdots$ 是 V 中的一个柯西序列。因为 V 是一个巴拿赫空间，我们得出结论 f_1、f_2、$\cdots\cdots$ 收敛到 V 的某个元素，这正是 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ 收敛的含义，从而完成了证明的一个方向。

为了证明另一个方向，假设 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ 对于每一个序列 g_1、g_2、... 在 V 中收敛，且满足 $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| < \infty$。假设 f_1、f_2、... 是 V 中的柯西序列。我们要证明 f_1、f_2、... 收敛到 V 的某个元素。只需证明 f_1、f_2、... 的某个子序列收敛（参见第6A节的练习14）。跳到一个子序列（但不重新标记），并设 $f_0 = 0$，我们可以假设

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k - f_{k-1}\| < \infty.$$

因此 $\sum_{k=1}^{\infty} (f_k - f_{k-1})$ 收敛。该级数前 n 项的部分和为 f_n。因此 $\lim_{n\to\infty} f_n$ 存在，从而完成证明。 ■

有界线性映射

当处理两个或多个向量空间时，如下面的定义所示，假设这些向量空间定义在相同的域上（无论是 $\mathbf{R}$ 还是 $\mathbf{C}$，但在本书中表示为 $\mathbf{F}$，以便我们灵活地考虑这两种情况）。

在考虑线性映射时，除了标准的函数记号 $T(f)$ 之外，常常还使用记号 Tf，我们现在对线性映射加以定义。

6.42 定义 *linear map*

Suppose V 和 W 是向量空间。一个函数 $T: V \to W$ 被称为 *linear* 如果

- $T(f+g) = Tf + Tg$ for all $f, g \in V$;
- $T(\alpha f) = \alpha Tf$ for all $\alpha \in \mathbf{F}$ and $f \in V$.

线性函数通常称为 *linear map*。

从向量空间 V 到向量空间 W 的线性映射的集合本身构成一个向量空间，其运算采用函数的通常加法和数乘。分析中大部分关注集中在下面定义的有界线性函数这一子集上，我们将看到它本身也是一个赋范向量空间。

在下一个定义中，我们有两个有范数的向量空间，V 和 W，它们可能具有不同的范数。然而，我们对这两个范数使用相同的符号 $\|\cdot\|$（以及对从 V 到 W 的线性映射的范数使用相同符号），因为上下文使含义清晰。例如，在下面的定义中，f 属于 V，因此 $\|f\|$ 指的是 V 中的范数。类似地，$Tf \in W$，因此 $\|Tf\|$ 指的是 W 中的范数。

6.43 定义 *bounded linear map*; $\|T\|$; $\mathcal{B}(V, W)$

设 V 和 W 是赋范向量空间，且 $T: V \to W$ 是一个线性映射。

- T的范数，记作$\|T\|$，定义为
$$\|T\| = \sup\{\|Tf\| : f \in V \text{ and } \|f\| \le 1\}.$$
- T 如果$\|T\| < \infty$，则称为*bounded*。
- 从 V 到 W 的有界线性映射的集合记为 $\mathcal{B}(V, W)$。

6.44 示例 *bounded linear map*

让 $C([0,3])$ 成为从 $[0,3]$ 到 $\mathbf{F}$ 的连续函数的规范向量空间，其中 $\|f\| = \sup\limits_{[0,3]} |f|$. 定义 $T: C([0,3]) \to C([0,3])$ 为
$$(Tf)(x) = x^2 f(x).$$
然后 T 是一个有界线性映射，而 $\|T\| = 9$，如你应该验证的。

6.45 示例 *linear map that is not bounded*

设 V 为由 $\mathbf{F}$ 的元素组成的序列 $(a_1, a_2, \ldots)$ 的赋范向量空间，使得除了有限多个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 之外，$a_k = 0$，并且 $\|(a_1, a_2, \ldots)\|_\infty = \max_{k\in\mathbf{Z}^+}|a_k|$。定义 $T: V \to V$ 为

$$T(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots).$$

那么 T 是一个不有界的线性映射，如你应当验证的那样。

下一个结果表明，如果 V 和 W 是赋范向量空间，那么 $\mathcal{B}(V, W)$ 是一个赋范向量空间，其范数如上所定义。

6.46 $\|\cdot\|$ *is a norm on* $\mathcal{B}(V, W)$

设 V 和 W 是赋范向量空间。则对所有 S、$T \in \mathcal{B}(V$、$W)$ 以及所有 $\alpha \in \mathbf{F}$，$\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$ 和 $\|\alpha T\| = |\alpha|\,\|T\|$。此外，函数 $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{B}(V$、$W)$ 上的一个范数。

证明 假设 $S, T \in \mathcal{B}(V, W)$。则

$$\begin{aligned}
\|S + T\| &= \sup\{\|(S + T)f\| : f \in V \text{ and } \|f\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|Sf\| + \|Tf\| : f \in V \text{ and } \|f\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|Sf\| : f \in V \text{ and } \|f\| \leq 1\} \\
&\qquad\qquad + \sup\{\|Tf\| : f \in V \text{ and } \|f\| \leq 1\} \\
&= \|S\| + \|T\|.
\end{aligned}$$

上述不等式表明 $\|\cdot\|$ 在 $\mathcal{B}(V$、$W)$ 上满足三角不等式。赋范向量空间所需的其他性质的验证留给读者。

请确保你能够熟练使用练习16中给出的 $\|T\|$ 的四个等价公式。例如，你应当经常将 $\|T\|$ 理解为使得对于 T 的定义域中的所有 f，$\|Tf\| \leq \|T\|\,\|f\|$ 成立的最小数。

注意，在下一个结果中，假设要求W是一个巴拿赫空间，但并不要求V是巴拿赫空间。

6.47 $\mathcal{B}(V, W)$ *is a Banach space if* W *is a Banach space*

设 V 是一个赋范向量空间，W 是一个巴拿赫空间。则 $\mathcal{B}(V, W)$ 是一个巴拿赫空间。

证明 设 $T_1, T_2, \cdots\cdots$ 是 $\mathcal{B}(V, W)$ 中的一个柯西序列。若 $f \in V$，则

$$\|T_j f - T_k f\| \leq \|T_j - T_k\|\,\|f\|,$$

这意味着 $T_1 f, T_2 f, \ldots$ 在 W 中是一个柯西序列。由于 W 是一个巴拿赫空间，这意味着 $T_1 f, T_2 f, \ldots$ 在 W 中有一个极限，我们将其称为 Tf。

我们现在定义了一个函数 $T: V \to W$。读者应验证 T 是一个线性映射。显然

$$\begin{aligned}\|Tf\| &\leq \sup\{\|T_k f\| : k \in \mathbf{Z}^+\}\\ &\leq \big(\sup\{\|T_k\| : k \in \mathbf{Z}^+\}\big)\|f\|\end{aligned}$$

对于每个 $f \in V$。上面的最后一个上确界是有限的，因为每个Cauchy序列都是有界的（参见习题4）。因此 $T \in \mathcal{B}(V，W)$。

我们仍然需要证明 $\lim_{k\to\infty}\|T_k - T\| = 0$。为此，假设 $\varepsilon > 0$。设 $n \in \mathrm{Z}^+$ 满足 $\|T_j - T_k\| < \varepsilon$ 对于所有 $j \geq n$ 和 $k \geq n$。假设 $j \geq n$ 且假设 $f \in V$。然后

$$\begin{aligned}\|(T_j - T)f\| &= \lim_{k\to\infty}\|T_j f - T_k f\|\\ &\leq \varepsilon\|f\|.\end{aligned}$$

因此 $\|T_j - T\| \leq \varepsilon$，完成证明。 ■

下一个结果表明短语*bounded linear map*与短语*continuous linear map*意思相同。

6.48 ***continuity is equivalent to boundedness for linear maps***

从一个有范数的向量空间到另一个有范数的向量空间的线性映射，当且仅当它是有界的时，才是连续的。

证明 设V和W是赋范向量空间，且$T: V \to W$ i 是线性的。

首先假设 T 是无界的。因此，存在一个序列 f_1、f_2、... 在 V 中，使得对每个 $k \in \in \mathrm{Z}^+$，都有 $\|f_k\| \leq 1$，且 $\|Tf_k\| \to \infty$ 当 $k \to \infty$ 时成立。因此

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_k}{\|Tf_k\|} = 0 \quad \text{and} \quad T\Big(\frac{f_k}{\|Tf_k\|}\Big) = \frac{Tf_k}{\|Tf_k\|} \not\to 0,$$

其中，不收敛到 0 成立，因为对于每个 $k \in \mathrm{Z}^+$，$Tf_k/\|Tf_k\|$ 的范数为 1。上面显示的那一行表明 T 不是连续的，从而完成了一个方向的证明。

为了证明另一个方向，现在假设T是有界的。设$f \in V$，并且f_1，f_2，$\dots$是V中的一个序列，使得$\lim_{k\to\infty} f_k = f$。则

$$\begin{aligned}\|Tf_k - Tf\| &= \|T(f_k - f)\|\\ &\leq \|T\|\,\|f_k - f\|.\end{aligned}$$

因此 $\lim_{k\to\infty} Tf_k = Tf$。因此 T 是连续的，从而完成了另一方向的证明。 ■

练习18给出了线性映射连续性的若干个额外等价条件。

练习 6C

1 证明从赋范向量空间 V 到 F 的映射 $f \mapsto \|f\|$ 是连续的（其中 F 上的范数是通常的绝对值）。

2 证明如果 V 是一个赋范向量空间，$f \in V$，且 $r > 0$，则

$$\overline{B(f,r)} = \overline{B}(f,r).$$

3 证明例 6.35 中最后两个要点中定义的函数不是范数。

4 证明赋范向量空间中的每个柯西序列都是有界的（这意味着存在一个实数，大于该柯西序列中每个元素的范数）。

5 证明如果 $n \in \mathbf{Z}^+$，则 $\mathbf{F}^n$ 在例 6.34 的第一条要点中所使用的两种范数下都是巴拿赫空间。

6 设 X 是一个非空集合，且 $b(X)$ 是从 X 到 F 的有界函数所成的向量空间。证明：如果在 $b(X)$ 上由 $\|f\| = \sup\limits_X |f|$ 定义了 $\|\cdot\|$，那么 $b(X)$ 是一个巴拿赫空间。

证明 ℓ^1 在由 $\|(a_1、a_2、\ldots)\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbf{Z}^+} |a_k|$ 定义的范数下不是一个巴拿赫空间。

证明 ℓ^1 在由 $\|(a_1、a_2、...)\|_1 = \sum_{k=1}^\infty |a_k|$ 定义的范数下是一个巴拿赫空间。

9 证明从 [0, 1] 到 F 的连续函数的向量空间 $C([0, 1])$ 在由 $\|f\| = \int_0^1 |f|$ 定义的范数下不是一个巴拿赫空间。

10 假设 U 是一个赋范向量空间 V 的子空间，且某个 V 的开球包含在 U 中。证明 $U = V$。

11 证明赋范向量空间 V 中既是开集又是闭集的子集只有 $\varnothing$ 和 V。

12 假设 V 是一个规范化的向量空间。证明 V 的每个子空间的闭包是 V 的子空间。

13 假设 U 是一个赋范向量空间。令 d 为 U 上的度量，其定义为 $d(f, g) = \|f - g\|$，其中 $f, g \in U$。令 V 为在第 6A 节习题 16 中构造的完备度量空间。

(a) 证明集合 V 在加法和标量乘法的自然运算下是一个向量空间。 (b) 证明存在一种自然的方法将 V 转换为一个范数向量空间，并且在此范数下，V 是一个巴拿赫空间。 (c) 解释为什么 (b) 证明了每个范数向量空间都是某个巴拿赫空间的子空间。

14 设 U 是赋范向量空间 V 的一个子空间。又设 W 是一个巴拿赫空间，且 $S: U \to W$ 是一个有界线性映射。

(a) 证明存在唯一的连续函数 $T: \overline{U} \to W$，使得 $T|_U = S$。(b) 证明 (a) 中的函数 T 是一个从 $\overline{U}$ 到 W 的有界线性映射，并且 $\|T\| = \|S\|$。(c) 给出一个例子说明，如果将 W 是 Banach 空间的假设替换为 W 是赋范向量空间的假设，则 (a) 可能不成立。

15 对于熟悉向量空间及其子空间的商的读者：设 V 是一个赋范向量空间，且 U 是 V 的一个子空间。在 V/U 上定义 $\|\cdot\|$ 为

$$\|f + U\| = \inf\{\|f + g\| : g \in U\}.$$

(a) 证明：当且仅当 U 是 V 的一个闭子空间时，$\|\cdot\|$ 是 V/U 上的一个范数。(b) 证明：如果 V 是一个巴拿赫空间，并且 U 是 V 的一个闭子空间，那么 V/U (with the norm defined above) 是一个巴拿赫空间。(c) 证明：如果 U 是一个巴拿赫空间（带有它从 V 继承的范数），并且 V/U 是一个巴拿赫空间（带有上述定义的范数），那么 V 是一个巴拿赫空间。

16 假设 V 和 W 是赋范向量空间，且 $V \neq \{0\}$，并且 $T: V \to W$ 是一个线性映射。

（a）证明 $\|T\| = \sup\{\|Tf\| : f \in V$ 且 $\|f\| < 1\}$。（b）证明 $\|T\| = \sup\{\|Tf\| : f \in V$ 且 $\|f\| = 1\}$。（c）证明 $\|T\| = \inf\{c \in [0, \infty) : \|Tf\| \leq c\|f\|$ 对所有 $f \in V\}$。（d）证明 $\|T\| = \sup\left\{\dfrac{\|Tf\|}{\|f\|} : f \in V \text{ 且 } f \neq 0\right\}$。

17 假设 U、V 和 W 是赋范向量空间，且 $T: U \to V$ 和 $S: V \to W$ 是线性的。证明 $\|S \circ T\| \leq \|S\|\,\|T\|$。

18 假设 V 和 W 是范数向量空间，且 $T: V \to W$ 是线性映射。证明以下命题是等价的。

(a) T 是有界的。(b) 存在 $f \in V$ 使得 T 在 f 处是连续的。(c) T 是一致连续的（这意味着对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对于所有 f，$g \in V$ 满足 $\|f - g\| < \delta$）。(d) $T^{-1}\big(B(0, r)\big)$ 是 V 的一个开子集，对于某个 $r > 0$。

6维线性泛函

有界线性泛函

到标量域 $\mathbf{F}$ 的线性映射如此重要，以至于它们有一个专门的名称。

6.49 定义 *linear functional*

向量空间V上的一个*linear functional*是一个从V到$\mathbf{F}$的线性映射。

当我们将标量域 $\mathbf{F}$ 视为一个赋范向量空间时（如下一个示例所示），数字 $z \in$ 在 $\mathbf{F}$ 中的范数 $\|z\|$ 始终被理解为通常的绝对值 $|z|$。这个范数使 $\mathbf{F}$ 成为一个巴拿赫空间。

6.50 示例 *linear functional*

设 V 为由 $\mathbf{F}$ 的元素组成的序列（$a_1, a_2, \ldots$）的向量空间，使得除有限多个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 外，$a_k = 0$。定义 $\varphi : V \to \mathbf{F}$ 为

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

那么 φ 是 V 上的一个线性泛函。

- 如果我们把V赋予范数$\|(a_1, a_2, \ldots)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$使其成为一个赋范向量空间，那么$\varphi$是在$V$上的一个有界线性泛函；这一点你应该加以验证。
- 如果我们把 V 赋予范数 $\|(a_1, a_2, \cdots)\|_\infty = \max_{k \in \mathbf{Z}^+} |a_k|$ 使之成为一个赋范向量空间，那么 φ 就不是 V 上的有界线性泛函，正如你应当验证的那样。

6.51 定义 *null space;* null T

设 V 和 W 是向量空间，且 $T : V \to W$ 是一个线性映射。则 T 的 *null space* 记为 null T，并定义为

$$\operatorname{null} T = \{f \in V : Tf = 0\}.$$

如果 T 是一个线性映射，作用于向量空间 V，那么零空间 T 是 V 的一个子空间，如你应该验证的那样。如果 T 是从赋范向量空间 V 到赋范向量空间 W 的连续线性映射，那么零空间 T 是 V 的一个闭子空间，因为零空间 $T = T^{-1}(\{0\})$，而闭集 $\{0\}$ 的逆像是闭的 [由 6.11(d) 确定]。

*The term **kernel** is also used in the mathematics literature with the same meaning as **null space**. This book uses **null space** instead of **kernel** because **null space** better captures the connection with* 0.

上一句话的逆命题不成立，因为赋范向量空间之间的线性映射可以具有闭的零空间，但并不连续。例如，6.45 中的线性映射具有一个闭的零空间（等于 $\{0\}$），但它并不连续。

然而，接下来的结果表明，与更一般的线性映射不同，对于线性泛函，零空间为闭与连续性是等价的。

6.52 *bounded linear functionals*

假设 V 是一个赋范向量空间，且 $\varphi : V \to \mathbf{F}$ 是一个不恒等于 0 的线性泛函。那么下列条件是等价的。

(a) φ 是一个有界线性泛函。

(b) φ 是一个连续的线性泛函。

(c) φ 的零空间是 V 的一个闭子空间。

（d）$\overline{空\ \varphi} \neq V$。

证明 (a) 和 (b) 的等价性只是以下情况的一个特例 6.48.

为证明 (b) 推出 (c)，设 φ 是一个连续线性泛函。则 null φ，它是闭集 $\{0\}$ 的逆像，根据 6.11(d) 是 V 的一个闭子集。因此 (b) 推出 (c)。

为了证明 (c) 蕴含 (a)，我们将证明 (a) 的否定蕴含 (c) 的否定。因此，设 φ 不是有界的。因此，在 V 中存在一个序列 $f_1, f_2, \ldots$，使得 $\|f_k\| \leq 1$ 且对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 都有 $|\varphi(f_k)| \geq k$。现在

$$\frac{f_1}{\varphi(f_1)} - \frac{f_k}{\varphi(f_k)} \in \operatorname{null} \varphi$$

对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 和

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{f_1}{\varphi(f_1)} - \frac{f_k}{\varphi(f_k)} \right) = \frac{f_1}{\varphi(f_1)}.$$

This proof makes major use of dividing by expressions of the form $\varphi(f)$, which would not make sense for a linear mapping into a vector space other than F.

清晰地

$$\varphi\left(\frac{f_1}{\varphi(f_1)}\right) = 1 \text{ and thus } \frac{f_1}{\varphi(f_1)} \notin \operatorname{null} \varphi.$$

最后三项显示的内容意味着空φ没有关闭，从而完成了证明“(a)的否定意味着(c)的否定”。因此，(c)意味着(a)。

我们现在知道 (a)、(b) 和 (c) 彼此等价。

利用φ不恒等于0这一假设，我们看到(c)蕴含(d)。为完成证明，我们只需证明(d)蕴含(c)，这将通过证明(c)的否定蕴含(d)的否定来完成。因此，假设 null φ 不是 V 的闭子空间。由于 null φ 是 V 的一个子空间，我们知道 $\overline{\operatorname{null} \varphi}$ 也是 V (的一个子空间，见第6C节练习12)。令 $f \in \overline{\operatorname{null} \varphi} \setminus \operatorname{null} \varphi$。假设 $g \in V$。则

$$g = \left(g - \frac{\varphi(g)}{\varphi(f)} f\right) + \frac{\varphi(g)}{\varphi(f)} f.$$

上面大括号中的项属于 null φ，因此也属于 $\overline{\operatorname{null} \varphi}$。加号后面的项是 f 的一个标量倍数，因此属于 $\overline{\operatorname{null} \varphi}$。由于上面的等式将 g 写成 $\overline{\operatorname{null} \varphi}$ 中两个元素之和，我们得出 $g \in$ 属于 $\overline{\operatorname{null} \varphi}$。因此我们已经证明 $V =$ 属于 $\overline{\operatorname{null} \varphi}$，从而完成了对“(c) 的否定蕴含 (d) 的否定”的证明。

不连续线性泛函

例 6.50 中的第二个要点表明，在某个赋范向量空间上存在一个不连续的线性泛函。我们的下一个主要目标是证明每一个无限维赋范向量空间都具有一个不连续的线性泛函（见 6.62）。因此，在这一方面，无限维赋范向量空间的行为与 $\mathbf{F}^n$ 大不相同；在 $\mathbf{F}^n$ 中，所有线性泛函都是连续的（见练习 4）。

我们需要将有限维向量空间中基的概念扩展到无限维的情形。在有限维向量空间中，我们可以考虑形如 $e_1, \ldots, e_n$ 的一组基，其中 $n \in \mathbf{Z}^+$，并且每个 e_k 都是我们向量空间中的一个元素。我们可以把列表 $e_1, \ldots, e_n$ 看作是一个从 $\{1, \ldots, n\}$ 到我们向量空间的函数，这个函数在 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 处的取值用带下标 k 的 e_k 来表示，而不是使用通常的函数记号 $e(k)$。为了进行推广，在下面的定义中，我们允许用一个任意的集合来替代 $\{1, \ldots, n\}$，这个集合可能不是有限集。

6.53 定义 *family*

集合 V 中的一个 *family* $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是一个从集合 Γ 到 V 的函数 e，其中函数 e 在 $k \in \Gamma$ 处的值记作 e_k。

尽管 V 中的一个族是一个映射到 V 的函数，因此并不是 V 的一个子集，但集合术语以及括号记号 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 仍然是有用的，而且 V 中一个族的值域确实是 V 的一个子集。

我们现在重新陈述一些基本的线性代数概念，但放在可能是无限维的向量空间背景下。注意，下面的定义中只出现有限和，尽管我们可能正在处理一个无限族。

6.54 定义 *linearly independent; span; finite-dimensional; basis*

设$\{e_k\}_{k\in\Gamma}$是向量空间V中的一族。

- $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 如果不存在 Γ 的一个有限非空子集 Ω 以及 $\mathbf{F} \setminus \{0\}$ 中的一族 $\{\alpha_j\}_{j\in\Omega}$，使得 $\sum_{j\in\Omega} \alpha_j e_j = 0$，则称为 *linearly independent*。

- $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 的 *span* 记作 $\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\Gamma}$，并定义为所有具有如下形式的和的集合

$$\sum_{j\in\Omega} \alpha_j e_j,$$

  其中 Ω 是 Γ 的一个有限子集，且 $\{\alpha_j\}_{j\in\Omega}$ 是 $\mathbf{F}$ 中的一个族。

- 如果存在一个有限集合 Γ 和 V 中的一个族 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$，使得 $\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\Gamma} = V$，则向量空间 V 称为 *finite-dimensional*。

- 如果一个向量空间不是有限维的，则称其为*infinite-dimensional*。

- 如果V中的一个族线性无关且其张成等于V，则称其为V的一个*basis*。

例如，$\{x^n\}_{n\in\{0,1,2,\ldots\}}$ 是多项式的向量空间的基。

我们对跨度的定义没有利用在存在极限概念的上下文中对无限多个元素求和的可能性（就像是

The term 哈梅尔基底 *is sometimes used to denote what has been called a* 基底 *here. The use of the term* 哈梅尔基底 *emphasizes that only finite sums are under consideration.*

（赋范向量空间中的情形）。当我们在第8章讨论希尔伯特空间时，我们将考虑另一种确实涉及无限求和的基。正如我们很快将看到的，这里所定义的这种基正是我们产生不连续线性泛函所需要的。

现在我们引入一些术语，这些术语将在我们证明每个向量空间都有一组基时用到。

No one has ever produced a concrete example of a basis of an infinite-dimensional Banach space.

6.55 定义 *maximal element*

设 $\mathcal{A}$ 是集合 V 的若干子集的集合。若不存在 $\Gamma' \in \mathcal{A}$ 使得 $\Gamma \subsetneq \Gamma'$，则称集合 $\Gamma \in \mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个 *maximalelement*。

6.56 示例 *maximal elements*

对于 $k \in \mathbf{Z}$，令 $k\mathbf{Z}$ 表示 k 的整数倍所构成的集合；因此 $k\mathbf{Z} = \{km : m \in \mathbf{Z}\}$。令 $\mathcal{A}$ 为由 $\mathcal{A} = \{k\mathbf{Z}$ 定义的 $\mathbf{Z}$ 的子集族：$k = 2, 3, 4, \ldots\}$。假设 $k \in \mathbf{Z}^+$。则 $k\mathbf{Z}$ 当且仅当 k 是一个素数时，才是 $\mathcal{A}$ 的一个极大元素，这一点你应当加以验证。

向量空间 V 的一个子集 Γ 可以通过考虑 $\{e_f\}_{f\in\Gamma}$（其中 $e_f = f$）而被视为 V 中的一个族。按照这一约定，下面的结果表明，V 的基恰好是 V 的线性无关子集集合中的极大元素。

6.57 *bases as maximal elements*

假设 V 是一个向量空间。那么，V 的一个子集当且仅当是由 V 的线性无关子集所组成的集合中的一个极大元素时，才是 V 的一组基。

证明 设 Γ 是 V 的一个线性无关子集。

首先还假设 Γ 是 V 的一组基。如果 $f \in V$ 但是 $f \notin \Gamma$，那么 $f \in$ 张成 Γ，这意味着 $\Gamma \cup \{f\}$ 不是线性无关的。因此，Γ 是 V 的线性无关子集族中的一个极大元素，从而完成了证明的一个方向。

为证明另一方向，现假设 Γ 是 V 的线性无关子集族中的一个极大元素。如果 $f \in V$，但是 $f \notin$ 张成 Γ，则 $\Gamma \cup \{f\}$ 是线性无关的，这将与 V 的线性无关子集族中 Γ 的极大性相矛盾。因此张成 $\Gamma = V$，这意味着 Γ 是 V 的一组基，从而完成了另一方向的证明。 ∎

链的概念在我们接下来的结果中起着关键作用。

6.58 定义 *chain*

一个集合V的子集族$\mathcal{C}$称为一个*chain*，如果Ω，$\Gamma \in \mathcal{C}$蕴含$\Omega \subseteq \Gamma$或$\Gamma \subseteq \Omega$。

6.59 示例 *chains*

- Z 的子集集合 $\mathcal{C} = \{4\mathbf{Z}, 6\mathbf{Z}\}$ 不是一个链，因为集合 $4\mathbf{Z}$ 和 $6\mathbf{Z}$ 都不是彼此的子集。
- Z 的子集的集合 $\mathcal{C} = \{2^n\mathbf{Z} : n \in \mathbf{Z}^+\}$ 是一条链，因为如果 $m, n \in \mathbf{Z}^+$, 那么 $2^m\mathbf{Z} \subseteq 2^n\mathbf{Z}$ 或 $2^n\mathbf{Z} \subseteq 2^m\mathbf{Z}$。

下一个结果源自选择公理，尽管它在直觉上并不像选择公理那样令人信服。由于用于证明下一个结果的技术与本书其他地方所使用的技术如此不同，因此，读者要么被要求在没有证明的情况下接受这一结果，要么通过互联网或其他书籍找到现有的良好证明之一。这里所陈述的佐恩引理版本比标准的、更一般的版本更简单，但这个版本已经满足我们的全部需要。

Zorn's Lemma is named in honor of Max Zorn (1906–1993), who published a paper containing the result in 1935, when he had a postdoctoral position at Yale.

6.60 *Zorn's Lemma*

设 V 是一个集合，$\mathcal{A}$ 是 V 的子集族，并且具有如下性质：对每一条链 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$，$\mathcal{C}$ 中所有集合的并集都属于 $\mathcal{A}$。则 $\mathcal{A}$ 包含一个极大元。

佐恩引理现在使我们能够证明每个向量空间都有一个基。该证明并不能帮助我们找到一个具体的基，因为佐恩引理是一种存在性结果，而不是一种构造性技术。

6.61 *bases exist*

每个向量空间都有一个基。

证明 假设 V 是一个向量空间。若 $\mathcal{C}$ 是 V 的线性无关子集构成的一条链，则 $\mathcal{C}$ 中所有集合的并集也是 V (的一个线性无关子集。这成立是因为线性无关性是通过考察有限子集来检验的，而并集的每一个有限子集都包含在该链的某一个元素中)。

因此，如果 $\mathcal{A}$ 表示 V 的线性无关子集的集合，则 $\mathcal{A}$ 满足 Zorn 引理（6.60 ）的假设。因此，$\mathcal{A}$ 包含一个极大元素，根据 6.57，该元素是 V 的一个基。 ∎

现在我们可以证明此前承诺的结果：在每一个无限维赋范向量空间上都存在不连续的线性泛函。

6.62 *discontinuous linear functionals*

每个无限维范数向量空间都有一个不连续的线性泛函。

证明 假设 V 是一个无限维向量空间。根据 6.61，V 有一个基 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$。因为 V 是无限维的，Γ 不是一个有限集合。因此，我们可以通过重新标记 Γ) 的一个可数子集来假设 $\mathbf{Z}^+ \subseteq \Gamma$ (。

通过规定当 $j \in \mathbf{Z}^+$ 时 $\varphi(e_j)$ 等于 $j\|e_j\|$，当 $j \in \Gamma \setminus \mathbf{Z}^+$ 时 $\varphi(e_j)$ 等于 0，并作线性延拓，定义一个线性泛函 $\varphi : V \to \mathbf{F}$。更准确地，定义线性泛函 $\varphi : V \to \mathbf{F}$ 如下：

$$\varphi\Big(\sum_{j\in\Omega} \alpha_j e_j\Big) = \sum_{j\in\Omega\cap\mathbf{Z}^+} \alpha_j j\|e_j\|$$

对于每个有限子集 $\Omega \subseteq \Gamma$ 和 $\mathbf{F}$ 中的每个族 $\{\alpha_j\}_{j\in\Omega}$。

由于每个$j \in \mathbf{Z}^+$的$\varphi(e_j) = j\|e_j\|$，线性泛函φ是无界的，从而完成证明。 ■

哈恩–巴拿赫定理

在上一小节中，我们展示了在每个无限维范数向量空间上存在一个不连续的线性泛函。现在，我们将注意力转向连续线性泛函的存在性。

在每个巴拿赫空间上存在一个非零的连续线性泛函并非显而易见。例如，考虑巴拿赫空间 ℓ^∞/c_0，其中 ℓ^∞ 是 $\mathbf{F}$ 中有界序列的巴拿赫空间，且

$$\|(a_1, a_2, \ldots)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbf{Z}^+} |a_k|$$

并且 c_0 是 ℓ^∞ 的子空间，由那些在 $\mathbf{F}$ 中极限为 0 的序列组成。商空间 ℓ^∞/c_0 是一个无限维的巴拿赫空间（见第 6C 节练习 15）。然而，从未有人展示过该巴拿赫空间 ℓ^∞/c_0 上一个具体的非零线性泛函。

在本小节中，我们将展示无限维的范数向量空间具有大量连续线性泛函。我们通过证明在范数向量空间的一个子空间上的有界线性泛函可以扩展到整个空间上的有界线性泛函，并且其范数不增加来实现这一点——这一结果称为哈恩–巴拿赫定理（6.69）。

完备性在这个话题中不起作用。因此，本小节讨论的是范数向量空间，而不是巴拿赫空间。

我们在下一个引理中完成了证明Hahn–Banach定理所需的大部分工作，该引理表明我们可以将一个线性泛函扩展到由一个额外元素生成的子空间，而不会增加范数。这种一次扩展一个元素的方法，当与Zorn引理产生的最大对象结合时，给我们提供了所需的扩展到整个范数化向量空间。

如果V是一个实向量空间，U是V的一个子空间，并且$h \in V$，那么$U + \mathbf{R}h$是V的子空间，其定义为

$$U + \mathbf{R}h = \{f + \alpha h : f \in U \text{ and } \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

6.63 *Extension Lemma*

设 V 是一个实赋范向量空间，U 是 V 的一个子空间，且 $\psi : U \to \mathbf{R}$ 是一个有界线性泛函。设 $h \in V \setminus U$。则 ψ 可以扩展为一个有界线性泛函 $\varphi : U + \mathbf{R}h \to \mathbf{R}$，使得 $\|\varphi\| = \|\psi\|$。

证明 设 $c \in \mathbf{R}$。定义 $\varphi(h)$ 为 c，然后将 φ 线性地扩展到 $U + \mathbf{R}h$。具体而言，定义 $\varphi : U + \mathbf{R}h \to \mathbf{R}$ 为

$$\varphi(f + \alpha h) = \psi(f) + \alpha c$$

对于$f \in U$ 和 $\alpha \in \mathbf{R}$。然后 φ 是 $U + \mathbf{R}h$ 上的线性泛函。

显然 $\varphi|_U = \psi$。因此 $\|\varphi\| \geq \|\psi\|$。我们需要证明，对于某个 $c \in \mathbf{R}$ 的取值，上述定义的线性泛函 φ 满足方程 $\|\varphi\| = \|\psi\|$。换句话说，我们希望

6.64 $$|\psi(f) + \alpha c| \leq \|\psi\|\, \|f + \alpha h\| \quad \text{for all } f \in U \text{ and all } \alpha \in \mathbf{R}.$$

有了就足够了

6.65 $$|\psi(f) + c| \leq \|\psi\|\, \|f + h\| \quad \text{for all } f \in U,$$

因为在最后一个不等式中用$\frac{f}{\alpha}$ 替换 f，然后将两边同时乘以 $|\alpha|$，就会得到 6.64。

重写 6.65，我们想要证明存在 $c \in \mathbf{R}$ 使得 在

$$-\|\psi\|\, \|f + h\| \leq \psi(f) + c \leq \|\psi\|\, \|f + h\| \quad \text{for all } f \in U.$$

等价地，我们希望证明存在 $c \in \mathbf{R}$ 使得

$$-\|\psi\|\, \|f + h\| - \psi(f) \leq c \leq \|\psi\|\, \|f + h\| - \psi(f) \quad \text{for all } f \in U.$$

满足上述一行的 $c \in \mathbf{R}$ 的存在性由该不等式推出

6.66 $$\sup_{f \in U}\bigl(-\|\psi\|\, \|f + h\| - \psi(f)\bigr) \leq \inf_{g \in U}\bigl(\|\psi\|\, \|g + h\| - \psi(g)\bigr).$$

为证明上述不等式，假设f，$g \in U$。则

$$\begin{aligned}
-\|\psi\|\, \|f + h\| - \psi(f) &\leq \|\psi\|(\|g + h\| - \|g - f\|) - \psi(f) \\
&= \|\psi\|(\|g + h\| - \|g - f\|) + \psi(g - f) - \psi(g) \\
&\leq \|\psi\|\, \|g + h\| - \psi(g).
\end{aligned}$$

上述不等式证明了6.66，从而完成了证明。 ■

因为我们简化后的佐恩引理处理的是集合包含关系，而非更一般的序关系，因此我们需要使用函数图的概念。

6.67 定义 *graph*

设 $T: V \to W$ 是从集合 V 到集合 W 的一个函数。则 T 的 *graph* 记作 graph(T)，并且是 $V \times W$ 的一个子集，定义为

$$\operatorname{graph}(T) = \{(f, T(f)) \in V \times W : f \in V\}.$$

形式上，从集合 V 到集合 W 的一个函数等同于如上所定义的它的图。然而，由于我们通常更直观地将函数视为一种映射，函数的图这一独立概念仍然仍然是有用的。

下一个结果的简单证明留给读者完成。下面的第一个要点使用了 $V \times W$ 的向量空间结构；$V \times W$ 是一个向量空间，具有自然的加法和数乘运算，正如第6B节习题10中所给出的。

6.68 *function properties in terms of graphs*

假设 V 和 W 是规范化的向量空间，且 $T: V \to W$ 是一个函数。

(a) T 是线性映射当且仅当 graph(T) 是 $V \times W$ 的一个子空间。(b) 假设 $U \subseteq V$ 和 $S: U \to W$ 是一个函数。则 T 是 S 的一个扩展当且仅当 graph$(S) \subseteq$ graph(T)。(c) 如果 $T: V \to W$ 是线性映射且 $c \in [0, \infty)$, 则 $\|T\| \leq c$ 当且仅当 $\|g\| \leq c\|f\|$ 对所有 $(f, g) \in$ graph(T)。

扩展引理 (6.63) 的证明使用了在 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ 时没有意义的不等式。因此，下面的哈恩-巴拿赫定理的证明在 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ 时需要一些额外的步骤。

Hans Hahn (1879–1934) was a student and later a faculty member at the University of Vienna, where one of his PhD students was Kurt Gödel (1906–1978).

6.69 *Hahn–Banach Theorem*

设 V 是一个赋范向量空间，U 是 V 的一个子空间，并且 $\psi: U \to \mathbf{F}$ 是一个有界线性泛函。则 ψ 可以扩展为定义在 V 上的一个有界线性泛函，其范数等于 $\|\psi\|$。

证明 首先我们考虑 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 的情况。令 $\mathcal{A}$ 为满足以下所有条件的 E 的集合，其中 $V \times \mathbf{R}$。

- $E =$ 图(φ) 对于某个线性泛函 φ 在 V 的某个子空间上；
- 图 $(\psi) \subseteq E$;
- $|\alpha| \leq \|\psi\| \, \|f\|$ 对于每个 $(f, \alpha) \in E$。

于是 $\mathcal{A}$ 满足佐恩引理（6.60）的假设。因此 $\mathcal{A}$ 有一个极大元。扩张引理（6.63）意味着这个极大元是一个定义在整个 V 上的线性泛函的图像。该线性泛函是 ψ 到 V 的一个延拓，且其范数为 $\|\psi\|$，从而完成了在 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ 的情形下的证明。

现在考虑 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 的情形。定义 $\psi_1: U \to \mathbf{R}$ 为

$$\psi_1(f) = \operatorname{Re}\psi(f)$$

对于 $f \in U$。然后 ψ_1 是从 U 到 $\mathbf{R}$ 的 $\mathbf{R}$-线性映射，且 $\|\psi_1\| \le \|\psi\|$ (实际上是 $\|\psi_1\| = \|\psi\|$，但我们只需要不等式)。另外，

$$\begin{aligned}
\psi(f) &= \operatorname{Re}\psi(f) + i\operatorname{Im}\psi(f)\\
&= \psi_1(f) + i\operatorname{Im}\bigl(-i\psi(if)\bigr)\\
&= \psi_1(f) - i\operatorname{Re}\bigl(\psi(if)\bigr)\\
&= \psi_1(f) - i\psi_1(if)
\end{aligned} \tag{6.70}$$

对于所有 $f \in U$。

暂时忘记在 V 上复标量乘法是有意义的，并暂时将 V 视为一个实赋范向量空间。我们已经证明过的结果的情形随后蕴含，存在一个将 ψ_1 延拓到一个 $\mathbf{R}$-线性泛函 φ_1 的扩张 φ_1： $V \to \mathbf{R}$，并且具有 $\|\varphi_1\| = \|\psi_1\| \le \|\psi\|$。

受 6.70 启发，我们定义 $\varphi: V \to \mathbf{C}$，其方式为

$$\varphi(f) = \varphi_1(f) - i\varphi_1(if)$$

对于 $f \in V$。上述方程和 6.70 表明 φ 是 ψ 到 V 的一个扩展。上述方程还意味着，对所有 f、$g \in V$ 以及所有 $\alpha \in \mathbf{R}$，$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ 和 $\varphi(\alpha f) = \alpha\varphi(f)$。此外，

$$\varphi(if) = \varphi_1(if) - i\varphi_1(-f) = \varphi_1(if) + i\varphi_1(f) = i\bigl(\varphi_1(f) - i\varphi_1(if)\bigr) = i\varphi(f).$$

读者应使用上述等式来证明 φ 是一个 $\mathbf{C}$-线性映射。

证明中唯一剩下的部分是证明 $\|\varphi\| \le \|\psi\|$。为此，注意到

$$|\varphi(f)|^2 = \varphi\bigl(\overline{\varphi(f)}f\bigr) = \varphi_1\bigl(\overline{\varphi(f)}f\bigr) \le \|\psi\|\,\|\overline{\varphi(f)}f\| = \|\psi\|\,|\varphi(f)|\,\|f\|$$

对所有$f \in V$，其中第二个等式成立是因为$\varphi\bigl(\overline{\varphi(f)}f\bigr) \in \mathbf{R}$。将其除以$|\varphi(f)|$，由上面一行可见$|\varphi(f)| \le \|\psi\|\,\|f\|$对所有$f \in V$(成立，若$\varphi(f)=0$)则无需除法。这意味着$\|\varphi\| \le \|\psi\|$，从而完成证明。

我们把取值于标量域 $\mathbf{F}$ 的线性映射称为 *linear functionals*。有界线性泛函的向量空间现在也有了一个特殊的名称和一种特殊的记号。

6.71 定义 *dual space;* V'

设V是一个赋范向量空间。则V的*dual space*，记作V'，是由定义在V上的有界线性泛函组成的赋范向量空间。换言之，$V' = \mathcal{B}(V, \mathbf{F})$。

根据 6.47，每个赋范向量空间的对偶空间都是巴拿赫空间。

6.72 $\|f\| =$ 最大值$\{|\varphi(f)| : \varphi \in V'$ ***and*** $\|\varphi\| = 1\}$

假设 V 是一个范数化向量空间，并且 $f \in V \setminus \{0\}$。那么存在 $\varphi \in V'$ 使得 $\|\varphi\| = 1$ 且 $\|f\| = \varphi(f)$。

证明 设 U 为 V 定义的 1 维子空间，其中

$$U = \{\alpha f : \alpha \in \mathbf{F}\}.$$

定义 $\psi : U \to \mathrm{F}$ 为

$$\psi(\alpha f) = \alpha\|f\|$$

对于 $\alpha \in \mathrm{F}$。那么 ψ 是 U 上的线性泛函，满足 $\|\psi\| =$ 为 1 和 $\psi(f) = \|f\|$。哈恩-巴拿赫定理 (6.69) 表明，存在 ψ 的扩展到 V 上的线性泛函 φ，其满足 $\|\varphi\| =$ 为 1，从而完成证明。 ■

下一个结果给出了 Hahn–Banach 定理的又一个优美应用，并提供了一个有用的充要条件，用以刻画赋范向量空间中的一个元素是否属于某个子空间的闭包。

6.73 ***condition to be in the closure of a subspace***

假设 U 是范数向量空间 V 和 $h \in V$ 的一个子空间。那么 $h \in \overline{U}$ 当且仅当 $\varphi(h) =$ 对于每个 $\varphi \in V'$ 满足 $\varphi|_U =$ 为 0。

证明 首先假设 $h \in \overline{U}$。如果 $\varphi \in V'$ 且 $\varphi|_U =$ 为 0，则由 φ 的连续性可得 $\varphi(h) =$ 为 0，从而完成一个方向的证明。

为了证明另一个方向，现假设 $h \notin \overline{U}$。定义 $\psi : U + \mathrm{F}h \to \mathrm{F}$ 如下定义

$$\psi(f + \alpha h) = \alpha$$

对于 $f \in U$ 和 $\alpha \in \mathrm{F}$。则 ψ 是定义在 $U + \mathrm{F}h$ 上的一个线性泛函，具有零 $\psi = U$ 且 $\psi(h) = 1$。

由于 $h \notin \overline{U}$，$\overline{\psi}$ 的零空间的闭包不等于 $U + \mathrm{F}h$。因此，6.52 说明 ψ 是 $U + \mathrm{F}h$ 上的有界线性泛函。

Hahn–Banach 定理（6.69）表明，ψ 可以扩展为定义在 V 上的有界线性泛函 φ。因此我们找到了 $\varphi \in V'$，使得 $\varphi|_U = 0$ 而 $\varphi(h) \neq 0$，从而完成了另一方向的证明。 ■

练习 6D

假设 V 是一个规范化的向量空间，φ 是 V 上的线性泛函。假设 $\alpha \in \mathrm{F} \setminus \{0\}$。证明以下命题是等价的。

(a) φ 是一个有界线性泛函。 (b) $\varphi^{-1}(\alpha)$ 是 V 的一个闭子集。 (c) $\overline{\varphi^{-1}(\alpha)} \neq V$。

2 假设 φ 是向量空间 V 上的一个线性泛函。证明：如果 U 是 V 的一个子空间，且 $\operatorname{null}\varphi \subseteq U$，则 $U = \operatorname{null}\varphi$ 或 $U = V$。

假设 φ 和 ψ 是同一向量空间上的线性泛函。证明

$$\operatorname{null}\varphi \subseteq \operatorname{null}\psi$$

当且仅当存在 $\alpha \in \mathbf{F}$ 使得 $\psi = \alpha\varphi$。

For the next two exercises, $\mathbf{F}^n$ ***should be endowed with the norm*** $\|\cdot\|_\infty$ ***as defined in Example 6.34.***

4 假设 $n \in \mathbf{Z}^+$ 且 V 是一个赋范向量空间。证明从 $\mathbf{F}^n$ 到 V 的每一个线性映射都是连续的。

5 假设 $n \in \mathbf{Z}^+$，V 是一个赋范向量空间，并且 $T : \mathbf{F}^n \to V$ 是一个从 V 单射且满射的线性映射。

(a) 证明

$$\inf\{\|Tx\| : x \in \mathbf{F}^n \text{ and } \|x\|_\infty = 1\} > 0.$$

(b) 证明 $T^{-1} : V \to \mathbf{F}^n$ 是一个有界线性映射。

6 假设 $n \in \mathbf{Z}^+$。

(a) 证明 $\mathbf{F}^n$ 上的所有范数具有相同的收敛序列、相同的开集以及相同的闭集。 (b) 证明 $\mathbf{F}^n$ 上的所有范数都使 $\mathbf{F}^n$ 成为一个巴拿赫空间。

7 设 V 和 W 是赋范向量空间，且 V 是有限维的。证明：从 V 到 W 的每一个线性映射都是连续的。

8 证明每一个有限维赋范向量空间都是巴拿赫空间。

9 证明每个赋范向量空间的任一有限维子空间都是闭的。

10 给出一个无限维赋范向量空间的具体例子，并给出该赋范向量空间的一组基。

11 证明 $\mathbf{Z}$ 的子集的集合 $\mathcal{A} = \{k\mathbf{Z} : k = 2, 3, 4, \dots\}$ 满足佐恩引理（6.60）的假设。

12 证明向量空间中的每一个线性无关族都可以扩充为该向量空间的一组基。

13 假设 V 是一个赋范向量空间，U 是 V 的一个子空间，并且 $\psi : U \to \mathbf{R}$ 是一个有界线性泛函。证明：ψ 当且仅当具有唯一的扩张为定义在 V 上的有界线性泛函 φ，并且 $\|\varphi\| = \|\psi\|$。

$$\sup_{f \in U}\bigl(-\|\psi\|\,\|f+h\| - \psi(f)\bigr) = \inf_{g \in U}\bigl(\|\psi\|\,\|g+h\| - \psi(g)\bigr)$$

对于每一个 $h \in V \setminus U$。

14 证明存在一个线性泛函 $\varphi : \ell^\infty \to \mathbf{F}$ 使得

$$|\varphi(a_1, a_2, \ldots)| \le \|(a_1, a_2, \ldots)\|_\infty$$

对于所有 $(a_1, a_2, \ldots) \in \ell^\infty$ 和

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots) = \lim_{k\to\infty} a_k$$

对所有 $(a_1, a_2, \ldots) \in \ell^\infty$，使得右侧上述极限存在。

15 假设 B 是赋范向量空间 V 中的一个开球，使得 $0 \notin B$。证明存在 $\varphi \in V'$ 使得

$$\operatorname{Re} \varphi(f) > 0$$

对于所有 $f \in B$。

16 证明每个无限维赋范向量空间的对偶空间都是无限维的。

A normed vector space is called* 可分离的 *if it has a countable subset whose closure equals the whole space.

17 假设 V 是一个可分的范数向量空间。说明如何在不使用任何依赖于选择公理的结果（如佐恩引理）的情况下证明 V 的哈恩-巴拿赫定理（6.69）。 18 假设 V 是一个范数向量空间，使得其对偶空间 V' 是一个可分的巴拿赫空间。证明 V 是可分的。 19 证明巴拿赫空间 $C([0, 1])$ 的对偶空间是不可分的；这里 $C([0, 1])$ 上的范数由 $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f|$ 定义。

The* 双对偶空间 *of a normed vector space is defined to be the dual space of the dual space. If V is a normed vector space, then the double dual space of V is denoted by V''; thus $V'' = (V')'$. The norm on V'' is defined to be the norm it receives as the dual space of V'.

定义 $\Phi : V \to V''$ 为

$$(\Phi f)(\varphi) = \varphi(f)$$

对于 $f \in V$ 和 $\varphi \in V'$。证明对于每个 $f \in V$，$\|\Phi f\| = \|f\|$ 成立。
[*The map* Φ *defined above is called the* 典范等距 *of* V *into* V''.]

21 假设 V 是一个无限维的范数向量空间。证明存在一个 U 的凸子集，属于 V，并且满足 $\overline{U} = V$，同时其补集 $\overline{V \setminus U}$ 也是 V 的一个凸子集，且满足 $V \setminus U = V$。

[*See 8.25 for the definition of a convex set. This exercise should stretch your geometric intuition because this behavior cannot happen in finite dimensions.*]

6E 贝尔定理的推论

本节重点讨论依赖贝尔定理的关于巴拿赫空间的若干重要结果。该结果最早由 René-Louis Baire（1874–1932）在其 1899 年于巴黎高等师范学校的博士论文中首次证明。

尽管我们的兴趣主要在于对巴拿赫空间的应用，但贝尔定理的恰当背景是更为一般的完备度量空间。

The result here called 贝尔定理 is often called the 贝尔纲定理 . This book uses the shorter name of this result because we do not need the categories introduced by Baire. Furthermore, the use of the word 纲 in this context can be confusing because Baire's categories have no connection with the category theory that developed decades after Baire's work.

贝尔范畴定理

我们首先介绍一些关键的拓扑学概念。

6.74 定义 *interior*

设 U 是度量空间 V 的一个子集。U 的 *interior*，记作 $\operatorname{int} U$，是由那些 $f \in U$ 组成的集合，使得以 f 为中心、具有正半径的某个 V 的开球包含于 U 之中。

你应该验证以下关于内部的基本事实。

- 度量空间中任意子集的内部都是开集。
- 度量空间 V 的子集 U 的内部是 V 中包含于 U 的最大开子集。

6.75 定义 *dense*

若$\overline{U} = V$，则称度量空间V的子集U在V中是*dense*。

例如，$\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中都是稠密的，其中 $\mathbf{R}$ 具有其标准度量 $d(x, y) = |x - y|$。

你应该验证以下关于稠密子集的基本事实。

- 当且仅当 V 的每个非空开子集至少包含 U 的一个元素时，度量空间 V 的一个子集 U 在 V 中是稠密的。
- 度量空间 V 的子集 U 的内部为空，当且仅当 $V \setminus U$ 在 V 中稠密。

下一个结果的证明使用了以下事实，你应当首先证明它：如果 G 是度量空间 V 的一个开子集，并且 $f \in G$，那么存在 $r > 0$，使得 $B(f, r) \subseteq G$。

6.76 *Baire's Theorem*

(一个完整的度量空间不是空内点的闭子集的可数并。

(b) 完备度量空间中可数个稠密开子集的交集是非空的。

证明 我们将先证明(b)，再利用(b)证明(a)。

为证明(b)，假设(V, d)是一个完备度量空间，并且G_1、G_2、……是V的稠密开子集序列。我们需要证明$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \neq \varnothing$。

设 $f_1 \in G_1$，并设 $r_1 \in (0, 1)$ 使得 $\overline{B(f_1,\ r_1)} \subseteq G_1$。现在假设 $n \in \mathbf{Z}^+$，且 $f_1, \ldots, f_n$ 和 $r_1, \ldots, r_n$ 已被选取，使得

6.77 $$\overline{B}(f_1, r_1) \supseteq \overline{B}(f_2, r_2) \supseteq \cdots \supseteq \overline{B}(f_n, r_n)$$

和

6.78 $$r_j \in \left(0, \tfrac{1}{j}\right) \quad \text{and} \quad \overline{B}(f_j, r_j) \subseteq G_j \quad \text{for } j = 1, \ldots, n.$$

因为 $B(f_n,\ r_n)$ 是 V 的开子集，且 G_{n+1} 在 V 中稠密，所以存在 $f_{n+1} \in B(f_n$，$r_n) \cap G_{n+1}$。令 $r_{n+1} \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right)$ 使得 ——

$$\overline{B}(f_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{B}(f_n, r_n) \cap G_{n+1}.$$

因此，我们通过归纳构造一个序列 $f_1, f_2,$ ……，使其对所有 $n \in \mathbf{Z}^+$ 都满足 6.77 和 6.78。

如果 $j \in \mathbf{Z}^+$，那么 6.77 和 6.78 表明

6.79 $$f_k \in \overline{B}(f_j, r_j) \quad \text{and} \quad d(f_j, f_k) \leq r_j < \tfrac{1}{j} \quad \text{for all } k > j.$$

因此 f_1，f_2，... 是一个柯西序列。因为 $(V,\ d)$ 是一个完备度量空间，所以存在 $f \in V$ 使得 $\lim_{k\to\infty} f_k = f$。

现在，由 6.79 和 6.78 可推出，对于每个 $j \in \mathbf{Z}^+$，都有 $f \in \overline{B}(f_j$、$r_j) \subseteq G_j$。因此 $f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$，这意味着 $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ 非空，从而完成了 (b) 的证明。

为了证明 (a)，假设 (V, d) 是一个完备的度量空间，且 F_1、F_2、... 是 V 的一列闭子集，具有空的内点。然后 $V \setminus F_1$、$V \setminus F_2$、... 是 V 的一列稠密开子集。现在 (b) 说明

$$\varnothing \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} (V \setminus F_k).$$

对上述两边取补，我们得出结论：

$$V \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

完成（a）的证明。

因为

$$\mathbf{R} = \bigcup_{x \in \mathbf{R}} \{x\}$$

每个集合 $\{x\}$ 在 R 中具有空的内部，根据Baire定理，意味着 R 是不可数的。因此，我们又得到了另一个证明 R 是不可数的，这与Cantor原始的对角线证明以及通过测度论的证明（参见2.17）不同。

下一个结果是贝尔定理的另一个良好推论。

6.80 ***the set of irrational numbers is not a countable union of closed sets***

不存在由 R 的闭子集组成的可数集合，其并集等于 R \ Q。

证明 这将是一个反证法证明。假设 F_1，F_2，... 是一个可数的封闭子集集合，属于 R，其并集等于 R \ Q。因此，每个 F_k 都不包含有理数，这意味着每个 F_k 的内部为空。现在

$$\mathbf{R} = \Big(\bigcup_{r \in \mathbf{Q}} \{r\}\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\Big).$$

上述方程将完整的度量空间 R 写作一系列具有空内涵的闭集的可数并，这与贝尔定理[6.76(a)]相矛盾。这一矛盾完成了证明。

开映射定理与有界逆定理

下一结果表明，从一个巴拿赫空间到另一个巴拿赫空间的满射有界线性映射将开集映射为开集。如练习 10 和 11 所示，如果将假设中两个空间都是巴拿赫空间的条件放宽，允许其中一个空间是范数向量空间时，这一结果可能不成立。

6.81 ***Open Mapping Theorem***

假设 V 和 W 是 Banach 空间，T 是 V 到 W 的有界线性映射。那么对于每一个 V 的开子集 G，$T(G)$ 是 W 的开子集。

证明 设 B 表示开单位球 $B(0,1) = \{f \in V : \|f\| < 1\}$ 的 V。对于任何开球 $B(f,\ a)$ 在 V 中，T 的线性性意味着

$$T\big(B(f,a)\big) = Tf + aT(B).$$

假设 G 是 V 的一个开子集。如果 $f \in G$，则存在 $a > 0$，使得 $B(f,$
$a) \subseteq G$。如果我们能证明 $0 \in \operatorname{int} T(B)$，那么上面的方程显示 $Tf \in \operatorname{int} T\big(B(f$
，$a)\big)$。这将意味着 $T(G)$ 是 W 的一个开子集。因此，为了完成证明，我们只需要证明 $T(B)$ 包含以 0 为中心的一些开球。

T 的满射性和线性性意味着

$$W = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(kB) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B).$$

因此 $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(B)}$。贝尔定理 [6.76(a)] 现在推出，对于某个 $k \in \mathbf{Z}^+$，$\overline{kT(B)}$ 具有非空的内部。T 的线性性使我们得出 $\overline{T(B)}$ 具有非空的内部。

因此存在 $g \in B$，使得 $Tg \in$ 属于 $\overline{T(B)}$。因此

$$0 \in \operatorname{int} \overline{T(B-g)} \subseteq \operatorname{int} \overline{T(2B)} = \operatorname{int} \overline{2T(B)}.$$

因此存在 $r > 0$，使得 $B(0, 2r) \subseteq \overline{2T(B)}$［这里 $B(0, 2r)$ 是 W 中以 0 为中心、半径为 $2r$ 的闭球］。因此 $B(0, r) \subseteq \overline{T(B)}$。关于属于 $T(B)$ 的闭包的定义［见 6.7］现在表明

$$h \in W \text{ and } \|h\| \leq r \text{ and } \varepsilon > 0 \implies \exists f \in B \text{ such that } \|h - Tf\| < \varepsilon.$$

对于W中任意的$h \neq 0$，将上一行的结果应用于$\frac{r}{\|h\|}h$表明

6.82 $$h \in W \text{ and } \varepsilon > 0 \implies \exists f \in \frac{\|h\|}{r}B \text{ such that } \|h - Tf\| < \varepsilon.$$

现在假设 $g \in W$ 且 $\|g\| < 1$。将 6.82 应用于 $h = g$ 和 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，我们看到

$$\text{there exists } f_1 \in \tfrac{1}{r}B \text{ such that } \|g - Tf_1\| < \tfrac{1}{2}.$$

现在将 6.82 应用于 $h = g - Tf_1$ 和 $\varepsilon = \frac{1}{4}$，我们可以看到

$$\text{there exists } f_2 \in \tfrac{1}{2r}B \text{ such that } \|g - Tf_1 - Tf_2\| < \tfrac{1}{4}.$$

再次应用 6.82，这一次使用 $h = g - Tf_1 - Tf_2$ 和 $\varepsilon = \frac{1}{8}$，我们看到

$$\text{there exists } f_3 \in \tfrac{1}{4r}B \text{ such that } \|g - Tf_1 - Tf_2 - Tf_3\| < \tfrac{1}{8}.$$

继续按照这种模式，构造一个序列 $f_1, f_2, \ldots$ 在 V 中。令

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k,$$

其中无穷级数在 V 中收敛，因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}r} = \frac{2}{r};$$

这里我们使用了6.41（这是证明中我们使用V是一个巴拿赫空间这一假设的地方）。上面给出的不等式表明$\|f\| < \frac{2}{r}$。

因为

$$\|g - Tf_1 - Tf_2 - \cdots - Tf_n\| < \frac{1}{2^n}$$

并且由于 T 是一个连续线性映射，我们有 $g = Tf$。

我们现在已经表明 $B(0, 1) \subseteq \frac{2}{r}T(B)$。因此 $\frac{r}{2}B(0, 1) \subseteq T(B)$，从而完成证明。

下一个结果提供了有用的信息，即如果从一个巴拿赫空间到另一个巴拿赫空间的有界线性映射具有代数逆（意味着该线性映射是单射和满射），tive)，那么逆映射自动是有界的。

The Open Mapping Theorem was first proved by Banach and his colleague Juliusz Schauder (1899–1943) in 1929–1930.

6.83 ***Bounded Inverse Theorem***

设 V 和 W 是巴拿赫空间，且 T 是从 V 到 W 上的单射有界线性映射。那么 T^{-1} 是从 W 到 V 上的有界线性映射。

证明 验证 T^{-1} 是从 W 到 V 的线性映射留给读者完成。为证明 T^{-1} 是有界的，设 G 是 V 的一个开子集。则

$$(T^{-1})^{-1}(G) = T(G).$$

根据开映射定理 (6.81)，$T(G)$ 是 W 的一个开子集。因此，上述等式表明，在函数 T^{-1} 下每个开集的原像都是开的。由 6.11 中 (a) 与 (c) 部分的等价性可知，这意味着 T^{-1} 是连续的。因此，T^{-1} 是一个有界线性映射（根据 6.48）。■

上述结果表明，赋范向量空间中的完备性有时扮演着与度量空间中的紧致性相类似的角色（可联想到如下定理：从一个紧致度量空间映到另一个紧致度量空间的连续一一函数，其逆函数也是连续的）。

闭图定理

设 V 和 W 是赋范向量空间。则 $V \times W$ 是一个向量空间，其加法和标量乘法的自然运算如第 6B 节练习 10 中所定义。$V \times W$ 上有若干种自然的范数，可以使 $V \times W$ 成为一个赋范向量空间；在接下来的结果中所采用的选择似乎是最容易的。下一个结果的证明留给读者作为练习。

6.84 ***product of Banach spaces***

假设 V 和 W 是巴拿赫空间。那么如果给定由以下范数定义的 $V \times W$，则 $V \times W$ 是巴拿赫空间。

$$\|(f, g)\| = \max\{\|f\|, \|g\|\}$$

对于 $f \in V$ 和 $g \in W$。在该范数下，$V \times W$ 中的序列 $(f_1, g_1), (f_2, g_2), \ldots$ 当且仅当 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k = g$ 时收敛到 (f, g)。

下一个结果提供了一种极好的方法来证明 Banach 空间之间的线性映射是有界的。该证明异常简洁，因为繁重的工作已经在开映射定理的证明中完成了（而开映射定理被用来证明有界逆定理）。

6.85 *Closed Graph Theorem*

设V和W是巴拿赫空间，且T是从V到W的一个函数。那么，当且仅当graph(T)是$V \times W$的一个闭子空间时，T是一个有界线性映射。

证明 首先假设 T 是一个有界线性映射。设 $(f_1, Tf_1), (f_2, Tf_2), \ldots$ 是 graph(T) 中的一个序列，收敛到 $(f, g) \in V \times W$。因此

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \text{and} \quad \lim_{k\to\infty} Tf_k = g.$$

由于 T 是连续的，上面的第一个等式蕴含 $\lim_{k\to\infty} Tf_k = Tf$；与上面的第二个等式结合可得 $g = Tf$。因此，$(f, g) = (f,\ Tf) \in \text{graph}(T)$，这意味着 graph($T$) 是闭的，从而完成了一个方向的证明。

为证明另一方向，现假设 graph(T) 是 $V \times W$ 的一个闭子空间。则 T 是一个线性映射[由 6.68(a)]，并且 graph(T) 在从 $V \times W$ 继承的范数下是一个巴拿赫空间[由 6.84 和 6.16(b)]。考虑线性映射 $S : \text{graph}(T) \to V$，其定义为

$$S(f, Tf) = f.$$

然后

$$\|S(f, Tf)\| = \|f\| \leq \max\{\|f\|, \|Tf\|\} = \|(f, Tf)\|$$

对所有$f \in V$。因此S是一个从graph(T)到V的有界线性映射，且$\|S\| \leq 1$。显然S是单射。因此，有界逆定理(6.83)表明S^{-1}是有界的。因为S^{-1}：$V \to$ graph(T)满足等式$S^{-1}f = (f,\ Tf)$，我们有

$$\begin{aligned}\|Tf\| &\leq \max\{\|f\|, \|Tf\|\}\\ &= \|(f, Tf)\|\\ &= \|S^{-1}f\|\\ &\leq \|S^{-1}\|\,\|f\|\end{aligned}$$

对所有 $f \in V$。上述不等式表明 T 是一个具有 $\|T\| \leq \|S^{-1}\|$ 的有界线性映射，从而完成证明。 ■

统一有界性原理

下一个结果表明，在一个巴拿赫空间上，一族逐点有界的有界线性映射在范数意义下是有界的（这意味着作为作用在单位球上的映射族，它们是一致有界的）。这一结果有时称为巴拿赫–斯坦豪斯定理。习题17有时也称为巴拿赫–斯坦豪斯定理。

The Principle of Uniform Boundedness was proved in 1927 by Banach and Hugo Steinhaus (1887–1972). Steinhaus recruited Banach to advanced mathematics after overhearing him discuss Lebesgue integration in a park.

6.86 *Principle of Uniform Boundedness*

设 V 是一个巴拿赫空间，W 是一个赋范向量空间，且 $\mathcal{A}$ 是从 V 到 W 的一族有界线性映射，使得

$$\sup\{\|Tf\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty \text{ for every } f \in V.$$

然后

$$\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

证明 我们的假设意味着

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{f \in V : \|Tf\| \leq n \text{ for all } T \in \mathcal{A}\}}_{V_n},$$

其中 V_n 由上述表达式定义。由于每个 $T \in \mathcal{A}$ 都是连续的，对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，V_n 是 V 的一个闭子集。因此，贝尔定理 [6.76(a)] 以及上述等式蕴含存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 以及 $h \in V$ 和 $r > 0$，使得

6.87 $$B(h, r) \subseteq V_n.$$

现在假设 $g \in V$ 和 $\|g\| < 1$。因此 $rg + h$ 和 h 都在 $B(h, r)$ 中。因此如果 $T \in \mathcal{A}$，那么 6.87 蕴含 $\|T(rg + h)\| \leq n$ 和 $\|Th\| \leq n$，这又意味着

$$\|Tg\| = \left\|\frac{T(rg+h)}{r} - \frac{Th}{r}\right\| \leq \frac{\|T(rg+h)\|}{r} + \frac{\|Th\|}{r} \leq \frac{2n}{r}.$$

因此

$$\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{A}\} \leq \frac{2n}{r} < \infty,$$

完成证明。

练习 6E

1 设 U 是度量空间 V 的一个子集。证明：U 在 V 中稠密，当且仅当 V 的每个非空开子集至少包含 U 的一个元素。 2 设 U 是度量空间 V 的一个子集。证明：U 的内部为空，当且仅当 $V \setminus U$ 在 V 中稠密。 3 证明或给出反例：若 V 是一个度量空间，且 U、W 是 V 的子集，则 $(\operatorname{int} U) \cup (\operatorname{int} W) = \operatorname{int}(U \cup W)$。 4 证明或给出反例：若 V 是一个度量空间，且 U、W 是 V 的子集，则 $(\operatorname{int} U) \cap (\operatorname{int} W) = \operatorname{int}(U \cap W)$。

假设 5
$$X = \{0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tfrac{1}{k}\}$$
和 $d(x,\ y) = |x - y|$ 为 $x,\ y \in X$。

(a) 证明 (X, d) 是一个完备的度量空间。
(b) 对于 $x \in X$，每个形如 $\{x\}$ 的集合都是 R 的一个闭子集，并且作为 R 的子集其内部为空。显然，X 是此类集合的一个可数并。解释为什么这并不违反贝尔定理中“完备度量空间不能表示为内部为空的闭子集的可数并”的表述。

6 给出一个度量空间的例子，它是封闭子集的可数并且内点为空的集合。[*This exercise shows that the completeness hypothesis in Baire's Theorem cannot be dropped.*]

7 (a) 定义 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 如下：
$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{if } a \text{ is irrational,} \\ \frac{1}{n} & \text{if } a \text{ is rational and } n \text{ is the smallest positive integer} \\ & \text{such that } a = \frac{m}{n} \text{ for some integer } m. \end{cases}$$
在实数集R中，f在哪些数值处是连续的?
(b) 证明不存在一个可数的 R 的开子集族，其交集等于 Q。 (c) 证明不存在函数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得 f 在 Q 的每个元素处连续，而在 R \ Q 的每个元素处不连续。

8 假设 (X, d) 是一个完备度量空间，且 $G_1, G_2, \ldots$ 是 X 的一列稠密开子集。证明 $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ 是 X 的一个稠密子集。

9 证明不存在具有可数基的无限维巴拿赫空间。

[*This exercise implies, for example, that there is not a norm that makes the vector space of polynomials with coefficients in* F *into a Banach space.*]

10 举一个 Banach 空间 V、一个赋范向量空间 W、一个从 V 到 W 的有界线性映射 T 和 V 的一个开子集 G，使得 $T(G)$ 不是 W 的开子集。[*This exercise shows that the hypothesis in the Open Mapping Theorem that W is a Banach space cannot be relaxed to the hypothesis that W is a normed vector space.*]

11 证明存在一个范数向量空间 V，一个巴拿赫空间 W，一个有界线性映射 T，将 V 映射到 W，以及 V 的一个开子集 G，使得 $T(G)$ 不是 W 的开子集。

[*This exercise shows that the hypothesis in the Open Mapping Theorem that V is a Banach space cannot be relaxed to the hypothesis that V is a normed vector space.*]

A linear map $T: V \to W$ from a normed vector space V to a normed vector space W is called* 下有界 *if there exists $c \in (0, \infty)$ such that $\|f\| \leq c\|Tf\|$ for all $f \in V$.

12 设 $T: V \to W$ 是从一个巴拿赫空间 V 到一个巴拿赫空间 W 的有界线性映射。证明：T 下有界当且仅当 T 是单射，且 T 的值域是 W 的一个闭子空间。

13 举一个 Banach 空间V、一个赋范向量空间W，以及一个从V到W的一一对应的有界线性映射T，使得T^{-1}不是一个从W到V的有界线性映射。

> [*This exercise shows that the hypothesis in the Bounded Inverse Theorem* (*6.83*) *that W is a Banach space cannot be relaxed to the hypothesis that W is a normed vector space.*]

14 证明存在一个赋范空间 V、一个巴拿赫空间 W，以及一个从 V 到 W 上的一一有界线性映射 T，使得 T^{-1} 不是从 W 到 V 上的有界线性映射。

> [*This exercise shows that the hypothesis in the Bounded Inverse Theorem* (*6.83*) *that V is a Banach space cannot be relaxed to the hypothesis that V is a normed vector space.*]

证明 6.84。

16 假设 V 是一个带范数 $\|\cdot\|$ 的巴拿赫空间，并且 $\varphi: V \to \mathbf{F}$ 是一个线性泛函。在 V 上定义另一个范数 $\|\cdot\|_\varphi$ 为

$$\|f\|_\varphi = \|f\| + |\varphi(f)|.$$

证明：若V在范数$\|\cdot\|_\varphi$下是一个巴拿赫空间，则φ是在V（（带有原范数））上的连续线性泛函。

假设 V 是一个 Banach 空间，W 是一个赋范向量空间，且 T_1、T_2、…… 是从 V 到 W 的一列有界线性映射，使得对于每个 $f \in V$，$\lim_{k\to\infty} T_k f$ 存在。定义 $T: V \to W$ 为

$$Tf = \lim_{k\to\infty} T_k f$$

对于 $f \in V$。证明 T 是从 V 到 W 的有界线性映射。[
This result states that the pointwise limit of a sequence of bounded linear maps on a Banach space is a bounded linear map.]

18 假设 V 是一个赋范向量空间，B 是 V 的一个子集，使得对每个 $\varphi \in V'$ 都有 $\sup_{f\in B}|\varphi(f)| < \infty$。证明 $\sup_{f\in B}\|f\| < \infty$.

19 假设 $T: V \to W$ 是一个从 Banach 空间 V 到 Banach 空间 W 的线性映射，使得

$$\varphi \circ T \in V' \text{ for all } \varphi \in W'.$$

证明 T 是一个有界线性映射。

Chapter 7
L^p Spaces

固定一个测度空间 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 和一个正数 p。我们通过考察可测函数的向量空间 $f\colon X \to \mathbf{F}$ 开始本章内容，其中

$$\int |f|^p \, d\mu < \infty.$$

重要的结果，如霍尔德不等式和明科夫斯基不等式，有助于我们研究这个向量空间。当我们识别仅在测度为 0 的集合上有所不同的函数时，出现了一个有用的巴拿赫空间类，并要求 $p \geq 1$。

The main building of the Swiss Federal Institute of Technology (ETH Zürich). Hermann Minkowski (1864–1909) taught at this university from 1896 to 1902. During this time, Albert Einstein (1879–1955) was a student in several of Minkowski's mathematics classes. Minkowski later created mathematics that helped explain Einstein's special theory of relativity.

7A $\mathcal{L}^p(\mu)$

赫尔德不等式

我们下一个主要目标是定义一个重要的向量空间类，它概括了之前定义的向量空间 $\mathcal{L}^1(\mu)$ 和 ℓ^1（并且我们现在允许 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 的可能性）。我们从下面的定义开始这个过程。下面引入的术语 *p-norm* 是方便的，尽管它不一定是一个范数。

7.1 定义 $\|f\|_p$; *essential supremum*

假设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间，$0<p<\infty$，且 $f: X\to\mathbf{F}$ 是 $\mathcal{S}$-可测的。那么 *p-norm* 的 f 记作 $\|f\|_p$ 并定义为

$$\|f\|_p=\Big(\int|f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}.$$

Also，$\|f\|_\infty$，它被称为 f 的 *essential supremum*，是 defi ned 由

$$\|f\|_\infty=\inf\big\{t>0:\mu\big(\{x\in X:|f(x)|>t\}\big)=0\big\}.$$

指数 $1/p$ 出现在 p-范数 $\|f\|_p$ 的定义中，因为我们希望等式 $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\,\|f\|_p$ 对所有 $\alpha\in\mathbf{F}$ 都成立。

对于 $0<p<\infty$，如果 f 只在一个 μ-测度为 0 的集合上发生变化，p-范数 $\|f\|_p$ 不会改变。通过在 $\|f\|_\infty$ 的定义中使用本质上确界而不是上确界，我们使得 ∞-范数 $\|f\|_\infty$ 也具有同样的性质。可以将 $\|f\|_\infty$ 理解为在测度为 0 的集合上进行修改之后，$|f|$ 的上确界所能达到的最小值。

7.2 示例 *p-norm for counting measure*

假设 μ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度。如果 $a=(a_1, a_2, \dots)$ 是 $\mathbf{F}$ 中的一个序列，并且 $0<p<\infty$，那么

$$\|a\|_p=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\Big)^{1/p}\quad\text{and}\quad\|a\|_\infty=\sup\{|a_k|:k\in\mathbf{Z}^+\}.$$

注意，对于计数测度，本质上确界与上确界是相同的，因为在这种情况下，除了空集之外不存在测度为 0 的集合。

如果 $p=1$ 且 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$，那么下一个定义与我们之前对 $\mathcal{L}^1(\mu)$ 的定义一致。

7.3 定义 *Lebesgue space;* $\mathcal{L}^p(\mu)$

设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间，且 $0<p\le\infty$。*Lebesgue space* $\mathcal{L}^p(\mu)$，有时记作 $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{S}, \mu)$，被定义为所有满足 $\|f\|_p<\infty$ 的 $\mathcal{S}$-可测函数 $f: X\to\mathbf{F}$ 所组成的集合。

7.4 示例 ℓ^p

当 μ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度时，集合 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 通常记作 ℓ^p (，读作 *little el-p*)。因此若 $0 < p < \infty$，则

$$\ell^p = \{(a_1, a_2, \dots) : \text{each } a_k \in \mathbf{F} \text{ and } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty\}$$

和

$$\ell^\infty = \{(a_1, a_2, \dots) : \text{each } a_k \in \mathbf{F} \text{ and } \sup_{k \in \mathbf{Z}^+} |a_k| < \infty\}.$$

下面的不等式 7.5(a) 提供了一个简单的证明，说明 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 在加法下是封闭的。不久我们将证明闵可夫斯基不等式 (7.14)，当 $p \geq 1$ 时，它对 7.5(a) 给出了一个重要的改进，但其证明更为复杂。

7.5 $\mathcal{L}^p(\mu)$ *is a vector space*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $0 < p < \infty$。那么

(a)
$$\|f + g\|_p^p \leq 2^p(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

和

(b)
$$\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$$

对于所有 f、$g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ 以及所有 $\alpha \in \mathbf{F}$。此外，在函数的通常加法和标量乘法运算下，$\mathcal{L}^p(\mu)$ 是一个向量空间。

证明 假设 f，$g \in \mathcal{L}^p(\mu)$。如果 $x \in X$，则

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \\ &\leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &\leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p). \end{aligned}$$

对上述不等式的两边关于 μ 进行积分即可得到所需的不等式

$$\|f + g\|_p^p \leq 2^p(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

该不等式意味着如果$\|f\|_p < \infty$和$\|g\|_p < \infty$，那么$\|f + g\|_p < \infty$。因此，$\mathcal{L}^p(\mu)$在加法下是封闭的。

证明

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$$

这很容易从 $\|\cdot\|_p$ 的定义中得出。该等式意味着 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 在标量乘法下是封闭的
。

因为 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 包含常值函数 0，且在加法和标量乘法下封闭，$\mathcal{L}^p(\mu)$ 是 $\mathbf{F}^X$ 的一个子空间，因此是一个向量空间。 ■

在下面的定义中我们称之为 *dual exponent* 的东西，通常被称为 *conjugate exponent* 或 *conjugate index*。然而，术语 *dual exponent* 更具内涵，因为我们将在下一节看到结果（7.25 和 7.26）。

7.6 定义 *dual exponent;* p'

对于 $1 \le p \le \infty$，p 的 *dual exponent* 记为 p'，并且是 $[1, \infty]$ 中的元素，使得

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

7.7 示例 *dual exponents*

$$1' = \infty, \quad \infty' = 1, \quad 2' = 2, \quad 4' = 4/3, \quad (4/3)' = 4$$

下面的结果是在证明赫尔德不等式（7.9）中的一个关键工具。

7.8 *Young's inequality*

假设 $1 < p < \infty$。然后

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

对于所有 $a \ge 0$ 且 $b \ge 0$。

证明 固定 $b > 0$ 并定义一个函数 $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ 为

$$f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} - ab.$$

William Henry Young (1863–1942) published what is now called Young's inequality in 1912.

