离散数学

开放式导论，第4版

离散数学

开放式导论

奥斯卡·莱文

第4版

奥斯卡·莱文　数学科学 北科罗拉
多大学　科罗拉多州格里利 80639
oscar.levin@unco.edu http://math.o
scarlevin.com/

第4版

最新版本始终可以在 http://discrete.openmathbooks.
org/ 免费获取。

Cover image: *Tiling with Fibonacci and Pascal*.

For Madeline and Teagan

致谢

这本书如果没有理查德·格拉斯尔和塔比莎·明格斯的《离散与组合数学》，是无法存在的。这是我学习离散数学的书，也是我在开始写这本书前一个学期使用的教材。我希望保留他们书中的探究式学习感受，同时更新、扩展并重新安排一些内容。这里一些最好的阐述和习题，都是来自这个来源的慷慨捐赠。

感谢那些多年来与我共同教授离散数学课程的研究生们，包括Evan Czysz、Alees Lee和Sarah Sparks，他们帮助开发了许多新的活动和练习，这些内容已经被纳入到本书中。Michelle Morgan 提供了文稿编辑支持，Jennifer Zakotnik-Gutierrez 帮助编写了在线版本书中许多互动练习的代码。还要感谢 Katie Morrison、Nate Eldredge 和 Richard Grassl（再次）在使用本书部分内容于他们的课程后提供的建议。

本书的在线版本采用 PreTeXt 编写，并托管在 Runestone Academy 上，这得益于 Rob Beezer、Brad Miller、David Farmer 和 Alex Jordan 以及 pretext-support 组（groups.google.com/g/pretext-support）其他参与者所做的卓越开发工作。

最后，感谢多年来指出错别字并提出建议的众多学生，也预先感谢未来将这样做的同学。

前言

本文旨在以适合数学与计算机科学专业一、二年级本科生的水平介绍离散数学中的若干主题，尤其面向有志于教授初中和高中数学的学生。本书最初源于科罗拉多大学北科罗拉多分校离散数学课程的一套讲义。该课程既作为离散数学主题的概览课程，也作为数学专业的“桥梁”课程，因为 UNC 并未开设独立的“证明导论”课程。随着该课程逐步发展以支持我们的计算机科学专业，本书内容也随之演进。本书当前版本旨在支持以探究为基础的教学，以促进未来教师至关重要的理解能力，同时也为计算机科学学生提供必要的数学基础和以应用为导向的学习动机。在 2024 年春季学期使用本版早期版本授课时，令我欣喜的是，许多学生反馈他们第一次看到了数学在“现实世界”中的实际用处。我希望这种体验能够在使用本教材的其他课堂中得到复制。

本书旨在用于采用问题导向或探究式方法授课的课堂。每一节都以对内容的预览开始，其中包括一个开放式的 *Investigate!* 激发性问题，以及一个结构化的预览活动。预览活动经过精心分层设计，为本节主题提供切入点，并促使学生深入投入到学习材料中。根据课堂进度，我发现有多种行之有效的安排方式：课前只布置本节预览，将预览活动作为课堂中的小组合作任务，或要求学生在课前阅读整节内容（每一节最后都配有一小组阅读问题，可作为作业布置，以鼓励学生真正去阅读）。对于将本书用于自学的读者而言，本书各节的组织方式也希望能够模拟一个内容丰富的探究式课堂风格。

本书所涵盖的主题是根据我在 UNC 任教的学生的需求选择的。主要研究领域包括逻辑与证明、图论、组合学和数列。归纳法在数列一章的末尾进行讲解。离散结构在“需要时”引入，但对集合与函数的更为系统的论述作为独立的一章给出，可独立于其他内容学习。最后一章涵盖另外两个主题：生成函数和数论。

虽然我认为这些主题的选择和顺序是最优的，但你可以根据兴趣随意跳跃。有时会有依赖于前面内容的例子和练习，但我尽量将这些例子和练习保持在最低限度，通常可以跳过或者在不需要太多额外学习的情况下理解。如果你是教师，也可以通过编辑PreTeXt源文件来创建适合你需求的定制版本。

第四版的改进。许多章节已经被重写，以提高阐述的清晰度。

- 几乎新增了300个习题，总数超过750个。这些习题更好地分为预习活动题、阅读题、练习题和附加习题。大多数新习题适用于在线版，具有互动性。

- 新增加了关于概率、关系和离散结构及其证明的章节。其他一些章节已经被拆分，以便更有可能在一个课堂时间内专注于一个单一主题。

- 改进的计数章节展示，更侧重于考虑结果集而非遵循规则。

- 第3版的*Investigate!*活动已分为两种类型：*Investigate!*问题和预览活动。前者是开放式问题，旨在让您参与即将讨论的话题。后者是结构化的预览活动，您应在阅读该章节之前完全回答这些问题。

以前的版本（2019年发布的第3版，2016年发布的第2版，以及2015年秋季版）将仍然提供给那些由于熟悉度而希望使用这些版本的教师。

我计划继续改进这本书。部分内容将通过实时更新在线版本来实现，新增内容将被纳入其中（编号将保持一致）。因此，我鼓励你在有任何建议和评论时及时发送。

奥斯卡·莱文博士，北科罗拉多大学，2024

如何使用本书

除了阐述性文本之外，本书还包含一些旨在鼓励你与数学进行互动的设计。

Investigate! 问题。在各个章节中（通常在主题一开始），你会发现一些开放式问题，旨在让你参与到即将讨论的主题中。在阅读该章节之前，你确实应该花一些时间思考这些问题，甚至亲自尝试解决它们。不过，如果你一时找不到令人满意的答案，也不必担心。其目标是激发你的兴趣，让你在继续阅读接下来的内容时主动寻找答案。

预览活动。大多数章节都包含一个结构化的预览活动。这些活动包含引导性问题，在阅读该章节之前，你应该能够完全回答这些问题。其目的是通过这些问题让你为即将出现的新内容做好准备，从而更有意义地参与学习。如果你使用的是在线版本，其中大多数问题都会为你提供即时反馈，让你能够自信地继续学习。

示例。我尽量包含了“恰当”数量的示例。对于包含 *problems* 的示例，提供了完整解答。在阅读解答之前，至少先理解题目在问什么。与一些教材不同，这些示例并不旨在涵盖你在习题中会遇到的所有问题。它们不应被用作解决其他问题的蓝本。相反，应利用这些示例加深你对各节所讨论的概念和技术的理解。然后运用这种理解来完成每一节末尾的练习。

练习。你通过练习来提高数学水平。每一节都以练习题结束，旨在巩固该节中介绍的概念和基本技能；在线版本会对这些题目提供即时反馈。随后还有一些更具挑战性和开放性的附加练习。这些练习可能被布置为书面作业，或在课堂上作为小组活动使用。部分附加练习在书末提供提示或解答，但应尽量少用。挣扎对你是有益的。每一章的末尾都包含一组数量更大的类似练习（相当于“章节复习”），它们可能会衔接该章中不同小节的内容。

交互式在线版本。对于以纸质版或 PDF 形式阅读本文的读者，我也鼓励你们查看交互式在线版本。许多预览活动和练习都是交互式的，并且可以给你即时反馈。其中一些

这些包含随机化的组件，使你能够反复练习同一类问题的多种相似版本，直到你掌握该主题。

示例的提示和解答也被隐藏在额外的一次点击之后，以鼓励你在阅读解答之前先思考问题。此外还提供了一个很好的搜索功能，索引中也有可展开的链接，让你无需立即跳转到页面就能查看内容。这里还有一个 Python 草稿板（铅笔图标），如果你有兴趣，可以用来尝试一些代码。

计划增加更多交互性。这些「额外」功能将陆续推出，敬请关注！

您可以在 discrete.openmathbooks.org 免费查看交互式版本，或扫描下方的二维码。

内容

附录

后记

第0章

引言与预备知识

欢迎来到离散数学。如果这是你第一次接触这门学科，你可能会发现离散数学与其他数学科目有相当大的不同。你甚至可能不知道什么是离散数学！希望这段简短的介绍能够帮助你了解这门学科的内容，以及在继续学习过程中你可以期待些什么。

0.1 什么是离散数学?

离散的 / dis’krët.

*Adjective*单独分开且各自不同。

Synonyms: 分离的 - 脱离的 - 独立的 - 抽象的.

定义 *discrete mathematics* 很困难，因为定义 *mathematics* 很困难。什么是数学？是数字的研究吗？部分是，但你也研究函数、直线、三角形、平行六面体、向量等等。或者你可能想说数学是一组工具，允许你解决问题。什么样的问题？嗯，那些涉及数字、函数、直线、三角形等等的问题。无论你对数学的理解是什么，试着将“离散”这一概念应用到其中，按照上面的定义。有些数学本质上处理的是 *stuff*，它是彼此独立且不同的。

在代数或微积分课程中，你可能会遇到某个特定的数集（也许它们构成了一个函数的值域）。你会将这个集合表示为一个区间：$[0, \infty)$ 是 $(\ ) = {}^{2}$ 的值域，因为该函数的输出集合包含所有大于等于 0 的实数。这个数集不是离散的。集合中的数字彼此之间几乎没有任何分隔。事实上，在该集合中任取两个数，它们之间还存在无限多个同样属于该集合的数。

离散数学仍然可能会询问一个函数的值域，但该集合不会是一个区间。考虑这样一个函数：它给出每个正在阅读此文的人拥有的孩子数量。这个值域是什么？我猜它是类似于$\{0, 1, 2, 3, 4\}$这样的集合。也许5或6也包括在内[1]。但肯定没有人会有1.32419个孩子。这个输出集合*is*是离散的，因为元素是分开的。函数的输入也形成一个离散集合，因为每个输入都是一个独立的人。

除了数字集合之外，还有许多离散的数学对象；我们将在第0.2节介绍其中一些。研究这些离散结构是主要任务。

[1]Even larger natural numbers for old ladies who live in shoes.

离散数学及本书的重点。然而，我们之所以要研究这些结构，是因为它们提供了一种建模“现实世界”问题的方法。[2]

为了了解这个主题，我们来看一下你在离散数学中解决的几种问题。以下是一些简单的例子：

Investigate!

Note: Throughout the book you will see 调查！ *activities like this one. Answer the questions in these as best you can to give yourself a feel for what is coming next.*

1. 世界上最受欢迎的数学家正在为他所有的朋友举办一场派对。为拉开序幕，他们决定让每个人都互相握手。假设派对上有 10 个人，每个人都与其他每个人（当然不包括自己）恰好握手一次，那么一共发生了多少次握手?

2. 在奥斯卡全明星热狗吃大赛的热身活动上，阿尔吃了一个热狗。随后鲍勃吃了三个，让他相形见绌。不甘示弱，卡尔吃了五个。接下来每位参赛者都比前一位多吃两个热狗。泽诺（第26位也是最后一位参赛者）吃了多少个热狗? 一共吃了多少个热狗?

3. 经过数周的挖掘，你终于到达了墓室。房间里除了两只巨大的箱子外空无一物。每只箱子上都刻着一段信息（奇怪的是用英语）：

   正好其中一个宝箱包含了宝藏，而另一个则充满了致命的不死蝎子。

   对于任一箱子，如果箱子的消息为真，则箱子包含宝藏。

   问题是，你不知道这些消息是真是假。你会怎么做?

4. 在远古时代，五个小镇决定修建道路，使每一对城镇之间都能直接相连。小镇拥有充足的资金，可以把道路修得任意长、任意曲折，但非常重要的是道路之间不能相交（因为当时还没有发明停车标志）。此外，出于道德原因，不允许修建隧道和桥梁。是否有可能让每个小镇都修建通往另外四个小镇的道路，而不产生任何交叉?

[2] Many of the problems discussed in this book are admittedly contrived and clearly fictional, but hopefully you will see how these toy problems can be generalized to actually represent problems that people would care about in reality.

在你思考上述问题时，如果解决方案对你来说并不明显，也不必担心。我们在这里更感兴趣的是，为了能够回答这些问题，我们需要哪一类信息。我们如何使用彼此分离且彼此区分的独立对象来表示这种情境？在你至少就每个问题思考过这一点之前，请不要继续阅读。

阅读 y？以下是一些你可能想过的事情 a 回合：

1. 派对上的人都是个体。我们可以考虑人的*set*。我们也可以考虑由人组成的成对集合，因为握手恰好需要两个人。因此，真正的问题是，使用一个包含 10 个元素的集合，你能组成多少对？

   例如，如果派对上有三个人，方便起见命名为1、2和3，那么配对将是（1，2）、（1，3）和（2，3）。或者我们也应该包括（2，1）、（3，1）和（3，2）吗？

2. 为了统计吃掉的热狗数量，无论是个人的还是总计的，我们可以使用一个整数（整数量）的数列。该数列的第 n 项可以表示第 n 位参赛者吃掉的热狗数量。我们还可以考虑第二个同样由整数组成的数列，用来给出前 n 位参赛者合计吃掉的热狗总数。

   那么，这个问题的解将是该序列第26项的值。为帮助我们找到它，我们可以考虑这些序列的增长率，以及这两个序列彼此之间的关系。

3. 逻辑问题也属于离散数学的范畴：每个陈述都可以有一个 *value*，其取值为真或假（不存在介于两者之间的情况）。要回答诸如蝎子箱子那样的问题，我们必须理解陈述的结构，以及陈述各部分的真值如何相互作用，从而决定整个陈述的真值。

4. 最后一个问题涉及一种称为图的离散结构，不要与函数图像或点集的图形相混淆。我们可以用图来表示集合中的哪些元素（或城镇）彼此相关（或由道路连接）。在这种情况下，问题变成了：我们能否画出一个具有五个顶点（城镇）和十条边（道路）的图，使得任意两条边都不相交？

上述四个问题展示了本书的四个主要主题：组合学（研究事物*combine*的方式的理论；尤其是如何对这些方式进行计数）、序列、符号逻辑和图论。然而，还有其他一些主题也被视为离散数学的一部分，包括计算机科学、抽象代数、数论、博弈论、概率论和几何学（其中一些，尤其是后两者，同时具有离散和非离散的变体）。

归根结底，了解离散数学究竟研究什么的最佳方式就是去 *do* 它。让我们开始吧！在开始解答更复杂（也更有趣）的问题之前，我们将先简要概述一下我们将要使用的离散结构类型。

阅读问题

本书的每一节都会以少量像下面这样的 *Reading Questions* 结束。它们旨在帮助你反思你所读到的内容。尤其是，最后一道阅读问题会要求你提出一个属于你自己的问题。思考你尚未知晓的内容，是进一步深化你对已知内容理解的绝佳方式。

1. 现在，如果你要告诉你的朋友你正在上的离散数学课，你会如何描述这门课的内容？写一两句话。 2. 阅读完这一部分后，你有什么问题？写下至少一个你对这一部分内容感到好奇的问题。

0.2 离散结构

0.2.1 引言

Investigate!

一个双六骨牌套装由包含从0到6的数字对的牌组成。一个双六骨牌套装中有多少块牌？一个双九骨牌套装中有多少块骨牌？一个双- 骨牌套装中有多少块骨牌？

试试 0.2.1

花几分钟思考上面的问题。然后用 2-3 句话描述你的想法。你不需要找到一个完整的解决方案，但应当说明你可以尝试什么，以及你认为为找到解决方案可能需要做些什么。

我们采用一种以解决问题为导向的方法来学习离散数学：我们将考察大量具有离散特征的问题，并思考如何回答这些问题（以及证明我们的答案是正确的）。这并不是学习离散数学的唯一方式。另一种方法是研究用于解决问题的工具。假如我们是艺术学生，我们也可以研究画笔、画架以及颜料的构成，这当然会很有趣，但我认为真正去画那些快乐的小树会更令人享受。

话虽如此，了解你的工具确实有助于你使用它们，因此在这一节中，我们将讨论一些离散数学中常用的基本工具。在我们的学习过程中，我们会不断回顾这些工具，并在需要时更好地理解它们。

我们这门学科中的工具被称为离散结构。它们是我们用来表示所要解决问题各个部分的数学对象。“结构”这个词在这里很贴切，因为这些“东西”具有相当严格的约束，使它们成为它们之所以为它们的样子，就像公寓楼必然具有不同于飞机机库或悬索桥的特征一样（这些是物理结构的类型，而不是数学结构，这里只是为了说得过于清楚以至于破坏这个比喻）。

我们在离散数学中最常使用的结构是集合、函数、序列、关系和图。现在我们将对这些内容逐一作简要预览。随着学习的深入，每一项都会得到更为详细的探讨
。

0.2.2 集合

集合是元素的一个*unordered*集合。这相当含糊，但除非我们想花整本书去更精确地理解集合，否则这对我们来说已经足够了。只用集合就有可能定义整个数学（甚至

数字本身也可以被看作集合），但这也不是我们将要做的。相反，我们希望能够讨论数字以及其他对象的集合，并把它们收集到我们称之为集合的东西中。

我们可以通过准确说明哪些元素属于该集合来描述集合。我们可以用文字来指定这种成员关系（例如，设 为所有小于 10 的自然数所组成的集合），也可以通过显式列出所有元素（例如， $= \{3, 5, 7\}$），或者使用一种称为集合概括（也称为集合构造表示法）的方法。其一个例子是 $= \{ \in : < 10\}$。我们可以将其读作："是满足小于 10 这一性质的自然数集合。"更精确地说，符号 表示自然数，它本身也是一个集合： $= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$（这展示了描述集合的另一种方式）。符号 $\in$ 表示"是……的元素"。符号 : 读作"使得"，它告诉我们后面的内容是集合元素必须满足的 *condition*。

> 顺便说一下……在这本书中，我们将自然数定义为从 0 开始的所有整数。并不是每本书都将 0 包含在这个集合中。这在很大程度上取决于你学习的数学领域。

由于描述同一集合的方式有多种，我们应该小心集合相同或不同的含义。集合是通过其成员来定义的，因此以下四种描述完全相同的集合：

1. $\{1, 2, 3, 4\}$. 2. $\{1, 2, 1 + 1, 1 + 2, 2 + 2\}$.（这个集合中有多少个数？不是 5。）3. $\{2, 4, 1, 3\}$.（重要的只是集合中有哪些元素，而不是它们被写下来的顺序。）4. $\{ \in : < 5$ 且 $\geq 1\}$.

有许多事情你可以用集合 *do* 来做，我们将在需要时更详细地讨论这些内容。我们将看到，通常从已有的集合中构建新集合（例如通过取集合的并集或交集）是很有帮助的，也有助于比较集合（例如，判断一个集合是否是另一个集合的子集），以及求集合的元素个数（称为其基数）。我们可能还想将一个集合的元素与另一个集合的元素匹配：为此，我们可能会使用一个函数，接下来我们将讨论这个。令人惊讶的是，我们还可以用集合本身来描述函数。让我们来看看。

0.2.3 函数

定义函数的一种方式是将其视为一条规则，它为每个输入恰好分配一个输出。该输出称为该输入的像。函数还配有一个定义域，即所有输入的集合，以及一个陪域，即所有允许的输出的集合。你也可以谈到函数的值域，它是所有 *actual* 输出的集合，或者换一种说法，是来自定义域元素的所有 *images* 的集合。

我们写 : $\to$ 来描述一个名为 、定义域为 、陪域为 的函数。然而，这并没有告诉我们函数 *which* 是什么。要定义该函数，我们必须描述其规则。通常这是通过一个公式来完成的（例如， $(\ ) =\ ^2$ 表示将定义域中的每个元素映射到它的平方），或者用文字（就像我们刚才描述平方函数那样）。我们也可以用表格或图像来定义一个函数。

使一条规则成为 *function* 的关键在于，对于每一个输入，都存在 *exactly one* 的输出。也就是说，这条规则必须是一条良好的规则。我们为输入 7 指定什么输出呢？对于任何特定的函数，都只能有一个答案。

由于函数将一个集合（定义域）映射到另一个集合（陪域），集合与函数之间存在明显的联系。不过，还有另一种值得考虑的联系：函数的图像常常被描述为点的一个***set***。下面是一个例子。

示例 0.2.2

考虑函数 $: \{1, 2, 3\} \to \{2, 4, 6\}$，定义为 $(\ ) = 2$ 。如果我们想绘制这个函数的图像，我们将绘制点 $(1, 2)$，$(2, 4)$ 和 $(3, 6)$（但我们不会用线连接这些点，因为我们正在研究离散数学；定义域只包含三个元素，而不是它们之间无穷多个元素）。

因此，与该函数相关联的是点集 $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$。事实上，这个点集与这个（且仅与这个）函数完全相关联。所以我们可以将这个点集视为 *as the function itself*。

当然，我们在这里使用一个数学对象：有序对。这不是一个集合（因为集合是无序的）。我们应该如何讨论有序的事物呢？我们将在下一节讨论这个问题。

还有一个关于我们如何通过规则定义函数的重要考虑因素。封闭公式是指每个输出都由一个明确的规则给出，该规则仅基于其输入。这就是我们大多数人所认为的公式。例如， $(\ ) = 3\ + 1$ 是一个封闭公式，因为要找到 (5)（比如说），我们拿到输入 5 并对其进行操作：将其乘以 3 然后加上 1。

公式还可能是什么？函数的递归定义告诉我们如何计算给定输入 *based on other outputs of the function* 的输出。例如，我们可能坚持 $(\ ) = 2 \cdot (\ - 1)$。如果我们还指定初始条件 $(0) = 3$，那么我们可以得到 $(1) = 2 \cdot 3 = 6$，然后 $(2) = 2 \cdot 6 = 12$，依此类推。那么， (5) 在这里是多少？回答这个问题的唯一方法是找到 (4)，这意味着我们需要找到 (3)，这我们可以做到，因为我们已经计算了 (2)。

递归定义的函数可能对于找到特定的输出不太有用，但它们通常更容易为特定应用指定。我们将在研究序列时更深入地探讨这一现象。说到这个⋯

0.2.4 序列

有时我们感兴趣的不仅仅是一组数字，而是这些数字出现的顺序 *order*。在这种情况下，我们不能使用 *sets*，因为它们无法区分元素的顺序。相反，我们考虑的是序列。

我们将考虑有限和无限序列。一个有限序列可能是像 (1, 2, 3) 这样的简单序列；即一个包含 3 个元素的序列，按特定顺序排列。我们也可以称其为有序三元组，就像 (7, 3) 是有序对一样。一般来说，如果它有 个元素，我们可以称其为 元组（我们假设元组是有序的）。

序列 (1, 2, 3) 和集合 {1, 2, 3} 之间的主要区别在于我们“关心”顺序。也就是说，序列 (1, 2, 3) 与序列 (2, 3, 1) 不同，而集合 {1, 2, 3} 与 {2, 3, 1} 是相同的。

我们通常会使用序列作为计数工具。例如，一个非常简单的计数问题是：“100辆车有多少个轮子？”我们不仅仅回答这个问题，还可以推广并问 辆车有多少个轮子，从而得到一系列答案。这产生了无限序列（4, 8, 12, ……）。这些4的倍数出现的顺序很重要，因为序列中的每个数字都对应着问题的一个特定版本。

将一个数的序列看作一个有序列表是可以的。我们可以将各项简单地称为

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

and 可能会将整个序列称为 $(\ {}_n)_{n\geq 0}$ 或 $(\qquad)_{n\in\mathbb{N}}$.

如果我们想更精确一些、更抽象一些，可以把一个序列看作一个 *function*。其定义域是自然数，或者某个连续自然数的子集（如 {1, 2, 3, 4}）。其陪域是某个集合。我们把定义域看作序列中的位置，而这些输入的像则看作序列中的各项。

例如，我们可以考虑斐波那契数列 $(\ {}_n)_{n\geq 1}$，它以 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . . 开始。数列中的第 4 项是什么？我们可以说 ${}_4 = 3$（这是假设第一个 1 是第一项而不是第 0 项）。注意，第 4 项只能有一个。对于任意给定的 ，只能有一个第 项。因此，对于任何输入（项的位置），只有一个输出（该项）。写成 (4) = 3 是完全合理的，而且看起来确实像一个函数。但我们更喜欢使用下标。

我们也可以使用表格来描述序列中的各项。我们可能会写出如下所示的内容：

n	1	2	3	4	...
a_n	1	3	6	10	...

这看起来完全就像你表示一个函数的方式，尽管这个表描述的是三角数序列（我们稍后会看到它们为何这样称呼）。

由于序列是函数，我们可以使用任何用于描述函数的技术来描述序列。特别是，我们可能会为一个给出闭式公式。

通过明确给出第 项的函数来定义数列。例如，

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

或者，我们可以通过说明如何从一项得到下一项来递归地定义一个序列。这对于斐波那契数列尤其有用：

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; f_1 = 1, f_2 = 1.$$

在理解数列时，我们的大部分精力将用于从递归定义出发，找到该数列的闭式公式。我们将在第4章中学习这一点，以及所有其他与数列相关的内容。

0.2.5 关系

数字 2 和 6 是如何相关的？哦，我知道了：$2 < 6$。另外，6 是 2 的倍数。这两个数字也都是偶数。还有另一个事实：它们 *not equal*。这四个都是关系的例子：小于、倍数关系、都是偶数、不相等。而且对于数对来说，还有更多（无限多）的关系。

上述例子都是二元关系，因为它们关联两个元素。你也可以考虑涉及多于两个元素的关系。例如，我们可以在三个数上考虑“勾股三元组”这一关系，当且仅当它们是直角三角形的边长时该关系成立。因此，该关系对三元组 (3, 4, 5) 为真，但对 (4, 5, 6) 不成立（因为 $3^2 + 4^2 = 5^2$，但 $4^2 + 5^2 \neq 6^2$）。

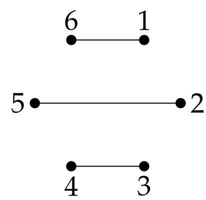
注意到我们可以把一个有序对或三元组*satisfying*一个关系来谈论。我们可以说一个有序对*belongs*该关系。定义关系的谨慎而正式的方法是将其定义为有序对（或三元组等）的一个*set*。考虑所有满足 < 的有序对(,)所构成的（无限）集合。该集合中的每个元素都包含使“小于”这一关系成立的数，而凡是使该关系成立的每一对数都属于该集合中的一对。因此我们可以说，这个有序对的集合***is***该关系。

关系可以具有一些标准性质，而判断某个特定关系是否具有给定性质，通常能帮助我们更好地理解该关系。例如，“小于”关系是反自反的，因为没有元素会小于其自身。它也是反对称的，因为不存在不同的数 和 使得 < 且 < 。同样，它是传递的，因为如果 < 且 < ，那么必然有 < 。这些只是关系性质的一些示例。

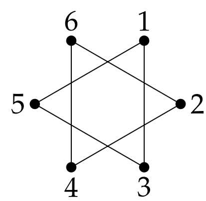
为什么我们要关心这些性质？事实证明，一些性质常常会一起出现，而对于这类性质的集合，我们可以证明关于满足它们的关系的一般性结果。因此，如果我们能够证明某个关系是自反的、对称的和传递的（无论这些词是什么意思），那么我们就知道该关系是一个等价关系，因此我们知道它还具有一系列其他性质。离散数学中有相当大的一部分内容就是研究特定类型的关系。我最喜欢的一种关系是能给我们带来图的那种。

0.2.6 图

考虑集合 = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。从该集合中哪些数对的和为 7？可以是 $\{1, 6\}$、$\{2, 5\}$ 或 $\{3, 4\}$。我们可以把该集合以及这些有趣的（无序的）数对（即二元子集）用一幅称为图的图像来表示：



另一方面，我们可能想要考虑和为偶数的数对。这样，我们就会得到下面的图像。



我们把这些离散结构称为图。图是一种关系，它是对称的（如果 与 有关联，那么 也与 有关联），并且是非自反的（没有元素与其自身有关联）。

然而，我们通常将图看作点和线的绘制，或者更准确地说，看作一个顶点集合与一个边集合，其中每一条边都是顶点的一个二元素子集。请注意，即使在这里，我们也是在使用结构 *set* 来定义结构 *graph*。

图在各种现实世界的应用中都会出现：在一个班级里，一些学生彼此是朋友，因此可以把学生看作顶点，把边看作友谊关系。在地理中，一些国家共享边界，因此把国家看作顶点，如果两个国家接壤，就用一条边连接这对顶点。也许你正在计划一次旅行，想从丹佛飞到巴黎。有没有直飞航班，还是必须在纽瓦克中转？也就是说，航班图中是否在丹佛和巴黎之间有一条边，还是只在丹佛和纽瓦克之间以及纽瓦克和巴黎之间有边？当你的亚马逊司机要向你所在社区的10栋房子投递包裹时，她的应用程序是如何知道按照什么顺序投递的呢？图论！

图论的研究本身就是一门独立的学科，许多数学家在该领域获得博士学位，并且每年撰写数百篇论文。我们将在第2章对这一迷人的主题作初步探讨。

0.2.7 更多结构

我们的结构列表还可以继续下去，但我们将在此止步。我们只会花一点时间来看看多重集，它们与集合类似，只是它们可以有

重复元素。由于这不是一门几何学课程，我们将不考虑有限几何或设计（这些介于图和几何之间）。离散结构在计算机科学中非常有用，但我们不会深入研究链表或红黑树。尽管抽象代数是一个迷人的学科，我们将不会涉及群、环、流形、偏序集或布尔代数等内容……这些都是我们在其上定义额外操作并研究集合和操作如何相互作用的集合示例。

关键在于，离散数学非常精彩，你可以花上好几个一辈子去研究它。那么我们还在等什么？让我们投入其中，解决一些问题吧。

0.2.8 阅读问题

1. 回想一下本节开始时的多米诺骨牌问题。我们问的是双六点多米诺骨牌 *set* 中有多少块骨牌。这真的是一个集合吗，按照我们的数学定义？你会使用什么离散结构来单独表示每一块骨牌?

2. 一个双零多米诺骨牌套装只包含一张多米诺骨牌（两侧均为0）。一个双一多米诺骨牌套装则包含这一张以及多米诺骨牌（1, 0）和（1, 1）。我们可以继续按此方式，创建一个多米诺骨牌套装序列。找到序列中的下三个项。1, 3, , , , ... 3. 阅读完本节后你有什么问题？写下至少一个你对本节内容感兴趣的问题。

_ _ _

第1章

逻辑与证明

逻辑是研究推论的学科。给定一些数学陈述或事实，我们希望能够得出一些结论。例如，如果我告诉你某个实值函数在区间 $[0, 1]$ 上是连续的，并且 $(0) = -1$ 且 $(1) = 5$，我们能否得出在 $[0, 1]$ 之间存在某个点，使得该函数的图像穿过 轴？是的，我们可以，这要归功于微积分中的介值定理。我们能否得出恰好只有一个这样的点呢？不能。每当我们在数学中找到一个“答案”时，实际上我们都有一个（也许是隐藏的）论证。

数学真正关心的是建立一般性的陈述（例如介值定理）。这是通过一种称为证明的论证来完成的。我们从一些给定的条件开始，即我们论证的*premises*，并由此得到一个我们感兴趣的结论，即我们的*conclusion*。

问题在于，正如你从与朋友争论中无疑已经知道的那样，并非所有论证都是*good*论证。一个糟糕的论证是指其结论并不由前提推出；也就是说，结论不是前提的推论。逻辑研究的是使一个论证成为好或坏的因素。换言之，逻辑旨在确定在何种情况下，结论是或不是一组前提的推论。

我们将在第 1.1 节从命题开始讨论，命题是论证的基本构件。理解什么算作命题以及命题可以采取哪些形式，是理解论证的第一步。我们将在第 1.2 节更深入地考察命题是如何组合在一起的。接着，在第 1.3 节中，我们将看到可以发展哪些数学工具来更好地分析这些命题以及它们之间的相互作用。最后，我们将在第 1.4 节和第 1.5 节把这些内容整合起来，看看如何利用这些工具来构建论证并证明命题。

1.1 数学陈述

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 识别陈述的逻辑结构，以根据其各个组成部分的真值来确定其真值。

2. 识别陈述中量词的使用，并根据这些量词判断该陈述的真值。

3. 在自然语言陈述与逻辑符号之间进行翻译。

1.1.1 本节预览

Investigate!

当你穿行在一片虚构的森林中时，你遇到了三个守卫桥梁的巨魔。每个要么是*knight*，总是说真话，要么是*knave*，总是说谎。在你正确辨认出每一个是骑士还是无赖之前，巨魔们不会让你通过。每个巨魔都发表了一条陈述：

> 巨魔1：如果我是一个骗子，那么这里恰好有两名骑士。 巨魔2：巨魔1在说谎。 巨魔3：要么我们都是骗子，要么我们中至少有一人是骑士。

哪个巨魔是哪一个?

试一试 1.1.1

花几分钟思考一下上面的调查问题。如果你知道巨魔1确实是个恶棍（即他们的陈述是假的），你能得出什么结论？分享一下你的初步想法。

为了*do*数学，我们必须能够*talk*和*write*关于数学的内容。也许你迄今为止的数学经验主要集中在为问题找到数值答案。随着我们迈向更高级和抽象的数学，写作将在数学过程中发挥更重要的作用。

事实上，数学作为一门独立的学科，其主要目标是确立一般的数学真理。我们如何知道这些事实，也许称为 *theorems* 或 *propositions*，是否成立？我们构建有效的论证，称为 *proofs*，以确立这些陈述的真实性。在这里，论证不是你和妈妈在争论晚餐吃什么时那种争吵。而是我们对该术语有一个技术性的定义。

定义 1.1.2 参数。

论证是一系列陈述，其中最后一个称为结论，其余的称为前提。

一个论证被称为有效的，前提是当所有前提都为真时，结论必须为真。如果一个论证无效，则说明它不是有效的；也就是说，所有前提可能为真，而结论仍然可能是假的。

一个论证是健全的，如果它是有效的并且所有前提都为真。一个命题的证明是一个其结论为该命题的健全论证。

顺便提一下……我们对论点、有有效论点和健全论点的定义与哲学中使用的定义相同，哲学是另一个主要关注逻辑和推理的学科。

要确定我们是否有一个命题的证明，我们必须同时判断每个前提是否为真，以及论证是否有效：即结论 *follows from* 前提。我们该如何做到这一点？

示例 1.1.3

考虑以下两个论点：

If Edith eats her vegetables, then she can have a cookie.
Edith eats her vegetables.

∴ Edith gets a cookie.

Florence must eat her vegetables to get a cookie.
Florence eats her vegetables.

∴ Florence gets a cookie.

(符号“∴”表示“因此”) 这些论证
有效吗？

解答。你是否同意第一个论证是有效的，而第二个论证不是？我们很快会对这一分析中所涉及的逻辑形成更深入的理解，但如果你的直觉与这一判断一致，那么你就走在正确的轨道上。

注意这两个论证看起来几乎一模一样。伊迪丝和弗洛伦斯都吃了她们的蔬菜。在这两种情况下，吃蔬菜与饼干之间都存在某种联系。然而我们主张，可以有效地推出伊迪丝能得到一块饼干，但不能推出弗洛伦斯也能得到。差异一定在于吃蔬菜与得到饼干之间的联系。我们需要擅长阅读并理解这些句子。这两句话意思相同吗？

不幸的是，在日常语言中我们往往不够严谨，你可能会忍不住说它们是等价的。但请注意，仅仅因为 Florence *must* 吃她的蔬菜，我们并没有声称这样做就会是 *enough* (她也可能还需要打扫她的房间，例如)。在日常（非数学的）实践中，你可能会觉得这个“另一方向”是被暗含的。在数学中，我们从来没有这种奢侈。

备注 1.1.4 上面的例子中的论证说明了另一个重要观点：即使你并不关心人类知识在

在数学领域，擅长分析论证是很有用的。即使你不想给你奶奶一块饼干。如果你是 *using* 数学来解决其他学科的问题，仍然需要证明你的解法是正确的。你最好有一个很好的论据来证明它！

由于论证是由陈述构成的，我们必须就什么算作陈述达成一致。

定义 1.1.5

命题是一个要么为真要么为假的陈述句。

如果一个论证中的句子不能为真或为假，那么就无法确定该论证是否有效，因为有效性描述的是前提与结论的真值之间的关系。

本节的目标是探讨一个陈述可能呈现的不同“形态”。我们将看到，更复杂的陈述可以由更简单的陈述构建而成，而且它们的真值完全由其组成部分的真值所决定。

活动预览

在继续阅读本节的主要内容之前，完成此预览活动，以开始思考本节将要探讨的问题类型。

1. 下列哪些句子应当算作陈述？也就是说，对于下面哪些句子，你可以 *potentially* 声称该句子要么为真，要么为假？请选择所有适用项。

A. 前100个正整数的和。 B. 前100个正整数的和是多少？ C. 前100个正整数的和是5050。 D. 前100个正整数的和是5050吗？ E. 前100个正整数的和是17。

2. 你和你的室友正在争论，他们提出了一个大胆的主张：菠萝既适合放在披萨上，也适合放在冰沙里。从逻辑角度看，以下哪些是对这一主张的合理回应？

A. 该陈述是错误的，因为尽管菠萝做成奶昔很好喝，但放在披萨上并不好。
B. 该陈述是错误的，因为虽然菠萝放在披萨上很好吃，菠萝做成奶昔也很好喝，但披萨奶昔从来都不好。

C. 该陈述有一半是真的，因为不管你对披萨上的菠萝怎么看，至少我们都可以同意菠萝做成冰沙很好。D. 该陈述是错误的，因为并不是每个喜欢披萨上菠萝的人都喜欢在冰沙里加菠萝。

3. 你的室友现在提出了一个更加离谱的主张：如果一部超级英雄电影属于漫威电影宇宙，那么它就是好的。从逻辑的角度来看，下列哪些是对这一主张的合理回应？

A. 这是错误的，因为有一些优秀的超级英雄电影，例如《神奇女侠》和《黑暗骑士》，它们基于 DC 漫画，因此不属于漫威电影宇宙。 B. 该陈述是错误的，因为至少有一部属于漫威电影宇宙的超级英雄电影并不好。 C. 该陈述是错误的，因为例如《绿灯侠》既不是漫威的，也不好。 D. 该陈述是正确的，因为超过一半的漫威电影都很好。

4. 你的室友对他们那些离谱的主张就是不肯消停。现在他们声称：要么每个巨魔都是骗子，要么至少有一个巨魔是骑士。对此你能说些什么？

A. 是的，这是真的，因为每个巨魔要么是骑士要么是无赖。如果并非 *all* 个巨魔都是无赖，那么一定存在 *some* 个是骑士的巨魔。 B. 这是错误的，因为有些巨魔是骑士，而另一些巨魔是无赖。 C. 该陈述是错误的，因为无法验证两种选项中哪一种成立。 D. 该陈述是错误的，因为没有任何巨魔会说所有巨魔都是无赖，因为无赖总是说谎。

1.1.2 原子与分子命题

命题是任何真值为真或假的陈述句。若一个命题不能分解为更小的命题，则称为原子命题；否则称为分子命题。

例 1.1.6

这些是陈述（实际上是*atomic*陈述）：

- 美国的电话号码有10位数字。
- 月亮是由奶酪制成的。
- 42 是一个完全平方数。
- 任何大于 2 的偶数都可以表示为两个素数之和。
- $3+7=12$

而这些并不是陈述:

- 你想吃点蛋糕吗?
- 两个平方的和.
- $1+3+5+7+\cdots+2\quad+1.$
- 去你房间!
- $3+\quad=12$

这个句子“$3+\quad=12$”不是一个陈述句的原因在于它包含了一个变量。根据　的值，句子可能为真也可能为假，但现在它既不是真也不是假。将*sentence*转变为*statement*的一种方式是以某种方式指定变量的值。这可以通过设置一个具体的替代来实现，例如，“$3+\quad=12$，其中 $\quad=9$，”这是一个真命题。或者你可以通过*capture*自由变量来*quantifying*，比如说，“对于所有　的值,$3+\quad=12$，”这是假的。我们将在下面的小节“量词和谓词”中更详细地讨论量词。

你可以通过使用逻辑连接词将更简单的（原子或分子）语句构建成更复杂的（分子）语句。例如，这就是一个分子语句:

美国的电话号码有10位数字，而42是一个完全平方数。

注意，我们可以把这分解为两个较小的陈述。这两个较短的陈述由一个“和”连接，即 *connected*。我们将考虑 5 种联结词：“和”（Sam 是一个男人，并且 Chris 是一个女人）、“或”（Sam 是一个男人，或者 Chris 是一个女人）、“如果……那么……”（如果 Sam 是一个男人，那么 Chris 是一个女人）、“当且仅当”（当且仅当 Chris 是一个女人时，Sam 才是一个男人），以及“非”（Sam 不是一个男人）。前四种称为二元联结词（因为它们连接两个陈述），而“非”是一个一元联结词的例子（因为它只作用于单个陈述）。

这些分子命题当然仍然是命题，因此它们必定要么为真要么为假。这里的关键观察是，分子命题究竟具有哪一种真值

一个陈述所实现的结果完全由连接词的类型以及各个部分的真值所决定。我们不需要知道这些部分实际上在说什么，或者它们之间是否存在某种实质性的联系，只需要知道这些部分是真是假。

为了分析逻辑联结词，只需考虑命题变量（有时称为*sentential*变量），通常是字母表中间的大写字母：　、　、　、 . , .。我们将它们视为代表（通常是原子的）陈述，但变量只能取得两种*values*：真或假。[1] 我们也有表示逻辑联结词的符号：∧，∨，→，↔，¬。

定义 1.1.7 逻辑联结词。

我们定义以下逻辑连接词。

- ∧　读作“　且　”，称为合取。
- ∨　读作“　或　”，并称为析取。
- →　读作“如果　，那么　”，称为蕴涵或条件命题。
- ↔　读作“　当且仅当　”，并称为双条件命题。
- ¬　读作“非　”，并称为否定。

一个命题的真值由其各部分（子命题）的真值决定，这取决于所使用的逻辑联结词：

定义 1.1.8 联结词的真值条件　s.

逻辑联结词的真值条件定义如下。

- 当　和　都为真时，∧　为真。
- 当　或　或二者都为真时，∨　为真。
- 当　为假或　为真（或两者皆是）时，→　为真。
- 当　和　都为真，或都为假时，↔　为真。
- ¬　为真当　为假时。

上述每一个定义都可以用一个表来表示，称为真值表。我们只是列出在各个组成部分的真值的每一种可能组合下，该陈述的真值。

[1]在 computer programming, we should call such variables **Boolean v**变量。

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P	$\neg P$
T	F
F	T

图 1.1.9 逻辑连接词的真值表。

例如，我们可以使用真值表来判断命题“如果 5 是偶数，那么 6 是偶数”是对还是错。这里　是命题“5 是偶数”，而　是命题“6 是偶数”。由于 5 不是偶数，命题　是假的。由于 6 是偶数，命题　是真的。真值表告诉我们，当　为假而　为真时（第 3 行），命题　→　为真。所以，“如果 5 是偶数，那么 6 是偶数”这个命题是真的。（如果你不喜欢这个命题为真，先保持这个想法，我们希望很快能解决它。）

注意，对我们来说，*or* 是包容性的“或”（而不是有时使用的 *exclusive or*），这意味着当　或　为真时，　∨　为真，*or both*　*and*　为真。至于其他联结词，“与”的行为正如你所期望的那样，否定也是如此。双条件（当且仅当）可能看起来有些奇怪，但你应该将其理解为陈述的两个部分是 *equivalent* 的，即它们具有相同的真值。

这只留下了含义　→　，在数学中它的含义与日常用法略有不同。然而，蕴含在数学中非常常见且有用，以至于我们必须发展一种熟练使用它们的能力，这也需要一个单独的章节（第1.2节）。

例 1.1.10

使用逻辑连接词的真值条件，确定下面哪些陈述为真，哪些为假。

1. 17 是素数，并且 17 是奇数。2. 17 是素数，并且 18 是素数。3. 17 是素数，或者 18 是素数。4. 17 是素数，或者 19 是素数。5. 如果 17 是素数，那么 19 是素数。6. 如果 18 是素数，那么我最喜欢的数字是 17。7. 17 是素数，当且仅当 19 是素数。8. 17 不是素数，当且仅当 19 不是素数。

解答。首先，让我们先确认一些事实：17 确实是素数且是奇数，18 既不是素数也不是奇数，而 19 是素数。

1. 正确。合取的两个部分都为真，因此整个陈述为真。2. 错误。第一部分为真，但第二部分为假，因此整个陈述为假。3. 正确。第一部分为真，因此整个陈述为真。一旦我们在一个析取中看到一个真命题，就可以停止检查并宣布整个陈述为真。4. 正确。由于我们使用的是包含或，当两个部分都为真时，该陈述为真。5. 正确。不要担心 17 是素数 *causes* 19 是素数这一点没有充分的理由。这并不是我们所说的条件命题的含义。由于“那么”部分为真，我们就知道整个陈述为真。

6. 对。陈述的“如果”部分是假的。这就是我们所需要的。我敢打赌你甚至不知道我最喜欢的数字是什么，但你并不需要知道。陈述为真。

7. 正确。两个部分是否具有相同的真值？是的，因为它们都为真。因此整个陈述为真。

8. 同样为真。现在两个部分都是假的（因为它们都是否定一个真命题），因此整个陈述为真。

我们对逻辑联结词及其真值的定义非常精确而且技术性很强。而语言往往并非如此。学习如何交流数学的一部分，是学习数学语言的文化规范，以及如何把日常语言中的陈述翻译成这些技术性的表述。随着练习，这会变得更容易，因此务必与许多人讨论你正在学习的数学。

以下是一些例子，说明普通语言可能会难以翻译。

示例 1.1.11

识别 y 每个以下状态的逻辑结构 ments.