因此 $f'(a) = a^{p-1} - b$。因此 f 在区间 $\bigl(0, b^{1/(p-1)}\bigr)$ 上是递减的，而 f 在区间 $(b^{1/(p-1)}, \infty)$ 上是递增的。因此 f 在 $b^{1/(p-1)}$ 处有一个全局最小值。一点点算术 [使用 $p/(p-1) = p'$] 显示 $f\bigl(b^{1/(p-1)}\bigr) = 0$。因此 $f(a) \ge$ 对所有 $a \in (0, \infty)$ 都成立，这意味着所需的不等式。 ∎

下面的重要结果提供了一个关键工具，用于证明闵可夫斯基不等式（7.14）。

7.9 *Hölder's inequality*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$1 \le p \le \infty$，且 $f, h : X \to \mathbf{F}$ 是 $\mathcal{S}$-可测的。那么

$$\|fh\|_1 \le \|f\|_p \|h\|_{p'}.$$

证明 假设 $1 < p < \infty$，将 $p = 1$ 和 $p = \infty$ 作为读者的练习。

首先考虑特殊情况，其中 $\|f\|_p = \|h\|_{p'} = 1$。Young 不等式 (7.8) 告诉我们

$$|f(x)h(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|h(x)|^{p'}}{p'}$$

对所有 $x \in X$。对上述不等式两边关于 μ 积分可得 $\|fh\|_1 \le 1 = \|f\|_p \|h\|_{p'}$，从而完成了该特殊情形下的证明。

如果 $\|f\|_p = 0$ 或 $\|h\|_{p'} = 0$，则 $\|fh\|_1 = 0$，且所需的不等式成立。类似地，若 $\|f\|_p = \infty$ 或 $\|h\|_{p'} = \infty$，则所需的不等式显然成立。因此我们假设 $0 < \|f\|_p < \infty$ 且 $0 < \|h\|_{p'} < \infty$。

Hölder's inequality was proved in 1889 by Otto Hölder (1859–1937).

现在定义 $\mathcal{S}$-可测函数 f_1，$h_1 : X \to \mathbf{F}$ 通过

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \quad \text{and} \quad h_1 = \frac{h}{\|h\|_{p'}}.$$

于是 $\|f_1\|_p = 1$ 且 $\|h_1\|_{p'} = 1$。根据我们特殊情形的结果，我们有 $\|f_1 h_1\|_1 \le 1$，这意味着 $\|fh\|_1 \le \|f\|_p \|h\|_{p'}$。 ■

下一个结果给出了关于有限测度的Lebesgue空间之间的一个关键包含关系。注意Hölder不等式在证明中的关键作用。

7.10 $\mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ *if* $p < q$ *and* $\mu(X) < \infty$

设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个有限测度空间，且 $0 < p < q < \infty$。则

$$\|f\|_p \le \mu(X)^{(q-p)/(pq)} \|f\|_q$$

对于所有 $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$。此外，$\mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$。

证明 固定 $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$。设 $r = \frac{q}{p}$。因此 $r > 1$。简短计算表明 $r' = \frac{q}{q-p}$。现在，将 ~~p~~ 替换为 r、将 f 替换为 $|f|^p$，并将 h 替换为常数函数 1 的 Hölder 不等式 (7.9) 给出

$$\begin{aligned}\int |f|^p \, d\mu &\le \left(\int (|f|^p)^r \, d\mu\right)^{1/r} \left(\int 1^{r'} \, d\mu\right)^{1/r'} \\ &= \mu(X)^{(q-p)/q} \left(\int |f|^q \, d\mu\right)^{p/q}.\end{aligned}$$

N现在将上述不等式两边都提高到 $\frac{1}{p}$ 次方，得到 – 听

$$\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \mu(X)^{(q-p)/(pq)} \left(\int |f|^q \, d\mu\right)^{1/q},$$

这就是所需的不等式。

上述不等式表明$f \in \mathcal{L}^p(\mu)$。因此$\mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$。 ■

7.11 示例 $\mathcal{L}^p(E)$

我们采用一种常见的约定：如果 E 是 R 的一个 Borel（或勒贝格可测）子集，且 $0 < p \leq \infty$，那么 $\mathcal{L}^p(E)$ 表示 $\mathcal{L}^p(\lambda_E)$，其中 λ_E 表示勒贝格测度 λ，该测度限制在包含于 E 的 R 的 Borel（或勒贝格可测）子集上。

在这一约定下，7.10 表明

$$\text{if } 0 < p < q < \infty, \text{ then } \mathcal{L}^q([0,1]) \subseteq \mathcal{L}^p([0,1]) \text{ and } \|f\|_p \leq \|f\|_q$$

对于 $f \in \mathcal{L}^q([0,1])$。有关相关结果，请参见本节的练习 12 和 13。

闵可夫斯基不等式

下一个结果被用作证明闵可夫斯基不等式（7.14）的工具。再次注意，赫尔德不等式在证明中起着至关重要的作用。

7.12 *formula for* $\|f\|_p$

设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，$1 \leq p < \infty$，且 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$。则

$$\|f\|_p = \sup\left\{\left|\int fh\,d\mu\right| : h \in \mathcal{L}^{p'}(\mu) \text{ and } \|h\|_{p'} \leq 1\right\}.$$

证明 如果 $\|f\|_p = 0$，那么该结果结论中的等式两边都等于 0。因此我们假设 $\|f\|_p \neq 0$。

Hölder 不等式（7.9）表明，如果 $h \in \mathcal{L}^{p'}(\mu)$ 和 $\|h\|_{p'} \leq 1$，则

$$\left|\int fh\,d\mu\right| \leq \int |fh|\,d\mu \leq \|f\|_p \|h\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

因此 $\sup\{|\int fh\,d\mu| : h \in \mathcal{L}^{p'}(\mu)$ 且 $\|h\|_{p'} \leq 1\} \leq \|f\|_p$.

为证明不等式的另一方向，定义 $h : X \to \mathbf{F}$ 为

$$h(x) = \frac{\overline{f(x)}\,|f(x)|^{p-2}}{\|f\|_p^{p/p'}} \quad (\text{set } h(x) = 0 \text{ when } f(x) = 0).$$

然后 $\int fh\,d\mu = \|f\|_p$ 且 $\|h\|_{p'} = 1$，如你应当验证（使用 $p - \frac{p}{p'} = 1$）。因此 $\|f\|_p \leq \sup\{|\int fh\,d\mu|$: $h \in \mathcal{L}^{p'}(\mu)$ 且 $\|h\|_{p'} \leq 1\}$，如所需。 ∎

7.13 示例 *a point with infinite measure*

设 X 是一个恰好只有一个元素 b 的集合，且 μ 是一个测度，使得 $\mu(\emptyset) = 0$ 且 $\mu(\{b\}) = \infty$。则 $\mathcal{L}^1(\mu)$ 仅由零函数组成。因此，如果 $p = \infty$ 且 f 是在 b 处取值为 1 的函数，则 $\|f\|_\infty = 1$，但 7.12 中等式的右端等于 0。因此，当 $p = \infty$ 时，7.12 可能不成立。

例7.13表明我们不能在7.12中取 $p = \infty$。然而，如果 μ 是一个 σ 有限测度，那么即使 $p = \infty$ (参见习题9)，7.12 也成立。

下一个结果，称为闵可夫不等式，是不等式7.5(a)对$p \geq 1$的改进。

7.14 *Minkowski's inequality*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$1 \leq p \leq \infty$，且 f，$g \in \mathcal{L}^p(\mu)$。那么

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

证明 假设 $1 \leq p < \infty$ (案例 $p = \infty$ 留给读者作为练习)。不等式 7.5(a) 意味着 $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$。

假设 $h \in \mathcal{L}^{p'}(\mu)$ 和 $\|h\|_{p'} \leq$ 为 1。那么

$$\begin{aligned}\left|\int (f+g)h\, d\mu\right| \leq \int |fh|\, d\mu + \int |gh|\, d\mu &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|h\|_{p'}\\ &\leq \|f\|_p + \|g\|_p,\end{aligned}$$

其中第二个不等式来自于Hölder不等式（7.9）。现在，取上面不等式左侧在 $h \in \mathcal{L}^{p'}(\mu)$集合上的上确界，使得$\|h\|_{p'} \leq 1$。根据7.12，我们得到 $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$，如所愿。 ■

练习 7A

假设 μ 是一个度量。证明

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{and} \quad \|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\, \|f\|_\infty$$

对于所有 f、$g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ 和所有 $\alpha \in \mathbf{F}$。可以得出结论，通过常规的函数加法和标量乘法运算，$\mathcal{L}^\infty(\mu)$ 是一个向量空间。

假设 $a \geq 0$, $b \geq 0$, 且 $1 < p < \infty$. 证明

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

当且仅当 $a^p = b^{p'}$ [与Young不等式(7.8)比较]。

假设 a_1，...，a_n 是非负数。证明:

$$(a_1 + \cdots + a_n)^5 \leq n^4({a_1}^5 + \cdots + {a_n}^5).$$

证明Hölder不等式(7.9)在$p = 1$ 和 $p = \infty$情况下成立。

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$1 < p < \infty, f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, 和 $h \in \mathcal{L}^{p'}(\mu)$。证明霍尔德不等式 (7.9) 当且仅当存在非负数 a 和 b，且不全为 0，使得

$$a|f(x)|^p = b|h(x)|^{p'}$$

几乎每个$x \in X$。

6 设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$，以及 $h \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$。证明 $\|fh\|_1 = \|f\|_1 \|h\|_\infty$ 当且仅当

$$|h(x)| = \|h\|_\infty$$

对于几乎所有满足$f(x) \neq 0$的$x \in X$。

7 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 f，$h : X \to \mathbf{F}$ 是 $\mathcal{S}$-可测的。证明:

$$\|fh\|_r \leq \|f\|_p \|h\|_q$$

对于所有满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ 的正数 p、q、r。

8 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $n \in \mathbf{Z}^+$。证明:

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}$$

对于所有正数 $p_1, \cdots, p_n$，使得 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$，以及所有 $\mathcal{S}$-可测函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n : X \to \mathbf{F}$。

9 证明如果 μ 是一个 σ-有限测度，则 7.12 中的公式对 $p = \infty$ 成立。

10 设 $0 < p < q \leq \infty$。

（a）证明 $\ell^p \subseteq \ell^q$。

（b）证明 $\|(a_1, a_2, \ldots)\|_p \geq \|(a_1, a_2, \ldots)\|_q$ 对于 F 的每一个元素序列 $a_1, a_2, \ldots$。

11 证明 $\bigcap_{p>1} \ell^p \neq \ell^1$。

证明 $\bigcap_{p<\infty} \mathcal{L}^p([0, 1]) \neq \mathcal{L}^\infty([0, 1])$。

证明 $\bigcup_{p>1} \mathcal{L}^p([0, 1]) \neq \mathcal{L}^1([0, 1])$。

14 假设 p、$q \in (0$、$\infty]$，并且 $p \neq q$。证明 $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ 和 $\mathcal{L}^q(\mathbf{R})$ 两个集合都不是彼此的子集。

15 证明存在 $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ 使得对所有 $p \in (0, \infty] \setminus \{2\}$，都有 $f \notin \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$。

16 假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个有限测度空间。证明:

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

对于每个 $\mathcal{S}$-可测函数 $f : X \to \mathbf{F}$。

17 假设 μ 是一个测度，$0 < p \leq \infty$，并且 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$。证明对于每一个 $\varepsilon > 0$，存在一个简单函数 $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ 使得 $\|f - g\|_p < \varepsilon$。[*This exercise extends 3.44.*]

18 假设 $0 < p < \infty$ 且 $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$。证明对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个步函数 $g \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$，使得 $\|f - g\|_p < \varepsilon$。[*This exercise extends 3.47.*]

19 假设 $0 < p < \infty$ 且 $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$。证明对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个连续函数 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{F}$，使得 $\|f - g\|_p < \varepsilon$，并且集合 $\{x \in \mathbf{R} : g(x) \neq 0\}$ 是有界的。

[*This exercise extends 3.48.*]

20 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$1 < p < \infty$，且 f，$g \in \mathcal{L}^p(\mu)$。证明 Minkowski 不等式 (7.14) 成为等号当且仅当存在非负数 a 和 b，且不同时为 0，使得

$$af(x) = bg(x)$$

对几乎每个 $x \in X$。

21 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间并且 f、$g \in \mathcal{L}^1(\mu)$。证明:

$$\|f + g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

当且仅当 $f(x)\,\overline{g(x)} \geq$ 在几乎每一个 $x \in X$ 上为 0。

22 假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）和（$Y, \mathcal{T}, \nu$）是 σ-有限测度空间，并且 $0 < p < \infty$。证明：如果 $f \in \mathcal{L}^p(\mu \times \nu)$，那么

$$[f]_x \in \mathcal{L}^p(\nu) \text{ for almost every } x \in X$$

和

$$[f]^y \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ for almost every } y \in Y,$$

其中，$[f]_x$ 和 $[f]^y$ 为 f 的截面，如 5.7 中所定义。

23 设 $1 \leq p < \infty$ 且 $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$。

(a) 对于 $t \in \mathbf{R}$，定义 $f_t : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 由 $f_t(x) = f(x - t)$ 给出。证明函数 $t \mapsto \|f - f_t\|_p$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界且一致连续。(b) 对于 $t > 0$，定义 $f_t : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 由 $f_t(x) = f(tx)$ 给出。证明:

$$\lim_{t \to 1} \|f - f_t\|_p = 0.$$

24 假设 $1 \leq p < \infty$ 且 $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R})$。证明:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t} \int_{b-t}^{b+t} |f - f(b)|^p = 0$$

对于几乎所有的 $b \in \mathbf{R}$.

7B $L^p(\mu)$

$L^p(\mu)$的定义

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个度量空间，且 $1 \le p \le \infty$。如果存在一个非空集合 $E \in \mathcal{S}$，使得 $\mu(E) = 0$，则 $\|\chi_E\|_p = 0$，即使 $\chi_E \neq 0$；因此 $\|\cdot\|_p$ 不是 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 上的一个范数。解决这个问题的标准方法是将仅在一个 μ-测度为 0 的集合上有所不同的函数视为相同。为了使这一过程更加严谨，我们引入以下定义。

7.15 定义 $\mathcal{Z}(\mu)$; $\widetilde{f}$

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $0 < p \le \infty$。

- $\mathcal{Z}(\mu)$ 表示从 X 到 F 的 $\mathcal{S}$ 可测函数的集合，这些函数几乎处处等于 0 。
- 对于 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$，设 $\widetilde{f}$ 为 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 的子集，定义如下：

$$\widetilde{f} = \{f + z : z \in \mathcal{Z}(\mu)\}.$$

集合 $\mathcal{Z}(\mu)$ 显然在标量乘法下是封闭的。此外，$\mathcal{Z}(\mu)$ 在加法下是封闭的，因为两个具有 μ 测度为 0 的集合的并集是一个具有 μ 测度为 0 的集合。因此，$\mathcal{Z}(\mu)$ 是 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 的子空间，正如我们在例子 6.32 的第三个要点中所指出的。

注意，如果 f，$F \in \mathcal{L}^p(\mu)$，则 $\widetilde{f} = \widetilde{F}$ 当且仅当对几乎每个 $x \in X$，$f(x) = F(x)$。

7.16 定义 $L^p(\mu)$

设 μ 是一个测度，且 $0 < p \le \infty$。

- 令 $L^p(\mu)$ 表示 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 的子集族，其定义为

$$L^p(\mu) = \{\widetilde{f} : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}.$$

- 对于 $\widetilde{f}$、$\widetilde{g} \in L^p(\mu)$ 和 $\alpha \in \mathbf{F}$，定义 $\widetilde{f} + \widetilde{g}$ 和 $\alpha\widetilde{f}$ 为

$$\widetilde{f} + \widetilde{g} = (f + g)\widetilde{\ } \quad \text{and} \quad \alpha\widetilde{f} = (\alpha f)\widetilde{\ }.$$

上述定义中的最后一点需要仔细验证其合理性。潜在的问题是，如果 $\mathcal{Z}(\mu) \neq \{0\}$，那么 $\widetilde{f}$ 并不能被 f 唯一表示。因此，假设 f，F，g，$G \in \mathcal{L}^p(\mu)$ 和 $\widetilde{f} = \widetilde{F}$ 以及 $\widetilde{g} = \widetilde{G}$。为了使 $L^p(\mu)$ 中的加法定义有意义，我们必须验证 $(f + g)\widetilde{\ } = (F + G)\widetilde{\ }$。这个验证留给读者完成，类似地，上述最后一点中定义的标量乘法也需要验证其合理性。

你可能会将 $L^p(\mu)$ 的元素理解为 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 中函数的等价类，其中若两个函数在几乎处处一致，则它们是等价的。

数学家常常假定 $L^p(\mu)$ 的元素是函数，其中如果两个函数只在一个 μ-测度为 0 的集合上不同，就认为它们是相等的。只要你用这种“函数”进行的运算在函数在测度为 0 的集合上被改变时仍然产生相同的结果，这种虚构就是无害的。

Note the subtle typographic difference between $\mathcal{L}^p(\mu)$ and $L^p(\mu)$. An element of the calligraphic $\mathcal{L}^p(\mu)$ is a function; an element of the italic $L^p(\mu)$ is a set of functions, any two of which agree almost everywhere.

7.17 定义 $\|\cdot\|_p$ *on* $L^p(\mu)$

设 μ 为一个测度，且 $0 < p \le \infty$。在 $L^p(\mu)$ 上定义 $\|\cdot\|_p$ 为

$$\|\widetilde{f}\|_p = \|f\|_p$$

用于 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$。

注意，如果 f、$F \in \mathcal{L}^p(\mu)$ 和 $\widetilde{f} = \widetilde{F}$，则 $\|f\|_p = \|F\|_p$。因此上述定义是有意义的。

在下面的结果中，$L^p(\mu)$ 上的加法和标量乘法来自 7.16，而范数来自 7.17
。

7.18 $L^p(\mu)$ *is a normed vector space*

设 μ 是一个测度，且 $1 \le p \le \infty$。则 $L^p(\mu)$ 是一个向量空间，且 $\|\cdot\|_p$ 是 $L^p(\mu)$ 上的一个范数。

上述结果的证明留给读者完成，读者必然会使用闵可夫斯基不等式（7.14
）来验证三角不等式。注意，$L^p(\mu)$ 的加法单位元是 $\widetilde{0}$，它等于 $\mathcal{Z}(\mu)$。

对于熟悉向量空间商空间的读者：你可能会认识到 $L^p(\mu)$ 就是这个商空间

$$\mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{Z}(\mu).$$

对于想要学习向量空间的商的读者：请参阅线性代数第二门课程的教材。

If μ is counting measure on $\mathbf{Z}^+$, *then*

$$\mathcal{L}^p(\mu) = L^p(\mu) = \ell^p$$

because counting measure has no sets of measure 0 *other than the empty set.*

在下面的定义中，注意如果 E 是一个 Borel 集，那么由 2.95 可知，使用 B
orel 可测函数的 $L^p(E)$ 等于使用 Lebesgue 可测函数的 $L^p(E)$。

7.19 定义 $L^p(E)$ *for* $E \subseteq \mathbf{R}$

如果 E 是 $\mathbf{R}$ 的一个 Borel（或勒贝格可测）子集，且 $0 < p \le \infty$，则 $L^p(E)$ 表示 $L^p(\lambda_E)$，其中 λ_E 表示将勒贝格测度 λ 限制在包含于 E 的 $\mathbf{R}$ 的 Borel（或勒贝格可测）子集上。

$L^p(\mu)$ 是一个巴拿赫空间

下一个结果的证明完成了我们证明 $L^p(\mu)$ 是一个巴拿赫空间所需的全部艰难工作。然而，我们将下一个结果用 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 而不是 $L^p(\mu)$ 来表述，以便我们可以处理真正的函数。随后转到 $L^p(\mu)$ 就会很容易（见 7.24）。

7.20 *Cauchy sequences in $\mathcal{L}^p(\mu)$ converge*

设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，且 $1 \leq p \leq \infty$。设 $f_1, f_2, \ldots$ 是 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 中的一个函数序列，使得对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得

$$\|f_j - f_k\|_p < \varepsilon$$

对所有 $j \geq n$ 和 $k \geq n$。则存在 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0.$$

证明 情形 $p = \infty$ 留给读者作为练习。因此假设 $1 \leq p < \infty$。只需证明对某个 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ 以及某个子序列 $f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots$ 有 $\lim_{m\to\infty} \|f_{k_m} - f\|_p =$ 为 0（见第 6A 节的练习 14，其证明不需要范数的正定性）。

因此，通过取一个子序列（但不重新标号）并令 $f_0 = 0$，我们可以假设

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k - f_{k-1}\|_p < \infty.$$

定义函数$g_1, g_2, \ldots$和 g，从X到$[0, \infty]$，如下定义

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - f_{k-1}(x)| \quad \text{and} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|.$$

闵可夫斯基不等式（7.14）意味着

7.21
$$\|g_m\|_p \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k - f_{k-1}\|_p.$$

显然对于每个$x \in X$，$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = g(x)$。因此，单调收敛定理（3.11）和7.21意味着

7.22
$$\int g^p \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int {g_m}^p \, d\mu \leq \Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k - f_{k-1}\|_p\Bigr)^p < \infty.$$

因此，$g(x) < \infty$ 对几乎每个 $x \in X$ 成立。

因为每一个绝对收敛的实数无穷级数也收敛，所以对几乎每个 $x \in X$，我们可以如下定义 $f(x)$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(f_k(x) - f_{k-1}(x)\bigr) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \bigl(f_k(x) - f_{k-1}(x)\bigr) = \lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

特别地，$\lim_{m\to\infty} f_m(x)$ 对几乎每个 $x \in X$ 都存在。对于那些极限不存在的 $x \in X$，将 $f(x)$ 定义为 0。

我们现在有一个函数 f，它是 f_1、f_2，... 的逐点极限（几乎处处）。f 的定义表明 $|f(x)| \leq g(x)$ 对几乎每个 $x \in X$ 成立。因此，7.22 显示了 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ 。

为了证明 $\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_p = 0$，假设 $\varepsilon > 0$，并且令 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得对于所有 $j \geq n$ 和 $k \geq n$，有 $\|f_j - f_k\|_p < \varepsilon$。假设 $k \geq n$。然后

$$
\begin{aligned}
\|f_k - f\|_p &= \Big(\int |f_k - f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \\
&\leq \liminf_{j\to\infty}\Big(\int |f_k - f_j|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \\
&= \liminf_{j\to\infty}\|f_k - f_j\|_p \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}
$$

翻译文本： 其中，上面的第二行来自法图引理（第3A节的练习17）。因此，$\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_p = 0$，如预期的那样。

我们刚刚完成的证明包含了一个有用结果的证明，值得单独陈述。一个序列可以在 p 范数下收敛，而在任何地方都不逐点收敛（例如，参见习题 12）。然而，接下来的结果保证某个子序列几乎处处逐点收敛。

7.23 *convergent sequences in $\mathcal{L}^p$ have pointwise convergent subsequences*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，并且 $1 \leq p \leq \infty$。假设 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ 和 f_1, f_2, ... 是 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 中的一个函数序列，使得 $\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_p = 0$。然后存在一个子序列 f_{k_1}，f_{k_2}，... 使得

$$\lim_{m\to\infty} f_{k_m}(x) = f(x)$$

对几乎所有 $x \in X$。

证明 假设 $f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots$ 是一个子序列，使得

$$\sum_{m=2}^{\infty} \|f_{k_m} - f_{k_{m-1}}\|_p < \infty.$$

对7.20的证明进行检查表明，几乎每个$x \in X$的$\lim_{m\to\infty} f_{k_m}(x) = f(x)$。

7.24 $L^p(\mu)$ *is a Banach space*

假设 μ 是一个测度，并且 $1 \leq p \leq \infty$。那么 $L^p(\mu)$ 是一个巴拿赫空间。

证明 该结果直接由 7.20 和相应的定义得到。

对偶性

回顾一下，赋范向量空间V的对偶空间记为V'，并被定义为在V (上的有界线性泛函所成的巴拿赫空间，见6.71)。

在下一个结果的陈述和证明中，一个 L^p 空间的元素用一个符号表示，使其看起来像一个函数，而不是像一组函数，它们除了在一个测度为 0 的集合上不相等。然而，由于当函数仅在一个测度为 0 的集合上变化时，积分和 L^p 范数不会发生变化，这种符号上的简便性不会引起问题。

7.25 *natural map of* $L^{p'}(\mu)$ *into* $\left(L^p(\mu)\right)'$ *preserves norms*

假设 μ 是一个度量且 $1 < p \leq \infty$。对于 $h \in L^{p'}(\mu)$，定义 $\varphi_h : L^p(\mu) \to \mathbf{F}$ 为

$$\varphi_h(f) = \int fh\, d\mu.$$

于是 $h \mapsto \varphi_h$ 是从 $L^{p'}(\mu)$ 到 $\left(L^p(\mu)\right)'$ 的一一线性映射。此外，$\|\varphi_h\| = \|h\|_{p'}$ 对所有 $h \in L^{p'}(\mu)$ 都成立。

证明 假设 $h \in L^{p'}(\mu)$ 和 $f \in L^p(\mu)$。则 Hölder 不等式 (7.9) 告诉我们 $fh \in L^1(\mu)$ 且

$$\|fh\|_1 \leq \|h\|_{p'}\|f\|_p.$$

因此，如上所定义的 φ_h 是一个从 $L^p(\mu)$ 到 $\mathbf{F}$ 的有界线性映射。此外，映射 $h \mapsto \varphi_h$ 显然是一个将 $L^{p'}(\mu)$ 映入 $\left(L^p(\mu)\right)'$ 的线性映射。现在，7.12（将 p 和 p' 的角色互换）表明

$$\|\varphi_h\| = \sup\{|\varphi_h(f)| : f \in L^p(\mu) \text{ and } \|f\|_p \leq 1\} = \|h\|_{p'}.$$

如果 h_1，$h_2 \in L^{p'}(\mu)$ 和 $\varphi_{h_1} = \varphi_{h_2}$，那么

$$\|h_1 - h_2\|_{p'} = \|\varphi_{h_1 - h_2}\| = \|\varphi_{h_1} - \varphi_{h_2}\| = \|0\| = 0,$$

这意味着$h_1 = h_2$。因此，$h \mapsto \varphi_h$是从$L^{p'}(\mu)$到$\left(L^p(\mu)\right)'$的一一映射。 ■

对于某些测度 μ，当 $p = 1$ 时，命题 7.25 不成立。然而，如果 μ 是一个 σ-有限测度，那么即使 $p = 1$，命题 7.25 仍然成立（参见练习 14）。

地图 $h \mapsto \varphi_h$ 在 7.25 中的范围是否完全是$\left(L^p(\mu)\right)'$? 下一个结果为此问题提供了肯定的答案，针对 ℓ^p 在 $1 \leq p < \infty$ 的特殊情况。我们将在后面处理更一般的度量（参见 9.42；另见第 8B 节的习题 25）。

当将 ℓ^p 视为一个规范向量空间时，如下结果所示，除非另有说明，否则应始终假设 ℓ^p 上的范数是与 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 相关联的常规范数 $\|\cdot\|_p$，其中 μ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度。换句话说，如果 $1 \leq p < \infty$，则

$$\|(a_1, a_2, \ldots)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}.$$

7.26 *dual space of ℓ^p can be identified with $\ell^{p'}$*

设 $1 \leq p < \infty$。对于 $b = (b_1, b_2, \cdots\cdots) \in \ell^{p'}$，定义 $\varphi_b : \ell^p \to \mathbf{F}$ 为

$$\varphi_b(a) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k,$$

其中 $a = (a_1, a_2, \ldots)$。则 $b \mapsto \varphi_b$ 是一个从 $\ell^{p'}$ 到 $(\ell^p)'$ 的一一线性映射。此外，对所有 $b \in \ell^{p'}$，$\|\varphi_b\| = \|b\|_{p'}$。

证明 对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，令 $e_k \in \ell^p$ 为一个序列，其中除第 k^{th} 项为 1 外，其余各项均为 0；因此 $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$。

设 $\varphi \in (\ell^p)'$。在 $\mathbf{F}$ 中定义一个数列 $b = (b_1, b_2, \ldots)$，其定义为

$$b_k = \varphi(e_k).$$

假设 $a = (a_1, a_2, \cdots) \in \ell^p$。则

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

其中无穷和在 ℓ^p (的范数下收敛；如果我们允许 p 为 ∞)，这里的证明就会失败。由于 φ 是 ℓ^p 上的一个有界线性泛函，将 φ 作用于上述等式的两边可得

$$\varphi(a) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

我们仍然需要证明 $b \in \ell^{p'}$。为此，对于 $n \in \mathbf{Z}^+$，令 μ_n 为定义在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的计数测度。我们可以通过将每个 $(a_1, \ldots, a_n) \in L^p(\mu_n)$ 识别为 ($a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \in \ell^p$，把 $L^p(\mu_n)$ 看作是 ℓ^p 的一个子空间。将线性泛函 φ 限制在 $L^p(\mu_n)$ 上，得到 $L^p(\mu_n)$ 上的线性泛函，它满足如下等式:

$$\varphi|_{L^p(\mu_n)}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

现在由7.25［另见练习14(b)，其中$p = 1$的情形］得到

$$\begin{aligned}\|(b_1, \ldots, b_n)\|_{p'} &= \|\varphi|_{L^p(\mu_n)}\| \\ &\leq \|\varphi\|.\end{aligned}$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\|(b_1, \cdots\cdots, b_n)\|_{p'} = \|b\|_{p'}$，上述不等式推出不等式 $\|b\|_{p'} \leq \|\varphi\|$。因此 $b \in \ell^{p'}$，从而推出 $\varphi = \varphi_b$，证明完成。

当 $p = \infty$ 时，前述结果不再成立。换言之，ℓ^∞ 的对偶空间不能与 ℓ^1 等同。然而，参见练习 15，其中表明 ℓ^∞ 的一个自然子空间的对偶空间可以与 ℓ^1 等同。

练习 7B

1 假设 $n>1$ 且 $0<p<1$。证明如果 $\|\cdot\|$ 在 $\mathbf{F}^n$ 上定义为

$$\|(a_1,\ldots,a_n)\|=\big(|a_1|^p+\cdots+|a_n|^p\big)^{1/p},$$

那么 $\|\cdot\|$ 在 $\mathbf{F}^n$ 上不是一个范数。

2 (a) 设 $1\le p<\infty$。证明存在 ℓ^p 的一个可数子集，其闭包等于 ℓ^p。

(b) 证明不存在一个可数子集 ℓ^∞，其闭包等于 ℓ^∞。

3 (a) 假设 $1\le p<\infty$。证明存在 $L^p(\mathbf{R})$ 的一个可数子集，其闭包等于 $L^p(\mathbf{R})$。

(b) 证明不存在 $L^\infty(\mathbf{R})$ 的一个可数子集，其闭包等于 $L^\infty(\mathbf{R})$。

4 设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，且 $1\le p\le\infty$。证明：若 $f\colon X\to\mathbf{F}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，且对每个 $h\in\mathcal{L}^{p'}(\mu)$ 都有 $fh\in\mathcal{L}^1(\mu)$，则 $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$。

5 (a) 证明如果 μ 是一个度量，$1<p<\infty$，并且 f，$g\in L^p(\mu)$ 满足

$$\|f\|_p=\|g\|_p=\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p,$$

然后 $f=g$。

(b) 给出一个例子，说明当 $p=1$ 时，(a) 可能失败。

(c) 给出一个例子说明当 $p=\infty$ 时，(a) 可能不成立。

6 假设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是一个测度空间，并且 $0<p<1$。证明

$$\|f+g\|_p^p\le\|f\|_p^p+\|g\|_p^p$$

对于所有$\mathcal{S}$-可测函数f，g：$X\to\mathbf{F}$。

7 证明 $L^p(\mu)$ 在 7.16 中定义的加法和数乘以及 7.17 中定义的范数下是一个赋范向量空间。换言之，证明 7.18。

8 证明在 $p=\infty$ 情形下的 7.20。

9 证明 7.20 对 $p\in(0,1)$ 也成立。

10 证明 $p\in(0,1)$ 也适用于 7.23。

假设 $1\le p\le\infty$。证明

$$\{(a_1,a_2,\ldots)\in\ell^p : a_k\neq 0 \text{ for every } k\in\mathbf{Z}^+\}$$

不是 ℓ^p 的开子集。

12 证明存在一列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ 的函数，属于 $\mathcal{L}^1([0,1])$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k\|_1 = 0$ 但是

$$\sup\{f_k(x) : k \in \mathbf{Z}^+\} = \infty$$

对于 [0, 1] 中的每个 $x \in$。

[*This exercise shows that the conclusion of 7.23 cannot be improved to conclude that* 极限$_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ *for almost every* $x \in X$.]

13 假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，$1 \leq p \leq \infty, f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, 并且 $f_1, f_2, \cdots$ 是 $\mathcal{L}^p(\mu)$ 中的一个序列，使得 $\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_p = 0$。证明：如果 $g : X \to$ F 是一个函数，使得 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = g(x)$ 对几乎每个 $x \in X$ 成立，那么 $f(x) = g(x)$ 对几乎每个 $x \in X$ 成立。

14 (a) 给出一个度量 μ 的例子，使得 7.25 对 $p = 1$ 不成立。 (b) 证明如果 μ 是一个 σ-有限测度，则 7.25 对 $p = 1$ 成立。

15 设

$$c_0 = \{(a_1, a_2, \ldots) \in \ell^\infty : \lim_{k\to\infty} a_k = 0\}.$$

给 c_0 赋予它作为 ℓ^∞ 的子空间所继承的范数。

（a）证明 c_0 是一个巴拿赫空间。

（b）证明 c_0 的对偶空间可以与 ℓ^1 等同。

16 假设 $1 \leq p \leq 2$.

(a) 证明如果 $w, z \in$ C，则

$$\frac{|w+z|^p + |w-z|^p}{2} \leq |w|^p + |z|^p \leq \frac{|w+z|^p + |w-z|^p}{2^{p-1}}.$$

(b) 证明如果 μ 是一个测度并且 $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, 则

$$\frac{\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p}{2} \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \leq \frac{\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p}{2^{p-1}}.$$

17 假设 $2 \leq p < \infty$。

(a) 证明如果 $w, z \in$ C，则

$$\frac{|w+z|^p + |w-z|^p}{2^{p-1}} \leq |w|^p + |z|^p \leq \frac{|w+z|^p + |w-z|^p}{2}.$$

(b) 证明如果 μ 是一个测度并且 f，$g \in \mathcal{L}^p(\mu)$，那么

$$\frac{\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p}{2^{p-1}} \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \leq \frac{\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p}{2}.$$

[*The inequalities in the two previous exercises are called* 克拉克森不等式. *They were discovered by James Clarkson in 1936.*]

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，$1 \leq p, q \leq \infty$, 和 $h : X \to \mathbf{F}$ 是一个 $\mathcal{S}$-可测函数，使得 $hf \in L^q(\mu)$ 对于每个 $f \in L^p(\mu)$ 成立。证明 $f \mapsto hf$ 是从 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu)$ 的连续线性映射。

A Banach space is called* 反身 *if the canonical isometry of the Banach space into its double dual space is surjective (see Exercise 20 in Section 6D for the definitions of the double dual space and the canonical isometry).

19 证明如果 $1 < p < \infty$，则 ℓ^p 是自反的。 20 证明 ℓ^1 不是自反的。 21 显示通过自然识别，c_0 到其双重对偶空间的标准等距映射是 c_0 到 ℓ^∞ (的包含映射，参见练习 15 以获取 c_0 的定义及其对偶空间的识别)。 22 假设 $1 \leq p < \infty$ 且 V、W 是巴拿赫空间。证明如果 $V \times W$ 上的范数定义为

$$\|(f,g)\| = \left(\|f\|^p + \|g\|^p\right)^{1/p}$$

对于 $f \in V$ 和 $g \in W$。

Chapter 8
Hilbert Spaces

在第6章中介绍的赋范向量空间和巴拿赫空间刻画了距离的概念。本章我们引入内积空间，它刻画了角度的概念。正交性的概念——在熟悉的 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 的语境中对应于直角——在内积空间中起着尤为重要的作用。

正如巴拿赫空间被定义为每个柯西序列都收敛的赋范向量空间一样，希尔伯特空间被定义为一个同时是巴拿赫空间的内积空间。希尔伯特空间以大卫·希尔伯特（1862–1943）的名字命名，以纪念他在二十世纪初对该理论部分内容的发展所作出的贡献。

在本章中，我们将看到对希尔伯特空间上的有界线性泛函的一个清晰描述。我们还将看到，每个希尔伯特空间都有一个正交规范基，这使得希尔伯特空间看起来很像标准的欧几里得空间，只是用无限和取代了有限和。

The Mathematical Institute at the University of Göttingen, Germany. This building was opened in 1930, when Hilbert was near the end of his career there. Other prominent mathematicians who taught at the University of Göttingen and made major contributions to mathematics include Richard Courant (1888–1972), Richard Dedekind (1831–1916), Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Hermann Minkowski (1864–1909), Emmy Noether (1882–1935), and Bernhard Riemann (1826–1866).

8A 内积空间

内积

如果 p ＝为 2，则其对偶指数 p' 也等于 2。 在这种特殊情况下，Hölder 不等式 (7.9) 表明如果 μ 是一个测度，那么

$$\left|\int fg\, d\mu\right| \leq \|f\|_2\|g\|_2$$

对所有 $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$。因此，我们可以为每一对函数 $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ 关联一个数 $\int fg\, d\mu$。内积几乎是这种配对的一个推广，只是稍作变化，以便与 $L^2(\mu)$-范数建立更紧密的联系。

如果 $g = f$ 和 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$，那么上面不等式的左边是 $\|f\|_2^2$。然而，如果 $g = f$ 和 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$，那么上面不等式的左边不一定等于 $\|f\|_2^2$。相反，我们应该取 $g = \bar{f}$ 以得到 $\|f\|_2^2$ 以上。

上述观察表明，我们应当考虑将 f、$\bar{g}$ 配对到 $\int f\,\bar{g}\, d\mu$ 的配对。然后，将 f 与其自身配对得到 $\|f\|_2^2$.

现在我们已经准备好定义内积，它抽象了在 $L^2(\mu)$ 上的配对 $f, g \mapsto \int f\,\bar{g}\, d\mu$ 的关键性质，其中 μ 是一个测度。

8.1 定义 *inner product; inner product space*

向量空间 V 上的一个 *inner product* 是一个函数，它将 V 中元素的每一对有序对 f、g 映射到一个数 $\langle f, g\rangle \in \mathbf{F}$，并且具有以下性质。

- 正性 $\langle f, f\rangle \in [0, \infty)$ 对所有 $f \in V$。
- 确定性 $\langle f, f\rangle =$ 为 0 当且仅当 $f =$ 为 0。
- 第一个自变量中的线性性 $\langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$ 和 $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle$，对所有 $f, g, h \in V$ 以及所有 $\alpha \in \mathbf{F}$。
- 共轭对称性 $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ 对于所有 $f, g \in V$.

带有内积的向量空间称为*inner product space*。术语 *real inner product space*表示 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$；术语*complex inner product space*表示 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$。

如果 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$，则可以忽略上述的复共轭，并且上述的共轭对称性性质可以更简单地重写为 $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$，对所有 f，$g \in V$。

尽管大多数数学家如上所述定义内积，但许多物理学家采用一种在第二个变量而非第一个变量上要求线性的定义。

8.2 示例 *inner product spaces*

- 对于 $n \in \mathbf{Z}^+$，在 $\mathbf{F}^n$ 上定义一个内积为

$$\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle = a_1 \overline{b_1} + \cdots + a_n \overline{b_n}$$

对于 $(a_1, \dots, a_n)$、$(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{F}^n$。当将 $\mathbf{F}^n$ 视为一个内积空间时，除非上下文表明存在其他内积，我们始终指的是这个内积。

- 在 ℓ^2 上定义一个内积:

$$\langle (a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2, \dots) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$$

对于（$a_1, a_2, \dots$）、（$b_1, b_2, \dots$）$\in \ell^2$。将 Hölder 不等式（7.9）应用于 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度，并取 $p = 2$，可得上述无穷和绝对收敛，因此收敛到 $\mathbf{F}$ 的一个元素。当把 ℓ^2 视为内积空间时，除非上下文表明采用其他内积，我们始终指的是这个内积。

- 在$C([0, 1])$上定义一个内积，其中$C([0, 1])$是从$[0, 1]$到$\mathbf{F}$的连续函数的向量空间，定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \, \overline{g}$$

对于$f, g \in C([0, 1])$。内积的确定性要求得到满足，因为如果$f\colon [0, 1] \to \mathbf{F}$ 是一个连续函数，并且 $\int_0^1 |f|^2 = 0$，那么函数f恒等于 0。

- 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间。定义 $L^2(\mu)$ 上的一个内积为

$$\langle f, g \rangle = \int f \, \overline{g} \, d\mu$$

对于f，$g \in L^2(\mu)$。在 $p = 2$ 的情况下，Hölder 不等式（7.9）表明，上述积分作为 $\mathbf{F}$ 的一个元素是良定义的。当把 $L^2(\mu)$ 看作一个内积空间时，除非上下文指明其他内积，我们始终指的是这个内积。

这里我们使用 $L^2(\mu)$ 而不是 $\mathcal{L}^2(\mu)$，因为如果存在非空集合 $E \in \mathcal{S}$ 使得 $\mu(E) = 0$，则在 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 上的确定性要求不成立（考虑 $\langle \chi_E$、$\chi_E \rangle$ 即可看出问题）。

此示例中的前两个要点是 $L^2(\mu)$ 的特例，将 μ 视为 $\{1, \dots, n\}$ 或 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度。

正如我们将看到的，尽管内积空间的主要例子是$L^2(\mu)$空间，但使用内积结构往往比使用测度和积分更加清晰和简单。

8.3 *basic properties of an inner product*

设 V 是一个内积空间。则

(a) $\langle 0, g\rangle = \langle g, 0\rangle = 0$ for every $g \in V$;

(b) $\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$ for all $f, g, h \in V$;

(c) $\langle f, \alpha g\rangle = \overline{\alpha}\langle f, g\rangle$ for all $\alpha \in \mathbf{F}$ and $f, g \in V$.

证明

(a）对于 $g \in V$，函数 $f \mapsto \langle f, g\rangle$ 是从 V 到 F 的线性映射。由于每个线性映射都把 0 映射到 0，我们有 $\langle 0, g\rangle = 0$。现在，内积的共轭对称性性质意味着

$$\langle g, 0\rangle = \overline{\langle 0, g\rangle} = \overline{0} = 0.$$

(b) 设 f，g，$h \in V$。则

$$\langle f, g+h\rangle = \overline{\langle g+h, f\rangle} = \overline{\langle g, f\rangle + \langle h, f\rangle} = \overline{\langle g, f\rangle} + \overline{\langle h, f\rangle} = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle.$$

(c) 假设 $\alpha \in$ F 且 f，$g \in V$。则

$$\langle f, \alpha g\rangle = \overline{\langle \alpha g, f\rangle} = \overline{\alpha\langle g, f\rangle} = \overline{\alpha}\,\overline{\langle g, f\rangle} = \overline{\alpha}\langle f, g\rangle,$$

如所愿。 ■

如果 F = R，那么 8.3 的 (b) 和 (c) 意味着对于 $f \in V$，函数 $g \mapsto \langle f, g\rangle$ 是从 V 到 R 的线性映射。然而，如果 F = C 且 $f \neq 0$，那么由于 8.3 的 (c) 中的复共轭，函数 $g \mapsto \langle f, g\rangle$ 不是从 V 到 C 的线性映射。

柯西–施瓦茨不等式与三角不等式

现在我们可以定义与每个内积相关联的范数。我们使用这个词*norm* (事实证明这是正确的)，尽管目前还不清楚是否满足范数所要求的所有性质。

8.4 定义 *norm associated with an inner product;* $\|\cdot\|$

设 V 是一个内积空间。对于 $f \in V$，定义 f 的 *norm*，记为 $\|f\|$，如下:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

8.5 示例 *norms on inner product spaces*

在下面的每个例子中，内积都是如例 8.2 中所定义的标准内积。

- 如果 $n \in \mathbf{Z}^+$ 且 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{F}^n$，则
$$\|(a_1, \ldots, a_n)\| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}.$$
因此，与标准内积相关联的 $\mathbf{F}^n$ 上的范数就是通常的欧几里得范数。

- 如果（a_1，a_2，……）$\in \ell^2$，则
$$\|(a_1, a_2, \ldots)\| = \Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\Bigr)^{1/2}.$$
因此，与 ℓ^2 上的内积相关联的范数正是在例 7.2 中定义的 ℓ^2 上的标准范数 $\|\cdot\|_2$。

- 如果 μ 是一个测度并且 $f \in L^2(\mu)$，那么
$$\|f\| = \Bigl(\int |f|^2 \, d\mu\Bigr)^{1/2}.$$
因此，与 $L^2(\mu)$ 上的内积相关的范数正是 7.17 中定义的 $L^2(\mu)$ 上的标准范数 $\|\cdot\|_2$。

内积的定义（8.1）意味着，如果V是一个内积空间并且$f \in V$，那么

- $\|f\| \geq 0$;
- $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0$。

下一个结果的证明说明了内积空间中范数的一个常用性质：处理范数的平方通常比直接处理范数本身更容易。

8.6 *homogeneity of the norm*

设 V 是一个内积空间，$f \in V$，且 $\alpha \in \mathbf{F}$。则
$$\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|.$$

证明 我们有
$$\|\alpha f\|^2 = \langle \alpha f, \alpha f \rangle = \alpha \langle f, \alpha f \rangle = \alpha \overline{\alpha} \langle f, f \rangle = |\alpha|^2 \|f\|^2.$$

取平方根即可得到所需的等式。 ■

下一个定义在内积空间的研究中起着至关重要的作用。

8.7 定义 *orthogonal*

内积空间中的两个元素如果它们的内积等于0，则称为*orthogonal*。

在上述定义中，内积空间中两个元素的顺序并不重要，因为 $\langle f, g\rangle = 0$ 当且仅当 $\langle g, f\rangle = 0$。与其说 f 和 g 是正交的，有时我们说 f 与 g 正交。

8.8 示例 *orthogonal elements of an inner product spa ce*

- 在 $\mathbf{C}^3$ 中，(2, 3, 5*i*) 和 (6, 1, −3*i*) 是正交的，因为

$$\langle(2,3,5i),(6,1,-3i)\rangle = 2\cdot 6 + 3\cdot 1 + 5i\cdot(3i) = 12 + 3 - 15 = 0.$$

- 由 sin(3*t*) 和 cos(8*t*) 表示的 $L^2((-\pi、\pi])$ 的元素是正交的，因为

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3t)\cos(8t)\,dt = \left[\frac{\cos(5t)}{10} - \frac{\cos(11t)}{22}\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0,$$

其中 d*t* 表示关于 $(-\pi, \pi]$ 上的勒贝格测度的积分。

Exercise 8 要求你证明，如果 *a* 和 *b* 是 R 中的非零元素 2，然后

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\,\|b\|\cos\theta,$$

其中 θ 是 *a* 与 *b* (之间的夹角，把 *a* 看作起点在原点、终点在 *a* 的向量，*b*) 亦然。于是，$\mathbf{R}^2$ 中的两个元素当且仅当它们之间夹角的余弦为 0 时是正交的，而这当且仅当这些向量在通常的平面几何意义下是互相垂直的。因此，你可以把词语 *orthogonal* 看作是表示 *perpendicular* 的一个花哨说法。

法学教授理查德·弗里德曼于2010年在美国最高法院陈述一宗案件：

Mr. Friedman：我认为那个问题与这里的问题完全是正交的，因为州政府正在承认—— *Chief Justice Roberts*：抱歉。完全什么？ *Mr. Friedman*：正交。直角。无关。不相干。 *Chief Justice Roberts*：哦。 *Justice Scalia*：那个形容词是什么？我喜欢那个。 *Mr. Friedman*：正交。 *Chief Justice Roberts*：正交。 *Mr. Friedman*：对，对。 *Justice Scalia*：正交，哦。 （笑声。） *Justice Kennedy*：我就知道这个案子给我们带来了一个问题。 （笑声。）

下一个定理早在3500多年前就在巴比伦为人所知（在 $\mathbf{R}^2$ 的语境下），随后又在2500多年前于希腊被重新发现并得到证明。

8.9 *Pythagorean Theorem*

设 f 和 g 是内积空间中的正交元素。则

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle \\ &= \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2, \end{aligned}$$

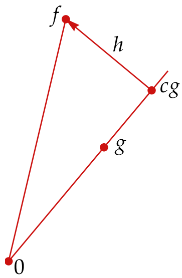
如所愿。 ■

练习3表明，勾股定理的逆命题是否成立取决于 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ 还是 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$。

设 f 和 g 是内积空间 V 的元素，且 $g \neq$ 不为 0。通常将 f 写成某个数 c 乘以 g 再加上 V 中一个与 g 正交的元素 h 是很有用的。这里的图形表明，这样的分解应当是可能的。为找到 c 的合适取值，注意如果对某个 $c \in \in \mathbf{F}$ 以及某个满足 $\langle h、g\rangle =$ 不为 0 的 $h \in V$，有 $f = cg + h$，那么我们必须有

$$\langle f,g\rangle = \langle cg+h, g\rangle = c\|g\|^2,$$

这意味着 $c = \dfrac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2}$，进而意味着 $h = f - \dfrac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2} g$。因此我们得到如下结果。



Here $f = cg + h$, *where* h *is orthogonal to* g.

8.10 *orthogonal decomposition*

假设 f 和 g 是内积空间的元素，且 $g \neq 0$。则存在 $h \in V$，使得

t

$$\langle h,g\rangle = 0 \quad \text{and} \quad f = \frac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2} g + h.$$

证明集合 $h = f - \dfrac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2} g$。然后

$$\langle h,g\rangle = \left\langle f - \frac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2} g, g\right\rangle = \langle f,g\rangle - \frac{\langle f,g\rangle}{\|g\|^2}\langle g,g\rangle = 0,$$

给出了结论中的第一个方程。结论中的第二个方程可直接由 h 的定义得出。 ■

正交分解 8.10 是我们证明下一个结果的主要组成部分，而该结果是数学中最重要的不等式之一。

8.11 ***Cauchy–Schwarz inequality***

假设 f 和 g 是内积空间的元素。那么

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|,$$

当且仅当 f 与 g 之一是另一个的标量倍数时取等号。

证明 若 $g = 0$，则所需不等式的两边都等于 0。因此我们可以假设 $g \neq 0$。考虑正交分解

$$f = \frac{\langle f, g\rangle}{\|g\|^2} g + h$$

由8.10给出，其中h与g正交。勾股定理（8.9）意味着

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \left\| \frac{\langle f, g\rangle}{\|g\|^2} g \right\|^2 + \|h\|^2 \\ &= \frac{|\langle f, g\rangle|^2}{\|g\|^2} + \|h\|^2 \\ &\ge \frac{|\langle f, g\rangle|^2}{\|g\|^2}. \qquad (8.12)\end{aligned}$$

将该不等式的两边乘以 $\|g\|^2$，然后取平方根，即可得到所需的不等式。

上述证明表明，当且仅当 8.12 取等号时，柯西–施瓦茨不等式取等号。这当且仅当 $h = 0$ 时发生。但是，$h = 0$ 当且仅当 f 是 g (的一个标量倍数（见 8.10)）。因此，柯西–施瓦茨不等式取等号当且仅当 f 是 g 的一个标量倍数，或 g 是 f (的一个标量倍数，或两者皆是；这样的表述是为了涵盖 f 或 g 等于 0) 的情形。 ■

8.13 示例 *Cauchy–Schwarz inequality for* $\mathbf{F}^n$

应用标准内积对$\mathbf{F}^n$上的Cauchy–Schwarz不等式，针对$(|a_1|, \dots, |a_n|)$和($|b_1|, \dots, |b_n|)$，得到不等式

$$|a_1 b_1| + \cdots + |a_n b_n| \le \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}\sqrt{|b_1|^2 + \cdots + |b_n|^2}$$

对于所有 $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{F}^n$。

因此，我们得到了霍尔德不等式（7.9）在特殊情形下的一个新的且简洁的证明，其中 μ 是 $\{1, \dots, n\}$ 上的计数测度，并且 $p = p' = 2$。

The inequality in this example was first proved by Cauchy in 1821.

8.14 示例 *Cauchy–Schwarz inequality for* $L^2(\mu)$

设 μ 是一个测度，且 $f, g \in L^2(\mu)$。将 $L^2(\mu)$ 上的标准内积下的柯西–施瓦茨不等式应用于 $|f|$ 和 $|g|$，得到不等式

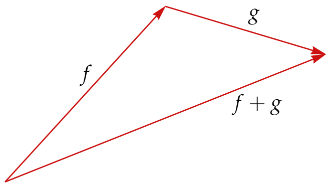
$$\int |fg|\,d\mu \leq \left(\int |f|^2\,d\mu\right)^{1/2}\left(\int |g|^2\,d\mu\right)^{1/2}.$$

上述不等式在 $p = p' = 2$ 的特殊情形下等价于 Hölder 不等式（7.9）。然而，通过柯西–施瓦茨不等式证明上述不等式仍然依赖于 Hölder 不等式，以说明在 $L^2(\mu)$ 上标准内积的定义是有意义的。参见本节的习题 18，了解对 in- 的推导。

In 1859 Viktor Bunyakovsky (1804–1889), who had been Cauchy's student in Paris, first proved integral inequalities like the one above. Similar discoveries by Hermann Schwarz (1843–1921) in 1885 attracted more attention and led to the name of this inequality.

上面的等式确实独立于 Hölder 不等式。

如果我们把由内积确定的范数看作长度，那么三角不等式的几何解释是：三角形任意一边的长度小于另外两边长度之和。



8.15 *triangle inequality*

设 f 和 g 是一个内积空间中的元素。则

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

当且仅当 f 或 g 其中一个是另一个的非负倍数时取等号。

证明 我们有

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle \\
&= \langle f,f\rangle + \langle g,g\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle \\
&= \langle f,f\rangle + \langle g,g\rangle + \langle f,g\rangle + \overline{\langle f,g\rangle} \\
&= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle f,g\rangle \\
&\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|\langle f,g\rangle| && \text{8.16} \\
&\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| && \text{8.17} \\
&= (\|f\| + \|g\|)^2,
\end{aligned}$$

其中 (8.17) 由柯西–施瓦茨不等式 (8.11) 推出。对上述不等式两边取平方根即可得到所需的不等式。

上述证明表明，当且仅当在 8.16 和 8.17 中取等号时，三角不等式为等式。因此，当且仅当

8.18 $$\langle f, g\rangle = \|f\|\,\|g\|.$$

如果 f、g 中的一个是另一个的非负倍数，那么 8.18 成立，如你所应验证。反之，假设 8.18 成立。则柯西–施瓦茨不等式 (8.11) 中的等号成立条件意味着 f、g 中的一个是另一个的标量倍数。显然，8.18 迫使所涉及的标量为非负的，正如所需。

将前述结果应用于内积空间 $L^2(\mu)$，其中 μ 是一个测度，可得到 Minkowski 不等式（7.14）在 $p=2$ 情形下的一个新证明。

现在我们可以证明，我们一直称之为内积空间上的范数的东西，确实是一个范数。

8.19 $\|\cdot\|$ *is a norm*

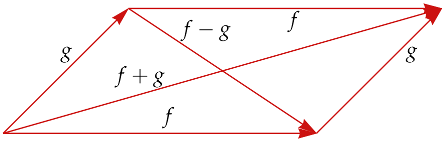
设 V 是一个内积空间，并且 $\|f\|$ 按通常方式定义为

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

对于 $f \in V$。则 $\|\cdot\|$ 是 V 上的一个范数。

证明 内积的定义蕴含 $\|\cdot\|$ 满足范数的正定性要求。由于 8.6 和 8.15，范数的齐次性和三角不等式要求得以满足。

下一个结果具有这样的几何解释：平行四边形两条对角线长度的平方和等于四条边长度的平方和。



8.20 *parallelogram equality*

设 f 和 g 是一个内积空间中的元素。则

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle + \langle f-g, f-g\rangle \\
&= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle \\
&\qquad + \|f\|^2 + \|g\|^2 - \langle f, g\rangle - \langle g, f\rangle \\
&= 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2,
\end{aligned}$$

如所愿。

练习 8A

1 令 V 表示从 R 到 F 的有界连续函数的向量空间。令 $r_1, r_2, \ldots$ 为有理数的一个列表。对于 $f, g \in V$，定义

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(r_k)\,\overline{g(r_k)}}{2^k}.$$

证明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 V 上的一个内积。

2 证明如果 μ 是一个测度且 f，$g \in L^2(\mu)$，则

$$\|f\|^2\,\|g\|^2 - |\langle f, g\rangle|^2 = \frac{1}{2}\int\int |f(x)g(y) - g(x)f(y)|^2\,d\mu(y)\,d\mu(x).$$

假设 f 和 g 是内积空间的元素，并且

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

(a) 证明如果 F = R，则 f 与 g 正交。

(b) 举例说明，如果 F = C，那么 f 和 g 可以满足上述方程，而不必正交
。

4 求 a、$b \in \mathbf{R}^3$，使得 a 是 (1, 6, 3) 的一个标量倍数，b 与 (1, 6, 3) 正交，并且 $(5, 4, -2) = a + b$。

证明{5}

$$16 \le (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

为了对所有正数 a、b、c、d，当且仅当 $a = b$ 时等号成立 $= c = d$.

6 证明：对于任何包含至少两个不同实数的有限实数列表，其平均值的平方小于该列表中各数平方的平均值。

7 设 f 和 g 是某个内积空间的元素，且 $\|f\| \le 1$ 且 $\|g\| \le 1$。证明：

$$\sqrt{1-\|f\|^2}\sqrt{1-\|g\|^2} \le 1 - |\langle f, g\rangle|.$$

假设 a 和 b 是 $\mathbf{R}^2$ 的非零元素。证明：

$$\langle a, b\rangle = \|a\|\,\|b\|\cos\theta,$$

其中 θ 是 a 与 b (之间的夹角，把 a 视为起点在原点、终点在 a 的向量，对 b) 亦然。

Hint: 画出由a、b和$a-b$构成的三角形；然后使用定律 余弦。

9 两个向量（可视为起点在原点的箭头）在 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中的夹角可以用几何方式来定义。然而，在 $\mathbf{R}^n$ 中当 $n > 3$ 时，几何并不那么清晰。因此，$\mathbf{R}^n$ 中两个非零向量 a、$b \in$ 之间的夹角被定义为

$$\arccos \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\,\|b\|},$$

该定义的动机来自前一个练习。解释为什么需要柯西–施瓦茨不等式来说明这个定义是有意义的。

10 （a）设 f 和 g 是某个实内积空间中的元素。证明：f 与 g 具有相同的范数，当且仅当 $f+g$ 与 $f-g$ 正交。（b）利用（a）证明：平行四边形的两条对角线当且仅当在该平行四边形是菱形时相互垂直。

11 假设 f 和 g 是内积空间中的元素。证明：$\|f\| = \|g\|$ 当且仅当 对所有 s、$t \in \mathbf{R}$，$\|sf + tg\| = \|tf + sg\|$。

12 假设 f 和 g 是内积空间的元素，并且 $\|f\| = \|g\| = 1$ 且 $\langle f，g\rangle = 1$。证明 $f = g$。

13 假设 f 和 g 是实内积空间中的元素。证明：

$$\langle f, g\rangle = \frac{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2}{4}.$$

14 假设 f 和 g 是复内积空间的元素。证明：

$$\langle f, g\rangle = \frac{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + \|f+ig\|^2 i - \|f-ig\|^2 i}{4}.$$

15 假设 f、g、h 是一个内积空间中的元素。证明：

$$\|h - \tfrac{1}{2}(f+g)\|^2 = \frac{\|h-f\|^2 + \|h-g\|^2}{2} - \frac{\|f-g\|^2}{4}.$$

16 证明满足平行四边形等式的范数来自于一个内积。换句话说，证明如果 V 是一个赋范向量空间，其范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形等式，那么在 V 上存在一个内积 $\langle\cdot，\cdot\rangle$，使得 $\|f\| = \langle f，f\rangle^{1/2}$ 对所有 $f \in V$ 都成立。

17 令 λ 表示区间 $[1, \infty)$ 上的勒贝格测度。

(a) 证明如果 $f\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ 是 Borel 可测的，那么

$$\Bigl(\int_1^\infty f(x)\, d\lambda(x)\Bigr)^2 \le \int_1^\infty x^2\bigl(f(x)\bigr)^2\, d\lambda(x).$$

(b) 描述满足 (a) 中不等式取等号的 Borel 可测函数 $f\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ 的集合。

18 假设 μ 是一个测度。对 f，$g \in L^2(\mu)$，定义 $\langle f, g\rangle$ 为

$$\langle f, g\rangle = \int f\,\overline{g}\,d\mu.$$

(a) 利用不等式

$$|f(x)\,\overline{g(x)}| \leq \tfrac{1}{2}\big(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\big),$$

验证上述积分是有意义的，并且将 f、g 映射到 $\langle f$、$g\rangle$ 的映射在 $L^2(\mu)$ (上定义了一个内积，而不使用赫尔德不等式)。

(b) 证明柯西–施瓦茨不等式意味着

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\,\|g\|_2$$

对于所有f，$g \in L^2(\mu)$ (再次，在不使用Hölder不等式)的情况下。

假设 $V_1, \ldots, V_m$ 是内积空间。证明方程

$$\langle (f_1, \ldots, f_m), (g_1, \ldots, g_m)\rangle = \langle f_1, g_1\rangle + \cdots + \langle f_m, g_m\rangle$$

在 $V_1 \times \cdots \times V_m$ 上定义一个内积。
[*Each of the inner product spaces* V_1, $\cdots$,
V_m *may have a different inner product,*
even though the same inner product notation is used on all these spaces.]

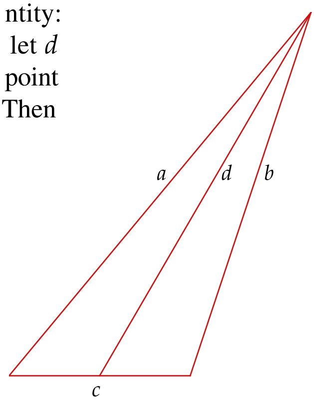
20 假设 V 是一个内积空间。使得 $V \times V$ 成为如上题所示的内积空间。证明将有序对 $(f, g) \in V \times V$ 映射到内积 $\langle f, g\rangle \in \mathbf{F}$ 的函数是从 $V \times V$ 到 $\mathbf{F}$ 的连续函数。

假设 $1 \leq p \leq \infty$。

(a) 证明 ℓ^p 上的范数当且仅当 $p = 2$ 时来自一个内积。 (b) 证明 $L^p(\mathbf{R})$ 上的范数当且仅当 $p = 2$ 时来自一个内积。

22 使用内积证明阿波罗尼斯的 ide ntity:
在一个三角形中，边长为a、b 和 c，let d
是从中点到线段的长度 point
将长度为 c 的一边到对角顶点。 Then

$$a^2 + b^2 = \tfrac{1}{2}c^2 + 2d^2.$$



8B 正交性

正交投影

上一节按照标准的线性代数方法构建了内积空间。线性代数主要关注有限维向量空间。关于无限维内积空间的许多有趣结果需要一个额外的假设，我们现在引入这一假设。

8.21 定义 *Hilbert space*

Hilbert space 是一个内积空间，它在由内积所确定的范数下是一个巴拿赫空间。

8.22 示例 *Hilbert spaces*

- 设 μ 是一个测度。则 $L^2(\mu)$ 连同其通常的内积是一个希尔伯特空间（由 7.24）。
- 作为第一个要点的特例，如果 $n \in \mathbf{Z}^+$，则取 μ 为 $\{1, \ldots, n\}$ 上的计数测度，显示 $\mathbf{F}^n$ 及其常规内积是一个希尔伯特空间。
- 作为第一个要点的另一个特例，取 μ 为 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度可以证明 ℓ^2 及其 usual 内积是一个希尔伯特空间。
- 每个希尔伯特空间的闭子空间都是希尔伯特空间【由 6.16(b) 得出】。

8.23 示例 *not Hilbert spaces*

- 内积空间 ℓ^1，其中 $\langle (a_1、a_2、\ldots)、(b_1、b_2、\ldots) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$，不是一个希尔伯特空间，因为相应的范数在 ℓ^1 上不是完备的。
- 连续F值函数在区间[0, 1]上的内积空间$C([0, 1])$，其中$\langle f、g \rangle = \int_0^1 f g$，不是希尔伯特空间，因为关联的范数在$C([0, 1])$上不完备。

T下一个定义在赋范向量空间的语境下是有意义的 步伐。

8.24 定义 *distance from a point to a set*

假设 U 是一个带范数的向量空间 V 和 $f \in V$ 的非空子集。*distance* 从 f 到 U 的距离，记作 distance(f, U)，定义为

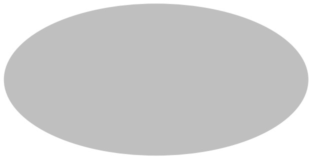
$$\text{distance}(f, U) = \inf\{\|f - g\| : g \in U\}.$$

注意到 distance$(f, U) = 0$ 当且仅当 $f \in U$。

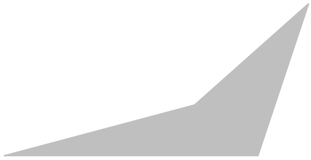
8.25 定义 *convex*

- 一个向量空间的子集称为 *convex*，如果该子集包含连接其中每一对点的线段。
- 更准确地说，假设 V 是一个向量空间，且 $U \subseteq V$。那么 U 被称为 *convex*，如果

$$(1-t)f + tg \in U \text{ for all } t \in [0,1] \text{ and all } f, g \in U.$$



Convex subset of $\mathbf{R}^2$.



Nonconvex subset of $\mathbf{R}^2$.

8.26 示例 *convex sets*

- 每个向量空间的子空间都是凸的，正如你应该验证的那样。
- 如果 V 是一个赋范向量空间，$f \in V$，并且 $r > 0$，那么以 f 为中心、半径为 r 的开球是凸的，正如你应该验证的那样。

下一个例子表明，从巴拿赫空间中的一个元素到某个闭子空间的距离，并不一定能由该闭子空间中的某个元素所达到。在这个例子之后，我们将证明这种现象在希尔伯特空间中不可能发生。

8.27 示例 *no closest element to a closed subspace of a Banach space*

在具有范数$\|g\| = \sup_{[0,1]} |g|$的巴拿赫空间$C([0, 1])$中，令

$$U = \Big\{ g \in C([0,1]) : \int_0^1 g = 0 \text{ and } g(1) = 0 \Big\}.$$

那么 U 是 $C([0, 1])$ 的一个闭子空间。

设 $f \in C([0, 1])$ 由 $f(x) = 1 - x$ 定义。对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，令

$$g_k(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{x^k}{2} + \frac{x-1}{k+1}.$$

于是 $g_k \in U$ 且 $\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\| = \frac{1}{2}$，这意味着 distance$(f, U) \le \frac{1}{2}$。

如果 $g \in U$，则 $\int_0^1 (f - g) = \frac{1}{2}$ 且 $(f - g)(1) = 0$。这些条件意味着 $\|f - g\| > \frac{1}{2}$。

因此，距离（f，U）$= \frac{1}{2}$，但不存在$g \in U$，使得$\|f - g\| = \frac{1}{2}$。

在下一结果中，我们首次使用假设 V 是一个希尔伯特空间。

8.28 ***distance to a closed convex set is attained in a Hilbert space***

- 从希尔伯特空间的一个元素到一个非空闭凸集的距离是由非空闭凸集中的唯一元素达到的。
- 更具体地说，假设 V 是一个希尔伯特空间，$f \in V$，且 U 是 V 的一个非空闭凸子集。那么，存在一个唯一的 $g \in U$，使得

$$\|f-g\| = \operatorname{distance}(f, U).$$

证明 首先我们证明存在一个元素 U，它达到与 f 的距离。为此，假设 g_1，g_2，... 是 U 中的一系列元素，使得

8.29
$$\lim_{k\to\infty} \|f-g_k\| = \operatorname{distance}(f, U).$$

然后对于 j，$k \in \mathbf{Z}^+$ 我们有

$$\begin{aligned}
\|g_j-g_k\|^2 &= \|(f-g_k)-(f-g_j)\|^2 \\
&= 2\|f-g_k\|^2 + 2\|f-g_j\|^2 - \|2f-(g_k+g_j)\|^2 \\
&= 2\|f-g_k\|^2 + 2\|f-g_j\|^2 - 4\Big\|f-\frac{g_k+g_j}{2}\Big\|^2
\end{aligned}$$

8.30
$$\le 2\|f-g_k\|^2 + 2\|f-g_j\|^2 - 4\big(\operatorname{distance}(f, U)\big)^2,$$

其中第二个等式来自平行四边形等式 (8.20)，最后一行成立是因为 U 的凸性意味着 $(g_k+g_j)/2 \in U$。现在，上述不等式和 8.29 暗示 g_1，g_2，... 是一个柯西序列。因此，存在 $g \in V$，使得

8.31
$$\lim_{k\to\infty} \|g_k-g\| = 0.$$

因为 U 是 V 的一个闭子集，并且每个 $g_k \in U$，我们知道 $g \in U$。现在 8.29 和 8.31 暗示了

$$\|f-g\| = \operatorname{distance}(f, U),$$

这完成了该结果存在性部分的证明。

为证明该结果的唯一性部分，假设 g 和 $\tilde{g}$ 是 U 的元素，使得

8.32
$$\|f-g\| = \|f-\tilde{g}\| = \operatorname{distance}(f, U).$$

然后

$$\|g-\tilde{g}\|^2 \le 2\|f-g\|^2 + 2\|f-\tilde{g}\|^2 - 4\big(\operatorname{distance}(f, U)\big)^2$$

8.33
$$= 0,$$

其中，上面的第一行由 8.30 推出（将 g_j 替换为 g，并将 g_k 替换为 $\tilde{g}$），而上面的最后一行由 8.32 推出。现在，8.33 蕴含 $g = \tilde{g}$，从而完成唯一性的证明。 ∎

例8.27 表明，前一结果中的存在性部分在巴拿赫空间中可能失效。练习13表明，唯一性部分在巴拿赫空间中也可能失效。这些观察突出了在希尔伯特空间中工作的优势。

8.34 定义 *orthogonal projection;* P_U

假设 U 是希尔伯特空间 V 的一个非空闭凸子集。V 到 U 的 *orthogonal projection* 是一个函数 $P_U : V \to V$，其定义为令 $P_U(f)$ 等于 U 中距离 f 最近的唯一元素。

上述定义之所以有意义，是由于 8.28。我们将经常使用记号 $P_U f$ 代替 $P_U(f)$。为检验你对上述定义的理解，请确保你能够证明：如果 U 是 Hilbert 空间 V 的一个非空闭凸子集，那么

- $P_U f = f$ 当且仅当 $f \in U$;
- $P_U \circ P_U = P_U$.

8.35 示例 *orthogonal projection onto closed unit ball*

设U是希尔伯特空间V中的闭单位球$\{g \in V : \|g\| \leq 1\}$。则

$$P_U f = \begin{cases} f & \text{if } \|f\| \leq 1, \\ \dfrac{f}{\|f\|} & \text{if } \|f\| > 1, \end{cases}$$

正如你应当核实的那样。

8.36 示例 *orthogonal projection onto a closed subspa ce*

设 U 是 ℓ^2 的闭子空间，由 ℓ^2 中所有偶数坐标均为 0 的元素组成：

$$U = \{(a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \ldots) : \text{each } a_k \in \mathbf{F} \text{ and } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|^2 < \infty\}.$$

那么，对于 $b = (b_1$、b_2、b_3、b_4、b_5、b_6、$\ldots) \in \ell^2$，我们有

$$P_U b = (b_1, 0, b_3, 0, b_5, 0, \ldots),$$

正如你应当核实的那样。

注意，在这个例子中，函数 P_U 是从 ℓ^2 到 ℓ^2 (的线性映射，这与例 8.35) 中的行为不同。

另外，注意到 $b - P_U b = (0, b_2, 0, b_4, 0, b_6, \ldots)$，因此 $b - P_U b$ 与 U 的每个元素都正交。

下一个结果表明，上述例子中最后两段所陈述的性质在 U 是希尔伯特空间的闭子空间时都成立。

8.37 *orthogonal projection onto closed subspace*

假设 U 是希尔伯特空间 V 和 $f \in V$ 的一个闭子空间。那么

(a) $f - P_U f$ 与 g 对于每个 $g \in U$ 都是正交的；

（b）如果对于每个 $g \in U$，$h \in U$ 和 $f - h$ 与 g 正交，则 $h = P_U f$；

(c) $P_U : V \to V$ 是一个线性映射；

(d) $\|P_U f\| \leq \|f\|$，且当且仅当 $f \in U$ 时取等号。

证明 下图说明了（a）。为了证明（a），假设 $g \in U$。然后对于所有 $\alpha \in \mathbf{F}$，我们有

$$\begin{aligned}\|f - P_U f\|^2 &\leq \|f - P_U f + \alpha g\|^2 \\ &= \langle f - P_U f + \alpha g, f - P_U f + \alpha g\rangle \\ &= \|f - P_U f\|^2 + |\alpha|^2\|g\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\overline{\alpha}\langle f - P_U f, g\rangle.\end{aligned}$$

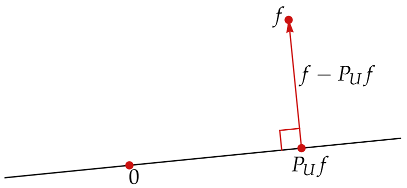
令 $\alpha = -t\langle f - P_U f、g\rangle$，对于 $t > 0$。对上述不等式稍作代数运算即可推出

$$2|\langle f - P_U f, g\rangle|^2 \leq t|\langle f - P_U f, g\rangle|^2\|g\|^2$$

对于所有 $t > 0$。因此 $\langle f - P_U f, g\rangle = 0$，完成 (a) 的证明。

为证明(b)，假设$h \in U$和$f - h$对每个$g \in U$都与g正交。如果$g \in U$，则$h - g \in U$，从而$f - h$与$h - g$正交。因此

$$\begin{aligned}\|f - h\|^2 &\leq \|f - h\|^2 + \|h - g\|^2 \\ &= \|(f - h) + (h - g)\|^2 \\ &= \|f - g\|^2,\end{aligned}$$



$f - P_U f$ is orthogonal to each element of U.