1. 4 和 5 都是质数。

2. 4 或 5 中只有一个是质数。

3. 你必须每天出勤并完成作业才能通过这门课。

4. 每个数要么是偶数，要么是奇数。

解答。

1. 你是否同意这与“4 是素数，*and* 5 是素数”是同一个陈述？注意，把它写成 ∧ 是没有意义的，其中 是“4”， 是“5 是素数”。但是，如果我们令 表示陈述“4 是素数”，那么合取的两个部分都是陈述。

2. 再次，我们不能仅仅将“或”一侧的内容作为一个陈述。但是，如果我们让 表示“4是质数”，让 表示“5是质数”，那么我们可以将其写为(∨) ∧ ¬(∧)。也就是说，要么4是质数，要么5是质数，并且不可能同时4是质数和5是质数。 3. 这里是另一种表述相同陈述的方式：如果你通过了课程，那么你必须每天都出席并且完成了作业。如果我们同意这是对原始陈述的更清晰表述，那么我们可以将其结构表示为 → (∧)。

4. 注意，这并不等同于说：“每个数要么是偶数，要么是奇数。”当然，说“3 是偶数或奇数”，*is* 等同于说“3 是偶数，或者 3 是奇数”。语言真让人困惑！

我们还没有足够的逻辑技术将这个陈述翻译成其他形式，除了 ，其中 是陈述：“每个数字要么是偶数，要么是奇数。” 幸运的是，这项技术现在已经可以使用了！

1.1.3 量词与谓词

你知道所有哺乳动物都有毛发吗？每个整数不是偶数就是奇数吗？有些奇数不是质数吗？

我们的目标是探讨如何用数学符号来书写诸如此类的陈述，以突出这些陈述的逻辑结构。

这将需要考虑一种新的基本句式，称为谓词，它类似于一个陈述，但包含一个自由变量。当你用某种常量替换该变量时，这个句子就成为一个真正的命题。可以把谓词理解为对被代入“占位”变量的取值所作出的断言。

通过在某些常量上对谓词进行求值，可以将其变成一个（真或假）的陈述；或者我们可以断言，某些或所有可能的常量会使所得的陈述为真或为假。这是通过使用量词来完成的。

定义 1.1.12 量词。

全称量词写作 $\forall$，读作“对所有”。存在量词写作 $\exists$，读作“存在”或“对于某些”。

我们通常以类似于书写函数的方式来书写谓词，只是使用大写字母。例如，我们可以使用谓词 ( ) 来表示“ 是素数”。于是我们可以说 (7) 为真（因为 7 是素数），而 (8) 为假。或者使用量词，我们可以（错误地）通过写 $\forall$ ( ) 来声称所有数都是素数，或者（真实地）通过写 $\exists$ ( ) 来声称至少存在一个素数。

例子 1.1.13

将陈述“每个数都是偶数或奇数”翻译成符号。

解答。在我们甚至开始使用符号之前，将其改述为能够体现该陈述逻辑结构的方式是有帮助的。该断言在说什么？给定任意一个数，它要么是偶数，要么是奇数。特别地，我们并不是在断言所有的数都是偶数，或者所有的数都是奇数。

让我们使用 ( ) 来表示 是偶数，使用 ( ) 来表示 是奇数。那么我们可以写作，

$$E(x) \vee O(x)$$

说 是偶数或 是奇数。这对于哪个 是成立的（根据声明）？*All* 之中的它们。所以我们将该陈述写为，

$$\forall x(O(x) \vee E(x)).$$

我们添加了一些括号，以强调全称量词的作用域同时包含两个谓词。

注意，如果我们错误地将该陈述理解为声称要么所有数字都是奇数，要么所有数字都是偶数，我们可能会将其写成 $\forall$ ( ) $\vee$ $\forall$ ( )。这并不是同一回事！

就像我们为命题逻辑和逻辑连接词所做的那样，我们应该决定量化谓词为真或假的含义。我们说 $\forall$ ( ) 为真，如果不论我们为 替换什么常数 ， ( ) 都为真。类似地，$\exists$ ( ) 为真，如果存在至少一个值 ，使得 ( ) 为真。

然而，我们在这里必须小心。考虑一下这个陈述

$$\forall x \exists y(y < x).$$

你会读到：“对于每个 ，存在某个 ，使得 小于 。”请注意，$<$ 是一个带有两个自由变量的谓词；我们选择用符号表示变量之间的关系，而不是使用看起来有些怪的 (,) 或 $<$(,)。

这个陈述是真的吗？答案取决于我们的论域。当我们说“对所有” 时，我们指的是所有正整数、所有实数、所有大象，还是……？通常，这些信息由陈述的上下文所隐含。在离散数学中，我们几乎总是对 *natural numbers*, 0, 1, 2, . . . 进行量化，因此这里就把它作为我们的论域。

要使该陈述为真，我们需要：无论我们选择哪个自然数，都存在一个严格更小的自然数。也许我们可以令 为 − 1？但问题在于：如果 = 0 呢？那么 = −1，而这 *not a number!*（在我们的论域中）。因此我们看到该陈述是假的，因为存在一个小于或等于所有其他数的数。用符号表示，

$$\exists x \forall y (y \geq x).$$

我们将在第1.3节探讨一些关于量词和其他联结词的使用规则。现在，我们将重点放在日常语言中的非正式陈述与更为精确的逻辑语言之间的翻译上。进行这种翻译并不存在完美的算法，但下面是一些有用的经验法则。

每个空白都是空白。

任何形如“每一个 之物都是一个 之物”的陈述都可以写成

$$\forall x (P(x) \to Q(x)).$$

示例：所有哺乳动物都有毛发，变为 ∀ (( ) → ( ))，其中 ( ) 表示 是哺乳动物，而 ( ) 表示 有毛发。

为了理解这一点，可以从集合的角度来思考我们对这类陈述的含义。我们声称，哺乳动物的集合包含于，或者说是多毛事物集合的一个子集。我们所说的“ 是 的一个子集”，准确地意味着 的每一个元素都是 的一个元素。这也可以表述为：“如果 是 的一个元素，那么 也必然是 的一个元素。”

有些空白是空白的。

任何形如“有些 -事物是 -事物”的陈述，都可以写成

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)).$$

例如：一些猫会游泳，变为 ∃ (( ) ∧ ( ))，其中 ( ) 表示 是一只猫，( ) 表示 会游泳。

再次，从集合的角度来思考如何表达这类陈述是有帮助的。说有些猫会游泳，就是说存在一些事物同时属于猫的集合和会游泳的事物的集合。这样的动物属于这两个集合的 *intersection*，你可以将其描述为属于第一个集合 *and* 第二个集合。此类形式的存在性陈述主张这两个集合的交集非空。

隐含量词。在数学中，精确是一个好习惯。然而，有时候我们可以稍微放宽一些，只要大家对某个约定达成一致。一个这样的约定例子是，假设包含自由变量的谓词的句子被视为命题，其中变量是全称量化的。

例如，你是否相信如果一个形状是正方形，那么它就是矩形？但如果这并不是一个陈述，这怎么可能是真的呢？更精确地说，我们有两个谓词：( ) 表示“ 是一个正方形”， ( ) 表示“ 是一个矩形”。我们正在考察的 *sentence* 是

$$S(x) \to R(x).$$

这既不是真也不是假，因为它不是一个陈述。但是，拜托！我们都知道我们本来是要考虑这个陈述的，

$$\forall x(S(x) \to R(x)),$$

而这正是我们的约定所要求我们考虑的。我们把所得的陈述称为原句的全称概化。

定义 1.1.14

给定一个包含自由变量的句子，其全称概括是通过在句子开头添加足够多的全称量词，使所有自由变量都成为受约束变量而得到的陈述。

类似地，我们经常对谓词和命题之间的区别有些马虎。例如，我们可能会写，*let* ( ) *be the* 命题, *“ is prime,”* 这在技术上是错误的。隐含的意思是，我们定义 ( ) 为一个谓词，对于每个 ，它变成了命题“ 是素数”。

1.1.4 阅读问题

1. 将每个用符号表示的陈述与其陈述类型进行匹配。

$P \to Q$	P and Q (conjunction)
$P \vee Q$	If P, then Q, (implication)
$P \wedge Q$	P or Q (disjunction)
$\neg P$	Not P (negation)

2. 考虑句子：“如果 > 3，那么 是偶数。”
以下关于该句子的哪些陈述是正确的？请选择所有适用的选项。

A. 该句子是一个假命题，因为它含有一个自由变量。B. 该句子的全称概括是一个命题。C. 如果用 10 代替 ，所得的命题为真。D. 无论用哪个自然数代替 ，该句子都成为一个真命题。

3. 阅读本节后你有哪些问题？请至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

1.1.5 练习题

1. 对于下面的每个句子，判断它是原子命题、分子命题，还是根本不是命题。

(a) 有人说末日将近，也有人说我们很快会看到哈米吉多顿。 (b) 妈妈要过来把一切恢复成它本该有的样子。

(c) 学习游泳。

2. 将下列每个句子分类为原子命题、复合命题，或根本不是命题。如果该命题是复合命题，请说明其类型（合取、析取、条件命题、双条件命题、否定）。

(a) 每个人有时都会被愚弄。

(b) 每一个大于 1 的自然数要么是素数，要么是合数。

(c) 回你的房间去！

(d) 丹佛野马队将赢得超级碗，否则我就把帽子吃了。

(e) 这件衬衫不是黑色的。

3. 判断下面每个复合命题是真还是假，或者是否无法确定。假设你不知道我最喜欢的数字是什么（但你知道哪些数字是素数）。

（a）如果 4 是我最喜欢的数字，那么 $4 + 1$ 是我最喜欢的数字。（b）8 是我最喜欢的数字，而且 3 不是素数。

（c）4 是我最喜欢的数字，或者 4 是素数。

(d) 如果 4 是素数，那么 $2 \cdot 4$ 是素数。 (e) 如果 3 是素数，那么 3 是我最喜欢的数字。 (f) 8 是我最喜欢的数字，并且 4 不是素数。

4. 设 (,) 为谓词：“人 x 在时间 y 可以被欺骗。” 将每个陈述与其符号表示相匹配。

It is always true that some people can be fooled.	$\exists x \forall y P(x, y)$
Sometimes everyone can be fooled.	$\forall x \exists y P(x, y)$
Everyone can be fooled sometimes.	$\forall y \exists x P(x, y)$
Some people can be fooled all of the time.	$\exists y \forall x P(x, y)$

5. 你的朋友认为你不可能在同一时间愚弄所有人。还有另一种说法是什么？以及你会如何用符号来表示这一点（使用 (,) 来表示你在时间 愚弄了 ）。

A. 有人从不被愚弄。 ∃ ∀ ¬ (,) B. 每个人从不被愚弄。 ∀ ∀ ¬ (,) C. 有人有时不会被愚弄。 ∃ ∃ ¬ (,) D. 每个人有时不会被愚弄。 ∀ ∃ ¬ (,)

6. 不论你如何看待在不同时间有多少人会被愚弄，如果我们将 (,) 重新解释为 < ，并且只对自然数进行量化（因此∀ 表示“对所有自然数”，而 ∃ 表示“存在一个自然数”），你可以得出什么结论？选择所有适用的选项。

A. ∀ ∃ (,) 为真。B. ∃ ∀ (,) 为真。C. ∀ ∃ (,) 为真。D. ∃ ∀ (,) 为真。E. 无论 (,) 表示什么，我们都可以得出 ∀ ∃ (,) 和 ∃ ∀ 不 *logically equivalent*。

7. 令 ( ) 为谓词，“17 + 1 是偶数。”

(a) (15) 是真还是假？ (b) 从 (15) 的真值中，你能得出关于 ∃ ( ) 的结论吗？ (c) 从 (15) 的真值中，你能得出关于 ∀ ( ) 的结论吗？

8. 设 ( ) 为谓词，“18 + 1 是偶数。”

（a） (15)是真还是假？（b）从 (15)的真值中，如果有的话，你能得出关于∃ ( )的什么结论？（c）从 (15)的真值中，如果有的话，你能得出关于∀ ( )的什么结论？

9. 考虑句子，∃ (,) → ∀ (,)。我们可以对这个句子说些什么？请选择所有适用的选项。

A. 该句子是一个陈述，因为它包含量词。

B. 该句不是一个命题，因为 和 是自由变量。 C. 该句不是一个命题，因为 是自由变量。 D. 该句的全称概括是一个命题。

10. 假设 (,) 是定义在一个非常小的论域上的二元谓词：仅包含整数 1、2、3 和 4。对于这 16 对数中的每一对， (,) 根据下表要么为真，要么为假（ 的取值对应行， 的取值对应列）。

	1	**2**	**3**	**4**
1	T	F	F	F
2	F	T	T	F
3	T	T	T	T
4	F	F	F	F

例如， (1, 3) 为假，如第一行第三列中的 F 所示。使用该表来判断下列陈述是真还是假。

（a） ∀ ∃ (,)。 （b） ∃ ∀ (,)。 （c） ∀ ∃ (,)。 （d） ∃ ∀ (,)。

1.1.6 补充练习

1. 假设 和 是命题： ： 杰克通过了数学考试。 ： 吉尔通过了数学考试。

(a) 将“杰克和吉尔都通过了数学”翻译成符号。 (b) 将“如果杰克通过了数学，那么吉尔没有通过”翻译成符号。 (c) 将“ ∨ ”翻译成英文。 (d) 将“¬(∧) → ”翻译成英文。 (e) 假设你知道如果杰克通过了数学，那么吉尔也通过了。若你知道以下情况，你能得出什么结论： i. 吉尔通过了数学？ ii. 吉尔没有通过数学？

2. 翻译为符号。用 ( ) 表示“ 是偶数”，用 ( ) 表示“ 是奇数”。

(a) 没有任何数既是偶数又是奇数。 (b) 任何偶数加一都是奇数。

(c) 存在一个是偶数的素数。（d）在任意两个数之间都有第三个数。（e
）在一个数与比该数大一的那个数之间没有任何数

呃。

3. 对于下列每个陈述，给出一个使该陈述为真的论域，以及一个使该陈述为假的论域。

（a） ∀ ∃ (^{2} =)。 （b） ∀ ∀ (
< → ∃ (< <))。 （c） ∃ ∀ ∀
(< → ≤ ≤)。

1.2 启示

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 解释一个蕴涵在什么条件下为真。
2. 识别与给定蕴涵或其逆命题等价的陈述。
3. 解释蕴涵命题、其逆命题和其逆否命题的真值之间的关系。

1.2.1 节预览

Investigate!

小蒂米的妈妈对他说：“如果你不把西兰花全部吃完，就吃不到冰淇淋。”当然，蒂米很爱吃冰淇淋，所以他很快就把西兰花全都吃完了（其实味道还挺不错）。

晚饭后，当蒂米要他的冰淇淋时，被告知不行！蒂米有权感到不高兴吗？为什么或为什么不?

迄今为止，数学中最重要的一类陈述是蕴涵。它也是我们基本分子陈述类型中最不直观的一种。本节的目标是让我们更加熟悉这一关键概念。

要理解为什么这种说法如此普遍，考虑*Pythagorean Theorem*。尽管社交媒体可能声称如此，勾股定理并不是

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

好的，当然，这里有一个变量，所以我们必须使用惯例来进行普遍化推理，

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \left(a^2 + b^2 = c^2\right).$$

所以 $1^2 + 5^2 = 2^2$??? 好吧，行。只要 和 是直角三角形两条直角边的长度，而 是斜边的长度，该等式就成立。换句话说：

> *If* 和 是直角三角形两条直角边的长度，斜边的长度为 , *then* $^2 +$ $^2 =$ ^{2}。

数学是关于提出一般性的陈述，但这些陈述很少会对绝对的 *every* 数学对象成立。我们将陈述与特定类型的对象关联的方式是通过一个蕴含：“任选一个你喜欢的对象，*if* 它是正确类型的，*then* 那么这个命题对它成立。”

类似地，正如我们在“量词与谓词”小节中看到的那样，当我们提出诸如“每个正方形都是矩形”这样的断言时，实际上表达的是一个蕴含：“如果某个东西是正方形，那么它就是矩形。”

这里提醒一下我们所说的“蕴涵”是什么意思。

定义 1.2.1 蕴涵。

蕴涵（或条件命题）是一种分子命题，其形式为

$$P \to Q$$

其中 和 是命题。我们说

- 是假设（或前提）。
- 是结论（或后件）。

一个蕴涵在 为假或 为真（或两者皆是）时是*true*，否则是*false*。特别地，使 $\to$ 为假的唯一方式是 为真*and* 为假。

蕴涵的真值定义也可以表示为真值表：

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

图 1.2.2 $\to$ 的真值表。

这个真值表有道理吗？我们应该相信它吗？尤其看看第三行：F，T，T，并考虑这个蕴含，“如果 $5 < 3$，那么 $5 + 3 = 8$。”那个陈述*feel*是真的吗？真值表说它应该是真的（因为 $5 < 3$ 为假，而 $5 + 3 = 8$ 为真）。

在本节的剩余部分，我们将要做的很多工作都是让我们确信这个真值表是合理的。

活动预览

1. 考虑以下陈述：“如果汤米不吃他的西兰花，那么他就不会得到冰淇淋。”以下哪些陈述表示相同的意思（即在相同情况下为真）？请选择所有适用项。

A. 如果汤米确实吃了他的西兰花，那么他就会得到冰淇淋。 B. 如果汤米得到了冰淇淋，那么他吃了他的西兰花。 C. 如果汤米没有得到冰淇淋，那么他没有吃他的西兰花。

D. 汤米吃了他的西兰花，还是没有得到任何冰淇淋。

2. 假设你那不太靠谱的叔叔向你提供以下交易：如果你把车借给他，他就会带来塔可。以下哪种情况可以公平地说你的叔叔是个骗子（即，他的陈述是假的）？选择所有适用的情况。

A. 你把车借给他。他给你带玉米卷饼。 B. 你把车借给他。他从不买给你玉米卷饼。 C. 你不把车借给他。他仍然给你带玉米卷饼。 D. 你不把车借给他。他从不带给你玉米卷饼。

3. 考虑 *sentence*，“如果 ≥ 10，那么 $^2 \geq 25$。” 当我们用一个值替换 ，或者将 “捕获”在量词的作用域中时，这个句子就成为一个陈述。以下哪些断言为真（选择所有适用项）？

A. 如果我们将 替换为15，那么结果语句为真。（注意，$15^2 = 225$。） B. 如果我们将 替换为3，那么结果语句为真。 C. 如果我们将 替换为0，那么结果语句为真。 D. 泛化命题（“对于所有 ，如果≥ 10，则 $^2 \geq 25$”）为真。 E. 存在一个数字，我们可以将 替换为该数字，使得语句为假。

4. 考虑以下陈述：“如果我看电影，那么我吃爆米花”（这恰好是真的）。仅基于你对英语的直觉，以下哪些陈述与此意思相同？请选择所有适用的选项。

A. 如果我吃爆米花，那么我会看电影。B. 如果我不吃爆米花，那么我就不看电影。C. 当我看电影时，吃爆米花是必要的。D. 对我而言，吃爆米花是看电影的充分条件。E. 只有当我吃爆米花时，我才看电影。

1.2.2 理解真值表

蕴含命题的真值由其两个部分的真值决定。我们对蕴含命题真值条件的定义表明，蕴含命题只有在一种情况下为假：当前件为真而后件为假时。

例 1.2.3

请考虑以下陈述:

如果 Bob 在期末考试中得到 90 分，那么 Bob 将通过这门课。

这显然是一个蕴含关系： 是命题“Bob 在期末考试中得了 90 分”，而 是命题“Bob 将通过这门课程”。

假设我对鲍勃说了那句话。在什么情况下称我为说谎者是公平的? 如果鲍勃真的在期末考试中得了90分，并且他通过了这门课呢? 那么我没有撒谎；我的陈述是真的。然而，如果鲍勃确实得了90分，但没有通过这门课，那么我撒谎了，陈述就是假的。棘手的情况是这样的：如果鲍勃在期末考试中没有得90分呢? 也许他通过了这门课，也许没有。在这两种情况下，我撒谎了吗? 我认为没有。在这最后两种情况下， 是假的，而陈述 $\rightarrow$ 是真的。在第一种情况下， 是真的， $\rightarrow$ 也是真的。所以当 为假或 为真时， $\rightarrow$ 为真。

仅为明确，虽然我们有时将 $\rightarrow$ 读作“ *implies* ”，但我们并不是在坚持 和 之间存在某种 *causal* 关系（尽管可能存在）。“如果 $<$ ，那么 $+ 1 <$ $+ 1$” 是一个真实的命题（或者至少它的普遍概化是真实的）。我们知道它是真实的，因为我们理解这两部分如何互动。如果你给两个数字 和 加上 1，它们的顺序不会改变。但命题“如果 $1 < 2$，那么欧几里得研究了几何”也是一个真实的蕴涵。

例子 1.2.4

决定下列哪些陈述为真，哪些为假。简要解释。

1. 如果 $1 = 1$，那么大多数马有 4 条腿。 2. 如果 $0 = 1$，那么 $1 = 1$。 3. 如果 8 是质数，那么 的第 7624 位数字是 8。 4. 如果 的第 7624 位数字是 8，那么 $2 + 2 = 4$。

解答。四个陈述都为真。记住，蕴含关系只有在*if*部分为真且*then*部分为假的情况下才为假。

1. 在这里，假设和结论都为真，因此蕴涵为真。即使真实的数学事实与关于马的事实之间没有有意义的联系，这也无关紧要。

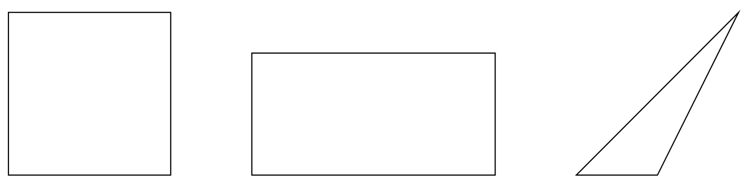
2. 在这里，假设是错误的，而结论是真实的，因此蕴含为真。 3. 我不知道　的第7624个数字是什么，但这并不重要。由于假设是错误的，蕴含自动为真。

4. 无论假设的真值如何，结论都为真，从而使得蕴涵为真。

这是一个奇怪的例子，并不完全代表我们使用蕴含的方式。不过，这种奇怪并不仅仅是数学家固执的表现。蕴含的真值条件 *must* 必须像数学中的那样，才能使得其意义明确。让我们看看为什么。

示例 1.2.5

考虑以下陈述："所有正方形都是矩形"，这也可以表述为："对于所有形状，如果该形状是正方形，那么它就是矩形。"这个陈述是正确的吗？我们能确定吗？下面的三个形状呢？



解答。当然，这个陈述是正确的。正方形是一个四边形，具有4个直角和4条相等的边，而矩形是一个四边形，具有4个直角。

然而，当我们考虑像这样的普遍命题时，我们的意思是，无论我们为变量（在这种情况下是"形状"）"插入"什么，结果命题都是真的。当命题关于特定形状时，我们有一个蕴含　→　。这意味着，必须为真的是，如果左边的实际形状是正方形，那么它就是矩形。很好。形状是正方形（　为真）并且是矩形（　为真），所以是的，蕴含为真。

中间那个矩形的蕴含关系成立吗？嗯，那个形状不是正方形（　为假），而且它是矩形（　为真）。但是你看，我们相信所有正方形都是矩形，所以这个命题一定是真的。即便是对一个矩形也是如此。唯一能成立的方式就是"假蕴含真"为真！

同样地，"所有正方形都是长方形"这一陈述是真命题，即使当我们观察的是一个三角形时也是如此。　为假（该三角形不是正方形），　为假（该三角形不是长方形）。值得庆幸的是，我们也将这种情况下的蕴涵定义为真。

我们已经给出了用于说明蕴涵真值表中第1、3和4行的图形（图1.2.2）。哪一种图形说明第2行？那将需要

一个既是正方形却不是矩形的形状……当然我们找不到这样的一个，正因为这个陈述是真的！

1.2.3 相关陈述

蕴含是一种表达两个陈述之间关系的方式。人们常常会问这些陈述之间是否还存在其他关系，这个问题往往很有意思。这里我们引入一些常用的术语来回答这一问题。

定义 1.2.6 逆命题、逆否命题与否命题。

给定一个蕴含 $\to$ ，我们说，

- 逆命题是命题 $\to$ 。
- 逆否命题是陈述 $\neg \to \neg$ 。
- 逆命题是陈述，$\neg \to \neg$ 。

例 1.2.7

考虑这个蕴涵：“如果你打扫了你的房间，那么你就可以去参加聚会。”给出该陈述的逆命题、逆否命题和否命题。

解答。其逆命题是：“如果你能去参加聚会，那么你就打扫你的房间。”

逆否命题是：“如果你不能去参加聚会，那么你就不打扫你的房间。”

逆命题是，“如果你不打扫你的房间，那么你就不能去参加聚会。”

从符号上看，逆命题和逆否命题都会*switch*该陈述两个部分的顺序（或者，也可以把箭头想成指向相反的方向）。逆否命题和否命题都会对两个陈述取*negation*。注意，如果你先取逆命题（交换顺序），然后对该逆命题取逆否命题*of*（把顺序再交换回来并对两部分都取否定），你就得到了否命题。因此，否命题不过是逆命题的逆否命题。或者说，是逆否命题的逆命题，这是一个在派对上提起也很有趣的小知识。

当考虑带有量词的命题时，在构造逆命题、逆否命题和否命题时，我们忽略外层量词。

量词与逆命题、逆否命题和否命题。

一个量化的蕴含 ∀ (( ) → ( )) 具有：

逆命题 ∀ (( ) → ( )) 逆否命题
∀ (¬ ( ) → ¬ ( )) 否命题 ∀ (¬ ( )
→ ¬ ( ))

注释 1.2.8 我们不太可能遇到形如 ∃ (( ) → ( )) 的陈述，因为如果存在任何使 ( ) 为假的 ，那么这个命题自动成立。但如果遇到这种情况，与上述相同的规则适用于逆命题、对换命题和反命题：在交换和/或否定命题部分时，只需忽略量词。

例如，“对于所有形状，如果该形状是正方形，那么它是矩形”（即，所有正方形都是矩形）有其逆命题：“对于所有形状，如果该形状是矩形，那么它是正方形”（因此所有矩形都是正方形）。

嗯，那并不是真的！确实存在一些图形是矩形但不是正方形。事实上，这是一个原命题为真而逆命题为假的例子。在整个数学中有很多这样的例子。也有一些真蕴含其逆命题也为真的例子。仅凭逻辑你是无法知道的。[2]

“对于所有形状，如果它是一个正方形，那么它是一个矩形”的逆命题是“对于所有形状，如果该形状不是矩形，那么它不是正方形。”这是正确的。事实上，***the contrapositive of a true statement is always true***！

由于一个蕴涵的逆命题总是与其原始蕴涵具有相同的真值，因此分析逆命题常常有助于决定一个蕴涵是否为真。

例 1.2.9

判断正误：如果你从一副标准扑克牌中任意抽取九张，那么你一定至少有三张牌同属一个花色。其逆命题是否成立？

解答。正确。原命题有点难以分析，因为九张牌的组合太多。但考虑其逆否命题：如果你 *don't* 至少有三张同一花色的牌，那么你就没有九张牌。很容易看出这一点为何成立。如果你在任何一个花色中都没有至少三张牌，那么四种花色中每种至多只能有两张牌，总数至多为八张牌。

[2]It turns out the Pythagorean Theorem is one such statement. It is also true that *if* $a^2 + b^2 = c^2$, *then* there is a right triangle with legs of lengths a and b and hypotenuse of length c. So we could have also written the theorem as a biconditional: "a and b are the lengths of the legs of a right triangle with hypotenuse of length c *if and only if* $a^2 + b^2 = c^2$."

逆命题：如果你至少有三张同一花色的牌，那么你就有九张牌。这是错误的。你可能只有三张黑桃，除此之外什么也没有。注意，为了证明逆命题（一个蕴含）是错误的，我们给出了一个例子，其中假设为真（你确实有三张同一花色的牌），但结论为假（你并没有九张牌）。换句话说，我们找到了一个使我们处在该蕴含真值表第 2 行的例子。

理解逆命题和逆否命题有助于理解蕴涵及其真值：

示例 1.2.10

假设我告诉 Sue，如果她在期末考试中得了 93%，那么她这门课就会得到 A 。假定我所说的是真的，在以下情况下你能得出什么结论：

1. 苏在期末考试中得了93%。 2. 苏在这门课中得了A。 3. 苏在期末考试中没有得93%。 4. 苏在这门课中没有得A。

解答。首先注意，只要 → 和 都是真命题，那么 也必然为真。对于本题，令 表示“Sue 在期末考试中得到 93%”，令 表示“Sue 在这门课中将获得 A”。

1. 我们有 → 和 ，因此可以推出 。Sue 得了 A。

2. 你不能得出任何结论。例如，Sue 可能因为做了额外加分而得了 A。注意，我们并不知道如果 Sue 得到一个 ，那么她期末考试就得了93%。这是原始蕴含的逆命题，因此它可能是真的，也可能不是真的。

3. → 的逆命题的逆否命题是 ¬ → ¬ ，它表述为：如果Sue 在期末考试中没有得到 93%，那么她就不会在这门课中得到 A。但这并不能由原始蕴涵推出。再次，我们无法得出任何结论。Sue 可能做了额外加分的作业。

4. 如果 Sue 没有得到 A，但 *did* 在期末考试中得了 93%，会发生什么？那么 为真，而 为假。这就使得蕴含 → 为假！因此，一定是 Sue 在期末考试中没有得到 93%。注意，我们现在有蕴含 ¬ → ¬ ，它是 → 的逆否命题。由于假设 → 为真，我们也知道 ¬ → ¬ 同样为真。

正如上文所述，蕴含与其逆命题在逻辑上并不等价，但它们有可能同时为真。在这种情况下，当 $\to$ 和 $\to$ 都为真时，我们称 和 是等价的，并写作 $\leftrightarrow$ 。这就是我们在第1.1 节中提到的双条件命题。

你可以把“当且仅当”陈述看作由两部分组成：一个蕴含及其逆命题。我们可以说一个是“如果”部分，另一个是“仅当”部分。我们也有时说，“当且仅当”陈述有两个方向：正向（ $\to$ ）和反向（ $\leftarrow$ ，而这实际上只是 $\to$ 的一种不严谨的记号）。

让我们稍微想一想哪一部分是哪一部分。 $\to$ 是“如果”部分还是“仅当”部分？考虑一个例子。

例 1.2.11

假设“我唱歌当且仅当我在洗澡”是真的。我们知道这意味着两点：如果我唱歌，那么我在洗澡；并且反过来，如果我在洗澡，那么我唱歌。令 表示命题“我唱歌”，令 表示“我在洗澡”。因此， $\to$ 是命题“如果我唱歌，那么我在洗澡”。这是“当且仅当”陈述中的哪一部分？

我们真正要问的是“我唱歌 *if* 我在洗澡”和“我唱歌 *only if* 我在洗澡”的含义。第一个（“if”部分）在什么时候是 *false*？当我在洗澡但没有唱歌的时候。这与命题“如果我在洗澡，那么我唱歌”为假的条件是相同的。因此，“if”部分是 $\to$ 。另一方面，说“我只有在洗澡时才唱歌”等价于说“如果我唱歌，那么我在洗澡”，因此，“only if”部分是 $\to$ 。

知道哪一部分是“如果”还是“当且仅当”的部分并不是特别重要，但这确实说明了一件非常、非常重要的事情：*There are many ways to state an implication!*

例 1.2.12

请用尽可能多的方式改写这个蕴含命题：“如果我在做梦，那么我在睡觉。”然后对其逆命题也做同样的事情。

解答。以下各项均与原始蕴涵等价：

1. 如果我做梦，那么我处于睡眠状态。
2. 我只有在处于睡眠状态时才会做梦。
3. 要做梦，我必须处于睡眠状态。

4. 要做梦，我必须处于睡眠状态。

5. 要睡着，做梦就足够了。

6. 除非我在睡觉，否则我没有在做梦。

以下各项与逆命题（如果我在睡觉，那么我在做梦）等价：

1. 如果我睡着了，我会做梦。
2. 我只有在做梦时才是睡着的。
3. 我必须做梦才能入睡。
4. 为了做梦，我只需睡着即可 .
5. 如果我不做梦，那么我就没有睡着。

希望你同意上述的例子。我们包括了“必要且充分”的版本，因为在讨论数学时，这些是常见的。让我们一次性地达成一致，明确它们的含义。

定义 1.2.13 必要与充分。

- “ 是 的必要条件”意味着 $\rightarrow$ 。
- “ 对 是充分的”意味着 $\rightarrow$ 。
- 如果 对 是必要且充分的，那么 $\leftrightarrow$ Sure! Please provide the source text yo

老实说，如果我不小心的话，我在这些方面会遇到困难。我发现保持一个标准示例作为参考有帮助。

示例 1.2.14

在一副标准扑克牌中，红色花色是红心和方块。黑色花色是梅花和黑桃。因此可以断言，在抽取一张牌之后，如果我的牌是黑桃，那么我的牌是黑色的 。

R使用必要且充分的措辞来陈述这一事实 ng.

解答。要使我的牌是黑桃，它必须是黑色的。然而，仅仅是黑色并不足以说明我拿的是黑桃（因为也可能是梅花）。

我也可以说，要拥有一张黑色牌，拥有一张黑桃就足够了。我不一定拥有黑桃。

考虑你需要多少证据是有帮助的。仅仅知道这张卡是黑桃就足够得出它是黑色卡片的结论吗？是的，这足够了！是黑桃是卡片为黑色的充分条件。

思考条件的必要性和充分性在撰写证明和论证结论时也会有所帮助。如果你想要建立某个数学

事实上，思考还有哪些其他事实在 *be enough* (足以) 证明你的事实方面会很有帮助。如果你有一个假设，想一想如果该假设为真，还必须具备哪些必要条件。

1.2.4 阅读问题

1. 恰好事实是所有哺乳动物都有毛发。以下哪些也是真的?

A. 有毛发是成为哺乳动物的必要条件。 B. 有毛发是成为哺乳动物的充分条件。 C. 如果一种动物没有毛发，那么它就不是哺乳动物。 D. 一种动物只有在有毛发的情况下才是哺乳动物。

2. 给出一个 *true* 蕴含（用文字表述）的例子，其逆命题是 *false*。解释为什么你的蕴含为真，以及为什么逆命题为假。

3. 阅读本节后你有哪些问题? 请至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

1.2.5 练习题

1. 在我的保险箱里有一张纸，上面用彩色蜡笔画着两个形状。一个是圆形，另一个是五边形。每个形状都用单一的颜色绘制。假设当我告诉你，“如果圆形是紫色的，那么五边形是橙色的。

因此，你对下列陈述的真值了解些什么?

(a) 圆形和五边形都是紫色的。 (b) 圆形和五边形都是橙色的。 (c) 圆形不是紫色的，或者五边形是橙色的。 (d) 如果五边形是橙色的，那么圆形是紫色的。 (e) 如果五边形不是橙色的，那么圆形不是紫色的。

2. 假设命题 *"If the square is yellow, then the circle is purple,"* 为真。另假设其逆命题为假。将下面的每个陈述分类为真或假（如果可能）。

(a) 圆是紫色的。 (b) 当且仅当圆不是紫色时，正方形是黄色的。 (c) 正方形是黄色的。

(d) 正方形是黄色的，当且仅当圆形是紫色的。

3. 考虑该陈述：*"If you will give me magic beans, then I will give you a cow."* 判断下面每个陈述是其逆命题、逆否命题，还是都不是。

(a) 如果我给你一头牛，那么你就不会给我魔法豆。 (b) 如果我给你一头牛，那么你就会给我魔法豆。 (c) 如果你不给我魔法豆，那么我就不会给你一头牛。 (d) 如果你给我魔法豆，那么我就不会给你一头牛。 (e) 你会给我魔法豆，而我不会给你一头牛。 (f) 如果我不给你一头牛，那么你就不会给我魔法豆。

4. 你发现了一篇关于图论的旧论文，讨论了图的 *viscosity*（据你所知，这完全可能是作者杜撰的东西）。论文中的一个定理声称：“如果一个图满足 *condition (V)*，那么该图是 *viscous*。”以下哪些是对这一断言的等价表述？哪些与该断言的 *converse* 等价？

(a) 只有黏性图满足条件 (V)。

(b) 对于一个图形来说，要具有粘性，必须满足条件 (V)。

(c) 一个图只有在满足条件 (V) 时才是黏性的。

（d）满足条件（V）是图具有黏性的必要条件。

(e) 如果图满足条件 (V)，则称其为粘滞的。

5. 以下哪些陈述与蕴含“*if you win the lottery, then you will be rich,*”等价，哪些与该蕴含的逆命题等价？

(a) 如果你不富有，那么你就没有中彩票。

(b) 中彩票就足以致富。

(c) 要么你中彩票，否则你并不富有。 (d) 如果你富有，那么你一定是中过彩票。 (e) 当且仅当你富有时，你才会中彩票。

1.2.6 额外练习

1. 翻译成英文：

(a) $\forall\ (\ \ (\ ) \to\ \ (\ \ +2))$. (b) $\forall$ $\exists\ (\rceil\ \ \ \rceil=\ )$. (c) $\forall\ \exists\ (\rceil\ \ \rceil\ =\ )$. (d) $\forall\ \forall\ (\ ^3 =\ ^3 \to$ $=\ )$.

2. 考虑以下陈述：“如果Oscar吃中餐，那么他喝牛奶。”

(a) 写出该命题的逆命题。

(b) 写出该命题的逆命题。 (c) 逆命题有可能为假吗？如果是的话，这会告诉你什么？ (d) 假设原命题为真，并且奥斯卡喝牛奶。你能得出任何结论（关于他是否吃中餐）吗？解释一下。 (e) 假设原命题为真，并且奥斯卡不喝牛奶。你能得出任何结论（关于他是否吃中餐）吗？解释一下。

3. 将以下每个陈述写成“如果……，那么……”的形式。注意，有些陈述可能是假的（对于本题来说这是可以接受的）。

(a) 要减肥，你必须锻炼。

(b) 要减肥，你所需要做的只是锻炼。

(c) 每个美国人都是爱国的。

(d) 只有当你是美国人时，你才是爱国的。

(e) 有理数集是实数集的子集。

(f) 如果一个数不是偶数，那么它是质数。

(g) 要么野马队将赢得超级碗，要么他们不会参加超级碗。

4. 考虑如下蕴含：“如果你打扫了你的房间，那么你就可以看电视。”用尽可能多的方式改述这一蕴含。然后对其逆命题也做同样的事情。

5. 回顾微积分：如果一个函数在某一点 处可导，那么它在 处连续，但该陈述的逆命题并不成立（例如，$(\ ) = |\ |$ 在点 0 处）。请用“必要且充分”的语言重述这一事实。

6. 考虑如下陈述：“对所有自然数 ，如果 是素数，那么 是孤立的。”对于本题，你不需要知道 *solitary* 的含义，只需知道它是一种某些数具有而另一些数不具有的性质。

(a) 写出该命题的逆命题和逆否命题，并说明哪个是哪一个。注意：原命题声称某个蕴含对所有 都成立，我们正是对这个蕴含取逆命题和逆否命题。(b) 写出原命题的否定。要证明该命题是假的，你需要证明什么？(c) 尽管你不知道 10 是否是孤立数（事实上，没有人知道这一点），命题“如果 10 是素数，那么 10 是孤立数”是真还是假？请解释。(d) 事实上，8 是孤立数。这是否能告诉你关于原命题、其逆命题或其逆否命题的真伪情况？请解释。(e) 假设原命题是真的，你能说出素数的 *set* 与孤立数的 *set* 之间的关系吗？请解释。

1.3 逻辑规则

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 使用真值表判断两个命题是否逻辑等价。 2. 使用真值表判断一个推理规则是否有效。 3. 使用逻辑等价与推理规则来化简命题并进行推理。

1.3.1 本节预览

Investigate!

福尔摩斯总是穿他仅有的两件背心之一：一件粗花呢的，一件薄荷绿色的。他总是穿绿色背心或红色鞋子之一。每当他同时穿紫色衬衫并穿绿色背心时，他就会选择不戴领结。除非他同时穿着紫色衬衫或红色鞋子，否则他从不穿绿色背心。每当他穿红色鞋子时，他也会穿紫色衬衫。今天，福尔摩斯戴了领结。他还穿了什么？

试试 1.3.1

花几分钟思考上述的 *Investigate!* 问题。在谜题中的六个陈述中，只有一个是原子陈述。使用这个原子陈述和另一个陈述推导出关于霍姆斯可能（或可能不）穿着的一个新陈述。解释为什么你认为你的新陈述是正确的。

提示。原子陈述是，“福尔摩斯戴着蝴蝶结领带。”只有一个分子陈述把它作为其*atoms*之一。

逻辑研究语句如何相互作用。更准确地说，我们考虑的是语句的逻辑形式如何相互作用。逻辑学的研究不关心原子语句的内容或谓词的意义。例如，声明“如果蜘蛛有六条腿，那么Sam走路时会一瘸一拐”和“如果月亮是由奶酪组成的，那么切达奶酪是一种奶酪”从逻辑角度来看是相同的。逻辑不关心Sam是否是蜘蛛，也不关心月亮的烹饪成分。两个声明具有相同的形式：它们是蕴含关系， → 。

当然，在数学中我们常常*do*知道各种之间的一些关系

原子命题。例如，我们知道“是偶数”和“是 10 的倍数”之间存在一种关系。这种关系使我们能够做出这样的断言：“如果我想到的数字是 10 的倍数，那么它就是偶数。”假设我还告诉你，我现在想到的一个数字不是偶数。我们就可以推断出，我想到的不是 10 的倍数！关键在于，如果我们接受这里这些陈述的真实性，就可以在不考虑数字本身性质的情况下做出这一推断。如果在试图理解复杂推理时，我们能够将论证的内容与其逻辑形式分离开来，这往往会让人感到非常解放，并提供急需的清晰性。

本节的目标是建立一些程序，用于根据命题的逻辑形式来分析其真假如何相互作用。我们将看到，一些复合命题无论其原子部分是真还是假，都必然为真，而有些命题则必然为假。对于其他命题，可能出现两个命题总是同时为真或同时为假，或者只要一个命题为真，另一个命题也必然为真。

建立这些关系的主要方法将是真值表。构建和分析真值表有一套非常清晰的步骤，但对于包含许多原子命题的复杂论证，真值表会变得非常庞大且难以处理。因此，我们将使用真值表来理解一些基本的等价关系和推理规则，这些可以在推理序列中加以应用，以构建更大的论证。

活动预览

1. 考虑如下陈述：“每当福尔摩斯穿着紫色衬衫并且穿着绿色马甲时，他就选择不戴领结。”令 表示陈述“福尔摩斯穿着紫色衬衫”，令 表示陈述“福尔摩斯穿着绿色马甲”，令 表示陈述“福尔摩斯戴着领结”。以下哪一项是将该陈述翻译为命题逻辑的最佳表达?