这个 fi 在哪里面的 rst 等式源自勾股定理（8.9） 因此

$$\|f - h\| \leq \|f - g\|$$

对于所有 $g \in U$，因此 h 是 U 中最小化与 f 的距离的元素，这意味着 $h = P_U f$，从而完成了 (b) 的证明。

为了证明(c)，假设f_1，$f_2 \in V$。如果$g \in U$，那么(a)意味着$\langle f_1 - P_U f_1$，$g\rangle = \langle f_2 - P_U f_2$，$g\rangle = 0$，因此

$$\langle (f_1 + f_2) - (P_U f_1 + P_U f_2), g\rangle = 0.$$

上述方程和 (b) 现在意味着

$$P_U(f_1 + f_2) = P_U f_1 + P_U f_2.$$

上面的等式以及关于 $\alpha \in \mathbf{F}$ 的等式 $P_U(\alpha f) = \alpha P_U f$（其证明留给读者）表明 P_U 是一个线性映射，从而证明了 (c)。

(d) 的证明留给读者作为练习。

正交补

8.38 定义 *orthogonal complement; $U^\perp$*

设 U 是内积空间 V 的一个子集。U 的 *orthogonal complement* 记为 $U^\perp$，并定义为

$$U^\perp = \{h \in V : \langle g, h\rangle = 0 \text{ for all } g \in U\}.$$

换言之，内积空间V的一个子集U的正交补是V中与U的每一个元素都正交的元素所构成的集合。

8.39 示例 *orthogonal complement*

设U是ℓ^2中其偶数坐标全为0的元素的集合：

$$U = \{(a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \ldots) : \text{each } a_k \in \mathbf{F} \text{ and } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|^2 < \infty\}.$$

那么，$U^\perp$ 是 ℓ^2 中所有奇数坐标均为 0 的元素的集合：

$$U^\perp = \{0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, \ldots) : \text{each } a_k \in \mathbf{F} \text{ and } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}|^2 < \infty\},$$

正如你应当核实的那样。

8.40 *properties of orthogonal complement*

设 U 是内积空间 V 的一个子集。则

(a) $U^\perp$ is a closed subspace of V;

(b) $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$;

(c) if $W \subseteq U$, then $U^\perp \subseteq W^\perp$;

(d) $\overline{U}^\perp = U^\perp$;

(e) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.

证明 为证明 (a)，设 $h_1, h_2, \ldots$ 是 $U^\perp$ 中的一个序列，且收敛到某个 $h \in V$。若 $g \in U$，则

$$|\langle g, h\rangle| = |\langle g, h - h_k\rangle| \leq \|g\|\,\|h - h_k\| \quad \text{for each } k \in \mathbf{Z}^+;$$

因此 $\langle g, h\rangle = 0$，这意味着 $h \in U^\perp$。因此 $U^\perp$ 是闭的。（a）的证明通过证明 $U^\perp$ 是 V 的一个子空间而完成，这留给读者。

为证明(b)，假设$g \in U \cap U^\perp$。则$\langle g,\ g\rangle = 0$，这意味着$g = 0$，从而证明(b)。

为证明 (e)，假设 $g \in U$。因此 $\langle g$，并且对所有 $h \in U^\perp$，$h\rangle = 0$，这意味着 $g \in (U^\perp)^\perp$。因此 $U \subseteq (U^\perp)^\perp$，从而证明 (e)。

(c) 和 (d) 的证明留给读者。 ■

本小节其余部分中的结果以 V 是一个希尔伯特空间为假设。当 V 仅是一个内积空间时，这些结果不成立。

8.41 ***orthogonal complement of the orthogonal complement***

假设 U 是希尔伯特空间 V 的一个子空间。那么

$$\overline{U} = (U^\perp)^\perp.$$

证明 将 8.40(a) 应用于 $U^\perp$，可见 $(U^\perp)^\perp$ 是 V 的一个闭子空间。现在对包含关系 $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ 的两边取闭包 [8.40(e)]，可得 $\overline{U} \subseteq (U^\perp)^\perp$。

为了证明反向的包含关系，假设 $f \in (U^\perp)^\perp$。由于 $f \in (U^\perp)^\perp$ 且 $P_{\overline{U}} f \in \overline{U} \subseteq (U^\perp)^\perp$（（由前一段)），我们看到

$$f - P_{\overline{U}} f \in (U^\perp)^\perp.$$

此外，

$$f - P_{\overline{U}} f \in U^\perp$$

由 8.37(a) 和 8.40(d) 可得。因此

$$f - P_{\overline{U}} f \in U^\perp \cap (U^\perp)^\perp.$$

现在，由8.40(b)（用$U^\perp$代替U来应用）可推出$f - P_{\overline{U}} f = 0$，从而推出 $f \in \overline{U}$。因此，$(U^\perp)^\perp \subseteq \overline{U}$，从而完成证明。 ■

作为一个特例，上述结果表明，如果U是希尔伯特空间V的一个闭子空间，那么$U = (U^\perp)^\perp$。

另一个上述结果的特例足够有用，值得单独陈述，正如我们在下一个结果中所做的那样。

8.42 ***necessary and sufficient condition for a subspace to be dense***

设 U 是希尔伯特空间 V 的一个子空间。则

$$\overline{U} = V \text{ if and only if } U^\perp = \{0\}.$$

证明 首先假设 $\overline{U} = V$。然后利用 8.40(d)，我们有

$$U^\perp = \overline{U}^\perp = V^\perp = \{0\}.$$

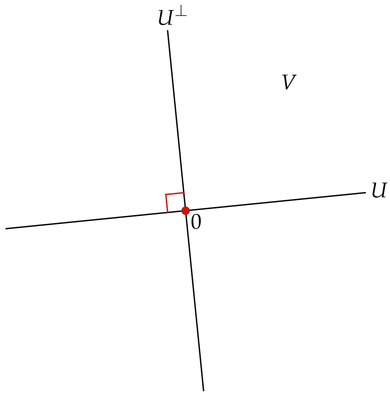
为了证明另一个方向，现在假设 $U^\perp = \{0\}$。那么 8.41 表明

$$\overline{U} = (U^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = V,$$

完成证明。 ■

下一个结果指出，如果U是希尔伯特空间V的闭子空间，那么V是U和$U^\perp$的*direct sum*，通常写作$V = U \oplus U^\perp$，尽管我们不需要进一步使用这种术语或符号。

需要记住的关键点是，接下来的结果显示，图像在这里表示希尔伯特空间 V 的一个闭子空间 U 中通常发生的情况：V 的每个元素都可以唯一地写成 U 的一个元素加上 $U^\perp$ 的一个元素。



8.43 *orthogonal decomposition*

设 U 是希尔伯特空间 V 的一个闭子空间。则每个元素 $f \in V$ 都可以唯一地写成如下形式

$$f = g + h,$$

其中 $g \in U$ 和 $h \in U^\perp$。此外，$g = P_U f$ 和 $h = f - P_U f$。

证明 假设 $f \in V$。则

$$f = P_U f + (f - P_U f),$$

其中 $P_U f \in U$［由 $P_U f$ 的定义，即作为 U 中距离 f 最近的元素］，且 $f - P_U f \in U^\perp$［由 8.37(a)］。因此，我们得到了所需的分解：f 可表示为 U 的一个元素与 $U^\perp$ 的一个元素之和。

为了证明该分解的唯一性，假设

$$f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2,$$

其中 g_1、$g_2 \in U$ 以及 h_1、$h_2 \in U^\perp$。于是 $g_1 - g_2 = h_2 - h_1 \in U \cap U^\perp$，这意味着 $g_1 = g_2$ 和 $h_1 = h_2$，如所期望。 ■

在下一个定义中，函数 I 依赖于向量空间 V。因此，像 I_V 这样的符号可能更为精确。然而，I 的定义域应始终从上下文中清楚地得出。

8.44 定义 *identity map; I*

设 V 是一个向量空间。*identity map* I 是从 V 到 V 的线性映射，由 $If = f$ 对 $f \in V$ 定义。

下一个结果强调了正交投影与正交补之间的密切关系。

8.45 *range and null space of orthogonal projections*

设 U 是希尔伯特空间 V 的一个闭子空间。则

(a) 范围 $P_U = U$ 和 空值 $P_U = U^{\perp}$; (b)
范围 $P_{U^{\perp}} = U^{\perp}$ 和 空值 $P_{U^{\perp}} = U$; (c)
$P_{U^{\perp}} = I - P_U$.

证明 将$P_U f$定义为U中距离f最近的点，意味着范围$P_U \subseteq U$。因为$P_U g = g$对所有$g \in U$成立，我们也得到$U \subseteq$的范围P_U。因此范围$P_U = U$。

若 $f \in$ 为零 P_U，则 $f \in U^{\perp}$（由 8.37(a)）。因此 $P_U \subseteq U^{\perp}$ 为零。反之，若 $f \in U^{\perp}$，则 8.37(b)（其中 h ==0）推出 $P_U f$ ==0；因此 $U^{\perp} \subseteq$ 为零 P_U。因此 $P_U = U^{\perp}$ 为零，从而完成 (a) 的证明。

在(a)中将U替换为$U^{\perp}$，得到值域$P_{U^{\perp}} = U^{\perp}$和零空间$P_{U^{\perp}} = (U^{\perp})^{\perp} = U$(，其中最后一个等式来自8.41)，从而完成了(b)的证明。

最后，如果 $f \in U$，那么

$$P_{U^{\perp}} f = 0 = f - P_U f = (I - P_U) f,$$

其中，上述第一个等式成立是因为 null $P_{U^{\perp}} = U$［由 (b)］。如果 $f \in U^{\perp}$，则

$$P_{U^{\perp}} f = f = f - P_U f = (I - P_U) f,$$

瓦晦在……之前，上述第二个等式成立，因为 $P_U = U^{\perp}$ 为零 [由(a)].

最后两个显示的方程表明，$P_{U^{\perp}}$ 和 $I - P_U$ 在 U 上一致，并且在 $U^{\perp}$ 上一致。由于 $P_{U^{\perp}}$ 和 $I - P_U$ 都是线性映射，并且由于 V 的每个元素都等于 U 的某个元素加上 $U^{\perp}$ (的某个元素，根据 8.43)，这意味着 $P_{U^{\perp}} = I - P_U$，从而完成了 (c) 的证明。 ■

8.46 示例 $P_{U^{\perp}} = I - P_U$

设 U 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个闭子空间，定义为

$$U = \{f \in L^2(\mathbf{R}) : f(x) = 0 \text{ for almost every } x < 0\}.$$

然后，正如你应当验证的那样，

$$U^{\perp} = \{g \in L^2(\mathbf{R}) : g(x) = 0 \text{ for almost every } x \geq 0\}.$$

此外，你还应当验证，如果 $h \in L^2(\mathbf{R})$，那么

$$P_U h = h\chi_{[0,\,\infty)} \quad \text{and} \quad P_{U^{\perp}} h = h\chi_{(-\infty,\,0)}.$$

因此 $P_{U^{\perp}} h = h(1 - \chi_{[0,\,\infty)}) = (I - P_U)h$，从而 $P_{U^{\perp}} = I - P_U$，正如 8.45(c) 中所断言的。

里斯表示定理

假设 h 是希尔伯特空间 V 的元素。定义 $\varphi: V \to \mathbf{F}$ 由 $\varphi(f) = \langle f, h\rangle$ 对 $f \in V$ 。内积的性质意味着 φ 是一个线性泛函。柯西–施瓦茨不等式 (8.11) 表明 $|\varphi(f)| \leq \|f\|\,\|h\|$ 对所有 $f \in V$ 成立，这意味着 φ 是 V 上的有界线性泛函。下一个结果表明，每个 V 上的有界线性泛函都以这种方式产生。

为了引出下一个结果的证明，注意到如果 φ 如上段所述，那么 null $\varphi = \{h\}^{\perp}$。因此 $h \in (\text{null}\,\varphi)^{\perp}$ ［由 8.40(e)］。因此在下一个结果的证明中，为了找到 h，我们从 $(\text{null}\,\varphi)^{\perp}$ 中取一个元素，然后将其乘以一个标量，使一切都正确。

8.47 *Riesz Representation Theorem*

设 φ 是希尔伯特空间 V 上的一个有界线性泛函。则存在唯一的 $h \in V$ 使得

$$\varphi(f) = \langle f, h\rangle$$

对于所有 $f \in V$。此外，$\|\varphi\| = \|h\|$。

证明 如果 $\varphi = 0$, 取 $h = 0$. 因此我们可以假设 $\varphi \neq 0$. 由此，零空间 φ 是 V 的一个闭合子空间，且不等于 V (，参见 6.52). 子空间 (零空间 $\varphi)^{\perp}$ 不为 $\{0\}$ (，由 8.42). 因此存在 $g \in$ (零空间 $\varphi)^{\perp}$，且 $\|g\| = 1$. 设

$$h = \overline{\varphi(g)}g.$$

对上式两边取范数，我们得到 $\|h\| = |\varphi(g)|$。因此

8.48 $$\varphi(h) = |\varphi(g)|^2 = \|h\|^2.$$

现在假设$f \in V$。则

$$\langle f, h\rangle = \left\langle f - \frac{\varphi(f)}{\|h\|^2}h, h\right\rangle + \left\langle \frac{\varphi(f)}{\|h\|^2}h, h\right\rangle$$

8.49 $$= \left\langle \frac{\varphi(f)}{\|h\|^2}h, h\right\rangle$$

$$= \varphi(f),$$

哪里8.49成立，因为$f - \frac{\varphi(f)}{\|h\|^2}h$ ~~∈~~是null φ (由8.48)得出，并且h与null φ的所有元素正交。

我们现在已经证明了存在 $h \in V$，使得对所有 $f \in V$，$\varphi(f) = \langle f, h\rangle$。为证明唯一性，假设 $\tilde{h} \in V$ 具有相同的性质。那么

$$\langle h - \tilde{h}, h - \tilde{h}\rangle = \langle h - \tilde{h}, h\rangle - \langle h - \tilde{h}, \tilde{h}\rangle = \varphi(h - \tilde{h}) - \varphi(h - \tilde{h}) = 0,$$

这意味着 $h = \tilde{h}$，这证明了唯一性。

柯西–施瓦茨不等式意味着 $|\varphi(f)| = |\langle f, h\rangle| \leq \|f\|\,\|h\|$ 对所有 $f \in V$ 成立，这意味着 $\|\varphi\| \leq \|h\|$。由于 $\varphi(h) = \langle h, h\rangle = \|h\|^2$，我们也有 $\|\varphi\| \geq \|h\|$。因此 $\|\varphi\| = \|h\|$，证明完成。 ■

Frigyes Riesz (1880–1956) proved 8.47 in 1907.

设 μ 是一个测度，且 $1 < p \leq \infty$。在 7.25 中我们考虑了 $L^{p'}(\mu)$ 到 $(L^p(\mu))'$ 的自然映射，并且我们证明了这个映射保持范数。在 $p = p' = 2$ 的特殊情形下，Riesz 表示定理（8.47）表明该映射是满射的。换言之，若 φ 是定义在 $L^2(\mu)$ 上的有界线性泛函，则存在 $h \in L^2(\mu)$ 使得

$$\varphi(f) = \int fh\,d\mu$$

对于所有 $f \in L^2(\mu)$ (，取 h 为由 8.47) 给出的函数的复共轭。因此我们可以将 $L^2(\mu)$ 的对偶与 $L^2(\mu)$ 认同。在 9.42 中我们将处理 p 的其他取值。另见本节的练习 25。

练习 8B

1 证明例 8.23 中的每一个内积空间都不是希尔伯特空间。

2 证明或反驳：第 8A 节练习 1 中的内积空间是一个希尔伯特空间。

3 假设 $V_1, V_2, \ldots$ 是希尔伯特空间。令

$$V = \Big\{(f_1, f_2, \ldots) \in V_1 \times V_2 \times \cdots : \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2 < \infty\Big\}.$$

证明该方程

$$\langle (f_1, f_2, \ldots), (g_1, g_2, \ldots) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k, g_k \rangle$$

在V上定义了一个内积，使得V成为一个希尔伯特空间。
[*Each of the Hilbert spaces* $V_1, V_2, \ldots$ *may have a different inner product, even though the same notation is used for the norm and inner product on all these Hilbert spaces.*]

4 假设 V 是一个实 Hilbert 空间。V 的 *complexification* 是由 $V_{\mathbf{C}} = V \times V$ 定义的复向量空间 $V_{\mathbf{C}}$，但我们将 $V_{\mathbf{C}}$ 的一个典型元素记为 $f + ig$，而不是 (f, g)。在 $V_{\mathbf{C}}$ 上的加法和标量乘法定义为

$$(f_1 + ig_1) + (f_2 + ig_2) = (f_1 + f_2) + i(g_1 + g_2)$$

和

$$(\alpha + i\beta)(f + ig) = (\alpha f - \beta g) + i(\alpha g + \beta f)$$

对于 f_1、f_2、f、g_1、g_2、$g \in V$ 以及 α、$\beta \in \mathbf{R}$。证明

$$\langle f_1 + ig_1, f_2 + ig_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle g_1, g_2 \rangle + i(\langle g_1, f_2 \rangle - \langle f_1, g_2 \rangle)$$

在 $V_{\mathbf{C}}$ 上定义了一个内积，使 $V_{\mathbf{C}}$ 成为一个复希尔伯特空间。

5 证明：如果 V 是一个赋范向量空间，$f \in V$，并且 $r > 0$，则以 f 为中心、半径为 r 的开球 $B(f，r)$ 是凸的。

6 (a) 假设 V 是一个内积空间，B 是 V (中的开单位球，因此 $B = \{f \in V : \|f\| < 1\}$)。证明:_ 如果 U 是 V 的一个子集，并且满足 $B \subseteq U \subseteq B$，那么 U 是凸的。(b) 给出一个例子，说明如果将短语 *inner product space* 替换为 *Banach space*，则 (a) 可能不成立。

7 假设 V 是一个赋范向量空间，U 是 V 的一个闭子集。证明 U 是凸的当且仅当

$$\frac{f+g}{2} \in U \text{ for all } f, g \in U.$$

8 证明：如果U是赋范向量空间的一个凸子集，那么U也是凸的。 —

9 证明：如果U是赋范向量空间的一个凸子集，那么U的内部也是凸的。

[*The interior of U is the set $\{f \in U : B(f, r) \subseteq U$ for some $r > 0\}$.*]

10 假设 V 是一个希尔伯特空间，U 是 V 的一个非空闭凸子集，并且 $g \in U$ 是 U 中范数最小的唯一元素（通过在 8.28 中取 $f =$ 为 0 得到）。证明:

$$\operatorname{Re}\langle g, h\rangle \geq \|g\|^2$$

对于所有 $h \in U$。

假设 V 是一个希尔伯特空间。*closed half-space* 的 V 是一种形式的集合

$$\{g \in V : \operatorname{Re}\langle g, h\rangle \geq c\}$$

对于某个 $h \in V$ 以及某个 $c \in \mathbf{R}$。证明 V 的每一个闭凸子集都是所有包含它的闭半空间的交集。

12 给出希尔伯特空间 ℓ^2 的一个非空闭子集 U 和 $a \in \ell^2$ 的一个例子，使得不存在 $b \in U$ 使得 $\|a - b\| =$ distance(a, U). [
By 8.28, U cannot be a convex subset of ℓ^2.]

13 在实 Banach 空间 $\mathbf{R}^2$ 中，其范数由 $\|(x$ 定义，$y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$，给出一个闭凸集 $U \subseteq \mathbf{R}^2$ 和 $z \in \mathbf{R}^2$ 的例子，使得存在无限多种 $w \in U$ 的选择，满足 $\|z - w\|_\infty =$ distance(z, U)。

14 假设 f 和 g 是一个内积空间的元素。证明 $\langle f, g\rangle = 0$ 当且仅当

$$\|f\| \leq \|f + \alpha g\|$$

对所有 $\alpha \in \mathbf{F}$。

15 设 U 是希尔伯特空间 V 的一个闭子空间，且 $f \in V$。证明 $\|P_U f\| \leq \|f\|$，并且当且仅当 $f \in U$ 时取等号。[*This exercise asks you to prove 8.37(d).*]

假设 V 是一个希尔伯特空间，且 $P: V \to V$ 是一个线性映射，使得 $P^2 = P$ 和 $\|Pf\| \le \|f\|$ 对每个 $f \in V$ 都成立。证明存在一个 V 的闭子空间 U，使得 $P = P_U$。

17 假设 U 是希尔伯特空间 V 的一个子空间。假设 W 是一个巴拿赫空间，并且 $S: U \to W$ 是一个有界线性映射。证明存在一个有界线性映射 $T: V \to W$，使得 $T|_U = S$ 和 $\|T\| = \|S\|$。

[*If* $W = \mathbf{F}$, *then this result is just the Hahn–Banach Theorem* (6.69) *for Hilbert spaces. The result here is stronger because it allows* W *to be an arbitrary Banach space instead of requiring* W *to be* $\mathbf{F}$. *Also, the proof in this Hilbert space context does not require use of Zorn's Lemma or the Axiom of Choice.*]

假设 U 和 W 是希尔伯特空间 V 的子空间。证明 $U = W$ 当且仅当 $U^{\perp} = W^{\perp}$。

19 设 U 和 W 是一个希尔伯特空间的闭子空间。证明：$P_U P_W = 0$ 当且仅当对所有 $f \in U$ 和所有 $g \in W$，$\langle f,\ g\rangle = 0$。

20 验证例 8.46 中的断言。

21 Sh 证明每个内积空间都是某个希尔伯特空间的子空间 t 空间。

Hint: 请参见第6C节中的练习13。

22 证明：如果 V 是一个希尔伯特空间，并且 $T: V \to V$ 是一个有界线性映射，使得值域 T 的维数为 1，则存在 g、$h \in V$ 使得

$$Tf = \langle f, g\rangle h$$

对于所有 $f \in V$。

23 (a) 给出一个巴拿赫空间 V 和一个有界线性泛函 φ，它作用于 V，使得对于所有 $f \in V \setminus \{0\}$，都有 $|\varphi(f)| < \|\varphi\|\,\|f\|$。

(b) 证明在 (a) 部分中不存在一个例子，其中 V 是一个希尔伯特空间。

24（a）设 φ 和 ψ 是希尔伯特空间 V 上的有界线性泛函，且 $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$。证明 φ 与 ψ 中的一个是另一个的标量倍。

(b) 给出一个例子，说明如果将V是希尔伯特空间这一假设替换为V是巴拿赫空间这一假设，则(a)可能不成立。

25 (a) 假设 μ 是一个有限测度，$1 \le p \le 2$，并且 φ 是定义在 $L^p(\mu)$ 上的有界线性泛函。证明存在 $h \in L^{p'}(\mu)$，使得对每个 $f \in L^p(\mu)$ 都有 $\varphi(f) = \int fh\, d\mu$。

(b) 同(a)，但将 μ 是有限测度的假设替换为 μ 是一个测度的假设，并假设 $1 < p \le 2$。

[*See 7.25, which along with this exercise shows that we can identify the dual of* $L^p(\mu)$ *with* $L^{p'}(\mu)$ *for* $1 < p \le 2$. *See 9.42 for an extension to all* $p \in (1, \infty)$.]

26 证明：如果 V 是一个无限维希尔伯特空间，那么巴拿赫空间 $\mathcal{B}(V,\ V)$ 是不可分的。

8C 正交归一基

贝塞尔不等式

回忆，在集合 V 中的一个 *family* $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是一个函数 e，从集合 Γ 到 V，函数 e 在 $k\in\Gamma$ 处的取值记为 e_k (见 6.53)。

8.50 定义 *orthonormal family*

在一个内积空间中的一个族 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 被称为一个 *orthonormal family*，如果

$$\langle e_j, e_k\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } j\neq k,\\ 1 & \text{if } j=k \end{cases}$$

对于所有 $j,k\in\Gamma$。

换句话说，如果对于所有不同的 $j,k\in\Gamma$，e_j 和 e_k 都是正交的，并且对于所有 $k\in\Gamma$，$\|e_k\|=$ 为 1，那么族 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是一个正交归一族。

8.51 示例 *orthonormal families*

- 对于 $k\in\mathbf{Z}^+$，令 e_k 为 ℓ^2 中的元素，其所有坐标均为 0，除了 k^{th} 坐标，其值为 1:

  $$e_k=(0,\dots,0,1,0,\dots).$$

  那么 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 是 ℓ^2 中的正交归一族。在这种情况下，我们的族是一个序列；因此我们可以称 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 为 *orthonormal sequence*。

- 更一般地，假设 Γ 是一个非空集合。Hilbert 空间 $L^2(\mu)$，其中 μ 是 Γ 上的计数测度，通常记作 $\ell^2(\Gamma)$。对于 $k\in\Gamma$，定义一个函数 $e_k:\Gamma\to\mathbf{F}$ 为

  $$e_k(j)=\begin{cases} 1 & \text{if } j=k,\\ 0 & \text{if } j\neq k.\end{cases}$$

  那么 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 $\ell^2(\Gamma)$ 中的一个正交归一族。

- 对于 $k\in\mathbf{Z}$，定义 $e_k:(-\pi,\pi]\to\mathbf{R}$ 为

  $$e_k(t)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt) & \text{if } k>0,\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{if } k=0,\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt) & \text{if } k<0.\end{cases}$$

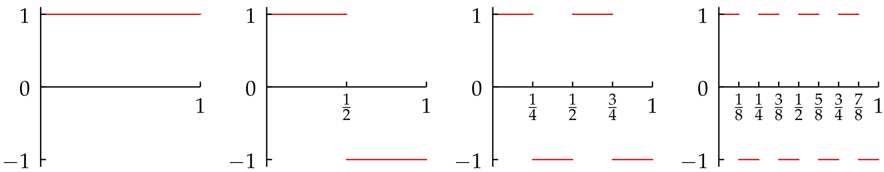
  那么 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是在 $L^2\big((-\pi,\pi]\big)$ 中的一个正交规范族，正如你应该验证的那样（参见练习 1，其中给出了有助于进行该验证的有用公式）。这个正交归一族 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 引出了傅里叶级数的经典理论，正如我们将在第 11章中更深入地看到的那样。

- 对于k为非负整数，定义$e_k : [0, 1) \to \mathbf{F}$ 为

$$e_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \left[\frac{n-1}{2^k}, \frac{n}{2^k}\right) \text{ for some odd integer } n, \\ -1 & \text{if } x \in \left[\frac{n-1}{2^k}, \frac{n}{2^k}\right) \text{ for some even integer } n. \end{cases}$$

下图展示了 e_0、e_1、e_2 和 e_3 的图像。这些图像的模式应当使你确信 $\{e_k\}_{k\in\{0,1,\ldots\}}$ 是 $L^2([0, 1))$ 中的一个正交归一族。

This orthonormal family was invented by Hans Rademacher (1892–1969).



The graph of e_0. *The graph of e_1.* *The graph of e_2.* *The graph of e_3.*

- 现在我们通过将前一条要点中的函数翻译为任意整数来修改前一条要点中的示例。具体来说，对于k 一个非负整数和$m \in \mathbf{Z}$，定义$e_{k,m} : \mathbf{R} \to \mathbf{F}$如下：

$$e_{k,m}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \left[m + \frac{n-1}{2^k}, m + \frac{n}{2^k}\right) \text{ for some odd integer } n \in [1, 2^k], \\ -1 & \text{if } x \in \left[m + \frac{n-1}{2^k}, m + \frac{n}{2^k}\right) \text{ for some even integer } n \in [1, 2^k], \\ 0 & \text{if } x \notin [m, m+1). \end{cases}$$

那么 $\{e_{k,m}\}_{(k,m)\in\{0,1,\ldots\}\times\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一个正交归一族。
这个例子说明了考虑非序列的族是有用的。尽管 $\{0, 1, \ldots\} \times \mathbf{Z}$ 是一个可数集，因此我们可以将 $\{e_{k,m}\}_{(k,m)\in\{0,1,\ldots\}\times\mathbf{Z}}$ 重写为一个序列，但这样做会显得笨拙，也不如 $e_{k,m}$ 这种记号来得简洁。

接下来的结果给出了我们为什么正交归一家族如此有用的第一个指示。

8.52 *finite orthonormal families*

设 Ω 是一个有限集合，且 $\{e_j\}_{j\in\Omega}$ 是内积空间中的一族正交归一族。则

$$\Big\|\sum_{j\in\Omega} \alpha_j e_j\Big\|^2 = \sum_{j\in\Omega} |\alpha_j|^2$$

对于 $\mathbf{F}$ 中的每个家庭 $\{\alpha_j\}_{j\in\Omega}$。

证明 假设 $\{\alpha_j\}_{j\in\Omega}$ 是 F 中的一个族。内积的标准性质表明

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j\in\Omega}\alpha_j e_j\Big\|^2 &= \Big\langle \sum_{j\in\Omega}\alpha_j e_j, \sum_{k\in\Omega}\alpha_k e_k\Big\rangle\\ &= \sum_{j,k\in\Omega}\alpha_j\overline{\alpha_k}\langle e_j, e_k\rangle\\ &= \sum_{j\in\Omega}|\alpha_j|^2,\end{aligned}$$

如所愿。■

设 Ω 是一个有限集，且 $\{e_j\}_{j\in\Omega}$ 是内积空间中的一个正交规范族。上述结果表明，如果 $\sum_{j\in\Omega}\alpha_j e_j = 0$，则对每个 $j\in\Omega$，$\alpha_j = 0$。

线性代数，以及更一般的代数，只处理有限项的求和。然而，在分析中我们常常希望对无限多项求和。例如，之前我们将赋范向量空间中一个序列 g_1, g_2, …… 的无穷和定义为部分和 $\sum_{k=1}^n g_k$ 在 $n\to\infty$ 时的极限（如果该极限存在）（见 6.40）。

下面的定义刻画了一种处理无限和的更为强大的方法。下面定义的和称为一个 *unordered sum*，因为集合 Γ 并不假定带有任何顺序。有限的无序和以显然的方式定义。

8.53 定义 *unordered sum;* $\sum_{k\in\Gamma} f_k$

设 $\{f_k\}_{k\in\Gamma}$ 是赋范向量空间 V 中的一个族。若存在 $g\in V$，使得对每个 $\varepsilon>0$，都存在 Γ 的一个有限子集 Ω，则称 *unordered sum* $\sum_{k\in\Gamma} f_k$ *converge*，使得

$$\Big\|g-\sum_{j\in\Omega'} f_j\Big\| < \varepsilon$$

对于所有满足$\Omega\subseteq\Omega'\subseteq\Gamma$的有限集合$\Omega'$。如果发生这种情况，我们设定$\sum_{k\in\Gamma} f_k = g$。如果不存在这样的$g\in V$，则$\sum_{k\in\Gamma} f_k$保持未定义。

本节末尾的练习要求你建立无序求和的基本性质，包括以下内容:

- 假设 $\{a_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 R 中的一个族，并且对每个 $k\in\Gamma$ 都有 $a_k\geq 0$。则无序和 $\sum_{k\in\Gamma} a_k$ 收敛当且仅当

$$\sup\Big\{\sum_{j\in\Omega} a_j : \Omega \text{ is a finite subset of } \Gamma\Big\} < \infty.$$

  此外，如果 $\sum_{k\in\Gamma} a_k$ 收敛，则它等于上述上确界。若 $\sum_{k\in\Gamma} a_k$ 不收敛，则上述上确界为 ∞，并记为 $\sum_{k\in\Gamma} a_k = \infty$ (；这种记号仅应在对每个 $k\in\Gamma$) 都有 $a_k\geq 0$ 时使用。

- 设 $\{a_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 R 中的一个族。那么无序和 $\sum_{k\in\Gamma} a_k$ 当且仅当 $\sum_{k\in\Gamma}|a_k| < \infty$ 时收敛。因此，R 中无序求和的收敛性等同于绝对收敛。正如我们将要看到的，在更一般的希尔伯特空间中情况大不相同。

现在我们可以将 8.52 推广到无穷和。

8.54 *linear combinations of an orthonormal family*

设$\{e_k\}_{k\in\Gamma}$是希尔伯特空间V中的一个正交规范族。设$\{\alpha_k\}_{k\in\Gamma}$是F中的一个族。则

(a) $$\text{the unordered sum } \sum_{k\in\Gamma} \alpha_k e_k \text{ converges} \iff \sum_{k\in\Gamma}|\alpha_k|^2 < \infty.$$

此外，如果 $\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k e_k$ 收敛，那么

(b) $$\Big\|\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k e_k\Big\|^2 = \sum_{k\in\Gamma}|\alpha_k|^2.$$

证明 首先假设 $\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k e_k$ 收敛，以 $\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k e_k = g$ 为极限。假设 $\varepsilon > 0$。则存在一个有限集 $\Omega \subseteq \Gamma$ 使得

$$\Big\|g - \sum_{j\in\Omega'} \alpha_j e_j\Big\| < \varepsilon$$

对于所有具有 $\Omega \subseteq \Omega' \subseteq \Gamma$ 的有限集合 Ω'。如果 Ω' 是具有 $\Omega \subseteq \Omega' \subseteq \Gamma$ 的有限集合，则上述不等式意味着：

$$\|g\| - \varepsilon < \Big\|\sum_{j\in\Omega'} \alpha_j e_j\Big\| < \|g\| + \varepsilon,$$

这（利用 8.52）意味着

$$\|g\| - \varepsilon < \Big(\sum_{j\in\Omega'} |\alpha_j|^2\Big)^{1/2} < \|g\| + \varepsilon.$$

因此 $\|g\| = \big(\sum_{k\in\Gamma}|\alpha_k|^2\big)^{1/2}$，完成了(a)的一个方向的证明以及(b)的证明。

为证明(a)的另一方向，现假设$\sum_{k\in\Gamma}|\alpha_k|^2 < \infty$。因此，存在一个由$\Gamma$的有限子集组成的递增序列$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \cdots$，使得对每个$m \in \mathbf{Z}^+$，

8.55 $$\sum_{j\in\Omega'\setminus\Omega_m} |\alpha_j|^2 < \frac{1}{m^2}$$

对于每个满足 $\Omega_m \subseteq \Omega' \subseteq \Gamma$ 的有限集合 Ω'。对于每个 $m \in \mathbf{Z}^+$，令

$$g_m = \sum_{j\in\Omega_m} \alpha_j e_j.$$

如果 $n > m$，那么 8.52 表明

$$\|g_n - g_m\|^2 = \sum_{j \in \Omega_n \setminus \Omega_m} |\alpha_j|^2 < \frac{1}{m^2}.$$

因此 g_1，g_2，$\cdots$ 是一个柯西序列，因此收敛到 V 中的某个元素 g。暂时固定 $m \in \mathbf{Z}^+$ 并将上式的极限取为 $n \to \infty$，我们可以看到

$$\|g - g_m\| \leq \frac{1}{m}.$$

为证明 $\sum_{k \in \Gamma} \alpha_k e_k = g$，假设 $\varepsilon > 0$。设 $m \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $\frac{2}{m} < \varepsilon$。假设 Ω' 是一个有限集合，且 $\Omega_m \subseteq \Omega' \subseteq \Gamma$。那么

$$\begin{aligned}
\Big\| g - \sum_{j \in \Omega'} \alpha_j e_j \Big\| &\leq \|g - g_m\| + \Big\| g_m - \sum_{j \in \Omega'} \alpha_j e_j \Big\| \\
&\leq \frac{1}{m} + \Big\| \sum_{j \in \Omega' \setminus \Omega_m} \alpha_j e_j \Big\| \\
&= \frac{1}{m} + \Big(\sum_{j \in \Omega' \setminus \Omega_m} |\alpha_j|^2 \Big)^{1/2} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

其中第三行来自 8.52，最后一行来自 8.55。因此 $\sum_{k \in \Gamma} \alpha_k e_k = g$，完成证明。■

8.56 示例 *a convergent unordered sum need not converge absolutely*

假设 $\{e_k\}_{k \in \mathbf{Z}^+}$ 是 ℓ^2 中的正交规范族，通过将 e_k 设置为除 k^{th} 位置上的 1 外，其他位置都为 0 的序列来定义。则根据 8.54，无序和

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^+} \tfrac{1}{k} e_k$$

在ℓ^2 (中收敛，因为$\sum_{k \in \mathbf{Z}^+} \frac{1}{k^2} < \infty$)，尽管$\sum_{k \in \mathbf{Z}^+} \|\frac{1}{k} e_k\| = \infty$。注意 $\sum_{k \in \mathbf{Z}^+} \frac{1}{k} e_k = (1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ldots) \in \ell^2$。

现在我们证明一个重要的不等式。

8.57 *Bessel's inequality*

假设 $\{e_k\}_{k \in \Gamma}$ 是内积空间 V 和 $f \in V$ 中的一个正交规范族。那么

$$\sum_{k \in \Gamma} |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

证明 假设 Ω 是 Γ 的一个有限子集。则

$$f = \sum_{j\in\Omega}\langle f, e_j\rangle e_j + \Big(f - \sum_{j\in\Omega}\langle f, e_j\rangle e_j\Big),$$

其中，上述第一个求和与上述括号中的项正交（如你应当自行验证）。

Bessel's inequality is named in honor of Friedrich Bessel (1784–1846), who discovered this inequality in 1828 in the special case of the trigonometric orthonormal family given by the third bullet point in Example 8.51.

将勾股定理（8.9）应用于上述方程可得

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \Big\|\sum_{j\in\Omega}\langle f, e_j\rangle e_j\Big\|^2 + \Big\|f - \sum_{j\in\Omega}\langle f, e_j\rangle e_j\Big\|^2\\ &\geq \Big\|\sum_{j\in\Omega}\langle f, e_j\rangle e_j\Big\|^2\\ &= \sum_{j\in\Omega}|\langle f, e_j\rangle|^2,\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 8.52 得出。由于上述不等式对每个有限集合 $\Omega \subseteq \Gamma$ 都成立，我们由此可得 $\|f\|^2 \geq \sum_{k\in\Gamma}|\langle f、e_k\rangle|^2$，如所期望的。 ■

回忆一下，在向量空间中，一族 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 的张成是由如下形式的有限和构成的集合

$$\sum_{j\in\Omega}\alpha_j e_j,$$

其中 Ω 是 Γ 的一个有限子集，而 $\{\alpha_j\}_{j\in\Omega}$ 是 F 中的一个族（见 6.54）。贝塞尔不等式现在使我们能够证明下面这个优美的结果，表明一个正交规范族的张成的闭包是由无穷和组成的集合。

8.58 *closure of the span of an orthonormal family*

设 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是希尔伯特空间 V 中的一个正交归一族。则

(a) $\overline{\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\Gamma}} = \Big\{\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k e_k : \{\alpha_k\}_{k\in\Gamma} \text{ is a family in } \mathbf{F} \text{ and } \sum_{k\in\Gamma}|\alpha_k|^2 < \infty\Big\}.$

Furthermore,

(b) $$f = \sum_{k\in\Gamma}\langle f, e_k\rangle e_k$$

对于每个 $f \in \overline{跨度\ \{e_k\}_{k\in\Gamma}}$。

证明 上述(a)右侧之所以有意义，是因为8.54(a)。此外，上述(a)的右侧是V的一个子空间，因为$\ell^2(\Gamma)$［其等于$\mathcal{L}^2(\mu)$，其中μ是Γ上的计数测度］对加法以及以7.5为标量的数乘封闭。

首先假设 $\{\alpha_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 F 中的一个族，且 $\sum_{k\in\Gamma}|\alpha_k|^2 < \infty$。令 $\varepsilon > 0$。则存在 Γ 的一个有限子集 Ω，使得

$$\sum_{j\in\Gamma\setminus\Omega} |\alpha_j|^2 < \varepsilon^2.$$

上述不等式和 8.54(b) 推出

$$\Big\| \sum_{k\in\Gamma} \alpha_k e_k - \sum_{j\in\Omega} \alpha_j e_j \Big\| < \varepsilon.$$

闭包的定义（见6.7）现在意味着$\sum_{k\in\Gamma} \alpha_k e_k \in \overline{跨度\{e_k\}_{k\in\Gamma}}$，显示出（a）右侧包含在（a）左侧。

为了证明反向的包含关系，现在假设$f \in \overline{张成\ \{e_k\}_{k\in\Gamma}}$。令

8.59 $$g = \sum_{k\in\Gamma} \langle f, e_k \rangle e_k,$$

其中上述和由于贝塞尔不等式 (8.57) 以及 8.54(a) 而收敛。我们刚刚证明的包含关系的方向意味着 $g \in \overline{张成\ \{e_k\}_{k\in\Gamma}}$。因此

8.60 $$g - f \in \overline{\text{span}\ \{e_k\}_{k\in\Gamma}}.$$

等式8.59 表明，对于每个 $j \in \Gamma$，$\langle g、e_j \rangle = \langle f、e_j \rangle$，正如你应当验证的那样（如果严格进行，这将需要使用柯西–施瓦茨不等式）。因此

$$\langle g - f, e_k \rangle = 0 \quad \text{for every } k \in \Gamma.$$

这意味着

$$g - f \in \big(\text{span}\{e_j\}_{j\in\Gamma}\big)^{\perp} = \big(\overline{\text{span}\{e_j\}_{j\in\Gamma}}\big)^{\perp},$$

其中上述等式来自 8.40(d)。现在由 8.60 以及上述的包含关系可推出 $f = g$［见 8.40(b)］，这与 8.59 一起意味着 f 位于 (a) 的右侧，从而完成了 (a) 的证明。

方程 $f = g$ 和 8.59 也推出(b)。 ■

帕塞瓦尔恒等式

注意，8.52 表明，内积空间中的每个正交归一族都是线性无关的（参见 6.54 以回顾线性无关和基的定义）。线性代数主要处理有限维向量空间，但无限维向量空间在分析中经常出现。在用无限维向量空间进行分析时，基的概念并不那么有用，因为张成的定义并未利用可以对无限多个元素求和的可能性。

然而，8.58 告诉我们，取一个正交归一族的张量的闭包可以捕捉到无限多个元素的和。因此，我们做出以下定义。

8.61 定义 *orthonormal basis*

希尔伯特空间 V 中的一个正交规范族 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 被称为 V 的一个 *orthonormal basis* 如果

$$\overline{\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\Gamma}} = V.$$

除了要求正交归一性（这意味着线性独立性）之外，上述定义与基的定义不同，因为它考虑的是张量的闭包，而不是张量本身。需要牢记的一个重要点是，尽管术语上有“正交归一基”一词，但它不一定是6.54中所说的基。事实上，如果Γ是一个无限集合，且$\{e_k\}_{k\in\Gamma}$是V的正交归一基，那么$\{e_k\}_{k\in\Gamma}$就不是V (的基，见习题9)。

8.62 示例 *orthonormal bases*

- 对于 $n \in \mathbf{Z}^+$ 且 $k \in \{1,\ldots,n\}$，令 e_k 为 $\mathbf{F}^n$ 中的元素，其所有坐标均为 0，除了第 k^{th} 个坐标为 1：

  $$e_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0).$$

  那么，$\{e_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ 是 $\mathbf{F}^n$ 的一个正交规范基。

- 设 $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$，以及 $e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$。则 $\{e_k\}_{k\in\{1,2,3\}}$ 是 $\mathbf{F}^3$ 的一组正交归一基，你应当自行验证。

- 8.51 中前三个项目符号是既是正交规范族又是正交规范基的例子。习题要求你验证，在 8.51 的第一和第二个项目符号中我们确实得到一个正交规范基。对于第三个项目符号（关于三角函数），请参见第 10D 节的练习 11，或参见第 11 章。

下一结果显示了为什么正交规范基如此有用——一个具有正交规范基 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 的希尔伯特空间表现得像 $\ell^2(\Gamma)$。

8.63 *Parseval's identity*

假设 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是希尔伯特空间 V 和 f、$g\in V$ 的一个正交归一基。然后

(a) $f = \sum_{k\in\Gamma} \langle f, e_k\rangle e_k$;

(b) $\langle f, g\rangle = \sum_{k\in\Gamma} \langle f, e_k\rangle \overline{\langle g, e_k\rangle}$;

(c) $\|f\|^2 = \sum_{k\in\Gamma} |\langle f, e_k\rangle|^2$.

证明 (a) 中的方程直接来自 8.58(b) 和正交规范基的定义。

为证明(b)，注意到

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \Big\langle \sum_{k\in\Gamma}\langle f,e_k\rangle e_k, g\Big\rangle\\ &= \sum_{k\in\Gamma}\langle f,e_k\rangle\langle e_k,g\rangle\\ &= \sum_{k\in\Gamma}\langle f,e_k\rangle\,\overline{\langle g,e_k\rangle},\end{aligned}$$

Equation (c) is called 帕塞瓦尔恒等式 *in honor of Marc-Antoine Parseval (1755–1836), who discovered a special case in 1799.*

其中，第一个等式由(a)推出，第二个等式由无序和的定义以及柯西–施瓦茨不等式推出。

方程 (c) 由在 (b) 中设定 $g=f$ 得出。另一种证明方式：方程 (c) 可由 8.54(b) 以及来自 (a) 的方程 $f=\sum_{k\in\Gamma}\langle f、e_k\rangle e_k$ 推得。

格拉姆–施密特正交化过程与正交规范基的存在性

8.64 定义 *separable*

如果一个赋范向量空间存在一个可数子集，其闭包等于整个空间，则称其为*separable*。

8.65 示例 *separable normed vector spaces*

- 假设 $n\in\mathbf{Z}^+$。那么，带有通常的希尔伯特空间范数的 $\mathbf{F}^n$ 是可分的，因为可数集合的闭包

  $$\{(c_1,\dots,c_n)\in\mathbf{F}^n : \text{each } c_j \text{ is rational}\}$$

  等于$\mathbf{F}^n$ (，在$\mathbf{F}=\mathbf{C}$的情况下：在这个上下文中，说一个复数是有理数意味着复数的实部和虚部都是通常意义上的有理数)。

- 希尔伯特空间 ℓ^2 是可分的，因为可数集合的闭包

  $$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(c_1,\dots,c_n,0,0,\dots)\in\ell^2 :\ \text{each } c_j \text{ is rational}\}$$

  是 ℓ^2。

- 希尔伯特空间 $L^2([0,1])$ 和 $L^2(\mathbf{R})$ 是可分的，正如练习 13 要求你去验证的那样［提示：考虑具有有理系数的、形如 $\chi_{(c,d)}$ 的函数的有限线性组合，其中 c 和 d 是有理数］。

稍作思考关于闭包的定义（见6.7）可以看出，范数向量空间 V 当且仅当存在一个可数子集 C，该子集属于 V，使得 V 中的每一个开球都包含至少一个 C 的元素时，V 是可分的。

8.66 示例 *nonseparable normed vector spaces*

- 假设 Γ 是一个不可数集合。那么希尔伯特空间 $\ell^2(\Gamma)$ 不是可分的。为说明这一点，注意到对于所有 j、$k \in \Gamma$ 且满足 $j \neq k$，有 $\|\chi_{\{j\}} - \chi_{\{k\}}\| = \sqrt{2}$ 。因此

$$\left\{B\left(\chi_{\{k\}}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) : k \in \Gamma\right\}$$

  是 $\ell^2(\Gamma)$ 中一族不可数的两两不相交的开球；任何可数集都不可能在这些球中的每一个里至少包含一个元素。

- 巴拿赫空间 $L^\infty([0,1])$ 不是可分的。这里 $\|\chi_{[0,s]} - \chi_{[0,t]}\| = 1$ 对于所有 s，$t \in [0,1]$ 且 $s \neq t$。因此

$$\left\{B\left(\chi_{[0,\,t]}, \tfrac{1}{2}\right) : t \in [0,1]\right\}$$

  是 $L^\infty([0,1])$ 中互不相交的开球的一个不可数集合。

我们给出希尔伯特空间存在正交归一基的两个证明。第一个证明只适用于可分的希尔伯特空间，但它给出了一个有用的算法，称为 *Gram–Schmidt process*，用于构造正交归一序列。第二个证明适用于所有希尔伯特空间，但它使用了一个依赖于选择公理的结果。

你应该阅读哪个证明？在实践中，你遇到的希尔伯特空间几乎肯定是可分的。因此，第一个证明就足够了，并且它有一个额外的好处，即引入了一个广泛使用的算法。第二个证明使用了完全不同的方法，并且适用于可分和不可分的希尔伯特空间。为了最大化学习效果，阅读两个证明！

8.67 *existence of orthonormal bases for separable Hilbert spa ces*

每个可分的希尔伯特空间都有一个正交归一基。

证明 假设 V 是一个可分的希尔伯特空间，且 $\{f_1, f_2, \ldots, \}$ 是 V 的一个可数子集，其闭包等于 V。我们将归纳定义一个正交归一序列 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$，使得

8.68
$$\operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$$

对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$。这将意味着 $\overline{\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}} = V$，从而意味着 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 是 V 的一组正交归一基。

为了开始归纳，设定 $e_1 = f_1/\|f_1\|$ (我们可以假设 $f_1 \neq 0$)。

现在假设已经选择了 $n \in \mathbf{Z}^+$ 以及 $e_1, \ldots, e_n$，使得 $\{e_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ 在 V 中构成一个正交规范族，并且 8.68 成立。若对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，都有 $f_k \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$，则 $\{e_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ 是 V (的一个正交规范基，从而完成证明)，并应当停止该过程。否则，令 m 为满足如下条件的最小正整数：

8.69
$$f_m \notin \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}.$$

定义 e_{n+1} 为

8.70
$$e_{n+1} = \frac{f_m - \langle f_m, e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle f_m, e_n\rangle e_n}{\|f_m - \langle f_m, e_1\rangle e_1 - \cdots - \langle f_m, e_n\rangle e_n\|}.$$

Jørgen Gram (1850–1916) and Erhard Schmidt (1876–1959) popularized this process that constructs orthonormal sequences.

显然 $\|e_{n+1}\| = 1$（8.69 保证不存在除以 0）。如果 $k \in \{1, \ldots, n\}$，则上述方程意味着 $\langle e_{n+1}, e_k\rangle = 0$。因此 $\{e_k\}_{k\in\{1,\ldots,n+1\}}$ 是 V 中的一个正交规范族。此外，8.68 以及将 m 选为满足 8.69 的最小正整数这一选择意味着

$$\operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_{n+1}\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{n+1}\},$$

完成归纳并完成证明。 ∎

在考虑不可分的希尔伯特空间之前，我们先作一个简短的旁述，以说明前一证明中使用的 Gram–Schmidt 正交化过程如何用于寻找到子空间的最近元素。我们从一个结果开始，该结果将到闭子空间的正交投影与该子空间的一组正交规范基联系起来。

8.71 *orthogonal projection in terms of an orthonormal basis*

设 U 是 Hilbert 空间 V 的一个闭子空间，且 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 U 的一个正交规范基。则

$$P_U f = \sum_{k\in\Gamma} \langle f, e_k\rangle e_k$$

对于所有 $f \in V$。

证明 令 $f \in V$。如果 $k \in \Gamma$，则

8.72
$$\langle f, e_k\rangle = \langle f - P_U f, e_k\rangle + \langle P_U f, e_k\rangle = \langle P_U f, e_k\rangle,$$

其中最后的等式来自8.37(a)。现在

$$P_U f = \sum_{k\in\Gamma} \langle P_U f, e_k\rangle e_k = \sum_{k\in\Gamma} \langle f, e_k\rangle e_k,$$

其中第一个等式来自于Parseval恒等式[8.63(a)]，应用于U及其正交标准基 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$，第二个等式来自8.72。 ∎

8.73 示例 *best approximation*

找到一个最高次数为10的多项式 g，使其最小化

$$\int_{-1}^{1}\left|\sqrt{|x|}-g(x)\right|^{2}dx.$$

解答 我们将在实希尔伯特空间 $L^2([-1,1])$ 中工作，使用通常的内积 $\langle g, h\rangle=\int_{-1}^{1}gh$。对于 $k\in\{0,1,\ldots,10\}$，设 $f_k\in L^2([-1,1])$ 由 $f_k(x)=x^k$ 定义。设 U 为 $L^2([-1,1])$ 的子空间，定义为

$$U=\operatorname{span}\{f_k\}_{k\in\{0,\ldots,10\}}.$$

应用8.67证明中的Gram-Schmidt过程对$\{f_k\}_{k\in\{0,\ldots,10\}}$，得到$U$的正交归一基$\{e_k\}_{k\in\{0,\ldots,10\}}$，其中$U$是$L^2([-1,1])$ (的一个闭子空间，见习题8)。这里的关键是，$\{e_k\}_{k\in\{0,\ldots,10\}}$可以通过使用8.70并计算一些积分显式且准确地求出（使用能够进行精确有理数运算的软件将使过程更容易），得到$e_0(x)=1/\sqrt{2}$, $e_1(x)=\sqrt{6}x/2$，... 直到

$$e_{10}(x)=\frac{\sqrt{42}}{512}(-63+3465x^2-30030x^4+90090x^6-109395x^8+46189x^{10}).$$

定义$f\in L^2([-1,1])$ 为 $f(x)=\sqrt{|x|}$。因为 U 是 $L^2([-1,1])$ 的子空间，包含最多为 10 次的多项式，并且 $P_U f$ 等于 U 中最接近 f (的元素，参见 8.34，公式 8.71 告诉我们，最小化问题的解 g 由以下公式给出。

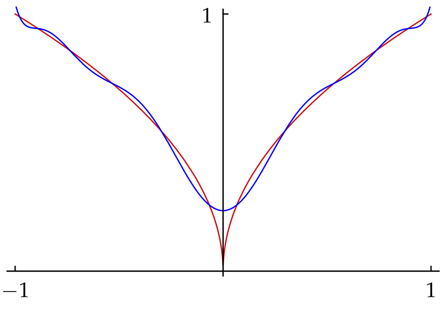
$$g=\sum_{k=0}^{10}\langle f,e_k\rangle e_k.$$

使用 e_0、...、e_{10} 的显式表达式，并再次计算一些积分，这将得到

$$g(x)=\frac{693+15015x^2-64350x^4+139230x^6-138567x^8+51051x^{10}}{2944}.$$

图中显示了$f(x)=\sqrt{|x|}$ (红色)图形和其最近多项式g (蓝色)图形，最高次数为10；其中*closest*表示在$L^2([-1,1])$的范数中测量。

f 的近似值由 g 给出相当不错，尤其考虑到 f 在 0 处不可导，因此 f 的泰勒级数展开没有意义。



回顾一下，集合V的一个子集Γ可以通过考虑$\{e_f\}_{f\in\Gamma}$而被看作V中的一个族，其中$e_f = f$。在这种约定下，内积空间V的一个子集Γ是V的一个*orthonormal subset*，如果对所有$f \in \Gamma$和$\langle f$都有$\|f\| = 1$，且对所有满足$f \neq g$的f、$g \in \Gamma$都有$g\rangle = 0$。

下一个结果将正交规范基刻画为希尔伯特空间中正交规范子集族中的极大元素。回顾一下，若集合$\Gamma \in \mathcal{A}$属于集合V的子集族，则当不存在$\Gamma' \in \mathcal{A}$使得$\Gamma \subsetneq \Gamma'$ (见6.55)时，$\Gamma \in \mathcal{A}$是$\mathcal{A}$的一个极大元素。

8.74 *orthonormal bases as maximal elements*

设 V 是一个希尔伯特空间，$\mathcal{A}$ 是 V 的所有正交规范子集的集合，且 Γ 是 V 的一个正交规范子集。则 Γ 是 V 的一个正交规范基，当且仅当 Γ 是 $\mathcal{A}$ 的一个极大元。

证明 首先假设 Γ 是 V 的一个正交规范基。Parseval 恒等式 [8.63(a)] 表明，与 Γ 中每个元素都正交的 V 中唯一的元素是 0。因此，不存在严格包含 Γ 的 V 的正交规范子集。换言之，Γ 是 $\mathcal{A}$ 的一个极大元素。

为证明另一方向，现假设 Γ 是 $\mathcal{A}$ 的一个极大元素。令 U 表示 Γ 的张成空间。则

$$U^\perp = \{0\}$$

因为如果 f 是 $U^\perp$ 的一个非零元素，那么 $\Gamma \cup \{f/\|f\|\}$ 是 V 的一个正交归一子集，且严格包含 Γ。因此 $\overline{U} = V$ (由 8.42)，这意味着 Γ 是 V 的一个正交归一基。 ■

现在我们已经准备好证明每个希尔伯特空间都有一个正交规范基。在阅读下面的证明之前，你可能想回顾一下链（6.58）的定义：链是一类集合的集合，使得对该集合中的任意一对集合，其中一个包含于另一个。你还应该回顾佐恩引理（6.60），它提供了一种证明一族集合包含极大元素的方法。

8.75 *existence of orthonormal bases for all Hilbert spaces*

每个希尔伯特空间都有一个正交规范基。

证明 设 V 是一个希尔伯特空间。令 $\mathcal{A}$ 为 V 的所有正交规范子集的集合。设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ 是一条链。令 L 为 $\mathcal{C}$ 中所有集合的并。如果 $f \in L$，则 $\|f\| = 1$，因为 f 是 V 的某个正交规范子集的一个元素，而该子集包含于 $\mathcal{C}$。

如果 f，$g \in L$ 具有 $f \neq g$，那么在 $\mathcal{C}$ 中存在正交归一子集 Ω 和 Γ，使得 $f \in \Omega$ 且 $g \in \Gamma$。由于 $\mathcal{C}$ 是一条链，要么 $\Omega \subseteq \Gamma$，要么 $\Gamma \subseteq \Omega$。无论哪种情况，都存在一个 V 的正交归一子集，同时包含 f 和 g。因此 $\langle f, g\rangle = 0$。

我们已经证明 L 是 V 的一个正交规范子集；换言之，$L \in \mathcal{A}$。因此，佐恩引理（6.60）表明 $\mathcal{A}$ 有一个极大元。现在由 8.74 推出 V 具有一个正交规范基。 ■

Riesz 表示定理（再访）

既然我们已经知道每个希尔伯特空间都有一个正交规范基，我们就可以给出里斯表示定理（8.47）的一个完全不同于先前所给证明的证明。

注意，下面给出的里斯表示定理的新证明给出了关于正交规范基下 h 的公式 8.77。这个公式的一个有趣特征是，h 由 φ 唯一确定，因此 h 不依赖于正交规范基的选择。因此，尽管其表面形式如此，8.77 的右端与正交规范基的选择无关。

8.76 *Riesz Representation Theorem*

设 φ 是 Hilbert 空间 V 上的一个有界线性泛函，且 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 V 的一组正交规范基。令

8.77
$$h=\sum_{k\in\Gamma}\overline{\varphi(e_k)}\,e_k.$$

然后

8.78
$$\varphi(f)=\langle f,h\rangle$$

对于所有 $f\in V$。此外，$\|\varphi\|=\bigl(\sum_{k\in\Gamma}|\varphi(e_k)|^2\bigr)^{1/2}$。

证明 首先我们必须证明定义 h 的和是有意义的。为此，假设 Ω 是 Γ 的一个有限子集。那么

$$\sum_{j\in\Omega}|\varphi(e_j)|^2=\varphi\Bigl(\sum_{j\in\Omega}\overline{\varphi(e_j)}\,e_j\Bigr)\leq\|\varphi\|\,\Bigl\|\sum_{j\in\Omega}\overline{\varphi(e_j)}\,e_j\Bigr\|=\|\varphi\|\Bigl(\sum_{j\in\Omega}|\varphi(e_j)|^2\Bigr)^{1/2},$$

其中最后的等式来自 8.52。通过除以 $\bigl(\sum_{j\in\Omega}|\varphi(e_j)|^2\bigr)^{1/2}$ 给

$$\Bigl(\sum_{j\in\Omega}|\varphi(e_j)|^2\Bigr)^{1/2}\leq\|\varphi\|.$$

因为上面的不等式对Γ的每个有限子集Ω成立，我们得出结论：

$$\sum_{k\in\Gamma}|\varphi(e_k)|^2\leq\|\varphi\|^2.$$

因此，定义 h 的和在方程 8.77 中是有意义的（由 8.54 所示）。

现在 8.77 显示 $\langle h,\ e_j\rangle=\overline{\varphi(e_j)}$ 对于每个 $j\in\Gamma$。因此，如果 $f\in V$ 那么

$$\varphi(f)=\varphi\Bigl(\sum_{k\in\Gamma}\langle f,e_k\rangle e_k\Bigr)=\sum_{k\in\Gamma}\langle f,e_k\rangle\varphi(e_k)=\sum_{k\in\Gamma}\langle f,e_k\rangle\,\overline{\langle h,e_k\rangle}=\langle f,h\rangle,$$

其中第一个和最后一个等式由 8.63 得出，第二个等式由 φ 的有界性/连续性得出。因此 8.78 成立。

最后，Cauchy–Schwarz 不等式，方程 8.78，以及方程 $\varphi(h)=\langle h,\ h\rangle$ 显示了 $\|\varphi\|=\|h\|=\bigl(\sum_{k\in\Gamma}|\varphi(e_k)|^2\bigr)^{1/2}$。 ∎

练习 8C

验证在例 8.51 的第三个要点中定义的家族 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是否是 $L^2\big((-\pi, \pi]\big)$ 中的正交归一家族。以下公式应有助于证明:

$$(\sin x)(\cos y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2},$$
$$(\sin x)(\sin y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2},$$
$$(\cos x)(\cos y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}.$$

假设 $\{a_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 R 中的一个族，且对于每个 $k \in \Gamma$，$a_k \geq 0$。证明无序和 $\sum_{k\in\Gamma} a_k$ 收敛当且仅当

$$\sup\Big\{\sum_{j\in\Omega} a_j : \Omega \text{ is a finite subset of } \Gamma\Big\} < \infty.$$

此外，证明如果 $\sum_{k\in\Gamma} a_k$ 收敛，则它等于上界的最小上界。

假设 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是内积空间 V 中的一个正交归一族。证明如果 $f \in V$，则 $\{k \in \Gamma : \langle f, e_k\rangle \neq 0\}$ 是一个可数集。

假设 $\{f_k\}_{k\in\Gamma}$ 和 $\{g_k\}_{k\in\Gamma}$ 是一个范数向量空间中的族，且 $\sum_{k\in\Gamma} f_k$ 和 $\sum_{k\in\Gamma} g_k$ 收敛。证明 $\sum_{k\in\Gamma}(f_k+g_k)$ 收敛，并且

$$\sum_{k\in\Gamma}(f_k+g_k) = \sum_{k\in\Gamma} f_k + \sum_{k\in\Gamma} g_k.$$

假设 $\{f_k\}_{k\in\Gamma}$ 是一个范数向量空间中的家族，使得 $\sum_{k\in\Gamma} f_k$ 收敛。证明如果 $c \in \mathbf{F}$，则 $\sum_{k\in\Gamma}(cf_k)$ 收敛。

$$\sum_{k\in\Gamma}(cf_k) = c\sum_{k\in\Gamma} f_k.$$

假设 $\{a_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 R 中的一个族。证明无序和 $\sum_{k\in\Gamma} a_k$

当且仅当 $\sum_{k\in\Gamma}|a_k| < \infty$ 时趋于。

假设 $\{f_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 是一个赋范向量空间 V 和 $f \in V$ 中的一个族。证明，当且仅当对于每个单射且满射的函数 $p : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$，无序和 $\sum_{k\in\mathbf{Z}^+} f_k$ 等于 f 当且仅当通常的有序和 $\sum_{k=1}^{\infty} f_{p(k)}$ 等于 f。

8 解释为什么 8.58 表明，如果 Γ 是一个有限集合，且 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是希尔伯特空间 V 中的一个正交标准基族，那么 $\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 V 的一个闭子空间。

假设 V 是一个无限维希尔伯特空间。证明 V 不存在一个正交归一的基。

10 (a) 证明例 8.51 的第一个要点中给出的正交规范族是 ℓ^2 的一个正交规范基。

(b) 证明例 8.51 第二个要点中给出的正交归一族是 $\ell^2(\Gamma)$ 的一个正交归一基。(c) 证明例 8.51 第四个要点中给出的正交归一族不是 $L^2([0,1))$ 的一个正交归一基。(d) 证明例 8.51 第五个要点中给出的正交归一族不是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交归一基。

11 设 μ 是 $(X, \mathcal{S})$ 上的 σ-有限测度，而 ν 是 $(Y, \mathcal{T})$ 上的 σ-有限测度。又设 $\{e_j\}_{j\in\Omega}$ 是 $L^2(\mu)$ 的一组正交规范基，而 $\{f_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 $L^2(\nu)$ 的一组正交规范基，其中 Γ 为某个可数集。对于 $j \in \Omega$ 和 $k \in \Gamma$，定义 $g_{j,k} : X \times Y \to \mathbf{F}$ 为

$$g_{j,k}(x, y) = e_j(x) f_k(y).$$

证明 $\{g_{j,k}\}_{j\in\Omega, k\in\Gamma}$ 是 $L^2(\mu \times \nu)$ 的一组正交归一基。

12 证明 Parseval 恒等式的逆命题。更具体地说，证明如果 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是希尔伯特空间 V 中的一个正交归一族，并且

$$\|f\|^2 = \sum_{k\in\Gamma} |\langle f, e_k\rangle|^2$$

对于每个$f \in V$，$\{e_k\}_{k\in\Gamma}$是V的一组正交规范基。

13 (a) 证明 Hilbert 空间 $L^2([0,1])$ 是可分的。(b) 证明 Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{R})$ 是可分的。(c) 证明 Banach 空间 ℓ^∞ 是不可分的。

14 Pr 证明每个可分赋范向量空间的每个子空间是 s eparable.

15 假设 V 是一个无限维希尔伯特空间。证明不存在定义在 V 的 Borel 子集上的平移不变测度，使其对 V 中的每个开球赋予正且有限的测度。[*A subset of V is called a* Borel 集 *if it is in the smallest σ-algebra containing all the open subsets of V. A measure μ on the Borel subsets of V is called* 平移不变 *if $\mu(f + E) = \mu(E)$ for every $f \in V$ and every Borel set E of V.*]

16 求次数不超过 4 的多项式 g，使 $\int_0^1 |x^5 - g(x)|^2 \, dx$ 最小。

17 证明：希尔伯特空间中的每一个正交归一族都可以扩充为该希尔伯特空间的一个正交归一基。具体地，设 $\{e_j\}_{j\in\Omega}$ 是希尔伯特空间 V 中的一个正交归一族。证明：存在一个包含 Ω 的集合 Γ，以及 V 的一个正交归一基 $\{f_k\}_{k\in\Gamma}$，使得对每个 $j \in \Omega$，都有 $f_j = e_j$。

18 证明每个向量空间都有一组基。

找到一个次数最多为4的多项式 g，使得

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^1 fg$$

对于每个次数最多为 4 的多项式 f。

Exercises 20–25 are for readers familiar with analytic functions.

20 设 G 是 C 的一个非空开子集。*Bergman space* $L_a^2(G)$ 定义为满足如下条件的解析函数集合 $f: G \to \mathrm{C}$，使得

$$\int_G |f|^2 \, d\lambda_2 < \infty,$$

其中 λ_2 是 R^2 上通常的勒贝格测度，并将其与 C 识别为同一。对于 f，$h \in L_a^2(G)$，定义 $\langle f, \ h \rangle$ 为 $\int_G f \, \overline{h} \, \mathrm{d}\lambda_2$。

（a）证明 $L_a^2(G)$ 是一个希尔伯特空间。（b）证明若 $w \in G$，则 $f \mapsto f(w)$ 是 $L_a^2(G)$ 上的有界线性泛函。

21 令 D 表示 C 中的开单位圆盘；因此

$$\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}.$$

(a) 找到L_a^2(D)的正交规范基。

（b）假设 $f \in L_a^2(\mathrm{D})$ 有泰勒级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

对于 $z \in \mathrm{D}$。求用 a_0、a_1、a_2、…… 表示 $\|f\|$ 的公式。

(c) 假设 $w \in \mathrm{D}$。根据之前的练习和Riesz表示定理（8.47和8.76），存在 $\Gamma_w \in L_a^2(\mathrm{D})$，使得

$$f(w) = \langle f, \Gamma_w \rangle \text{ for all } f \in L_a^2(\mathbf{D}).$$

求 Γ_w 的显式公式。

22 假设 G 是由以下定义的环形区域

$$G = \{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < 2\}.$$

(a) 找到$L_a^2(G)$的正交标准基。

(b) 假设 $f \in L_a^2(G)$ 具有Laurent级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

对于 $z \in G$。找到关于 $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1,$ 的 $\|f\|$ 的公式。 Sure! Please pro

23 证明如果 $f \in L_a^2(\mathbf{D} \setminus \{0\})$，那么 f 在 0 处有一个可去奇点（这意味着 f 可以被延拓为在 D 上解析的函数）。

24 将 *Dirichlet space* $\mathcal{D}$ 定义为解析函数 $f : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 的集合，使得

$$\int_{\mathbf{D}} |f'|^2 \, d\lambda_2 < \infty.$$

对于f，$g \in \mathcal{D}$，定义$\langle f, g\rangle$为$f(0)\, g\overline{(0) +} \int_{\mathbf{D}} f'\, g'\, \overline{\mathrm{d}}\lambda_2$。

(a) 证明 $\mathcal{D}$ 是一个希尔伯特空间。(b) 证明如果 $w \in \mathbf{D}$，则 $f \mapsto f(w)$ 是 $\mathcal{D}$ 上的有界线性泛函。(c) 求 $\mathcal{D}$ 的一个正交归一基。

(d) 假设 $f \in \mathcal{D}$ 有泰勒级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

对于 $z \in \mathbf{D}$。求一个用 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 表示的 $\|f\|$ 的公式。

(e) 假设 $w \in \mathbf{D}$。求 $\Gamma_w \in \mathcal{D}$ 的一个显式公式，使得

$$f(w) = \langle f, \Gamma_w \rangle \text{ for all } f \in \mathcal{D}.$$

25 (a) 证明狄利克雷空间 $\mathcal{D}$ 包含于伯格曼空间 $L_a^2(\mathbf{D})$。

（b）证明存在一个函数 $f \in L_a^2(\mathbf{D})$，使得 f 在 D 上一致连续，且 $f \notin \mathcal{D}$。

第9章
Real and Complex Measures

测度是一个从 σ-代数到 $[0, \infty]$ 的可数加性函数。在本章中，我们考虑从 σ-代数到 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 的可数加性函数。本章的第一节表明，这些函数（称为实测度或复测度）在适当的范数下构成一个有趣的巴拿赫空间。

本章的第二节侧重于分解定理，这些定理有助于我们理解实测度和复测度。这些结果将引出一个证明，即 $L^p(\mu)$ 的对偶空间可以被识别为 $L^{p'}(\mu)$。

Dome in the main building of the University of Vienna, where Johann Radon (1887–1956) was a student and then later a faculty member. The Radon–Nikodym Theorem, which will be proved in this chapter using Hilbert space techniques, provides information analogous to differentiation for measures.

9A 全变差

实测度与复测度的性质

回顾可测空间是一个二元组（X, $\mathcal{S}$），其中 $\mathcal{S}$ 是 X 上的 σ-代数。另回顾，在（X, $\mathcal{S}$）上的一个测度是一个从 $\mathcal{S}$ 到 $[0, \infty]$ 的可数可加函数，并且将 $\varnothing$ 映射为 0。取值于 R 或 C 的可数可加函数给我们带来了称为实测度或复测度的新对象。

9.1 定义 *countably additive; real measure; complex measure*

假设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间。

- 如果……，则称函数 $\nu : \mathcal{S} \to \mathbf{F}$ 为 *countably additive*

$$\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)$$

  对于$\mathcal{S}$中每一个由集合E_1、E_2、……组成的互不相交序列。

- 在 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个 *real measure* 是一个可数可加的函数 $\nu : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$。
- 一个 *complex measure* 关于 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可数可加函数 $\nu : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$。

在数学文献中，*measure* 一词可能具有歧义。对 *measure* 一词最常见的用法是如我们在第 2 章中所定义的那样（见 2.54）。然而，一些数学家使用 *measure* 一词来包括这里所谓的实测度和复测度；然后他们使用短语 *positive measure* 来指称我们所定义为测度的对象，在 2.54. 为了帮助消除这种歧义，在本章中我们通常使用短语（*positive*）*measure*来指代按 2.54 中所定义的测度。将 *positive* 放在括号中有助于强化其为可选项的概念，同时将这类测度与实测度和复测度区分开来。

The terminology 非负测度 *would be more appropriate than* 正测度 *because the function* $\mu : \mathcal{S} \to \mathbf{F}$ *defined by* $\mu(E) = 0$ *for every* $E \in \mathcal{S}$ *is a positive measure. However, we will stick with tradition and use the phrase* 正测度.