A. $(\wedge) \to \neg$
B. $(\wedge) \to$ C.
$(\vee) \to \neg$ D.
$\wedge (\to)$

2. 考虑如下陈述：“福尔摩斯除非同时穿着紫色衬衫或红色鞋子，否则从不穿绿色马甲。” 在上一题中给定的 和 的含义下，并令 表示“福尔摩斯穿着红色鞋子”，以下哪一项是将该陈述翻译为命题逻辑的最佳表达?

A. $\to (\vee)$
B. $\neg \to (\vee)$
C. $(\vee) \to$

D. $(\quad \vee \quad) \to \neg$

3. 考虑如下陈述："如果你主修数学，那么你将获得一份高薪工作"，以及陈述："要么你不主修数学，要么你将获得一份高薪工作。" 在下列哪些情况下，这 *both* 个陈述为真？选择所有适用的选项。

A. 你主修数学并获得一份高薪工作。 B. 你主修数学但没有获得一份高薪工作。 C. 你不主修数学却获得一份高薪工作。
D. 你不主修数学且没有获得一份高薪工作。

1.3.2 真值表

这里有一个关于玩《大富翁》的问题：

> 如果你获得的双倍比其他任何玩家都多，那么你将输掉游戏，或者如果你输了，那么你一定买了最多的房产。

对错？我们将回答这个问题，并且不需要了解任何关于大富翁的信息。相反，我们将研究陈述的逻辑 *form*。

我们需要决定命题 $(\quad \to \quad) \vee (\quad \to \quad)$ 何时为真。根据定义 1.1.8 中对联结词的定义，我们看到，要使其为真，要么 $\quad \to \quad$ 为真，要么 $\quad \to \quad$ 为真（或者两者都为真）。在第一种情况下，如果 为假或 为真，则它为真；在第二种情况下，如果 为假或 为真，则它为真。所以——是的，这会变得有点混乱。幸运的是，我们可以制作一张表，用真值表来跟踪所有可能性。

其思路如下：在每一行中，我们列出命题变量取真（T）或假（F）的一个可能组合，然后标明在该情况下所讨论的（复合）陈述是真还是假。我们对所有可能的 T 与 F 的组合都这样做。这样一来，我们就能清楚地看到该陈述在何种情况下为真或为假。对于较为复杂的陈述，我们将先为陈述的各个部分填写取值，以此把任务分解成更小、更易处理的步骤。

由于一个命题的真值完全由其各部分的真值及其连接方式决定，因此您需要知道的仅仅是每个逻辑连接词的真值表，这些我们已经在图 1.1.9 中看到过。

我们在这里考虑的真值表都基于基本真值表，通过多次应用基本规则来构建。

例 1.3.2

制作 $\neg \quad \vee \quad$ 的真值表。

解答。注意，这个陈述不是 $\neg(\quad \vee \quad)$；否定只属于 。本句中的主要连接词是 $\vee$，这意味着我们将使用它

真值表 *last*。首先，我们对 ¬ 应用真值表，然后使用来自 ¬ 和 的“输入”对 ∨ 应用真值表。

由于有两个变量，因此有四种可能的T和F组合。将这些放在一起得到以下真值表。

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

我们添加了一个 ¬ 列，以便更容易填写最后一列。¬ 列中的条目由 列中的条目决定。然后，为了填写最后一列，只需查看 列和 ¬ 列，并使用 ∨ 的规则。

现在让我们来回答关于垄断的问题。

例 1.3.3

分析以下陈述：“如果你获得的双倍次数比其他任何玩家都多，那么你将输掉比赛，或者如果你输掉比赛，那么你一定购买了最多的地产。”使用真值表进行分析。

解答。将陈述表示为符号形式：(→) ∨ (→)，其中 是陈述，“你比其他任何玩家获得更多的双倍”， 是陈述，“你将输掉”， 是陈述，“你必须买了最多的财产。”现在制作真值表。

真值表必须包含8行，以考虑三种陈述之间所有可能的真假组合。以下是完整的真值表：

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$(P \to Q) \vee (Q \to R)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

前三列只是对三个陈述中 T 和 F 的所有可能组合进行的系统性列举（你能看出如果是四个陈述，你会如何列出 16 种可能的组合吗？）。接下来的两列

由 、 和 的值以及蕴含的定义决定。然后，最后一列由前两列的值和 $\vee$ 的定义决定。我们关心的正是这一最终列。

请注意，在八种可能的情况下，所讨论的陈述都成立。因此，我们关于垄断的陈述是正确的（无论你拥有多少财产，掷出多少对子，或者你是赢还是输）。

关于垄断的陈述是一个同义反复的例子， 同义反复是指仅基于其逻辑形式本身必然为真的陈述。同义反复总是正确的，但它们并没有告诉我们太多关于世界的信息。确定该陈述为真不需要任何关于垄断的知识，因此知道该陈述为真并没有告诉我们关于垄断的任何信息。 “如果月亮是由奶酪做的，那么猫王依然活着，或者如果猫王依然活着，那么独角兽有5条腿”这一陈述同样成立。

1.3.3 逻辑等价

你可能已经在示例 1.3.2 中注意到，$\neg$ $\vee$ 的真值表中的最后一列与 $\to$ 的真值表中的最后一列完全相同：

P	Q	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

这意味着无论 和 是什么，语句 $\neg$ $\vee$ 和 $\to$ 要么都为真，要么都为假。因此，我们说这些语句在逻辑上是等价的。

定义 1.3.4 逻辑等价。

如果两个（分子）陈述 和 在且仅在 为真时 也为真，则它们在逻辑上是等价的。也就是说，在对其原子组成部分的真值进行任何赋值的情况下， 和 都具有相同的真值。我们将其记为 $\equiv$ 。

为了验证两个命题在逻辑上是否等价，可以为每个命题制作一个真值表，并检查两个命题的列是否相同。

在第1.2节中，我们声称只要一个蕴涵为真，它的逆否命题也为真。现在我们可以将这一主张表述为如下定理。

定理 1.3.5

An implication is logically equivalent to its contrapositive. That is,

$$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P.$$

证明。我们只需检查真值表。

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

(注意到我们在两个表中按相同的顺序给出了真值组合，因此我们可以很容易地看到最终列是相同的。)

认识到两个陈述在逻辑上是等价的会非常有帮助。对数学陈述进行重新表述，往往能帮助理解它在说什么，或如何证明或反驳它。通过使用真值表，我们可以系统地验证两个陈述确实在逻辑上等价。

例 1.3.6

陈述“不会下雨或下雪”和“不会下雨且不会下雪”在逻辑上等价吗?

解答。我们想知道 $\neg(\ \ \vee\ \ )$ 是否与 $\neg\ \ \wedge \neg\ \ $ 逻辑上等价。制作一个包含这两个命题的真值表:

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

由于在每一行中这两个陈述的真值都相同，因此这两个陈述在逻辑上是等价的。

请注意，这个例子为我们提供了一种将否定“分配”到析取（“或”）上的方法。对于合取（“与”），我们也有类似的分配规则:

定理 1.3.7 德摩根定律。

The negation of a disjunction or conjunction is logically equivalent to a conjunction or disjunction of negations, respectively. That is,

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

and,

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q.$$

这表明可能有一种“代数”可以应用于陈述。

(好的，这里有一种方法：把一个陈述转换为另一个的做法称为*Boolean algebra*)。我们可以开始收集有用的逻辑等价示例，并将它们依次应用到一个陈述上，而不是写出一张复杂的真值表。

德摩根定律并不能直接帮助我们处理蕴涵，但正如我们上面所看到的，每个蕴涵都可以写成一个析取：

蕴涵是析取。

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q.$$

示例："如果一个数是 4 的倍数，那么它是偶数"等价于："一个数不是 4 的倍数，或者（否则）它是偶数。"

借助这一点以及德摩根定律，你可以把任何陈述进行 *simplify*，直到否定只作用于原子命题为止。当然，除了可能会出现多个否定叠加的情况。不过，这一点可以很容易地处理：

双重否定。

$$\neg\neg P \equiv P.$$

示例："并非 不是奇数" 意味着 " 是奇数。"

让我们看看如何应用我们已经遇到的等价关系。

例 1.3.8

证明命题 $\neg(\quad \rightarrow \quad)$ 与 $\quad \wedge \neg \quad$ 在逻辑上等价，且不使用真值表。

解答。我们希望从其中一个陈述开始，通过一系列逻辑等价的陈述将其转化为另一个。先从 $\neg(\quad \rightarrow \quad)$ 开始。我们可以将蕴涵改写为析取，因此这在逻辑上等价于

$$\neg(\neg P \vee Q).$$

现在应用德摩根定律得到

$$\neg\neg P \wedge \neg Q.$$

最后，使用双重否定得到 $\quad \wedge \neg$

请注意，上面的例子说明，蕴涵的否定并不是蕴涵：它是一个合取！我们之前在第1.1节中已经看到过这一点，但它如此重要且有用，值得将其表述为一个定理。

定理 1.3.9 蕴含的否定。

The negation of an implication is a conjunction:

$$\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q.$$

*That is, the only way for an implication to be false is for the hypothesis to be true **AND** the conclusion to be false.*

为了验证两个命题在逻辑上是否等价，可以使用真值表或一系列逻辑等价替换。真值表方法虽然繁琐，但有一个优点，即它可以验证两个命题在逻辑上是否**不**等价。

例 1.3.10

陈述 (∨) → 和 (→) ∨ (→) 在逻辑上等价吗?
解法。请注意，虽然我们可以尝试用逻辑等价的替代语句重新编写这些陈述，期望将一个转化为另一个，但我们永远无法确定失败是由于它们缺乏逻辑等价性，而不是我们缺乏想象力。因此，改为我们制作一个真值表:

P	Q	R	$(P \vee Q) \to R$	$(P \to R) \vee (Q \to R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

看第四行（或第六行）。在这种情况下，(→) ∨ (→) 为真，但 (∨) → 为假。因此，这些陈述在逻辑上不是等价的。虽然我们没有逻辑等价，但每当 (∨) → 为真时，(→) ∨ (→) 也为真。这告诉我们，我们可以从 (∨) → 推出 *deduce* (→) ∨ (→)，只是不能反向推导。

1.3.4 量化命题的等价性

到目前为止我们所考察的所有例子都只涉及 *propositional* 逻辑，其中逻辑的基本单位是非真即假的陈述。也可以说，涉及量词和谓词的两个陈述在逻辑上是等价的。

有时候量词与等价性无关。例如，

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \lor Q(x)).$$

一旦我们将 替换为常量，就剩下基于其命题形式在逻辑上等价的两个陈述。

而在另外一些时候——更有趣的时候——正是量词的逻辑使这些陈述在逻辑上等价。尤其有意思的是，我们无法使用真值表来验证这些等价性！

相反，我们需要将论域作为一个集合来推理。例如，让我们考虑否定如何与量词相互作用。

考虑这样一个断言："所有奇数都是素数。"我们可以将其符号化地表示为 ∀ (( ) → ( ))。这个陈述显然不是真的，因此 *is* 为真的是"并非所有奇数都是素数"（即，¬∀ (( ) → ( ))）。我们怎么知道呢？很简单：9。没错，9 是奇数，但不是素数。但仅仅有一个奇数不是素数就足够了吗？

要反驳一个全称断言，你只需要*one*一个反例。你只需要展示*there exists*一个使该断言为假的数。在我们的情况下，我们有如下等价关系，

$$\neg\forall x(O(x) \to P(x)) \equiv \exists x(O(x) \land \neg P(x)).$$

如果我们暂时忽略量词，我们就剩下

$$\neg(O \to P) \equiv O \land \neg P$$

这正是定理 1.3.9 的一个例子。新的、有趣的部分是，当我们否定了全称量词时，我们得到了一个存在量词。

对存在量词取否会得到全称量词。这是有道理的。如果不存在具有某个性质的事物，那么一切事物都不具有该性质。

量词与否定。

¬∀ ( ) 等价于 ∃ ¬ ( )。

¬∃ ( ) 等价于 ∀ ¬ ( )。

从符号上看，我们可以将否定符号越过一个量词，但这会使量词发生类型切换。

另一种看待为什么这有道理的方法：全称量词像是（可能是无限的）合取，因为它们声称某个属性对这个事物、那个事物以及其他事物......所有事物都成立。存在量词像是（可能是无限的）析取：某个属性至少对一个事物成立，可能是这个，或者那个，或者其他，或者……德·摩根定律告诉我们，当我们否定一个合取时，我们得到一个析取，而当我们否定一个析取时，我们得到一个合取。当一切都按理想方式运行时，是不是很棒？

示例 1.3.11

假设我们声称没有最小的数字。我们可以将其翻译为符号形式:

$$\neg\exists x\forall y(x \leq y).$$

(并不是说存在一个数字 ，使得对于所有数字 ，小于或等于 。”)

然而，我们知道否定与量词的互动方式：我们可以通过切换量词类型（在全称量词和存在量词之间）来将否定移到量词上。因此，上述陈述应该是 *logically equivalent* 到

$$\forall x\exists y(y < x).$$

注意到 $<$ 是 $\leq$ 的否定。这意味着，“对于每个数字 ，存在一个比小的数字 。”我们可以看到，这是另一种表达我们原始论点的方式。

重要的是要强调谓词逻辑 *extends* 命题逻辑（就像量子力学扩展经典力学一样）。我们关于逻辑等价和推理的所有知识仍然适用。然而，谓词逻辑使我们能够以更高的分辨率分析命题，深入挖掘个别命题 、 等。

为了做到这一点，我们需要理解量词和连接词是如何相互作用的。我们已经看过一些关于否定和量词的内容。那么其他的连接词呢？让我们通过一个例子来探讨全称量词和析取是如何（或者无法）协同工作的。

示例 1.3.12

考虑以下两个陈述，

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \qquad \forall xP(x) \vee \forall xQ(x).$$

这些在逻辑上等价吗？

解答。这些陈述在逻辑上并不等价。直观地说，左边的陈述声称一切要么是 -事物，要么是 -事物。右边的陈述声称，要么一切都是 -事物，要么一切都是 -事物。这两者*feel*不同。

为确保这一点，我们希望设想谓词 ( ) 和 ( )，以及某个论域，使得其中一个陈述为真而另一个为假。不妨令 ( ) 表示“ 是偶数”， ( ) 表示“ 是奇数”。我们的论域将是所有整数（因为这是“偶数”和“奇数”有意义的数的集合）。

左边的陈述是真的！每个数要么是偶数，要么是奇数。但是

每个数字都是偶数吗？不是。每个数字都是奇数吗？不是。所以右边的陈述是错误的（它是一个 *false or false*）。

有趣的是，右边的陈述蕴含了左边的陈述。也就是说，

$$(\forall x P(x) \vee \forall x E(x)) \to \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

始终为真。

这类似于同义反复，尽管我们通常将这个术语保留用于命题逻辑中的必要真理。在谓词逻辑中，必然为真的陈述被赋予更为尊贵的称号——逻辑法则（有时也称为逻辑有效，但这就没那么有趣了）。

我们并且还要考虑量词如何彼此相互作用　　　　其他。

示例 1.3.13

你能交换量词的顺序吗？例如，考虑以下两个陈述：

$$\forall x \exists y P(x, y) \qquad \text{and} \qquad \exists y \forall x P(x, y).$$

这些在逻辑上等价吗？

解答。这些陈述在逻辑上并不等价。为说明这一点，我们应当给出谓词 (,) 的一种解释，使其中一个陈述为真而另一个为假。

令 (,) 为谓词 < 。在自然数中，对于所有 ，都存在某个大于该 的 （因为自然数是无限的）。然而，不存在一个自然数 能够大于所有的 。因此，∀ ∃ (,) 可能为真，而 ∃ ∀ (,) 为假。

不过，我们不能反过来这样做。如果存在某个 ，使得每个 都满足 (,)，那么当然对于每个 ，都存在某个 满足 (,)。前者表示我们可以找到一个对所有 都适用的 。后者允许针对不同的 使用不同的 ，但并没有任何东西阻止我们使用那个对所有 都适用的同一个 。换言之，虽然这两个陈述在逻辑上并不等价，但我们确实拥有一条有效的推理规则：

$$\begin{array}{rl} & \exists y \forall x P(x, y) \\ \hline \therefore & \forall x \exists y P(x, y) \end{array}$$

再换一种说法，这说明该单一陈述

$$\exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$$

总是成立；这是逻辑的定律。

1.3.5 扣除

此前，我们声称以下内容是一个有效的论证：

> 如果伊迪丝吃了她的蔬菜，那么她就可以吃一块饼干。伊迪丝吃了她的蔬菜。因此，伊迪丝得到一块饼干。

我们如何知道这是有效的呢？让我们来看这些陈述的形式。设 表示“Edith 吃她的蔬菜”，设 表示“Edith 可以吃一块饼干”。那么该论证的逻辑形式是：

$$\begin{array}{rc} & P \to Q \\ & P \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

这是一个演绎规则的例子，一种始终有效的论证形式。这个规则尤其著名，称为 *modus ponens*。你是否确信它是一个有效的演绎规则？如果不确信，请考虑下面的真值表：

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

这只是 → 的真值表，但这里重要的是，推导规则中的所有行在真值表中都有各自的一列。记住，一个论证是有效的，只要在前提为真的情况下结论必定为真。本例中的前提是 → 和 。真值表中的哪些*rows* 同时对应这两个都为真？在前两行中 为真，而在其中只有第一行也使 → 为真。而且不出所料，在这一种情况下， 也为真。因此，如果 → 和 都为真，我们就可以看到 也必定为真。

把推理规则看作一种*one-way*形式的逻辑等价。两个陈述在逻辑上等价，当且仅当在真值表中第一条陈述为真的每一行，第二条也为真，并且在第二条为真的每一行，第一条也为真。一次推导只需要这两部分中的第一部分。

这里还有几个例子。

例 1.3.14

证明以下内容是一个有效的推导规则。

$$\begin{array}{rc} & P \to Q \\ & \neg P \to Q \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

解答。我们制作一个包含该论证所有行的真值表

表单：

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \to Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	F

(我们添加了一个 $\neg$ 列，作为帮助步骤，用来得到 $\neg$ $\to$) 的列。

现在查看所有同时满足 $\to$ 和 $\neg$ $\to$ 为真的行。这只发生在第1行和第3行。嘿！在这些行中 也为真，因此该论证形式是有效的（它是一条有效的演绎规则）。

例 1.3.15

判断以下是否是一个有效的推理规则。

$$\begin{array}{rc} & P \to R \\ & Q \to R \\ & R \\ \hline \therefore & P \vee Q \end{array}$$

解答。让我们制作一个包含这四个陈述的真值表。

P	Q	R	$P \to R$	$Q \to R$	$P \vee Q$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	F

看倒数第二行。在这里，该论证的三个前提都是真的，但结论是假的。因此，这不是一个有效的演绎规则。

当我们把真值表放在眼前时，看看第1、3和5行。这些是唯一使陈述 $\to$ 、 $\to$ 以及 $\vee$ 全部为真的行。而且在这些行中 也为真。因此我们发现了一条新的演绎规则，我们知道它*is*有效：

$$\begin{array}{rc} & P \to R \\ & Q \to R \\ & P \vee Q \\ \hline \therefore & R \end{array}$$

量词的推导。我们还可以为量词写下一些推导规则。例如，这样的一条规则可能是
:

$$\begin{array}{rl} & \forall x P(x) \\ \hline \therefore & \exists x P(x) \end{array}$$

如果一切都是 -事物，那么必然存在某个是 -事物的东西。[3] 这些规则无法用真值表来验证，而对这种谓词逻辑的全面论述超出了本文的范围。

1.3.6 阅读问题

1. 要检查两个陈述是否逻辑等价，你可以使用真值表。解释你会在真值表中寻找什么来得出这两个陈述是逻辑等价的结论。什么会告诉你它们是*not*逻辑等价的?

2. 要检查一个推理规则是否是 *valid*，你可以使用真值表。解释你在完成的真值表中会寻找什么，以判断推理规则是有效的，以及什么会告诉你推理规则是 *not* 有效的
。

3. 阅读本节后你有哪些问题？请至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

1.3.7 练习题

1. 为命题（ $\wedge$ ）$\rightarrow$ ($\vee$)制作真值表。 2. 完成命题$\neg$ $\vee$ ($\rightarrow$)）的真值表。如果你知道上述命题为假，你能得出关于 和 的什么结论? 3. 构造命题 $\rightarrow$ ($\neg$ $\vee$)的真值表。 4. 通过为两个命题完成真值表，判断命题 $\rightarrow$ ($\vee$)和（ $\rightarrow$ ）$\vee$ ($\rightarrow$)是否逻辑等价。 5. 判断以下是否为有效的推理规则:

$$\begin{array}{rl} & P \rightarrow Q \\ & \neg Q \\ \hline \therefore & \neg P \end{array}$$

6. 确定以下推理是否有效 {v*} 翻译文本:

$$\begin{array}{rl} & P \rightarrow (Q \vee R) \\ & \neg(P \rightarrow Q) \\ \hline \therefore & R \end{array}$$

7. 判断以下是否为有效的推理规则:

[3]Note that this does assume that your domain of discourse is non-empty.

$$\begin{array}{rc} & (P \wedge Q) \to R \\ & \neg P \vee \neg Q \\ \hline \therefore & \neg R \end{array}$$

8. 判断以下是否为一个有效的演绎规则：

$$\begin{array}{rc} & P \to Q \\ & P \wedge \neg Q \\ \hline \therefore & R \end{array}$$

9. 以下哪个陈述是一个 *law of logic*？也就是说，以下哪些在无论您的讨论领域是什么以及无论您如何解释谓词的含义的情况下，始终成立？请选择所有适用的选项。

A. ∀ (( ) ∨ ¬ ( )). B. ∃ ( )
→ ∀ ( ). C. ¬∀ ( ) → ∃ ( ).
D. ∀ ∃ (,) ↔ ∃ ∀ (,).

1.3.8 补充练习

1. 你偶然遇到两个巨魔正在玩 Stratego®。他们告诉你：

巨魔 1：如果我们是表亲，那么我们都是骗子。巨
魔 2：我们是表亲，或者我们都是骗子。

两个巨魔都可能是骑士吗？请回忆，所有巨魔要么是总说真话的骑士，要么是总说假话的无赖。请解释你的答案，并说明你如何使用真值表来找到它。

2. 接着你遇到了三个巨魔，他们贴心地戴着名牌。他们说：

帕特 如果奎因或我是真骑士，那么瑞安也是真骑士。奎因 瑞安是真骑士，如果帕特是真骑士，那么我也是真骑士。瑞安 奎因是假骑士，但帕特和我有相同的说服力。

创建一个包含所有三个陈述的真值表。然后使用该真值表来确定每个巨魔的说服力。

3. 考虑关于派对的陈述，“如果是你的生日或者会有蛋糕，那么就会有蛋糕。”

（a）将上述陈述翻译成符号。清楚地说明哪一个陈述是 ，哪一个是 。

(b) 为该命题制作一个真值表。

(c) 假设该陈述为真，如果你知道会有蛋糕，你能得出什么结论（如果有的话）？ (d) 假设该陈述为真，如果你知道不会有蛋糕，你能得出什么结论（如果有的话）？ (e) 假如你发现该陈述是假的，你能得出什么结论?