9.2 示例 *real and complex measures*

- 令 λ 表示在 $[-1, 1]$ 上的勒贝格测度。定义 ν 在 $[-1, 1]$ 的鲍雷子集上通过

$$\nu(E) = \lambda\big(E \cap [0,1]\big) - \lambda\big(E \cap [-1,0)\big).$$

  则 ν 是一个实值测度。

- 如果μ_1和μ_2是有限（正）测度，那么对于所有α_1、$\alpha_2 \in \mathbf{C}$，$\mu_1 - \mu_2$是实测度，而$\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$是复测度。
- 如果 ν 是一个复测度，那么 Re ν 和 Im ν 是实测度 是。

注意，每个实值测度都是复测度。还要注意，根据定义，∞ 不是实值测度或复测度的允许取值。因此，定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的（正）测度 μ 当且仅当 $\mu(X) < \infty$ 时是一个实值测度。

一些作者使用术语 *signed measure* 而不是 *real measure*；一些作者允许实测量取值 ∞ 或 $-\infty$ (，但不能同时取这两个值，因为必须避免表达式 $\infty - \infty$) 。然而，按照此处定义的实测量对我们来说更有用，因为在考虑可测空间上的实数或复数测量的 Banach 空间时，我们需要避免 $\pm\infty$（见 9.18）。

对于（正）测度，我们必须将 $\mu(\varnothing) = 0$ 作为定义的一部分，以避免 μ 函数，它将 ∞ 分配给所有集合，包括空集合。但 ∞ 不是实数或复数测度的允许值。因此，$\nu(\varnothing) = 0$ 是我们定义的结果，而不是定义的一部分，如下一个结果所示。

9.3 *absolute convergence for a disjoint union*

S设 ν 是可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个复测度。 然后

(a) $\nu(\varnothing) = 0$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} |\nu(E_k)| < \infty$ 对于每一个不相交的集合序列 $E_1, E_2, \ldots$ 在 $\mathcal{S}$ 中。

证明 为证明(a)，注意到$\varnothing$、$\varnothing$、……是在$\mathcal{S}$中的一列互不相交的集合，其并集等于$\varnothing$。因此

$$\nu(\varnothing) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(\varnothing).$$

上式右侧只有在 $\nu(\varnothing) = 0$ 时才作为 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 的一个元素有意义，这证明了 (a) 。

为证明(b)，设 $E_1, E_2, \ldots$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一列两两不交的集合。首先假设 ν 是一个实值测度。因此

$$\nu\Big(\bigcup_{\{k : \nu(E_k) > 0\}} E_k\Big) = \sum_{\{k : \nu(E_k) > 0\}} \nu(E_k) = \sum_{\{k : \nu(E_k) > 0\}} |\nu(E_k)|$$

和

$$-\nu\Big(\bigcup_{\{k : \nu(E_k) < 0\}} E_k\Big) = -\sum_{\{k : \nu(E_k) < 0\}} \nu(E_k) = \sum_{\{k : \nu(E_k) < 0\}} |\nu(E_k)|.$$

因为 $\nu(E) \in$ 对每个 $E \in \mathcal{S}$ 都 $\mathbf{R}$，最后两个所示方程的右端是有限的。因此 $\sum_{k=1}^{\infty} |\nu(E_k)| < \infty$，如所需。

现在考虑 ν 是一个复测度的情形。则

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\nu(E_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \big(|(\operatorname{Re} \nu)(E_k)| + |(\operatorname{Im} \nu)(E_k)|\big) < \infty,$$

其中最后一个不等式来自于将关于实测度的结果应用于实测度 $\operatorname{Re} \nu$ 和 $\operatorname{Im} \nu$。

下面的定义给出了实测度和复测度的一类重要例子。

9.4 ***measure determined by an $\mathcal{L}^1$-function***

设 μ 是定义在可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个（正）测度，且 $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$。定义 $\nu : \mathcal{S} \to \mathbf{F}$ 为

$$\nu(E) = \int_E h\, d\mu.$$

则当 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 时，ν 是定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的实测度；当 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ 时，它是定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的复测度。

P屋顶 设 $E_1, E_2, \dots$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一列两两不交的集合。T 母
鸡 9
.5 $$\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \int \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x)h(x)\Big)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int \chi_{E_k} h\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k),$$

其中第一个等式成立是因为集合 E_1、E_2、…… 互不相交，第二个等式则由该不等式推出

$$\Big|\sum_{k=1}^{m} \chi_{E_k}(x)h(x)\Big| \le |h(x)|,$$

这与$h \in \mathcal{L}^1(\mu)$的假设一起，使我们能够根据支配收敛定理（3.31）交换积分与部分和极限的次序。

9.5中所示的可数可加性意味着ν是一个实或复值测度。

下一个定义只是为前一结果中定义的测度给出一种记号。在我们即将定义的记号中，符号 d 本身没有独立的含义——它的作用只是用来分隔 h 和 μ。

9.6 定义 $h\, d\mu$

设 μ 是可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个（正）测度，且 $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$。则 $h\, d\mu$ 是在（$X, \mathcal{S}$）上定义的实或复测度：

$$(h\, d\mu)(E) = \int_E h\, d\mu.$$

注意到如果函数 $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ 取值于 $[0, \infty)$，那么 $h\, d\mu$ 是一个有限（正）测度。

下面的结果展示了复测度的一些基本性质。由于其证明与（正）测度对应结果的证明相同，故不再给出证明。具体可参见 2.57、2.61、2.59 和 2.60 的证明。由于复测度不能取值 ∞，因此除 (c) 之外，我们无需担心（正）测度版本所要求的有限测度假设。

9.7 *properties of complex measures*

设 ν 是定义在可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个复测度。则

(a) $\nu(E \setminus D) = \nu(E) - \nu(D)$ 对于所有 D，$E \in \mathcal{S}$ 与 $D \subseteq E$；(b) $\nu(D \cup E) = \nu(D) + \nu(E) - \nu(D \cap E)$ 对于所有 D，$E \in \mathcal{S}$；(c) $\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \nu(E_k)$ 对于所有递增序列 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 的集合在 $\mathcal{S}$ 中；(d) $\nu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \nu(E_k)$ 对于所有递减序列 $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ 的集合在 $\mathcal{S}$ 中。

全变差测度

尽管我们尚未证明所定义的对象是一个测度，下面仍然使用术语 *total variation measure*。我们很快将为这一术语加以论证（见 9.11）。

9.8 定义 *total variation measure;* $|\nu|$

假设ν是在可测空间（X，$\mathcal{S}$）上的一个复测度。*totalvariation measure*是函数$|\nu|$：$\mathcal{S} \to [0，\infty]$，定义为

$$|\nu|(E) = \sup\Big\{|\nu(E_1)| + \cdots + |\nu(E_n)| : n \in \mathbf{Z}^+ \text{ and } E_1, \ldots, E_n \text{ are disjoint sets in } \mathcal{S} \text{ such that } E_1 \cup \cdots \cup E_n \subseteq E\Big\}.$$

为了开始熟悉上述定义，你应该验证：如果 ν 是定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的复测度，并且 $E \in \mathcal{S}$，那么

- $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$;
- $|\nu|(E) = \nu(E)$ 如果 ν 是一个有限（正）的测度;
- $|\nu|(E) =$ 当且仅当 $\nu(A) =$ 为 0 时，对于每个 $A \in \mathcal{S}$ 满足 $A \subseteq E$。

下一个结果表明，对于实值测度，在全变差测度的定义中，我们只需考虑 $n = 2$。

9.9 *total variation measure of a real measure*

设 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个实测度，并且 $E \in \mathcal{S}$。则

$|\nu|(E) = \sup\{|\nu(A)| + |\nu(B)| : A, B$ 是 $\mathcal{S}$ 和 $A \cup B \subseteq E\}$ 中的互不相交的集合。

证明 假设 $n \in \mathbf{Z}^+$ 和 $E_1, \dots, E_n$ 是 $\mathcal{S}$ 中互不相交的集合，且 $E_1 \cup \dots \cup E_n \subseteq E$。设

$$A = \bigcup_{\{k : \nu(E_k) > 0\}} E_k \quad \text{and} \quad B = \bigcup_{\{k : \nu(E_k) < 0\}} E_k.$$

那么，A、B 是 $\mathcal{S}$ 和 $A \cup B \subseteq E$ 中的不相交集合。此外，

$$|\nu(A)| + |\nu(B)| = |\nu(E_1)| + \dots + |\nu(E_n)|.$$

因此，在定义 $|\nu|(E)$ 的上确界中，我们可以取 $n = 2$。 ∎

下一个结果可以改述为：如果 $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$，那么测度 $h\, d\mu$ 的全变差测度是测度 $|h|\, d\mu$。在下面的陈述中，记号 $d\nu = h\, d\mu$ 与 $\nu = h\, d\mu$ 含义相同；当考虑涉及形如 $h\, d\mu$ 的测度的表达式时，通常使用记号 $d\nu$。

9.10 *total variation measure of* $h\, d\mu$

假设 μ 是可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个（正）测度，$h \in \mathcal{L}^1(\mu)$，以及 $d\nu = h\, d\mu$。那么

$$|\nu|(E) = \int_E |h|\, d\mu$$

对于每个 $E \in \mathcal{S}$。

证明 假设 $E \in \mathcal{S}$。如果 $E_1, \dots, E_n$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一个不交序列，使得 $E_1 \cup \dots \cup E_n \subseteq E$，那么

$$\sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{E_k} h\, d\mu \right| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} |h|\, d\mu \le \int_E |h|\, d\mu.$$

上述不等式意味着 $|\nu|(E) \le \int_E |h|\, d\mu$。

为了证明不等式在另一方向上的成立，首先假设 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$；因此 h 是一个实值函数，而 ν 是一个实测度。令

$$A = \{x \in E : h(x) > 0\} \quad \text{and} \quad B = \{x \in E : h(x) < 0\}.$$

则 A 和 B 在 $\mathcal{S}$ 和 $A \cup B \subseteq E$ 中是不相交的集合。我们有

$$|\nu(A)| + |\nu(B)| = \int_A h\, d\mu - \int_B h\, d\mu = \int_E |h|\, d\mu.$$

因此 $|\nu|(E) \ge \int_E |h|\, d\mu$，在 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 的情形下完成了证明。

现在设 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$；因此 ν 是一个复测度。令 $\varepsilon > 0$。存在一个简单函数 $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$，使得 $\|g - h\|_1 < \varepsilon$（由 3.44）。存在两两不交的集合 $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S}$ 以及 $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{C}$，使得 $E_1 \cup \dots \cup E_n \subseteq E$ 并且

$$g|_E = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}.$$

现在

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|\nu(E_k)| &= \sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{E_k} h\,d\mu\Big|\\ &\geq \sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{E_k} g\,d\mu\Big| - \sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{E_k}(g-h)\,d\mu\Big|\\ &= \sum_{k=1}^{n}|c_k|\mu(E_k) - \sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{E_k}(g-h)\,d\mu\Big|\\ &= \int_E |g|\,d\mu - \sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{E_k}(g-h)\,d\mu\Big|\\ &\geq \int_E |g|\,d\mu - \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}|g-h|\,d\mu\\ &\geq \int_E |h|\,d\mu - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

上述不等式表明 $|\nu|(E) \geq \int_E |h|\,d\mu - 2\varepsilon$。由于 ε 是任意的正数，这意味着 $|\nu|(E) \geq \int_E |h|\,d\mu$，从而完成证明。

现在我们说明该术语的合理性*total variation measure*。

9.11 *total variation measure is a measure*

假设 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个复合度量。那么总变差函数 $|\nu|$ 是 ($X, \mathcal{S}$) 上的一个（正）度量。

证明 $|\nu|$ 的定义和 9.3(a) 蕴含 $|\nu|(\varnothing) = 0$。

为证明 $|\nu|$ 是可列可加的，设 $A_1, A_2, \ldots$ 是 $\mathcal{S}$ 中的两两不交的集合。取定 $m \in \mathbf{Z}^+$。对每个 $k \in \{1, \ldots, m\}$，设 $E_{1,k}, \ldots, E_{n_k,k}$ 是 $\mathcal{S}$ 中的两两不交的集合，使得

9.12 $$E_{1,k} \cup \ldots \cup E_{n_k,k} \subseteq A_k.$$

于是，$\{E_{j,k}\colon 1 \leq k \leq m \text{ 和 } 1 \leq j \leq n_k\}$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一族两两不交的集合，并且它们都包含于 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$。因此

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}|\nu(E_{j,k})| \leq |\nu|\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

取上述不等式左侧在所有满足9.12的$\{E_{j,k}\}$选择上的上确界，得出

$$\sum_{k=1}^{m}|\nu|(A_k) \leq |\nu|\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

因为上述不等式对于所有 $m \in \mathbf{Z}^+$ 都成立，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\nu|(A_k) \leq |\nu|\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

为了证明上述不等式的另一个方向，假设 E_1，...，$E_n \in \mathcal{S}$ 是不相交的集合，且 $E_1 \cup \cdots \cup E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$。那么

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|\nu|(A_k) &\geq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}|\nu(E_j \cap A_k)| \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}|\nu(E_j \cap A_k)| \\ &\geq \sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\nu(E_j \cap A_k)\Big| \\ &= \sum_{j=1}^{n}|\nu(E_j)|,\end{aligned}$$

其中，上述第一行来自于$|\nu|(A_k)$的定义，而最后一行来自于ν的可数可加性。

上述不等式和 $|\nu|\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big)$ 的定义意味着

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\nu|(A_k) \geq |\nu|\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big),$$

完成证明。 ∎

测度的 Banach 空间

在本小节中，我们将可测空间上的复数或实数测度集合构造成一个向量空间，然后将其构造成一个Banach空间。

9.13 定义 *addition and scalar multiplication of measures*

设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间。对于定义在（$X, \mathcal{S}$）上的复测度 ν、μ 以及 $\alpha \in \in \mathbf{F}$，在（$X, \mathcal{S}$）上定义复测度 $\nu+\mu$ 和 $\alpha\nu$ 为

$$(\nu+\mu)(E) = \nu(E)+\mu(E) \quad \text{and} \quad (\alpha\nu)(E) = \alpha\big(\nu(E)\big).$$

你应该验证，如果 ν、μ 和 α 如上所述，那么 $\nu+\mu$ 和 $\alpha\nu$ 是定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的复测度。你还应验证，这些关于加法和标量乘法的自然定义使可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的复（或实）测度的集合成为一个向量空间。我们现在为这个向量空间引入记号。

9.14 定义 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$

设（$X, \mathcal{S}$）是一个可测空间。则 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 表示在（$X, \mathcal{S}$）上的实值测度的向量空间，如果 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$，并且如果 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$，则表示在（$X, \mathcal{S}$）上的复值测度的向量空间。

我们使用术语 *total variation norm*，尽管我们尚未证明所定义的对象是一个范数（特别是因为 $\|\nu\| < \infty$ 对于每个复测度 ν 并不显然）。我们很快将证明这一术语的合理性。

9.15 定义 *total variation norm of a complex measure;* $\|\nu\|$

设 ν 是可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个复测度。ν 的全变差范数记为 $\|\nu\|$，其定义为

$$\|\nu\| = |\nu|(X).$$

9.16 示例 *total variation norm*

- 如果μ是一个有限（正）的测度，那么$\|\mu\| = \mu(X)$，正如你应当验证的那样。
- 如果μ是一个（正的）测度，$h \in \mathcal{L}^1(\mu)$，并且$d\nu = h\, d\mu$，那么 $\|\nu\| = \|h\|_1$ (可由9.10)推出。

下一个结果表明，如果 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个复测度，那么对于每个 $E \in \mathcal{S}$，都有 $|\nu|(E) < \infty$。

9.17 *total variation norm is finite*

假设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，且 $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$。则 $\|\nu\| < \infty$。

证明 首先考虑 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 的情形。于是 ν 是定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个实测度。为开始这个反证法证明，假设 $\|\nu\| = |\nu|(X) = \infty$。

我们按归纳法如下选择$\mathcal{S}$中的一列递减的集合序列$E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$：首先选择$E_0 = X$。现在假设$n \geq 0$，且已选择$E_n \in \mathcal{S}$，并具有$|\nu|(E_n) = \infty$和$|\nu(E_n)| \geq n$。由于$|\nu|(E_n) = \infty$，9.9 蕴含存在$A \in \mathcal{S}$，使得$A \subseteq E_n$且$|\nu(A)| \geq n + 1 + |\nu(E_n)|$，这意味着

$$|\nu(E_n \setminus A)| = |\nu(E_n) - \nu(A)| \geq |\nu(A)| - |\nu(E_n)| \geq n + 1.$$

现在

$$|\nu|(A) + |\nu|(E_n \setminus A) = |\nu|(E_n) = \infty$$

因为全变差测度$|\nu|$是一个（正的）测度（由9.11）。上面的等式表明，$|\nu|(A)$和$|\nu|(E_n \setminus A)$中至少有一个是∞。若$|\nu|(A) = \infty$，则令$E_{n+1} = A$；若$|\nu|(A) < \infty$，则令$E_{n+1} = E_n \setminus A$。因此$E_n \supseteq E_{n+1}$、$|\nu|(E_{n+1}) = \infty$，且$|\nu(E_{n+1})| \geq n + 1$。

现在 9.7(d) 意味着 $\nu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\big) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$。然而，对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，$|\nu(E_n)| \geq n$，因此，上一等式中的极限（在 $\mathbf{R}$ 中）不存在。这一矛盾完成了在 ν 为实值测度的情形下的证明。

现在考虑 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ 的情形；因此 ν 是定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的复值测度。于是

$$|\nu|(X) \leq |\operatorname{Re}\nu|(X) + |\operatorname{Im}\nu|(X) < \infty,$$

其中最后一个不等式是将实数情形应用于 $\operatorname{Re}\nu$ 和 $\operatorname{Im}\nu$ 得到的。 ∎

先前的结果告诉我们，如果 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，那么对于所有 $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$，$\|\nu\| < \infty$。这意味着（读者应该验证）总变差范数 $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 上的一个范数。下一个结果表明，这个范数使得 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 成为一个巴拿赫空间（换句话说，这个范数下的每一个柯西序列都收敛）。

9.18 *the set of real or complex measures on* $(X, \mathcal{S})$ *is a Banach space*

设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间。则 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 在全变差范数下是一个巴拿赫空间。

证明 设 $\nu_1, \nu_2, \cdots$ 是 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 中的一个柯西序列。对每个 $E \in \mathcal{S}$，我们有

$$\begin{aligned} |\nu_j(E) - \nu_k(E)| &= |(\nu_j - \nu_k)(E)| \\ &\leq |\nu_j - \nu_k|(E) \\ &\leq \|\nu_j - \nu_k\|. \end{aligned}$$

因此 $\nu_1(E), \nu_2(E), \ldots$ 是 $\mathbf{F}$ 中的一个柯西序列，因此收敛。于是我们可以定义一个函数 $\nu : \mathcal{S} \to \mathbf{F}$ 如下

$$\nu(E) = \lim_{j \to \infty} \nu_j(E).$$

为了证明$\nu \in \mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$，我们必须验证$\nu$是可数可加的。为此，假设$E_1$，$E_2$，... 是$\mathcal{S}$中的一列不相交的集合。令$\varepsilon > 0$。令$m \in \mathbf{Z}^+$，使得

9.19 $$\|\nu_j - \nu_k\| \leq \varepsilon \quad \text{for all } j, k \geq m.$$

如果 $n \in \mathbf{Z}^+$ 使得

9.20 $$\sum_{k=n}^{\infty} |\nu_m(E_k)| \leq \varepsilon$$

[通过将 9.3(b) 应用于 ν_m，这样的 n 存在]，并且如果 $j \geq m$，那么

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} |\nu_j(E_k)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |(\nu_j - \nu_m)(E_k)| + \sum_{k=n}^{\infty} |\nu_m(E_k)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |\nu_j - \nu_m|(E_k) + \varepsilon \\ &= |\nu_j - \nu_m|\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon, \end{aligned} \tag{9.21}$$

其中第二行使用9.20，第三行使用测度的可加性 $|\nu_j - \nu_m|$ (见9.11)，第四行使用9.19。

如果ε和n如上段所述，则

$$\begin{aligned}\left|\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big)-\sum_{k=1}^{n-1}\nu(E_k)\right| &= \left|\lim_{j\to\infty}\nu_j\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big)-\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\nu_j(E_k)\right|\\ &= \lim_{j\to\infty}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\nu_j(E_k)\right|\\ &\le 2\varepsilon,\end{aligned}$$

其中第二行使用了测度 ν_j 的可加性，第三行使用了 9.21。不等式上面表明 $\nu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\big)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu(E_k)$，从而完成了证明 $\nu\in\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$。

我们仍然需要证明 $\lim_{k\to\infty}\|\nu-\nu_k\|=0$。为此，假设 $\varepsilon>0$。设 $m\in\mathbf{Z}^+$ 满足条件:

9.22 $$\|\nu_j-\nu_k\|\le\varepsilon\quad\text{for all } j,k\ge m.$$

假设 $k\ge m$。另假设 E_1，...，$E_n\in\mathcal{S}$ 是 X 的不相交子集。那么

$$\sum_{\ell=1}^{n}|(\nu-\nu_k)(E_\ell)|=\lim_{j\to\infty}\sum_{\ell=1}^{n}|(\nu_j-\nu_k)(E_\ell)|\le\varepsilon,$$

其中最后的不等式来源于9.22和总变差范数的定义。上面的不等式意味着 $\|\nu-\nu_k\|\le\varepsilon$，从而完成证明。

练习 9A

证明或给出反例：如果 ν 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上的实值测度，并且 A、$B\in\mathcal{S}$ 满足 $\nu(A)\ge 0$ 且 $\nu(B)\ge 0$，那么 $\nu(A\cup B)\ge 0$。

假设 ν 是在 $(X,\mathcal{S})$ 上的一个实测度。定义 $\mu:\mathcal{S}\to[0,\infty)$ 如下

$$\mu(E)=|\nu(E)|.$$

证明 μ 是 $(X,\mathcal{S})$ 上的（正的）测度当且仅当 ν 的值域包含在 $[0,\infty)$ 中，或者 ν 的值域包含在 $(-\infty,0]$ 中。

假设 ν 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上的一个复杂度量。证明 $|\nu|(X)=\nu(X)$ 当且仅当 ν 是一个（正的）度量。

假设 ν 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上的一个复合测度。证明如果 $E\in\mathcal{S}$，则

$$|\nu|(E)=\sup\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}|\nu(E_k)|:E_1,E_2,\dots\text{ is a disjoint sequence in }\mathcal{S}\text{ such that }E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big\}.$$

5 设 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的（正）测度，且 h 是 $\mathcal{L}^1(\mu)$ 中的非负函数。令 ν 为定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的（正）测度，由 $d\nu = h\,d\mu$ 定义。证明:

$$\int f\,d\nu = \int fh\,d\mu$$

对所有 $\mathcal{S}$-可测函数 $f: X \to [0, \infty]$。

6 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个（正的）测度空间。证明:

$$\{h\,d\mu : h \in \mathcal{L}^1(\mu)\}$$

是 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 的一个闭子空间。

7 (a) 设 $\mathcal{B}$ 是 R 的 Borel 子集的集合。证明 Banach 空间 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{B})$ 不是可分的。

(b) 给出一个可测空间（$X, \mathcal{S}$），使得 Banach 空间 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 是无限维且可分的。

8 假设 $t > 0$，且 λ 是定义在 $[0, t]$ 的 Borel 子集的 σ-代数上的勒贝格测度。假设 $h : [0, t] \to \mathbf{C}$ 是由下式定义的函数

$$h(x) = \cos x + i \sin x.$$

令 ν 为由 $d\nu = h\,d\lambda$ 定义的复测度。

(a) 证明 $\|\nu\| = t$。

(b) 证明如果 $E_1, E_2, \cdots$ 是 $[0, t]$ 的一列两两不交的 Borel 子集，那么

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\nu(E_k)| < t.$$

[*This exercise shows that the supremum in the definition of* $|\nu|([0, t])$ *is not attained, even if countably many disjoint sets are allowed.*]

9 给出一个例子，说明如果将 ν 是实测度这一假设替换为 ν 是复测度这一假设，则 9.9 可能不成立。

10 假设 $(X, \mathcal{S})$ 是一个可测空间，具有 $\mathcal{S} \neq \{\emptyset, X\}$。证明 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 上的全变差范数并非由某个内积诱导而来。换言之，证明不存在 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 上的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，使得对所有 $\nu \in \mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 都有 $\|\nu\| = \langle \nu, \nu \rangle^{1/2}$，其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 上通常的全变差范数。

11 对于（$X, \mathcal{S}$）这一可测空间以及 $b \in X$，在（$X, \mathcal{S}$）上定义一个有限（正）测度 δ_b，其定义为

$$\delta_b(E) = \begin{cases} 1 & \text{if } b \in E, \\ 0 & \text{if } b \notin E \end{cases}$$

用于 $E \in \mathcal{S}$。

(a) 证明如果 b、$c \in X$，则 $\|\delta_b + \delta_c\| = 2$。 (b) 给出一个可测空间（$X, \mathcal{S}$）以及 b、$c \in X$，具有 $b \neq c$，使得 $\|\delta_b - \delta_c\| \neq 2$。

9B 分解定理

哈恩分解定理

下一个结果表明，在一个可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个实值测度将 X 分解为两个互不相交的可测集合，使得其中一个集合的每个可测子集都具有非负测度，而另一个集合的每个可测子集都具有非正测度。

结果中的分解不是唯一的，因为X的一个子集D，其$|\nu|(D)$ =为0，可以从A移至B，或从B移至A。然而，本节末尾的练习1表明，Hahn分解几乎是唯一的。

9.23 *Hahn Decomposition Theorem*

假设 ν 是一个可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的实值测度。那么，存在集合 A, $B \in \mathcal{S}$，使得

（a） $A \cup B = X$ 和 $A \cap B = \varnothing$;

(b) $\nu(E) \geq$ 对于每个 $E \in \mathcal{S}$ 具有 $E \subseteq A$;

(c) $\nu(E) \leq$ 对于每个 $E \in \mathcal{S}$ 与 $E \subseteq B$，结果为 0。

9.24 示例 *Hahn decomposition*

设 μ 是定义在可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的（正）测度，$h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ 为实值，且 $d\nu = h\, d\mu$。则通过设定可以得到实测度 ν 的一个 Hahn 分解

$$A = \{x \in X : h(x) \geq 0\} \quad \text{and} \quad B = \{x \in X : h(x) < 0\}.$$

9.23 的证明 设

$$a = \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{S}\}.$$

因此$a \leq \|\nu\| < \infty$，其中最后一个不等式来自9.17。对于每个$j \in \mathbf{Z}^+$，令$A_j \in \mathcal{S}$使得

$$\nu(A_j) \geq a - \frac{1}{2^j}. \tag{9.25}$$

暂且固定 $k \in \mathbf{Z}^+$。我们将对 n 进行归纳，证明如果 $n \in \mathbf{Z}^+$ 且具有 $n \geq k$，则

$$\nu\Big(\bigcup_{j=k}^{n} A_j\Big) \geq a - \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{2^j}. \tag{9.26}$$

为了开始归纳，注意如果 $n = k$，则 9.26 成立，因为在这种情况下 9.26 变为 9.25。现在进行归纳步骤，假设 $n \geq k$ 且 9.26 成立。于是 译文:

$$\begin{aligned}\nu\Big(\bigcup_{j=k}^{n+1}A_j\Big)&=\nu\Big(\bigcup_{j=k}^{n}A_j\Big)+\nu(A_{n+1})-\nu\Big(\big(\bigcup_{j=k}^{n}A_j\big)\cap A_{n+1}\Big)\\&\geq\Big(a-\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{2^j}\Big)+\Big(a-\frac{1}{2^{n+1}}\Big)-a\\&=a-\sum_{j=k}^{n+1}\frac{1}{2^j},\end{aligned}$$

其中第一行由9.7(b)推出，第二行由9.25和9.26推出。我们现已验证，当以$n+1$替换n时，9.26成立，从而通过归纳法完成了对9.26的证明。

集合序列 $A_k, A_k\cup A_{k+1}, A_k\cup A_{k+1}\cup A_{k+2},\ldots$ 是递增的。因此，对 9.26 的两边取 $n\to\infty$ 的极限，并使用 9.7(c)，得到

9.27
$$\nu\Big(\bigcup_{j=k}^{\infty}A_j\Big)\geq a-\frac{1}{2^{k-1}}.$$

现在令

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty}A_j.$$

序列 $\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$、$\bigcup_{j=2}^{\infty}A_j$、... 是递减的。因此，9.27 和 9.7(d) 暗示 $\nu(A)\geq a$。现在 a 的定义意味着

$$\nu(A)=a.$$

假设$E\in\mathcal{S}$且$E\subseteq A$。则$\nu(A)=a\geq\nu(A\setminus E)$。因此我们有 $\nu(E)=\nu(A)-\nu(A\setminus E)\geq 0$，这证明了(b)。

令 $B=X\setminus A$；因此 (a) 成立。假设 $E\in\mathcal{S}$ 且 $E\subseteq B$。则有 $\nu(A\cup E)\leq a=\nu(A)$。因此 $\nu(E)=\nu(A\cup E)-\nu(A)\leq 0$，这证明了 (c)。 ∎

若尔当分解定理

如果两个测度支撑在不同的集合上，那么应当将可测空间（$X,\mathcal{S}$）上的两个复测度或正测度视为彼此奇异。下面给出形式化的定义。

9.28 定义 *singular measures;* $\nu\perp\mu$

设 ν 和 μ 是可测空间（$X,\mathcal{S}$）上的复测度或正测度。若存在集合 A、$B\in\mathcal{S}$ 使得，则称 ν 与 μ 彼此 *singular*，记为 $\nu\perp\mu$。

- $A\cup B=X$ 以及 $A\cap B=\varnothing$;
- $\nu(E)=\nu(E\cap A)$ and $\mu(E)=\mu(E\cap B)$ for all $E\in\mathcal{S}$.

9.29 示例 *singular measures*

假设 λ 是 R 的 Borel 子集的 $\mathcal{B}$ σ-代数上的 Lebesgue 测度 σ。

- 定义正测度 ν，μ 在 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上通过
$$\nu(E) = \lambda\bigl(E \cap (-\infty, 0)\bigr) \quad \text{and} \quad \mu(E) = \lambda\bigl(E \cap (2, 3)\bigr)$$
对于 $E \in \mathcal{B}$。于是 $\nu \perp \mu$，因为 ν 定义在 $(-\infty, 0)$ 上，而 μ 定义在 $[0, \infty)$ 上。ν 和 μ 都不是相对于 λ 奇异的。

- 让 r_1、r_2、... 为一列有理数。假设 w_1、w_2、... 是一个有界的复数序列。定义复数测度 ν 在 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上为
$$\nu(E) = \sum_{\{k \in \mathbf{Z}^+ : r_k \in E\}} \frac{w_k}{2^k}$$
对于 $E \in \mathcal{B}$。然后 $\nu \perp \lambda$ 因为 ν 生活在 Q 上，而 λ 生活在 $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 上。

证明下一个结果的艰苦工作已经在证明Hahn分解定理（9.23）中完成。

9.30 *Jordan Decomposition Theorem*

- 任一实值测度都可以表示为两个彼此互相奇异的有限（正）测度之差。
- 更精确地说，假设 ν 是一个可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的实测度。那么，存在唯一的有限（正的）测度 ν^+ 和 ν^-，它们定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上，满足

9.31
$$\nu = \nu^+ - \nu^- \quad \text{and} \quad \nu^+ \perp \nu^-.$$

此外，
$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

证明 设 $X = A \cup B$ 为 ν 的Hahn分解，如9.23所示。定义函数 $\nu^+ : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ 和 $\nu^- : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ 如下
$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) \quad \text{and} \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap B).$$
ν 的可数可加性意味着 ν^+ 和 ν^- 是定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上的有限（正）测度，并且具有 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 和 $\nu^+ \perp \nu^-$。

全变差测度的定义以及 9.31 蕴含 $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$，你应当对此进行验证。

Camille Jordan (1838–1922) is also known for certain matrices that are 0 except along the diagonal and the line above it.

方程式 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 和 $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ 意味着
$$\nu^+ = \frac{|\nu| + \nu}{2} \quad \text{and} \quad \nu^- = \frac{|\nu| - \nu}{2}.$$
因此，有限（正）测度 ν^+ 和 ν^- 由 ν 以及 9.31 中的条件唯一确定。 ■

勒贝格分解定理

下一个定义刻画了这样一种概念：一个测度相比另一个测度拥有更多测度为 0 的集合。

9.32 定义 *absolutely continuous;* $\ll$

设 ν 是定义在可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个复测度，且 μ 是定义在（$X, \mathcal{S}$）上的一个（正）测度。则称 ν 相对于 μ 为 *absolutely continuous*，记为 $\nu \ll \mu$，如果

$$\nu(E) = 0 \text{ for every set } E \in \mathcal{S} \text{ with } \mu(E) = 0.$$

9.33 示例 *absolute continuity*

读者应验证以下所有示例：

- 如果 μ 是一个（正）测度并且 $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$，那么 $h\,d\mu \ll \mu$。
- 如果 ν 是一个实测度，则 $\nu^+ \ll |\nu|$ 且 $\nu^- \ll |\nu|$。
- 如果 ν 是一个复测度，那么 $\nu \ll |\nu|$。
- 如果 ν 是一个复测度，那么 $\operatorname{Re}\nu \ll |\nu|$ 和 $\operatorname{Im}\nu \ll |\nu|$。
- 在可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的每一个测度都相对于（$X, \mathcal{S}$）上的计数测度是绝对连续的。

下一个结果应当有助于你理解，绝对连续性和奇异性是两个复测度之间关系的两种极端可能性。

9.34 *absolutely continuous and singular implies* 0 *measure*

设 μ 是可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个（正）测度。则在（$X, \mathcal{S}$）上唯一一个相对于 μ 既绝对连续又奇异的复测度是零测度。

证明 设 ν 是定义在（$X, \mathcal{S}$）上的一个复测度，使得 $\nu \ll \mu$ 且 $\nu \perp \mu$。因此，存在集合 A、$B \in \mathcal{S}$，使得 $A \cup B = X$、$A \cap B = \varnothing$，并且对每个 $E \in \mathcal{S}$ 都有 $\nu(E) = \nu(E \cap A)$ 且 $\mu(E) = \mu(E \cap B)$。

假设 $E \in \mathcal{S}$。则

$$\mu(E \cap A) = \mu\big((E \cap A) \cap B\big) = \mu(\varnothing) = 0.$$

因为$\nu \ll \mu$，这意味着$\nu(E \cap A) = 0$。因此$\nu(E) = 0$。因此ν是零测度。 ■

我们的下一个结果表明，在可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个（正）测度决定了在（$X, \mathcal{S}$）上的每一个复测度都可以分解为两类极端类型的复测度之和（绝对连续性与奇异性）。

9.35 *Lebesgue Decomposition Theorem*

假设 μ 是一个可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的（正的）测度。

- 每个在（X，$\mathcal{S}$）上的复测度都是一个与μ绝对连续的复测度和一个与μ奇异的复测度之和。

- 更精确地说，假设 ν 是 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个复测度。那么，存在唯一的复测度 ν_a 和 ν_s，它们定义在 $(X, \mathcal{S})$ 上，并且 $\nu = \nu_a + \nu_s$ 和

$$\nu_a \ll \mu \quad \text{and} \quad \nu_s \perp \mu.$$

证明 设

$$b = \sup\{|\nu|(B) : B \in \mathcal{S} \text{ and } \mu(B) = 0\}.$$

对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，令 $B_k \in \mathcal{S}$ 满足如下条件

$$|\nu|(B_k) \geq b - \tfrac{1}{k} \quad \text{and} \quad \mu(B_k) = 0.$$

让

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

然后 $\mu(B) = 0$ 和 $|\nu|(B) = b$。

让$A = X \setminus B$。定义在$(X, \mathcal{S})$上的复合测度ν_a和ν_s，通过

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap A) \quad \text{and} \quad \nu_s(E) = \nu(E \cap B).$$

清楚地 $\nu = \nu_a + \nu_s$。

如果 $E \in \mathcal{S}$，则

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B) = \mu(E \cap A),$$

其中最后的等式成立，因为 $\mu(B) = 0$。上面的方程式意味着 $\nu_s \perp \mu$。

为了证明 $\nu_a \ll \mu$，假设 $E \in \mathcal{S}$ 和 $\mu(E) =$ 为 0。那么 $\mu(B \cup E) =$ 为 0，因此

$$b \geq |\nu|(B \cup E) = |\nu|(B) + |\nu|(E \setminus B) = b + |\nu|(E \setminus B),$$

这意味着 $|\nu|(E \setminus B) = 0$。因此

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap A) = \nu(E \setminus B) = 0,$$

这意味着 $\nu_a \ll \mu$。

The construction of ν_a and ν_s shows that if ν is a positive (or real) measure, then so are ν_a and ν_s.

我们现在已经证明了这个结果的所有部分，除了勒贝格分解的唯一性。为了证明唯一性，假设 ν_1 和 ν_2 是在 $(X, \mathcal{S})$ 上的复度量，使得 $\nu_1 \ll \mu$、$\nu_2 \perp \mu$ 和 $\nu = \nu_1 + \nu_2$。然后

$$\nu_1 - \nu_a = \nu_s - \nu_2.$$

上面方程的左侧相对于μ是绝对连续的，右侧相对于μ是奇异的。因此，两侧相对于μ既是绝对连续的，又是奇异的。因此，9.34式意味着$\nu_1 = \nu_a$和$\nu_2 = \nu_s$。■

拉东–尼科迪姆定理

如果 μ 是一个（正）测度，$h \in \mathcal{L}^1(\mu)$，并且 $\mathrm{d}\nu = h\,\mathrm{d}\mu$，那么 $\nu \ll \mu$。下一个结果给出了一个重要的逆命题——如果 μ 是 σ-有限的，那么每一个复测度相对于μ绝对连续的具有$h\,\mathrm{d}\mu$的形式，对于某个$h \in \mathcal{L}^1(\mu)$。μ是σ-有限的这一假设不能删除。

The result below was first proved by Radon and Otto Nikodym (1887–1974).

9.36 *Radon–Nikodym Theorem*

假设 μ 是可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个（正的）σ-有限测度。假设 ν 是（$X, \mathcal{S}$）上的一个复测度，且满足 $\nu \ll \mu$。则存在 $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ 使得 $\mathrm{d}\nu = h\,\mathrm{d}\mu$。

证明 首先考虑 μ 和 ν 都是有限（正）测度的情形。定义 $\varphi : L^2(\nu+\mu) \to \mathbf{R}$ 为

9.37 $$\varphi(f) = \int f\,\mathrm{d}\nu.$$

为证明 φ 是良好定义的，首先注意到如果 $f \in \mathcal{L}^2(\nu+\mu)$，那么

9.38 $$\int |f|\,d\nu \le \int |f|\,d(\nu+\mu) \le \bigl(\nu(X)+\mu(X)\bigr)^{1/2}\|f\|_{L^2(\nu+\mu)} < \infty,$$

其中中间的不等式来自将 Hölder 不等式（7.9）应用于函数 1 和 f。现在由 9.38 可知，对于 $f \in \mathcal{L}^2(\nu+\mu)$，$\int f\,\mathrm{d}\nu$ 是有意义的。此外，如果 $\mathcal{L}^2(\nu+\mu)$ 中的两个函数只在一个（$\nu+\mu$）测度为 0 的集合上不同，那么它们也只在一个 ν 测度为 0 的集合上不同。因此，按 9.37 中的定义，φ 作为 $L^2(\nu+\mu)$ 上的线性泛函是有意义的。

由于 $|\varphi(f)| \le \int |f|\,\mathrm{d}\nu$，9.38 表明 φ 是定义在 $L^2(\nu+\mu)$ 上的一个有界线性泛函。Riesz 表示定理（8.47）由此推出存在 $g \in \mathcal{L}^2(\nu+\mu)$ 使得

The clever idea of using Hilbert space techniques in this proof comes from John von Neumann (1903–1957).

$$\int f\,\mathrm{d}\nu = \int fg\,\mathrm{d}(\nu+\mu)$$

对于所有 $f \in \mathcal{L}^2(\nu+\mu)$。因此

9.39 $$\int f(1-g)\,\mathrm{d}\nu = \int fg\,\mathrm{d}\mu$$

对所有 $f \in \mathcal{L}^2(\nu+\mu)$。

如果 f 等于 $\{x \in X$ 的特征函数：$g(x) \ge 1\}$，那么 9.39 的左边小于或等于 0，而 9.39 的右边大于或等于 0；因此两边都为 0。于是 $\int fg\,\mathrm{d}\mu = 0$，这意味着（在这种对 f 的选择下）$\mu(\{x \in X\colon\ g(x) \ge 1\}) = 0$。

同样地，如果f等于$\{x \in X$ 的特征函数：$g(x) < 0\}$，那么 9.39 的左边大于或等于 0，而 9.39 的右边小于或等于 0；因此两边都为 0。因此 $\int fg \, d\mu = 0$，这意味着（在这种f的选择下）$\mu(\{x \in X\colon g(x) < 0\}) = 0$。

由于$\nu \ll \mu$，前面的两段暗示

$$\nu(\{x \in X : g(x) \geq 1\}) = 0 \quad \text{and} \quad \nu(\{x \in X : g(x) < 0\}) = 0.$$

因此，我们可以修改g (，例如通过在上述出现的两个集合上将g重新定义为$\frac{1}{2}$；这两个集合的ν-测度为0，且μ-测度为0)，并且从现在起我们可以假设对所有$x \in X$都有$0 \leq g(x) < 1$，并且9.39对所有$f \in \mathcal{L}^2(\nu + \mu)$成立。因此我们可以定义$h\colon X \to [0, \infty)$ 为

$$h(x) = \frac{g(x)}{1 - g(x)}.$$

设 $E \in \mathcal{S}$。对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，令

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{\chi_E(x)}{1-g(x)} & \text{if } \frac{\chi_E(x)}{1-g(x)} \leq k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Taking $f = \chi_E/(1 - g)$ in 9.39 would give $\nu(E) = \int_E h \, d\mu$, but this function f might not be in $\mathcal{L}^2(\nu + \mu)$ and thus we need to be a bit more careful.

于是$f_k \in \mathcal{L}^2(\nu + \mu)$。由 9.39 可得

$$\int f_k(1 - g) \, d\nu = \int f_k g \, d\mu.$$

当$k \to \infty$取极限并利用单调收敛定理（3.11）可得

9.40 $$\int_E 1 \, d\nu = \int_E h \, d\mu.$$

因此 $d\nu = h \, d\mu$，在 ν 和 μ 均为（正的）有限测度的情形下完成了证明［注意到 $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$，因为 h 是一个非负函数，并且我们可以在上述等式中取 $E = X$］。

现在放宽关于 μ 的假设，改为假设 μ 是一个 σ-有限测度。因此，存在 $\mathcal{S}$ 中的一列递增集合 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$，使得 $\bigcup_{k=1}^\infty X_k = X$，并且对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 都有 $\mu(X_k) < \infty$。对 $k \in \mathbf{Z}^+$，令 ν_k 和 μ_k 分别表示 ν 和 μ 在 X_k 上的 σ-代数上的限制，该代数由 $\mathcal{S}$ 中那些是 X_k 的子集的集合组成。于是有 $\nu_k \ll \mu_k$。因此，由我们已经证明的情形，存在一个非负函数 $h_k \in \mathcal{L}^1(\mu_k)$，使得 $d\nu_k = h_k \, d\mu_k$。如果 $j < k$，则

$$\int_E h_j \, d\mu = \nu(E) = \int_E h_k \, d\mu$$

对于每一个具有$E \subseteq X_j$的集合$E \in \mathcal{S}$；因此$\mu(\{x \in X_j\colon h_j(x) \neq h_k(x)\}) = 0$。于是存在一个$\mathcal{S}$-可测函数$h\colon X \to [0, \infty)$，使得

$$\mu\big(\{x \in X_k : h(x) \neq h_k(x)\}\big) = 0$$

对 $\mathbf{Z}^+$ 中的每个 $k \in$。现在可以使用单调收敛定理（3.11）来证明 9.40 对每个 $E \in \mathcal{S}$ 都成立。因此 $d\nu = h \, d\mu$，在 ν 为（正的）有限测度的情形下完成了证明。

现在将关于ν的假设放宽为假设ν是一个实测度。测度ν等于两个（正的）有限测度$|\nu| + \nu$和$|\nu| - \nu$之差的一半，其中每一个都相对于μ是绝对连续的。由上一段证明的情形，存在h_+、$h_- \in \mathcal{L}^1(\mu)$使得

$$d(|\nu| + \nu) = h_+ \, d\mu \quad \text{and} \quad d(|\nu| - \nu) = h_- \, d\mu.$$

取$h = \frac{1}{2}(h_+ — h_-)$，得到 $\mathrm{d}\nu = h \, \mathrm{d}\mu$，从而完成了在 ν 为实测度情况下的证明。

最后，如果 ν 是一个复测度，将上一段的结果应用于实测度 Re ν、Im ν，得到 h_{Re}、$h_{\mathrm{Im}} \in \mathcal{L}^1(\mu)$，使得 $\mathrm{d}(\mathrm{Re}\, \nu) = h_{\mathrm{Re}} \, \mathrm{d}\mu$ 且 $\mathrm{d}(\mathrm{Im}\, \nu) = h_{\mathrm{Im}} \, \mathrm{d}\mu$。取 $h = h_{\mathrm{Re}} + i h_{\mathrm{Im}}$，则有 $\mathrm{d}\nu = h \, \mathrm{d}\mu$，从而完成 ν 为复测度情形下的证明。 ■

由拉东–尼科迪姆定理给出的函数 h 在 μ-测度为 0 的集合上的改变下是唯一的。如果我们将 h 视为 $L^1(\mu)$ 的一个元素而不是 $\mathcal{L}^1(\mu)$，那么 h 的选择是唯一的。

当 $\mathrm{d}\nu = h \, \mathrm{d}\mu$ 时，一些作者使用记号 $h = \frac{d\nu}{d\mu}$，并且 h 被称为 ν 关于 μ 的 *Radon–Nikodym derivative*。

下一个结果是拉东–尼科迪姆定理的一个很好的推论。

9.41 *if ν is a complex measure, then* $\mathrm{d}\nu = h \, \mathrm{d}|\nu|$ *for some* h *with* $|h(x)| = 1$

(a) 假设 ν 是可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个实测度。则存在一个 $\mathcal{S}$-可测函数 h: $X \to \{-1, 1\}$，使得 $\mathrm{d}\nu = h \, \mathrm{d}|\nu|$。 (b) 假设 ν 是可测空间（$X, \mathcal{S}$）上的一个复测度。则存在一个 $\mathcal{S}$-可测函数 h: $X \to \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$，使得 $\mathrm{d}\nu = h \, \mathrm{d}|\nu|$。

证明 由于 $\nu \ll |\nu|$，Radon–Nikodym 定理（9.36）告诉我们，存在 $h \in \mathcal{L}^1(|\nu|)$ (，其 h 为实值，如果 ν 是一个实测度)，使得 $\mathrm{d}\nu = h \, \mathrm{d}|\nu|$。现在 9.10 蕴含 $\mathrm{d}|\nu| = |h| \, \mathrm{d}|\nu|$，这又蕴含 $|h| = 1$ 几乎处处（相对于 $|\nu|$）。在集合 $\{x \in X : |h(x)| \neq 1\}$ 上将 h 重新定义为 1，从而得到所需的结果。 ■

我们本可以通过在 Hahn 分解定理（9.23）中取 $h = \chi_A - \chi_B$ 来证明上述结果的 (a)。

相反地，我们可以通过使用上述结果的(a)来给出 Hahn 分解定理的一个新证明，并取

$$A = \{x \in X : h(x) = 1\} \quad \text{and} \quad B = \{x \in X : h(x) = -1\}.$$

我们还可以通过使用上述结果的 (a) 并进行以下操作，给出乔丹分解定理（9.30）的新证明。

$$\nu^+ = \chi_{\{x \in X : h(x) = 1\}} \, d|\nu| \quad \text{and} \quad \nu^- = \chi_{\{x \in X : h(x) = -1\}} \, d|\nu|.$$

$L^p(\mu)$的对偶空间

回忆一下，范数向量空间 V 的对偶空间是 V 上有界线性泛函的巴拿赫空间；V 的对偶空间记作 V'。还记得，如果 $1 \le p \le \infty$，那么对偶指数 p' 通过方程 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ 定义。

ℓ^p 的对偶空间可以与 $\ell^{p'}$ 在 $1 \le p < \infty$ 的情况下相对应，正如我们在 7.26 中看到的那样。现在我们准备证明关于任意（正的）测度的类似结果，将 $L^p(\mu)$ 的对偶空间与 $L^{p'}(\mu)$ 相识别 [有一个温和的限制，即当 $p = 1$ 时，μ 是 σ-有限的]。在 μ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的计数测度的特殊情况下，这一新结果简化为关于 ℓ^p 的先前结果。

对于$1 < p < \infty$，下一个结果与7.25的区别仅在于一个词，其中7.25中的“to”在此处变为“onto”。因此，我们已经知道（并将在证明中使用）映射 $h \mapsto \varphi_h$是从$L^{p'}(\mu)$到$\bigl(L^p(\mu)\bigr)'$的一个一对一线性映射，并且$\|\varphi_h\| = \|h\|_{p'}$对所有$h \in L^{p'}(\mu)$成立。下面结果的新内容是断言，$L^p(\mu)$上的每个有界线性泛函都可以表示为某个$h \in L^{p'}(\mu)$的形式$\varphi_h$。我们在证明这一新断言时使用的关键工具是拉东-尼科迪姆定理。

9.42 *dual space of* $L^p(\mu)$ *is* $L^{p'}(\mu)$

假设 μ 是一个（正的）测度，并且 $1 \le p < \infty$ [附加假设 μ 是一个 σ-有限测度，如果 $p = 1$]。对于 $h \in L^{p'}(\mu)$，定义 $\varphi_h : L^p(\mu) \to \mathbf{F}$ 为

$$\varphi_h(f) = \int fh \, d\mu.$$

然后 $h \mapsto \varphi_h$ 是从 $L^{p'}(\mu)$ 到 $\bigl(L^p(\mu)\bigr)'$ 的一一对应线性映射。进一步地，对于所有 $h \in L^{p'}(\mu)$，$\|\varphi_h\| = \|h\|_{p'}$。

证明 案例 $p = 1$ 留给读者作为练习。因此假设 $1 < p < \infty$。

假设 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的（正）测度，且 φ 是 $L^p(\mu)$ 上的有界线性泛函；换句话说，假设 $\varphi \in \bigl(L^p(\mu)\bigr)'$。

考虑首先μ是有限的（正的）测度的情况。定义一个函数$\nu : \mathcal{S} \to \mathbf{F}$，由

$$\nu(E) = \varphi(\chi_E).$$

如果 E_1、E_2、…… 是 $\mathcal{S}$ 中的互不相交的集合，则

$$\nu\Bigl(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Bigr) = \varphi\Bigl(\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k}\Bigr) = \varphi\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}\Bigr) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\chi_{E_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k),$$

其中第三项中的无穷级数在$L^p(\mu)$-范数下收敛到$\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k}$，第三个等式成立是因为$\varphi$是一个连续线性泛函。上述方程表明$\nu$是可数可加的。因此，$\nu$是$(X, \mathcal{S})$上的复测度[如果$\mathbf{F} = \mathbf{R}$，则为实测度]。

如果 $E \in \mathcal{S}$ 和 $\mu(E) = 0$，那么 χ_E 是 $L^p(\mu)$ 的 0 元，这蕴含 $\varphi(\chi_E) = 0$，这意味着 $\nu(E) = 0$。因此 $\nu \ll \mu$。由拉东–尼科迪姆定理（9.36），存在 $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ 使得 $\mathrm{d}\nu = h\,\mathrm{d}\mu$。因此

$$\varphi(\chi_E) = \nu(E) = \int_E h\,d\mu = \int \chi_E h\,d\mu$$

对每个 $E \in \mathcal{S}$。上述方程以及 φ 的线性性意味着

9.43 $$\varphi(f) = \int fh\,d\mu \quad \text{for every simple } \mathcal{S}\text{-measurable function } f\colon X \to \mathbf{F}.$$

由于每个有界的 $\mathcal{S}$-可测函数都是在 X 上由一列简单的 $\mathcal{S}$-可测函数一致收敛得到的（见 2.89），我们可以从 9.43 得出

9.44 $$\varphi(f) = \int fh\,d\mu \quad \text{for every } f \in L^\infty(\mu).$$

对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，令

$$E_k = \{x \in X : 0 < |h(x)| \le k\}$$

并定义 $f_k \in L^p(\mu)$ 为

9.45 $$f_k(x) = \begin{cases} \overline{h(x)}\,|h(x)|^{p'-2} & \text{if } x \in E_k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在

$$\int |h|^{p'} \chi_{E_k}\,d\mu = \varphi(f_k) \le \|\varphi\|\,\|f_k\|_p = \|\varphi\| \Big(\int |h|^{p'} \chi_{E_k}\,d\mu \Big)^{1/p},$$

其中第一个等式由9.44和9.45得到，而最后一个等式由9.45得到［这意味着 $|f_k(x)|^p = |h(x)|^{p'}\chi_{E_k}(x)$对于$x \in X$］。令$k \to \infty$取极限，通过单调收敛定理（3.11）可知，

$$\|h\|_{p'}^{p'} \le \|\varphi\|\,\|h\|_{p'}^{p'/p},$$

这意味着（使用等式 $p' - p'/p = 1$）即

$$\|h\|_{p'} \le \|\varphi\|.$$

因此 $h \in L^{p'}(\mu)$。由于每个 $f \in L^p(\mu)$ 都可以在 $L^p(\mu)$ 范数下由 $L^\infty(\mu)$ 中的函数逼近，式 9.44 现表明 $\varphi = \varphi_h$，从而完成了 μ 为有限（正）测度情形下的证明。

现在将μ是有限（正）测度的假设放宽为μ是（正）测度的假设。对于 $E \in \mathcal{S}$，令$\mathcal{S}_E = \{A \in \mathcal{S} : A \subseteq E\}$，并令$\mu_E$为在$(E, \mathcal{S}_E)$上由$\mu_E(A) = \mu(A)$对$A \in \mathcal{S}_E$所定义的（正）测度。我们可以将$L^p(\mu_E)$与$L^p(\mu)$中在$E$之外（几乎处处）为零的函数所成的子空间加以识别。在这种识别下，令 $\varphi_E = \varphi|_{L^p(\mu_E)}$。则$\varphi_E$是$L^p(\mu_E)$上的一个有界线性泛函，并且$\|\varphi_E\| \le \|\varphi\|$。

如果$E \in \mathcal{S}$和$\mu(E) < \infty$，那么我们已经证明的有限测度情形在应用于φ_E时意味着存在唯一的$h_E \in L^{p'}(\mu_E)$使得

9.46 $$\varphi(f) = \int_E f h_E \, d\mu \quad \text{for all } f \in L^p(\mu_E).$$

如果 D、$E \in \mathcal{S}$ 和 $D \subseteq E$ 满足 $\mu(E) < \infty$，则对几乎每个 $x \in D$ (有 $h_D(x) = h_E(x)$，使用结果)的唯一性部分。

对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，存在 $f_k \in L^p(\mu)$ 使得

9.47 $$\|f_k\|_p \leq 1 \quad \text{and} \quad |\varphi(f_k)| > \|\varphi\| - \tfrac{1}{k}.$$

支配收敛定理（3.31）意味着

$$\lim_{n\to\infty} \bigl\|f_k \chi_{\{x \in X \,:\, |f_k(x)| > \frac{1}{n}\}} - f_k\bigr\|_p = 0$$

对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$。因此，对于足够大的 n，我们可以用 $f_k \chi_{\{x \in X \,:\, |f_k(x)| > \frac{1}{n}\}}$ 替换 f_k，并且 9.47 仍然成立。换言之，对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，我们可以假设存在 $n_k \in \mathbf{Z}^+$，使得对于每个 $x \in X$，要么 $|f_k(x)| > 1/n_k$，要么 $f_k(x) = 0$。

设 $D_k = \{x \in X\colon\ |f_k(x)| > 1/n_k\}$。则 $\mu(D_k) < \infty$［因为 $f_k \in L^p(\mu)$］并且

9.48 $$f_k(x) = 0 \text{ for all } x \in X \setminus D_k.$$

对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，令 $E_k = D_1 \cup \cdots \cup D_k$。由于 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$，我们看到如果 $j < k$，则对几乎每一个 $x \in E_j$ 都有 $h_{E_j}(x) = h_{E_k}(x)$。此外，9.47 和 9.48 表明

9.49 $$\lim_{k\to\infty} \|h_{E_k}\|_{p'} = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_{E_k}\| = \|\varphi\|.$$

令 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$。令 h 为如下函数：对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，它在 E_k 上几乎处处等于 h_{E_k}，并且在 $X \setminus E$ 上等于 0。单调收敛定理和 9.49 表明

$$\|h\|_{p'} = \|\varphi\|.$$

如果 $f \in L^p(\mu_E)$，则根据支配收敛定理，$\lim_{k\to\infty} \|f - f\chi_{E_k}\|_p = 0$。因此，如果 $f \in L^p(\mu_E)$，则

9.50 $$\varphi(f) = \lim_{k\to\infty} \varphi(f\chi_{E_k}) = \lim_{k\to\infty} \int f\chi_{E_k} h \, d\mu = \int fh \, d\mu,$$

其中，第一个等式由 φ 的连续性得到，第二个等式由将 9.46 应用于每个 E_k 得到［其有效性因为 $\mu(E_k) < \infty$］，第三个等式由支配收敛定理得到。

如果 D 是 $X \setminus E$ 的一个 $\mathcal{S}$-可测子集，且具有 $\mu(D) < \infty$，那么 $\|h_D\|_{p'} = 0$，因为否则我们将有 $\|h + h_D\|_{p'} > \|h\|_{p'}$，并且由 $h + h_D$ 在 $L^p(\mu)$ 上诱导的线性泛函的范数将大于 $\|\varphi\|$，尽管它在 $L^p(\mu_{E\cup D})$ 上与 φ 一致。由于 $\|h_D\|_{p'} = 0$，我们从 9.50 得到，对所有 $f \in L^p(\mu_{E\cup D})$，$\varphi(f) = \int fh \, d\mu$。

$L^p(\mu)$ 的每个元素都可以在范数意义下由 $L^p(\mu_E)$ 的元素加上定义在 $X \setminus E$ 的有限测度子集上的函数来逼近。因此，上述段落表明，对所有 $f \in L^p(\mu)$ 都有 $\varphi(f) = \int fh \, d\mu$，从而完成证明。 ■

练习 9B

1 假设 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的实测度。证明 ν 的哈恩分解几乎是唯一的，意思是如果 A，B 和 A'，B' 是满足哈恩分解定理（9.23）的对，那么

$$|\nu|(A \setminus A') = |\nu|(A' \setminus A) = |\nu|(B \setminus B') = |\nu|(B' \setminus B) = 0.$$

假设 μ 是一个（正的）测度，g，$h \in \mathcal{L}^1(\mu)$。证明 $g\,\mathrm{d}\mu \perp h\,\mathrm{d}\mu$ 当且仅当 $g(x)h(x) =$ 对几乎每个 $x \in X$ 都为 0。

3 假设 ν 和 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的复测度。证明以下命题是等价的。

(a) $\nu \perp \mu$. (b) $|\nu| \perp |\mu|$. (c) $\operatorname{Re}\nu \perp \mu$ 和 $\operatorname{Im}\nu \perp \mu$。

假设 ν 和 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的复测度。证明如果 $\nu \perp \mu$，则 $|\nu + \mu| = |\nu| + |\mu|$ 和 $\|\nu + \mu\| = \|\nu\| + \|\mu\|$。

假设 ν 和 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的有限（正）测度。证明当且仅当 $\nu \perp \mu$ 时 $\|\nu - \mu\| = \|\nu\| + \|\mu\|$。

6 假设 μ 是一个复测度或正测度，定义在可测空间（$X, \mathcal{S}$）上。证明:

$$\{\nu \in \mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S}) : \nu \perp \mu\}$$

是$\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$的一个闭子空间。

7 使用康托尔集证明，存在定义在 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的一个（正）测度 ν，使得 $\nu \perp \lambda$ 且 $\nu(\mathbf{R}) \neq 0$，但对每个 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $\nu(\{x\}) = 0$；这里 λ 表示 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集的 σ-代数 $\mathcal{B}$ 上的勒贝格测度。

[*The second bullet point in Example 9.29 does not provide an example of the desired behavior because in that example,* $\nu(\{r_k\}) \neq 0$ *for all* $k \in \mathbf{Z}^+$ *with* $w_k \neq 0$.]

8 假设 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个实测度。证明

$$\nu^+(E) = \sup\{\nu(D) : D \in \mathcal{S} \text{ and } D \subseteq E\}$$

和

$$\nu^-(E) = -\inf\{\nu(D) : D \in \mathcal{S} \text{ and } D \subseteq E\}$$

对于所有 $E \in \mathcal{S}$。

9 假设 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上的一个（正的）有限测度，且 h 是 $\mathcal{L}^1(\mu)$ 中的一个非负函数。因此 $h\,\mathrm{d}\mu \ll \mathrm{d}\mu$。找到 h 上的一个合理条件，使其与条件 $\mathrm{d}\mu \ll h\,\mathrm{d}\mu$ 等价。

10 设 μ 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上的一个（正）测度，而 ν 是 $(X,\mathcal{S})$ 上的一个复测度。证明以下条件等价。

（a）$\nu \ll \mu$
。（b）
$|\nu| \ll \mu$。
（c）$\nu \ll \mu$ 的实部和 $\nu \ll \mu$ 的虚部。

11 设 μ 是可测空间（$X,\mathcal{S}$）上的一个（正）测度，而 ν 是（$X,\mathcal{S}$）上的一个实值测度。证明 $\nu \ll \mu$ 当且仅当 $\nu^+ \ll \mu$ 且 $\nu^- \ll \mu$。

12 设 μ 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上的一个（正）测度。证明:

$$\{\nu \in \mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S}) : \nu \ll \mu\}$$

是 $\mathcal{M}_{\mathbf{F}}(\mathcal{S})$ 的一个闭子空间。

13 给出一个例子，说明如果去掉 σ-有限性假设，拉东–尼科迪姆定理（9.36
）可能不成立。

14 假设 μ 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上的一个（正的）σ-有限测度，而 ν 是 $(X,\mathcal{S})$ 上的一个复测度。证明下列条件是等价的。

（a）$\nu \ll \mu$。（b）对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于每个满足 $\mu(E) < \delta$ 的集合 $E \in \mathcal{S}$，$|\nu(E)| < \varepsilon$。（c）对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于每个满足 $\mu(E) < \delta$ 的集合 $E \in \mathcal{S}$，$|\nu|(E) < \varepsilon$。

15 证明 9.42［在附加假设 μ 是一个 σ-finite（正）测度 的情况下］，在 $p = 1$ 的情形下。

16 解释如果 $p = \infty$，9.42 的证明在哪里失效。

17 证明如果 μ 是一个（正）测度且 $1 < p < \infty$，那么 $L^p(\mu)$ 是自反的。[*See the definition before Exercise 19 in Section 7B for the meaning of* 自反.]

18 证明 $L^1(\mathbf{R})$ 不是自反的。

第10章
Linear Maps on Hilbert Spaces

一种称为 *adjoint* 的特殊工具有助于深入理解希尔伯特空间上线性映射的行为。本章从研究伴随算子及其与线性映射的零空间和值域之间的联系开始。

随后我们讨论与希尔伯特空间上的算子可逆性相关的各种问题。这些问题引出谱，它是一组数，能够提供关于算子的关键信息。

本章随后考察希尔伯特空间上的若干特殊类型的算子：自伴算子、正规算子、等距算子、酉算子、积分算子以及紧算子。

即使在无限维的希尔伯特空间上，紧算子也展现出许多符合有限维线性代数预期的特性。我们将看到，紧算子的强有力的谱定理与有限维版本高度相似。此外，我们还为任意紧算子发展奇异值分解，同样与有限维结果非常相近。

The Botanical Garden at Uppsala University (the oldest university in Sweden, founded in 1477), where Erik Fredholm (1866–1927) was a student. The theorem called the Fredholm Alternative, which we prove in this chapter, states that a compact operator minus a nonzero scalar multiple of the identity operator is injective if and only if it is surjective.

10A 共轭算子与可逆性

希尔伯特空间上线性映射的伴随算子

下一个 de finition 提供了研究 Hilbert 上线性映射的一个关键工具 空格。

10.1 定义 *adjoint;* T^*

假设 V 和 W 是希尔伯特空间，且 $T : V \to W$ 是有界线性映射。T 的 *adjoint* 是函数 $T^* : W \to V$，满足

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle$$

对于每一个 $f \in V$ 和每一个 $g \in W$。

为了说明上述定义为何是合理的，取定 $g \in W$。考虑在 V 上由 $f \mapsto \langle Tf, g\rangle$ 定义的线性泛函。该线性泛函是有界的，因为

The word 伴随 has two unrelated meanings in linear algebra. We need only the meaning defined above.

$$|\langle Tf, g\rangle| \leq \|Tf\|\,\|g\| \leq \|T\|\,\|g\|\,\|f\|$$

对所有 $f \in V$；因此线性泛函 $f \mapsto \langle Tf, g\rangle$ 的范数至多为 $\|T\|\,\|g\|$。由 Riesz 表示定理（8.47），存在 V (中的唯一元素，其范数至多为 $\|T\|\,\|g\|$)，使得该线性泛函可以通过与其取内积来给出。我们称这个唯一的元素为 T^*g。换言之，T^*g 是 V 中满足以下条件的唯一元素：

10.2 $$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle$$

对于每个$f \in V$。此外，

10.3 $$\|T^*g\| \leq \|T\|\|g\|.$$

在 10.2 中，注意左边的内积是 W 中的内积，而右边的内积是 V 中的内积。

10.4 示例 *multiplication operators*

设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个测度空间，并且 $h \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$。定义 *multiplication operator* $M_h : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$，如下定义：

$$M_h f = fh.$$

那么M_h是一个有界线性映射，并且$\|M_h\| \leq \|h\|_\infty$。因为 se

$$\langle M_h f, g\rangle = \int fh\overline{g}\, d\mu = \langle f, M_{\overline{h}}g\rangle$$

The complex conjugates that appear in this example are unnecessary (but they do no harm) if $\mathbf{F} = \mathbf{R}$.

对于所有 f，$g \in L^2(\mu)$，我们有 $M_h{}^* = M_{\overline{h}}$。

10.5 示例 *linear maps induced by integration*

假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ 是 σ-有限测度空间且 $K \in \mathcal{L}^2(\mu \times \nu)$。定义一个线性映射 $\mathcal{I}_K : L^2(\nu) \to L^2(\mu)$ 为

10.6 $$(\mathcal{I}_K f)(x) = \int_Y K(x,y) f(y)\, d\nu(y)$$

对于$f \in L^2(\nu)$和$x \in X$。为了验证这个定义是否合理，首先注意到没有令人担忧的可测性问题，因为对于每个$x \in X$，函数$y \mapsto K(x, y)$是在Y (上的$\mathcal{T}$-可测函数，参见5.9)。

假设$f \in L^2(\nu)$。使用柯西-施瓦茨不等式 (8.11) 或 Hölder 不等式 (7.9) 来证明

10.7 $$\int_Y |K(x,y)|\, |f(y)|\, d\nu(y) \le \Big(\int_Y |K(x,y)|^2\, d\nu(y)\Big)^{1/2} \|f\|_{L^2(\nu)}.$$

对于每个 $x \in X$。将上述不等式两边平方，然后在 X 上对 μ 积分得到

$$\begin{aligned}\int_X \Big(\int_Y |K(x,y)|\, |f(y)|\, d\nu(y)\Big)^2 d\mu(x) &\le \Big(\int_X \int_Y |K(x,y)|^2\, d\nu(y)\, d\mu(x)\Big) \|f\|^2_{L^2(\nu)} \\ &= \|K\|^2_{L^2(\mu\times\nu)} \|f\|^2_{L^2(\nu)},\end{aligned}$$

最后一行由Tonelli定理（5.28）得到成立。上面的不等式意味着10.7左侧的积分对μ-几乎每个$x \in X$都是有限的。因此，10.6中的积分对μ-几乎每个$x \in X$都有意义。现在，最后的上述不等式表明

$$\|\mathcal{I}_K f\|^2_{L^2(\mu)} = \int_X |(\mathcal{I}_K f)(x)|^2\, d\mu(x) \le \|K\|^2_{L^2(\mu\times\nu)} \|f\|^2_{L^2(\nu)}.$$

因此，$\mathcal{I}_K$ 是从 $L^2(\nu)$ 到 $L^2(\mu)$ 的有界线性映射，并且

10.8 $$\|\mathcal{I}_K\| \le \|K\|_{L^2(\mu\times\nu)}.$$

定义 $K^* : Y \times X \to \mathbf{F}$ 为

$$K^*(y,x) = \overline{K(x,y)},$$

并注意 $K^* \in \mathcal{L}^2(\nu \times \mu)$。因此 $\mathcal{I}_{K^*} : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ 是一个有界线性映射。使用托内利定理 (5.28) 和富比尼定理 (5.32)，我们得到

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{I}_K f, g\rangle &= \int_X \int_Y K(x,y) f(y)\, d\nu(y)\, \overline{g(x)}\, d\mu(x) \\ &= \int_Y f(y) \int_X K(x,y)\, \overline{g(x)}\, d\mu(x)\, d\nu(y) \\ &= \int_Y f(y)\, \overline{(\mathcal{I}_{K^*} g)(y)}\, d\nu(y) = \langle f, \mathcal{I}_{K^*} g\rangle\end{aligned}$$

对于所有 $f \in L^2(\nu)$ 和所有 $g \in L^2(\mu)$。因此

10.9 $$(\mathcal{I}_K)^* = \mathcal{I}_{K^*}.$$

10.10 示例 *linear maps induced by matrices*

作为前一个例子的特例，假设 m，$n \in$ 是 $^+$ 的整数计数测度，μ 是 $\{1, \ldots, m\}$ 上的计数测度，ν 是 $\{1, \ldots, n\}$ 上的计数测度，且 K 是一个 $m \times n$ 的矩阵，元素为 $K(i, j) \in$ 在第 i 行，第 j 列。在这种情况下，由积分诱导的线性映射 $\mathcal{I}_K : L^2(\nu) \to L^2(\mu)$ 由以下方程给出

$$(\mathcal{I}_K f)(i) = \sum_{j=1}^{n} K(i,j) f(j)$$

对于 $f \in L^2(\nu)$。如果我们将 $L^2(\nu)$ 和 $L^2(\mu)$ 与 $\mathbf{F}^n$ 和 $\mathbf{F}^m$ 等同，并将 $\mathbf{F}^n$ 和 $\mathbf{F}^m$ 的元素视为列向量，那么上面的方程显示了线性映射 $\mathcal{I}_K : \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}^m$ 仅仅是通过 K 进行矩阵乘法。

在此设置中，K^* 被称为 *conjugate transpose* 的 K，因为 n 行 m 列矩阵 K^* 是通过交换 K 的行和列后，再取每个元素的复共轭得到的。

前面的例子现在表明

$$\|\mathcal{I}_K\| \leq \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |K(i,j)|^2\Big)^{1/2}.$$

此外，前面的例子显示了线性映射的伴随算子，即乘以矩阵 K 的线性映射，是乘以共轭转置矩阵 K^* 的线性映射，这一结果可能是你在线性代数中熟悉的。

如果 T 是从希尔伯特空间 V 到希尔伯特空间 W 的有界线性映射，则伴随算子 T^* 被定义为从 W 到 V 的函数。我们现在证明伴随算子 T^* 是线性且有界的。回顾一下，$\mathcal{B}(V, W)$ 表示从 V 到 W 的有界线性映射的巴拿赫空间。

10.11 T^* *is a bounded linear map*

假设 V 和 W 是希尔伯特空间，$T \in \mathcal{B}(V, W)$。然后

$$T^* \in \mathcal{B}(W, V), \quad (T^*)^* = T, \quad \text{and} \quad \|T^*\| = \|T\|.$$

证明 假设 g_1，$g_2 \in W$。然后

$$\begin{aligned}\langle f, T^*(g_1 + g_2)\rangle = \langle Tf, g_1 + g_2\rangle &= \langle Tf, g_1\rangle + \langle Tf, g_2\rangle \\ &= \langle f, T^*g_1\rangle + \langle f, T^*g_2\rangle \\ &= \langle f, T^*g_1 + T^*g_2\rangle\end{aligned}$$

对于所有$f \in V$，因此$T^*(g_1 + g_2) = T^*g_1 + T^*g_2$。

假设 $\alpha \in \mathbf{F}$ 和 $g \in W$。然后

$$\langle f, T^*(\alpha g)\rangle = \langle Tf, \alpha g\rangle = \overline{\alpha}\langle Tf, g\rangle = \overline{\alpha}\langle f, T^*g\rangle = \langle f, \alpha T^*g\rangle$$

对于所有 $f \in V$。因此 $T^*(\alpha g) = \alpha T^*g$。

我们现在已经证明 $T^* : W \to V$ 是一个线性映射。从10.3中，我们可以看到 T^* 是有界的。换句话说，$T^* \in \mathcal{B}(W, V)$。

由于$T^* \in \mathcal{B}(W, V)$，其伴随算子（$T^*$）$^*: V \to W$ 是定义良好的。设 $f \in V$。则

$$\langle (T^*)^* f, g\rangle = \overline{\langle g, (T^*)^* f\rangle} = \overline{\langle T^* g, f\rangle} = \langle f, T^* g\rangle = \langle Tf, g\rangle$$

对所有 $g \in W$。因此 $(T^*)^* f = Tf$，从而 $(T^*)^* = T$。

由 10.3 可见，$\|T^*\| \leq \|T\|$。将该不等式中 T 替换为 T^*，则有

$$\|T^*\| \leq \|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|.$$

由于上面第一项和最后一项相同，第一个不等式必须是等式。换句话说，我们有 $\|T^*\| = \|T\|$。

下列结果的部分 (a) 和 (b) 显示，如果 V 和 W 是实 Hilbert 空间，那么从 $\mathcal{B}(V, W)$ 到 $\mathcal{B}(W, V)$ 的函数 $T \mapsto T^*$ 是线性映射。然而，如果 V 和 W 是非零复 Hilbert 空间，那么 $T \mapsto T^*$ 不是线性映射，因为 (b) 中有复共轭。

10.12 *properties of the adjoint*

假设 V、W 和 U 是希尔伯特空间。那么

(a) $(S + T)^* = S^* + T^*$ 对所有 $S, T \in \mathcal{B}(V, W)$;

(b) 对所有 $\alpha \in \mathbf{F}$ 以及所有 $T \in \mathcal{B}(V、W)$，$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$；(c) $I^* = I$，其中 I 是 V 上的恒等算子；(d) 对所有 $T \in \mathcal{B}(V、W)$ 以及 $S \in \mathcal{B}(W、U)$，$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$。

证明

(a) (a) 的证明留给读者作为练习。

(b) 假设 $\alpha \in \mathbf{F}$ 且 $T \in \mathcal{B}(V, W)$。如果$f \in V$ 且 $g \in W$，则

$$\langle f, (\alpha T)^* g\rangle = \langle \alpha T f, g\rangle = \alpha \langle Tf, g\rangle = \alpha \langle f, T^* g\rangle = \langle f, \overline{\alpha} T^* g\rangle.$$

因此（αT）$^* g \equiv \overline{\alpha} T^* g$，如所期望。

(c) 如果f，$g \in V$，则

$$\langle f, I^* g\rangle = \langle If, g\rangle = \langle f, g\rangle.$$

因此$I^* g = g$，符合预期。

(d) 假设 $T \in \mathcal{B}(V、W)$ 和 $S \in \mathcal{B}(W、U)$。如果$f \in V$ 和 $g \in U$，那么

$$\langle f, (S \circ T)^* g\rangle = \langle (S \circ T) f, g\rangle = \langle S(Tf), g\rangle = \langle Tf, S^* g\rangle = \langle f, T^*(S^* g)\rangle.$$

因此 $(S \circ T)^* g = T^*(S^* g) = (T^* \circ S^*)(g)$。从而 $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$，如所需。

关于伴随算子的零空间和像

下一个结果展示了线性映射及其伴随映射的零空间与值域之间的关系。希尔伯特空间中每个子集的正交补是封闭的【见8.40(a)】。然而，定义在希尔伯特空间上的有界线性映射的值域不一定是封闭的（参见示例10.15或练习9和10中的例子）。因此，在下面结果的(b)和(d)部分，我们必须取值域的闭包。

10.13 *null space and range of* T^*

设 V 和 W 是希尔伯特空间，且 $T \in \mathcal{B}(V, W)$。则

(a) null $T^* = (\text{范围 } T)^\perp$; (b
) 范围 $T^* = (\text{null } T)^\perp$; (c)
null $T = (\text{范围 } T^*)^\perp$; (d)
范围 $T = (\text{null } T^*)^\perp$.

证明 我们首先证明 (a)。设 $g \in W$。然后

$$
\begin{aligned}
g \in \text{null } T^* &\iff T^* g = 0 \\
&\iff \langle f, T^* g \rangle = 0 \text{ for all } f \in V \\
&\iff \langle T f, g \rangle = 0 \text{ for all } f \in V \\
&\iff g \in (\text{range } T)^\perp.
\end{aligned}
$$

因此，null $T^* = (\text{range } T)^\perp$，证明了(a)。

如果我们取 (a) 两边的正交补，就得到 (d)，其中我们使用了 8.41。将 T 替换为 T^* 在 (a) 中得到 (c)，其中我们使用了 10.11。最后，将 T 替换为 T^* 在 (d) 中得到 (b)。 ■

作为上述结果的推论，我们得到以下结果，它提供了一种有用的方法来判断线性映射是否具有稠密的值域。

10.14 *necessary and sufficient condition for dense range*

假设 V 和 W 是希尔伯特空间，$T \in \mathcal{B}(V, W)$。那么 T 当且仅当 T^* 是单射时，具有稠密范围。

证明 由 10.13(d) 可见，T 具有稠密值域当且仅当 $(\text{null } T^*)^\perp = W$，这当且仅当 null $T^* = \{0\}$，这又当且仅当 T^* 是单射。 ■

使用上述结果的优点在于：为了判定 Hilbert 空间之间的一个有界线性映射 T 是否具有稠密值域，我们只需判定方程 $T^* g = 0$ 是否只有零解。下一个例子说明了这一过程。

10.15 示例 *Volterra operator*

Volterra operator 是线性映射 $\mathcal{V}: L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$，由以下定义

$$(\mathcal{V}f)(x) = \int_0^x f(y)\,dy$$

对于 $f \in L^2([0,1])$ 和 $x \in [0,1]$；这里 dy 表示 $d\lambda(y)$，其中 λ 是区间 [0, 1] 上通常的勒贝格测度。

为证明 $\mathcal{V}$ 是从 $L^2([0,1])$ 到 $L^2([0,1])$ 的有界线性映射，令 K 为定义在 [0, 1] × [0, 1] 上的函数，其定义为

$$K(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > y, \\ 0 & \text{if } x \leq y. \end{cases}$$

换言之，K 是单位正方形对角线下方的开三角形的特征函数。显然 $K \in \mathcal{L}^2(\lambda \times \lambda)$ 和 $\mathcal{V} = \mathcal{I}_K$ 如 10.6 中所定义。因此 $\mathcal{V}$ 是一个有界线性映射 。

Vito Volterra (1860–1940) was a pioneer in developing functional analytic techniques to study integral equations.

从 $L^2([0,1])$ 到 $L^2([0,1])$，以及 $\|\mathcal{V}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (增加 10.8)。

设 $K^*(y,x) = K(x,y)$。那么 K^* 是单位正方形对角线上方的开三角形的示性函数，并且 $\mathcal{V}^* = \mathcal{I}_{K^*}$ (见 10.9)。因此

10.16 $$(\mathcal{V}^*f)(x) = \int_x^1 f(y)\,dy = \int_0^1 f(y)\,dy - \int_0^x f(y)\,dy$$

对于 $f \in L^2([0,1])$ 和 $x \in [0,1]$.

现在我们可以证明 $\mathcal{V}^*$ 是单射。为此，假设 $f \in L^2([0,1])$ 且 $\mathcal{V}^*f = 0$。对 10.16 的两边关于 x 求导，并使用勒贝格微分定理（4.19），我们得出 $f = 0$。因此 $\mathcal{V}^*$ 是单射。于是沃尔泰拉算子 $\mathcal{V}$ 具有稠密的值域（由 10.14 ）。

尽管值域 $\mathcal{V}$ 在 $L^2([0,1])$ 中是稠密的，但它并不等于 $L^2([0,1])$ (，因为值域 $\mathcal{V}$ 的每个元素都是定义在 [0, 1] 上并在 0 处为零的连续函数)。因此，Volterra 算子 $\mathcal{V}$ 在 $L^2([0,1])$ 中具有稠密但非闭的值域。

算子的可逆性

从一个向量空间到其自身的线性映射如此重要，以至于它们有一个特殊的名称和特殊的记号。

10.17 定义 ***operator;*** $\mathcal{B}(V)$

- 一个*operator*是从一个向量空间到其自身的线性映射。
- 如果V是一个赋范向量空间，那么$\mathcal{B}(V)$表示V上的有界算子所构成的赋范向量空间。换句话说，$\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(V,\ V)$。

10.18 定义 *invertible;* T^{-1}

- 向量空间 V 上的算子 T 称为 *invertible*，如果 T 是从 V 到 V 的一一且满射的线性映射。
- 等价地，算子 $T: V \to V$ 可逆当且仅当存在一个算子 $T^{-1}: V \to V$ 使得 $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I$。

上面第二个要点等同于第一个要点，因为如果线性映射 $T: V \to V$ 是一对一且满射的，那么逆函数 $T^{-1}: V \to V$ 自动是线性的（如你应该验证的那样）。

此外，如果 V 是一个巴拿赫空间，且 T 是在 V 上的有界算子并且可逆，那么其逆算子 T^{-1} 必然是有界的，这可由有界逆定理（6.83）得到。

下一个结果表明，逆算子与伴随算子能够很好地协同工作。在证明中，我们采用一种常见约定：用与乘法相同的记号来表示线性映射的复合。换句话说，如果 S 和 T 是线性映射，并且 $S \circ T$ 有意义，那么从现在起

$$ST = S \circ T.$$

10.19 *inverse of the adjoint equals adjoint of the inverse*

Hilbert 空间上的有界算子 T 当且仅当 T^* 可逆。此外，如果 T 可逆，则 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$。

证明 首先假设 T 是可逆的。对方程 $T^{-1}T = TT^{-1} = I$ 的三边同时取伴随，得到

$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^*T^* = I,$$

这意味着 T^* 是可逆的，并且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$。

现在假设 T^* 是可逆的。那么根据刚刚证明的方向，$(T^*)^*$ 是可逆的。因为 $(T^*)^* = T$，这意味着 T 是可逆的，从而完成证明。 ■

范数 wo 与线性映射的组合配合良好，如下所示 t 结果。

10.20 *norm of a composition of linear maps*

设 U、V、W 是赋范向量空间，$T \in \mathcal{B}(U、V)$，以及 $S \in \mathcal{B}(V、W)$。则

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

证明 如果 $f \in U$，则

$$\|(ST)(f)\| = \|S(Tf)\| \leq \|S\| \, \|Tf\| \leq \|S\| \, \|T\| \, \|f\|.$$

因此 $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$，符合预期。 ■

与从一个向量空间到另一个向量空间的线性映射不同，在同一向量空间上的算子可以互相组合并且可以进行幂运算。

10.21 定义 T^k

假设 T 是向量空间 V 上的一个算子。

- 对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，运算符 T^k 由 $T^k = \underbrace{TT \cdots T}_{k \text{ times}}$ 定义。
- $T0$ 被定义为恒等算符 $I: V \to V$。

你应该验证算子的幂满足通常的算术规则：$T^j T^k = T^{j+k}$ 和 $(T^j)^k = T^{jk}$，对于 j，$k \in \mathbf{Z}^+$。此外，如果 V 是一个赋范向量空间并且 $T \in \mathcal{B}(V)$，那么

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k$$

对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，如使用归纳法在 10.20 中得到的结论。

回忆一下，如果 $z \in \mathbf{C}$ 且 $|z| < 1$，那么等比数列求和公式显示：

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

下一个结果表明，该公式可以推广到巴拿赫空间上的算子。

10.22 *operators in the open unit ball centered at the identity are invertible*

如果 T 是巴拿赫空间上的一个有界算子，且 $\|T\| < 1$，则 $I - T$ 是可逆的，并且

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

证明 假设 T 是 Banach 空间 V 上的有界算子，且 $\|T\| < 1$。那么

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1-\|T\|} < \infty.$$

因此，6.47 和 6.41 表明无穷级数 $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ 在 $\mathcal{B}(V)$ 中收敛。现在

10.23 $$(I-T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k = \lim_{n\to\infty}(I-T)\sum_{k=0}^{n} T^k = \lim_{n\to\infty}(I-T^{n+1}) = I,$$

最后的等式成立，因为$\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1}$和$\|T\| < 1$. 类似地，

10.24 $$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\Big)(I-T) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} T^k(I-T) = \lim_{n\to\infty}(I-T^{n+1}) = I.$$

方程10.23和10.24表明$I-T$是可逆的，并且（$I-T$）$^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$。

现在我们利用之前的结果来证明巴拿赫空间上可逆有界算子的集合是开集。

10.25 *invertible bounded operators form an open set*

假设 V 是一个巴拿赫空间。那么 $\{T \in \mathcal{B}(V) : T \text{ 是可逆的 }\}$ 是 $\mathcal{B}(V)$ 的一个开子集。

证明 设 $T \in \mathcal{B}(V)$ 是可逆的。设 $S \in \mathcal{B}(V)$ 和

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

然后

$$\|I - T^{-1}S\| = \|T^{-1}T - T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\|\,\|T - S\| < 1.$$

因此，由 10.22 可知 $I - (I - T^{-1}S)$ 是可逆的；换言之，$T^{-1}S$ 是可逆的。

现在 $S = T(T^{-1}S)$。因此 S 是两个可逆算子的乘积，这意味着 S 可逆，且其逆为 $S^{-1} = (T^{-1}S)^{-1}T^{-1}$。

我们已经证明，以 T 为中心、半径为 $\|T^{-1}\|^{-1}$ 的开球中的每个元素都是可逆的。因此，$\mathcal{B}(V)$ 的可逆元素集合是开集。 ■

10.26 定义 *left invertible; right invertible*

假设 T 是 Banach 空间 V 上的一个有界算子。

- T 如果存在$S \in \mathcal{B}(V)$使得$ST = I$，则称为*left invertible*。
- T 如果存在$S \in \mathcal{B}(V)$使得$TS = I$，则称为*right invertible*。

线性代数的一个精彩定理指出，对于有限维向量空间上的算子，左可逆性、右可逆性和可逆性是等价的。下一个例子展示了这个结果在无限维希尔伯特空间上不成立。

10.27 示例 *left invertibility is not equivalent to right invertibility*

定义 *right shift* $T : \ell^2 \to \ell^2$ 和 *left shift* $S : \ell^2 \to \ell^2$ 为

$$T(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

和

$$S(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots).$$

因为 $ST = I$，我们看到 T 是左可逆的，S 是右可逆的。然而，T 既不可逆也不可右可逆，因为它不是满射，而 S 既不可逆也不可左可逆，因为它不是单射。

下面的结果10.29给出了希尔伯特空间上算子左可逆的等价条件。在有限维向量空间上，左可逆性等价于单射性。下面的例子表明，在无限维希尔伯特空间上这一点不成立。因此，我们不能在10.29的(c)部分中去掉闭值域的要求。

10.28 示例 *injective but not left invertible*

定义 $T: \ell^2 \to \ell^2$ 为

$$T(a_1, a_2, a_3, \ldots) = \Bigl(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots\Bigr).$$

然后 T 是 ℓ^2 上的一个单射有界算子。

假设 S 是 ℓ^2 上的一个算子，使得 $ST = I$。对于 $n \in \mathbf{Z}^+$，令 $e_n \in \ell^2$ 为在第 n^{th} 个分量为 1、其余分量为 0 的向量。则

$$Se_n = S(nTe_n) = n(ST)(e_n) = ne_n.$$

上述方程意味着S是无界的。因此，T不是左可逆的，尽管T是单射的。

10.29 *left invertibility*

假设 V 是一个希尔伯特空间，并且 $T \in \mathcal{B}(V)$。则以下条件是等价的。

（a）T 是左可逆的。 b）存在 $\alpha \in (0, \infty)$，使得对于所有 $f \in V$，$\|f\| \le \alpha \|Tf\|$。 c）T 是单射并且具有闭值域。 （d）T^*T 是可逆的。

证明 首先假设 (a) 成立。因此存在 $S \in \mathcal{B}(V)$ 使得 $ST = I$。如果$f \in V$，则

$$\|f\| = \|S(Tf)\| \le \|S\| \, \|Tf\|.$$

因此，(b) 在 $\alpha = \|S\|$ 下成立，从而证明了 (a) 蕴含 (b)。

现在假设(b)成立。因此存在$\alpha \in (0, \infty)$使得

$$\|f\| \le \alpha \|Tf\| \text{ for all } f \in V. \tag{10.30}$$

上述不等式表明，如果$f \in V$和$Tf = 0$，则$f = 0$。因此 T 是单射。为了证明 T 有闭范围，假设f_1，f_2，... 是 V 中的一个序列，使得 Tf_1，Tf_2，... 在 V 中收敛到某个 $g \in V$。因此，序列 Tf_1，Tf_2，... 是 V 中的一个柯西序列。不等式 10.30 然后意味着 f_1，f_2，... 是 V 中的一个柯西序列。因此，f_1，f_2，... 在 V 中收敛到某个 $f \in V$，这意味着 $Tf = g$。因此，$g \in$ 范围 T，完成了证明 T 有闭范围，并完成了证明 (b) 蕴含 (c)。

现在假设(c)成立，因此T是单射并且具有闭合值域。我们想要证明(a)成立。设R：range $T \to V$是单射线性函数$f \mapsto Tf$的逆映射，该函数将V映射到range T。由于range T是V的一个闭合子空间，因此是一个Banach空间[根据6.16(b)]，有界逆定理(6.83)意味着R是一个有界线性映射。设P表示V到闭合子空间range T的正交投影。定义S：$V \to V$为

$$Sg = R(Pg).$$

然后对于每个$g \in V$，我们有

$$\|Sg\| = \|R(Pg)\| \le \|R\| \, \|Pg\| \le \|R\| \|g\|,$$

其中最后一个不等式来自 8.37(d)。上述不等式意味着 S 是 V 上的一个有界算子。如果$f \in V$，则

$$S(Tf) = R\big(P(Tf)\big) = R(Tf) = f.$$

因此$ST = I$，这意味着T是左可逆的，从而完成了(c)蕴含(a)的证明。

在证明的这一阶段，我们知道 (a)、(b) 和 (c) 是等价的。为了证明其中之一蕴含 (d)，假设 (b) 成立。将 (b) 中的不等式平方，我们看到如果$f \in V$，那么

$$\|f\|^2 \le \alpha^2 \|Tf\|^2 = \alpha^2 \langle T^*Tf, f\rangle \le \alpha^2 \|T^*Tf\| \, \|f\|,$$

这意味着

$$\|f\| \le \alpha^2 \|T^*Tf\|.$$

换言之，在将 T 替换为 T^*T (且将 α 替换为 α^2) 的情况下，(b) 成立。由我们已经证明的 (a) 与 (b) 之间的等价性，可得 T^*T 是左可逆的。因此存在 $S \in \mathcal{B}(V)$ 使得 $S(T^*T) = I$。对上一等式两边取伴随可得 $(T^*T)S^* = I$。因此 T^*T 也是右可逆的，这意味着 T^*T 是可逆的。因此 (b) 蕴含 (d)。

最后，假设 (d) 成立，因此 T^*T 是可逆的。于是存在 $S \in \mathcal{B}(V)$ 使得 $I = S(T^*T) = (ST^*)T$。因此 T 是左可逆的，这表明 (d) 蕴含 (a)，从而完成了 (a)、(b)、(c) 和 (d) 等价的证明。 ■

你可能熟悉有限维情形中的一个结论：右可逆性等价于满射性。下一个结果表明，这种等价性在无限维希尔伯特空间上同样成立。

10.31 *right invertibility*

假设 V 是一个希尔伯特空间，且 $T \in \mathcal{B}(V)$。则以下条件等价。

(a) T 是右可逆的。

(b) T 是满射。

(c) TT^* 是可逆的。

证明 取伴随可知，一个算子右可逆当且仅当其伴随左可逆。因此，本结果中 (a) 与 (c) 的等价性立即由 10.29 中 (a) 与 (d) 的等价性推出，只需将其应用于 T^* 而不是 T。

假设 (a) 成立，因此 T 是右可逆的。因此存在 $S \in \mathcal{B}(V)$ 使得 $TS = I$。因此，对于每个 $f \in V$，有 $T(Sf) = f$，这意味着 T 是满射，从而完成了证明 (a) 蕴含 (b)。

为了证明 (b) 蕴含 (a)，假设 T 是满射。由 $R = T|_{(\text{null } T)^\perp}$ 定义 $R : (\text{null } T)^\perp \to V$。显然 R 是单射，因为

$$\text{null } R = (\text{null } T)^\perp \cap (\text{null } T) = \{0\}.$$

如果 $f \in V$，则 $f = g + h$，其中某个 $g \in \text{null } T$ 以及某个 $h \in (\text{null } T)^\perp$ (由 8.43)；因此 $Tf = Th = Rh$，这意味着值域 $T =$ 值域 R。由于 T 是满射，这意味着值域 $R = V$。换言之，R 是从 $(\text{null } T)^\perp$ 到 V 的连续单射线性映射。有界逆定理 (6.83) 现在表明 $R^{-1} : V \to (\text{null } T)^\perp$ 在 V 上是一个有界线性映射。我们有 $TR^{-1} = I$。因此 T 是右可逆的，从而完成了 (b) 蕴含 (a) 的证明。 ■

练习 10A

1 定义 $T : \ell^2 \to \ell^2$ 由 $T(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots)$ 给出。求 T^* 的一个公式。

2 假设 V 是一个希尔伯特空间，U 是 V 的一个闭子空间，并且 $T : U \to V$ 由 $Tf = f$ 定义。描述线性算子 $T^* : V \to U$。

3 假设 V 和 W 是希尔伯特空间，$g \in V$，$h \in W$。通过 $Tf = \langle f, g\rangle h$ 定义 $T \in \mathcal{B}(V, W)$。求 T^* 的公式。

4 假设 V 和 W 是希尔伯特空间，且 $T \in \mathcal{B}(V、W)$ 的值域是有限维的。证明 T^* 的值域也为有限维。

5 证明或给出反例：如果 V 是一个希尔伯特空间，并且 $T : V \to V$ 是一个有界线性映射，使得 $\dim \text{null } T < \infty$，那么 $\dim \text{null } T^* < \infty$。

6 设 T 是从 Hilbert 空间 V 到 Hilbert 空间 W 的一个有界线性映射。证明 $\|T^*T\| = \|T\|^2$。[
This formula for $\|T^*T\|$ *leads to the important subject of* C^**-algebras.*]

7 设 V 是一个希尔伯特空间，Inv(V) 是 V 上可逆有界算子的集合。将 Inv (V) 视为一个度量空间，其度量由其作为 $\mathcal{B}(V)$ 的子集所继承。证明 $T \mapsto T^{-1}$ 是一个从 Inv(V) 到 Inv(V) 的连续函数。

8 假设 T 是希尔伯特空间上的一个有界算子。

(a) 证明 T 左可逆当且仅当 T^* 右可逆。(b) 证明 T 可逆当且仅当 T 既左可逆又右可逆。

9 假设 $b_1, b_2, \ldots$ 是 F 中的一个有界序列。定义一个有界线性映射 $T:\ell^2 \to \ell^2$ 为

$$T(a_1, a_2, \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots).$$

(a) 求T^*的一个公式。

(b) 证明 T 是单射，当且仅当 对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，$b_k \neq 0$。

(c) 证明 T 具有稠密值域，当且仅当对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$，$b_k \neq 0$。

(d) 证明 T 的值域是闭的，当且仅当

$$\inf\{|b_k| : k \in \mathbf{Z}^+ \text{ and } b_k \neq 0\} > 0.$$

(e) 证明 T 可逆当且仅当 $\inf\{|b_k| : k \in \mathbf{Z}^+\} > 0$。

10 假设 $h \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{R})$ 且 $M_h : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ 是由 $M_h f = fh$ 定义的有界算子。

(a) 证明 M_h 当且仅当 $|\{x \in \mathbf{R} : h(x) = 0\}| = 0$ 时是单射。 (b) 找出一个必要且充分条件（用 h 表述），使得 M_h 具有稠密值域。 (c) 找出一个必要且充分条件（用 h 表述），使得 M_h 具有闭值域。 (d) 找出一个必要且充分条件（用 h 表述），使得 M_h 可逆。

11 (a) 证明或给出反例：若 T 是希尔伯特空间上的一个有界算子，且 T 和 T^* 都是单射，则 T 是可逆的。 (b) 证明或给出反例：若 T 是希尔伯特空间上的一个有界算子，且 T 和 T^* 都是满射，则 T 是可逆的。

12 定义 $T:\ell^2 \to \ell^2$ 由 $T(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$ 给出。假设 $\alpha \in \mathbf{F}$。

(a) 证明 $T - \alpha I$ 是单射，当且仅当 $|\alpha| \geq 1$。 (b) 证明 $T - \alpha I$ 是可逆的，当且仅当 $|\alpha| > 1$。 (c) 证明 $T - \alpha I$ 是满射，当且仅当 $|\alpha| \neq 1$。 (d) 证明 $T - \alpha I$ 是左可逆的，当且仅当 $|\alpha| > 1$。

13 假设 V 是一个希尔伯特空间。

(a) 证明 $\{T \in \mathcal{B}(V) : T \text{ 是左可逆的}\}$ 是 $\mathcal{B}(V)$ 的一个开子集。(b) 证明 $\{T \in \mathcal{B}(V) : T \text{ 是右可逆的}\}$ 是 $\mathcal{B}(V)$ 的一个开子集。

14 设 T 是希尔伯特空间 V 上的一个有界算子。

(a) 证明 T 当且仅当 T 具有唯一的左逆时是可逆的。换言之，证明 T 当且仅当存在唯一的 $S \in \mathcal{B}(V)$ 使得 $ST = I$ 时是可逆的。(b) 证明 T 当且仅当 T 具有唯一的右逆时是可逆的。换言之，证明 T 当且仅当存在唯一的 $S \in \mathcal{B}(V)$ 使得 $TS = I$ 时是可逆的。

10B 频谱

算子的谱

以下定义在算子理论中起着关键作用。

10.32 定义 *eigenvalue; eigenvector; spectrum;* sp(T)

设 T 是 Banach 空间 V 上的一个有界算子。

- 一个数 $\alpha \in \mathbf{F}$ 被称为 *eigenvalue* 的 T，如果 $T - \alpha I$ 不是单射。
- 一个非零向量$f \in V$称为T的一个*eigenvector*，对应于特征值$\alpha \in \mathbf{F}$，如果
$$Tf = \alpha f.$$
- T 的 *spectrum* 记为 sp(T)，并定义为
$$\operatorname{sp}(T) = \{\alpha \in \mathbf{F} : T - \alpha I \text{ is not invertible}\}.$$

如果 $T - \alpha I$ 不是单射，那么 $T - \alpha I$ 不可逆。因此，有界算子 T 的特征值集合包含于 T 的谱中。如果 V 是有限维巴拿赫空间且 $T \in \mathcal{B}(V)$，那么当且仅当 $T - \alpha I$ 不可逆时，$T - \alpha I$ 不是单射。因此，如果 T 是作用在有限维巴拿赫空间上的算子，那么 T 的谱等于 T 的特征值集合。

然而，在无限维巴拿赫空间上，算子的谱并不一定等于其特征值的集合，正如下一个例子所示。

10.33 示例 *eigenvalues and spectrum*

验证本例中的所有断言应当有助于巩固你对谱的定义的理解。

- 假设 $b_1, b_2, \dots$ 是 $\mathbf{F}$ 中的有界序列。定义一个有界线性映射 $T : \ell^2 \to \ell^2$ 为
$$T(a_1, a_2, \dots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots).$$
然后，T 的特征值集合等于 $\{b_k : k \in \mathbf{Z}^+\}$，并且 T 的谱等于 $\{b_k$ 的闭包 : $k \in \mathbf{Z}^+\}$。
- 假设 $h \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{R})$。定义一个有界线性映射 $M_h : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ 如下
$$M_h f = fh.$$
那么 $\alpha \in \mathbf{F}$ 是 M_h 的一个特征值，当且仅当 $|\{t \in \mathbf{R} : h(t) = \alpha\}| > 0$。此外，$\alpha \in \operatorname{sp}(M_h)$ 当且仅当对所有 $\varepsilon > 0$，$|\{t \in \mathbf{R} : |h(t) - \alpha| < \varepsilon\}| > 0$。
- 定义 *right shift* $T : \ell^2 \to \ell^2$ 和 *left shift* $S : \ell^2 \to \ell^2$ 为
$$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots) \text{ 以及 } S(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots)。$$
于是 T 没有特征值，且 $\operatorname{sp}(T) = \{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| \le 1\}$。此外，$S$ 的特征值集合是开集 $\{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| < 1\}$，而 S 的谱是闭集 $\{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| \le 1\}$。

如果α是算符$T \in \mathcal{B}(V)$的一个本征值，且f是对应于α的T的本征向量，那么

$$\|Tf\| = \|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|,$$

这意味着 $|\alpha| \leq \|T\|$。下一个结果表明，同样的不等式对 sp(T) 的元素成立。

10.34 $T - \alpha I$ *is invertible for* $|\alpha|$ *large*

假设 T 是巴拿赫空间上的一个有界算子。那么

(a) $\operatorname{sp}(T) \subseteq \{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| \leq \|T\|\}$;

(b) $T - \alpha I$ 对所有满足 $|\alpha| > \|T\|$ 的 F 中的 $\alpha \in$ 都是可逆的;

(c) $\displaystyle\lim_{|\alpha|\to\infty} \|(T - \alpha I)^{-1}\| = 0.$

证明 我们先证明 (b)。设 $\alpha \in$ F 且 $|\alpha| > \|T\|$。则

10.35
$$T - \alpha I = -\alpha\Big(I - \frac{T}{\alpha}\Big).$$

因为 $\|T/\alpha\| < 1$，上述方程和 10.22 表明 $T - \alpha I$ 是可逆的，从而完成了 (b) 的证明。

根据谱的定义，(a) 可立即由 (b) 得出。

为证明 (c)，再次假设 $\alpha \in$ F 和 $|\alpha| > \|T\|$。则由 10.35 和 10.22 可得

$$(T - \alpha I)^{-1} = -\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\alpha^k}.$$

因此

$$\begin{aligned}\|(T - \alpha I)^{-1}\| &\leq \frac{1}{|\alpha|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|T\|^k}{|\alpha|^k}\\ &= \frac{1}{|\alpha|}\,\frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\alpha|}}\\ &= \frac{1}{|\alpha| - \|T\|}.\end{aligned}$$

上述不等式推出（c），从而完成证明。 ■

希尔伯特空间上的一个有界算子的特征值集可以是 F 的任意有界子集，甚至可以是一个不可测集（见练习 3）。相比之下，下一个结果表明，有界算子的谱是 F 的一个闭子集。这一结果表明，算子的谱可能比特征值集更有用。

10.36 *spectrum is closed*

有界算子在巴拿赫空间上的谱是 F 的闭子集。

证明 设 T 是巴拿赫空间 V 上的一个有界算子。设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ 是 sp(T) 中的一个序列，它收敛到某个 $\alpha \in \mathbf{F}$。因此每个 $T - \alpha_n I$ 都是不可逆的，并且

$$\lim_{n\to\infty} (T - \alpha_n I) = T - \alpha I.$$

由10.25)可知，$\mathcal{B}(V)$的不可逆元素集合是$\mathcal{B}(V)$ (的一个闭子集。因此，上述方程意味着$T - \alpha I$不是可逆的。换言之，$\alpha \in$ sp(T)，这意味着 sp(T) 是闭的。

我们的下一个结果给出了一个关键工具，用于证明非零复希尔伯特空间上一个有界算子的谱是非空的（见 10.38）。下一个结果的陈述以及接下来两个结果的证明都使用了一点基本的复分析。由于 sp(T) 是 C 的一个闭子集（由 10.36），因此 C \ sp(T) 是 C 的一个开子集，从而有意义去询问下面结果中的函数是否是解析的。

为简化起见，下面两个结果是在复 Hilbert 空间中陈述的。关于复 Banach 空间的对应结果，见练习 6。

10.37 *analyticity of* $(T - \alpha I)^{-1}$

假设 T 是复希尔伯特空间 V 上的一个有界算子。则 f 涂油

$$\alpha \mapsto \langle (T - \alpha I)^{-1} f, g \rangle$$

在 C \ sp(T) 上是解析的，对于每个 f，$g \in V$。

证明 设 $\beta \in$ C \ sp(T). 那么对于满足 $|\alpha - \beta| < \frac{1}{\|(T-\beta I)^{-1}\|}$ 的 ~~$\alpha \in$ C，由~~ 10.22 可知 $I - (\alpha - \beta)(T - \beta I)^{-1}$ 是可逆的，并且

$$\bigl(I - (\alpha - \beta)(T - \beta I)^{-1}\bigr)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha - \beta)^k \bigl((T - \beta I)^{-1}\bigr)^k.$$

将上面方程的两边同时乘以 $(T - \beta I)^{-1}$，并使用可逆算符 A 和 B 的方程 $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$，我们得到

$$(T - \alpha I)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha - \beta)^k \bigl((T - \beta I)^{-1}\bigr)^{k+1}.$$

因此对于 f，$g \in V$，我们有

$$\langle (T - \alpha I)^{-1} f, g \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \Bigl\langle \bigl((T - \beta I)^{-1}\bigr)^{k+1} f, g \Bigr\rangle (\alpha - \beta)^k.$$

上述方程表明，函数 $\alpha \mapsto \langle (T - \alpha I)^{-1} f, g \rangle$ 在 α 接近 β 时，可以表示为关于 $\alpha - \beta$ 的幂级数展开。因此，该函数在 β 附近是解析的。

有限维线性代数中的一个重要结果表明，每个作用于非零有限维复向量空间上的算子都有一个特征值。我们已经看到一些例子表明，这一结果并不能推广到复希尔伯特空间上的有界算子。然而，下一个结果是一个极好的替代。尽管一个作用于非零

The spectrum of a bounded operator on a nonzero real Hilbert space can be the empty set. This can happen even in finite dimensions, where an operator on $\mathbf{R}^2$ *might have no eigenvalues. Thus the restriction in the next result to the complex case cannot be removed.*

复希尔伯特空间不一定有特征值，下面的结果表明，对于每个这样的算子T，存在$\alpha \in \mathbf{C}$，使得$T - \alpha I$不是可逆的。

10.38 *spectrum is nonempty*

在复数域上的非零希尔伯特空间上的一个有界算子的谱是 $\mathbf{C}$ 的一个非空子集。

证明 假设 $T \in \mathcal{B}(V)$，其中 V 是一个复希尔伯特空间，满足 $V \neq \{0\}$，且 $\operatorname{sp}(T) = \varnothing$。因此，$T - \alpha I$ 对所有 $\alpha \in \in \mathbf{C}$ 都是可逆的。令 $f \in V$，且 $f \neq 0$。因为 $\operatorname{sp}(T) = \varnothing$，10.37 与 $g = T^{-1} f$ 结合意味着函数

$$\alpha \mapsto \langle (T - \alpha I)^{-1} f, T^{-1} f \rangle$$

在 $\mathbf{C}$ 上是解析的。上述函数在 $\alpha = 0$ 处的值等于 $\mathbf{C}$ 中以 0 为中心的每个圆上的函数平均值（因为解析函数满足均值性质）。但是 10.34(c) 表明该函数在 $|\alpha| \to \infty$ 时的极限为 0。因此，通过在大圆上取平均值，我们看到上述函数在 $\alpha = 0$ 处的值为 0。换句话说，

$$\langle T^{-1} f, T^{-1} f \rangle = 0.$$

因此 $T^{-1} f = 0$。将 T 应用于方程 $T^{-1} f = 0$ 的两边可得 $f = 0$，这与我们假设 $f \neq 0$ 相矛盾。这一矛盾表明我们关于 $\operatorname{sp}(T) = \varnothing$ 的假设是错误的，从而完成了证明。 ■

10.39 定义 $p(T)$

假设 T 是一个作用于向量空间 V 的算子，p 是一个系数在 $\mathbf{F}$ 中的多项式:

$$p(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n.$$

然后 $p(T)$ 是作用于 V 的算子，定义为

$$p(T) = b_0 I + b_1 T + \cdots + b_n T^n.$$

你应该验证，如果 p 和 q 是系数在 $\mathbf{F}$ 中的多项式，并且 T 是一个算子，那么

$$(pq)(T) = p(T)\, q(T).$$

下一个结果提供了一种计算将多项式应用于算子所得的谱的良好方法。例如，这个结果意味着，如果 T 是复巴拿赫空间上的一个有界算子，那么 T^2 的谱由 T 的谱中所有数的平方组成。

与前一个结果一样，下一个结果在实 Banach 空间上不成立。正如你所看到的，下面的证明使用了将具有复系数的多项式分解为一次多项式的乘积，而在限制到实数域时，这并不一定可行。

10.40 *Spectral Mapping Theorem*

设T是复巴拿赫空间上的一个有界算子，p是一个具有复系数的多项式。则

$$\operatorname{sp}\big(p(T)\big) = p\big(\operatorname{sp}(T)\big).$$

证明 如果 p 是一个常数多项式，那么上述等式的两边都由仅包含该常数的集合组成。因此我们可以假设 p 是一个非常数多项式。

首先假设 $\alpha \in \operatorname{sp}\big(p(T)\big)$。因此 $p(T) - \alpha I$ 不可逆。由代数基本定理，存在 c , $\beta_1, \cdots\cdots \beta_n \in \mathbf{C}$，且 $c \neq 0$，使得

10.41 $$p(z) - \alpha = c(z - \beta_1) \cdots (z - \beta_n)$$

对于所有 $z \in \mathbf{C}$。因此

$$p(T) - \alpha I = c(T - \beta_1 I) \cdots (T - \beta_n I).$$

上述等式的左边不可逆。因此，对于某些 $k \in \{1, \ldots, n\}$，$T - \beta_k I$ 不可逆。于是 $\beta_k \in \operatorname{sp}(T)$。现在 10.41 推出 $p(\beta_k) = \alpha$。因此 $\alpha \in p\big(\operatorname{sp}(T)\big)$，从而完成了 $\operatorname{sp}\big(p(T)\big) \subseteq p\big(\operatorname{sp}(T)\big)$ 的证明。

为了证明反向的包含关系，现在假设 $\beta \in \operatorname{sp}(T)$。多项式 $z \mapsto p(z) - p(\beta)$ 在 β 处有一个零点。因此，存在一个多项式 q，其次数比 p 的次数少 1，使得

$$p(z) - p(\beta) = (z - \beta)q(z)$$

对于所有 $z \in \mathbf{C}$。因此

10.42 $$p(T) - p(\beta)I = (T - \beta I)q(T)$$

和

10.43 $$p(T) - p(\beta)I = q(T)(T - \beta I).$$

因为$T - \beta I$不可逆，$T - \beta I$不是满射，或者$T - \beta I$不是单射。如果$T - \beta I$不是满射，那么10.42表明$p(T) - p(\beta)I$不是满射。如果$T - \beta I$不是单射，那么10.43表明$p(T) - p(\beta)I$不是单射。无论哪种情况，我们都看到 $p(T) - p(\beta)I$不可逆。因此$p(\beta) \in \operatorname{sp}\big(p(T)\big)$，完成了对$\operatorname{sp}\big(p(T)\big) \supseteq p\big(\operatorname{sp}(T)\big)$ 的证明。 ■

自伴算子

在本小节中，我们考察一类很好的有界算子的特殊类。

10.44 定义 *self-adjoint*

希尔伯特空间上的一个有界算子T如果$T^* = T$，则称为*self-adjoint*。

伴随算子的定义表明，Hilbert 空间 V 上的有界算子 T 当且仅当对所有 f、$g \in V$ 都有 $\langle Tf,\ g\rangle = \langle f,\ Tg\rangle$ 时是自伴算子。关于这一最后条件的一个有趣结果，见练习 7。

10.45 示例 *self-adjoint operators*

- 设 $b_1, b_2, \ldots$ 是 F 中的一个有界序列。定义一个有界算子 $T: \ell^2 \to \ell^2$ 为
$$T(a_1, a_2, \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots).$$
那么 $T^* : \ell^2 \to \ell^2$ 是由以下定义的算子
$$T^*(a_1, a_2, \ldots) = (a_1 \overline{b_1}, a_2 \overline{b_2}, \ldots).$$
因此，T 是自伴的当且仅当对所有 $k \in \mathbf{Z}^+$，$b_k \in \mathbf{R}$。
- 更一般地，设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个σ-有限测度空间，且$h \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$。由$M_h f = fh$定义一个有界算子$M_h \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$。则$M_h{}^* = M_{\bar{h}}$。因此，当且仅当$\mu(\{x \in X\colon\ h(x) \notin \mathbf{R}\}) = 0$ 时，M_h是自伴的。
- 设 $n \in \mathbf{Z}^+$，K 是一个 n-乘-n 矩阵，并且 $\mathcal{I}_K : \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}^n$ 是由 K (的矩阵乘法所定义的算子（将 $\mathbf{F}^n$ 的元素视为列向量)）。那么 $(\mathcal{I}_K)^*$ 是由 K 的共轭转置进行乘法的算子，如例 10.10 所示。因此，当且仅当矩阵 K 等于其共轭转置时，$\mathcal{I}_K$ 是一个自伴算子。
- 更一般地，设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，$K \in \mathcal{L}^2(\mu \times \mu)$，并且 $\mathcal{I}_K$ 是在 $L^2(\mu)$ 上的积分算子，如例 10.5 所定义。定义 $K^* : X \times X \to \mathbf{F}$ 为 $K^*(y,\ x) = \overline{K(x,\ y)}$。那么，$(\mathcal{I}_K)^*$ 是由 K^* 诱导的积分算子，如例 10.5 所示。因此，如果 $K^* = K$，或者换句话说，如果 $K(x,\ y) = \overline{K(y,\ x)}$ 对所有 $(x, y) \in X \times X$ 成立，则 $\mathcal{I}_K$ 是自伴的。
- 设 U 是 Hilbert 空间 V 的一个闭子空间。回忆 P_U 表示将 V 正交投影到 U (（见第 8B) 节）。我们有
$$\begin{aligned}\langle P_U f, g\rangle &= \langle P_U f, P_U g + (I - P_U) g\rangle \\ &= \langle P_U f, P_U g\rangle \\ &= \langle f - (I - P_U) f, P_U g\rangle \\ &= \langle f, P_U g\rangle,\end{aligned}$$
其中，上面的第二个和第四个等式由于 8.37(a) 而成立。上述方程表明 P_U 是一个自伴算符。

对于实希尔伯特空间，下一个结果需要附加假设 T 是自伴的。为了说明这一额外假设不能被消除，考虑算子 $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$，其由 $T(x、y) = (-y、x)$ 定义。于是，$T \neq 0$，但在 $\mathbf{R}^2$ 上的标准内积下，我们有 $\langle Tf, f\rangle = 0$ 对所有 $f \in \mathbf{R}^2$ (，你可以通过代数方式验证，或者将 T 视为逆时针旋转一个直角)。

10.46 $\langle Tf, f\rangle = 0$ *for all* f *implies* $T = 0$

假设 V 是一个希尔伯特空间，$T \in \mathcal{B}(V)$，并且 $\langle Tf, f\rangle = 0$ 对所有 $f \in V$。

（a）如果 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$，则 $T = 0$。

(b) 如果 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 且 T 是自伴的，则 $T = 0$。

证明 首先假设 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$。若 $g, h \in V$，则

$$\langle Tg, h\rangle = \frac{\langle T(g+h), g+h\rangle - \langle T(g-h), g-h\rangle}{4} + \frac{\langle T(g+ih), g+ih\rangle - \langle T(g-ih), g-ih\rangle}{4}\,i,$$

可以通过计算右侧来验证这一点。我们假设$\langle Tf, f\rangle = 0$ 对所有$f \in V$成立，这意味着上面的右侧等于0。因此，$\langle Tg, h\rangle = 0$ 对所有$g, h \in V$成立。取 $h = Tg$，我们可以得出结论$T = 0$，从而完成（a）的证明。

现在假设 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 且 T 是自伴的。则

10.47 $$\langle Tg, h\rangle = \frac{\langle T(g+h), g+h\rangle - \langle T(g-h), g-h\rangle}{4};$$

这是通过使用该方程计算右侧来证明的。

$$\langle Th, g\rangle = \langle h, Tg\rangle = \langle Tg, h\rangle,$$

其中第一个等式成立，因为T是自伴的，第二个等式成立因为我们在实希尔伯特空间中工作。10.47右边的每一项都呈现为$\langle Tf, f\rangle$，对于适当的f。因此，$\langle Tg, h\rangle =$对所有的$g, h \in V$都为零。这意味着$T =$为零（取$h = Tg$），完成了(b)部分的证明。 ∎

通过将 $T \mapsto T^*$ 在 $\mathcal{B}(V)$ 上的作用类比为 $z \mapsto \bar{z}$ 在 $\mathbf{C}$ 上的作用，可以获得对伴随的一些理解。在这种类比下，自伴算子（由 $T^* = T$ 表征）对应于实数（由 $\bar{z} = z$ 表征）。示例 10.45 中的前两个要点说明了这种类比，因为我们看到，$L^2(\mu)$ 上的一个乘法算子当且仅当其乘子几乎处处取实值时才是自伴的。

接下来的两个结果加深了自伴算子与实数之间的类比。首先，我们在 $\langle Tf、f\rangle$ 的行为中看到这种类比；随后，我们又在 T 的谱中看到这种类比。

10.48 *self-adjoint characterized by* $\langle Tf, f\rangle$

设T是复希尔伯特空间V上的一个有界算子。则T是自伴的，当且仅当

$$\langle Tf, f\rangle \in \mathbf{R}$$

对于所有$f \in V$。

证明 设$f \in V$。则

$$\langle Tf, f\rangle - \overline{\langle Tf, f\rangle} = \langle Tf, f\rangle - \langle f, Tf\rangle = \langle Tf, f\rangle - \langle T^*f, f\rangle = \langle (T - T^*)f, f\rangle.$$

如果 $\langle Tf, f\rangle \in \mathbf{R}$ 对于每个 $f \in V$，那么上式左边等于 0，因此 $\langle (T - T^*)f, f\rangle = 0$ 对于每个 $f \in V$。这意味着 $T - T^* = 0$［由 10.46(a)］。因此 T 是自伴的。

反之，如果 T 是自伴的，那么上式的右边等于 0，因此对每个 $f \in V$，$\langle Tf, f\rangle = \overline{\langle Tf, f\rangle}$。这意味着对每个 $f \in V$，$\langle Tf, f\rangle \in \mathbf{R}$，如所需。

10.49 *self-adjoint operators have real spectrum*

设 T 是希尔伯特空间上的一个有界自伴算子。则 $\operatorname{sp}(T) \subseteq \mathbf{R}$。

证明 若 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$，则所需结果成立，因为按定义，实希尔伯特空间上每个算子的谱都包含于 $\mathbf{R}$。

因此我们假设 T 是复希尔伯特空间 V 上的一个有界算子。设 α，$\beta \in \mathbf{R}$，且 $\beta \neq 0$。若 $f \in V$，则

$$\begin{aligned}\|\big(T - (\alpha + \beta i)I\big)f\|\,\|f\| &\geq \big|\langle \big(T - (\alpha + \beta i)I\big)f, f\rangle\big|\\ &= \big|\langle Tf, f\rangle - \alpha\|f\|^2 - \beta\|f\|^2 i\big|\\ &\geq |\beta|\,\|f\|^2,\end{aligned}$$

其中第一个不等式来自柯西–施瓦茨不等式（8.11），而最后一个不等式成立是因为 $\langle Tf, f\rangle - \alpha\|f\|^2 \in \mathbf{R}$（由 10.48）。

上面的不等式意味着

$$\|f\| \leq \frac{1}{|\beta|}\|\big(T - (\alpha + \beta i)I\big)f\|$$

对于所有 $f \in V$。现在10.29中(a)和(b)的等价性表明 $T - (\alpha + \beta i)I$ 是左可逆的。

由于 T 是自伴的，$T - (\alpha + \beta i)I$ 的伴随算子是 $T - (\alpha - \beta i)I$，它可由与上面相同的论证得出是左可逆的（只需将 β 替换为 $-\beta$）。因此 $T - (\alpha + \beta i)I$ 是右可逆的（因为它的伴随算子是左可逆的）。由于算子 $T - (\alpha + \beta i)I$ 同时左可逆和右可逆，它是可逆的。换言之，$\alpha + \beta i \notin \operatorname{sp}(T)$。因此 $\operatorname{sp}(T) \subseteq \mathbf{R}$，如所愿。

我们证明了，复的非零希尔伯特空间上的一个有界算子具有非空谱。该结果在实希尔伯特空间上可能不成立（其中按定义谱包含于 R 中）。例如，定义在 $\mathbf{R}^2$ 上并由 $T(x、y) = (-y、x)$ 定义的算子 T 的谱为空。然而，前述结果和 10.38 可用于证明，在非零实希尔伯特空间上的每个 ***self-adjoint*** 算子都具有非空谱（详见练习 9）。

尽管每个自伴算子的谱都是非空的，但并非每个自伴算子都有特征值。例如，由 $(M_x f)(x) = xf(x)$ 定义的自伴算子 $M_x \in \mathcal{B}\big(L^2([0,1])\big)$ 没有特征值。

正规算子

现在我们考虑另一类很好的算子的特殊类别。

10.50 定义 *normal operator*

有界算子 T 在希尔伯特空间上称为 *normal*，如果它与其伴随算子对易。换句话说，T 是 *normal* 如果

$$T^*T = TT^*.$$

显然，每个自伴算子都是正规算子，但也存在不是自伴的正规算子，如下面的例子所示。

10.51 示例 *normal operators*

- 设 μ 是一个正测度，$h \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$，且 $M_h \in \mathcal{B}\big(L^2(\mu)\big)$ 是由 $M_h f = fh$ 定义的乘法算子。则 $M_h{}^* = M_{\bar{h}}$，这意味着当 h 取实值时，M_h 是自伴的。如果 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$，则 h 可以取复值，而 M_h 不一定是自伴的。然而，

$$M_h{}^* M_h = M_{|h|^2} = M_h M_h{}^*$$

因此，即使 h 是复值的，M_h 仍然是一个正规算子。

- 假设 T 是 $\mathbf{F}^2$ 上的算子，其相对于标准基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

于是 T 不是自伴的，因为上面的矩阵不等于其共轭转置。然而，$T^*T = 13I$ 且 $TT^* = 13I$，正如你应当验证的那样。由于 $T^*T = TT^*$，我们得出 T 是一个正规算子。

10.52 示例 *an operator that is not normal*

设 T 是 ℓ^2 上的右移；因此 $T(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$。则 T^* 是左移：$T^*(a_1, a_2, \dots) = (a_2, a_3, \dots)$。因此 T^*T 是 ℓ^2 上的恒等算子，而 TT^* 是算子 $(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_2, a_3, \dots)$。因此 $T^*T \neq TT^*$，这意味着 T 不是正规算子。

10.53 ***normal in terms of norms***

设T是希尔伯特空间V上的一个有界算子。则T是正规算子当且仅当

$$\|Tf\| = \|T^*f\|$$

对所有$f \in V$。

证明 如果$f \in V$，那么

$$\|Tf\|^2 - \|T^*f\|^2 = \langle Tf, Tf\rangle - \langle T^*f, T^*f\rangle = \langle (T^*T - TT^*)f, f\rangle.$$

如果 T 是正常的，那么上述方程的右边等于 0，这意味着左边也等于 0，从而 $\|Tf\| = \|T^*f\|$。

相反，假设对于所有$f \in V$，$\|Tf\| = \|T^*f\|$ 成立。那么上式的左侧等于 0，这意味着右侧对于所有$f \in V$ 也等于 0。因为 $T^*T - TT^*$ 是自伴的，10.46 现在意味着 $T^*T - TT^* = 0$。因此，T 是正常的，从而完成证明。

每个复数都可以写成 $a + bi$ 的形式，其中 a 和 b 是实数。下一个结果的 (a) 部分给出了在复希尔伯特空间上的有界算子的类似结论，其中自伴算子扮演实数的角色。我们可以将 (a) 中的算子 A 和 B 称为算子 T 的实部和虚部。下面的 (b) 部分表明，正规性取决于这些实部和虚部是否对易。

10.54 ***operator is normal if and only if its real and imaginary parts commute***

假设 T 是复希尔伯特空间 V 上的有界算子。

(a) 存在唯一的自伴算子 A、B 在 V 上，使得 $T = A + iB$。

(b) 当且仅当 $AB = BA$ 时，T 是正规，其中 A、B 同 (a) 中所述。

证明 假设 $T = A + iB$，其中 A 和 B 是自伴的。则有 $T^* = A - iB$。将 T 和 T^* 的这些方程相加，然后除以 2，得到 A 的公式；将 T^* 的方程从 T 的方程中减去，然后除以 $2i$，得到 B 的公式。具体地，我们有

$$A = \frac{T + T^*}{2} \quad \text{and} \quad B = \frac{T - T^*}{2i},$$

这证明了(a)的唯一性部分。(a)的存在性部分通过用上述方程定义A和B并注意到按上述定义的A和B是自伴的且$T = A + iB$而得以证明。

为了证明 (b)，验证如果 A 和 B 按照上述方程式定义，则

$$AB - BA = \frac{T^*T - TT^*}{2i}.$$

因此，当且仅当 T 是正常的时，$AB = BA$。

有限维向量空间上的算子左可逆当且仅当右可逆。我们已经看到，这一结果对无限维希尔伯特空间上的有界算子并不成立。然而，下一个结果表明，对于正规算子我们可以恢复这种等价性。

10.55 ***invertibility for normal operators***

设 V 是一个希尔伯特空间，且 $T \in \mathcal{B}(V)$ 是正规。则以下各项等价。

(a) T 是可逆的。(b) T 是左可逆的。(c) T 是右可逆的。(d) T 是满射的。(e) T 是单射的并且具有闭值域。(f) T^*T 是可逆的。(g) TT^* 是可逆的。

证明 因为 T 是正规的，(f) 与 (g) 显然是等价的。由 10.29 可知，(f)、(b) 和 (e) 彼此等价。由 10.31 可知，(g)、(c) 和 (d) 彼此等价。因此，(b)、(c)、(d)、(e)、(f) 和 (g) 全都彼此等价。

显然，（a）蕴含（b）。

假设(b)成立。我们已经知道(b)与(c)等价；因此T是左可逆的，而T是右可逆的。因此T是可逆的，从而证明了(b)推出(a)，并完成了(a)到(g)彼此等价的证明。 ■

下一个结果表明，一个正规算子及其伴随算子具有相同的特征向量，而它们的特征值彼此互为复共轭。对于非正规算子，这一结果可能不成立。例如，0 是 ℓ^2 上左移算子的一个特征值，但它的伴随算子——右移算子——既没有特征向量，也没有特征值。

10.56 ***T normal and $Tf = \alpha f$ implies $T^* f = \overline{\alpha} f$***

设 T 是希尔伯特空间 V 上的一个正规算子，$\alpha \in \mathbf{F}$，且 $f \in V$。那么，当且仅当 $\overline{\alpha}$ 是 T^* 的特征值并具有特征向量 f 时，α 是 T 的特征值并具有特征向量 f。

证明 因为 $(T - \alpha I)^* = T^* - \overline{\alpha} I$ 和 T 是正规的，$T - \alpha I$ 与其伴随算子可交换。因此 $T - \alpha I$ 是正规的。于是 10.53 蕴含 that

$$\|(T - \alpha I)f\| = \|(T^* - \overline{\alpha} I)f\|.$$

因此，（$T - \alpha I$）$f = 0$ 当且仅当（$T^* - \overline{\alpha} I$）$f = 0$，如所期望的。 ■

由于每个自伴算子都是正规算子，下面的结果对自伴算子同样成立。

10.57 ***orthogonal eigenvectors for normal operators***

正规算子中对应于不同特征值的特征向量彼此正交。

证明 假设 α 和 β 是正常算子 T 的不同特征值，且对应的特征向量为 f 和 g。那么 10.56 表明 $T^*f = \bar{\alpha} f$。因此

$$(\beta - \alpha)\langle g, f\rangle = \langle \beta g, f\rangle - \langle g, \overline{\alpha} f\rangle = \langle Tg, f\rangle - \langle g, T^* f\rangle = 0.$$

由于$\alpha \neq \beta$，上述方程意味着$\langle g, f\rangle = 0$，如所期望。 ■

等距算子与酉算子

10.58 定义 ***isometry; unitary operator***

假设T是希尔伯特空间V上的一个有界算子。

- T 如果对每个$f \in V$都有$\|Tf\| = \|f\|$，则称为*isometry*。
- T 被称为*unitary*，如果$T^*T = TT^* = I$。

10.59 示例 *isometries and unitary operators*

- 假设 $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ 是如下定义的右移
$$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots).$$
然后 T 是一个等距映射，但不是一个单位算符，因为 $TT^* \neq I$ (很明显，即使不计算 T^*，因为 T 不是满射)。

- 设 $T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbf{Z}))$ 是右移，其定义为
$$(Tf)(n) = f(n-1)$$
对于 $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{F}$ 与 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^2 < \infty$。然后 T 是一个等距映射且是单位算子。

- 设 $b_1, b_2, \dots$ 是 $\mathbf{F}$ 中的一个有界序列。定义 $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ 为
$$T(a_1, a_2, \dots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots).$$
那么 T 是一个等距算子，当且仅当 T 是酉算子，当且仅当 对所有 $k \in \mathbf{Z}^+$，$|b_k| = 1$。

- 更一般地，假设（X，$\mathcal{S}$，μ）是一个σ-有限测度空间，并且$h \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$。通过$M_h f = fh$定义$M_h \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$。则当且仅当$T$是等距映射，当且仅当$T$是单位映射时，$\mu(\{x \in X : |h(x)| \neq 1\}) = 0$。

根据定义，等距变换保持范数。以下结果中（a）和（b）的等价性表明，等距变换也保持内积。

10.60 *isometries preserve inner products*

假设 T 是一个有界算子，作用于希尔伯特空间 V。那么以下几项是等价的。

(a) T 是一个等距变换。

(b) $\langle Tf, Tg\rangle = \langle f, g\rangle$ 对于所有 $f, g \in V$。

(c) $T^*T = I$。 (d) $\{Te_k\}_{k\in\Gamma}$ 是每个正交规范族 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 在 V 中的正交规范族。 (e) $\{Te_k\}_{k\in\Gamma}$ 是某些正交基底 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 在 V 中的正交规范族。

证明 如果 $f \in V$，则

$$\|Tf\|^2 - \|f\|^2 = \langle Tf, Tf\rangle - \langle f, f\rangle = \langle (T^*T - I)f, f\rangle.$$

因此，当且仅当上述方程右侧对于所有 $f \in V$ 都为 0 时，$\|Tf\| = \|f\|$ 对于所有 $f \in V$ 成立。因为 $T^*T - I$ 是自伴的，当且仅当 $T^*T - I =$ 为 0（由 10. 46 得出）时，这种情况发生。因此，(a) 等价于 (c)。

如果 $T^*T = I$，则 $\langle Tf, Tg\rangle = \langle T^*Tf, g\rangle = \langle f, g\rangle$ 对所有 $f, g \in V$ 成立。因此 (c) 蕴含 (b)。

取 $g = f$ 在 (b) 中，我们看到 (b) 蕴含 (a)。因此，我们现在知道 (a)、(b) 和 (c) 彼此等价。

为了证明 (b) 蕴含 (d)，假设 (b) 成立。若 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 V 中的一个正交规范族，则对于所有 $j, k \in \Gamma$，有 $\langle Te_j, Te_k\rangle = \langle e_j, e_k\rangle$，因此 $\{Te_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 V 中的一个正交规范族。故 (b) 蕴含 (d)。

因为 V 有一个正交规范基（见 8.67 或 8.75），(d) 推出 (e)。

最后，假设 (e) 成立。因此，$\{Te_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 V 的某个正交标准基 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 的正交标准族。假设 $f \in V$。那么根据 8.63(a)，我们有

$$f = \sum_{j\in\Gamma} \langle f, e_j\rangle e_j,$$

这意味着

$$T^*Tf = \sum_{j\in\Gamma} \langle f, e_j\rangle T^*Te_j.$$

因此，如果 $k \in \Gamma$，则

$$\langle T^*Tf, e_k\rangle = \sum_{j\in\Gamma} \langle f, e_j\rangle \langle T^*Te_j, e_k\rangle = \sum_{j\in\Gamma} \langle f, e_j\rangle \langle Te_j, Te_k\rangle = \langle f, e_k\rangle,$$

其中最后一个等式成立，因为当 $j = k$ 时，$\langle Te_j, Te_k\rangle$ 等于 1，否则等于 0。由于上述等式对正交归一基 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 中的每个 e_k 都成立，我们得出 $T^*Tf = f$。因此 (e) 推出 (c)，从而完成证明。

前述结果中 (a) 与 (c) 的等价性表明，每个酉算子都是一个等距算子。

接下来我们有一个结果，给出了与成为酉算符等价的条件。请注意，前一个结果的(d)和(e)部分涉及到*orthonormal families*，但后一个结果的(f)和(g)部分涉及到*orthonormal bases*。

10.61 *unitary operators and their adjoints are isometries*

设T是希尔伯特空间V上的一个有界算子。则以下条件等价。

(a) T 是幺正的。

(b) T 是一个满射同胚映射。

(c) T 和 T^* 都是等距映射。

(d) T^* 是幺正的。

(e) T 是可逆的且 $T^{-1} = T^*$.

(f) $\{Te_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 V 的每个正交标准基 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 的正交标准基 V。 (g) $\{Te_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 V 的某个正交标准基 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 的正交标准基 V。

证明 (a)、(d) 和 (e) 的等价性可以很容易地从酉算子的定义中得出。

(a) 与 (c) 的等价性源于 10.60 中 (a) 与 (c) 的等价性。为证明 (a) 推出 (b)，假设 (a) 成立，因此 T 是一个酉算子。如前所述，这意味着 T 是一个等距算子。此外，等式 $TT^* = I$ 蕴含 T 是满射。因此 (b) 成立，从而证明了 (a) 推出 (b)。

现在假设 (b) 成立，因此 T 是一个满射同构。由于 T 是满射且单射，T 是可逆的。方程 $T^*T = I$ [它来自于 (a) 和 (c) 在 10.60 中的等价关系] 现在意味着 $T^{-1} = T^*$。因此 (b) 蕴含 (e)。因此，在证明的这个阶段，我们知道 (a)、(b)、(c)、(d) 和 (e) 彼此是等价的。

为了证明(b)蕴含(f)，假设(b)成立，因此T是一个满射等距映射。假设$\{e_k\}_{k\in\Gamma}$是V的一个正交规范基。10.60中(a)和(d)的等价性意味着$\{Te_k\}_{k\in\Gamma}$是一个正交规范族。因为$\{e_k\}_{k\in\Gamma}$是V的一个正交规范基且T是满射，$\{Te_k\}_{k\in\Gamma}$的张成空间的闭包等于V。因此$\{Te_k\}_{k\in\Gamma}$是V的一个正交规范基，这证明了(b)蕴含(f)。

显然，(f) 蕴含 (g)。

现在假设 (g) 成立。公式 10.60 中 (a) 和 (e) 的等价性意味着 T 是一个等距映射，这意味着 T 的值域是闭的。因为 $\{Te_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 V 的正交归一基，T 的值域的闭包等于 V。因此 T 是一个满射等距映射，证明了 (g) 蕴含 (b)，并完成了证明 (a) 到 (g) 互相等价。

方程 $T^*T = TT^* = I$ 类似于方程 $|z|^2 = 1$ 对于 $z \in \mathbf{C}$。我们现在将这种类比扩展到酉算符谱的行为。

10.62 *spectrum of a unitary operator*

假设 T 是一个在希尔伯特空间上的酉算子。那么

$$\operatorname{sp}(T) \subseteq \{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| = 1\}.$$

证明 假设 $\alpha \in \mathbf{F}$ 且 $|\alpha| \neq 1$。然后

$$\begin{aligned}(T-\alpha I)^*(T-\alpha I) &= (T^*-\overline{\alpha}I)(T-\alpha I)\\ &= (1+|\alpha|^2)I - (\alpha T^* + \overline{\alpha}T)\\ &= (1+|\alpha|^2)\Big(I - \frac{\alpha T^* + \overline{\alpha}T}{1+|\alpha|^2}\Big).\end{aligned} \tag{10.63}$$

看上面括号中的最后一项，我们有

$$\Big\|\frac{\alpha T^* + \overline{\alpha}T}{1+|\alpha|^2}\Big\| \leq \frac{2|\alpha|}{1+|\alpha|^2} < 1, \tag{10.64}$$

其中最后的不等式成立，因为 $|\alpha| \neq 1$。现在 10.64、10.63 和 10.22 表明 ($T-\alpha I)^*(T-\alpha I)$ 是可逆的。因此 $T-\alpha I$ 是左可逆的。因为 $T-\alpha I$ 是正规矩阵，这意味着 $T-\alpha I$ 是可逆的（见 10.55）。因此 $\alpha \notin \operatorname{sp}(T)$。因此 $\operatorname{sp}(T) \subseteq \{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| = 1\}$，如预期。 ■

作为下一结果的特例，我们可以得出结论（无需进行任何计算！）右移算子在ℓ^2上的谱是$\{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| \leq 1\}$。

10.65 *spectrum of an isometry*

设T是希尔伯特空间上的一个等距算子，而T不是酉算子。则

$$\operatorname{sp}(T) = \{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| \leq 1\}.$$

证明 因为 T 是一个等距变换但不是酉变换，我们知道 T 不是满射 [由 10.61 中 (a) 和 (b) 的等价性得出]。特别地，T 不是可逆的。因此，T^* 不是可逆的。

假设 $\alpha \in$ 为 $\mathbf{F}$，且 $|\alpha| <$ 为 1。因为 $T^*T = I$，我们有

$$T^*(T-\alpha I) = I - \alpha T^*.$$

上述方程的右端是可逆的（由 10.22）。如果 $T-\alpha I$ 是可逆的，那么上述方程将推出 $T^* = (I-\alpha T^*)(T-\alpha I)^{-1}$，这将使 T^* 作为可逆算子的乘积而可逆。然而，上述段落表明 T^* 不是可逆的。因此 $T-\alpha I$ 不是可逆的。因此 $\alpha \in \operatorname{sp}(T)$.

因此 $\{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| < 1\} \subseteq \operatorname{sp}(T)$。由于 $\operatorname{sp}(T)$ 是闭的（见 10.36），这意味着 $\{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| \leq 1\} \subseteq \operatorname{sp}(T)$。反向的包含关系由 10.34(a) 推出。因此 $\operatorname{sp}(T) = \{\alpha \in \mathbf{F} : |\alpha| \leq 1\}$。 ■

练习 10B

1 验证例 10.33 中的所有断言。

2 假设T是希尔伯特空间V上的一个有界算子。

(a) 证明对于所有有界可逆算子 S 在 V 上，有 $\operatorname{sp}(S^{-1}TS) = \operatorname{sp}(T)$。(b) 证明有 $\operatorname{sp}(T^*) = \{\alpha : \alpha \in \overline{\operatorname{sp}}(T)\}$。(c) 证明如果 T 是可逆的，则 $\operatorname{sp}(T^{-1})$ $= \{\frac{1}{\alpha} : \alpha \in \operatorname{sp}(T)\}$。

3 假设 E 是 $\mathbf{F}$ 的一个有界子集。证明存在一个希尔伯特空间 V 和 $T \in \mathcal{B}(V)$，使得 T 的特征值集合等于 E。

4 设 E 是 $\mathbf{F}$ 的一个非空、闭且有界的子集。证明存在 $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ 使得 $\operatorname{sp}(T) = E$。

5 给出一个赋范向量空间上的有界算子 T 的例子，使得对每个 $\alpha \in \mathbf{F}$，算子 $T - \alpha I$ 都不可逆。

6 设 T 是复非零 Banach 空间 V 上的一个有界算子。

（a）证明该函数

$$\alpha \mapsto \varphi\big((T - \alpha I)^{-1} f\big)$$

在 $\mathbf{C} \setminus \operatorname{sp}(T)$ 上是解析的，对于每个 $f \in V$ 和每个 $\varphi \in V'$。

(b) 证明 $\operatorname{sp}(T) \neq \varnothing$。

7 证明：若 T 是 Hilbert 空间 V 上的一个算子，使得对所有f、$g \in V$ 都有 $\langle Tf、g\rangle = \langle f、Tg\rangle$，则 T 是一个有界算子。

8 设 P 是 Hilbert 空间 V 上的一个有界算子，且 $P^2 = P$。证明：P 是自伴算子，当且仅当存在 V 的一个闭子空间 U，使得 $P = P_U$。

9 假设 V 是一个实希尔伯特空间且 $T \in \mathcal{B}(V)$。T 的 *complexification* 是函数 $T_{\mathbf{C}} : V_{\mathbf{C}} \to V_{\mathbf{C}}$，其定义为

$$T_{\mathbf{C}}(f + ig) = Tf + iTg$$

对于f、$g \in V$ (，$V_{\mathbf{C}}$)的定义见第8B节练习4。

(a) 证明$T_{\mathbf{C}}$是复希尔伯特空间$V_{\mathbf{C}}$和$\|T_{\mathbf{C}}\| = \|T\|$上的有界算子。

(b) 证明 $T_{\mathbf{C}}$ 当且仅当 T 是可逆的。

（c）证明 $(T_{\mathbf{C}})^* = (T^*)_{\mathbf{C}}$。

(d) 证明 T 是自伴的当且仅当 $T_{\mathbf{C}}$ 是自伴的。

（e）利用本练习的前几部分以及 10.49 和 10.38，证明如果 T 是自伴的并且 $V \neq \{0\}$，那么 $\operatorname{sp}(T) \neq \varnothing$。

10 假设 T 是希尔伯特空间 V 上的有界算子，满足 $\langle Tf, f\rangle \geq 0$ 对所有 $f \in V$ 成立。证明 T 的谱为 $\subseteq [0, \infty)$。 11 假设 P 是希尔伯特空间 V 上的有界算子，满足 $P^2 = P$。证明 P 是自伴算子当且仅当 P 是正规算子。 12 证明：在可分希尔伯特空间上的正规算子最多有可数个特征值。 13 证明或给出反例：如果 T 是希尔伯特空间上的正规算子且 $T = A + iB$，其中 A 和 B 是自伴算子，则 $\|T\| = \sqrt{\|A\|^2 + \|B\|^2}$。

A number $\alpha \in \mathbf{F}$ is called an* 近似特征值 *of a bounded operator T on a Hilbert space V if

$$\inf\{\|(T - \alpha I)f\| : f \in V \textit{ and } \|f\| = 1\} = 0.$$

14 假设 T 是希尔伯特空间上的一个正规算子，且 $\alpha \in \mathbf{F}$。证明 $\alpha \in \operatorname{sp}(T)$ 当且仅当 α 是 T 的近似特征值。

假设 T 是希尔伯特空间上的一个正规算子。

(a) 证明如果 α 是 T 的特征值，那么 $|\alpha|^2$ 是 T^*T 的特征值。 (b) 证明如果 $\alpha \in \operatorname{sp}(T)$，那么 $|\alpha|^2 \in \operatorname{sp}(T^*T)$。

16 假设 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 是 Hilbert 空间 V 的一个正交规范基。再假设 T 是 V 上的一个正规算子，并且对于每个 $k \geq 2$，e_k 是 T 的一个特征向量。证明 e_1 是 T 的一个特征向量。

17 证明如果T是希尔伯特空间上的一个自伴算子，那么对于每个$n \in \mathbf{Z}^+$，都有$\|T^n\| = \|T\|^n$。

18 证明：如果 T 是希尔伯特空间上的一个正规算子，那么对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，都有 $\|T^n\| = \|T\|^n$。

19 假设 T 是希尔伯特空间上的一个可逆算子。证明：T 是酉的当且仅当 $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$。

20 假设 T 是复 Hilbert 空间上的一个有界算子，且 $T = A + iB$，其中 A 和 B 是自伴算子（见 10.54）。证明 T 是酉算子，当且仅当 T 是正规算子并且 $A^2 + B^2 = I$。[*If $z = x + yi$, where $x, y \in \mathbf{R}$, then $|z| = 1$ if and only if $x^2 + y^2 = 1$. Thus this exercise strengthens the analogy between the unit circle in the complex plane and the unitary operators.*]

21 假设 T 是一个作用在复希尔伯特空间上的酉算子，且 $T - I$ 是可逆的。证明:

$$i(T + I)(T - I)^{-1}$$

是一个自伴算子。
[*The function $z \mapsto i(z + 1)(z - 1)^{-1}$ maps $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\} \setminus \{1\}$ to $\mathbf{R}$. Thus this exercise provides another useful illustration of the analogies showing unitary $\approx \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ and self-adjoint $\approx \mathbf{R}$.*]

假设 T 是复希尔伯特空间上的自伴算子。证明:

$$(T+iI)(T-iI)^{-1}$$

是一个幺正算符。

[*The function* $z \mapsto (z+i)(z-i)^{-1}$ *maps* R *to* $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\} \setminus \{1\}$. *Thus this exercise provides another useful illustration of the analogies showing* (*a*) *unitary* $\iff$ $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$; (*b*) *self-adjoint* $\iff$ R.]

For T a bounded operator on a Banach space, define e^T by

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

23 (a) 证明如果 T 是 Banach 空间 V 上的有界算子，则上述无穷级数在 $\mathcal{B}(V)$ 和 $\|e^T\| \le e^{\|T\|}$ 中收敛。

(b) 证明如果 S，T 是巴拿赫空间 V 上的有界算子，且 $ST = TS$，则 $e^S e^T = e^{S+T}$。(c) 证明如果 T 是复希尔伯特空间上的自伴算子，则 e^{iT} 是酉算子。

A bounded operator T on a Hilbert space is called a 部分同胺性 ***if***

$$\|Tf\| = \|f\| \text{ for all } f \in (\operatorname{null} T)^{\perp}.$$

24 假设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个 σ-有限测度空间，并且 $h \in L^\infty(\mu)$。如常，令 $M_h \in \mathcal{B}\big(L^2(\mu)\big)$ 表示由 $M_h f = fh$ 定义的乘法算子。证明 M_h 是一个部分等距算子，当且仅当存在一个集合 $E \in \mathcal{S}$ 使得 $|h| = \chi_E$。

25 假设 T 是一个希尔伯特空间上的等距算子。证明 T^* 是一个部分等距算子。

26 假设 T 是希尔伯特空间 V 上的有界算子。证明 T 是一个部分同构算子，当且仅当存在某个闭子空间 U，使得 $T^*T = P_U$。

10C 紧算子

紧算子理想

一个丰富的理论刻画了紧算子的行为，我们现在予以定义。

10.66 定义 *compact operator;* $\mathcal{C}(V)$

- 在希尔伯特空间 V 上的算子 T 若满足：对于 V 中的每一个有界序列 $f_1, f_2, \ldots$，序列 $Tf_1, Tf_2, \ldots$ 都有一个收敛子序列，则称其为 *compact* 。
- 在 V 上的紧算子集合记为 $\mathcal{C}(V)$。

下一个结果给出了紧算子的一大类例子。在证明更多结果之后，我们还将看到更多例子。

10.67 *bounded operators with finite-dimensional range are compact*

如果T是希尔伯特空间上的有界算子，且值域T是有限维的，那么T是紧算子。

证明 设 T 是希尔伯特空间 V 上的一个有界算子，且值域 T 是有限维的。设 $e_1, \cdots, e_m$ 是值域 T (的一个正交规范基。值域 T 的有限正交规范基存在，因为对值域 T 的任意一组基应用 Gram–Schmidt 过程都会产生一个正交规范基；见 8.67) 的证明。

现在假设 $f_1, f_2, \ldots$ 是 V 中的一个有界序列。对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，我们有

$$Tf_n = \langle Tf_n, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle Tf_n, e_m\rangle e_m.$$

Cauchy–Schwarz 不等式表明，对于每个 $|\langle Tf_n,\ e_j\rangle| \leq \|T\| \sup_{k\in\mathbf{Z}^+} \|f_k\|$。$n \in \mathbf{Z}^+$ 和 $j \in \{1, \ldots, m\}$。因此存在一个子序列 $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$，使得对于每个 $j \in \{1, \ldots, m\}$，$\lim_{k\to\infty}\langle Tf_{n_k}, e_j\rangle$ 在 $\mathbf{F}$ 中存在。上面显示的等式现在意味着 $\lim_{k\to\infty} Tf_{n_k}$ 在 V 中存在。因此 T 是紧的。∎

并非每个有界算子都是紧的。例如，无限维希尔伯特空间上的恒等映射不是紧的（要理解这一点，考虑一个正交规范序列，它没有收敛子序列，因为该正交规范序列中任意两个不同元素之间的距离都是 $\sqrt{2}$）。

10.68 *compact operators are bounded*

Hilbert 空间上的每个紧算子都是有界算子。

证明 我们证明如果 T 是一个不有界的算子，那么 T 就不是紧算子。为此，设 V 是一个希尔伯特空间，且 T 是作用在 V 上的一个不有界算子。因此，存在于 V 中的一个有界序列 $f_1, f_2, \cdots$，使得 $\lim_{n\to\infty}\|Tf_n\| = \infty$。因此，$Tf_1, Tf_2, \cdots$ 的任何子序列都不收敛，这意味着 T 不是紧算子。∎

如果 V 是一个希尔伯特空间，那么 $\mathcal{B}(V)$ 的一个 *two- sided ideal* 是 $\mathcal{B}(V)$ 的一个子空间，它在由 V 上的有界算子左右乘下是封闭的。下一个结果表明，在 V 上的紧算子集合是 $\mathcal{B}(V)$ 的一个双边理想，并且在 $\mathcal{B}(V)$ 上由范数诱导的拓扑中是闭的。

If V is finite-dimensional, then the only two-sided ideals of $\mathcal{B}(V)$ are $\{0\}$ and $\mathcal{B}(V)$. In contrast, if V is infinite-dimensional, then the next result shows that $\mathcal{B}(V)$ has a closed two-sided ideal that is neither $\{0\}$ nor $\mathcal{B}(V)$.