4. Geoff Poshingten 在一家高档披萨店里，决定点一个卡尔佐内。当服务员问他想要放什么配料时，他回答：“我要么是意大利香肠，要么是香肠。如果我选择香肠，那么我也必须加鹌鹑。哦，如果我有意大利香肠或鹌鹑，那么我也必须加里科塔奶酪。”

(a) 将 Geoff 的指令翻译成逻辑符号。

(b) 服务员知道Geoff要么是一个骗子，要么是一个说真话的人（也就是说，要么他说的每件事都是假的，要么每件事都是真的）。那到底是哪一种呢?
(c) 如果有的话，服务员能得出关于Geoff想要的calzone中配料的什么结论?

5. 判断以下两个陈述是否逻辑等价：$\neg(\quad \to \quad)$ 和 $\quad \wedge \neg \quad$。解释你如何知道你的结论是正确的。

6. 简化下列命题（使否定只直接出现在变量之前）。

（a）$\neg(\quad \to \neg \quad)$。（b）$(\neg \quad \vee \neg \quad) \to \neg(\neg \quad \wedge \quad)$。（c）$\neg((\quad \to \neg \quad) \vee \neg(\quad \wedge \neg \quad))$。

(d) 如果 Sam 不是男人则 Chris 是女人，而且 Chris 不是女人，这一说法是假的。

7. 使用德摩根定律以及你所知道的任何其他逻辑等价事实来化简下列陈述。展示你的所有步骤。你的最终陈述中，否定只应直接出现在命题变元或谓词（ 、 、( ) 等）旁边，并且不应出现双重否定。最好只使用合取、析取和否定。

(a) $\neg((\neg \quad \wedge \quad) \vee \neg(\quad \vee \neg \quad))$. (b) $\neg((\neg \quad \to \neg \quad) \wedge (\neg \quad \to \quad))$ (注意蕴含关系).

（c）对于上述两个部分，使用真值表验证你的答案是正确的。也就是说，使用真值表检查给定陈述与你提出的简化在逻辑上确实等价。

8. 考虑如下陈述：“如果一个数是三角数或平方数，那么它不是素数”

(a) 为陈述 (∨) → ¬ 制作一个真值表。(b) 如果你认为该陈述是 *false*，那么一个反例需要具备哪些性质？请通过参考你的真值表来解释。(c) 如果该陈述为真，那么关于数字 5657（它确实是素数）你可以得出什么结论？同样请使用真值表来解释。

9. 汤米·弗拉纳根正在告诉你他昨天下午吃了什么。他对你说：“我吃了爆米花或葡萄干中的一种。另外，如果我吃了黄瓜三明治，那么我喝了汽水。但我没有喝汽水或茶。”当然，你知道汤米是世界上最糟糕的骗子，他说的每一句话都是假的。汤米吃了什么？

通过使用命题变元（ 、 、 、 、 ）写出汤米的所有陈述，取它们的否定，并利用这些来推断汤米实际上吃了什么，从而论证你的答案。

10. 你能将蕴含串联起来吗？也就是说，如果 → 且 → ，那么是否意味着 → ？证明以下是一条有效的推导规则：

$$\begin{array}{rl} & P \to Q \\ & Q \to R \\ \hline \therefore & P \to R \end{array}$$

11. 假设 和 是（可能为复合的）命题语句。证明： 与 逻辑等价，当且仅当 ↔ 是一个永真式。

12. 假设 $_1$、 $_2$、...、 $_n$ 和 是（可能是分子）命题语句。进一步假设

$$\begin{array}{rl} & P_1 \\ & P_2 \\ & \vdots \\ & P_n \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

是一个有效的推理规则。证明该命题

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$$

是一个重言式。

13. 考虑下面的陈述。将每个陈述翻译成符号，使用谓词 (,) 表示“人在时间能被愚弄”。判断在此语境下或在一般情况下，是否有任何陈述彼此等价，或是否有任何陈述蕴含其他陈述。 译文：

(a) 你可以一直愚弄一些人。

(b) 你可以在某些时候欺骗所有人。

(c) 你总能骗到一些人。

(d) 有时候你可以骗过所有人。

14. 假设 ( ) 是一个谓词，使得命题 ∀ ( ) 为真。是否也有 ∃ ( ) 为真？换句话说，命题 ∀ ( ) → ∃ ( ) 是否总是为真？其逆命题是否总是为真？假设论域是非空的。

15. 当我们通过考虑一个陈述为假时会发生什么来尝试证明该陈述时，简化否定将尤其有用。对于下面的每个陈述，尽可能简洁地写出该陈述的*negation*。不要只是说：“……是假的。”

(a) 每个数字要么是偶数，要么是奇数。 (b) 存在一个既是等差数列又是等比数列的数列。 (c) 对于所有数字 ，如果 是素数，则 + 3 不是素数。

16. 在应用逻辑等价对“内部”的命题部分进行处理之前，我们可以先利用将否定跨越量词的规则来简化谓词逻辑中的陈述。简化下面的陈述（使否定只直接出现在谓词旁边）。

(a) ¬∃ ∀ (¬ ( ) ∨ ( )). (b) ¬∀ ¬∀ ¬(< ∧ ∃ (< ∨ <)). (c) 存在一个数字 ，且没有其他数字小于或等于 。

（d）对于每一个数 ，都存在另外两个数使得 位于它们之间，这一说法是错误的。

17. 将下面的陈述化简，使否定符号只直接紧邻谓词出现。

（a）¬∀ ∀ (< ∨ <)。（b）¬(∃ ( ) → ∀ ( ))。

1.4 证明

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

- 识别*direct proofs*、*proof by contrapositives*和*proof by contradictions*的逻辑结构，并区分它们。
- 识别错误证明中的缺陷，并确定这些缺陷是逻辑上的问题还是数学概念上的问题。
- 运用定义，使用基本的证明方法来证明陈述。

1.4.1 本节预览

Investigate!

迷你数独是一个 4×4 的方格，分为四个 2×2 的区域。目标是将每个方格填入 1 到 4 之间的数字，使得每一行、每一列或每个区域内的数字不重复。

这里有一个简单的迷你数独谜题，你可以试着解决。

2			1
	4		
		3	

你可能会注意到，上述谜题的解法中，四个外侧角各不相同，而四个中间方格也各不相同。

本题（*Investigate!*）的目标是证明这并非巧合：假设一个迷你数独在其四个角（下文用 # 标记）中的数字两两不同。证明中心的四个方格（下文用 标记）中也必须包含互不相同的数字。

#			#
	*	*	
	*	*	
#			#

试一试 1.4.1

尝试在一个空的迷你数独谜题中填入数字。看看你是否能打破我们在 *Investigate!* 活动中被要求证明的陈述。是什么阻止了你？简要说明你认为该陈述是真还是假，以及原因。

任何不相信数学中存在创造力的人，显然还没有尝试过写证明。找到一种方式说服全世界某个特定命题必然为真，是一项艰巨的事业，而且往往相当具有挑战性。在寻找证明的过程中，并不存在一条保证成功的路径。例如，1742 年夏天，一位名叫克里斯蒂安·哥德巴赫的德国数学家提出疑问：是否每一个大于 2 的偶整数都可以表示为两个素数之和。几个世纪过去了，我们仍然没有这个看似事实的命题的证明（计算机已经检验了哥德巴赫猜想对所有小于 4×10^{18} 的数都成立，但尚未找到该陈述对 *all* 数成立的证明）。

写证明在某种程度上是一门艺术。像任何艺术一样，要真正擅长它，你既需要某种灵感，也需要一些基础性的技巧。正如音乐家可以学习正确的指法、画家可以学习正确的握笔方式一样，我们也可以学习构造论证的恰当方法。

我们可以通过两个彼此不同但相互交织的视角来看待一个证明。首先，我们可以思考证明的 *logical* 结构。下面我们将考察三种证明风格，它们恰恰在逻辑结构上有所不同。其次，我们可以关注证明的 *mathematical content*。该证明如何体现对数学概念的理解？它是否正确地使用了数学对象的定义？这些定义彼此之间如何相互作用？

回顾第 1.3 节，我们曾说过，重言式是必然为真的陈述，但它并不能告诉我们任何有趣的东西。同样地，如果一个证明完全依赖于它所要证明命题的逻辑形式，那么它也无法告诉我们任何关于数学的有趣内容。因此，我们所考虑的所有证明 *must*，除了其逻辑结构之外，还涉及对数学概念的某种结合。

在本节中，我们将看到逻辑结构与数学结构之间相互作用的示例。我们将把逻辑结构视为证明的 *skeleton* 或 *scaffolding*，并考察这一骨架可以呈现的不同形态。随后，我们将看到证明的数学内容如何填充这一骨架的细节，如何为骨骼增添血肉。

当我们要证明的陈述看起来过于显然或熟悉时，认真对待证明往往具有挑战性。虽然我们确实希望证明一些关于数的简单事实，比如两个偶数之和仍然是偶数，但我们对数字的熟悉反而可能使我们难以严肃对待这一任务。因此，我们将改为在一个希望对你来说较为新颖的背景下开始证明一些事实：迷你数独谜题。

活动预览

Consider the statement:

如果 是偶数，则 或 是偶数。

下面哪个证明似乎是该命题的有效证明？注意：你可以假设下面所有的代数运算都是正确的（因为它们是正确的）。

1. 假设 和 是奇数。也就是说， = 2 + 1，且 = 2 + 1，其中 和 为某些整数。则

$$\begin{aligned} ab &= (2k+1)(2m+1) \\ &= 4km + 2k + 2m + 1 \\ &= 2(2km + k + m) + 1. \end{aligned}$$

因此， 是奇数。

2. 假设 或 为偶数——不妨设是 （ 为偶数的情形是相同的）。也就是说， = 2 ，其中 为某个整数。则

$$\begin{aligned} ab &= (2k)b \\ &= 2(kb). \end{aligned}$$

因此 是偶数。

3. 假设 是偶数，但 和 都是奇数。即， = 2 ， = 2 + 1 且 = 2 + 1 对于某些整数 、 和 。然后

$$\begin{aligned} 2n &= (2k+1)(2j+1) \\ 2n &= 4kj + 2k + 2j + 1 \\ n &= 2kj + k + j + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

但由于 2 + + 是一个整数，这意味着整数 等于一个非整数，这是不可能的。

4. 设 为偶数，例如 = 2 ，且 为奇数，例如 = 2 + 1。

$$\begin{aligned} ab &= (2k+1)b \\ 2n &= 2kb + b \\ 2n - 2kb &= b \\ 2(n - kb) &= b. \end{aligned}$$

因此 必须是偶数。

1.4.2 直接证明

最简单的证明方式是直接证明。通常，要证明某件事，只需要系统地解释一切的含义。你查看定义，仔细解释并 *unpack* 它们的含义，直到看到结论确实成立。

为了说明定义在证明中的重要性，让我们给出一些关于迷你数独谜题的仔细定义。

定义 1.4.2 迷你数独的定义。

一个迷你数独谜题是一个部分填充的 4×4 方格网格，分为四个 2×2 方框。每个方格可以为空或包含从 1 到 4 的数字。

我们称一个迷你数独谜题是有效的，只要在任何一行、任何一列或任何一个宫中，1 到 4 的任一数字都不出现超过一次。

迷你数独谜题的解答是一个有效的谜题，所有方格都已填满，且每个非空方格的值保持不变。

我们说一个迷你数独谜题是可解的，如果它只有一个解。

首先，让我们证明一个关于任何有效迷你数独难题的有用且“显而易见”的事实。

命题 1.4.3

Any solution to a mini sudoku puzzle will have each digit from 1 to 4 appear exactly once in each row, in each column, and in each box, appearing a total of four times.

这很明显，你说！这不正是有效的谜题的定义吗？嗯，确切来说是有效的已完成谜题，这就是我们所说的解答，对吧？好吧，不完全是，因为有效意味着没有数字重复……这不就是同一回事吗？

是的！完全正确！这样说本身就是一个直接证明。

证明。假设你有一个迷你数独的解法。这意味着你有一个 4×4 的网格，每个方格内填入了 1 到 4 之间的数字且是有效的[4]。由于这个谜题是 *valid*，在任何一行、任何一列或任何一个盒子[5]中，数字都不会重复。由于每一行包含四个不重复的数字，而且恰好有四个可能的数字，这些数字必须各自恰好出现一次。这对于每一行、每一列和每一个盒子都是成立的。

对于每个数字，由于它在四个不同的行中恰好出现一次，因此它总共出现四次。证明完毕。

备注 1.4.4 该证明除了解释定义之外，还包含一个关键的数学思想：如果从一个包含四个数的集合中选出四个互不相同的数，那么这四个数都被选中了。也许你还想解释为什么这是真的，或者干脆说明这是鸽巢原理的一个例子（我们很快就会说明这是什么）。你解释到什么程度取决于你是为谁写这份证明。写证明时多一点过分谨慎是有益的。

的确，在大多数情况下，我们甚至不需要写出上述的任何证明。可能只需要说，“显然这可以推导出”

[4]Definition of **solution**

[5]Definition of **valid**

“来自定义。”然而，我们目前正在学习如何撰写证明，而适当地过分严谨是有益的，这样我们就可以专注于证明的结构以及应用定义的重要性。

让我们证明一个关于某个特定数独谜题的性质。

例 1.4.5

证明：对于下面的迷你数独谜题的任意一个解，如果该解在左上角的方格（r 1c1）中包含数字 2，那么它一定会在右下角的方格（r4c4）中包含数字 2。

	1	3	
			1
			3

解答。我们不知道这个谜题是否可解（事实上，它不可解），不过请注意它目前是有效的。我们想要证明的是，*if* 在任何特定解中，左上角的方格里是 2 ，*then* 该解在右下角的方格里包含一个 2。

*Proof*让 为谜题的解，并假设 在左上角的方格中包含一个 2。由于 是一个有效的谜题，任何一行、任何一列或任何一个方框中都没有数字重复。首先查看顶行。由于该行已经包含 1、2 和 3，剩余的空白方格（r1c4）必须是 4。

现在看看第 4 列（最右侧的那一列）。既然我们已经知道右上角的方格是 4，那么这一列已经包含了 1、3 和 4。所以最后一个空格（r4c4）必须是 2 。

因此， 在右下角的方格中包含一个 2，这是我们需要证明的内容。■

观察上述论证的一般形式。我们试图证明一个蕴含 → ：如果在r1c1 中有一个 2，那么在 r4c4 中就有一个 2。我们从假设 为真开始。由此我们推出了一些结论，并由这些结论推出了 。这正是对蕴含 → 进行直接证明的样子（在 和 之间也可以有更多步骤）。

假设 。解释，解释，……，解释。因此 。

我们必须考虑的一个额外因素是，我们经常证明一个普遍的、普适的陈述，一个形式为 ∀ (( ) → ( )) 的陈述。为了处理量词，我们固定一个 *arbitrary* 实例的 。上面我们说过，“让 成为谜题的解。”因为除了 之外，我们对 没有做任何额外的假设。

如果关于它是真的，我们称　为一个 *arbitrary* 解。

如果我们想证明所有的正方形都是矩形，我们首先要意识到这与说“对于任何形状，如果形状是正方形，那么它是矩形”是一样的。用符号表示为 ∀ (( ) → ( )) 。我们将假设 ( ) 为真，并推导出 ( )。我们使用哪个　呢？一个任意的　，这样我们的证明可以应用于 *all* 个可能的　。

例 1.4.6

证明对于任何具有三个空格的迷你数独，如果该数独有解，则该数独是可解的。

解法。这个显而易见吗？如果一个数独有解，那它就可以解吗？一点也不！再看看迷你数独的定义：仅仅因为一个数独有解，并不意味着它只有一个解（即它是可解的）。但即使我们认为这不需要证明，还是让我们再一次怀疑，并以此为借口，集中精力关注证明的逻辑结构。

请注意，我们正在证明无论我们从哪个迷你数独谜题开始，该命题都是正确的。我们可能从这个谜题开始：

3		4	2
2	4	3	1
1			4
4	2	1	3

显然，完成这个谜题只有一种方法：第一行只有一个空格，因此我们只能在其中放置一个数字，接着第二列和第三列各只有一个空格，因此我们可以唯一地填充它们。

看一个单一的例子在构造证明时通常很有帮助，但用一个例子证明一般性陈述是***NEVER***一个正确的证明。

尽管有大约 *only* 152.58 亿个迷你数独谜题（其中大多数不是有效的，较少有解，甚至更少有恰好一个空格），我们并不想检查所有可能的谜题。因此，我们固定一个任意有效的迷你数独谜题。我们假设它有解并且恰好有三个空格。基于此，我们证明只有一个可能的解。

Proof. 设　为一个任意的迷你数独谜题。假设　恰好有三个空格，并且　是一个解。

由于　是任意的，我们不知道三个空白方格是如何排列的。它们可能都在不同的行，或者两个可能在同一行，或者三个都可能在同一行。

如果所有空白方格位于不同的行中，那么每一行中恰好有一个空白方格。其他三个方格填入三个不同的数字（因为谜题是有效的），因此填充这些方格只有一个选择。

空白方格。该数字必须是解　中使用的数字。

现在考虑这样一种情况：两个空格位于同一行，第三个空格位于不同的行。第三个空格所在的那一行已有三个不同的数字，因此最后一个空格只有一个选择，并且它必须与　一致。一旦这个空格被填上，另两个空格必定位于两个不同的列中，而每一列中都有三个已填入的数字。在这些列中，这三个已填入的数字彼此不同，因此空格也只有一个选择。因此，同样地，任何解都必须恰好是　。

最后，如果三个空格都在同一行，那么它们必然位于不同的列。因此，使用与空格位于不同的行时相同的论证，但改用列来考虑，我们可以看到　是唯一的解。

我们已经考虑了所有可能的情况，并且在每一种情况下，　都是唯一的解，因此　是可解的。■

当然，直接证明也可以用来证明数学中的命题。

例 1.4.7

证明：对所有整数　，如果　是偶数，那么 ^{2}是偶数。

解答。证明的格式如下：设　为任意整数。假设　是偶数。解释 解释 解释。因此　^{2} 是偶数。

为了补充细节，我们解释　为偶数的含义，然后看看这对 ^{2}意味着什么。此处相关的*definition*是：“如果存在整数　使得=2　，那么整数　是偶数。”以下是完整的证明。*Proof*。令　为任意整数。假设　是偶数。则=2　，对于某个整数　。现在 $^2 = (2\ )^2 = 4\ ^2 = 2(2\ ^2)$。由于2　^{2}是整数，　^{2}是偶数。■

例 1.4.8

证明：对于所有整数　、和　，若 是　的倍数，且　是　的倍数，则　是　的倍数。

解答。即使我们不完全记得“是……的倍数”具体是什么意思，我们也可以为这个陈述建立一个直接证明。它大致会是这样的：设　、和　为任意整数。假设　是　的倍数，且　是　的倍数。……因此，　是　的倍数。

我们如何把这些联系起来？我们说明假设真正意味着什么，以及为什么这能给出结论真正意味着什么。正是在这里我们需要“　是　的倍数”的定义：这意味着存在某个整数　，使得 =　。我们的目标是什么？即存在某个整数　，使得 =　。下面是完整的证明。

Proof. 设 、 和 为整数。假设 是 的倍数，且 是 的倍数。因此，存在整数 和 ，使得 = 且 = 。将这些（通过代换）结合起来，我们得到

$$c = j(ka) = (jk)a.$$

但是 是一个整数，因此这表明 是 的倍数。 ■

1.4.3 逆否命题证明

回忆一下，蕴含 → 在逻辑上等价于它的逆否命题 ¬ → ¬ 。存在许多陈述，直接证明它们很困难，但其逆否命题却可以用直接证明轻松证明。这正是逆否证明法所做的一切：它对该蕴含的逆否命题给出一个直接证明。由于逆否命题在逻辑上等价于原蕴含，这就已经足够了。

通过逆否命题证明 → 的证明骨架通常大致如下：

假设 ¬ 。解释，解释，⋯⋯解释。因此¬ 。

与之前一样，如果存在变量和量词，我们将它们取为我们论域中的任意元素。

例 1.4.9

证明如果一个迷你数独谜题是可解的，那么它是有效的。

解答。请记住，只要任意一行、一列或一个宫中不包含重复的数字，谜题就是有效的。如果且仅如果恰好存在一个解，则该谜题是可解的；其中，解指的是一个没有空格的有效谜题（且不改变任何先前已填写的格子）。

如果我们尝试直接证明，我们会从一个任意的谜题开始，并假设它是可解的。接着我们可以"得到"解，但需要回溯时间，推理到谜题刚开始的时候。这看起来很困难。通常，当一个证明似乎需要把事物拆解开来时，改用逆否命题会更容易。这正是我们将要做的。

Proof. 设 为任意一个迷你数独谜题，并假设它是 *not* 有效的。这意味着在至少一行、或一列、或一个宫中，某个数字出现了不止一次。

现在假设我们已经填满了空格，但没有改变任何先前已填入的格子。原来包含重复数字的行、列或宫仍将包含该重复，因此最终完成的谜题将是无效的。因此不存在对 的解，所以 是不可解的。■