10.69 $\mathcal{C}(V)$ *is a closed two-sided ideal of* $\mathcal{B}(V)$

假设 V 是一个希尔伯特空间。

(a) $\mathcal{C}(V)$ 是 $\mathcal{B}(V)$ 的一个封闭子空间。 (b) 如果 $T \in \mathcal{C}(V)$ 和 $S \in \mathcal{B}(V)$，那么 $ST \in \mathcal{C}(V)$ 和 $TS \in \mathcal{C}(V)$。

证明 设 $f_1, f_2, \dots$ 是 V 中的一个有界序列。

为了证明 $\mathcal{C}(V)$ 对加法封闭，假设 S，$T \in \mathcal{C}(V)$。因为 S 是紧致的，Sf_1，Sf_2，... 存在一个收敛的子序列 Sf_{n_1}，Sf_{n_2}，...。因为 T 是紧致的，Tf_{n_1}，Tf_{n_2}，... 的某个子序列收敛。因此，我们有一个子序列（$S+T$）f_1，（$S+T$）f_2，...，它收敛。因此 $S+T \in \mathcal{C}(V)$。

证明$\mathcal{C}(V)$在标量乘法下是封闭的更为简单，留给读者自行完成。因此，我们现在知道$\mathcal{C}(V)$是$\mathcal{B}(V)$的一个子空间。

为了证明 $\mathcal{C}(V)$ 在 $\mathcal{B}(V)$ 中是闭合的，假设 $T \in \mathcal{B}(V)$，并且存在一个序列 T_1，T_2，... 在 $\mathcal{C}(V)$ 中，使得 $\lim_{m\to\infty}\|T - T_m\| = = 0$。为了证明 T 是紧致的，我们需要证明对于某些递增的正整数序列 $n_1 < n_2 < \cdots$，Tf_{n_1}，Tf_{n_2}，... 是一个柯西序列。

由于T_1是紧的，存在一个无限集合$Z_1 \subseteq \mathbf{Z}^+$，并且对于所有$j$，$k \in Z_1$，都有$\|T_1 f_j - T_1 f_k\| < 1$。令$n_1$为$Z_1$的最小元素。

现在假设 $m \in \mathbf{Z}^+$ 其中 $m >$ 为 1，并且已经选择了一个无限集 $Z_{m-1} \subseteq \mathbf{Z}^+$ 和 $n_{m-1} \in Z_{m-1}$。因为 T_m 是紧致的，所以存在一个无限集 $Z_m \subseteq Z_{m-1}$，其满足

$$\|T_m f_j - T_m f_k\| < \tfrac{1}{m}$$

对所有 j、$k \in Z_m$。令 n_m 为 Z_m 中满足 $n_m > n_{m-1}$ 的最小元素。

因此，我们产生一个递增的正整数序列 $n_1 < n_2 < \cdots$ 和一个递减的无限子集序列 $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots$，它们属于 $\mathbf{Z}^+$。

如果 $m \in \mathbf{Z}^+$ 且 j，$k \geq m$，则

$$\begin{aligned}\|Tf_{n_j} - Tf_{n_k}\| &\leq \|Tf_{n_j} - T_m f_{n_j}\| + \|T_m f_{n_j} - T_m f_{n_k}\| + \|T_m f_{n_k} - Tf_{n_k}\| \\ &\leq \|T - T_m\|(\|f_{n_j}\| + \|f_{n_k}\|) + \tfrac{1}{m}.\end{aligned}$$

通过取 m 足够大，我们可以使上面最后一行中的第一项任意小（因为 $\lim_{m\to\infty}\|T - T_m\| = 0$，且序列 $f_1, f_2, \dots$ 是有界的）。因此 Tf_{n_1}，Tf_{n_2}，$\dots$ 是一个柯西序列，如所要求的，从而完成了(a)的证明。

为证明 (b)，假设 $T \in \mathcal{C}(V)$ 且 $S \in \mathcal{B}(V)$。因此，$Tf_1, Tf_2, \dots$ 的某个子序列收敛，而将 S 应用于该子序列得到另一个收敛序列。于是 $ST \in \mathcal{C}(V)$。类似地，$Sf_1, Sf_2, \dots$ 是有界序列，因此 $T(Sf_1), T(Sf_2), \dots$ 存在一个收敛子序列；于是 $TS \in \mathcal{C}(V)$。 ■

前述结果现在使我们能够看到许多新的紧算子例子。

10.70 *compact integral operators*

假设（$X, \mathcal{S}, \mu$）是一个σ-有限测度空间，$K \in \mathcal{L}^2(\mu \times \mu)$，并且$\mathcal{I}_K$是定义在$L^2(\mu)$上的积分算子，定义为

$$(\mathcal{I}_K f)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y)$$

对于 $f \in L^2(\mu)$ 和 $x \in X$。则 $\mathcal{I}_K$ 是一个紧算子。

证明例10.5表明$\mathcal{I}_K$是$L^2(\mu)$上的有界算子。

首先考虑存在 g、$h \in L^2(\mu)$ 使得

10.71 $$K(x,y) = g(x)h(y)$$

对于几乎所有的 $(x, y) \in X \times X$。在那种情况下，如果$f \in L^2(\mu)$ 则

$$(\mathcal{I}_K f)(x) = \int_X g(x)h(y)f(y)\, d\mu(y) = \langle f, \overline{h} \rangle g(x)$$

对几乎所有的 $x \in X$ 都成立。因此 $\mathcal{I}_K f = \langle f, \overline{h} \rangle g$。换言之，在这种情况下 $\mathcal{I}_K$ 的值域是一维的（或者如果 $g = 0$，则值域是零维的）。因此，10.67 蕴含 $\mathcal{I}_K$ 是紧的。

现在考虑K是由10.71右侧所给形式的函数的有限和的情形。于是，由于V上的紧算子集合在加法下封闭［见10.69(a)］，在这种情况下算子$\mathcal{I}_K$是紧的。

接下来，考虑 $K \in L^2(\mu \times \mu)$ 的情形，其中 K 是函数序列 $K_1, K_2, \cdots$ 在 $L^2(\mu \times \mu)$ 中的极限，而该序列中的每一个函数都具有上一段所讨论的形式。于是

$$\|\mathcal{I}_K - \mathcal{I}_{K_n}\| = \|\mathcal{I}_{K-K_n}\| \leq \|K - K_n\|_2,$$

其中上述不等式来自 10.8。因此 $\mathcal{I}_K = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_{K_n}$。由前一段可知，每个 $\mathcal{I}_{K_n}$ 都是紧的。由于紧算子的集合是 $\mathcal{B}(V)$ 的一个闭子集 [由 10.69(a)]，我们得出 $\mathcal{I}_K$ 是紧的。

我们通过证明前一段所考虑的情形涵盖了所有的 $K \in L^2(\mu \times \mu)$ 来完成证明。为此，假设 $F \in L^2(\mu \times \mu)$ 与前一段所考虑形式的 $L^2(\mu \times \mu)$ 的所有元素都正交。因此

$$0 = \int_{X\times X} g(x)h(y)\,\overline{F(x,y)}\, d(\mu\times\mu)(x,y) = \int_X g(x) \int_X h(y)\,\overline{F(x,y)}\, d\mu(y)\, d\mu(x)$$

对所有 $g, h \in L^2(\mu)$，其中我们使用了 Tonelli 定理、Fubini 定理以及 Hölder 不等式（取 $p =$ 为 2）。对于固定的 $h \in L^2(\mu)$，上述右端对所有 $g \in L^2(\mu)$ 等于 0 意味着

$$\int_X h(y)\,\overline{F(x,y)}\, d\mu(y) = 0$$

对几乎所有的 $x \in X$。现在 $F(x, y) = 0$ 对几乎所有的 $(x, y) \in X \times X$ [因为上述方程对所有 $h \in L^2(\mu)$ 成立]，从而由 8.42 完成证明。 ∎

作为前一结果的一个特例，我们现在可以看到由……定义的 Volterra 算子 $\mathcal{V}: L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$

$$(\mathcal{V}f)(x) = \int_0^x f$$

是紧凑的。这个结论成立，因为正如在例 10.15 中所示，Volterra 运算符是前述结果中考虑的那种类型的积分算子。

Volterra算子是单射的[因为对等式 $\int_0^x f = 0$ 关于 x 两边求导，并使用勒贝格微分定理(4.19)，可得 $f = 0$]。因此，Volterra算子是一个值域为无限维的紧算子的例子。下一个例子给出了另一类不一定具有有限维值域的紧算子。

10.72 示例 *compact multiplication operators on* ℓ^2

假设 $b_1, b_2, \ldots$ 是 $\mathbf{F}$ 中的一个序列，使得 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$。定义一个有界线性映射 $T: \ell^2 \to \ell^2$，其定义为

$$T(a_1, a_2, \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots)$$

并且对于 $n \in \mathbf{Z}^+$，定义一个有界线性映射 $T_n: \ell^2 \to \ell^2$ 为

$$T_n(a_1, a_2, \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, 0, 0, \ldots).$$

注意，每个T_n都是值域有限维的有界算子，因此是紧的（由10.67）。条件 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 蕴含 $\lim_{n\to\infty} T_n = T$。因此$T$是紧的，因为$\mathcal{C}(V)$是$\mathcal{B}(V)$的一个闭子集[由10.69(a)]。

下一个结果表明，一个算子是紧的，当且仅当它的伴随算子是紧的。

10.73 T compact $\iff$ T^* compact

假设 T 是希尔伯特空间上的有界算子。则 T 当且仅当 T^* 是紧算子时，T 是紧的。

证明 首先假设 T 是紧的。我们要证明 T^* 是紧的。为此，设 $f_1, f_2, \ldots$ 是 V 中的一个有界序列。因为 TT^* 是紧的［由 10.69(b)］，某个子序列 $TT^* f_{n_1}$, $TT^* f_{n_2}, \ldots$ 收敛。现在

$$\begin{aligned}\|T^* f_{n_j} - T^* f_{n_k}\|^2 &= \langle T^*(f_{n_j} - f_{n_k}), T^*(f_{n_j} - f_{n_k})\rangle \\ &= \langle TT^*(f_{n_j} - f_{n_k}), f_{n_j} - f_{n_k}\rangle \\ &\le \|TT^*(f_{n_j} - f_{n_k})\|\,\|f_{n_j} - f_{n_k}\|.\end{aligned}$$

上述不等式意味着 $T^* f_{n_1}, T^* f_{n_2}, \ldots$ 是一个柯西序列，从而收敛。因此 T^* 是一个紧算子，完成了这样的证明：如果 T 是紧的，那么 T^* 是紧的。

现在假设 T^* 是紧的。根据上文段落中证明的结果，$(T^*)^*$ 是紧的。因为 $(T^*)^* = T$（（见 10.11）），我们得出 T 是紧的。■

紧致算子的谱与弗雷德霍姆备择定理

我们之前提到过，无穷维希尔伯特空间上的恒等映射不是紧致的。接下来的结果表明，实际上更为一般的情况成立。

10.74 *no infinite-dimensional closed subspace in range of compact operator*

每个希尔伯特空间上的紧算子的范围不包含任何无限维的闭子空间。

证明。假设T是Hilbert空间V上的一个有界算子，且U是包含在T的值域中的一个无限维闭子空间。我们要证明T不是紧算子。

由于T是一个连续算子，$T^{-1}(U)$是V的一个闭子空间。令$S = T|_{T^{-1}(U)}$。因此，S是一个从希尔伯特空间$T^{-1}(U)$到希尔伯特空间U的满射有界线性映射［此处$T^{-1}(U)$和U由6.16(b)知是希尔伯特空间］。开映射定理（6.81）表明，S将$T^{-1}(U)$的开单位球映射到U的一个开子集。因此，存在$r > 0$使得

10.75 $$\{g \in U : \|g\| < r\} \subseteq \{Tf : f \in T^{-1}(U) \text{ and } \|f\| < 1\}.$$

因为 U 是一个无限维希尔伯特空间，通过对 U 中任意线性无关序列应用 Gram–Schmidt 过程（见 8.67 的证明），可以看出在 U 中存在一个正交规范序列 $e_1, e_2, \ldots$。每个 $\frac{re_n}{2}$ 都位于 10.75 的左侧。因此，对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，都存在 $f_n \in T^{-1}(U)$，使得 $\|f_n\| < 1$ 且 $Tf_n = \frac{re_n}{2}$。序列 $f_1, f_2, \ldots$ 是有界的，但序列 $Tf_1, Tf_2, \ldots$ 没有收敛子序列，因为对于 $j \neq k$，有 $\left\|\frac{re_j}{2} - \frac{re_k}{2}\right\| = \frac{\sqrt{2}r}{2}$。因此，$T$ 不是紧的，如所需。

假设 T 是一个无限维希尔伯特空间上的紧算子。上述结果意味着 T 不是满射。特别地，T 不是可逆的。因此，我们得出以下结果。

10.76 *compact implies not invertible on infinite-dimensional Hilbert spaces*

如果 T 是无限维希尔伯特空间上的一个紧算子，那么 $0 \in \operatorname{sp}(T)$.

尽管10.74显示，如果T是紧的，则范围T不包含无限维的闭子空间，但下一个结果显示，对于$T - \alpha I$，如果$\alpha \in \mathbf{F} \setminus \{0\}$，情况会发生剧烈变化。

下一个结果的证明利用了将 $T - \alpha I$ 限制在闭子空间 $\big(\operatorname{null}(T - \alpha I)\big)^{\perp}$ 上。作为考虑这一限制的动机，回忆每个 $f \in V$ 都可以唯一地写成 $f = g + h$，其中 $g \in \operatorname{null}(T - \alpha I)$ 且 $h \in \big(\operatorname{null}(T - \alpha I)\big)^{\perp}$ (见 8.43)。因此，$(T - \alpha I)f = (T - \alpha I)h$，这意味着 $\operatorname{range}(T - \alpha I) = (T - \alpha I)\Big(\big(\operatorname{null}(T - \alpha I)\big)^{\perp}\Big)$。

10.77 *closed range*

如果 T 是希尔伯特空间上的紧算子，那么对于每个 $\alpha \in \mathbf{F}$ 且 $\alpha \neq 0$，$T-\alpha I$ 都具有闭合范围。

证明 设 T 是 Hilbert 空间 V 上的一个紧算子，且 $\alpha \in \mathbf{F}$ 满足 $\alpha \neq 0$。

声明：存在 $r > 0$，使得 10.78

$$\|f\| \leq r\|(T-\alpha I)f\| \text{ for all } f \in \big(\operatorname{null}(T-\alpha I)\big)^{\perp}.$$

为了证明上述断言，假设它是错误的。则对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，存在 $f_n \in (\operatorname{null}(T-\alpha I))^{\perp}$ 使得

$$\|f_n\| = 1 \quad \text{and} \quad \|(T-\alpha I)f_n\| < \tfrac{1}{n}.$$

由于 T 是紧的，存在一个子序列 $Tf_{n_1}, Tf_{n_2}, \dots$ 使得

10.79
$$\lim_{k\to\infty} Tf_{n_k} = g$$

对于一些 $g \in V$。减去方程

10.80
$$\lim_{k\to\infty} (T-\alpha I)f_{n_k} = 0$$

由 10.79 再除以 α 可知

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = \tfrac{1}{\alpha}g.$$

上述方程意味着 $\|g\| = |\alpha|$；因此 $g \neq 0$。每个 $f_{n_k} \in (\operatorname{null}(T-\alpha I))^{\perp}$；因此我们也得出结论 $g \in (\operatorname{null}(T-\alpha I))^{\perp}$。将 $T-\alpha I$ 应用到上述方程的两边，并使用 10.80，得到 $g \in \operatorname{null}(T-\alpha I)$。因此 g 是 $\operatorname{null}(T-\alpha I)$ 和其正交补空间的非零元素。这个矛盾完成了 10.78 中断言的证明。

为了证明 $\operatorname{range}(T-\alpha I)$ 是闭的，假设 h_1，h_2，... 是一个收敛到某个 $h \in V$ 的序列，且该序列位于 $\operatorname{range}(T-\alpha I)$ 中。对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，存在 $f_n \in (\operatorname{null}(T-\alpha I))^{\perp}$ 使得 $(T-\alpha I)f_n = h_n$。因为 h_1，h_2，... 是一个 Cauchy 序列，10.78 显示 f_1，f_2，... 也是一个 Cauchy 序列。因此，存在 $f \in V$ 使得 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$，从而有 $h = (T-\alpha I)f \in \operatorname{range}(T-\alpha I)$。因此，$\operatorname{range}(T-\alpha I)$ 是闭的。 ■

设T是 Hilbert 空间V上的一个紧算子，并且$f \in V$，以及$\alpha \in \mathbf{F}\setminus\{0\}$。由上述结果和 10.13(d) 可得一个直接的推论（在研究积分方程时常常有用），即该方程

$$Tg - \alpha g = f$$

当且仅当 $\langle f, h\rangle = 0$ 对于每个满足 $T^*h = \alpha h$ 的 $h \in V$，才有解 $g \in V$。

10.81 定义 *geometric multiplicity*

- 一个算子 T 的特征值 α 的 *geometric multiplicity* 被定义为 $\operatorname{null}(T-\alpha I)$ 的维度。
- 换句话说，特征值 α 在 T 中的几何重数是由 0 和所有对应于 α 的 T 特征向量组成的子空间的维度。

存在一些紧算子，使得特征值 0 具有无限的几何重数。下一个结果表明，对于非零特征值，这种情况不可能发生。

10.82 *nonzero eigenvalues of compact operators have finite multiplicity*

设 T 是希尔伯特空间上的一个紧算子，并且 $\alpha \in \mathbf{F}$，$\alpha \neq 0$。则 $\operatorname{null}(T-\alpha I)$ 是有限维的。

证明 假设 $f \in \operatorname{null}(T-\alpha I)$. 则 $f = T\left(\frac{f}{\alpha}\right)$. 因此 $f \in$ 值域 T.

因此，我们已经证明了 $\operatorname{null}(T-\alpha I) \subseteq$ 范围 T。因为 T 是连续的，$\operatorname{null}(T-\alpha I)$ 是闭合的。因此，10.74 意味着 $\operatorname{null}(T-\alpha I)$ 是有限维的。 ■

下一个引理用于我们证明Fredholm替代定理（10.85）。请注意，这个引理意味着在有限维向量空间上，每个单射算子都是满射的（因为有限维向量空间不能有无限长的严格递减子空间链——每一步中维度至少减少1）。另外，参见习题10，它给出了类似的结果，表明在有限维向量空间上，每个满射算子都是单射的。

10.83 *injective but not surjective*

如果 T 是向量空间上的一个单射但非满射的算子，那么

$$\operatorname{range} T \supsetneq \operatorname{range} T^2 \supsetneq \operatorname{range} T^3 \supsetneq \cdots .$$

证明 设 T 是作用在向量空间 V 上的一个单射但非满射的算子。设 $n \in \mathbf{Z}^+$。如果 $g \in V$，则

$$T^{n+1}g = T^n(Tg) \in \operatorname{range} T^n.$$

因此范围 $T^n \supseteq$ 范围 T^{n+1}。

为了证明最后的包含关系不是等式，注意到因为T不是满射，存在$f \in V$使得

$$f \notin \operatorname{range} T. \tag{10.84}$$

现在 $T^n f \in$ 的值域为 T^n。然而，$T^n f /\!\in$ 的值域为 T^{n+1}，因为如果 $g \in V$ 且 $T^n f = T^{n+1} g$，则 $T^n f = T^n(Tg)$，这将意味着 $f = Tg$ (，因为 T^n 是单射)，这将与 10.84 矛盾。因此，值域 $T^n \supsetneq$ 值域 T^{n+1}。 ■

紧算子在某些方面表现得像作用在有限维向量空间上的算子。例如，在有限维情形下（其中不必排除 $\alpha = 0$ 的选择），下面这个重要定理你应当是熟悉的。

10.85 *Fredholm Alternative*

设 T 是 Hilbert 空间上的一个紧算子，且 $\alpha \in \mathbf{F}$ 并且 $\alpha \neq 0$。则下列条件等价。

（a）$\alpha \in \operatorname{sp}(T)$. （b）$\alpha$
是 T 的一个特征值。 （c
）
$T - \alpha I$ 不是满射。

证明 显然 (b) 蕴含 (a)，且 (c) 蕴含 (a)。

为证明 (a) 推出 (b)，假设 $\alpha \in \operatorname{sp}(T)$，但 α 不是 T 的一个特征值。因此 $T - \alpha I$ 是单射，但 $T - \alpha I$ 不是满射。因此，将 10.83 应用于 $T - \alpha I$ 表明

10.86 $$\operatorname{range}(T - \alpha I) \supsetneqq \operatorname{range}(T - \alpha I)^2 \supsetneqq \operatorname{range}(T - \alpha I)^3 \supsetneqq \cdots.$$

如果 $n \in \mathbf{Z}^+$，那么二项式定理和 10.69 表明

$$(T - \alpha I)^n = S + (-\alpha)^n I$$

对于某个紧算子 S。现在，10.77 表明 $\operatorname{range}(T - \alpha I)^n$ 是 T 作用的希尔伯特空间的一个闭子空间。因此，10.86 蕴含：对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，存在

10.87 $$f_n \in \operatorname{range}(T - \alpha I)^n \cap \bigl(\operatorname{range}(T - \alpha I)^{n+1}\bigr)^{\perp}$$

使得 $\|f_n\| = 1$。

现在假设 j，$k \in \mathbf{Z}^+$ 与 $j < k$。然后

10.88 $$Tf_j - Tf_k = (T - \alpha I)f_j - (T - \alpha I)f_k - \alpha f_k + \alpha f_j.$$

因为 f_j 和 f_k 都属于 $\operatorname{range}(T - \alpha I)^j$，10.88 右边的前两项属于 $\operatorname{range}(T - \alpha I)^{j+1}$。因为 $j + 1 \leq k$，10.88 中的第三项也属于 $\operatorname{range}(T - \alpha I)^{j+1}$。现在 10.87 表明，10.88 中的最后一项与前三项之和正交。因此，10.88 导致如下不等式

$$\|Tf_j - Tf_k\| \geq \|\alpha f_j\| = |\alpha|.$$

上述不等式意味着 Tf_1、Tf_2，$\cdots$ 没有收敛子序列，这与 T 的紧性相矛盾。这个矛盾意味着 α 不是 T 的特征值的假设是错误的，从而完成了 (a) 推出 (b) 的证明。

在这个阶段，我们知道（a）与（b）是等价的，并且（c）蕴含（a）。为了证明（a）蕴含（c），设 $\alpha \in \operatorname{sp}(T)$。因此 $\bar{\alpha} \in \operatorname{sp}(T^*)$。将（a）与（b）的等价性应用于 T^*，我们得出 $\bar{\alpha}$ 是 T^* 的一个特征值。因此，将 10.13(d) 应用于 $T - \alpha I$ 表明 $T - \alpha I$ 不是满射，从而完成了（a）蕴含（c）的证明。■

之前的结果通常在其名称中包含词语 *alternative*，因为它可以重新表述为以下内容。

> 如果 T 是 Hilbert 空间 V 上的一个紧算子，并且 $\alpha \in \mathbf{F} \setminus \{0\}$，则以下条件中恰有一个成立。
>
> - 方程 $Tf = \alpha f$ 有一个非零解 $f \in V$。
> - 对于每个$g \in V$，方程$g = Tf - \alpha f$都有一个解$f \in V$。

下一个例子展示了 Fredholm 备择定理的威力。在这个例子中，我们想要证明，对于所有 $\alpha \in \mathbf{F} \setminus \{0\}$，$\mathcal{V} - \alpha I$ 都是可逆的。验证 $\mathcal{V} - \alpha I$ 是单射是直接的。证明 $\mathcal{V} - \alpha I$ 是满射则需要更多的工作。然而，Fredholm 备择定理无需进一步的工作就告诉我们，$\mathcal{V} - \alpha I$ 是可逆的。

10.89 示例 *spectrum of the Volterra operator*

我们要证明 Volterra 算子 $\mathcal{V}$ 的谱是 $\{0\}$ (，关于 $\mathcal{V}$) 的定义见例 10.15。Volterra 算子 $\mathcal{V}$ 是紧的（见 10.70 的证明之后的评注）。因此，由 10.76，$0 \in \operatorname{sp}(\mathcal{V})$。

假设 $\alpha \in \mathbf{F} \setminus \{0\}$。为了证明 $\alpha \notin \operatorname{sp}(\mathcal{V})$，根据 10.85)，我们只需证明 α 不是 $\mathcal{V}$ (的一个特征值。于是设 $f \in L^2([0, 1])$ 且 $\mathcal{V}f = \alpha f$。因此

10.90
$$\int_0^x f = \alpha f(x)$$

对于几乎每个 $x \in \in [0, 1]$。10.90 的左边是关于 x 的连续函数，因此右边也是连续的，这意味着 f 是连续的。f 的连续性现在又意味着 10.90 的左边具有连续的导数，因此 f 具有连续的导数。

现在对 10.90 的两边关于 x 求导，得到

$$f(x) = \alpha f'(x)$$

fo对所有 r $x \in (0, 1)$。标准微积分表明，上述方程意味着

$$f(x) = ce^{x/\alpha}$$

对于某个常数 c。然而，10.90 表明连续函数 f 必须满足方程 $f(0) = 0$。因此 $c = 0$，这意味着 $f = 0$。

上一段的结论表明 α 不是 $\mathcal{V}$ 的特征值。Fredholm 备择定理 (10.85) 现在表明 $\alpha \notin \operatorname{sp}(\mathcal{V})$。因此 $\operatorname{sp}(\mathcal{V}) = \{0\}$。

如果 α 是有限维希尔伯特空间上线性算子 T 的特征值，那么 α 是 T^* 的特征值。¯ 对于无限维希尔伯特空间上的有界算子，该结果不成立。

然而，设 T 是希尔伯特空间上的一个紧算子，且 α 是 T 的一个非零特征值。因此 $\alpha \in \in \operatorname{sp}(T)$，这意味着 $\alpha \in \in \operatorname{sp}(T^*)$（因为一个有界算子当且仅当其伴随算子可逆时才可逆）。弗雷德霍姆二择一定理（10.85）现在表明 α 是 T^* 的一个特征值。因此，紧性使我们能够恢复有限维的结果（除了情形 $\alpha = 0$）。

我们的下一个结果表明，如果 T 是一个紧算子并且 $\alpha \neq 0$，那么 null($T - \alpha I$) 和 null($T^* - \overline{\alpha} I$) 具有相同的维数（记为 dim）。关于特征向量空间维数的这一结果在有限维情形下更容易证明。具体地，设 S 是作用在一个有限维希尔伯特空间 V (上的算子，你可以把它看作 $S = T - \alpha I$)。那么

$$\dim \operatorname{null} S = \dim V - \dim \operatorname{range} S = \dim(\operatorname{range} S)^{\perp} = \dim \operatorname{null} S^*,$$

每一步的证明应该是你在有限维线性代数中熟悉的。这种有限维证明在无限维情况下不起作用，因为表达式 dim V − dim range S 可能呈现 $\infty - \infty$ 形式。

尽管下面结果中的两个零空间的维数相同，即使在有限维情况下，这两个零空间也不一定彼此相等（但当 T 是正规时，这两个零空间相等；见 10.56）。

请注意，下方结果中的两个维度都是有限的（分别为 10.82 和 10.73）。

10.91 *null spaces of $T - \alpha I$ and $T^* - \overline{\alpha} I$ have same dimensions*

设T是希尔伯特空间上的一个紧算子，且$\alpha \in \mathbf{F}$，$\alpha \neq 0$。则

$$\dim \operatorname{null}(T - \alpha I) = \dim \operatorname{null}(T^* - \overline{\alpha} I).$$

证明 设 dim null($T - \alpha I$) < dim null($T^* - \overline{\alpha} I$)。因为 null($T^* - \overline{\alpha} I$) 等于 $\big($range($T - \alpha I$)$\big)^{\perp}$，存在一个有界的单射线性映射

$$R\colon \operatorname{null}(T - \alpha I) \to \big(\operatorname{range}(T - \alpha I)\big)^{\perp}$$

它不是满射。设 V 表示 T 作用其上的希尔伯特空间，并令 P 为 V 到 null($T - \alpha I$) 上的正交投影。定义线性映射 $S : V \to V$ 如下

$$S = T + RP.$$

因为 RP 是一个具有有限维值域的有界算子，S 是紧的。此外，

$$S - \alpha I = (T - \alpha I) + RP.$$

range($T - \alpha I$) 中的每个元素都与 range RP 中的每个元素正交。假设 $f \in V$ 且 $(S - \alpha I) f = 0$。上面的等式表明 $(T - \alpha I) f = 0$ 且 $RPf = 0$。因为 $f \in$ null($T - \alpha I$), 我们看到 $Pf = f$，这进而意味着 $Rf = RPf = 0$，进而意味着 $f = 0$（因为 R 是单射）。因此 $S - \alpha I$ 是单射。

然而，由于 R 映射到 $\big($range($T - \alpha I$)$\big)^{\perp}$ 的一个真子集，我们看到 $S - \alpha I$ 不是满射，这与 10.85 中 (b) 与 (c) 的等价性相矛盾。这个矛盾意味着关于 dim null($T - \alpha I$) < dim null($T^* - \overline{\alpha} I$) 的假设是错误的。因此我们已经证明了

10.92 $$\dim \operatorname{null}(T - \alpha I) \geq \dim \operatorname{null}(T^* - \overline{\alpha} I)$$

对于每一个紧算子 T 以及每一个 $\alpha \in \mathbf{F} \setminus \{0\}$。

现在将前一段的结论应用于T^* (，其由10.73)和$\overline{\alpha}$紧凑得到，反转不等式后得到10.92,‾ 从而完成证明。 ■

有限维希尔伯特空间上一个算子的谱是一个有限集合，仅由该算子的特征值组成。无限维希尔伯特空间上的紧算子的谱可以是一个无限集合。然而，我们接下来的结果表明，如果一个紧算子具有无限谱，那么该谱由 0 以及 F 中一个以 0 为极限的序列组成。

10.93 ***spectrum of a compact operator***

假设 T 是希尔伯特空间上的一个紧算子。那么

$$\{\alpha \in \operatorname{sp}(T) : |\alpha| \geq \delta\}$$

对于每个 $\delta > 0$，都是一个有限集。

证明 修正 $\delta > 0$. 假设存在互不相同的 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ 属于 $\operatorname{sp}(T)$，并且对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$ 都有 $|\alpha_n| \geq \delta$。Fredholm 选择定理（10.85）意味着每个 α_n 都是 T 的特征值。对 $n \in \mathbf{Z}^+$，令

$$U_n = \operatorname{null}\big((T - \alpha_1 I) \cdots (T - \alpha_n I)\big)$$

并且让 $U_0 = \{0\}$。由于 T 是连续的，每个 U_n 都是 T 操作的希尔伯特空间的闭子空间。此外，对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，因为形式为 $T - \alpha_j I$ 和 $T - \alpha_k I$ 的算子彼此对易。

如果 $n \in \mathbf{Z}^+$ 且 g 是 T 的一个对应于特征值 α_n 的特征向量，那么 $g \in U_n$，但 $g \notin U_{n-1}$，因为

$$(T - \alpha_1 I) \cdots (T - \alpha_{n-1} I)g = (\alpha_n - \alpha_1) \cdots (\alpha_n - \alpha_{n-1})g \neq 0.$$

换句话说，我们有

$$U_1 \subsetneqq U_2 \subsetneqq U_3 \subsetneqq \cdots.$$

因此，对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，都存在

10.94 $$e_n \in U_n \cap \big({U_{n-1}}^{\perp}\big)$$

使得 $\|e_n\| = 1$。

现在假设 j，$k \in \mathbf{Z}^+$ 与 $j < k$。然后

10.95 $$Te_j - Te_k = (T - \alpha_j I)e_j - (T - \alpha_k I)e_k + \alpha_j e_j - \alpha_k e_k.$$

因为 $j \leq k - 1$，10.95 右边的前三项属于 U_{k-1}。现在 10.94 表明 10.95 中的最后一项与前三项之和正交。因此 10.95 推出不等式

$$\|Te_j - Te_k\| \geq \|\alpha_k e_k\| = |\alpha_k| \geq \delta.$$

上面的不等式意味着 Te_1、Te_2、…… 没有收敛的子序列，这与 T 的紧性矛盾。这个矛盾意味着假设 $\operatorname{sp}(T)$ 包含绝对值至少为 δ 的无限多个元素是错误的。 ■

练习 10C

1 证明：如果 T 是希尔伯特空间 V 上的一个紧算子，且 $e_1, e_2, \ldots$ 是 V 中的一个正交规范序列，则 $\lim_{n\to\infty} Te_n = 0$。

2 证明如果 T 是 $L^2([0,1])$ 上的一个紧算子，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\|T(x^n)\|_2 = 0$，其中 x^n 表示由 $x \mapsto x^n$ 定义的 $L^2([0,1])$ 的元素。

3 假设 T 是定义在希尔伯特空间 V 上的一个紧算子，并且 $f_1, f_2, \ldots$ 是 V 中的一个序列，使得对于每个 $g \in V$ 都有 $\lim_{n\to\infty}\langle f_n, g\rangle = 0$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tf_n\| = 0$。

4 设 $h \in L^\infty(\mathbf{R})$。由 $M_h f = fh$ 定义 $M_h \in \mathcal{B}\big(L^2(\mathbf{R})\big)$。证明：如果 $\|h\|_\infty > 0$，则 M_h 不是紧的。

5 假设（$b_1, b_2, \ldots$）$\in \ell^\infty$。定义 $T : \ell^2 \to \ell^2$ 为

$$T(a_1, a_2, \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots).$$

证明 T 是紧的，当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0.$

6 设 T 是希尔伯特空间 V 上的一个有界算子。证明：如果存在 V 的一个正交归一基 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$，使得

$$\sum_{k\in\Gamma}\|Te_k\|^2 < \infty,$$

则 T 是紧的。

7 假设 T 是希尔伯特空间 V 上的一个有界算子。证明：如果 $\{e_k\}_{k\in\Gamma}$ 和 $\{f_j\}_{j\in\Omega}$ 是 V 的正交规范基，则

$$\sum_{k\in\Gamma}\|Te_k\|^2 = \sum_{j\in\Omega}\|Tf_j\|^2.$$

8 假设 T 是希尔伯特空间上的一个有界算子。证明 T 是紧算子当且仅当 T^*T 是紧算子。

9 证明如果 T 是无限维希尔伯特空间上的紧算子，则 $\|I - T\| \geq 1$。

10 证明如果 T 是向量空间 V 上的一个满射但非单射的算子，那么

$$\operatorname{null} T \subsetneqq \operatorname{null} T^2 \subsetneqq \operatorname{null} T^3 \subsetneqq \cdots .$$

11 假设 T 是希尔伯特空间上的一个紧算子，并且 $\alpha \in \mathbf{F}\setminus\{0\}$。

(a) 证明存在某个 $m \in \mathbf{Z}^+$，使得 $\operatorname{range}(T - \alpha I)^{m-1} = \operatorname{range}(T - \alpha I)^m$。
(b) 证明存在某个 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得 $\operatorname{null}(T - \alpha I)^{n-1} = \operatorname{null}(T - \alpha I)^n$。 (c) 说明在 (a) 中成立的最小正整数 m 等于在 (b) 中成立的最小正整数 n。

12 证明，如果 $f\colon [0, 1] \to \mathbf{F}$ 是一个连续函数，那么存在一个连续函数 $g : [0, 1] \to \mathbf{F}$，使得

$$f(x) = g(x) + \int_0^x g$$

对于所有 $x \in [0, 1]$。

13 假设 S 是希尔伯特空间 V 上的有界可逆算子，且 T 是 V 上的紧算子。

(a) 证明 $S + T$ 具有闭值域。 (b) 证明 $S + T$ 为单射当且仅当 $S + T$ 为满射。 (c) 证明 null$(S + T)$ 和 null$(S^* + T^*)$ 是有限维的。 (d) 证明 dim null$(S + T) =$ dim null$(S^* + T^*)$。 (e) 证明存在 $R \in \mathcal{B}(V)$，使得 range R 是有限维的，并且 $S + T + R$ 是可逆的。

14 设 T 是定义在希尔伯特空间 V 上的一个紧算子。证明值域 T 是 V 的一个可分子空间。

15 假设 T 是 Hilbert 空间 V 上的一个紧算子，且 $e_1, e_2, \ldots$ 是值域 T 的一组正交规范基。令 P_n 表示将 V 正交投影到 $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ 上的投影。

(a) 证明 $\lim_{n\to\infty} \|T - P_n T\| = 0$。 (b) 证明 Hilbert 空间 V 上的有界算子当且仅当它是有限维值域的有界算子序列在 $\mathcal{B}(V)$ 中的极限时是紧的。

16 证明，如果 T 是希尔伯特空间 V 上的紧算子，则存在一列可逆算子 S_1，S_2，...，它们作用于 V，使得 $\lim_{n\to\infty} \|T - S_n\| = 0$。

17 假设 T 是希尔伯特空间上的一个有界算子，并且存在一个系数属于 $\mathbf{F}$ 的非零多项式 p，使得 $p(T)$ 是紧算子。证明 sp(T) 是一个可数集。

Suppose T is a bounded operator on a Hilbert space. The* 代数重数 *of an eigenvalue α of T is defined to be the dimension of the subspace

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{null}(T - \alpha I)^n.$$

As an easy example, if T is the left shift as defined in the next exercise, then the eigenvalue 0 of T has geometric multiplicity 1 but algebraic multiplicity ∞.

The definition above of algebraic multiplicity is equivalent on finite-dimensional spaces to the common definition involving the multiplicity of a root of the characteristic polynomial. However, the definition used here is cleaner (no determinants needed) and has the advantage of working on infinite-dimensional Hilbert spaces.

18 设 $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ 由 $T(a_1、a_2、a_3、\cdots) = (a_2、a_3、a_4、\cdots)$ 定义。还假设 $\alpha \in \mathbf{F}$ 且 $|\alpha| < 1$。(a) 证明 α 作为 T 的一个特征值，其几何重数等于 1。(b) 证明 α 作为 T 的一个特征值，其代数重数等于 ∞。

19 证明在希尔伯特空间上一个正规算子的特征值的几何重数等于该特征值的代数重数。

20 证明希尔伯特空间上紧算子的每一个非零特征值都有有限的代数重数。

21 证明：如果 T 是希尔伯特空间上的一个紧算子，且 α 是 T 的一个非零特征值，那么 α 作为 T 的特征值的代数重数等于 $\overline{\alpha}$ 作为 T^* 的特征值的代数重数。

22 证明如果 V 是一个可分的希尔伯特空间，则 $\mathcal{C}(V)$，在 V 上的紧算子空间，是可分的。

紧算子的10维谱定理

由特征向量组成的正交归一基

本节首先给出如下一个有用的引理。

10.96 $T^*T - \|T\|^2 I$ *is not invertible*

如果 T 是定义在一个非零希尔伯特空间上的有界算子，那么 $\|T\|^2 \in \mathrm{sp}(T^*T)$.

证明 设 T 是非零希尔伯特空间 V 上的一个有界算子。令 $f_1, f_2, \ldots$ 为 V 中的一个序列，使得 对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$ 有 $\|f_n\| = 1$，且

10.97
$$\lim_{n\to\infty} \|Tf_n\| = \|T\|.$$

然后

$$\begin{aligned}\big\|T^*Tf_n - \|T\|^2 f_n\big\|^2 &= \|T^*Tf_n\|^2 - 2\|T\|^2\langle T^*Tf_n, f_n\rangle + \|T\|^4\\ &= \|T^*Tf_n\|^2 - 2\|T\|^2\,\|Tf_n\|^2 + \|T\|^4\\ &\le 2\|T\|^4 - 2\|T\|^2\,\|Tf_n\|^2, \qquad (10.98)\end{aligned}$$

最后一行成立，因为 $\|T^*Tf_n\| \le \|T^*\|\,\|Tf_n\| \le \|T\|^2$。现在 10.97 和 10.98 表明

$$\lim_{n\to\infty} (T^*T - \|T\|^2 I) f_n = 0.$$

因为对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，$\|f_n\| = 1$，上述方程表明 $T^*T - \|T\|^2 I$ 不可逆，如所期望。 ∎

下一个结果表明，自伴紧算子在某种意义上表现得像有限维希尔伯特空间上的自伴算子。

10.99 *every self-adjoint compact operator has an eigenvalue.*

设 T 是定义在一个非零希尔伯特空间上的自伴紧算子。则 $\|T\|$ 或 $-\|T\|$ 至少有一个是 T 的特征值。

证明 因为 T 是自伴的，10.96 表明 $T^2 - \|T\|^2 I$ 不可逆。现在

$$T^2 - \|T\|^2 I = \big(T - \|T\|I\big)\big(T + \|T\|I\big).$$

因此，$T - \|T\|I$ 和 $T + \|T\|I$ 不可能同时是可逆的。因此，$\|T\| \in \mathrm{sp}(T)$ 或 $-\|T\| \in \mathrm{sp}(T)$。因为 T 是紧致的，10.85 现在意味着 $\|T\|$ 或 $-\|T\|$ 是 T 的特征值，如所需，或者 $\|T\| = 0$，这意味着 $T = 0$，在这种情况下，0 是 T 的特征值。 ∎

如果 T 是向量空间 V 上的一个算子，而 U 是 V 的一个子空间，那么 $T|_U$ 是从 U 到 V 的线性映射。要使 $T|_U$ 成为一个算子（即它是从一个向量空间到其自身的线性映射），我们需要 $T(U) \subseteq U$。因此我们得到如下定义。

10.100 定义 *invariant subspace*

假设 T 是向量空间 V 上的一个算子。V 的一个子空间 U 若对每个 $f \in U$ 都满足 $Tf \in U$，则称为 T 的一个 *invariant subspace*。

10.101 示例 *invariant subspaces*

您应验证以下每个断言。

- 对于 $b \in [0, 1]$，该子空间

$$\{f \in L^2([0,1]) : f(t) = 0 \text{ for almost every } t \in [0,b]\}$$

是 Volterra 算子 $\mathcal{V}$ 的一个不变子空间：$L^2([0, 1]) \to L^2([0, 1])$，其定义为 $(\mathcal{V}f)(x) = \int_0^x f$。

- 设 T 是 Hilbert 空间 V 上的一个算子，并且 $f \in V$ 且 $f \neq 0$。那么，span $\{f\}$ 是 T 的一个不变子空间，当且仅当 f 是 T 的特征向量。

- 设 T 是希尔伯特空间 V 上的一个算子。则 $\{0\}$、V、null T 以及 range T 都是 T 的不变子空间。

- 如果 T 是希尔伯特空间上的一个有界算子，且 U 是 T 的一个不变子空间，那么 $\overline{U}$ 是 T 的一个不变子空间。

如果 T 是希尔伯特空间上的一个紧算子，并且 U 是 T 的一个闭不变子空间，那么 $T|_U$ 是 U 上的一个紧算子，这是由定义直接得到的。

如果 U 是自伴算符 T 的封闭不变子空间，则 $T|_U$ 是自伴的，因为

The most important open question in operator theory is the invariant subspace problem, which asks whether every bounded operator on a Hilbert space with dimension greater than 1 has a closed invariant subspace other than $\{0\}$ and V.

$$\langle (T|_U)f, g\rangle = \langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle = \langle f, (T|_U)g\rangle$$

对于所有 f、$g \in U$。下一个结果表明，还可以得到更强一些的结论。

10.102 U *invariant for self-adjoint* T *implies* $U^\perp$ *invariant fo r* T

假设 U 是自伴算子 T 的一个不变子空间。则

(a) $U^\perp$ 也是 T 的一个不变子空间;

(b) $T|_{U^\perp}$ 是 $U^\perp$ 上的自伴算子。

证明 为证明(a)，设$f \in U^\perp$。如果$g \in U$，则

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle = 0,$$

其中，第一个等式成立是因为 T 是自伴的，第二个等式成立是因为 $Tg \in U$ 和 $f \in U^\perp$。由于上述等式对所有 $g \in U$ 都成立，我们得出 $Tf \in U^\perp$。因此，$U^\perp$ 是 T 的不变子空间，从而证明了 (a)。

由(a)，我们可以将$T|_{U^\perp}$视为作用在$U^\perp$上的算子。为证明(b)，设$h \in U^\perp$。若$f \in U^\perp$，则

$$\langle f, (T|_{U^\perp})^* h\rangle = \langle T|_{U^\perp} f, h\rangle = \langle Tf, h\rangle = \langle f, Th\rangle = \langle f, T|_{U^\perp} h\rangle.$$

因为 $(T|_{U^\perp})^* h$ 和 $T|_{U^\perp} h$ 都属于 $U^\perp$，且上述等式对所有 $f \in U^\perp$ 都成立，我们得出 $(T|_{U^\perp})^* h = T|_{U^\perp} h$，从而证明了 (b)。 ■

对于存在由特征向量构成的正交归一基底的算子来说，这些算子可能是最容易理解的算子。下一个结果表明，在实希尔伯特空间的情况下，任何这样的算子必须是自伴算子，而在复希尔伯特空间的情况下，则必须是正常算子。

10.10 3 ***orthonormal basis of eigenvectors implies self-adjoint or n ormal***

假设 T 是一个在希尔伯特空间 V 上的有界算子，并且存在一个由 T 的特征向量组成的 V 的正交规范基。

(a) 如果 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$，那么 T 是自伴随的。

（b）如果 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$，则 T 是正规的。

证明 假设 $\{e_j\}_{j\in\Gamma}$ 是 V 的正交规范基，且 e_j 是 T 的特征向量，对于每个 $j \in \Gamma$ 都成立。于是，存在一个属于 $\mathbf{F}$ 的族 $\{\alpha_j\}_{j\in\Gamma}$，使得

10.104
$$Te_j = \alpha_j e_j$$

对于每个 $j \in \Gamma$。如果 $k \in \Gamma$ 且 $f \in V$，则

$$\begin{aligned}\langle f, T^* e_k\rangle = \langle Tf, e_k\rangle &= \Big\langle T\Big(\sum_{j\in\Gamma}\langle f, e_j\rangle e_j\Big), e_k\Big\rangle\\ &= \Big\langle \sum_{j\in\Gamma}\alpha_j\langle f, e_j\rangle e_j, e_k\Big\rangle = \alpha_k\langle f, e_k\rangle = \langle f, \overline{\alpha_k} e_k\rangle.\end{aligned}$$

上面的方程意味着

10.105
$$T^* e_k = \overline{\alpha_k} e_k.$$

为证明 (a)，假设 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$。则由 10.105 和 10.104 可得，对每个 $k \in \Gamma$，有 $T^* e_k = \alpha_k e_k = Te_k$。因此 $T^* = T$，从而完成 (a) 的证明。

为证明 (b)，现假设 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$。若 $k \in \Gamma$，则 10.105 和 10.104 蕴含

$$(T^*T)(e_k) = T^*(\alpha_k e_k) = |\alpha_k|^2 e_k = T(\overline{\alpha_k} e_k) = (TT^*)(e_k).$$

由于上述方程对所有 $k \in \Gamma$ 都成立，我们得出 $T^*T = TT^*$。因此 T 是正常的，完成了 (b) 的证明。 ■

下一个结果是希尔伯特空间上紧算子理论中的主要亮点之一。如下所述的结果同时适用于实希尔伯特空间和复希尔伯特空间。在实希尔伯特空间的情形下，下面的结果可以与 10.103(a) 结合，从而得到如下结论：实希尔伯特空间上的一个紧算子当且仅当存在一个由该算子的特征向量组成的希尔伯特空间的正交规范基时，才是自伴的。

10.106 ***Spectral Theorem for self-adjoint compact operators***

设 T 是希尔伯特空间 V 上的一个自伴紧算子。则

(a)存在一个由特征向量组成的 V 的正交归一基 o f T;

(b) 存在一个可数集合Ω，V中的一个正交规范族$\{e_k\}_{k\in\Omega}$，以及 R $\setminus\{0\}$ 中的一个族$\{\alpha_k\}_{k\in\Omega}$，使得

$$Tf=\sum_{k\in\Omega}\alpha_k\langle f,e_k\rangle e_k$$

对于每个 $f\in V$。

证明 设 U 表示 T 的所有特征向量所张成的空间。则 U 是 T 的一个不变子空间。因此 $U^\perp$ 也是 T 的一个不变子空间，并且由 10.102)，$T|_{U^\perp}$ 是 $U^\perp$ (上的一个自伴算子。然而，$T|_{U^\perp}$ 没有特征值，因为 T 的所有特征向量都在 U 中。由于非零希尔伯特空间上的所有自伴紧算子都有一个特征值（由 10.99），这意味着 $U^\perp=\{0\}$。因此由 8.42)，$U=V$ (。

对于 T 的每个特征值 α，都存在一个由对应于特征值 α 的特征向量组成的 null$(T-\alpha I)$ 的正交规范基。所有这些正交规范基（对 T 的所有特征值 α 取并）的并集在 V 中构成一个正交规范族，因为对应于不同特征值的特征向量彼此正交（见 10.57）。前一段告诉我们，这个正交规范族所张成的空间的闭包是 V (，这里我们将该集合本身作为索引集)。因此，我们得到了一个由 T 的特征向量组成的 V 的正交规范基，从而完成了 (a) 的证明。

由(a)可知，存在V的一个正交归一基$\{e_k\}_{k\in\Gamma}$以及R中的一族$\{\alpha_k\}_{k\in\Gamma}$，使得对每个$k\in\Gamma$ (都有$Te_k=\alpha_k e_k$。即使F $=$ C，根据10.49)，T的特征值也在R中。因此若$f\in V$，则

$$Tf=T\Big(\sum_{k\in\Gamma}\langle f,e_k\rangle e_k\Big)=\sum_{k\in\Gamma}\langle f,e_k\rangle Te_k=\sum_{k\in\Gamma}\alpha_k\langle f,e_k\rangle e_k.$$

令 $\Omega=\{k\in\Gamma:\alpha_k\neq 0\}$，我们可以将上述方程改写为

$$Tf=\sum_{k\in\Omega}\alpha_k\langle f,e_k\rangle e_k$$

对每个 $f\in V$。集合 Ω 是可数的，因为 T 只有可数多个特征值（由 10.93），并且每个非零特征值在上述求和中只能出现有限次（由 10.82），从而完成了 (b) 的证明。

一个正常的紧算子在非零实希尔伯特空间上可能没有特征值[例如，考虑正常算子 T，它是在 $\mathbf{R}^2$ 上以右角度逆时针旋转的算子，由 $T(x、y) = (-y、x)$ 定义]。然而，接下来的结果表明，正常紧算子在 ***complex*** 希尔伯特空间上表现得更好。证明这个结果的关键思想是，在复希尔伯特空间上，正常紧算子的实部和虚部是对易的自伴紧算子，这使我们能够应用自伴紧算子的谱定理。

10.107 ***Spectral Theorem for normal compact operators***

假设 T 是复希尔伯特空间 V 上的紧算子。那么当且仅当 T 是正规算子时，V 存在一个由 T 的特征向量组成的正交归一基。

证明 该结果的一个方向已经作为 10.103 的部分 (b) 被证明。

为证明另一方向，设 T 是一个正规紧算子。我们可以写作

$$T = A + iB,$$

其中 A 和 B 是自伴算子，并且由于 T 是正规算子，$AB = BA$ (见 10.54)。由于 $A = (T + T^*)/2$ 和 $B = (T - T^*)/(2i)$，算子 A 和 B 都是紧算子。

如果 $\alpha \in \mathbf{R}$ 且 $f \in \operatorname{null}(A - \alpha I)$，则

$$(A - \alpha I)(Bf) = A(Bf) - \alpha Bf = B(Af) - \alpha Bf = B\big((A - \alpha I)f\big) = B(0) = 0$$

因此 $Bf \in \operatorname{null}(A - \alpha I)$。因此 $\operatorname{null}(A - \alpha I)$ 是 B 的不变子空间。

应用自伴紧算符的谱定理 [10.106(a)] 于 $B|_{\operatorname{null}(A-\alpha I)}$ 显示，对于 A 的每个特征值 α，都有一个由 B 的特征向量组成的 $A - \alpha I$ 的零空间的正交归一基。对所有特征值 α 的并集（取自 A）中的所有这些正交归一基构成了 V (中的一个正交归一族，使用该集合本身作为索引集)，因为 A 的特征向量对应于 A 的不同特征值是正交的（见 10.57）。自伴紧算符的谱定理 [10.106(a)] 应用到 A 告诉我们，该正交归一族的线性张成的闭包是 V。因此，我们得到一个 V 的正交归一基，其每个元素既是 A 的特征向量，也是 B 的特征向量。

如果 $f \in V$ 是 A 和 B 的特征向量，则存在 α、$\beta \in \mathbf{R}$，使得 $Af = \alpha f$ 和 $Bf = \beta f$。因此 $Tf = (A + iB)(f) = (\alpha + \beta i)f$；因此 f 是 T 的特征向量。因此，在前一段中构造的 V 的正交归一基是由 T 的特征向量组成的正交归一基，完成证明。 ∎

以下示例展示了谱定理在正规紧算子中的应用。下一个例子中找到正规紧算子 $\mathcal{V} - \mathcal{V}^*$ 的特征值和特征向量，带领我们获得了 $L^2([0, 1])$ 的正交归一基。简单的微积分表明，族 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$，其中 e_k 按照 10.112 定义，是 $L^2([0, 1])$ 中的正交归一族。证明 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2([0, 1])$ 的正交归一 ***basis*** 的难点在于证明该族的张成空间的闭包是 $L^2([0, 1])$。然而，正规紧算子的谱定理（10.107）提供了这一信息，无需进一步的工作。

10.108 示例 *an orthonormal basis of eigenvectors*

设 $\mathcal{V}: L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ 是由下式定义的 Volterra 算子

$$(\mathcal{V}f)(x) = \int_0^x f.$$

算子 $\mathcal{V}$ 是紧的（见 10.70 证明之后的段落），但它不是正规算子。因为 $\mathcal{V}$ 是紧的，所以由 10.73) 可知 $\mathcal{V}^*$ (也是紧的。因此 $\mathcal{V} - \mathcal{V}^*$ 是紧的。另外，($\mathcal{V} - \mathcal{V}^*)^* = \mathcal{V}^* - \mathcal{V} = -(\mathcal{V} - \mathcal{V}^*)$。由于每个算子都与其负算子可交换，我们得出 $\mathcal{V} - \mathcal{V}^*$ 是一个紧的正规算子。因为我们想要应用谱定理，在本例的其余部分中我们将取 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$。

如果 $f \in L^2([0,1])$ 且 $x \in [0,1]$，则由 10.16 给出的 $\mathcal{V}^*$ 的公式表明

10.109
$$\big((\mathcal{V} - \mathcal{V}^*)f\big)(x) = 2\int_0^x f - \int_0^1 f.$$

上述方程的右侧是关于x的连续函数，其在$x = 0$处的值是其在$x = 1$处值的相反数。

对上述等式两边求导并使用勒贝格微分定理（4.19）可得

$$\big((\mathcal{V} - \mathcal{V}^*)f\big)'(x) = 2f(x)$$

对在 [0, 1] 中的几乎每个 $x \in$。若 $f \in$ 在 null$(\mathcal{V} - \mathcal{V}^*)$ 中，则对方程 ($\mathcal{V} - \mathcal{V}^*)f = 0$ 的两边求导可知，对于在 [0, 1] 中的几乎每个 $x \in$，有 2 $f(x) = 0$；因此 $f = 0$，我们得出 $\mathcal{V} - \mathcal{V}^*$ 是单射的（因此 0 不是特征值）。 假设 f 是 $\mathcal{V} - \mathcal{V}^*$ 的一个特征向量，其特征值为 α。因此 f 属于 $\mathcal{V} - \mathcal{V}^*$ 的值域，这由 10.109 推出 f 在 [0, 1] 上连续，而由 10.109 再次推出 f 在 (0, 1) 上连续可微。对等式（$\mathcal{V} - \mathcal{V}^*$）$f = \alpha f$ 的两边求导得到

$$2f(x) = \alpha f'(x)$$

对所有 $x \in (0,1)$。因此，在 (0, 1) 上处处导数为 0 且在 x 处取值为 $e^{-(2/\alpha)x}f(x)$ 的函数是常函数。换言之，

10.110
$$f(x) = ce^{(2/\alpha)x}$$

对于某个常数 $c \neq 0$。因为 $f \in$ range$(V - \mathcal{V}^*)$, 我们有 $f(0) = -f(1)$, 这与上述方程一起意味着存在 $k \in \mathbf{Z}$ 使得

10.111
$$2/\alpha = i(2k+1)\pi.$$

用在 10.111 中得到的 $2/\alpha$ 的值替换 10.110 中的 $2/\alpha$，可以看出，对于 $k \in \mathbf{Z}$，我们应当将 $e_k \in L^2([0,1])$ 定义为

10.112
$$e_k(x) = e^{i(2k+1)\pi x}.$$

显然，$\{e_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 是 $L^2([0,1])$ 中的一个正交归一族［其正交性可以通过直接计算或利用 10.57 来验证］。上面的段落以及紧正规算子的谱定理（10.107）表明，这个正交归一族是 $L^2([0,1])$ 的一个正交归一基。

奇异值分解

下一个结果给出了将 10.106(b) 推广到任意紧算子的一个重要概括，这些算子不必是自伴的或正规的。与 10.106(b) 中仅需要一个正交归一族相比，这一推广需要两个正交归一族。

10.113 *Singular Value Decomposition*

假设 T 是一个 Hilbert 空间 V 上的紧算子。那么存在一个可数集合 Ω，在 V 中的正交规范族 $\{e_k\}_{k\in\Omega}$ 和 $\{h_k\}_{k\in\Omega}$，以及一组正数 $\{s_k\}_{k\in\Omega}$，使得

10.114
$$Tf = \sum_{k\in\Omega} s_k\langle f, e_k\rangle h_k$$

对于每个 $f \in V$。

证明 如果 α 是 T^*T 的特征值，则存在某个 $f \neq \neq 0$，使得 $(T^*T)f = \alpha f$。

$$\alpha\|f\|^2 = \langle \alpha f, f\rangle = \langle T^*Tf, f\rangle = \langle Tf, Tf\rangle = \|Tf\|^2.$$

因此 $\alpha \geq 0$。因此 T^*T 的所有特征值都是非负的。

应用10.106(b)和上面段落的结论于自伴紧算符T^*T，得到一个可数集Ω，一个在V中的正交归一族$\{e_k\}_{k\in\Omega}$，以及一个正数族$\{s_k\}_{k\in\Omega}$（取$s_k = \sqrt{\alpha_k}$），使得

10.115
$$(T^*T)f = \sum_{k\in\Omega} {s_k}^2\langle f, e_k\rangle e_k$$

对于每个 $f \in V$。上述方程表明，对于每个 $j \in \Omega$，有 $(T^*T)e_j = {s_j}^2 e_j$。对于 $k \in \Omega$，令

$$h_k = \frac{Te_k}{s_k}.$$

对于 j，$k \in \Omega$，我们有

$$\langle h_j, h_k\rangle = \frac{1}{s_j s_k}\langle Te_j, Te_k\rangle = \frac{1}{s_j s_k}\langle T^*Te_j, e_k\rangle = \frac{s_j}{s_k}\langle e_j, e_k\rangle.$$

T上面的方程意味着 $\{h_k\}_{k\in\Omega}$ 是 V 中的一个正交归一族。

如果 $f \in \overline{跨越\ \{e_k\}_{k\in\Omega}}$，则

$$Tf = T\Big(\sum_{k\in\Omega}\langle f, e_k\rangle e_k\Big) = \sum_{k\in\Omega}\langle f, e_k\rangle Te_k = \sum_{k\in\Omega} s_k\langle f, e_k\rangle h_k,$$

显示 f 对于 10.114 成立。

如果 $f \in \big(\overline{\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\Omega}}\big)^{\perp}$，那么 10.115 显示 $(T^*T)f = 0$，这意味着 $Tf = 0$（因为 $0 = \langle T^*Tf, f\rangle = \|Tf\|^2$）；因此 10.114 的两边都是 0。

因此，10.114的两边在f的闭子空间内与V一致，在该闭子空间的正交补空间内对于f也一致，线性推理意味着10.114的两边对于所有$f \in V$一致。

一个形式为 10.114 的表达式被称为紧算子 T 的 *singular value decomposition*。在奇异值分解中，正交标准基族 $\{e_k\}_{k\in\Omega}$ 和 $\{h_k\}_{k\in\Omega}$ 并非由 T 唯一确定。然而，正数 $\{s_k\}_{k\in\Omega}$ 是由 T^*T 的正特征值的正平方根唯一确定的。这些正数可以按降序排列（因为如果它们的数量是无限的，那么它们形成一个以 0 为极限的序列，根据 10.93）。这个过程导致了下面给出的奇异值的定义。

假设 T 是一个紧算子。回忆一下，T^*T 的正特征值 α 的几何重数定义为 $\dim \operatorname{null}(T^*T - \alpha I)$ [参见 10.81]。这个几何重数是 $\sqrt{\alpha}$ 在与 T 的奇异值分解相关的家族 $\{s_k\}_{k\in\Omega}$ 中出现的次数。根据 10.82，这个几何重数是有限的。

现在我们可以定义紧算子 T 的奇异值，其中我们小心地将 T^*T 的每个正特征值的平方根列出，次数等于其几何重数。

10.116 定义 ***singular values;*** $s_n(T)$

- 设 T 是希尔伯特空间上的一个紧算子。T 的 *singular values*，记为 $s_1(T) \geq s_2(T) \geq s_3(T) \geq \cdots$，是 T^*T 的正特征值的正平方根，按递减顺序排列，其中每个奇异值 s 按 s^2 作为 T^*T 的特征值的几何重数重复列出。

- 如果 T^*T 只有有限多个正特征值，则定义 $s_n(T) =$ 为 0，适用于所有 $n \in \mathbf{Z}^+$，对于这些 $s_n(T)$ 由第一个要点未定义的情况。

10.117 示例 *singular values on a finite-dimensional Hilbert space*

定义 $T : \mathbf{F}^4 \to \mathbf{F}^4$ 为

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 3z_1, 2z_2, -3z_4).$$

计算表明

$$(T^*T)(z_1, z_2, z_3, z_4) = (9z_1, 4z_2, 0, 9z_4).$$

因此，T^*T 的特征值是 9、4、0 以及

$$\dim(T^*T - 9I) = 2 \quad \text{and} \quad \dim(T^*T - 4I) = 1.$$

对 T^*T 的正特征值取平方根，然后再接上无限个 0，表明 T 的奇异值是 $3 \geq 3 \geq 2 \geq 0 \geq 0 \geq \cdots$。

请注意，-3 和 0 是 T 的唯一特征值。因此，在这种情况下，T 的特征值列表没有包含在 T 的定义（因此也包括行为）中出现的数字 2，但 T 的奇异值列表确实包含 2。

如果 T 是一个紧算子，那么第一个奇异值 $s_1(T)$ 等于 $\|T\|$，正如你在练习 12 中被要求验证的那样。

10.118 示例 *singular values of* $\mathcal{V} - \mathcal{V}^*$

令 $\mathcal{V}$ 表示沃尔泰拉算子，并令 $T = \mathcal{V} - \mathcal{V}^*$。在例 10.108 中，我们看到如果 e_k 由 10.112 定义，那么 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2([0,1])$ 的一个正交规范基，并且

$$Te_k = \frac{2}{i(2k+1)\pi} e_k$$

对于每个 $k \in \mathbf{Z}$，其中与 e_k 对应的、上面所示的特征值源自 10.111。现在 10.56 表明

$$T^* e_k = \frac{-2}{i(2k+1)\pi} e_k$$

对于每个 $k \in \mathbf{Z}$。因此

10.119
$$T^* T e_k = \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2} e_k$$

对于每个 $k \in \mathbf{Z}$。对特征值取正平方根后，我们看到上面的方程表明 T 的奇异值是

$$\frac{2}{\pi} \geq \frac{2}{\pi} \geq \frac{2}{3\pi} \geq \frac{2}{3\pi} \geq \frac{2}{5\pi} \geq \frac{2}{5\pi} \geq \cdots,$$

上述前两个奇异值来自于在 10.119 中取 $k=-1$ 和 $k=0$；接下来的两个奇异值来自于取 $k=-2$ 和 $k=1$；再接下来的两个奇异值来自于取 $k=-3$ 和 $k=2$，依此类推。T 的每一个奇异值在上述奇异值列表中都会出现两次，因为 T^*T 的每一个特征值都具有几何重数为 2。

对于 $n \in \mathbf{Z}^+$，紧致算子 T 的奇异值 $s_n(T)$ 告诉我们，如何通过范围维度小于 n (的算子来逼近 T，参见练习 15)。

下一结果在 $K \in L^2(\mu \times \mu)$ 和与 K 相关的积分算子的奇异值之间建立了一个重要的联系。

10.120 ***sum of squares of singular values of integral operator***

假设 μ 是一个 σ-有限测度且 $K \in L^2(\mu \times \mu)$。那么

$$\|K\|^2_{L^2(\mu\times\mu)} = \sum_{n=1}^{\infty} \big(s_n(\mathcal{I}_K)\big)^2.$$

证明 考虑一个奇异值分解

10.121
$$\mathcal{I}_K(f) = \sum_{k\in\Omega} s_k \langle f, e_k \rangle h_k$$

紧凑算子 $\mathcal{I}_K$ 的。将 $\{e_j\}_{j\in\Omega}$ 扩展为 $L^2(\mu)$ 的正交归一基 $\{e_j\}_{j\in\Gamma}$，并将 $\{h_k\}_{k\in\Omega}$ 扩展为 $L^2(\mu)$ 的正交归一基 $\{h_k\}_{k\in\Gamma'}$。

令 X 表示测度 μ 所定义在其上的集合。对于 $j \in \Gamma$ 和 $k \in \Gamma'$，定义 $g_{j,k}:$ $X \times X \to \mathbf{F}$ 为

$$g_{j,k}(x, y) = \overline{e_j(y)} h_k(x).$$

然后 $\{g_{j,k}\}_{j\in\Gamma, k\in\Gamma'}$ 是 $L^2(\mu \times \mu)$ 的一个正交归一基，正如你应该验证的那样。因此

$$\begin{aligned}
\|K\|^2_{L^2(\mu\times\mu)} &= \sum_{j\in\Gamma, k\in\Gamma'} |\langle K, g_{j,k}\rangle|^2 \\
&= \sum_{j\in\Gamma, k\in\Gamma'} \left| \int \int K(x,y) e_j(y)\, \overline{h_k(x)}\, d\mu(y)\, d\mu(x) \right|^2 \\
&= \sum_{j\in\Gamma, k\in\Gamma'} \left| \int (\mathcal{I}_K e_j)(x)\, \overline{h_k(x)}\, d\mu(x) \right|^2
\end{aligned}$$

10.122
$$= \sum_{j\in\Omega, k\in\Gamma'} \left| \int s_j h_j(x)\, \overline{h_k(x)}\, d\mu(x) \right|^2$$

10.123
$$= \sum_{j\in\Omega} {s_j}^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(s_n(\mathcal{I}_K)\big)^2,$$

其中 10.122 成立，因为 10.121 表明 $\mathcal{I}_K e_j = s_j h_j$ 对于 $j \in \Omega$，并且 $\mathcal{I}_K e_j =$ 对于 $j \in \Gamma \setminus \Omega$ 为 0；10.123 成立，因为 $\{h_k\}_{k\in\Gamma'}$ 是一个正交归一族。 ■

现在我们可以给出之前结果的一个精彩应用 Please provide the sou

10.124 Example $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{8}$

定义 $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ 通过

$$K(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > y, \\ 0 & \text{if } x = y, \\ -1 & \text{if } x < y. \end{cases}$$

令 μ 为[0, 1]上的Lebesgue测度，我们注意到 $\mathcal{I}_K$ 是在例10.118中研究的正常紧算子 $\mathcal{V} - \mathcal{V}^*$。

显然 $\|K\|_{L^2(\mu\times\mu)} = 1$. 使用在例子 10.118 中获得的 $\mathcal{I}_K$ 的奇异值列表，公式 10.120 告诉我们

$$1 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2}.$$

因此

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

练习 10D

1 证明：若 T 是作用在一个非零希尔伯特空间上的紧算子，则 $\|T\|^2$ 是 T^*T 的一个特征值。

2 证明如果 T 是定义在非零希尔伯特空间 V 上的自伴算子，那么

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tf, f\rangle| : f \in V \text{ and } \|f\| = 1\}.$$

3 设 T 是 Hilbert 空间 V 上的一个有界算子，且 U 是 V 的一个闭子空间。证明下列命题等价。

（a）U 是 T 的不变子空间。（b）
$U^\perp$ 是 T^* 的不变子空间。（c）
$TP_U = P_U TP_U$。

4 假设 T 是希尔伯特空间 V 上的一个有界算子，且 U 是 V 的一个闭子空间。证明下列命题等价。

（a）U 和 $U^\perp$ 是 T 的不变子空间。（b）
U 和 $U^\perp$ 是 T^* 的不变子空间。（c）
$TP_U = P_U T$。

5 假设 T 是非可分赋范向量空间 V 上的一个有界算子。证明 T 存在一个闭的不变子空间，除 $\{0\}$ 和 V 之外。

6 假设 T 是定义在一个维数大于 2 的巴拿赫空间 V 上的算子。证明 T 除了 $\{0\}$ 和 V 之外还存在一个不变子空间。[*For this exercise, T is not assumed to be bounded and the invariant subspace is not required to be closed.*]

7 假设 T 是定义在一个希尔伯特空间上的自伴紧算子，并且只有有限多个不同的特征值。证明 T 的值域是有限维的。

8 (a) 证明：若 T 是 Hilbert 空间上的自伴紧算子，则存在一个自伴紧算子 S，使得 $S^3 = T$。(b) 证明：若 T 是复 Hilbert 空间上的正规紧算子，则存在一个正规紧算子 S，使得 $S^2 = T$。

9 假设 T 是定义在非零 Hilbert 空间 V 上的一个紧的正规算子。证明：存在 V 的一个维数为 1 或 2 的子空间，使其成为 T 的一个不变子空间。[*If* $\mathbf{F} = \mathbf{C}$*, the desired result follows immediately from the Spectral Theorem for compact normal operators. Thus you can assume that* $\mathbf{F} = \mathbf{R}$.]

10 设 T 是希尔伯特空间上的一个自伴紧算子，且 $\|T\| \le \frac{1}{4}$。证明存在一个自伴紧算子 S，使得 $S^2 + S = T$。

11 对于 $k \in \mathbf{Z}$，定义 $g_k \in L^2\big((-\pi,\pi]\big)$ 和 $h_k \in L^2\big((-\pi,\pi]\big)$ 为

$$g_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{it/2} e^{ikt} \quad \text{and} \quad h_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt};$$

这里我们假设 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$。

(a) 利用例 10.108 的结论证明 $\{g_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2\big((-\pi$ 的一个正交规范基，$\pi]\big)$。(b) 利用 (a) 证明 $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2\big((-\pi$ 的一个正交规范基，$\pi]\big)$。(c) 利用 (b) 证明例 8.51 中第三个要点里的正交规范族是 $L^2\big((-\pi$ 的一个正交规范基，$\pi]\big)$。

12 设 T 是希尔伯特空间上的一个紧算子。证明 $s_1(T) = \|T\|$。

假设 T 是希尔伯特空间上的紧算子且 $n \in \mathbf{Z}^+$。证明当且仅当 $s_n(T) = 0$ 时，dim 范围 $T < n$。

14 假设 T 是 Hilbert 空间 V 上的一个紧算子，并具有奇异值分解

$$Tf = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(T)\langle f, e_k\rangle h_k$$

对所有 $f \in V$。对 $n \in \mathbf{Z}^+$，定义 $T_n : V \to V$ 为

$$T_n f = \sum_{k=1}^{n} s_k(T)\langle f, e_k\rangle h_k.$$

证明 $\lim_{n\to\infty}\|T - T_n\| = 0$.

[*This exercise gives another proof, in addition to the proof suggested by Exercise 15 in Section 10C, that an operator on a Hilbert space is compact if and only if it is the limit of bounded operators with finite-dimensional range.*]

15 假设 T 是希尔伯特空间 V 上的一个紧算子，并且 $n \in \mathbf{Z}^+$。证明

$$\inf\{\|T - S\| : S \in \mathcal{B}(V) \text{ and } \dim \operatorname{range} S < n\} = s_n(T).$$

16 假设 T 是 Hilbert 空间 V 上的一个紧算子，并且 $n \in \mathbf{Z}^+$。证明:

$$s_n(T) = \inf\{\|T|_{U^\perp}\| : U \text{ is a subspace of } V \text{ with } \dim U < n\}.$$

17 假设 T 是 Hilbert 空间 V 上的一个紧算子，并具有奇异值分解

$$Tf = \sum_{k\in\Omega} s_k\langle f, e_k\rangle h_k$$

对于所有 $f \in V$。证明该命题。

$$T^* f = \sum_{k\in\Omega} s_k\langle f, h_k\rangle e_k$$

对于所有 $f \in V$。

18 假设 T 是一个作用在有限维希尔伯特空间 V 上的算子，其中 $\dim V = n$。

(a) 证明 T 可逆当且仅当 $s_n(T) \neq 0$。

(b假设 T 是可逆的，且 T 具有奇异值分解 It seems like the sc

$$Tf = s_1(T)\langle f, e_1\rangle h_1 + \cdots + s_n(T)\langle f, e_n\rangle h_n$$

对于所有 $f \in V$。证明

$$T^{-1}f = \frac{\langle f, h_1\rangle}{s_1(T)}e_1 + \cdots + \frac{\langle f, h_n\rangle}{s_n(T)}e_n$$

对于所有 $f \in V$。

假设 T 是一个希尔伯特空间 V 上的紧算子。证明:

$$\sum_{k\in\Gamma}\|Te_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(s_n(T)\bigr)^2$$

对于V的每个正交归一基$\{e_k\}_{k\in\Gamma}$。

使用示例 10.124 的结果来评估$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。 —

21 假设 T 是复希尔伯特空间上的一个正规紧算子。证明以下命题是等价的。

(a) 范围 T 是有限维的。 (b) sp
(T) 是一个有限集合。 (c)
$s_n(T) =$ 为 0 对于某些 $n \in \in$
Z。

22 计算沃尔特拉算子的奇异值。

[*Your answer, when combined with Exercise 12, should show that the norm of the Volterra operator is $\frac{2}{\pi}$. This appearance of π can be surprising because the definition of the Volterra operator does not involve π.*]

Chapter 11
Fourier Analysis

本章利用希尔伯特空间理论来引出傅里叶系数和傅里叶级数的概念。经典情形将这些概念应用于定义在实数轴上有界区间内的函数。然而，当我们采用一种现代的方法，转而考虑定义在复平面单位圆上的函数时，该理论会变得更加简单而清晰。

本章的第一节展示了对傅里叶级数的考察如何引导我们得到调和函数以及狄利克雷问题的一个解。在本章的第二节中，卷积成为L^p理论的一个主要工具。

本章的第三节将背景转向定义在实数直线上的函数。本章前两节中引入的许多技术都可以很容易地迁移，用来给出关于实数直线上的傅里叶变换的结果。我们对傅里叶变换的论述重点是傅里叶反演公式，以及将傅里叶变换扩展为 $L^2(\mathbf{R})$ 上的一个酉算子。

傅里叶分析这一广阔领域不可能在单一章节中完全涵盖。因此，本章只是让读者对该主题略作品味。读者在完成本章并继续阅读众多关于傅里叶分析的专著时，将已经熟悉该领域的术语和技术。

The Giza pyramids, near where the Battle of Pyramids took place in 1798 during Napoleon's invasion of Egypt. Joseph Fourier (1768–1830) was one of the scientific advisors to Napoleon in Egypt. While in Egypt as part of Napoleon's invading force, Fourier began thinking about the mathematical theory of heat propagation, which eventually led to what we now call Fourier series and the Fourier transform.

11A 傅里叶级数与泊松积分

傅里叶系数与黎曼–勒贝格引理

对于 $k \in \mathbf{Z}$，假设 $e_k : (-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ 被定义为

11.1
$$e_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt) & \text{if } k > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{if } k = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt) & \text{if } k < 0. \end{cases}$$

傅里叶级数的经典理论以 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 作为 $L^2\big((-\pi, \pi]\big)$ 的一组正交规范基。第 8C 节习题 1 中展示的三角公式可用于证明 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 确实是 $L^2\big((-\pi, \pi]\big)$ 中的一族正交规范族。

要证明 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2\big((-\pi$ 的一个正交归一基，$\pi]\big)$ 需要更多的工作。一种巧妙的方法是注意到紧致算子的谱定理会产生正交归一基；然后可以通过适当地选择一个紧致正规算子来证明 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2\big((-\pi$ 的一个正交归一基，$\pi]\big)$［参见第 10D 节中的练习 11(c)］。

在本章中，我们通过在复平面的单位圆上进行研究，而不是在区间$(-\pi, \pi]$上，从而采用一种更为简洁的傅里叶级数处理方法。该映射

11.2
$$t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$$

可以用来将区间（$-\pi, \pi]$ 与单位圆同一化；因此这两种方法是等价的。然而，在单位圆的语境下计算更为容易。此外，我们将看到，单位圆的语境带来了一个巨大的好处，即能够与调和函数建立联系。

我们首先引入复平面中开单位圆盘和单位圆的记号。

11.3 定义 D; ∂D

- D 表示复平面中的开单位圆盘:
$$\mathbf{D} = \{w \in \mathbf{C} : |w| < 1\}.$$
- ∂D 是复平面中的单位圆:
$$\partial\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}.$$

11.2 中给出的函数是从 $(-\pi, \pi]$ 到 ∂D 的一一映射。我们利用该映射，通过将 $(-\pi, \pi]$ 的 Borel 子集转移到 ∂D 的子集上，来在 ∂D 上定义一个 σ-代数；这些子集我们称为 ∂D 的 *measurable subsets*。我们还将 $(-\pi, \pi]$ 的 Borel 子集上的 Lebesgue 测度转移为 ∂D 的可测子集上的一个测度，称为 σ，但为了方便起见，我们通过除以 2π 进行归一化，使得 ∂D 的测度为 1 而不是 2π。现在我们已经准备好给出形式化定义。

11.4 定义 *measurable subsets of* $\partial\mathbf{D}$; σ

- $\partial\mathbf{D}$ 的一个子集 E 是 *measurable*，如果 $\{t \in (-\pi, \pi] : e^{it} \in E\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个 Borel 子集。
- σ 是通过将勒贝格测度从$(-\pi, \pi]$ 转移到 $\partial\mathbf{D}$ 获得的 $\partial\mathbf{D}$ 上的测度，经过归一化处理，使得 $\sigma(\partial\mathbf{D}) =$ 为 1。换句话说，如果 $E \subseteq \partial\mathbf{D}$ 是可测的，那么

$$\sigma(E) = \frac{|\{t \in (-\pi, \pi] : e^{it} \in E\}|}{2\pi}.$$

我们在 $\partial\mathbf{D}$ 上对测度 σ 的定义使我们能够将 $\partial\mathbf{D}$ 上的积分转移到熟悉的在 $(-\pi, \pi]$ 上的积分语境中。具体而言，

$$\int_{\partial\mathbf{D}} f\,d\sigma = \int_{\partial\mathbf{D}} f(z)\,d\sigma(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\frac{dt}{2\pi}$$

对于所有可测函数 $f : \partial\mathbf{D} \to \mathbf{C}$，使得这些积分中的任何一个都是定义的。在本章中，我们假设标量场 $\mathbf{F}$ 是复数域 $\mathbf{C}$。此外，$L^p(\partial\mathbf{D})$ 被定义如下。

11.5 定义 $L^p(\partial\mathbf{D})$

对于 $1 \leq p \leq \infty$，定义 $L^p(\partial\mathbf{D})$ 表示复数版本（$\mathbf{F} = \mathbf{C}$) 的 $L^p(\sigma)$.

注意到，如果对某个 $t \in \mathbf{R}$ 有 $z = e^{it}$，那么对所有 $n \in \mathbf{Z}$，$\overline{z} = e^{-it} = \frac{1}{z}$、$z^n = e^{int}$ 和 $\overline{z^n} = e^{-int}$ 都成立。这些观察使得下一个结果的证明比由 11.1 定义的三角函数族中相应结果的证明要简单得多。

在该状态 下一个结果的ment，z^n表示在$\partial\mathbf{D}$上由z定义的函数 $\mapsto z^n$.