我们已经证明，如果一个迷你数独谜题不合法，那么它是不可解的，这正是我们想要证明的命题的逆否命题，因此

作为原始陈述的证明。

这里有几个更具数学性质的例子。

例 1.4.10

这个陈述："对于所有整数 ，如果 ^{2} 是偶数，则 是偶数"是否成立?
解法。这是我们在上述例子1.4.7中通过直接证明所证明的命题的逆命题。通过尝试几个例子，这个命题似乎是真的。那么让我们来证明它。

对这一陈述的直接证明需要固定一个任意的 ，并假设 ^{2} 是偶数。但完全不清楚这将如何使我们能够对 得出任何结论。仅仅因为 $^2 = 2$ 本身并不能暗示我们如何将 写成 2 的倍数。

试试别的：写出该命题的逆命题。我们得到，对于所有整数 ，如果 是奇数，那么 ^{2} 是奇数。这看起来更有希望。
我们需要定义一个数字为奇数。当整数 满足 $= 2 \ + 1$ 对于某个整数 时， 是奇数。我们的证明将类似于以下形式：
设 为任意整数。假设 不是偶数。这意味着⋯换言之⋯⋯ 但这等同于说⋯⋯ 因此 ^{2}不是偶数。

现在我们填写细节。
Proof。我们将证明逆否命题。令 为任意整数。假设 不是偶数，因此是奇数。则对某个整数 ，有 $= 2 \ + 1$。现在 $^2 = (2 \ + 1)^2 = 4 \ ^2 + 4 \ + 1 = 2(2 \ ^2 + 2 \ ) + 1$。由于 $2 \ ^2 + 2$ 是整数，我们看到 ^{2} 是奇数，因此不是偶数。■

例 1.4.11

证明：对所有整数 和 ，如果+ 是奇数，则 是奇数或 是奇数。
解答。尝试直接证明的问题在于，单纯通过已知 和 的某些信息，很难将 和 分开。另一方面，如果我们知道 和 分别的信息，那么将它们结合起来可能会为我们提供 + 的信息。我们要证明的命题的逆命题是：对于所有整数 和 ，如果 和 都是偶数，那么 + 是偶数。因此，我们的证明将具有以下格式：

让 和 是整数。假设 和 都是偶数。啦啦啦。因此 + 是偶数。

这是一个完整的证明。
Proof。设 和 为整数。假设 和 都是偶数。那么，对某些整数 和 ，有 $= 2$ 且 $= 2$ 。现在 $+ \ = 2 \ + 2 \ = 2(\ + \ )$。由于 + 是整数，我们可以看出 + 是偶数，从而完成证明。■

注意到我们假设 和 是偶数，这正是“ 或 为奇数”的否定。我们在这里使用了德摩根定律。

在证明 *implications* 时，可以使用直接证明和逆否命题证明。请记住，一些没有明确写成蕴含式的陈述也可以改写为蕴含式。

例 1.4.12

考虑如下陈述：“对于每一个素数 ，要么 = 2，要么 是奇数。”我们可以将其改述为：“对于每一个素数 ，如果 ≠ 2，那么 是奇数。”现在试着证明它。

使用以下作为素数的定义：整数 > 1 是素数，如果它恰好有两个因子，即 1 和 。

解答。

Proof。设 为任意一个素数。假设 不是奇数。那么 能被 2 整除。由于 是素数，它必定恰好有两个因数，并且它有 2 作为因数，因此 只能被 1 和 2 整除。因此 = 2。这完成了证明（通过逆否命题）。■

1.4.4 反证法

退一步思考，如果一个论证的结论是假的，这意味着什么。出现这种情况有两个原因：要么论证中的逻辑是错误的，要么至少有一个假设是假的。反证法正是利用了第二种可能性。我们从一个单一的假设出发，构造一个 *valid* 证明，最终导出一个假的结论；唯一的可能性就是这个单一的假设是假的。这个假的结论就是“矛盾”，它仅仅表示一个必然为假的陈述（从技术上讲，是形如 ∧ ¬ 的陈述）。

用反证法证明命题 的一般形式是，

> 假设 ¬ （即 不成立）。这意味着……，这告诉我们……，因此我们可以说……但这构成矛盾，因此 实际上必定为真。

请注意，如果我们将这种论证方式视为某个事物的直接证明，那么它就是一个直接证明{v*}。

$$\neg P \to \text{contradiction.}$$

所以我们有了这个蕴含的有效证明。一个真实的蕴含怎么会有一个错误的结论呢？回忆一下蕴含的真值表（图 1.2.2）。唯一一个蕴含为真但结论为假的行是第 4 行，在这里假设也是假的。所以 ¬ 是假的，也就是说 为真。

一旦你开始用反证法来写证明，这就会变得非常自然。让我们通过一个数独证明来看看这是如何做到的。

例 1.4.13

证明下面的迷你数独谜题的任何解都必须在右上角（r1c4）包含一个 3。

	2		
	3		
3			
			1

解答。我们可以用多种方式来证明这一点，这在反证法中往往如此。尽管我们总是从相同的初始假设开始（即我们想要证明之命题的反面），但找到矛盾的位置可能会有所不同。

*Proof*设 为该谜题的解，但假设 不包含右上角的 3。那么，顶行必须在其他位置包含一个 3。它不能在第 1 列，因为该列已经有一个 3。它不能在第 2 列，因为该位置已经被填充（是 2）。它也不能在第 3 列，因为如果它在第 3 列，那么底行就无法放置一个 3。因此，顶行中将没有 3，这与 是解的假设相矛盾。

因此， 必须在右上角包含一个 3 . ■

示例 1.4.14

P证明数独谜题 b 没有解 Below.

4			
	1		
			4

解答。来看该陈述的逻辑形式：

$$\neg\exists S(S \text{ is a solution }).$$

使用ng 关于量词否定的规则，这是 sa 我作为

$$\forall S(S \text{ is not a solution}).$$

如果我们要直接证明这一点，我们需要考虑所有可能的解并证明它们是无效的。这似乎相当具有挑战性。

另一方面，如果我们尝试使用反证法，我们就可以假设所要求证明的命题的否定。也就是说，我们可以假设*is*一个解存在。这是一个我们可以加以推理的单个解。要容易得多。

*Proof*假设，为了反证，*does* 存在该谜题的一个解。这个解必须在左下角的格子中有一个4。但唯一能放置4的格子要么在第4行，要么在第1列（或两者兼有）。无论哪种情况，这都与第1列和第4行中已经有一个4相矛盾。■

下面是三个关于数的反证法证明示例:

示例 1.4.15

证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

解答。

Proof. 假设不是这样。那么 $\sqrt{2}$ 等于一个分数 $\frac{a}{b}$。不失一般性，假设 $\frac{a}{b}$ 已约至最简形式（否则将分数约分）。因此，

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2.$$

因此 ^{2} 是偶数，因此 是偶数。所以 = 2 对于某个整数 ，且 ^{2} = 4 ^{2}。我们接下来有，

$$2b^2 = 4k^2$$

$$b^2 = 2k^2.$$

因此 ^{2} 是偶数，从而 是偶数。由于 也是偶数，我们看到 $\frac{a}{b}$ 不是最简形式，这是一个矛盾。因此 $\sqrt{2}$ 是无理数。■

例 1.4.16

证明：不存在整数 和 ，使得 = 4 + 2。

解答。

Proof。我们采用反证法。因此，假设存在*are*整数 和 ，使得 = 4 + 2 = 2(2 + 1)。因此 ^{2}是偶数。我们已经看到这意味着 是偶数。因此 = 2 ，其中 是某个整数。于是 ^{2} = 4 ^{2}。这反过来得到2 ^{2} = (2 + 1)。但是2 ^{2}是偶数，而2 + 1是奇数，因此它们不可能相等。因此我们得到一个矛盾，所以不存在整数 和 使得 = 4 + 2。■

例 1.4.17

鸽巢原理：如果有多于 只鸽子飞入 个鸽巢，那么至少有一个鸽巢中包含至少两只鸽子。证明这一点！

解答。

Proof. 假设，与约定相反，每个鸽巢至多包含一只鸽子。那么最多只会有 只鸽子。但我们假设鸽子的数量多于 只，因此这是不可能的。于是必然存在一个鸽巢中有不止一只鸽子。 ■

虽然我们将这个证明表述为反证法，但我们也可以使用逆否命题证明，因为我们的矛盾只是对假设的否定。有时会出现这种情况，此时你可以使用任一种证明方式。然而，也有一些例子，其中矛盾出现在与原始陈述“相距很远”的地方。

1.4.5 证明风格总结

我们已经考虑了三种证明方式：直接证明、逆否命题证明，以及反证法。在具体问题中，决定采用哪种证明方式可能颇具挑战，而且不存在一条总能告诉我们该怎么做的规则。通常，一次证明往往有多种推进方式，这也是数学如此令人兴奋的原因之一。

在撰写证明时，一个很好的起点是思考在每种证明风格下初始假设会是什么，以及你要寻找的结论是什么。证明有点像儿童菜单里的迷宫游戏。有一个 *START* 和一个 *EXIT*，你的目标是从一个找到通往另一个的路径。有时，从两端同时推进会有所帮助，并希望能在中间相遇。

证明的开始与结束。

要证明一个蕴涵 $\to$ ：

直接开始：假设 。结束：因此 。逆否命题开始：假设 $\neg$ 。结束：因此$\neg$ 。反证法开始：假设 $\neg(\to)$。结束：……这构成矛盾。

即使你并不是要证明一个蕴含命题，也可以使用反证法；但如果该陈述本身是一个蕴含命题，那么假设 $\neg(\to)$ 就非常有力。记住，蕴含命题为假的唯一情况是 为真而 为假。因此我们实际上是假设 $\wedge \neg$ 。啊哈！ 正是我们在直接证明中所假设的。$\neg$ 则是我们在逆否证明中所假设的。所以一个 *proof by* *contradiction is like doing the other two proofs at the same time, and meeting in the middle!*

为说明这一点，让我们证明 *Investigate!* 活动中的一个事实。我们将证明：如果一个迷你数独谜题在它的四个角（下方标记为 到 ）中包含的数字彼此不同，那么中心的四个方格（下方标记为 ）在任何解中也必须包含不同的数字。

a			*b*
	*	*	
	*	*	
c			*d*

我们将给出三个证明：首先是直接证明，其次是逆否命题证明，最后是反证法证明。

证明。设 为一个数独谜题，其四个角上的数字两两不同：左上角为 ，右上角为 ，左下角为 ，右下角为 。设 为该谜题的任意一个解。

在 中，无论数字 是什么，它都必须出现在第 2 行。由于 已经在左上角的宫中，它不能出现在第 1 或第 2 列，因此必须出现在第 3 或第 4 列。如果它在第 3 列，那么 就出现在中央方格之一中。如果不是这样，那么它就在第 4 列。在后一种情况下，我们来问 在第 3 行出现在哪里：它不可能在第 1 或第 4 列，因此必须在第 2 或第 3 列，从而也在中央方格之一中。

相同的论证现在可以应用于另外三个外部方格。因此，在任何解法中，中心四个方格必须包含数字 到 ，且它们彼此不同。

不 我们将通过反证法证明相同的命题。 ve.

证明。设 为一个角落里有数字的迷你数独拼图。设 为拼图的任意解。假设在 中，中心的四个格子不包含所有不同的数字。那么，必定存在某个公共数字，记作 ，出现在两个中心格子中。

由于 不能连续出现两次，因此 必须位于两个相对的中心方格中：要么在r2c2和r3c3，要么在r2c3和r3c2。在这两种情况中， 可能出现在第1行和第4行的哪些位置？它不能出现在第2列或第3列，因此它必须出现在第1列和第4列。这意味着 将位于相对的外角，这意味着四个角的数字并非全都不同。

最后，我们将通过反证法证明同样的命题。

证明。设 为一个迷你数独谜题，并假设四个外角彼此不同，但在某个解 中，中心的四个方格并非彼此不同。

假设 （左上角的数字）在中心的四个格子中出现了两次。发生这种情况的唯一方式是 出现在 r3c2 和 r2c3 中，如下所示。

a			b
	*	a	
	a	*	
c			d

但现在，第四个 应该放在哪里呢？它必须在 r4c4 中，这与四个角落的数字都不相同这一条件相矛盾。类似的论证会导致其他可能的外角数字在中心重复，从而得出矛盾。因此，中心的四个方格必须包含所有不同的数字。

1.4.6 阅读问题

1. 以下哪一项是最适合的 *direct proof* 第一行，如果你想证明这个陈述：“对于所有由单一数字组成的集合 ，若| | = 6，则 包含一个偶数。”

A. 假设存在一个由单数字组成的集合 ，且| | = 6，但仅包含奇数。 B. 固定一个任意的单数字集合 ，假设| | = 6。 C. 假设 是一个包含单数字的集合，且 | | ≠ 6。 D. 设 是一个包含偶数的单数字集合。 E. 设 是一个单数字集合，且假设 不包含任何偶数。

2. 以下哪项是证明命题“对于所有单数字集合 ，如果| | = 6，则 包含一个偶数”的最佳第一行 *proof by contrapositive*?

A. 假设存在一个由一位数组成的集合 ，满足| | = 6，但只包含奇数。 B. 固定一个任意的一位数组成的集合 ，并假设| | = 6。 C. 假设 是一个由一位数组成的集合，且 | | ≠ 6。 D. 设 是一个包含偶数的一位数组成的集合。 E. 设 是一个由一位数组成的集合，并假设 不包含任何偶数。

3. 如果你想证明如下陈述，以下哪一项会是一个 *proof by contradiction* 的最佳第一行，“对于所有由个位数字组成的集合 ，如果

| | = 6，则 包含一个偶数。”

A. 假设存在一个只包含奇数的一位数集合 ，且| | = 6。 B. 固定一个任意的一位数集合 ，并假设| | = 6。 C. 假设 是一个一位数集合，且 | | ≠ 6。 D. 设 是一个包含一个偶数的一位数集合。 E. 设 是一个一位数集合，并假设 不包含任何偶数。

4. 阅读本节后你有哪些问题？请就本节的内容写出至少一个你感到好奇的问题。

1.4.7 练习题

1. 将以下一些陈述安排成正确的证明，证明以下命题：“对于任何整数 ，如果 是偶数，那么 7 是偶数。”

- 设 为任意整数，并假设 7 为偶数。
- 设 为任意整数，并假设 7 为奇数。
- 由于 7 是奇数，并且奇数与奇数的乘积仍然是奇数，
- 由于偶数除以7必须是奇数，
- 必须是偶数。
- 7 必须是奇数。
- 设 为任意整数，并假定 为偶数。
- 由于任何数与偶数的乘积是偶数，
- 7 必须是偶数。

2. 将以下一些陈述排列，以形成对以下陈述的正确证明：“对于任何整数 ，如果 7 是偶数，则 是偶数。”

- 设 为任意整数，且 为偶数。
- 由于7是奇数，且奇数与偶数的乘积是偶数，
- 7 必须是偶数。
- 设 为任意整数，并假设 7 是偶数。

- 由于一个偶数除以 7 后必须仍然是偶数，
- 必须是偶数。
- 设 为任意整数，且假设 为奇数。
- 由于 7 是奇数，并且奇数与奇数的乘积仍然是奇数，
- 7 必须是奇数。

3. 考虑如下陈述：“对于任意数 a 和 b，如果 a + b 是奇数，那么 a 或 b 至少有一个是奇数”。

使用 *proof by contrapositive* 给出该命题的一个有效证明。排列下面的一些陈述以完成该证明。

- 设 和 为整数，并假设+ 是奇数。
- 设 和 为整数，并假设如果+ 是奇数，那么 或 中至少有一个是奇数。
- 设 和 为整数，并假设二者都是偶数。
- 两个偶数的和必须也是偶数。
- 因此 + 是偶数。
- 让 和 是整数，并假设 + 是奇数，但 和 都是偶数。
- 两个奇整数的和一定是偶数。
- 但然后 + 既是偶数又是奇数，这是一个矛盾。

4. 考虑相同的命题：“对于任意的数字 和 ，若 + 是奇数，则 或 中至少有一个是奇数。”

给出该命题的一个有效证明，这一次使用一个*proof by contradiction*，并使用下面的一些陈述。

- 设 和 为整数，并假设 + 为奇数。
- 设 和 为整数，并假设如果+ 为奇数，那么 或 中至少有一个是奇数。
- 设 和 为整数，并假设二者均为偶数。
- 设 和 为整数，并假设+ 是奇数，但 和 都是偶数。
- 因此 + 是偶数。
- 两个偶整数的和也必然是偶数。

- 两个奇整数的和一定是偶数。
- 但这样一来， + 既是偶数又是奇数，这是一个矛盾。

5. 下面给出三个陈述，以及该陈述的一个可能的证明首句。在每种情况下，判断该首句是直接证明、逆否命题证明，还是反证法证明的开始。

(a) ***Statement:*** 对于每一个整数 ，数7 − 1 都能被 6 整除。***First line:*** 假设存在某个整数 ，使得7 − 1 不能被 6 整除。 (b) ***Statement:*** 对于任意整数 ，如果 是素数，那么 是孤立的。***First line:*** 设 为一个整数，并假设 不是孤立的。 (c) ***Statement:*** 如果一个形状是五边形，那么它的内角和为 480 度。***First line:*** 考虑一个任意的形状，并假设它是一个五边形。

6. 对于下述陈述，在每一种风格的证明中第一行会是什么：“如果函数 : → 是一个双射，那么 | | = | |。”

Assume $f : A \to B$ is a bijection	Direct proof
Assume $f : A \to B$ is a bijection and $\|A\| \neq \|B\|$	Proof by contrapositive
Assume $\|A\| \neq \|B\|$	Proof by contradiction

1.4.8 附加练习

1. 对于给定的谓词 ( )，你可能认为陈述 ∀ ( ) 或 ∃ ( ) 要么为真，要么为假。你将如何在每种情况下判断自己是否正确？你有四种选择：你可以给出定义域中某个元素 的例子，使得 ( ) 为真，或者使得 ( ) 为假；或者你可以论证无论 是什么， ( ) 都为真，或者都为假。

(a) 要证明 ∀ ( ) 为真，你需要做什么？ (b) 要证明 ∀ ( ) 为假，你需要做什么？ (c) 要证明 ∃ ( ) 为真，你需要做什么？ (d) 要证明 ∃ ( ) 为假，你需要做什么？

2. 考虑以下命题：“对于所有整数 和 ，如果 + 是偶数，那么 和 都是偶数。”

(a) 写出该陈述的逆否命题。 (b) 写出该陈述的逆命题。 (c) 写出该陈述的否定。

(d) 原命题是真还是假？证明你的答案。(e) 原命题的逆否命题是真还是假？证明你的答案。(f) 原命题的逆命题是真还是假？证明你的答案。(g) 原命题的否定是真还是假？证明你的答案。

3. 对于下面的每个命题，说明应使用何种证明方法来证明它们。然后说出证明是如何开始的，以及如何结束的。填写中间部分可以获得额外分数。

(a) 不存在整数 和 ，使得 是大于 5 的素数，且 = 6 + 3。 (b) 对所有整数 ，如果 是 3 的倍数，那么 可以表示为连续整数之和。 (c) 对所有整数 和 ，如果 ^{2} + ^{2} 为奇数，那么 或 为奇数。

4. 考虑如下陈述：“对所有整数 ，如果 是偶数，则8 是偶数。”

(a) 证明该命题。你正在使用什么样的证明方法？

（b）逆命题是否成立？证明或举反例。

5. 游戏 TENZI 包含 40 个六面骰子（每个骰子上的数字为 1 到 6）。假设你掷了所有 40 个骰子。

(a) 证明至少会有七个骰子落在相同的数字上。 (b) 你需要掷多少个骰子才能保证其中有四个骰子要么全相同，要么全不同？证明你的答案。

6. 证明对于所有整数 ， 是偶数当且仅当 3 是偶数。即，证明两个蕴含关系：如果 是偶数，则 3 是偶数；如果 3 是偶数，则 是偶数。

7. 证明 $\sqrt{3}$ 是无理数。

8. 考虑如下陈述：“对于所有整数 和 ，如果 是偶数且 是 3 的倍数，那么 是 6 的倍数。”

(a) 证明这个陈述。你使用了什么样的证明方法？

（b）陈述其逆命题。它成立吗？证明或反证。

9. 证明如下命题：“对所有整数 n，若 5n 为奇数，则 n 为奇数。” 清楚地说明你所使用的证明方法。

10. 证明以下命题：“对于所有整数 、 和 ，如果 ^{2} + ^{2} = ^{2}，那么 或 是偶数。”

11. 假设你想要证明以下蕴含：

对于所有数 ，如果 是素数，则 是孤立数。

如果你要证明该命题，请写出论证的开头和结尾，

(a) 直接

（b）由逆否命题

(c) 反证法

你不需要提供证明的中间部分（因为你并不知道“solitary”是什么意思）。但是，请务必给出证明的前几行和后几行，这样我们才能看出你将遵循的逻辑结构。

12. 假设你有一批珍稀的5分邮票和8分邮票。你急需寄出一封信，而手头没有其他邮票，于是决定动用你的收藏。问题是，你可以凑出哪些邮资金额？

(a) 证明如果你只使用两种邮票的数量都为偶数，则你所得到的邮资总额必为偶数。 (b) 假设你得到的邮资总额是偶数。证明你至少在其中一种类型的邮票上使用了偶数张。 (c) 假设你恰好得到 72 美分的邮资。证明你至少在某一种类型的邮票上使用了至少 6 张。

13. 证明： = 当且仅当 $\frac{(\ +\ )^2}{4}$ 。注意，你需要在这里证明两个“方向”，即“如果”和“只有如果”部分。

14. 证明 log(7) 是无理数。

15. 证明方程 $^2 = 4\ +3$ 没有整数解。

16. 证明所有大于 3 的素数要么比 6 的某个倍数大 1，要么比 6 的某个倍数小 1。

17. 你的“朋友”向你展示了他写的一份“证明”，用来说明 1 = 3。以下是该证明：

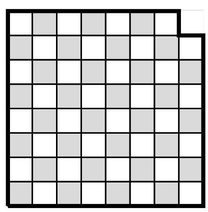
证明。我声称 1 = 3。当然，只要我们对等式的一边做任何操作，同时也对另一边做同样的操作，就可以这样做。所以从两边都减去 2。这得到 −1 = 1。现在将两边平方，得到 1 = 1。而且我们都同意这是正确的。

这里发生了什么？你朋友的论证有效吗？这个论证是对断言 1 = 3 的证明吗？请利用我们对逻辑的了解进行仔细说明。

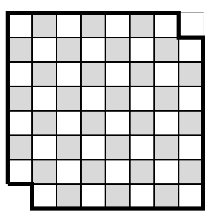
18. 一副标准的 52 张扑克牌由 4 种花色（红桃、方块、黑桃和梅花）组成，每种花色包含 13 种不同的牌值（A，2，3，……，10，J，Q，K）。如果你随机抽取若干张牌，可能会有也可能不会有一对牌（两张牌具有相同的牌值），或者三张同花色的牌。然而，如果你抽取足够多的牌，就一定能够保证出现这些情况。对于下面每一种情形，求为了保证拥有所指定的牌，最少需要抽取多少张牌，并证明你的答案。

（a）三条（例如，三张7）。 b）五张同花（例如，五张红桃）。 c）三张牌，要么全是同一花色，要么全是不同花色。

19. 假设你在一个聚会上，和你最亲密的 19 位朋友在一起（因此包括你在内一共有 20 个人）。解释为什么在聚会上必定至少有两个人与聚会上相同数量的人是朋友。假设友谊总是相互的。 20. 你的朋友给了你他心目中最好的 115 集《神秘博士》（按精彩程度排序）的列表。结果发现你看过其中的 60 集。证明在你看过的这些剧集中，至少有两集在你朋友的列表中恰好相隔四集。 21. 假设你有一个 × 的棋盘，但你的狗吃掉了其中一个角上的方格。你有一些多米诺骨牌，每一块恰好覆盖棋盘上的两个方格。你能否用互不重叠的多米诺骨牌覆盖棋盘上剩余的方格？关于 需要满足什么条件？给出必要且充分的条件（也就是说，明确说明哪些 的取值可行，哪些不可行）。证明你的结论。



22. 如果你的 × 棋盘缺少了两个对角的角落，会怎么样？证明无论 取何值，你都不可能用互不重叠的多米诺骨牌覆盖剩余的方格。



1.5 离散结构的证明

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

- 阅读并理解与离散结构相关的定义，以便正确应用这些定义。
- 撰写关于离散结构的证明。

1.5.1 章节预览

Investigate!