11.6 *orthonormal family in* $L^2(\partial\mathbf{D})$

$\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\partial\mathbf{D})$ 中的一个正交归一族。

证明 如果 $n \in \mathbf{Z}$，则

$$\langle z^n, z^n\rangle = \int_{\partial\mathbf{D}} |z^n|^2\,d\sigma(z) = \int_{\partial\mathbf{D}} 1\,d\sigma = 1.$$

如果 m，$n \in \mathbf{Z}$ 与 $m \neq n$，则

$$\langle z^m, z^n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt}e^{-int}\,\frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}\,\frac{dt}{2\pi} = \frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)2\pi}\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0,$$

如所愿。 ∎

在下一节中，我们通过展示$\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$是$L^2(\partial\mathbf{D})$ (的正交标准基来改进上述结果，见11.30)。

希尔伯特空间理论告诉我们，如果 f 位于 $\operatorname{span}\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 在 $L^2(\partial\mathbf{D})$ 中的闭包中，那么

$$f = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \langle f, z^n\rangle z^n,$$

其中，上述无穷和在 $L^2(\partial\mathbf{D})$ 的范数下作为无序和收敛 (见 8.58)。上述内积 $\langle f, z^n\rangle$ 等于

$$\int_{\partial\mathbf{D}} f(z)\,\overline{z^n}\,d\sigma(z).$$

由于对每个 $z \in \partial\mathbf{D}$ 都有 $|z^n| = 1$，上述积分不仅对 $f \in L^2(\partial\mathbf{D})$ 有意义，而且对较大空间 $L^1(\partial\mathbf{D})$ 中的 f 也有意义。因此我们作如下定义。

11.7 定义 *Fourier coefficient; $\widehat{f}(n)$; Fourier series*

假设 $f \in L^1(\partial\mathbf{D})$。

- 对于 $n \in \mathbf{Z}$，f 的 n^{th} *Fourier coefficient* 记为 $\widehat{f}(n)$，并定义为

$$\widehat{f}(n) = \int_{\partial\mathbf{D}} f(z)\,\overline{z^n}\,d\sigma(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}\,\frac{dt}{2\pi}.$$

- f 的 *Fourier series* 是形式和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n.$$

正如我们将看到的那样，傅里叶分析有助于描述在何种意义下，f 的傅里叶级数表示 f。

11.8 示例 *Fourier coefficients*

- 设 h 是定义在一个包含闭单位圆盘 $\mathbf{D}$ 的开集上的解析函数。则 h 有一个幂级数表示

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

其中右侧的级数在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上一致收敛到 h。由于在 $\partial\mathbf{D}$ 上的一致收敛蕴含在 $L^2(\partial\mathbf{D})$ 中的收敛，8.58(b) 和 11.6 现在意味着

$$(h|_{\partial\mathbf{D}})\widehat{\ }(n) = \begin{cases} a_n & \text{if } n \geq 0, \\ 0 & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

对所有 $n \in \mathbf{Z}$。换句话说，对于在包含 $\overline{\mathbf{D}}$ 的开集上解析的函数，傅里叶级数与泰勒级数是相同的。

- 设 $f: \partial \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ 定义为

$$f(z) = \frac{1}{|3-z|^2}.$$

则对于 $z \in \partial \mathbf{D}$，有

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(3-z)(3-\overline{z})} \\
&= \frac{1}{8}\Big(\frac{z}{3-z} + \frac{3}{3-\overline{z}}\Big) \\
&= \frac{1}{8}\Big(\frac{\frac{z}{3}}{1-\frac{z}{3}} + \frac{1}{1-\frac{\overline{z}}{3}}\Big) \\
&= \frac{1}{8}\Big(\frac{z}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\overline{z})^n}{3^n}\Big) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{3^{|n|}},
\end{aligned}$$

wher上述的无限和在$\partial \mathbf{D}$上均匀收敛。因此我们s ee 那个

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3^{|n|}}$$

对于所有 $n \in \mathbf{Z}$。

我们从傅里叶系数的一些简单代数性质开始，其证明留给读者。

11.9 *algebraic properties of Fourier coefficients*

假设 $f, g \in L^1(\partial \mathbf{D})$ 和 $n \in \mathbf{Z}$。然后

(a) $\widehat{f+g}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$;

(b) $\widehat{\alpha f}(n) = \alpha \widehat{f}(n)$ for all $\alpha \in \mathbf{C}$;

(c) $|\widehat{f}(n)| \le \|f\|_1$.

以上的部分 (a) 和 (b) 可以重新表述为：对于每个 $n \in \mathbf{Z}$，函数 $f \mapsto \widehat{f}(n)$ 是从 $L^1(\partial \mathbf{D})$ 到 $\mathbf{C}$ 的线性泛函。部分 (c) 可以重新表述为：这个线性泛函的范数至多为 1。

上面的 (c) 部分意味着，对每个 $f \in L^1(\partial \mathbf{D})$，傅里叶系数集合 $\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是有界的。例 11.8 中函数的傅里叶系数具有更强的性质，即 $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$。下面的结果表明，这一更强的结论对 $L^1(\partial \mathbf{D})$ 中的所有函数都成立。

11.10 *Riemann–Lebesgue Lemma*

假设 $f \in L^1(\partial D)$。则 $\lim_{n\to\pm\infty} \hat{f}(n) = 0$。

证明 假设 $\varepsilon > 0$. 存在 $g \in L^2(\partial D)$ 使得 $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ (由 3.44) 给出。根据 11.6 和贝塞尔不等式 (8.57)，我们有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(n)|^2 \leq \|g\|^22 < \infty.$$

因此，存在 $M \in Z^+$，使得对所有满足 $|n| \geq M$ 的 $n \in Z$，都有 $|\hat{g}(n)| < \varepsilon$。现在如果 $n \in Z$ 且 $|n| \geq M$，则

$$\begin{aligned} |\hat{f}(n)| &\leq |\hat{f}(n) - \hat{g}(n)| + |\hat{g}(n)| \\ &< |\widehat{f - g}(n)| + \varepsilon \\ &\leq \|f - g\|_1 + \varepsilon \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\lim_{n\to\pm\infty} \hat{f}(n) = 0.$ ■

泊松核

假设 $f : \partial D \to C$ 是连续的并且 $z \in \partial D$。对于这个固定的 $z \in \partial D$，傅里叶级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$$

是一个复数级数。如果$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$那就好了，但这并不一定成立，因为级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$可能不收敛，正如你在练习11中所看到的那样。

存在多种技术，试图为一个不收敛的复数级数赋予某种意义。在其中一种称为 *Abel summation* 的技术中，将级数的第 n^{th} 项乘以 r^n，然后在 $r \uparrow 1$ 时取极限。例如，如果该发散级数的第 n^{th} 项

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

当对 $r \in [0, 1)$ 的情形将其乘以 r^n 时，我们得到一个收敛级数，其和等于 $\frac{r}{1+r}$。随后在 $r \uparrow 1$ 时对该和取极限，就得到$\frac{1}{2}$，作为上述级数的阿贝尔和的值。

下面的定义可以通过将类似的技术应用于傅里叶级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ 来获得动机。这里我们有一个复数级数，其项是由 Z 而不是由 Z^+ 来索引的。因此我们使用 $r^{|n|}$ 而不是 r^n，因为我们希望这些乘子在 $n \to \pm\infty$ 时对每个 $r \in$ 在 $[0, 1)$ 中都有极限 0（并且当 $r \uparrow 1$ 时，对每个 $n \in$ 在 Z 中都有极限 1）。

11.11 定义 $\mathcal{P}_r f$

对于 $f \in L^1(\partial D)$ 和 $0 \le r < 1$，定义 $\mathcal{P}_r f$：$\partial D \to C$ 通过

$$(\mathcal{P}_r f)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\, \widehat{f}(n)\, z^n.$$

上述级数中没有收敛问题，因为

$$\left|r^{|n|}\, \widehat{f}(n)\, z^n\right| \le \|f\|_1\, r^{|n|}$$

对于每个$z \in \partial D$，这意味着

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |r^{|n|}\, \widehat{f}(n)\, z^n| \le \|f\|_1 \frac{1+r}{1-r} < \infty.$$

因此，对于每个 $r \in [0,1)$，上述级数的部分和在 ∂D 上均匀收敛，这意味着 $\mathcal{P}_r f$ 是从 ∂D 到 C 的连续函数（对于 $r = 0$ 和 $n = 0$，解释表达式 0^0 为 1）。

让我们解开 11.11 中的公式。如果 $f \in L^1(\partial D)$，$0 \le r < 1$，并且 $z \in \partial D$，那么

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_r f)(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\, \widehat{f}(n)\, z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \int_{\partial D} f(w)\, \overline{w^n}\, d\sigma(w) z^n \\ &= \int_{\partial D} f(w) \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} (z\overline{w})^n \Big)\, d\sigma(w), \qquad (11.12)\end{aligned}$$

在上述中，交换求和和积分是通过在∂D上级数的一致收敛性得到证明的。为了计算上面最后一行括号中的求和，设$\zeta \in \partial D$（考虑上面公式中的 $\zeta = z\overline{w}$）。因此，$(\zeta)^{-n} = (\overline{\zeta})^n$ 和

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \zeta^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (r\zeta)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (r\overline{\zeta})^n \\ &= \frac{1}{1-r\zeta} + \frac{r\overline{\zeta}}{1-r\overline{\zeta}} \\ &= \frac{(1-r\overline{\zeta}) + (1-r\zeta)r\overline{\zeta}}{|1-r\zeta|^2} \\ &= \frac{1-r^2}{|1-r\zeta|^2}. \qquad (11.13)\end{aligned}$$

受到上述公式的启发，我们现在做出以下定义。请注意，11.11 使用了书法体 $\mathcal{P}$，而下一个定义使用了斜体 P。

11.14 定义 $P_r(\zeta)$; *Poisson kernel*

- 对于 $0 \le r < 1$，定义 P_r：$\partial \mathrm{D} \to (0, \infty)$ 为

$$P_r(\zeta) = \frac{1-r^2}{|1-r\zeta|^2}.$$

- 函数族 $\{P_r\}_{r\in[0,1)}$ 称为开单位圆盘 D 上的 *Poisson kernel*。

由11.12和11.13可得如下结果。

11.15 *integral formula for* $\mathcal{P}_r f$

如果 $f \in L^1(\partial \mathrm{D})$，$0 \le r < 1$，且 $z \in \partial \mathrm{D}$，那么

$$(\mathcal{P}_r f)(z) = \int_{\partial \mathbf{D}} f(w) P_r(z\overline{w})\, d\sigma(w) = \int_{\partial \mathbf{D}} f(w) \frac{1-r^2}{|1-rz\overline{w}|^2}\, d\sigma(w).$$

术语 *approximate identity* 有时用来描述下一个结果中给出的泊松核的三个属性。

11.16 *properties of* P_r

(a) $P_r(\zeta) >$ 对所有 $r \in [0, 1)$ 以及所有 $\zeta \in \partial \mathrm{D}$ 为 0。

（b）$\displaystyle\int_{\partial \mathbf{D}} P_r(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 1$，对于每个 $r \in [0, 1)$。

（c）$\displaystyle\lim_{r\uparrow 1} \int_{\{\zeta\in\partial\mathbf{D}:|1-\zeta|\ge\delta\}} P_r(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0$，对每个 $\delta > 0$。

证明 (a) 部分可直接由 11.14 中给出的 $P_r(\zeta)$ 的定义得到。(b) 部分则由对 11.13 给出的 P_r 的级数表示逐项积分并注意到

$$\int_{\partial \mathbf{D}} \zeta^n\, d\sigma(\zeta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \frac{dt}{2\pi} = \frac{e^{int}}{in2\pi}\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0 \text{ for all } n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\};$$

对于 $n = 0$，我们有 $\int_{\partial \mathbf{D}} \zeta^n\, d\sigma(\zeta) = 1$。

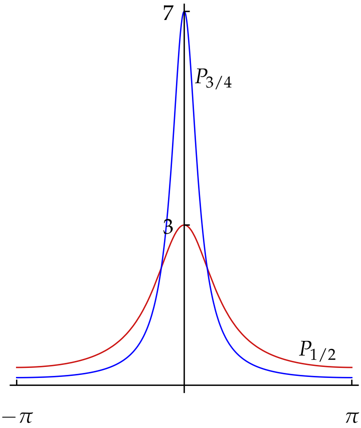
为证明 (c)，假设 $\delta > 0$。如果 $\zeta \in \partial \mathrm{D}$，$|1-\zeta| \ge \delta$，并且 $1 - r < \frac{\delta}{2}$，则

$$|1 - r\zeta| = |1 - \zeta - (r-1)\zeta| \ge |1-\zeta| - (1-r) > \tfrac{\delta}{2}.$$

因此，当 $r \uparrow 1$ 时，$P_r(\zeta)$ 的定义中的分母在 $\{\zeta \in \partial \mathrm{D} : |1-\zeta| \ge \delta\}$ 上一致地远离 0，而分子趋于 0。因此，P_r 在 $\{\zeta \in \partial \mathrm{D} : |1-\zeta| \ge \delta\}$ 上的积分在 $r \uparrow 1$ 时趋于 0。 ■

下面是下一个结果证明背后的直观理解：前一个结果的(a)和(b)部分以及11.15意味着，$(\mathcal{P}_r f)(z)$ 是 f 的加权平均。前一个结果的(c)部分表明，当 r 接近 1 时，这个加权平均中的大部分权重集中在 z 附近。因此，当 $r \uparrow 1$ 时，$(\mathcal{P}_r f)(z) \to f(z)$。

此处的图将情境从 $\partial\mathbf{D}$ 转移到 $(-\pi, \pi]$。两条曲线下的面积为 2π［对应 11.16(b)］，并且当 $r \uparrow 1$ 时，$P_r(e^{it})$ 在 $t = 0$ 附近变得更加集中［对应 11.16(c)］。关于 $P_r(e^{it})$ 的公式，参见练习 3。



The graphs of $P_{\frac{1}{2}}(e^{it})$ *[red] and* $P_{\frac{3}{4}}(e^{it})$ *[blue] on* $(-\pi, \pi]$.

下一个证明还需要一个要素：如果 $h \in L^1(\partial\mathbf{D})$ 且 $z \in \partial\mathbf{D}$，则

11.17 $$\int_{\partial\mathbf{D}} h(z\overline{w})\,d\sigma(w) = \int_{\partial\mathbf{D}} h(\zeta)\,d\sigma(\zeta).$$

上面的方程成立，因为度量 σ 是旋转和反射不变的。换句话说，对于所有可测量的 $E \subseteq \partial\mathbf{D}$，$\sigma(\{w \in \partial\mathbf{D} : h(\overline{z}w) \in E\}) = \sigma(\{\zeta \in \partial\mathbf{D} : h(\zeta) \in E\})$。

11.18 ***if f is continuous, then*** 极限 $\lim_{r\uparrow 1}\|f - \mathcal{P}_r f\|_\infty = 0$

假设 $f : \partial\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 是连续的。则当 $r \uparrow 1$ 时，$\mathcal{P}_r f$ 在 $\partial\mathbf{D}$ 上一致收敛到 f。

证明 假设 $\varepsilon > 0$。因为 f 在 $\partial\mathbf{D}$ 上一致连续，存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon \text{ for all } z, w \in \partial\mathbf{D} \text{ with } |z - w| < \delta.$$

如果 $z \in \partial\mathbf{D}$，那么

$$\begin{aligned}
|f(z) - (\mathcal{P}_r f)(z)| &= \left|f(z) - \int_{\partial\mathbf{D}} f(w)P_r(z\overline{w})\,d\sigma(w)\right| \\
&= \left|\int_{\partial\mathbf{D}} \big(f(z) - f(w)\big)P_r(z\overline{w})\,d\sigma(w)\right| \\
&\leq \varepsilon \int_{\{w\in\partial\mathbf{D} : |z-w|<\delta\}} P_r(z\overline{w})\,d\sigma(w) \\
&\qquad + 2\|f\|_\infty \int_{\{w\in\partial\mathbf{D} : |z-w|\geq\delta\}} P_r(z\overline{w})\,d\sigma(w) \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{\{\zeta\in\partial\mathbf{D} : |1-\zeta|\geq\delta\}} P_r(\zeta)\,d\sigma(\zeta),
\end{aligned}$$

其中我们使用了11.17、11.16(a)、11.16(b)，以及等式 $|z - w| = |1 - \zeta|$，该等式在 $\zeta = zw$ 时成立。现在由11.16(c)可知，上述最后一个积分不依赖于 z，并且当 $r \uparrow 1$ 时其极限为0，从而得到所需的一致收敛。■

盘面狄利克雷问题的解

作为我们对傅里叶级数研究的奖励，之前的结果提供了单位圆盘上Dirichlet问题的解。为了阐述Dirichlet问题，我们首先需要一些定义。像往常一样，我们将C与$\mathbf{R}^2$等同。因此，对于x，$y \in \mathbf{R}$，我们可以将$w = x + yi \in \mathbf{C}$或$w = (x, y) \in \mathbf{R}^2$。因此

$$\mathbf{D} = \{w \in \mathbf{C} : |w| < 1\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

对于函数 $u : G \to \mathbf{C}$ 在 C 的开子集 G 上（或在 $\mathbf{R}^2$ 的开子集 G 上），偏导数 $D_1 u$ 和 $D_2 u$ 的定义与 5.46 中相同，只是现在我们允许 u 为复值函数。显然，对于 $j = 1, 2$，有 $D_j u = D_j(\operatorname{Re} u) + iD_j(\operatorname{Im} u)$。

11.19 定义 *harmonic function; Laplacian;* Δu

一个函数 $u : G \to \mathbf{C}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 的一个开子集 G 上被称为 *harmonic* 如果

$$\big(D_1(D_1 u)\big)(w) + \big(D_2(D_2 u)\big)(w) = 0$$

对于所有$w \in G$。上面方程的左侧称为*Laplacian*在u处的w，通常用$(\Delta u)(w)$表示。

11.20 示例 *harmonic functions*

- 如果 $g : G \to \mathbf{C}$ 是一个在开集 $G \subseteq \mathbf{C}$ 上的解析函数，那么函数 $\operatorname{Re} g$、$\operatorname{Im} g$、$\overline{g}$ 和 g 都是 G 上的调和函数，通常在复分析课程的开始部分会讨论这一点。
- 如果 $\zeta \in \partial\mathbf{D}$，则函数

$$w \mapsto \frac{1 - |w|^2}{|1 - \overline{\zeta} w|^2}$$

  在C上是谐波的$\setminus \{\zeta\}$ (见习题7)。
- 函数 $u : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ 由 $u(w) = \log|w|$ 定义，在 $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上是调和的，正如你应该验证的那样。然而，不存在一个在 $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上解析的函数 g，使得 $u = \operatorname{Re} g$。

狄利克雷问题要求将一个连续函数从 $\mathbf{R}^2$ 的一个开子集的边界扩展到该开集上的一个调和函数，并且在开集的闭包上也是连续的。这里是一个更正式的表述：

11.21 G 上的狄利克雷问题：设 $G \subseteq \mathbf{R}^2$ 是一个开集，且 $f : \partial G \to \mathbf{C}$ 是一个连续函数。求一个连续函数 $u : \overline{G} \to \mathbf{C}$，使得 $u|_G$ 是调和的，且 $u|_{\partial G} = f$。

对于某些开集 $G \subseteq \mathbf{R}^2$，存在定义在 ∂G 上的连续函数 f，其狄利克雷问题没有解。然而，在开单位圆盘 $\mathbf{D}$ 上的情形要好得多，正如我们很快将看到的那样。

在下面的结果中定义的函数 u 被称为 f 在 $\mathbf{D}$ 上的 *Poisson integral*。

11.22 *Poisson integral is harmonic*

设 $f \in L^1(\partial\mathbf{D})$。定义 $u : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 为

$$u(rz) = (\mathcal{P}_r f)(z)$$

对于 $r \in [0,1)$ 且 $z \in \partial\mathbf{D}$。则 u 在 $\mathbf{D}$ 上是调和的。

证明 如果 $w \in \mathbf{D}$，则 $w = rz$ 对于某个 $r \in [0,1)$ 且某个 $z \in \partial\mathbf{D}$。因此

$$\begin{aligned} u(w) &= (\mathcal{P}_r f)(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)(rz)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(-n)(r\overline{z})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)w^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\widehat{f}(-n)}w^n}. \end{aligned}$$

在 $\mathbf{D}$ 上具有幂级数表示的每个函数在 $\mathbf{D}$ 上都是解析的。因此，上述方程表明 u 是一个解析函数与一个解析函数的复共轭之和。因此 u 是调和的。 ■

11.23 *Poisson integral solves Dirichlet problem on unit disk*

假设 $f : \partial\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 是连续的。定义 $u : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 为

$$u(rz) = \begin{cases} (\mathcal{P}_r f)(z) & \text{if } 0 \le r < 1 \text{ and } z \in \partial\mathbf{D}, \\ f(z) & \text{if } r = 1 \text{ and } z \in \partial\mathbf{D}. \end{cases}$$

则 u 在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上连续，$u|_{\mathbf{D}}$ 是调和的，并且 $u|_{\partial\mathbf{D}} = f$。

证明 函数 $u|_{\mathbf{D}}$ 在 $\mathbf{D}$ 上是调和的（因此在 $\mathbf{D}$ 上连续），由 11.22 可知。设 $\zeta \in \partial\mathbf{D}$。为了证明 u 在 ζ 处连续，我们需要证明：如果 $w \in \overline{\mathbf{D}}$ 接近 ζ，那么 $u(w)$ 接近 $u(\zeta)$。由于 $u|_{\partial\mathbf{D}} = f$ 和 f 在 $\partial\mathbf{D}$ 上连续，我们不需要担心 $w \in \partial\mathbf{D}$ 的情形。因此假设 $w \in \mathbf{D}$。我们可以写成 $w = rz$，其中 $r \in \in [0,1)$ 且 $z \in \partial\mathbf{D}$。现在

$$\begin{aligned} |u(\zeta) - u(w)| &= |f(\zeta) - (\mathcal{P}_r f)(z)| \\ &\le |f(\zeta) - f(z)| + |f(z) - (\mathcal{P}_r f)(z)|. \end{aligned}$$

如果 w 接近 ζ，则 z 也接近 ζ，因此由于 f 的连续性，上面最后一行中的第一项很小。此外，如果 w 接近 ζ，则 r 接近 1，因此根据 11.18，上面最后一行中的第二项很小。因此，如果 w 接近 ζ，则 $u(w)$ 接近 $u(\zeta)$，如所需。因此 u 在 ζ 处连续，这表明 u 为函数 $f: \partial\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 在 D 上解了狄利克雷问题。■

光滑函数的傅里叶级数

定义在 $\partial\mathbf{D}$ 上的连续函数的傅里叶级数不一定逐点收敛（见练习 11）。然而，在本小节中我们将看到，对于二次连续可微的函数，傅里叶级数表现良好。

我们需要定义在 $\partial\mathbf{D}$ 上的函数可微是什么意思。下面给出形式化定义，并引入记号 $\tilde{f}$，用于将 f 转移到 R，以及 $f^{[k]}$，用于将 $\tilde{f}$ 的 k^{th} 导数转移回 $\partial\mathbf{D}$。

The idea here is that we transfer a function defined on $\partial\mathbf{D}$ to R, *take the usual derivative there, then transfer back to* $\partial\mathbf{D}$.

11.24 定义 $\tilde{f}$; k *times continuously differentiable*; $f^{[k]}$

Suppose $f: \partial\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 是定义在 $\partial\mathbf{D}$ 上的复值函数，并且 $k \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$.

- 定义 $\tilde{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 为 $\tilde{f}(t) = f(e^{it})$。
- f 称为 k 次 *continuously differentiable*，如果 $\tilde{f}$ 在 R 上处处可微且其 k^{th}-阶导数 $\tilde{f}^{(k)}: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 是连续的。
- 如果 f 是 k 次连续可微的，那么 $f^{[k]}$: $\partial\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 定义为
$$f^{[k]}(e^{it}) = \tilde{f}^{(k)}(t)$$
对于 $t \in \mathbf{R}$。这里将 $\tilde{f}^{(0)}$ 定义为 $\tilde{f}$，这意味着 $f^{[0]} = f$。

请注意，上述定义的函数 $\tilde{f}$ 在 R 上是周期性的，因为 $\tilde{f}(t + 2\pi) = \tilde{f}(t)$ 对于所有 $t \in \in \mathbf{R}$ 都成立。因此，$\tilde{f}$ 的所有导数也在 R 上是周期性的。

11.25 例 设 $n \in \mathbf{Z}$ 且 $f: \partial\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 由 $f(z) = z^n$ 定义。则 $\tilde{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 由 $\tilde{f}(t) = e^{int}$ 定义。如果 $k \in \mathbf{Z}^+$，则 $\tilde{f}^{(k)}(t) = i^k n^k e^{int}$。因此 $f^{[k]}(z) = i^k n^k z^n$ 对于 $z \in \partial\mathbf{D}$。

我们的下一个结果给出了导数的傅里叶系数的一个公式。

11.26 *Fourier coefficients of differentiable functions*

假设 $k \in \mathbf{Z}^+$ 和 $f: \partial\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 是 k 次连续可微的。那么

$$\widehat{f^{[k]}}(n) = i^k n^k \hat{f}(n)$$

对于每个 $n \in \mathbf{Z}$。

证明 首先假设 $n = 0$。根据微积分基本定理，我们有

$$\widehat{f^{[k]}}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f^{[k]}(e^{it}) \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}^{(k)}(t) \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}^{(k-1)}(t)\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0,$$

这就是 $n =$ 为 0 时的期望结果。

现在假设 $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$。那么

$$\begin{aligned}
\widehat{f^{[k]}}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}^{(k)}(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \tilde{f}^{(k-1)}(t) e^{-int}\Big]_{t=-\pi}^{t=\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}^{(k-1)}(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} \\
&= in\, \widehat{f^{[k-1]}}(n),
\end{aligned}$$

其中，上述第二个等式来自于对 p 的积分 艺术。

通过对上述方程进行迭代，现在可以得到期望的结果。 ■

现在我们可以证明一个优美的结果：在∂D上的一个二阶连续可微函数等于其傅里叶级数，而且傅里叶级数一致收敛。这个结论在较弱的假设——函数是连续可微的——下也成立，但在这里采用的假设下证明更为容易。

11.27 *Fourier series of twice continuously differentiable functions converge*

假设 $f: \partial\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 是二阶连续可微的。该 n

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$$

对所有 $z \in \partial\mathbf{D}$。此外，部分和 $\sum_{n=-K}^{M} \hat{f}(n) z^n$ 在 $\partial\mathbf{D}$ 上一致收敛于 f，当 K, $M \to \infty$。

证明 如果 $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, 那么

11.28 $$|\hat{f}(n)| = \frac{|\widehat{f^{[2]}}(n)|}{n^2} \le \frac{\|f^{[2]}\|_1}{n^2},$$

其中，上述等式由11.26推出，而上述不等式由11.9(c)推出。现在由11.28可推出

11.29 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)z^n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$$

对所有$z \in \partial\mathrm{D}$。上述不等式意味着$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n$收敛，并且部分和在$\partial\mathrm{D}$上一致收敛。

此外，对于每个 $z \in \partial\mathrm{D}$，我们有

$$f(z) = \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \widehat{f}(n)z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n,$$

其中，第一个等式由 11.18 和 11.11 得到，而第二个等式由支配收敛定理（在 Z 上使用计数测度）和 11.29 得到。 ■

1923 年，安德烈·柯尔莫哥洛夫（1903–1987）发表了一项证明，表明存在一个定义在 $L^1(\partial\mathrm{D})$ 中的函数，其傅里叶级数在 $\partial\mathrm{D}$ 上几乎处处发散。柯尔莫哥洛夫的结果以及练习 11 中的结果，可能使大多数数学家怀疑，存在一个定义在 $\partial\mathrm{D}$ 上的连续函数，其傅里叶级数几乎处处发散。然而，1966 年，伦纳特·卡尔松（1928–）证明，如果 $f \in L^2(\partial\mathrm{D})$ (，并且尤其是当 f 在 $\partial\mathrm{D}$) 上连续时，那么 f 的傅里叶级数几乎处处收敛到 f。

练习 11A

1 证明 $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$ 对所有 $f \in L^1(\partial\mathrm{D})$ 以及所有 $n \in \mathbf{Z}$。

2 假设 $1 \le p \le \infty$ 和 $n \in \mathbf{Z}$。

（a）证明函数$f \mapsto \widehat{f}(n)$是在$L^p(\partial\mathrm{D})$上的一个有界线性泛函，且范数为1。（b）找出所有$f \in L^p(\partial\mathrm{D})$，使得$\|f\|_p = 1$ 且$|\widehat{f}(n)| = 1$。

3 证明如果 $0 \le r < 1$ 且 $t \in \mathbf{R}$，则

$$P_r(e^{it}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}.$$

4 假设 $f \in L^1(\partial\mathrm{D})$、$z \in \partial\mathrm{D}$，且 f 在 z 处连续。证明:

$$\lim_{r \uparrow 1} (\mathcal{P}_r f)(z) = f(z).$$

[*The result in this exercise differs from 11.18 because here we are assuming continuity only at a single point and we are not even assuming that f is bounded, as compared to 11.18, which assumed continuity at all points of* $\partial\mathrm{D}$.]

5 设 a，$b \in \mathbf{C}$，$f \in L^1(\partial\mathrm{D})$，$z \in \partial\mathrm{D}$，$\lim_{t \downarrow 0} f(e^{it}z) = a$，以及 $\lim_{t \uparrow 0} f(e^{it}z) = b$。证明

$$\lim_{r \uparrow 1} (\mathcal{P}_r f)(z) = \frac{a + b}{2}.$$

[*If $a \ne b$, then f is said to have a* 跳跃不连续 *at z.*]

证明对于每个 $p \in [1, \infty)$，存在 $f \in L^1(\partial \mathrm{D})$ 使得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^p = \infty.$$

7 假设 $\zeta \in \partial \mathrm{D}$。证明该函数

$$w \mapsto \frac{1-|w|^2}{|1-\overline{\zeta}w|^2}$$

在 $\mathrm{C} \setminus \{\zeta\}$ 上是调和的，通过在 $\mathrm{C} \setminus \{\zeta\}$ 上找到一个解析函数，其实部是上述函数。

假设 $f\colon \partial \mathrm{D} \to \mathrm{R}$ 是由以下定义的函数

$$f(x, y) = x^4 y$$

对于 $(x, y) \in \mathrm{R}^2$ 与 $x^2 + y^2 = 1$. 找到一个二元多项式 u，其中 x，y，使得 u 在 R^2 上是调和的，并且 $u|_{\partial \mathrm{D}} = f$。
[*Of course,* $u|_{\mathrm{D}}$ *is the Poisson integral of* f*. However, here you are asked to find an explicit formula for u in closed form, without involving or computing an integral. It may help to think of* f *as defined by* $f(z) = (\operatorname{Re} z)^4 (\operatorname{Im} z)$ *for* $z \in \partial \mathrm{D}$.]

找到一个公式（闭式的，不是无限和的形式）用于 $\mathcal{P}_r f$，其中 f 是示例 11.8 中第二个要点的函数。

假设 $f\colon \partial \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ 是三次连续可微的。证明

$$f^{[1]}(z) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \widehat{f}(n) z^n$$

对所有 $z \in \partial \mathrm{D}$。

11 令 $C(\partial D)$ 表示从 ∂D 到 C 的连续函数的 Banach 空间，配备上确界范数。对于 $M \in Z^+$，定义一个线性泛函 $\varphi_M : C(\partial D) \to C$ 如下

$$\varphi_M(f) = \sum_{n=-M}^{M} \widehat{f}(n).$$

因此，$\varphi_M(f)$ 是傅里叶级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n$ 的一个部分和，在 $z = 1$ 处求值。

(a) 证明

$$\varphi_M(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \frac{dt}{2\pi}$$

对于每个$f \in C(\partial D)$以及每个$M \in Z^+$。

(b) 证明

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right| \frac{dt}{2\pi} = \infty.$$

(c) 证明 $\lim_{M\to\infty} \|\varphi_M\| = \infty$。 (d) 证明存在 $f \in C(\partial D)$ 使得 $\lim_{M\to\infty} \sum_{n=-M}^{M} \widehat{f}(n)$ 不存在（作为 C 的一个元素）。

[*Because the sum in* (*d*) *is a partial sum of the Fourier series evaluated at* $z = 1$, *part* (*d*) *shows that the Fourier series of a continuous function on* ∂D *need not converge pointwise on* ∂D.
The family of functions (*one for each* $M \in Z^+$) *on* ∂D *defined by*

$$e^{it} \mapsto \frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$$

is called the 狄利克雷核.]

12 定义 $f : \partial D \to R$ 为

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } \operatorname{Im} z > 0, \\ -1 & \text{if } \operatorname{Im} z < 0, \\ 0 & \text{if } \operatorname{Im} z = 0. \end{cases}$$

(a) 证明如果 $n \in Z$，则

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} -\frac{2i}{n\pi} & \text{if } n \text{ is odd}, \\ 0 & \text{if } n \text{ is even}. \end{cases}$$

(b) 证明

$$(\mathcal{P}_r f)(z) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{2r \operatorname{Im} z}{1-r^2}$$

对于每个 $r \in [0, 1)$ 和每个 $z \in \partial D$。

(c) 验证对于每个$z \in \partial D$，$\lim_{r\uparrow 1}(\mathcal{P}_r f)(z) = f(z)$。

（d）证明当 $r \uparrow 1$ 时，$\mathcal{P}_r f$ 在 ∂D 上不一致收敛到 f。

11B 傅里叶级数与单位圆的L^p

前一节的最后一段提到这样一个结果：$L^2(\partial D)$ 中函数的傅里叶级数几乎处处逐点收敛到该函数。这个了不起的结果直到 1966 年才得到解决，在此之前一直是一个悬而未决的问题。本书未包含其证明，一方面因为证明较为困难，另一方面因为逐点收敛后来被证明不如范数收敛有用。

因此，我们以一个简单的证明开始本节，证明傅里叶级数在 $L^2(\partial D)$ 的范数下收敛。本节其余部分随后集中讨论与范数收敛相关的问题。

单位圆上 L^2 的正交规范基

我们已经展示了 $\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\partial D)$ (中的一个正交归一族，参见 11.6)。现在我们展示 $\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\partial D)$ 的一个正交归一基。

11.30 ***orthonormal basis of*** $L^2(\partial D)$

族 $\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\partial D)$ 的一组正交归一基。

证明 假设 $f \in \left(\operatorname{span}\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}\right)^{\perp}$。因此 $\langle f, z^n\rangle = 0$ 对于所有 $n \in$ Z。换句话说，$\widehat{f}(n) = 0$ 对于所有 $n \in$ Z。

假设 $\varepsilon > 0$。令 $g : \partial D \to$ C 为一个二次连续可微的函数，使得 $\|f - g\|_2 < \varepsilon$。[为了证明 $g \in L^2(\partial D)$ 存在具有这个性质，首先按 3.47 中的步骤函数近似 f，但使用 L^2-范数而不是 L^1-范数。然后按 3.48 中的方法近似区间的特征函数，但再次使用 L^2-范数，并在 3.48 的证明中将图形的拐角处进行平滑处理，以得到一个二次连续可微的函数。]

现在

$$
\begin{aligned}
\|f\|_2 &\le \|f-g\|_2 + \|g\|_2 \\
&= \|f-g\|_2 + \Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\widehat{g}(n)|^2\Big)^{1/2} \\
&= \|f-g\|_2 + \Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\widehat{g-f}(n)|^2\Big)^{1/2} \\
&\le \|f-g\|_2 + \|g-f\|_2 \\
&< 2\varepsilon,
\end{aligned}
$$

其中，上述第二行由 11.27 推出，上述第三行成立是因为对所有 $n \in$ Z，$\widehat{f}(n) = 0$，而上述第四行由贝塞尔不等式（8.57）推出。

由于上述不等式对于所有 $\varepsilon > 0$ 成立，我们得出结论 $f = 0$。现在我们已经证明了 $\left(\operatorname{span}\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}\right)^{\perp} = \{0\}$。因此，根据 8.42，$\overline{\operatorname{span}\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}} = L^2(\partial D)$，这意味着 $\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\partial D)$ 的一个正交规范基。 ■

现在，$f \in L^2(\partial\mathrm{D})$ 的傅里叶级数收敛到 f 可立即由标准的希尔伯特空间理论 [见 8.63(a)] 以及前述结果推出。因此，无需进一步证明，我们得到如下重要结果。

11.31 ***convergence of Fourier series in the norm of*** $L^2(\partial\mathrm{D})$

假设 $f \in L^2(\partial\mathrm{D})$。然后

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) z^n,$$

无限和收敛到f在$L^2(\partial\mathrm{D})$的范数中。

下一个例子是希尔伯特空间理论的一个壮观应用，以及$\{z^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$在$L^2(\partial\mathrm{D})$中的正交标准基。$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的求值一直是一个未解的问题，直到欧拉在1734年发现这个无限级数等于$\frac{\pi^2}{6}$。

Euler's proof, which would not be considered sufficiently rigorous by today's standards, was quite different from the technique used in the example below.

11.32 示例 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

定义 $f \in L^2(\partial\mathrm{D})$ 由 $f(e^{it}) = t$ 对 $t \in (-\pi, \pi]$。然后 $\hat{f}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} t\,\frac{dt}{2\pi} = 0$。对于 $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$，我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}\,\frac{dt}{2\pi}\\ &= \frac{te^{-int}}{-2\pi in}\bigg]_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\,\frac{dt}{2\pi}\\ &= \frac{(-1)^n i}{n},\end{aligned}$$

其中，上述第二行来自分部积分法。上述方程意味着

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{11.33}$$

此外，

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2\,\frac{dt}{2\pi} = \frac{\pi^2}{3}. \tag{11.34}$$

Parseval的恒等式 [8.63(c)] 意味着11.33的左侧等于11.34的左侧。将11.33的右侧设置为11.34的右侧可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

单位圆上的卷积

回顾一下

11.35 $$(\mathcal{P}_r f)(z) = \int_{\partial \mathbf{D}} f(w) P_r(z\overline{w})\, d\sigma(w)$$

对于$f \in L^1(\partial\mathbf{D})$，$0 \le r < 1$，以及$z \in \partial\mathbf{D}$（见11.15）。上述结果中出现的这种积分公式非常有用，因此它有一个特殊的名称和符号表示。

11.36 定义 *convolution; $f * g$*

设f，$g \in L^1(\partial\mathbf{D})$。$f$ 与 g 的 *convolution* 记作 $f * g$，并定义为如下函数

$$(f * g)(z) = \int_{\partial \mathbf{D}} f(w) g(z\overline{w})\, d\sigma(w)$$

对于那些使上述积分有意义的 $z \in \partial\mathbf{D}$。

因此，11.35指出$\mathcal{P}_r f = f * P_r$。这里$f \in L^1(\partial\mathbf{D})$和$P_r \in L^\infty(\partial\mathbf{D})$；因此，在$f * P_r$的定义中，关于所有$z \in \partial\mathbf{D}$的积分没有问题。请参见第11题，了解当函数被转移到实数轴时的卷积解释。

上述卷积定义允许两个函数都在$L^1(\partial\mathbf{D})$中。两个函数的积一般不在$L^1(\partial\mathbf{D})$中。因此，两个函数在$L^1(\partial\mathbf{D})$中的卷积是否在某处定义并不明显。然而，接下来的结果表明一切正常。

11.37 *convolution of two functions in* L*1*$(\partial\mathbf{D})$ *is in* $L^1(\partial\mathbf{D})$

如果f，$g \in L^1(\partial\mathbf{D})$，则 $(f * g)(z)$ 对几乎每个 $z \in \partial\mathbf{D}$ 都是有定义的。此外，$f * g \in L^1(\partial\mathbf{D})$ 且 $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1\, \|g\|_1$。

证明 设f，$g \in L^1(\partial\mathbf{D})$。函数 $(w, z) \mapsto f(w)g(zw)$ 在 $\partial\mathbf{D} \times \partial\mathbf{D}$ 上是可测函数，正如你在练习 4 中被要求证明的那样。现在 Tonelli 定理 (5.28) 和 11.17 推出

$$\begin{aligned}\int_{\partial \mathbf{D}} \int_{\partial \mathbf{D}} |f(w) g(z\overline{w})|\, d\sigma(w)\, d\sigma(z) &= \int_{\partial \mathbf{D}} |f(w)| \int_{\partial \mathbf{D}} |g(z\overline{w})|\, d\sigma(z)\, d\sigma(w) \\ &= \int_{\partial \mathbf{D}} |f(w)| \|g\|_1\, d\sigma(w) \\ &= \|f\|_1\, \|g\|_1.\end{aligned}$$

上述等式意味着对于几乎每个 $z \in \partial\mathbf{D}$，有 $\int_{\partial\mathbf{D}} |f(w)g(zw)|\, d\sigma(w) < \infty$。因此，$(f * g)(z)$ 对于几乎每个 $z \in \partial\mathbf{D}$ 都是有定义的。

上述方程也意味着 $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1\, \|g\|_1$。 ■

很快我们将把卷积结果应用于泊松积分。然而，首先我们需要通过在 $g \in L^p(\partial\mathbf{D})$ 时对 $\|f * g\|_p$ 进行界定来扩展先前的结果。

11.38 L^p-norm of a convolution

设 $1 \le p \le \infty$、$f \in L^1(\partial D)$ 和 $g \in L^p(\partial D)$。则

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \, \|g\|_p.$$

证明 我们使用以下结果来估计 $L^p(\partial D)$ 中的范数:

如果 $F : \partial D \to C$ 是可测的且 $1 \le p \le \infty$，则

11.39 $$\|F\|_p = \sup\Big\{\int_{\partial \mathbf{D}} |Fh| \, d\sigma : h \in L^{p'}(\partial \mathbf{D}) \text{ and } \|h\|_{p'} = 1\Big\}.$$

赫尔德不等式（7.9）表明，上述等式的左边大于或等于右边。反方向的不等式几乎可以由 7.12 得到，但 7.12 需要假设 $F \in L^p(\partial D)$ (，而我们希望即使在 $\|F\|_p = \infty$) 的情况下，上述等式也成立。为了解决这个问题，将 7.12 应用于 F 的截断，并使用单调收敛定理（3.11）；验证 11.39 的细节留给读者。

假设 $h \in L^{p'}(\partial D)$ 和 $\|h\|_{p'} = 1$。那么

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \mathbf{D}} |(f * g)(z)h(z)| \, d\sigma(z) &\le \int_{\partial \mathbf{D}} \Big(\int_{\partial \mathbf{D}} |f(w)g(z\overline{w})| \, d\sigma(w)|h(z)|\Big) \, d\sigma(z) \\
&= \int_{\partial \mathbf{D}} |f(w)| \int_{\partial \mathbf{D}} |g(z\overline{w})h(z)| \, d\sigma(z) \, d\sigma(w) \\
&\le \int_{\partial \mathbf{D}} |f(w)| \|g\|_p \|h\|_{p'} \, d\sigma(w)
\end{aligned}$$

11.40 $$= \|f\|_1 \, \|g\|_p,$$

其中，上面的第二行由 Tonelli 定理（5.28）得到，第三行由 Hölder 不等式（7.9）和 11.17 得到。现在，11.39（带有 $F = f * g$）和 11.40 蕴含 $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \, \|g\|_p$。■

卷积中顺序无关，正如我们现在证明的那样。

11.41 convolution is commutative

Suppose $f, g \in L^1(\partial \mathbf{D})$. Then $f * g = g * f$.

证明 假设 $z \in \partial D$ 使得 $(f * g)(z)$ 已定义。则

$$(f * g)(z) = \int_{\partial \mathbf{D}} f(w)g(z\overline{w}) \, d\sigma(w) = \int_{\partial \mathbf{D}} f(z\overline{\zeta})g(\zeta) \, d\sigma(\zeta) = (g * f)(z),$$

其中第二个等式源于进行代换$\zeta = z\overline{w}$ (，这意味着$w = z\overline{\zeta}$)；该代换下积分的不变性在与11.17的相关讨论中得到解释。■

现在我们得出一个重要结果，声明对于$p \in [1, \infty)$，$L^p(\partial\mathrm{D})$中函数的泊松积分在$L^p(\partial\mathrm{D})$的范数下收敛。这个结果对于$p = \infty$失效[例如，参见第11A节的习题12(d)]。

11.42 *if $f \in L^p(\partial\mathrm{D})$, then $\mathcal{P}_r f$ converges to f in $L^p(\partial\mathrm{D})$*

假设 $1 \le p < \infty$ 且 $f \in L^p(\partial\mathrm{D})$。则 $\lim\limits_{r\uparrow 1} \|f - \mathcal{P}_r f\|_p = 0$。

证明 假设 $\varepsilon > 0$。设 $g : \partial\mathrm{D} \to \mathbf{C}$ 是 $\partial\mathrm{D}$ 上的连续函数，使得

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

到11.18时，存在$R \in [0, 1)$ 使得

$$\|g - \mathcal{P}_r g\|_\infty < \varepsilon$$

对于所有 $r \in (R，1)$。如果 $r \in (R，1)$，那么

$$\begin{aligned}
\|f - \mathcal{P}_r f\|_p &\le \|f - g\|_p + \|g - \mathcal{P}_r g\|_p + \|\mathcal{P}_r g - \mathcal{P}_r f\|_p \\
&< \varepsilon + \|g - \mathcal{P}_r g\|_\infty + \|\mathcal{P}_r (g - f)\|_p \\
&< 2\varepsilon + \|P_r * (g - f)\|_p \\
&\le 2\varepsilon + \|P_r\|_1 \, \|g - f\|_p \\
&< 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

其中，上面的第三行由 11.41 得到，上面的第四行由 11.38 得到，而上面的最后一行由方程 $\|P_r\|_1 = 1$ 得到，该方程由 11.16(a) 和 11.16(b) 推出。最后一个不等式蕴含 $\lim\limits_{r\uparrow 1} \|f - \mathcal{P}_r f\|_p = 0$。 ■

因此，根据上述结果，我们现在可以证明，$L^1(\partial\mathrm{D})$ 中的函数，以及因此对每个 $p \in [1, \infty]$ 的 $L^p(\partial\mathrm{D})$ 中的函数，都由其傅里叶系数唯一确定。具体来说，如果 g、$h \in L^1(\partial\mathrm{D})$ 且对每个 $n \in \mathbf{Z}$ 都有 $\widehat{g}(n) = \widehat{h}(n)$，那么将下面的结果应用于 $g - h$ 可得 $g = h$。

11.43 *functions are determined by their Fourier coefficients*

假设 $f \in L^1(\partial\mathrm{D})$ 且 $\widehat{f}(n) = 0$ 对每个 $n \in \mathbf{Z}$。则 $f = 0$。

证明 因为 $\mathcal{P}_r f$ 是通过傅里叶系数定义的（见 11.11），我们知道 $\mathcal{P}_r f =$ 对所有 $r \in \in [0, 1)$ 都为 0。因为 $\mathcal{P}_r f \to f$ 在 $L^1(\partial\mathrm{D})$ 中，当 $r \uparrow = 1$ 时 [由 11.42 推出]，这意味着 $f = = 0$。 ■

我们的下一个结果表明，傅里叶系数的乘法对应于相应函数的卷积。

11.44 *Fourier coefficients of a convolution*

假设 $f, g \in L^1(\partial\mathbf{D})$。那么

$$\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)$$

对于每个 $n \in \mathbf{Z}$。

首先注意，如果 $w \in \partial\mathbf{D}$ 和 $n \in \mathbf{Z}$，那么

11.45 $$\int_{\partial\mathbf{D}} g(z\overline{w})\,\overline{z^n}\,d\sigma(z) = \int_{\partial\mathbf{D}} g(\zeta)\,\overline{\zeta^n w^n}\,d\sigma(\zeta) = \overline{w^n}\,\hat{g}(n),$$

其中，第一个等式来自于将$\zeta = zw$ (替换为与$z = \zeta w$)等价的表达式，而这一替换由σ的旋转不变性所保证。

现在

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(n) &= \int_{\partial\mathbf{D}} (f * g)(z)\,\overline{z^n}\,d\sigma(z) \\
&= \int_{\partial\mathbf{D}} \overline{z^n} \int_{\partial\mathbf{D}} f(w)g(z\overline{w})\,d\sigma(w)\,d\sigma(z) \\
&= \int_{\partial\mathbf{D}} f(w) \int_{\partial\mathbf{D}} g(z\overline{w})\,\overline{z^n}\,d\sigma(z)\,d\sigma(w) \\
&= \int_{\partial\mathbf{D}} f(w)\,\overline{w^n}\,\hat{g}(n)\,d\sigma(w) \\
&= \hat{f}(n)\,\hat{g}(n),
\end{aligned}$$

在第三个等式中，积分顺序的交换是通过与证明11.37中使用的相同步骤得到的，而上述第四个等式则是通过11.45得到的。 ■

下一个结果可以通过适当应用Tonelli定理和Fubini定理来证明。然而，下面证明中使用的巧妙证明技巧应该对处理一些习题有帮助。

11.46 *convolution is associative*

Suppose $f, g, h \in L^1(\partial\mathbf{D})$. Then $(f * g) * h = f * (g * h)$.

证明 假设 $n \in \mathbf{Z}$。两次使用 11.44，我们得到

$$\big((f * g) * h\big)\hat{}\,(n) = \widehat{f * g}(n)\,\hat{h}(n) = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)\,\hat{h}(n).$$

同样地，

$$\big(f * (g * h)\big)\hat{}\,(n) = \hat{f}(n)\,\widehat{g * h}(n) = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)\,\hat{h}(n).$$

因此 $(f * g) * h$ 和 $f * (g * h)$ 具有相同的傅里叶系数。由于 $L^1(\partial\mathbf{D})$ 中的函数由其傅里叶系数唯一确定（见 11.43），这意味着 $(f * g)$
$* h = f * (g * h)$。 ■

练习 11B

证明由11.1定义的三角函数族$\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$是$L^2\big((-\pi、\pi]\big)$的正交规范基。

2 利用第11A节练习12(a))的结果来证明

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

使用与示例 11.32 类似的技术来评估$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$。 —

[If you feel industrious, you may also want to evaluate $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$. *Similar techniques work to evaluate* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^k$ *for each positive even integer k. You can become famous if you figure out how to evaluate* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$, *which currently is an open question.]*

4 假设f，g：$\partial\mathrm{D}\to\mathrm{C}$ 是可测函数。证明函数 $(w，z)\mapsto f(w)g(zw)$ 是从 $\partial\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}$ 到 C 的可测函数。[*Here the* σ*-algebra on* $\partial\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}$ *is the usual product* σ*-algebra as defined in 5.2.*]

5 当$p=\infty$时，11.42的证明在哪儿失败?

6 假设$f\in L^1(\partial\mathrm{D})$。证明$f$几乎处处取实值当且仅当对于每个 $n\in\mathrm{Z}$，$\widehat{f}(-n)=\overline{\widehat{f}(n)}$。

7 假设$f\in L^1(\partial\mathrm{D})$。证明当且仅当$f\in L^2(\partial\mathrm{D})$ 时，$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^2<\infty$。

8 设$f\in L^2(\partial\mathrm{D})$。证明：$|f(z)|=1$ 对几乎每个 $z\in\partial\mathrm{D}$ 当且仅当

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)\,\overline{\widehat{f}(k-n)}=\begin{cases}1 & \text{if } n=0,\\ 0 & \text{if } n\neq 0\end{cases}$$

对于所有 $n\in\mathrm{Z}$。

9 对于这个练习，对于每个 $r\in[0,1)$，将 $\mathcal{P}_r$ 看作 $L^2(\partial\mathrm{D})$ 上的一个运算符。

(a) 证明对于每个 $r\in[0,1)$，$\mathcal{P}_r$ 是一个自伴紧算子。(b) 对于每个 $r\in[0,1)$，求出 $\mathcal{P}_r$ 的所有特征值和特征向量。(c) 证明或否定：$\lim_{r\uparrow 1}\|I-\mathcal{P}_r\|=0$。

10 假设$f\in L^1(\partial\mathrm{D})$。定义 $T:L^2(\partial\mathrm{D})\to L^2(\partial\mathrm{D})$，由 $Tg=f*g$ 给出。

(a) 证明 T 是 $L^2(\partial\mathrm{D})$ 上的紧算子。 (b) 证明 T 是单射当且仅当对于每个 $n\in\in\mathrm{Z}$，$\widehat{f}(n)\neq=0$。 (c) 求 T^* 的公式。 (d) 证明：T 是自伴算子当且仅当f的所有傅里叶系数都是实数。 (e) 证明 T 是一个正规算子。

11 证明如果 $f, g \in L^1(\partial D)$ 那么

$$(f * g)\tilde{}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\, \tilde{g}(t-x)\, dx,$$

对于那些 $t \in \mathbf{R}$，使得 $(f * g)(e^{it})$ 有意义；这里 $(f * g)\tilde{}$、$\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 表示如 11.24 中所定义的到实数轴的转移。

12 假设 $1 \le p \le \infty$。证明如果 $f \in L^p(\partial D)$ 且 $g \in L^{p'}(\partial D)$，那么 $f * g$ 在 ∂D 上是连续函数。

13 假设 $g \in L^1(\partial D)$ 具有这样的性质：对无限多个 $n \in \mathbf{Z}$，$\hat{g}(n) \neq 0$。证明如果 $f \in L^1(\partial D)$，那么 $f * g \neq g$。

14 证明存在一个双边序列……，$b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots$，使得 $\lim\limits_{n\to\pm\infty} b_n = 0$，但不存在 $f \in L^1(\partial D)$ 使得对所有 $n \in \mathbf{Z}$ 都有 $\hat{f}(n) = b_n$。

15 证明若 f，$g \in L^2(\partial D)$，则

$$\widehat{fg}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, \hat{g}(n-k)$$

对于每个 $n \in \mathbf{Z}$。

16 假设 $f \in L^1(\partial D)$。证明对于所有 r，$s \in$ 有 $\mathcal{P}_r(\mathcal{P}_s f) = \mathcal{P}_{rs} f$。[0, 1).

假设 $p \in [1, \infty]$ 且 $f \in L^p(\partial D)$。证明如果 $0 \le r < s < 1$，则

$$\|\mathcal{P}_r f\|_p \le \|\mathcal{P}_s f\|_p.$$

18 证明Wirtinger不等式：如果 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个连续可微的 2π-周期函数且 $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{d}t = 0$，那么

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t)\big)^2\, dt \le \int_{-\pi}^{\pi} \big(f'(t)\big)^2\, dt,$$

当且仅当 $f(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$ 对某些常数 a, b 成立时，才相等。

11C 傅里叶变换

$L^1(\mathbf{R})$上的傅里叶变换

我们现在从考虑定义在单位圆 $\partial\mathbf{D}$ 上的函数，转而考虑定义在实数直线 $\mathbf{R}$ 上的函数。不再处理傅里叶系数和傅里叶级数，而是处理傅里叶变换。

回忆 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ 表示 $\int_{\mathbf{R}} f\,d\lambda$，其中 λ 表示 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度；若使用除 x 之外的哑变量，情形亦同（见 3.39）。类似地，$L^p(\mathbf{R})$ 表示 $L^p(\lambda)$ (允许函数取复值的版本)。因此在本节中，$\|f\|_p = \big(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\big)^{1/p}$ 对于 $1 \le p < \infty$。

11.47 定义 *Fourier transform;* $\hat{f}$

对于 $f \in L^1(\mathbf{R})$，f 的 *Fourier transform* 是函数 $\hat{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$，其定义为

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i t x}\, dx.$$

我们对傅里叶变换使用与傅里叶系数相同的符号 $\hat{f}$。我们将看到这两个概念之间的类比，使得使用相同的符号是合理的。上下文应能清楚表明该符号是指傅里叶变换（当我们处理定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数时），还是指傅里叶系数（当我们处理定义在 $\partial\mathbf{D}$ 上的函数时）。

在上面对傅里叶变换的定义中，出现在指数里的因子 2π 是一个归一化因子。没有这种归一化，我们将失去 $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ (见 11.82) 这一优美的结果。另一种可能的归一化（一些书中采用）是将 f 在 t 处的傅里叶变换定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-itx}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

进行归一化并不存在对或错的方法——无论是否进行归一化，恼人的 π 总会在某处冒出来。不过，11.47 中所做的选择似乎比其他选择引发的问题更少。

11.48 示例 *Fourier transforms*

(a) 假设 $b \le c$。如果 $t \in \mathbf{R}$，则

$$\widehat{\chi_{[b,c]}}(t) = \int_b^c e^{-2\pi i t x}\, dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{i\big(e^{-2\pi i c t} - e^{-2\pi i b t}\big)}{2\pi t} & \text{if } t \neq 0, \\[2ex] c - b & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

(b) 假设 $f(x)=e^{-2\pi|x|}$ 对于 $x\in\mathbf{R}$。如果 $t\in\mathbf{R}$，则

$$\begin{aligned}\hat{f}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi|x|}\,e^{-2\pi itx}\,dx\\&=\int_{-\infty}^{0}e^{2\pi x}\,e^{-2\pi itx}\,dx+\int_{0}^{\infty}e^{-2\pi x}\,e^{-2\pi itx}\,dx\\&=\frac{1}{2\pi(1-it)}+\frac{1}{2\pi(1+it)}\\&=\frac{1}{\pi(t^2+1)}.\end{aligned}$$

回忆单位圆 $\partial\mathbf{D}$ 上的黎曼–勒贝格引理指出，如果 $f\in L^1(\partial\mathbf{D})$，那么 $\lim_{n\to\pm\infty}\hat{f}(n)=0$（见 11.10）。现在我们转向实数直线情形下的类似结果。

11.49 *Riemann–Lebesgue Lemma*

假设 $f\in L^1(\mathbf{R})$。则 $\hat{f}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是均匀连续的。此外，

$$\|\hat{f}\|_\infty\le\|f\|_1\quad\text{and}\quad\lim_{t\to\pm\infty}\hat{f}(t)=0.$$

证明 因为 $|e^{-2\pi itx}|=1$ 对所有 $t\in\mathbf{R}$ 和所有 $x\in\mathbf{R}$，傅里叶变换的定义意味着，如果 $t\in\mathbf{R}$，则

$$|\hat{f}(t)|\le\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx=\|f\|_1.$$

因此 $\|\hat{f}\|_\infty\le\|f\|_1$.

如果 f 是一个有界区间的特征函数，那么例 11.48(a) 中的公式表明 $\hat{f}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续，且 $\lim_{t\to\pm\infty}\hat{f}(t)=0$。因此，同样的结果也适用于此类函数的有限线性组合。这种有限线性组合称为阶梯函数（见 3.46）。

现在考虑任意的 $f\in L^1(\mathbf{R})$。存在一个由阶梯函数组成的序列 $f_1,f_2,\ldots$，位于 $L^1(\mathbf{R})$ 中，使得 $\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|_1=0$（由 3.47）。因此

$$\lim_{k\to\infty}\|\hat{f}-\hat{f_k}\|_\infty=0.$$

换句话说，序列 $\hat{f_1},\hat{f_2},\cdots$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛于 $\hat{f}$。由于一致连续函数的一致极限仍然是一致连续的，我们可以得出 $\hat{f}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是一致连续的。此外，在 $\mathbf{R}$ 上的函数序列中，如果每个函数在 $\pm\infty$ 处的极限为 0，则其一致极限在 $\pm\infty$ 处的极限也为 0，从而完成了证明。■

下一个结果给出了一个条件，该条件强制一个函数的傅里叶变换是连续可微的。这个结果还给出了傅里叶变换的导数公式。关于 n^{th} 导数的公式，请参见习题8。

11.50 ***derivative of a Fourier transform***

假设 $f \in L^1(\mathbf{R})$。定义 g：$\mathbf{R} \to \mathbf{C}$，由 $g(x) = xf(x)$ 给出。如果 $g \in L^1(\mathbf{R}$)，则 $\hat{f}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续可微函数，并且

$$(\hat{f})'(t) = -2\pi i\, \hat{g}(t)$$

对于所有 $t \in \mathbf{R}$.

证明修复 $t \in \mathbf{R}$。则

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} \frac{\hat{f}(t+s) - \hat{f}(t)}{s} &= \lim_{s\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i t x} \Big(\frac{e^{-2\pi i s x} - 1}{s}\Big)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i t x} \Big(\lim_{s\to 0} \frac{e^{-2\pi i s x} - 1}{s}\Big)\, dx \\ &= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, e^{-2\pi i t x}\, dx \\ &= -2\pi i\, \hat{g}(t),\end{aligned}$$

其中第二个等式的成立是通过使用不等式 $|e^{i\theta} - 1| \le |\theta|$ (对所有 $\theta \in \mathbf{R}$ 有效来证明的，读者应当验证) 以显示 $|(e^{-2\pi i s x} - 1)/s| \le 2\pi|x|$ 对所有 $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ 且对所有 $x \in \mathbf{R}$ 成立；假设 $xf(x) \in L^1(\mathbf{R})$ 并且受支配收敛定理 (3.31) 允许交换极限与积分，这在上述第二个等式中有所应用。

上述方程表明 $\hat{f}$ 是可微的，并且 $(\hat{f}\,)'(t) = -2\pi i\, \hat{g}(t)$ 对所有 $t \in \mathbf{R}$。由于 $\hat{g}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续（由 11.49），我们还可以得出 $\hat{f}$ 是连续可微的。 ■

11.51 示例 $e^{-\pi x^2}$ *equals its Fourier transform*

假设 $f \in L^1(\mathbf{R})$ 由 $f(x) = e^{-\pi x^2}$ 定义。那么函数 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 由 $g(x) = xf(x) = xe^{-\pi x^2}$ 定义，且在 $L^1(\mathbf{R})$ 中。由此，11.50 意味着如果 $t \in \mathbf{R}$ ，则

$$\begin{aligned}(\hat{f})'(t) &= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i t x}\, dx \\ &= \big(i e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i t x}\big)\Big]_{x=-\infty}^{x=\infty} - 2\pi t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i t x}\, dx\end{aligned}$$

11.52 $$= -2\pi t\, \hat{f}(t),$$

其中第二个等式来自分部积分（如果你对从 $-\infty$ 到 ∞ 进行分部积分感到紧张，可以将每个积分改为从 $-M$ 到 M 的积分，并取 $M \to \infty$ 的极限）。

注意到$f'(t) = -2\pi t e^{-\pi t^2} = -2\pi t f(t)$。将该方程与 11.52 结合表明

$$\Big(\frac{\widehat{f}}{f}\Big)'(t) = \frac{f(t)\,(\widehat{f})'(t) - f'(t)\,\widehat{f}(t)}{\big(f(t)\big)^2} = -2\pi t\frac{f(t)\,\widehat{f}(t) - f(t)\,\widehat{f}(t)}{\big(f(t)\big)^2} = 0$$

对所有 $t \in \mathbf{R}$。因此$\widehat{f}\,/\,f$是一个常数函数。换言之，存在 $c \in \mathbf{C}$ 使得$\widehat{f} = cf$。为了计算 c，注意到

11.53
$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1 = f(0),$$

其中，上述积分通过将其平方写成该积分乘以同一个积分（但将哑变量由 x 改为 y），然后转换为极坐标（$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$）来进行计算。

显然，11.53 意味着 $c = 1$。因此$\widehat{f} = f$。

下一个结果给出了导数的傅里叶变换的一个公式。有关 n^{th} 导数的傅里叶变换公式，见练习 9。

11.54 *Fourier transform of a derivative*

假设$f \in L^1(\mathbf{R})$ 是一个连续可微函数，且$f' \in L^1(\mathbf{R})$。如果 $t \in \mathbf{R}$，则

$$(f')\widehat{\ }(t) = 2\pi i t\,\widehat{f}(t).$$

证明。假设 $\varepsilon > 0$。因为f和f' 属于 $L^1(\mathbf{R})$，存在 $a \in \mathbf{R}$ 使得

$$\int_a^{\infty} |f'(x)|\,dx < \varepsilon \quad \text{and} \quad |f(a)| < \varepsilon.$$

现在如果 $b > a$ 那么

$$|f(b)| = \Big|\int_a^b f'(x)\,dx + f(a)\Big| \le \int_a^{\infty} |f'(x)|\,dx + |f(a)| < 2\varepsilon.$$

因此 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$。同样地，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$。

如果 $t \in \mathbf{R}$，则

$$\begin{aligned}(f')\widehat{\ }(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,e^{-2\pi i t x}\,dx \\ &= f(x)\,e^{-2\pi i t x}\Big]_{x=-\infty}^{x=\infty} + 2\pi i t\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-2\pi i t x}\,dx \\ &= 2\pi i t\,\widehat{f}(t),\end{aligned}$$

其中第二个等式来自分部积分，第三个等式成立是因为我们在上面的段落中已经证明了 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$。 ■

下一个结果给出了函数的一些代数变换的傅里叶变换公式。这些公式的证明留给读者。

11.55 *Fourier transforms of translations, rotations, and dilations*

假设 $f \in L^1(\mathbf{R})$，$b \in \mathbf{R}$，以及 $t \in \mathbf{R}$。

(a) 若对所有 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $g(x) = f(x-b)$，则 $\widehat{g}(t) = e^{-2\pi ibt}\,\widehat{f}(t)$。

（b）如果对所有 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $g(x) = e^{2\pi ibx} f(x)$，则 $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t-b)$。

(c) 如果 $b \neq 0$ 且对所有 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $g(x) = f(bx)$，则 $\widehat{g}(\cancel{t}) = \frac{1}{|b|}\,\widehat{f}\bigl(\frac{t}{b}\bigr)$。

11.56 示例 *Fourier transform of a rotation of an exponential function*

假设 $y > 0$, $x \in \mathbf{R}$, 和 $h(t) = e^{-2\pi y|t|}\,e^{2\pi ixt}$。为了求 h 的傅里叶变换，首先考虑由 $g(t) = e^{-2\pi y|t|}$ 定义的函数 g。根据 11.48(b) 和 11.55(c)，我们有

11.57
$$\widehat{g}(t) = \frac{1}{y}\,\frac{1}{\pi\Bigl(\bigl(\frac{t}{y}\bigr)^2+1\Bigr)} = \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{t^2+y^2}.$$

现在 11.55(b) 意味着

11.58
$$\widehat{h}(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{(t-x)^2+y^2};$$

请注意，x 是 h 定义中的常数，t 是其中的变量，但在 11.55(b) 中，x 是变量——这个变量顺序的略微调整是为了让稍后引用 11.58 时更加清晰。

接下来的结果将在本节后续部分中极为有用。

11.59 *integral of a function times a Fourier transform*

假设 $f, g \in L^1(\mathbf{R})$。然后

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\,g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\widehat{g}(t)\,dt.$$

证明 上述等式中的两个积分都是有意义的，因为 $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ 以及 $\widehat{f}$，$\widehat{g} \in L^\infty(\mathbf{R})$（根据 11.49)。利用傅里叶变换的定义，我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\,g(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-2\pi itx}\,dx\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-2\pi itx}\,dt\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx,\end{aligned}$$

其中托内利定理和富比尼定理证明了第二个等式。将最后一个表达式中的哑变量 x 改为 t 即得到所需结果。

R 上的卷积

我们的下一个重大目标是证明傅里叶反演公式。这个由傅里叶发现的非凡公式表明，如果 $f \in L^1(\mathbf{R})$ 且 $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$，那么

11.60 $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{2\pi i x t}\, dt$$

对于几乎所有的 $x \in \mathbf{R}$。我们最终将证明这一结果（见 11.76），但首先我们需要发展一些将在证明中使用的工具。为了引出这些工具，我们在固定 $x \in \mathbf{R}$ 的情况下考察上面等式的右边，并看看需要证明什么才能表明它等于 $f(x)$。

要从11.60的右侧得到一个涉及f而不是$\hat{f}$的表达式，我们可能会倾向于使用11.59。然而，我们不能使用11.59，因为函数$t \mapsto e^{2\pi i x t}$不在$L^1(\mathbf{R})$中，而这是11.59所需要的假设。因此，我们引入了一个方便的收敛因子，令$y >$为0，并考虑积分

11.61 $$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{-2\pi y|t|}\, e^{2\pi i x t}\, dt.$$

上述收敛因子是一个不错的选择，因为对于固定的 $y > 0$，函数 $t \mapsto e^{-2\pi y|t|}$ 位于 $L^1(\mathbf{R})$ 中，并且对于每个 $t \in \mathbf{R}$，$\lim_{y \downarrow 0} e^{-2\pi y|t|} = 1$（这意味着对于接近 0 的 y，11.61 可能是 11.60 的一个良好近似值）。

现在让我们保持严格。假设 $f \in L^1(\mathbf{R})$。固定 $y > 0$ 和 $x \in \mathbf{R}$。定义 $h : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$，定义为 $h(t) = e^{-2\pi y|t|} e^{2\pi i x t}$。然后 $h \in L^1(\mathbf{R})$ 和

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{-2\pi y|t|}\, e^{2\pi i x t}\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, h(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \hat{h}(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt, \qquad (11.62)
\end{aligned}$$

第二个等式来自于11.59，第三个等式来自于11.58。我们稍后会回到11.62中的具体公式，但现在我们将11.62作为研究形如$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\, \mathrm{d}t$的表达式的动机。因此，我们已经得出了以下定义。

11.63 定义 *convolution;* $f * g$

假设 $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 是可测函数。*convolution* 的 f 和 g 被表示为 $f * g$，并且是由以下定义的函数:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

对于那些$x \in \mathbf{R}$，使得上述积分有意义的。

这里我们使用与单位圆上函数卷积时相同的术语和符号。回想一下，如果 F、$G \in L^1(\partial\mathbf{D})$，那么

$$(F * G)(e^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{is})\, G(e^{i(\theta-s)})\, \frac{ds}{2\pi}$$

对于 $\theta \in \mathbf{R}$（见 11.36）。上下文应始终表明 $f * g$ 表示单位圆上的卷积还是实直线上的卷积。两种卷积概念在形式上的相似性使得许多证明可以在这两种语境之间相互转移。

如果 f，$g \in L^1(\mathbf{R})$，那么 $f * g$ 对几乎每个 $x \in \mathbf{R}$ 都有定义，而且此外 $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$（，正如你应当通过将 11.37 的证明翻译到 R) 的语境中来验证的那样。

如果 $p \in (1, \infty]$，那么 $L^1(\mathbf{R})$ 和 $L^p(\mathbf{R})$ 彼此都不是对方的子集（不同于包含关系 $L^p(\partial\mathbf{D}) \subseteq L^1(\partial\mathbf{D})$）。因此，我们尚不知道 $f * g$ 对于 $f \in L^1($ R) 和 $g \in L^p(\mathbf{R})$ 是否有意义。然而，下一个结果表明一切都是良好的。

If $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(\mathbf{R})$, and $g \in L^{p'}(\mathbf{R})$, then Hölder's inequality (7.9) and the translation invariance of Lebesgue measure imply $(f * g)(x)$ is defined for all $x \in \mathbf{R}$ and $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$ (more is true; with these hypotheses, $f * g$ is a uniformly continuous function on $\mathbf{R}$, as you are asked to show in Exercise 10).

11.64 L^p-norm of a convolution

假设 $1 \le p \le \infty$，$f \in L^1(\mathbf{R})$，和 $g \in L^p(\mathbf{R})$。则 $(f * g)(x)$ 对几乎每个 $x \in \mathbf{R}$ 都是定义的。

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

证明 首先考虑这样的情形：对几乎每个 $x \in \mathbf{R}$，$f(x) \ge 0$ 且 $g(x) \ge 0$。因此，对每个 $x \in \mathbf{R}$，$(f * g)(x)$ 都是有定义的，尽管其取值可能等于 ∞。将 11.38 的证明应用于 R 的情形，得到 $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$［这意味着对几乎每个 $x \in \mathbf{R}$，$(f * g)(x) < \infty$］。

现在考虑任意的 $f \in L^1(\mathbf{R})$，以及 $g \in L^p(\mathbf{R})$。将上一段的情形应用于 $|f|$ 和 $|g|$，即可得到所需的结论。 ■

接下来的证明，和本节中其他若干证明一样，要求读者将单位圆情境下的相应结果的证明迁移到实直线的情境中。这只需要对前两节之一中的某个证明做出一些细微的调整。学习这一材料的最佳方式，是在实直线的情境下亲自写出所需的证明。

11.65 convolution is commutative

假设 $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 是可测函数，并且 $x \in \mathbf{R}$ 使得 $(f * g)(x)$ 有定义。则 $(f * g)(x) = (g * f)(x)$。

证明 将 11.41 的证明调整为 R 的上下文。 ■

我们的下一个结果表明，傅里叶变换的乘法对应于相应函数的卷积。

11.66 *Fourier transform of a convolution*

假设$f, g \in L^1(\mathbf{R})$。那么

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}.$$

证明 将11.44的证明调整为R的上下文。

上半平面上的泊松核

如常，我们将 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{C}$ 视为等同，具体如以下定义所示。我们将看到，上半平面在 $\mathbf{R}$ 的上下文中发挥的作用，类似于开单位圆盘在 $\partial\mathbf{D}$ 上下文中所发挥的作用。

11.67 定义 $\mathbf{H}$*; upper half-plane*

- $\mathbf{H}$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 中的开上半平面：

$$\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

- $\partial\mathbf{H}$ 与实数直线等同：

$$\partial\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0\} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z = 0\} = \mathbf{R}.$$

回忆一下，我们在 $\partial\mathbf{D}$ 上定义了一族函数，称为 $\mathbf{D}$ 上的泊松核（见 11.14，其中该函数族之所以称为 $\mathbf{D}$ 上的泊松核，是因为 $0 \le r < 1$ 且 $\zeta \in \partial\mathbf{D}$ 蕴含 $r\zeta \in \mathbf{D}$）。现在我们已经准备好在 $\mathbf{R}$ 上定义一族函数，称为 $\mathbf{H}$ 上的泊松核［因为 $x \in \mathbf{R}$ 且 $y > 0$ 蕴含 $(x, y) \in \mathbf{H}$］。

下面的定义受 11.62 的启发。单位圆盘 $\mathbf{D}$ 上泊松核的记号 $\mathcal{P}_r$ 以及上半平面 $\mathbf{H}$ 上泊松核的记号 $\mathcal{P}_y$ 可能存在歧义（$\mathcal{P}_{1/2}$ 是什么？），但其预期含义应当始终可以从上下文中清楚地判断。

11.68 定义 $\mathcal{P}_y$*; Poisson kernel*

- 对于 $y > 0$，定义 $\mathcal{P}_y$：$\mathbf{R} \to (0, \infty)$ 为

$$\mathcal{P}_y(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

- $\{\mathcal{P}_y\}_{y>0}$ 函数族被称为上半平面 $\mathbf{H}$ 上的 *Poisson kernel*。

下面结果中列出的 H 上泊松核的性质应与 D 上泊松核的相应性质（见 11.16）进行比较。

11.69 *properties of* P_y

(a) $P_y(x) > 0$ 对所有 $y > 0$ 以及所有 $x \in \mathbf{R}$。

（b） $\int_{-\infty}^{\infty} P_y(x)\,dx = 1$，对于每个 $y > 0$。

(c) $\lim_{y\downarrow 0} \int_{\{x\in\mathbf{R}:|x|\geq\delta\}} P_y(x)\,dx = 0$ 对于每个 $\delta > 0$.

证明的(a)部分直接由11.68中给出的$P_y(x)$的定义得到。（b）和（c）部分通过对积分进行显式计算得到，利用如下结果：对每个$y > 0$，把$P_y(x)$ (视为x)的函数，其一个原函数是$\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{y}$。 – – ■

如果 $p \in \in [1, \infty]$ 且 $f \in L^p(\mathbf{R})$ 且 $y > 0$，那么 $f * P_y$ 是有意义的，因为 $P_y \in L^{p'}(\mathbf{R})$。因此下面的定义是有意义的。

11.70 定义 $\mathcal{P}_y f$

对于 $f \in L^p(\mathbf{R})$，对于某个 $p \in [1, \infty]$，并且对于 $y > 0$，定义 $\mathcal{P}_y f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 为

$$(\mathcal{P}_y f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,P_y(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt$$

对于 $x \in \mathbf{R}$。换句话说，$\mathcal{P}_y f = f * P_y$。

下一个结果类似于 11.18，只是现在我们需要在假设中加入我们的函数是一致连续且有界的（在单位圆的情形下，这些条件可由连续性自动推出）。

When Napoleon appointed Fourier to an administrative position in 1806, Siméon-Denis Poisson (1781–1840) was appointed to the professor position at École Polytechnique vacated by Fourier. Poisson published over 300 mathematical papers in his lifetime.

对于下述结果的证明，你应当使用 11.69 中的性质，而不是 11.16 中相应的性质。

11.71 *if f is uniformly continuous and bounded, then* 极限 $\lim_{y\downarrow 0}\|f - \mathcal{P}_y f\|_\infty = 0$

设 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 是一致连续且有界的。则当 $y \downarrow 0$ 时，$\mathcal{P}_y f$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛到 f。

证明 将11.18的证明调整到R的语境中。 ■

在下面的结果中定义的函数u称为f在H上的*Poisson integral*。

11.72 *Poisson integral is harmonic*

假设 $f \in L^p(\mathbf{R})$ 对于某些 $p \in [1, \infty]$。定义 $u : \mathrm{H} \to \mathbf{C}$ 如下

$$u(x, y) = (\mathcal{P}_y f)(x)$$

对于 $x \in \mathbf{R}$ 且 $y > 0$。则 u 在 H 上是调和的。

证明 我们假设 f 是实值的（否则将实值情况应用于 f 的实部和虚部）。对于 $x \in \mathbf{R}$ 和 $y > 0$，设 $z = x + iy$。然后

$$\frac{y}{(x-t)^2 + y^2} = -\operatorname{Im} \frac{1}{z-t}$$

对于 $t \in \mathbf{R}$。因此

$$u(x, y) = -\operatorname{Im} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{z-t}\, dt.$$

函数 $z \mapsto -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{z-t}\, \mathrm{d}t$ 在 H 上是解析的；它的导数是函数 $z \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{(z-t)^2}\, \mathrm{d}t$ (，对此声明的证明在下一段) 中。换句话说，我们可以在上面的表达式中对积分符号下的 z 进行求导。因为 u 是一个解析函数的虚部，u 在 H 上是调和的，如所期望的。

为了证明积分符号下的微分，固定 $z \in \mathrm{H}$ 并定义一个函数 $g : \mathrm{H} \to \mathbf{C}$，通过 $g(z) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{z-t}\, \mathrm{d}t$。

$$\frac{g(z) - g(w)}{z - w} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{(z-t)^2}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{z - w}{(z-t)^2 (w-t)}\, dt.$$

由于 $w \to z$，函数 $t \mapsto \frac{z-w}{(z-t)^2(w-t)}$ 在 $L^{p'}(\mathbf{R})$ 的范数中趋于 0。因此，霍尔德不等式 (7.9) 和上面的方程意味着 $g'(z)$ 存在，并且 $g'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{(z-t)^2}\, \mathrm{d}t$，如所愿。

我们现在已经解决了上半平面上的狄利克雷问题，针对 R 上一致连续且有界的函数（关于狄利克雷问题的陈述见 11.21）。

11.73 *Poisson integral solves Dirichlet problem on half-plane*

假设 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 是一致连续且有界的。定义 $u : \overline{\mathrm{H}} \to \mathbf{C}$ 为

$$u(x, y) = \begin{cases} (\mathcal{P}_y f)(x) & \text{if } x \in \mathbf{R} \text{ and } y > 0, \\ f(x) & \text{if } x \in \mathbf{R} \text{ and } y = 0. \end{cases}$$

于是 u 在 H 上连续，$u|_{\mathrm{H}}$ 是调和函数，并且 $u|_{\mathbf{R}} = f$。

证明 将 11.23 的证明调整到 R 的情形；现在需要使用 11.71 和 11.72 来代替关于单位圆的相应结果。

下一个结果表明，$L^p(\mathbf{R})$中函数的泊松积分在$L^p(\mathbf{R})$的范数下收敛，这将成为在本节后面证明傅里叶反演公式及其他结果的重要工具。

Poisson and Fourier are two of the 72 mathematicians/scientists whose names are prominently inscribed on the Eiffel Tower in Paris.

对于下面的结果，单位圆上的相应结果（11.42）的证明不能迁移到 R 的情形中（因为不等式 $\|\cdot\|_p \le \|\cdot\|_\infty$ 在 R 的情形中不成立）。

11.74 *if* $f \in L^p(\mathbf{R})$*, then* $\mathcal{P}_y f$ *converges to* f *in* $L^p(\mathbf{R})$

假设 $1 \le p < \infty$ 且$f \in L^p(\mathbf{R})$。则 $\lim\limits_{y \downarrow 0} \|f - \mathcal{P}_y f\|_p = 0$。

证明 如果 $y > 0$ 且 $x \in \mathbf{R}$, 则

$$\begin{aligned}
|f(x) - (\mathcal{P}_y f)(x)| &= \left| f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, P_y(t)\, dt \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(x) - f(x-t)\big)\, P_y(t)\, dt \right| \\
&\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-t)|^p\, P_y(t)\, dt \right)^{1/p}, \qquad \text{11.75}
\end{aligned}$$

其中不等式来自将 7.10 应用于测度 $P_y\, \mathrm{d}t$ (; 注意到相对于该测度，R 的测度为 1)。

定义 $h : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ 为

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-t)|^p\, dx.$$

那么，h 是一个有界函数，并且在 R 上一致连续［由第 7A 节练习 23(a)］。此外，$h(0) = 0$。

将11.75的两边提升到p^{th}次幂，然后关于x在R上积分，我们有

$$\begin{aligned}
\|f - \mathcal{P}_y f\|_p^p &\le \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-t)|^p\, P_y(t)\, dt\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_y(t) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-t)|^p\, dx\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P_y(-t)\, h(t)\, dt \\
&= (\mathcal{P}_y h)(0).
\end{aligned}$$

现在 11.71 意味着 $\lim\limits_{y \downarrow 0} (\mathcal{P}_y h)(0) = h(0) = 0$。因此，上面的最后一个不等式意味着 $\lim\limits_{y \downarrow 0} \|f - \mathcal{P}_y f\|_p = 0$。 ∎

傅里叶反演公式

现在我们可以证明卓越的傅里叶反演公式。

11.76 *Fourier Inversion Formula*

假设 $f \in L^1(\mathbf{R})$ 且 $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$。那么

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{2\pi ixt}\, dt$$

几乎每个 $x \in \mathbf{R}$. 换句话说,

$$f(x) = (\hat{f}\,)\hat{}\,(-x)$$

对于几乎所有的 $x \in \mathbf{R}$.

证明方程 11.62 表示

11.77 $$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{-2\pi y|t|}\, e^{2\pi ixt}\, dt = (\mathcal{P}_y f)(x)$$

对于每个$x \in \mathbf{R}$ 和每个$y > 0$。

因为$\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$，支配收敛定理（3.31）意味着对于每个 $x \in \mathbf{R}$，11.77 左边在 $y \downarrow 0$ 时的极限是 $(\hat{f}\,)\hat{}\,(-x)$。

因为$f \in L^1(\mathbf{R})$，11.74 表明 $\lim_{y\downarrow 0} \|f - \mathcal{P}_y f\|_1 = 0$。现在 7.23 表明存在一个正数序列 y_1，y_2，…，使得 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} (\mathcal{P}_{y_n} f)(x) = f(x)$ 对几乎每个 $x \in \mathbf{R}$ 成立。

结合前两段的结果和公式 11.77 可知，$f(x) = (\hat{f}\,)\hat{}\,(-x)$ 对于 R 中几乎每个 $x \in$ 成立。 ∎

在 $L^1(\mathbf{R})$ 中的函数的傅里叶变换是在 R 上的一致连续函数（由 11.49）。因此，傅里叶反演公式（11.76）表明，如果$f \in L^1(\mathbf{R})$ 且$\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$，那么$f$ 可以在一个测度为零的集合上加以修改，从而成为 R 上的一致连续函数。

现在，傅里叶反演公式使我们能够对每个 $y > 0$ 计算 P_y 的傅里叶变换。

11.78 示例 *Fourier transform of* P_y

假设 $y > 0$。定义 $f : \mathbf{R} \to (0, 1]$ 为

$$f(t) = e^{-2\pi y|t|}.$$

然后$\hat{f} = P_y$ 乘以 11.57。因此，f 和$\hat{f}$ 都在 $L^1(\mathbf{R})$ 中。由此我们可以应用傅里叶反演公式 (11.76))，得出结论

11.79 $$(P_y)\hat{}\,(x) = (\hat{f}\,)\hat{}\,(x) = f(-x) = e^{-2\pi y|x|}$$

对于几乎每个 $x \in \mathbf{R}$。这些函数的连续性（见 11.49）意味着上面的方程对于所有 $x \in \mathbf{R}$ 都成立。

现在我们可以证明由 $f \mapsto \hat{f}$ 定义的 $L^1(\mathrm{R})$ 上的映射是单射。

11.80 ***functions are determined by their Fourier transforms***

假设 $f \in L^1(\mathrm{R})$ 且对每个 $t \in \mathrm{R}$，$\hat{f}(t) = 0$。则 $f = 0$。

证明：因为 $\hat{f} = 0$，我们也有 $(\hat{f}\,)\hat{} = 0$。傅里叶反演公式（11.76）现在意味着 $f = 0$。

下一个结果可以直接利用卷积的定义以及 Tonelli/Fubini 定理来证明。然而，下面这个巧妙的证明也值得一看。

11.81 ***convolution is associative***

Suppose $f, g, h \in L^1(\mathbf{R})$. Then $(f * g) * h = f * (g * h)$.

证明 $(f * g) * h$ 的傅里叶变换以及 $f * (g * h)$ 的傅里叶变换都等于 $\hat{f}\hat{g}\hat{h}$ (，根据 11.66)。由于傅里叶变换在 $L^1(\mathrm{R})$ 上是一一映射 [见 11.80]，这意味着 $(f * g) * h = f * (g * h)$。

将傅里叶变换扩展到 $L^2(\mathrm{R})$

我们现在证明映射 $f \mapsto \hat{f}$ 保持 $L^2(\mathrm{R})$ 范数在 $L^1(\mathrm{R}) \cap L^2(\mathrm{R})$ 上不变。

11.82 ***Plancherel's Theorem: Fourier transform preserves*** $L^2(\mathrm{R})$ ***norms***

Suppose $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Then $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

证明首先考虑$\hat{f} \in L^1(\mathrm{R})$的情况，除此假设$f \in L^1(\mathrm{R}) \cap L^2(\mathrm{R})$。定义$g \colon \mathrm{R} \to \mathrm{C}$，按照$g(x) = \overline{f(-x)}$。然后对于所有$t \in \mathrm{R}$，$\hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$，这是容易验证的。现在

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{f(x)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\, \overline{f(-x)}\, dx$$

11.83
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}\,)\hat{}(x)\, g(x)\, dx$$

11.84
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\, \hat{g}(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\, \overline{\hat{f}(x)}\, dx$$

$$= \|\hat{f}\|_2^2,$$

其中 11.83 由傅里叶反演公式（11.76）成立，而 11.84 由 11.59 推出。上述方程表明，当 $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$ 时，我们所期望的结果成立。

现在考虑任意的 $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$。如果 $y > 0$，那么根据 11.64，有 $f * P_y \in L^1(\mathbf{R})$。如果 $x \in \mathbf{R}$，那么

$$(f * P_y)\hat{}\,(x) = \hat{f}(x)(P_y)\hat{}\,(x)$$

11.85
$$= \hat{f}(x)\, e^{-2\pi y|x|},$$

其中，上述第一个等式来自 11.66，第二个等式来自 11.79。上述等式表明 $(f * P_y)\hat{} \in L^1(\mathbf{R})$。因此我们可以将第一种情况应用于 $f * P_y$，从而得出结论：

$$\|f * P_y\|_2 = \|(f * P_y)\hat{}\,\|_2.$$

当 $y \downarrow 0$ 时，上述等式的左边收敛到 $\|f\|_2$［由 11.74］。当 $y \downarrow 0$ 时，上述等式的右边收敛到 $\|\hat{f}\|_2$［由 11.85 中给出的 $f * P_y$ 的显式公式以及单调收敛定理（3.11）］。因此，上述等式蕴含 $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$。

由于 $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中稠密，Plancherel 定理（11.82）使我们能够将映射 $f \mapsto \hat{f}$ 唯一地扩展为一个从 $L^2(\mathbf{R})$ 到 $L^2(\mathbf{R})$ 的有界线性映射 (参见第 6C 节的练习 14)。这种扩展称为 $L^2(\mathbf{R})$ 上的 *Fourier transform*；它有自己专用的记号，如下所示。

11.86 定义 *Fourier transform on* $L^2(\mathbf{R})$; $\mathcal{F}$

定义在 $L^2(\mathbf{R})$ 上的 *Fourier transform* $\mathcal{F}$ 是作用在 $L^2(\mathbf{R})$ 上的有界算子，使得对所有 $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$，都有 $\mathcal{F}f = \hat{f}$。

对于 $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$，我们可以使用 $\hat{f}$ 或 $\mathcal{F}f$ 来表示 f 的傅里叶变换。但如果 $f \in L^1(\mathbf{R}) \setminus L^2(\mathbf{R})$，我们将只使用记号 $\hat{f}$，而如果 $f \in L^2(\mathbf{R}) \setminus L^1(\mathbf{R})$，我们将只使用记号 $\mathcal{F}f$。

假设 $f \in L^2(\mathbf{R}) \setminus L^1(\mathbf{R})$ 且 $t \in \mathbf{R}$。不要犯这样的错误，认为 $(\mathcal{F}f)(t)$ 等于

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i t x}\, dx.$$

确实，上述积分没有意义，因为 $|f(x)\, e^{-2\pi i t x}| = |f(x)|$ 和 $f \notin L^1(\mathbf{R})$。与其通过上述方程来定义 $\mathcal{F}f$，不如将 $\mathcal{F}f$ 定义为在 $L^2(\mathbf{R})$ 中 $(f_1)\hat{}$、$(f_2)\hat{}$、... 的极限，其中 f_1、f_2、... 是 $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ 中的一个序列，使得

$$\|f - f_n\|_2 \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

例如，可以取 $f_n = f\chi_{[-n,n]}$，因为 $\|f - f\chi_{[-n,n]}\|_2 \to 0$ 作为 $n \to \infty$，根据支配收敛定理（3.31）。

由于 $\mathcal{F}$ 是通过在 $L^2(\mathbf{R})$ 的范数下连续地将傅里叶变换从 $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ 延拓到 $L^2(\mathbf{R})$ 得到的，我们知道对于所有 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 都有 $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$。换言之，$\mathcal{F}$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上是一个等距映射。下一个结果表明还有更强的结论成立。

11.87 ***properties of the Fourier transform on*** $L^2(\mathbf{R})$

(a) $\mathcal{F}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 上的一个酉算子。

(b) $\mathcal{F}^4 = I$。

(c) $\operatorname{sp}(\mathcal{F}) = \{1, i, -1, -i\}$.

证明 首先我们证明 (b)。设 $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$。如果 $y > 0$，则 $P_y \in L^1(\mathbf{R})$，因此由 11.64 可得

11.88
$$f * P_y \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}).$$

此外,

11.89
$$(f * P_y)\widehat{\ } \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}),$$

这可由方程 $(f * P_y)\widehat{\ } = \hat{f} \cdot (P_y)\widehat{\ }$ [见 11.66] 以及注意到 $\hat{f} \in L^\infty(\mathbf{R})$，$(P_y)\widehat{\ } \in L^1(\mathbf{R})$ [见 11.49 和 11.79]，以及注意到 $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$，$(P_y)\widehat{\ } \in L^\infty(\mathbf{R})$ [见 11.82 和 11.49] 得出。

现在，将傅里叶反演公式（11.76）应用于$f * P_y$ (，其有效性由11.88和11.89保证)，这意味着

$$\mathcal{F}^4(f * P_y) = f * P_y.$$

在 $L^2(\mathbf{R})$ 中，当 $y \downarrow 0$ 时对上式两边取极限，我们有 $\mathcal{F}^4 f = f$ (by 11.74)，从而完成 (b) 的证明。

Plancherel定理(11.82)告诉我们，$\mathcal{F}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 上的一个等距映射。部分(b)意味着 $\mathcal{F}$ 是满射。因为一个满射等距映射是酉映射（见 10.61），我们得出结论，$\mathcal{F}$ 是酉的，从而完成了(a)的证明。

谱映射定理［见 10.40——取 $p(z) = z^4$］以及 (b) 表明，对于每个 $\alpha \in \operatorname{sp}(\mathcal{F})$，都有 $\alpha^4 = 1$。换言之，$\operatorname{sp}(\mathcal{F}) \subseteq \{1, i, -1, -i\}$。然而，1，$i$，$-1$，$-i$ 都是 $\mathcal{F}$ (的特征值（见例 11.51 以及习题 2、3 和 4)），因此它们都在 $\operatorname{sp}(\mathcal{F})$ 中。于是 $\operatorname{sp}(\mathcal{F}) = \{1, i, -1, -i\}$，从而完成了 (c) 的证明。 ■

练习 11C

1 假设 $f \in L^1(\mathbf{R})$。证明 $\|\hat{f}\|_\infty = \|f\|_1$ 当且仅当存在 $\zeta \in \partial\mathbf{D}$ 和 $t \in \mathbf{R}$，使得 $\zeta f(x) e^{-itx} \geq 0$ 对几乎每个 $x \in \mathbf{R}$。

假设 $f(x) = xe^{-\pi x^2}$ 对所有 $x \in \mathbf{R}$ 成立。证明 $\hat{f} = -if$。

3 假设 $f(x) = 4\pi x^2 e^{-\pi x^2} - e^{-\pi x^2}$ 对所有 $x \in \mathbf{R}$ 成立。证明 $\hat{f} = -f$。

4 求 $f \in L^1(\mathbf{R})$，使得 $f \neq 0$ 且 $\hat{f} = if$。

5 证明：若 p 是定义在 R 上、具有复系数的多项式，并且 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 由 $f(x) = p(x)\,e^{-\pi x^2}$ 定义，则存在一个定义在 R 上、具有复系数的多项式 q，使得 $\deg q = \deg p$，并且对所有 $t \in \mathbf{R}$ 都有 $\hat{f}(t) = q(t)\,e^{-\pi t^2}$。

6 假设

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-2\pi x} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$

证明对于所有 $t \in \mathbf{R}$，有 $\hat{f}(t) = \frac{1}{4\pi^2(1+it)^2}$。

7 证明 11.55 中关于平移、旋转和伸缩的傅里叶变换公式。

8 设 $f \in L^1(\mathbf{R})$ 且 $n \in \mathbf{Z}^+$。定义 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 为 $g(x) = x^n f(x)$。证明如果 $g \in L^1(\mathbf{R})$，那么 $\hat{f}$ 在 R 上是 n 次连续可微的，并且

$$(\hat{f})^{(n)}(t) = (-2\pi i)^n\,\hat{g}(t)$$

对于所有 $t \in \mathbf{R}$。

9 假设 $n \in \mathbf{Z}^+$ 且 $f \in L^1(\mathbf{R})$ 是 n 次连续可微的，并且对于 $k = 1, \ldots, n$ 有 $f^{(k)} \in L^1(\mathbf{R})$。证明如果 $t \in \mathbf{R}$，则

$$\widehat{f^{(n)}}(t) = (2\pi i t)^n\,\hat{f}(t).$$

10 设 $1 \leq p \leq \infty$，$f \in L^p(\mathbf{R})$，且 $g \in L^{p'}(\mathbf{R})$。证明 $f * g$ 是 R 上的一致连续函数。

11 设 $f \in L^\infty(\mathbf{R})$，$x \in \mathbf{R}$，且 f 在 x 处连续。证明：

$$\lim_{y \downarrow 0} (\mathcal{P}_y f)(x) = f(x).$$

12 假设 $p \in [1, \infty]$ 且 $f \in L^p(\mathbf{R})$。证明对所有 y，$y' > 0$，$\mathcal{P}_y(\mathcal{P}_{y'} f) = \mathcal{P}_{y+y'} f$。

13 假设 $p \in [1, \infty]$ 且 $f \in L^p(\mathbf{R})$。证明如果 $0 < y < y'$，则

$$\|\mathcal{P}_y f\|_p \geq \|\mathcal{P}_{y'} f\|_p.$$

14 假设 $f \in L^1(\mathbf{R})$。

（a）证明 $\overline{\hat{f}(t)} = \hat{\bar{f}}(-t)$ 对所有 $t \in \mathbf{R}$ 成立。

(b) 证明 $f(x) \in \mathbf{R}$ 对几乎每个 $x \in \mathbf{R}$ 当且仅当 $\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$ 对所有 $t \in \mathbf{R}$。

15 由 $f(x) = e^{-x^4}\chi_{[0,\infty)}(x)$ 定义 $f \in L^1(\mathbf{R})$。证明 $\hat{f} \notin L^1(\mathbf{R})$。

16 假设 $f \in L^1(\mathbf{R})$ 且 $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$。证明 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 且 $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$。

17 证明存在一个连续函数 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得 $\lim_{t\to\pm\infty} g(t) = 0$ 且 $g \notin \{\hat{f} :$
$f \in L^1(\mathbf{R})\}$。

18 证明若 $f \in L^1(\mathbf{R})$，则 $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$。

[*This exercise slightly improves Plancherel's Theorem* (*11.82*) *because here we have the weaker hypothesis that* $f \in L^1(\mathbf{R})$ *instead of* $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. *Because of Plancherel's Theorem, here you need only prove that if* $f \in L^1(\mathbf{R})$ *and* $\|f\|_2 = \infty$, *then* $\|\hat{f}\|_2 = \infty$.]

19 假设 $y > 0$。通过 $Tf = f * P_y$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上定义算子 T。

(a) 证明 T 是 $L^2(\mathbf{R})$ 上的自伴算子。(b) 证明 sp(
T) = [0, 1].

[*Because the spectrum of each compact operator is a countable set* (*by 10.93*), *part* (*b*) *above implies that* T *is not a compact operator. This conclusion differs from the situation on the unit circle—see Exercise 9 in Section 11B.*]

证明如果 $f \in L^1(\mathbf{R})$ 且 $g \in L^2(\mathbf{R})$，则 $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\,\mathcal{F}g$。

21 证明如果 f，$g \in L^2(\mathbf{R})$，则 $\widehat{fg} = (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)$。

Chapter 12
Probability Measures

概率论在科学的多个领域变得越来越重要。深入学习概率论需要一本完整的书，而不仅仅是一个章节。对于打算进一步学习概率论的读者，本章节为您提供了一个良好的起点。对于不打算深入研究概率论的读者，本章节为您提供了该主题的一个简要概览。

现代概率论大量使用测度理论。正如我们将看到的，概率测度只是一个测度，使得整个空间的测度等于1。因此，深入理解本书中涉及测度理论和积分的章节，为概率论提供了坚实的基础。

然而，概率论不仅仅是测度论的特例，其中整个空间的测度为1。概率论研究的问题与测度论自然研究的问题不同。例如，本章中引入的独立集和独立随机变量的概率概念，在测度论中并不存在。

即使概率论中的概念与测度论中的已知概念具有相同的含义，术语和符号也可能大不相同。因此，本章的一个目标是介绍概率论的词汇。概率论和测度论之间词汇的差异，源于这两个学科的历史发展不同，它们直到20世纪上半叶才结合起来。

Dice used in games of chance. The beginning of probability theory can be traced to correspondence in 1654 between Pierre de Fermat (1601–1665) and Blaise Pascal (1623–1662) about how to distribute fairly money bet on an unfinished game of dice.

概率空间

我们从一个直观且不严格的动机开始。假设我们从区间 (0, 1) 中随机选择一个实数，每个实数被选中的概率相等（无论这是什么意思）。被选中的数字位于区间 $(\frac{9}{10}, 1)$ 中的概率是多少？这个问题的唯一合理答案是 $\frac{1}{10}$。更一般地，如果 $I_1, I_2, \ldots$ 是包含在 (0, 1) 中的不相交开区间序列，那么我们随机选择的实数位于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ 中的概率应该是 $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$，其中 $\ell(I)$ 表示区间 I 的长度。更一般地，如果 A 是 (0, 1) 的一个 Bore 列集，那么我们随机选择的数字位于 A 中的概率应该是 A 的勒贝格测度。

以上一段作为动机，我们现在已经准备好定义一个概率测度。我们将采用概率论中常用的记号和术语，而不是测度论的惯例。

特别地，一切发生的集合现在称为 Ω，而不是测度论中通常使用的 X。Ω 上的 σ-代数现在称为 $\mathcal{F}$，而不是我们在前几章中使用的 $\mathcal{S}$。我们的测度现在称为 P，而不是 μ。这种新的记号和术语在初次接触时可能会令人困惑。然而，阅读本章应能帮助你熟悉这些记号和术语，它们是概率论中的标准用法。

12.1 De 完成 *probability measure; sample space; event; probabilit y space*

假设 $\mathcal{F}$ 是集合 Ω 上的 σ 代数。

- 一个 *probability measure* 在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是一个度量 P 在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 使得 $P(\Omega) = 1$。
- Ω 被称为 *sample space*。
- 一个*event*是$\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$的一个元素，如果从上下文)可以清楚地看出，则无需提及。
- 如果 A 是一个事件，那么 $P(A)$ 被称为 A 的 *probability*。
- 如果P是在（$\Omega, \mathcal{F}$）上的一个概率测度，那么三元组（$\Omega, \mathcal{F}, P$）称为一个*probability space*。

12.2 示例 *probability measures*

- 假设 $n \in \mathbf{Z}^+$，且 Ω 是一个恰含 n 个元素的样本空间。令 $\mathcal{F}$ 表示 Ω 的所有子集的集合。那么

$$\frac{\text{counting measure on } \Omega}{n}$$

是定义在$(\Omega, \mathcal{F})$上的概率测度。

- 作为前一项的一个更具体的例子，假设 $\Omega = \{40, 41, \ldots, 49\}$ 且 $P = (\text{在 } \Omega)/10$ 上的计数测度。令 $A = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ 为偶数}\}$ 且 $B = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ 是素数}\}$。然后 $P(A)$［即该样本空间 Ω 中元素为偶数的概率］是 $\frac{1}{2}$，并且 $P(B)$［即该样本空间 Ω 中元素为素数的概率］是 $\frac{3}{10}$。

This example illustrates the common practice in probability theory of using lower case ω to denote a typical element of upper case Ω.

- 令 λ 表示区间 $[0, 1]$ 上的勒贝格测度。则 λ 是定义在 $([0, 1], \mathcal{B})$ 上的概率测度，其中 $\mathcal{B}$ 表示 $[0, 1]$ 的 Borel 子集的 σ-代数。
- 设 λ 表示 R 上的勒贝格测度，设 $\mathcal{B}$ 表示 R 的 Borel 子集的 σ-代数。定义 $h : \mathbf{R} \to (0, \infty)$，由 $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ 给出。则 $h\, d\lambda$ 是 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的一个概率测度［关于 $h\, d\lambda$ 的定义，见 9.6］。

在测度论中，我们使用记号 χ_A 来表示集合 A 的特征函数。在概率论中，这个函数有不同的名称和不同的记号，正如我们在下一个定义中所看到的。

12.3 定义 *indicator function;* 1_A

如果 Ω 是一个样本空间且 $A \subseteq \Omega$，那么 A 的 *indicator function* 是函数 $1_A : \Omega \to \mathbf{R}$，定义为

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in A, \\ 0 & \text{if } \omega \notin A. \end{cases}$$

下面的定义给出了概率论中对测度论中短语 *almost every* 的替代。

12.4 定义 *almost surely*

假设（Ω，$\mathcal{F}$，P）是一个概率空间。称事件 A 以 *almost surely* 发生，当且仅当 A 的概率为 1，或者等价地，当 $P(\Omega \setminus A) = 0$。

12.5 示例 *almost surely*

令 P 表示区间 $[0, 1]$ 上的勒贝格测度。如果 $\omega \in$ 在 $[0, 1]$，则 ω 几乎必然是一个无理数（因为有理数集合的勒贝格测度为 0）。

这个例子表明，某个事件的概率为 1（等价于几乎必然发生）并不意味着该事件一定会发生。相反，某个事件的概率为 0 并不意味着该事件是不可能的。具体来说，如果使用勒贝格测度作为概率，从区间 $[0, 1]$ 中随机选择一个实数，那么该数是有理数的概率为 0，但这个事件仍然可能发生。

下面的结果在概率论中经常非常有用。认真阅读这一结果的证明——作为本章中的第一个证明——应当能让你很好地练习使用概率论中常用的一些符号和术语。这个证明还说明了这样一个观点：对测度论和积分有良好的理解在概率论中往往会极其有用——这里我们使用了单调收敛定理。

12.6 *Borel–Cantelli Lemma*

设（$\Omega, \mathcal{F}, P$）是一个概率空间，且 $A_1, A_2, \ldots$ 是一列事件，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$。则

$$P(\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ for infinitely many } n \in \mathbf{Z}^+\}) = 0.$$

证明 设 $A = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ 对于无穷多个 $n \in \mathbf{Z}^+\}$. 则

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n.$$

因此 $A \in \mathcal{F}$，从而 $P(A)$ 是有意义的。

单调收敛定理（3.11）意味着

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}\Bigr)\, dP = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega 1_{A_n}\, dP = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$ 几乎必定是有限的。因此 $P(A) = 0$. ■

独立事件与独立随机变量

独立事件的概念，我们现在定义，是区分概率论和测度论的关键概念之一。

12.7 定义 *independent events*

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间。

- 如果……，则称两个事件 A 和 B 为 *independent*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

- 更一般地，一个事件族 $\{A_k\}_{k\in\Gamma}$ 称为 *independent*，如果

$$P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_n}) = P(A_{k_1}) \cdots P(A_{k_n})$$

当 $k_1, \cdots, k_n$ 是 Γ 的不同元素时。

接下来的两个例子将有助于培养你对独立事件的直觉。

12.8 示例 *independent events: coin tossing*

设 $\Omega = \{H, T\}^4$，其中 H 和 T 是符号，可以将其视为表示“正面”和“反面”。因此，Ω 的元素是如下形式的四元组

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4),$$

其中每个 ω_j 是 H 或 T。令 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的所有子集的集合，并令 $P = ($ 为 $\Omega)/16$ 上的计数测度，正如我们从一次公平的抛硬币中所期望的那样。令

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = H\} \quad \text{and} \quad B = \{\omega \in \Omega : \omega_4 = H\}.$$

然后，A 包含两个元素，因此 $P(A) = \frac{1}{8}$，对应于前三次掷硬币全部为正面的概率 $\frac{1}{8}$。此外，B 包含八个元素，因此 $P(B) = \frac{1}{2}$，对应于第四次掷硬币为正面的概率 $\frac{1}{2}$。

现在

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{16} = P(A) \cdot P(B),$$

其中，第一个等式成立是因为 $A \cap B$ 只包含一个元素（H，H，H，H），而第二个等式成立是因为 $P(A) = \frac{1}{8}$ 和 $P(B) = \frac{1}{2}$。上述等式表明 A 和 B 是相互独立的事件。

如果我们多次抛一枚公平的硬币，我们期望大约有一半的次数是正面。因此，有些人错误地认为，如果一枚公平硬币的前三次抛掷都是正面，那么第四次抛掷出现反面的概率应该更高，以平衡之前的正面。然而，硬币并不能记住它已经连续出现了三次正面，因此无论前三次抛掷的结果如何，第四次抛掷出现正面的概率都是 $\frac{1}{2}$。上述事件 A 和 B 的独立性体现了这样一个概念：公平硬币一次抛掷的结果不依赖于之前的结果。

12.9 示例 *independent events: product probability space*

设 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ 和 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 是概率空间。则

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2),$$

如第5章所定义的，也是一个概率空间。

如果 $A \in \mathcal{F}_1$ 且 $B \in \mathcal{F}_2$，则（$A \times \Omega_2$）$\cap (\Omega_1 \times B) = A \times B$。因此

$$\begin{aligned}
(P_1 \times P_2)\big((A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B)\big) &= (P_1 \times P_2)(A \times B) \\
&= P_1(A) \cdot P_2(B) \\
&= (P_1 \times P_2)(A \times \Omega_2) \cdot (P_1 \times P_2)(\Omega_1 \times B),
\end{aligned}$$

其中，第二个等式源自乘积测度的定义，而第三个等式成立是由于乘积测度的定义以及因为P_1和P_2是概率测度。

上述方程表明事件 $A \times \Omega_2$ 和 $\Omega_1 \times B$ 在 $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ 中是相互独立的事件。

将下一个结果与 Borel–Cantelli 引理（12.6）进行比较。

12.10 *relative of Borel–Cantelli Lemma*

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，且 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 是一个独立事件族，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$。则

$$P(\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ for infinitely many } n \in \mathbf{Z}^+\}) = 1.$$

证明 设 $A = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ 对于无穷多个 $n \in \mathrm{Z}^+\}$。则

12.11 $$\Omega \setminus A = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (\Omega \setminus A_n).$$

如果m，$M \in \mathrm{Z}^+$ 满足$m \le M$，那么

$$P\Big(\bigcap_{n=m}^{M} (\Omega \setminus A_n)\Big) = \prod_{n=m}^{M} P(\Omega \setminus A_n)$$

$$= \prod_{n=m}^{M} (1 - P(A_n))$$

12.12 $$\le e^{-\sum_{n=m}^{M} P(A_n)},$$

其中第一行成立是因为族 $\{\Omega \setminus A_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 是线性无关的（见练习 4），而第三行成立是因为对所有 $t \ge 0$，$1 - t \le e^{-t}$。

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$，通过选择 M 足够大，我们可以使12.12的右侧尽可能接近0。因此

$$P\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty} (\Omega \setminus A_n)\Big) = 0$$

对于所有 $m \in \mathrm{Z}^+$。现在 12.11 蕴含 $P(\Omega \setminus A) = 0$。因此我们得出 $P(A) = 1$，如所需。 ■

在本章剩余部分，假设 F = R。因此，例如，如果 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，则 $\mathcal{L}^1(P)$ 总是指 ***real-valued*** $\mathcal{F}$-可测函数在 Ω 上的向量空间，使得 $\int_\Omega |f|\, dP < \infty$。

12.13 定义 *random variable; expectation;* EX

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间。

- A *random variable* 在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是来自 Ω 的可测函数 到 R。
- 如果 $X \in \mathcal{L}^1(P)$，则 *expectation* (有时被称为随机变量 X 的 *expected value*)，记作 EX，并定义为

$$EX = \int_\Omega X\, dP.$$

如果 $\mathcal{F}$ 从上下文中是清楚的，则可以使用短语“Ω 上的随机变量”来代替更精确的短语“$(\Omega, \mathcal{F})$ 上的随机变量”。如果 Ω 和 $\mathcal{F}$ 都从上下文中是清楚的，那么短语“随机变量”就没有歧义，并且经常被使用。

因为 $P(\Omega) = 1$，随机变量 $X \in \mathcal{L}^1(P)$ 的期望 EX 可以被视为 X 的 *average* 或 *mean value*。

下面的定义说明了概率论中常用的一种约定：在描述事件时，变量常常被省略。因此，例如，$\{X \in U\}$ 意味着 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in U\}$，其中 U 是 R 的一个子集。此外，概率论学者有时也会省略集合括号，正如我们在 12.15 的第二个要点中所做的那样，用 $P(X = 3)$ 来代替 $P(\{X = 3\})$。

12.14 定义 *independent random variables*

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间。

- 若对于 R 中所有的 Borel 集 U、V，事件 $\{X \in U\}$ 和 $\{Y \in V\}$ 相互独立，则称随机变量 X 和 Y 为 *independent*。
- 更一般地说，一族随机变量 $\{X_k\}_{k\in\Gamma}$ 称为 *independent*，如果对于 R 中所有的 Borel 集族 $\{U_k\}_{k\in\Gamma}$，$\{X_k \in U_k\}_{k\in\Gamma}$ 是独立的。

12.15 示例 *independent random variables*

- 设（Ω，$\mathcal{F}$，P）是一个概率空间，并且 A，$B \in \mathcal{F}$。那么，当且仅当 A 和 B 是相互独立的事件时，1_A 和 1_B 是相互独立的随机变量，这一点你应当自行验证。
- 设 $\Omega = \{H, T\}^4$ 是四次抛硬币的样本空间，其中 $\mathcal{F}$ 和 P 如例 12.8 所示。定义随机变量 X 和 Y 为
$$X(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \text{number of } \omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ that equal } H$$
和
$$Y(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \text{number of } \omega_3, \omega_4 \text{ that equal } H.$$
那么 X 和 Y 不是独立随机变量，因为 $P(X = 3) = \frac{1}{8}$ 并且 $P(Y = 0) = \frac{1}{4}$，但是 $P(\{X = 3\} \cap \{Y = 0\}) = P(\varnothing) = 0 \neq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$。
- 设（$\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1$）和（$\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2$）是概率空间，$Z_1$ 是 Ω_1 上的随机变量，且 Z_2 是 Ω_2 上的随机变量。定义 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上的随机变量 X 和 Y 如下：
$$X(\omega_1, \omega_2) = Z_1(\omega_1) \quad \text{and} \quad Y(\omega_1, \omega_2) = Z_2(\omega_2).$$
那么，X 和 Y 是 $\Omega_1 \times \Omega_2$ (上关于概率测度 $P_1 \times P_2$) 的相互独立的随机变量，这一点你应当加以验证。

如果 X 是一个随机变量，且 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是 Borel 可测的，那么 $f \circ X$ 是一个随机变量（由 2.44）。例如，如果 X 是一个随机变量，那么 X^2 和 e^X 也是随机变量。下一个结果表明，复合保持独立性。

12.16 *functions of independent random variables are independent*

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，X 和 Y 是独立的随机变量，且 $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是 Borel 可测的。那么 $f \circ X$ 和 $g \circ Y$ 是独立的随机变量。

证明 假设 U，V 是 $\mathbf{R}$ 的 Bore 基子集。那么

$$\begin{aligned} P\big(\{f \circ X \in U\} \cap \{g \circ Y \in V\}\big) &= P\big(\{X \in f^{-1}(U)\} \cap \{Y \in g^{-1}(V)\}\big) \\ &= P\big(X \in f^{-1}(U)\big) \cdot P\big(Y \in g^{-1}(V)\big) \\ &= P(f \circ X \in U) \cdot P(g \circ Y \in V), \end{aligned}$$

其中第二个等式成立是因为X和Y是相互独立的随机变量。上述等式表明$f \circ X$和$g \circ Y$是相互独立的随机变量。

如果 X，$Y \in \mathcal{L}^1(P)$，那么显然 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$。下一个结果给出了当 X 和 Y 相互独立时，XY 的期望值的一个漂亮公式。这个公式有时被称为微积分学生的梦幻方程。

12.17 *expectation of product of independent random variables*

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，X 和 Y 是 $\mathcal{L}^2(P)$ 中的独立随机变量。那么

$$E(XY) = EX \cdot EY.$$

证明 首先考虑 X 和 Y 均为简单函数且只取有限多个值的情形。因此，存在互不相同的数 $a_1, \dots, a_M \in$ 属于 $\mathbf{R}$，以及互不相同的数 $b_1, \dots, b_N \in$ 属于 $\mathbf{R}$，使得

$X = a_1 1_{\{X=a_1\}} + \cdots + a_M 1_{\{X=a_M\}}$ 和 $Y = b_1 1_{\{Y=b_1\}} + \cdots + b_N 1_{\{Y=b_N\}}$。现在

$$XY = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_j b_k 1_{\{X=a_j\}} 1_{\{Y=b_k\}} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_j b_k 1_{\{X=a_j\} \cap \{Y=b_k\}}.$$

因此

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} a_j b_k P\big(\{X = a_j\} \cap \{Y = b_k\}\big) \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{M} a_j P(X = a_j)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{N} b_k P(Y = b_k)\Big) \\ &= EX \cdot EY, \end{aligned}$$

其中，上面的第二个等式源于 X 与 Y 的独立性。最后一个等式在 X 和 Y 为简单函数的情况下给出了所需的结论。

现在考虑 $\mathcal{L}^2(P)$ 中任意的相互独立的随机变量 X 和 Y。设 $f_1, f_2, \ldots$ 为一列从 R 到 R 的 Borel 可测的简单函数，它们在 R 上逼近恒等函数（函数 $t \mapsto t$），其意义在于：$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = t$ 对每个 $t \in \mathbf{R}$，且 $|f_n(t)| \le |t|$ 对所有 $t \in \mathbf{R}$ 以及所有 $n \in \mathbf{Z}^+$ (（见 2.89），在构造该序列时取 f 为恒等函数)。随机变量 $f_n \circ X$ 和 $f_n \circ Y$ 是相互独立的（由 12.16）。因此，本证明第一段中的结果表明

$$E\big((f_n \circ X)(f_n \circ Y)\big) = E(f_n \circ X) \cdot E(f_n \circ Y)$$

对于每个 $n \in \mathbf{Z}^+$。上述方程右侧的极限当 $n \to \infty$ 时等于 $EX \cdot EY$ [根据支配收敛定理 (3.31)]。上述方程左侧的极限当 $n \to \infty$ 时等于 $E(XY)$ [使用 Hölder 不等式 (7.9)]。因此，上述方程意味着 $E(XY) = EX \cdot EY$。 ■

方差和标准差

随机变量的方差和标准差（如下定义）用于衡量随机变量相对于其期望的偏离程度。

12.18 定义 ***variance; standard deviation;*** $\sigma(X)$

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，且 $X \in \mathcal{L}^2(P)$ 是一个随机变量。

- *X*的*variance*被定义为$E\big((X - EX)^2\big)$。
- *standard deviation* 的 X 表示为 $\sigma(X)$ 并定义为

$$\sigma(X) = \sqrt{E\big((X - EX)^2\big)}.$$

换句话说，X 的标准差是 X 方差的平方根。

符号$\sigma^2(X)$表示$\big(\sigma(X)\big)^2$。因此，$\sigma^2(X)$是X的方差。

12.19 示例 *variance and standard deviation of an indicator function*

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，$A \in \mathcal{F}$ 是一个事件。则

$$\begin{aligned}
\sigma^2(1_A) &= E\big((1_A - E1_A)^2\big)\\
&= E\big((1_A - P(A))^2\big)\\
&= E\Big(1_A - 2P(A) \cdot 1_A + \big(P(A)\big)^2\Big)\\
&= P(A) - 2\big(P(A)\big)^2 + \big(P(A)\big)^2\\
&= P(A) \cdot \big(1 - P(A)\big).
\end{aligned}$$

因此 $\sigma(1_A) = \sqrt{P(A) \cdot \big(1 - P(A)\big)}$。

下一个结果给出了随机变量方差的公式。这个公式通常比定义方差的公式更方便使用。

12.20 *variance formula*

假设（Ω，$\mathcal{F}$，P）是一个概率空间，且 $X \in \mathcal{L}^2(P)$ 是一个随机变量。那么

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - (EX)^2.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= E\big((X - EX)^2\big)\\ &= E\big(X^2 - 2(EX)X + (EX)^2\big)\\ &= E(X^2) - 2(EX)^2 + (EX)^2\\ &= E(X^2) - (EX)^2,\end{aligned}$$

如所愿。 ■

我们的下一个结果称为切比雪夫不等式。它例如表明（取下面的 $t = 2$），随机变量 X 偏离其平均值超过其标准差的两倍的概率至多为 $\frac{1}{4}$。注意，$P\big(|X - EX| \geq t\sigma(X)\big)$ 是 $P\big(\{\omega \in \Omega$ 的简写：$|X(\omega) - EX| \geq t\sigma(X)\}\big)$。

12.21 *Chebyshev's inequality*

设（$\Omega, \mathcal{F}, P$）是一个概率空间，且 $X \in \mathcal{L}^2(P)$ 是一个满足 $\sigma(X)$ >=0 的随机变量。则

$$P\big(|X - EX| \geq t\sigma(X)\big) \leq \frac{1}{t^2}$$

对于所有 $t > 0$。

证明 假设 $t > 0$. 然后

$$\begin{aligned}P\big(|X - EX| \geq t\sigma(X)\big) &= P\big(|X - EX|^2 \geq t^2\sigma^2(X)\big)\\ &\leq \frac{1}{t^2\sigma^2(X)} E\big((X - EX)^2\big)\\ &= \frac{1}{t^2},\end{aligned}$$

翻译文本： 上述第二行来源于应用马尔可夫不等式(4.1) 与 $h = |X - EX|^2$ 和 $c = t^2\sigma^2(X)$。 ■

下一个结果给出了独立随机变量之和的方差的一个优美公式。

12.22 *variance of sum of independent random variables*

设（Ω，$\mathcal{F}$，P）是一个概率空间，且 $X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{L}^2(P)$ 是相互独立的随机变量。则

$$\sigma^2(X_1 + \cdots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \cdots + \sigma^2(X_n).$$

证明 使用12.20给出的方差公式，我们有

$$\begin{aligned}
\sigma^2\Big(\sum_{k=1}^n X_k\Big) &= E\Big(\big(\sum_{k=1}^n X_k\big)^2\Big) - \Big(E\big(\sum_{k=1}^n X_k\big)\Big)^2 \\
&= E\Big(\sum_{k=1}^n X_k{}^2\Big) + 2E\Big(\sum_{1\le j<k\le n} X_j X_k\Big) - \Big(\sum_{k=1}^n EX_k\Big)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n E(X_k^2) - \sum_{k=1}^n (EX_k)^2 + 2\Big(\sum_{1\le j<k\le n} E(X_j X_k)\Big) - 2\Big(\sum_{1\le j<k\le n} EX_j \cdot EX_k\Big) \\
&= \sum_{k=1}^n \sigma^2(X_k),
\end{aligned}$$

其中最后的等式使用了12.20、12.17，以及假设X_1、...、X_n是独立的随机变量。

条件概率与贝叶斯定理

条件概率 $P_B(A)$ 我们即将定义的应解释为在 $\omega \in B$ 给定的条件下，ω 会出现在 A 的概率。因为 ω 在 $A \cap B$ 中当且仅当 $\omega \in B$ 和 $\omega \in A$，并且由于我们期望概率相乘，因此合理的预期是

$$P(B) \cdot P_B(A) = P(A \cap B).$$

因此，我们得出以下定义。

12.23 定义 *conditional probability;* P_B

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，且 B 是一个事件，满足 $P(B) > 0$。定义 $P_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$，由

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

如果∈$A\mathcal{F}$然后 $P_B(A)$ 被称为 *conditional probability* 的 A given B。

你应该验证，像上面那样，B 使得 P_B 是在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度。如果 $A \in \mathcal{F}$，那么当且仅当 A 和 B 是独立事件时，$P_B(A) = P(A)$。

我们现在介绍所谓的贝叶斯定理的两个版本。你应该进行一次网络搜索，阅读并了解这些结果的诸多用途，其中包括一些有争议的应用。

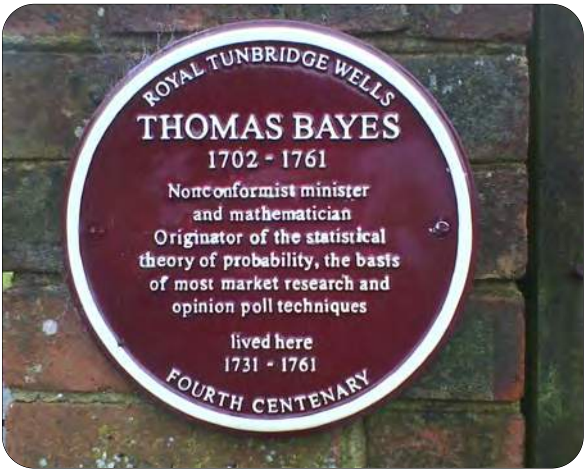
12.24 *Bayes' Theorem, first version*

假设（$\Omega, \mathcal{F}, P$）是一个概率空间，且 A、B 是具有正概率的事件。则

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

证明 我们有

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) \cdot P(A)}{P(A) \cdot P(B)} = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)}.$$



Plaque honoring Thomas Bayes in Tunbridge Wells, England.

12.25 *Bayes' Theorem, second version*

假设 ($\Omega, \mathcal{F}, P$) 是一个概率空间，B 是一个具有正概率的事件，并且 $A_1, \ldots, A_n$ 是两两不相交的事件，每个事件都具有正概率，且满足 $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$。则

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \cdot P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)}$$

对于每个 $k \in \{1, \cdots, n\}$。

证明 考虑上述表达式的分母。我们有

12.26 $$\sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = P(B).$$

现在假设 $k \in \{1, \ldots, n\}$. 那么

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \frac{P_{A_k}(B) \cdot P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)},$$

其中，第一个等式来自贝叶斯定理的第一种形式（12.24），第二个等式来自式（12.26）。

随机变量的分布函数和密度函数

在本章的其余部分，令 $\mathcal{B}$ 表示 R 的 Borel 子集的 σ-代数。每个随机变量 X 决定了 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的一个概率测度 P_X 和一个函数 $\tilde{X} : \mathbf{R} \to [0, 1]$，如下面的定义所示。

12.27 定义 ***probability distribution; P_X; distribution function; $\tilde{X}$***

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，X 是一个随机变量。

- *probability distribution* 的 X 是在 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上由以下公式定义的概率测度 P_X：
$$P_X(B) = P(X \in B) = P\big(X^{-1}(B)\big).$$
- *distribution function* 的 X 是函数 $\tilde{X} : \mathbf{R} \to [0, 1]$ 定义为
$$\tilde{X}(s) = P_X\big((-\infty, s]\big) = P(X \leq s).$$

你应该验证上述定义的概率分布 P_X 确实是在 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的一个概率测度。注意，分布函数 $\tilde{X}$ 依赖于概率测度 P 以及随机变量 X，尽管 P 未包含在记号 $\tilde{X}$ (中，因为 P 通常从上下文中是清楚的)。

12.28 示例 *probability distribution and distribution function of an indicator function*

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，$A \in \mathcal{F}$ 是一个事件。那么你应该验证以下内容：
$$P_{1_A} = \big(1 - P(A)\big)\delta_0 + P(A)\delta_1,$$
其中，对于 $t \in \mathbf{R}$，$(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的测度 δ_t 定义为
$$\delta_t(B) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in B, \\ 0 & \text{if } t \notin B. \end{cases}$$

1_A的分布函数是由以下函数给出的：$\widetilde{1_A} : \mathbf{R} \to [0, 1]$
$$\widetilde{1_A}(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < 0, \\ 1 - P(A) & \text{if } 0 \leq s < 1, \\ 1 & \text{if } s \geq 1, \end{cases}$$
正如你应当核实的那样。

下一个结果的一个方向表明，所有的分布函数都是右连续的增函数，在$-\infty$处的极限为0，在∞处的极限为1。下一个结果的另一个方向表明，具有这些性质的每个函数都是某个随机变量在某个概率空间上的分布函数。证明表明，我们可以将样本空间取为(0, 1)，σ代数取为(0, 1)上的Borel子集，概率测度取为(0, 1)上的Lebesgue测度。

您的对下一个结果的证明理解应该通过练习13得到增强，练习13断言，如果下一个结果中出现的函数 $H : \mathbf{R} \to (0, 1)$ 是连续且单射的，那么证明中的随机变量 $X : (0, 1) \to \mathbf{R}$ 是 H 的反函数。

12.29 *characterization of distribution functions*

假设 $H : \mathbf{R} \to [0, 1]$ 是一个函数。那么存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 和一个在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的随机变量 X，使得 $H = \tilde{X}$ 当且仅当以下条件全部满足时。

（a） $s < t \Rightarrow H(s) \leq H(t)$ (换言之，H是一个递增函数)。

(b) $\lim\limits_{t\to-\infty} H(t) = 0$.

(c) $\lim\limits_{t\to\infty} H(t) = 1$.

(d) $\lim\limits_{t\downarrow s} H(t) = H(s)$ 对于每个 $s \in \mathbf{R}$（换句话说，H 是右连续的）。

证明 首先假设 $H = \tilde{X}$ 对于某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 和某个随机变量 X 在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上成立。然后 (a) 成立，因为 $s < t$ 暗示 $(-\infty, s] \subseteq (-\infty, t]$。此外，(b) 和 (d) 由 2.60 推出。进一步地，(c) 由 2.59 推出，从而完成此方向的证明。

为证明另一个方向，现在假设H满足(a)到(d)。令$\Omega = (0, 1)$，令$\mathcal{F}$为区间(0, 1)的Borel子集的集合，并令P为$\mathcal{F}$上的勒贝格测度。通过如下方式定义随机变量X

12.30 $$X(\omega) = \sup\{t \in \mathbf{R} : H(t) < \omega\}$$

对于 $\omega \in (0, 1)$。显然，X 是一个递增函数，因此是可测的（换言之，X 确实是一个随机变量）。

假设 $s \in \mathbf{R}$。如果 $\omega \in \big(0,\ H(s)\big]$，则

$$X(\omega) \leq X\big(H(s)\big) = \sup\{t \in \mathbf{R} : H(t) < H(s)\} \leq s,$$

其中第一个不等式成立是因为 X 是一个递增函数，而最后一个不等式成立是因为 H 是一个递增函数。因此

12.31 $$\big(0, H(s)\big] \subseteq \{X \leq s\}.$$

如果 $\omega \in (0, 1)$ 和 $X(\omega) \leq s$，那么对所有 $t > s$ (，由 12.30) 可得 $H(t) \geq \omega$。因

$$H(s) = \lim_{t\downarrow s} H(t) \geq \omega,$$

其中上面的等式来自(d)。重写上述不等式，我们有 $\omega \in \big(0, H(s)\big]$。因此我们已经证明 $\{X \leq s\} \subseteq \big(0, H(s)\big]$，这与12.31结合表明 $\{X \leq s\} = \big(0, H(s)\big]$。因此

$$\tilde{X}(s) = P(X \leq s) = P\Big(\big(0, H(s)\big]\Big) = H(s),$$

如所愿。 ■

在下面的定义和随后的讨论中，λ 像往常一样表示 R 上的勒贝格测度。

12.32 定义 *density function*

假设 X 是某个概率空间上的一个随机变量。如果存在 $h \in L^1(\mathbf{R})$ 使得

$$\tilde{X}(s) = \int_{-\infty}^{s} h\, d\lambda$$

对于所有 $s \in \mathbf{R}$，则称 h 为 X 的 *density function*。

如果随机变量 X 存在密度函数，那么它是唯一的［在勒贝格测度为 0 的集合上的改变除外；这一点已经被考虑在内，因为我们将密度函数视为 $L^1(\mathbf{R})$ 的元素，而不是 $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ 的元素］；见第 4B 节练习 6。

如果 X 是一个具有密度函数 h 的随机变量，那么分布函数 $\tilde{X}$ 几乎处处（相对于勒贝格测度）可微，并且对几乎每个 $s \in \mathbf{R}$ 都有 $\tilde{X}'(s) = h(s)$（由勒贝格微分定理的第二个版本；见 4.19）。由于 $\tilde{X}$ 是一个递增函数，这意味着对几乎每个 $s \in \mathbf{R}$，$h(s) \geq 0$。换言之，我们可以假设密度函数是非负的。

在上述密度函数的定义中，我们从一个概率空间和其上的一个随机变量开始。在概率论中，通常这个过程是反向进行的。具体而言，我们可以从一个非负函数 $h \in L^1(\mathbf{R})$ 开始，使得 $\int_{-\infty}^{\infty} h\, d\lambda = 1$。我们使用 h 来定义 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的概率测度，然后考虑 R 上的恒等随机变量 X。我们开始时的函数 h 就是 X 的密度函数。以下结果形式化了这一过程，并给出了以密度函数 h 表示的均值和标准差的公式。

12.33 *mean and variance of random variable generated by density function*

假设 $h \in L^1(\mathbf{R})$ 满足 $\int_{-\infty}^{\infty} h\, d\lambda = 1$ 且 $h(x) \geq 0$，对于几乎处处的 $x \in \mathbf{R}$。令 P 为定义在 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的概率测度，其定义为

$$P(B) = \int_B h\, d\lambda.$$

设 X 是定义在 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上的随机变量，对每个 $x \in \mathbf{R}$ 由 $X(x) = x$ 定义。则 h 是 X 的密度函数。此外，如果 $X \in \mathcal{L}^1(P)$ 则

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)\, d\lambda(x),$$

并且如果 $X \in \mathcal{L}^2(P)$ 则

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 h(x)\, d\lambda(x) - \Big(\int_{-\infty}^{\infty} xh(x)\, d\lambda(x)\Big)^2.$$

证明 根据$\widetilde{X}$和P的定义，等式$\widetilde{X}(s) = \int_{-\infty}^{s} h\, d\lambda$成立。因此，$h$是$X$的密度函数
。 我们将 P 定义为等于 $h\, d\lambda$，这意味着对于所有 $f \in \mathcal{L}^1(P)$，$\int_{-\infty}^{\infty} f\, dP = \int_{-\infty}^{\infty} fh\, d\lambda$ ［见第 9A 节练习 5］。因此，均值 EX 的公式可由 EX 的定义直接得到，而方差 $\sigma^2(X)$ 的公式则由 12.20 得出。

下面的例子通过对密度函数 h 的一些特别有用的选择来说明上述结果。

12.34 示例 *density functions*

- 假设 $h = 1_{[0,1]}$。这个密度函数 h 称为 $[0, 1]$ 上的 *uniform density*。在这种情况下，对于每个 Borel 集合 $B \subseteq \mathbf{R}$，$P(B) = \lambda(B \cap [0, 1])$。对于 $x \in \mathbf{R}$ 上的相应随机变量 $X(x) = x$，其分布函数 $\widetilde{X}$ 由如下公式给出

$$\widetilde{X}(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s \leq 0, \\ s & \text{if } 0 < s < 1, \\ 1 & \text{if } s \geq 1. \end{cases}$$

  12.33中的公式表明$EX = \frac{1}{2}$和$\sigma(X) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$。

- 假设 $\alpha > 0$ 并且

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0, \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{if } x \geq 0. \end{cases}$$

  该密度函数 h 称为在 $[0, \infty)$ 上的 *exponential density*。对于 $x \in \mathbf{R}$ 的对应随机变量 $X(x) = x$，其分布函数 $\widetilde{X}$ 由下式给出

$$\widetilde{X}(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < 0, \\ 1 - e^{-\alpha s} & \text{if } s \geq 0. \end{cases}$$

  12.33中的公式表明$EX = \frac{1}{\alpha}$和$\sigma(X) = \frac{1}{\alpha}$。

- 假设

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

  对于 $x \in \mathbf{R}$。这个密度函数称为 *standard normal density*。对于 $x \in \mathbf{R}$ 的相应随机变量 $X(x) = x$，我们有 $\widetilde{X}(0) = \frac{1}{2}$。对于一般的 $s \in \mathbf{R}$，不存在用初等函数表示$\widetilde{X}(s)$ 的公式。然而，12.33 中的公式表明 $EX = 0$，并且（借助一些微积分）$\sigma(X) = 1$。

弱大数定律

在分布函数的意义下看起来都相同的一族随机变量有一个专门的名称，正如我们将在下一个定义中看到的那样。

12.35 定义 *identically distributed; i.i.d.*

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间。

- 定义在（$\Omega, \mathcal{F}$）上的一族随机变量，如果该族中的所有随机变量具有相同的分布函数，则称为*identically distributed*。
- 更具体地说，定义在（$\Omega, \mathcal{F}$）上的随机变量族 $\{X_k\}_{k\in\Gamma}$ 称为 *identically distributed*，如果

$$P(X_j \leq s) = P(X_k \leq s)$$

  对于所有j、$k \in \Gamma$以及所有$s \in \mathbf{R}$。
- 一组相互独立且同分布的随机变量称为 *independent identically distributed*，通常缩写为 *i.i.d.*

12.36 示例 *family of random variables for decimal digits is i.i.d.*

考虑概率空间 $([0,1], \mathcal{B}, P)$，其中 $\mathcal{B}$ 是区间 $[0,1]$ 上的 Borel 子集的集合，P 是在 $([0,1], \mathcal{B})$ 上的 Lebesgue 测度。对于 $k \in \mathbf{Z}^+$，定义随机变量 $X_k : [0,1] \to \mathbf{R}$ 如下：

$$X_k(\omega) = k^{\text{th}}\text{-digit in decimal expansion of } \omega,$$

其中，对于那些具有两种不同十进制展开的数 ω，我们采用不以无限多个 9 结尾的那一种。

注意到 $P(X_k \leq \pi) = 0.4$ 对于每个 $k \in \mathbf{Z}^+$。更一般地，$\{X_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 这一族是同分布的，正如你应当验证的那样。

$\{X_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 族也是相互独立的，如你所应验证。因此 $\{X_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 是一个 i.i.d. 的随机变量族。

相同分布的随机变量具有相同的期望值和相同的标准差，正如下一个结果所示。

12.37 *identically distributed random variables have same mean and variance*

假设（$\Omega, \mathcal{F}, P$）是一个概率空间，且 $\{X_k\}_{k\in\Gamma}$ 是 $\mathcal{L}^2(P)$ 中同分布的随机变量族。那么

$$EX_j = EX_k \quad \text{and} \quad \sigma(X_j) = \sigma(X_k)$$

对于所有j，$k \in \Gamma$。

证明 设 $j \in \mathbf{Z}^+$。令 f_1、f_2、…… 为在定理 2.89 的证明中构造的、逐点收敛到 X_j 的简单函数序列。支配收敛定理（3.31）蕴含 $EX_j = \lim_{n\to\infty} Ef_n$。由于每个 f_n 的构造方式，每个 Ef_n 只依赖于 n 以及对于 $c < d$ 的数 $P(c \le X_j < d)$。然而，

$$P(c \le X_j < d) = \lim_{m\to\infty}\Big(P\big(X_j \le d - \tfrac{1}{m}\big) - P\big(X_j \le c - \tfrac{1}{m}\big)\Big)$$

对于 $c < d$。由于 $\{X_k\}_{k\in\Gamma}$ 是一族同分布的，右侧上方的数字独立于 j。因此，对所有 j，$k \in \mathbf{Z}^+$，有 $EX_j = EX_k$。

将上段的结果应用于同分布的族 $\{{X_k}^2\}_{k\in\Gamma}$，并利用 12.20 得出对所有 j、$k \in \Gamma$，$\sigma(X_j) = \sigma(X_k)$ 成立。■

下一个结果具有直观的解释，即如果我们重复一个随机过程多次，那么当我们增加过程的重复次数时，结果的平均值与期望平均值之间的差异超过任何固定的正数 ε 的概率，其极限为 0。

12.38 *Weak Law of Large Numbers*

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，且 $\{X_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 是 $\mathcal{L}^2(P)$ 中的一组独立同分布的随机变量，每个随机变量的期望为 μ。那么

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\big(\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\big) - \mu\Big| \ge \varepsilon\Big) = 0$$

对于所有 $\varepsilon > 0$。

证明 由于随机变量 $\{X_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 都具有相同的期望和相同的标准差，根据 12.37，存在 $\mu \in\in \mathbf{R}$ 和 $s \in\in [0, \infty)$ 使得

$$EX_k = \mu \quad \text{and} \quad \sigma(X_k) = s$$

对于所有 $k \in \mathbf{Z}^+$。因此

12.39 $$E\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \mu \quad \text{and} \quad \sigma^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \frac{1}{n^2}\sigma^2\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \frac{s^2}{n},$$

其中最后的等式来自于12.22（这是我们使用假设的独立部分的地方）。

现在假设 $\varepsilon > 0$。在特例中，如果 $s = 0$，所有的 X_k 几乎必然等于相同的常数函数，所需的结果显然成立。因此我们假设 $s > 0$。设 $t = \sqrt{n}\varepsilon/s$ 并使用 Chebyshev 不等式 (12.21) 对随机变量 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 应用这个 t 的值，使用 12.39 得到

$$P\Big(\Big|\big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\big) - \mu\Big| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{s^2}{n\varepsilon^2}.$$

取上面不等式两边的极限 $n \to \infty$ 得到所需结果。■

习题 12

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间且 $A \in \mathcal{F}$。证明 A 和 $\Omega \setminus A$ 独立当且仅当 $P(A) =$ 为 0 或 $P(A) =$ 为 1。

2 假设 P 是 [0, 1] 上的Lebesgue测度。给出一个例子，其中 A 和 B 是 [0, 1] 的两个不相交的Borel子集，使得 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $[0, \frac{1}{2}]$ 和 A 是独立的，并且 $[0, \frac{1}{2}]$ 和 B 是独立的。

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，且 $A, B \in \mathcal{F}$。证明以下命题是等价的。

- A 且 B 是相互独立的事件。
- A 且 $\Omega \setminus B$ 是相互独立的事件。
- $\Omega \setminus A$ 并且B是相互独立的事件。
- $\Omega \setminus A$ 并且 $\Omega \setminus B$ 是相互独立的事件。

4 假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，且 $\{A_k\}_{k\in\Gamma}$ 是一个事件族。证明：当且仅当事件族 $\{A_k\}_{k\in\Gamma}$ 是独立的，事件族 $\{\Omega \setminus A_k\}_{k\in\Gamma}$ 是独立的。

5 给出一个概率空间（Ω，$\mathcal{F}$，P）以及事件 A、B_1、B_2，使得 A 与 B_1 相互独立，A 与 B_2 相互独立，但 A 与 $B_1 \cup B_2$ 不相互独立。

6 给出一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 以及事件 A_1, A_2, A_3，使得 A_1 和 A_2 相互独立，A_1 和 A_3 相互独立，且 A_2 和 A_3 相互独立，但事件族 A_1, A_2, A_3 并不独立。

7 假设（$\Omega, \mathcal{F}, P$）是一个概率空间，$A \in \mathcal{F}$，并且 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$ 是一个递增的事件序列，使得对每个 $n \in \mathbf{Z}^+$，A 和 B_n 都是相互独立的事件。证明 A 和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 是相互独立的。

8 假设（$\Omega, \mathcal{F}, P$）是一个概率空间，并且 $\{A_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是一个独立事件族，使得对每个 $t \in \mathbf{R}$，$P(A_t) < 1$。证明存在一个序列 $t_1, t_2, \ldots$ 在 $\mathbf{R}$ 中，使得 $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{t_n}\right) = 0$。

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，并且 $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ 是满足 $P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) > 0$ 的条件。证明:

$$P(A \cap B_1 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) \cdots P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n) \cdot P_{B_1 \cap \cdots \cap B_n}(A)$$

对于每个事件 $A \in \mathcal{F}$。

10 假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，且 $A \in \mathcal{F}$ 是一个事件，使得 $0 < P(A) < 1$。证明:

$$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{\Omega \setminus A}(B) \cdot P(\Omega \setminus A)$$

对于每个事件 $B \in \mathcal{F}$。

11 给出一个概率空间（Ω，$\mathcal{F}$，P）以及 X、$Y \in \mathcal{L}^2(P)$ 的例子，使得 $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$，但是 X 和 Y 不是相互独立的随机变量。

12 假设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$和$(\Omega', \mathcal{F}', P')$是概率空间，$X$是在$\Omega$上的随机变量，$Y$是在$\Omega'$上的随机变量，并且$\tilde{X} = \tilde{Y}$。证明$P_X = P'_Y$。

13 假设 $H : \mathbf{R} \to (0, 1)$ 是一个连续的单射函数，满足12.29中的条件（a）到（d）。证明在12.29的证明中得到的函数 $X : (0, 1) \to \mathbf{R}$ 是 H 的反函数。

14 假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，X 是一个随机变量。证明以下命题是等价的。

- $\tilde{X}$ 是在 R 上的连续函数。
- $\tilde{X}$ 是 R 上的一个一致连续函数。
- $P(X = t) =$ 每个 $t \in \mathbf{R}$ 为 0。
- $(\tilde{X} \circ X)\tilde{}(s) = s$ 对所有 $s \in\in[0,1]$。

15 假设 $\alpha > 0$ 且 $h(x) = \begin{cases} 0 \text{ 如果 } x < 0, & \alpha^2 x e^{-\alpha x} \\ \text{如果 } x \geq 0。 & \end{cases}$ 或 $x \in \mathbf{R}$.
让$P = h\,d\lambda$ 令 X 为由 $X(x) = x$ f 定义的随机变量

(a) 验证 $\int_{-\infty}^{\infty} h\,d\lambda = 1.$ (b) 找出分布函数 $\tilde{X}$ 的公式。 (c) 找出 EX 的公式（以 α 为变量）。
(d) 找出 $\sigma(X)$ 的公式（以 α 为变量）。

16 假设 $\mathcal{B}$ 是 [0, 1) 上 Borel 子集的 σ-代数，且 P 是 $\big($[0, 1) 上的勒贝格测度，$\mathcal{B}\big)$。令 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 为由例 8.51 的第四个要点所定义的函数族（注意 $k = 0$ 被排除）。证明函数族 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}^+}$ 是 i.i.d.

17 假设 $\mathcal{B}$ 是 $(-\pi, \pi]$ 的 Borel 子集所生成的 σ-代数，且 P 是定义在 $\big((-\pi, \pi]$ 上的勒贝格测度，$\mathcal{B}\big)$ 除以 2π。令 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}$ 为由例 8.51 的第三个要点定义的三角函数族（注意 $k = 0$ 被排除)。

(a) 证明 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}$ 不是一族相互独立的随机变量。 (b) 证明 $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}$ 是一族同分布的随机变量。

Photo Credits

- 第 vi 页：照片由 Carrie Heeter 和 Sheldon Axler 拍摄
- 第 1 页：由 Doris Fiebig 创作的数字雕塑；版权所有
- 第13页：照片由 Petar Milo ević 拍摄；知识共享 署名-相同方式共享 4.0 国际许可；于 2019 年 7 月 9 日在 https:// commons.wikimedia.org/wiki/File:Mausoleum_of_Galla_Placidia_ceiling_mosaics.jpg 验证
- 第19页：照片作者 Fagairolles 34；知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际许可；于 2019 年 7 月 9 日在 https:// commons.wikimedia.org/wiki/File:Saint-Affrique_pont.JPG 验证
- 第44页：照片由Sheldon Axler提供
- 第51页：照片由 James Mitchell 拍摄；知识共享 署名-相同方式共享 2.0 通用 许可协议；于2019年7月9日在 https:// commons.wikimedia.org/wiki/File:Beauvais_Cathedral_SE_exterior.jpg 验证
- 第68页：照片由A. Savin拍摄；创意共享署名-相同方式共享 3.0 未移植许可；已于2019年7月9日验证，网址：https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Moscow_05-2012_Mokhovaya_05.jpg
- 第73页：照片由Giovanni Dall'Orto提供；使用许可已于2019年7月11日在https://en.wikipedia.org/wiki/Maria_Gaetana_Agnesi上验证
- 第101页：照片由Rafa Esteve拍摄；创意共享署名-相同方式共享 4.0 国际许可证；于2019年7月9日在https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Trinity_College_-_Great_Court_02.jpg验证
- 第102页：照片由 A. Savin 拍摄；知识共享 署名-相同方式共享 3.0 未本地化 许可；于2019年7月9日在 https:// commons.wikimedia.org/wiki/File:Spb_06-2012_University_Embankment_01.jpg 核实
- 第116页：照片由Lucarelli拍摄；创作共用署名-相同方式共享 3.0 未本地化许可；于2019年7月9日在https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Palazzo_Carovana_Pisa.jpg验证
- 第146页：照片由Petar Milo ević拍摄；知识共享署名-相同方式共享 3.0 未移植许可证；2019年7月9日通过https://en.wikipedia.org/wiki/Lviv进行验证
- 第152页：照片由NonOmnisMoriar提供；创用CC署名-相同方式共享3.0国际许可证；于2019年7月9日在https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ecole_polytechnique_former_building_entrance.jpg验证

- 第193页：照片由 Roland zh 拍摄；知识共享 署名-相同方式共享 3.0 未本地化 许可协议；于2019年7月9日在 https:// commons.wikimedia.org/wiki/File:ETH_Zürich_-_Polyterasse_2011-04-11_19-03-06_ShiftN.jpg 核实

- 第211页：照片由 Daniel Schwen 拍摄；知识共享 署名-相同方式共享 2.5 通用 许可；于 2019 年 7 月 9 日在 https:// commons.wikimedia.org/wiki/File:Mathematik_Göttingen.jpg 核实

- 第255页：照片由 Hubertl 拍摄；知识共享 署名-相同方式共享 4.0 国际 许可协议；已于2019年7月11日在 https:// en.wikipedia.org/wiki/University_of_Vienna 核实

- 第280页：版权归 Per Enström 所有；知识共享 署名-相同方式共享 4.0 国际许可协议；于2019年7月9日在 https:// commons.wikimedia.org/wiki/File:Botaniska_trädgården,_Uppsala_II.jpg 核验

- 第339页：照片由 Ricardo Liberato 拍摄，采用 Creative Commons Attribution-Share Alike 2.0 Generic 许可；于 2019 年 7 月 9 日在 https:// commons.wikimedia.org/wiki/File:All_Gizah_Pyramids.jpg 上核实

- 第380页：照片由 Alexander Dreyer 拍摄，采用 Creative Commons 署名-相同方式共享 3.0 未本地化许可；于 2019 年 7 月 9 日在 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dices6-5.png 核实

- 第391页：照片由 Simon Harriyott 拍摄，采用知识共享署名 2.0 通用许可；于2019年7月9日在 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bayes_tab.jpg 验证

Bibliography

本书关于希尔伯特空间上的线性算子、傅里叶分析和概率的章节，仅仅介绍了这些庞大的主题，而这些主题都有广泛的文献。此书目为希望深入研究这些主题的读者提供了书籍推荐。

- 谢尔顿·阿克斯勒，*Linear Algebra Done Right*，第三版，斯普林格，2015年。
- 利奥·布雷曼，*Probability*，工业与应用数学学会，1992年。
- 约翰·B·康威，《*A Course in Functional Analysis*》，第二版，Springer，1990年。
- 罗纳德·G·道格拉斯，*Banach Algebra Techniques in Operator Theory*，第二版，Springer，1998年。
- 里克·杜雷特，*Probability: Theory and Examples*，第五版，剑桥大学出版社，2019年。
- Paul R. Halmos，*A Hilbert Space Problem Book*，第二版，Springer，1982年。
- 伊扎克·卡茨内尔森，*An Introduction to Harmonic Analysis*，第二版，多佛出版社，1976年。
- T. W. Körner, *Fourier Analysis*, 剑桥大学出版社, 1988.
- 迈克尔·里德 和 巴里·西蒙，*Functional Analysis*，学术出版社，1980。
- Walter Rudin，《*Functional Analysis*》，第二版，麦格劳-希尔出版社，1991年
- 巴里·西蒙，*A Comprehensive Course in Analysis*，美国数学学会，2015年。
- 伊莱亚斯·M·斯坦 和 拉米·沙卡尔奇，*Fourier Analysis*，普林斯顿大学出版社，2003年。

Notation Index

Index

Colophon: Notes on Typesetting

- 本书由作者使用pdfLATEX排版，作者编写了LATEX代码以实现书籍的设计。pdfLATEX软件由韩世成开发。
- 本书使用的 LATEX 软件由 Leslie Lamport 编写。作为 LATEX 基础的 TEX 软件由 Donald Knuth 编写。
- 本书的主要文字字体是Nimbus Roman No. 9 L，由URW公司创作，是Times的合法克隆，Times由Stanley Morison和Victor Lardent为英国报纸 *The Times*于1931年设计。
- 本书中的数学字体采用了 Pazo Math、URW Palladio 和 Computer Modern 的不同版本。Pazo Math 由 Diego Puga 创作；URW Palladio 是 Palatino 的合法克隆版，而 Palatino 由 Hermann Zapf 设计；Computer Modern 由 Donald Knuth 设计。
- 用于页面标题、章节标题、子章节标题以及其他一些设计元素的无衬线字体是 NimbusSanL，这是 Helvetica 的合法克隆，Helvetica 由 Max Miedinger 和 Eduard Hoffmann 设计。
- 书中的图形由*Mathematica*生成，使用作者编写的*Mathematica*代码。*Mathematica*由Stephen Wolfram创建。
- 由 Szabolcs Horvát 编写的 *Mathematica* 软件包 MaTeX 被用于在 *Mathematica* 图中放置由 LATEX 生成的标签。
- LATEX 宏包 graphicx，由 David Carlisle 和 Sebastian Rahtz 编写，被用于将照片以及由*Mathematica*生成的图形整合到稿件中。
- LATEX 包的 multicol，由 Frank Mittelbach 编写，用于绕过 LATEX 的限制，即双栏格式必须从新的一页开始（这对于符号索引和索引是必需的）。
- LATEX 套件 Ti*k*Z（由 Till Tantau 编写）和 tcolorbox（由 Thomas Sturm 编写）用于生成定义框和结果框。
- LATEX 包色，由 David Carlisle 编写，用于为各种设计元素添加适当的颜色，例如每个章节第一页上使用的颜色。
- LATEX 包裹图包 wrapfig，由 Donald Arseneau 编写，用于将文本环绕在评论框周围。
- 由 Robert Schlicht 编写的 LATEX 宏包 microtype 被用于减少断字，并产生更美观的右对齐效果。