假设一个聚会上有15个人。大多数人彼此已经认识，但仍然有一些人决定握手。是否有可能让聚会上每个人都恰好与另外三个人握手?

到目前为止，我们已经看到一个陈述的逻辑形式如何帮助我们构建证明的框架。然而，这只能带我们走到一定程度：要充实证明的框架，必须理解与证明相关的数学对象和结构。这部分内容可以通过仔细阅读定义来获得。然而，还有一些较为抽象的理解和直觉，来源于与这些对象和结构的互动，这些能带来那种“啊哈！”的灵感时刻，提示我们如何继续进行证明。

顺便问一句……我们为什么要写证明？除了作为提升推理能力的练习之外，深入研究关于离散结构的严谨证明，也是了解这些结构本身的一种方式。它们是探索数学的游乐场，帮助我们建立对数学结构的直觉。因此，我们研究结构以便更好地为它们撰写证明，而我们为它们撰写证明又反过来帮助我们理解这些结构。自举！

将我们的关注点转向关于离散结构的证明还有另一个原因：这样做能够体现数学的一个重要特征——抽象。我们一直在为具体问题证明具体事实。我们甚至可能开始注意到某些命题的证明之间存在相似之处。这可能源于这些问题（暗中）所涉及的底层数学结构。如果我们证明了这些结构的一般性事实，那么就可以将这些“定理”应用到许多不同的问题中。

一些离散结构适合特定类型的证明，某些

“标准”的证明技术可以应用于特定的结构。我们将在这里看到其中的一些，但主要是借此机会提醒自己离散结构的一些基本定义和性质，并利用关于它们的证明来帮助更好地理解这些内容。

活动预览

在本次预习活动中，我们将探究集合与函数的一些基本性质。本节稍后，我们将就这些思想写出证明。

1. 记住，集合只是元素的集合。下面是关于集合的两个定义：

a. 若集合 的每个元素也都是集合 的元素，则称集合 是集合 的子集，记作 $\subseteq$ 。b. 给定集合 和 ， 与 的并集，记作 $\cup$ ，是包含所有属于 或 或二者同时属于的元素的集合。 让我们构造一些例子。(a) 设 $=\{1, 3, 5, 7, 9\}$。给出一个包含 3 个元素且是 的子集的集合 的例子。对于你给出的集合 ， $\cup$ 是什么？ (b) 给出两个不同的集合 和 ，使得 $\cup$ $=$ 。对于你给出的例子， $\subseteq$ 吗？ (c) 如果存在，找出集合 和 的例子，使得 $\cup$ $\neq$ 。对于你给出的例子， $\subseteq$ 吗？

2. 下列哪些始终为真？

A. 对于任意集合 和 ， $\cup$ $\subseteq$ 。B. 对于任意集合 和 ， $\subseteq$ $\cup$ 。C. 对于任意集合 和 ，如果 $\subseteq$ ，那么 $\cup$ $\subseteq$ 。D. 对于任意集合 和 ，如果 $\cup$ $=$ ，那么 $\subseteq$ 。

3. 对于任意函数 : $\rightarrow$ 以及任意集合 $\subseteq$ ，我们可以将 在 下的像定义为当输入是 的一个元素时 的所有输出所构成的集合。我们将其记为 ( ) = { ( ) : $\in$ }。

对于以下任务，让我们探究函数 : $\rightarrow$ ，其定义为 ( ) = $^2 - 3 + 8$ 。

(a) 设 $=\{1, 2, 3\}$，且 $=\{2, 4, 6\}$。求 ( ) 和 ( )。然后求 ( ) $\cup$ ( )。

(b) 现在求 $\cup$ 和 ($\cup$)。

(c) 给出一个例子（如果存在的话），说明两个不同的集合 和 ，使得 $\subseteq$ 且 ( ) $\subseteq$ ( )。

举一个例子（如果存在的话），即两个不同的集合 和 ，使得 $\subseteq$ ，但 ( ) $\nsubseteq$ ( )。

1.5.2 关于集合的证明

回顾一下，集合是元素的无序集合。我们可以通过列出这些元素来描述一个集合，或者通过指定集合中所有元素都满足的某个性质来描述。例如，

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

或

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}.$$

第二个集合是小于 10 的自然数集合 (0, 1, 2, . . .)。注意， 中的每个元素也是 中的元素。以下是一个捕捉这个概念的定义。

定义 1.5.1

集合 是集合 的一个子集，记作 $\subseteq$ ，如果 的每一个元素也是 的元素。

集合 有时被称为 的超集。

我们称 是 的真子集，记作 $\subset$ ，条件是 $\subseteq$ 且 $\neq$ 。换言之，如果 中的每个元素都是 中的元素，并且 中至少有一个元素 *not* 。

示例 1.5.2

设 = { $\in$: < 5} 且 = { $\in$: ^{2} < 10}。 $\subseteq$ 吗？ 是 的一个 *proper* 子集吗？

解答。我们在问是否每个小于 5 的自然数也是一个其平方小于 10 的自然数。好吧，我们可以直接写出集合的元素： = {0, 1, 2, 3, 4} 和 = {0, 1, 2, 3}（因为 $3^2 = 9$ 和 $4^2 = 16$）。所以 $\subseteq$ 。但 $\neq$ ，因此实际上 $\subset$ 。

上面例子中的集合很小，写下集合的元素很容易。然而，如果这不可行或者甚至不可能（可能集合是无限的），我们也可以证明集合之间的子集关系。让我们仔细看看我们如何推理上面例子中的情况。

我们断言 的每一个元素也都是 的元素。另一种说法是：对于所有数 ，*if* 是 的元素，*then* 也是 的元素。将其识别为一个条件陈述，我们可以继续给出一个直接的，

该事实的逆否命题证明，或反证法。在这里，直接证明完全可以接受。让我们试试：

证明。设 是集合 的一个元素。根据 的定义，则 $^2 < 10$。由于 $4^2 = 16$，我们必然有 < 4。根据 的定义，以及 $4 < 5$ 这一事实，可见 $\in$ 。

为了明确起见，这个证明是 *way* 比我们通常对这个例子所做的更多，但它的格式应该是具有启发性的。证明一个集合是另一个集合的子集实际上与证明一个蕴含式是相同的！

为了给出一个如何在更一般的情形下应用“子集”定义的例子，我们来证明一个关于子集的基本事实。

命题 1.5.3

For any sets , , and , if $\subseteq$ and $\subseteq$, then $\subseteq$.

证明。我们将给出一个直接证明。设 、 和 为集合，假设 $\subseteq$ 且 $\subseteq$ 。我们将证明 $\subseteq$ 。

让 是 的一个元素。由于 $\subseteq$ ，我们知道 $\in$ 。由于 $\subseteq$ ，我们知道 $\in$ 。因此， $\subseteq$ 。

现在让我们证明一个关于数字的事实：每一个9100的倍数也是13的倍数。我们可以对9100进行因式分解，但这里有一种更简单的方法。9100的倍数集合是91的倍数集合的子集，而91的倍数集合是13的倍数集合的子集。现在应用上面的命题。

命题 1.5.3 的证明有时被称为元素追踪证明。根据子集的定义， $\subseteq$ 意味着 的每个元素都是 的元素，或者等价地，对于所有 ，如果 是 的元素，则 是 的元素。证明这个方法之一是将元素 从 追踪到 。

例 1.5.4

证明如果 $\subseteq$ ，那么 $\cup$ $\subseteq$ 。回顾 $\cup$ 是集合 和 的并集，包含所有属于 或 或二者的元素。

解。我们将给出一个直接证明。因此我们将假设 $\subseteq$ ，并证明 $\cup$ $\subseteq$ 。我们的目标结论是一个关于子集的陈述，因此我们来进行一个逐元素证明。

Proof。令 和 为集合，并假设 $\subseteq$ 。现在令 为 $\cup$ 中的一个元素。这意味着 是 的一个元素，或 是 的一个元素，或二者都是。

考虑各种情况。如果 是 的一个元素，那么由于 $\subseteq$ ，我们知道 是 的一个元素。另一方面，如果 不是 的元素，那么 必定是 的一个元素（因为 在 $\cup$ 中）。无论哪种情况， 都是 的一个元素。因此， $\cup$ $\subseteq$ 。■

我们实际上可以证明一个很强的命题：当且仅当 $\subseteq$ 时，等价于 $\cup$ $=$ 。你将在习题中被要求完成这一证明。

1.5.3 关于函数的证明

函数 : → 是一种规则，它将集合 （定义域）中的每个元素恰好对应到集合 （陪域）中的一个元素。它可以是任何规则：不必有公式或理由；我们只需要把 中的元素与 中的元素配对即可。例如，我们可以令 为某门离散数学课程中注册的学生集合，令 为一年中的月份集合。现在定义函数 : → 为这样一条规则 : 给每个学生分配其生日所在的月份。由于每个学生都有一个被分配的月份，而且不多于一个月份，这就是一个函数。

这里给出一种特定类型函数的定义。

定义 1.5.5

一个函数 : → 是单射（或一对一）当且仅当 中的每个元素最多是 中一个元素的像。换句话说， 中的任何元素都不是来自 的多个 *input* 的 *output*。

在下面的例子中，我们使用 *two-line notation* 来描述一个函数。上排包含输入，下排列出相应的输出。因此， : {1, 2, 3, 4} → { , , , } 可以被定义为，

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

这意味着 (1) = , (2) = , (3) = , 和 (4) = 。

例 1.5.6

设 = {1, 2, 3} 且 = {2, 4, 6, 8}。考虑由以下定义的函数 : → 和 : → ，

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

这些函数中哪一个是单射的？

解答。函数 是单射： 中的每个元素至多是 中一个元素的像。函数 不是单射： 中的元素 4 同时是 中元素 1 和 3 的像。

再次考虑学生到出生月份的函数。它有可能是单射的吗？或者换一种说法，课程中是否必然会有两名学生拥有相同的出生月份（这将说明该函数是 *not* 单射的）？答案似乎取决于班级里有多少名学生。

[6]From the definition of **union**.

不过，让我们先停下来，思考一下这里关于函数的一个更一般的事实。让我们证明下面这个事实。回忆一下，| | 表示集合 的基数（大小）：即 中元素的个数。

命题 1.5.7

Suppose : $\to$ is a function with and both finite sets. If $| \; | > | \; |$*, then is* 不是 *injective.*

证明。我们将给出其逆否命题的证明：如果 是单射，则 $| \; | \leq | \; |$。设 $| \; | =$ 为 。由于 是单射， 中的每个元素都必须是 中 *at most* 一个元素的输出。因此，被 映射到 的 中的元素至多有 个。但是函数的定义要求，定义域中的每个元素都被映射到陪域中的恰好一个元素，因此 中的元素至多有 个。

这个证明是否让你想起了我们类似抽屉原理的证明？它应该会让你想到，因为这正是对抽屉原理进行严格表述的（其中一种）方式。我们本可以证明关于学生共享出生月份的事实，但现在我们只需应用上面的命题即可完成证明。当你应用一个定理或命题来直接证明另一个结果时，我们称后者为推论。

推论 1.5.8

Suppose a class has 25 students. Then at least two students share the same birth month.

证明。考虑将每位学生映射到其出生月份的函数。由于定义域有25个元素，而陪域有12个元素，根据命题1.5.7，该函数不是单射。因此，至少有两名学生的出生月份相同。

函数总是有来自一个*set* (称为定义域)的集合的输入，并且输出也位于一个集合中（称为陪域）。这自然引出了需要考虑的关于集合与函数相互作用的事实。

定义 1.5.9

给定一个函数 : $\to$ 和一个集合 $\subseteq$ ，我们将 在 下的像定义为集合 $(\;) = \{ \; (\;) \in \; : \; \in \; \}$。也就是说， ( ) 是对 中的输入应用该函数所得的所有输出的集合。

例 1.5.10

设 : $\to$ 由 $(\;) = 2$ 定义。设 $= \{1, 2, 3\}$。求 ( )。

解答。通过 评估 的每个元素。

$$f(1) = 2; \qquad f(2) = 4; \qquad f(3) = 6.$$

我们想要这些输出的集合。所以 ( ) = {2, 4, 6}。

现在让我们证明一些东西。

命题 1.5.11

Let : → be a function, and let and be subsets of . If ⊆ , then ( ) ⊆ ( ).

证明。设 、 和 如命题所述。假设 ⊆ 。现在考虑元素 ∈ ( )。根据定义，这意味着存在某个 ∈ 使得 ( ) = 。由于 ∈ 且 ⊆ ，我们有 ∈ 。那么根据定义，

$$y = f(a) \in f(B).$$

由于 是 ( ) 的任意元素，我们已经证明 ( ) ⊆ ( )。

注意到上面的证明再次是一个追逐元素的证明。这在你记住 ( ) 和 ( ) 只是集合的名称之后就显得很合理。为了证明一个集合是另一个集合的子集，我们将元素从子集追踪到超集。

1.5.4 关于关系的证明

集合 上的一个关系是由 中元素构成的有序对的集合。我们可以把关系看作一种描述 中元素之间某种联系的方式。例如，我们可能在一个聚会上所有人的集合上定义一个关系，用来描述谁和谁是朋友。我们也可能在自然数集合上定义一个关系，用来描述哪些数对满足关系 < 。

关系渗透于整个数学领域，通常我们甚至没有意识到它们的存在。每当我们对一个集合中的两个元素做出陈述时，我们实际上是在隐式地定义一个关系。该陈述在该对元素属于该关系时为真。例如，“3小于5”这一陈述为真，因为对(3, 5)属于关系<。实际上，使用我们在小节“量词和谓词”中所发展的语言，我们可以说，关系只是一个谓词，其中的变量来自同一个集合。

通常，关系常常有一些特殊的符号，例如“=”“≤”或“⊥”。当我们讨论一般的关系时，我们要么使用 ~ 并写作 ~ ，要么使用像 这样的一个大写字母，并写作 (,)、 ，甚至(,) ∈ （它们都表示同一件事）。

当我们研究关系时，我们会试图识别关系可能具有的性质。这里是一个非常常见的性质的例子。

定义 1.5.12

集合 上的一个关系 是传递的，如果对所有 、 ∈ ，若 且 ，则 。

例 1.5.13

考虑定义在你的离散数学课程学生集合上的关系 ~：若两名学生还一起上过另一门课程，则该关系在这两名学生之间成立。这个关系是传递的吗？

解答。不，不一定（尽管对某些学生集合来说可能是这样）。例如，假设 Alice 还有一门和 Bruce 一起上的课程，比如《编程导论》。Carlos 不在《编程导论》中，但他和 Bruce 都在《有机化学》中。因此，Alice~Bruce 且 Bruce~Carlos，但未必有 Alice~Carlos（因为 Alice 不一定和 Carlos 一起上《有机化学》）。

证明一个关系是*not*传递的，无非是找到一个反例，这意味着找到三个元素 、 和 ，使得 ~ ， ~ ，但 ≁ （记住，蕴含为假的唯一方式是前件为真而后件为假）。

也许稍微更有趣的是证明一个关系具有传递性。

例 1.5.14

考虑你离散数学课上所有学生的集合，并定义关系 ~，该关系适用于学生 和 （即 ~ 为真），前提是 高于 。证明该关系是传递的。

解法。传递性的定义是一种蕴含关系，因此我们可以尝试直接证明。

*Proof*设 、 和 是你离散数学课程中的任意学生。假设， ~ 且 ~ 。这意味着 比 高，且 比 高。那么， 一定比 更高，因为他们比 高，所以我们也可以得到 ~ 为真。因此 ~ 在这个集合上是传递的。■

1.5.5 关于图的证明

我们将花费整个第二章研究关于图的证明，因为这是数学中一个如此丰富的领域。作为预览，下面是一个图的证明示例。

图是一个顶点集合 {V} 和一个边集合 {E}。边是顶点的二元子集，我们可以将其视为表示顶点之间关系的方式。注意，这是使用集合对图的抽象定义，但我们通常通过用点表示顶点、用线连接顶点来绘制图，这样可以为我们提供一个直观的图示。

由于图表示元素（顶点）之间的一种关系，我们可以用图来表示许多现实世界的问题。例如，一个图的顶点可以表示聚会中的人。每一条边可以表示两个人之间的一次握手。因此，如果我们想知道在一个有 15 个人的聚会上，是否可能让每个人都恰好与 3 个人握手，我们实际上是在问：是否存在一个具有 15 个顶点的图，使得每个顶点都属于 3 条边。（“属于”？？是的，因为一条边是顶点的一个二元素子集，所以如果一条边“接触”或“从”某个顶点引出，这就意味着该顶点属于那个特定的二元素子集。）

这里给出了一个与这一想法相关的定义。

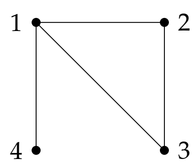
定义 1.5.15

设 是图 中的一个顶点。 的度，记作()，是包含 的边的条数，即与 关联的边的数量。

例 1.5.16

考虑图 ，其顶点集 $= \{1, 2, 3, 4\}$，以及边集 $= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ 中每个顶点的度是多少?

解答。画出图像可能会有所帮助:



我们有 $(1) = 3$， $(2) = 2$， $(3) = 2$，以及 $(4) = 1$。你可以通过统计与每个顶点相接的边的数量，或者通过统计每个顶点所属的边（子集）的数量来看到这一点。

那么，是否可能让15个人中每个人都恰好与该组中的三个人握手呢？那么，是否存在一个有15个顶点且所有顶点的度都为3的图？答案是否定的！

一种看出这一点的方法是问这种图会有多少条边。每个顶点都与三条边相接，因此按关联次数计数，我们得到 $15 \cdot 3 = 45$。但每条边都与两个顶点相接，因此我们把每条边都数了两次。因此这种图中的边数将是 $45/2 = 22.5$。但是图中的边数必须是整数，因此不存在这样的图。

这表明我们可以在更一般的情形下作出一些陈述。下面的命题是握手引理 2.1.8 的一个简单推论，我们将在第 2.1 节证明该引理。这里我们给出该引理这一特定表述的完整证明。

命题 1.5.17

In any graph, the number of vertices with odd degree must be even.

证明。我们将通过反证法来证明。假设存在一个图，其中具有奇数度的顶点个数为奇数。考虑所有顶点度数的总和。奇数度顶点的度数之和将是奇数（因为奇数个奇数之和是奇数）。偶数度顶点的度数之和将是偶数（任何偶数之和必为偶数）。奇数与偶数之和是奇数。因此，所有顶点度数的总和将是奇数。

然而，图中边的数量等于各顶点度数之和的一半（由引理 2.1.8 可知，或者更简单地说，因为每条边都会在两个顶点的度数计数中各贡献 1）。由于边的数量是整数，我们知道度数之和必须是偶数。这与我们在上一段中得到的结论相矛盾。

因此，在任何图中，度为奇数的顶点数量必须是偶数。

1.5.6 阅读问题

1. 以下哪一项是函数 : → 为单射的定义?

A. 的每个元素至多是 中一个元素的像。 B. 定义域 的集合比陪域 的集合大。 C. 中的每个元素至多映射到 中一个元素。 D. 陪域 至少和定义域 一样大。

2. 在什么时候你最可能会在证明中使用元素追踪?

A. 当证明一个集合是另一个集合的子集时。 B. 当证明一个函数是单射时。 C. 当证明一个关系是传递的时。 D. 当证明一个图具有奇数条边时。

3. 阅读本节后你有哪些问题? 请至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

1.5.7 练习题

1. 给定集合 和 ，集合 和 的交集，记作 ∩ ，是所有同时属于 和 的元素的集合。假设你想证明，如果 ∩ = ，则 ⊆ 。如果你使用直接证明，这个证明的一个好的开始是什么?

A. 设 为 ∩ 的一个元素。 B. 设 为 的一个元素。 C. 设 为 的一个元素。 D. 假设 中有一个元素 不在 中。

2. 假设你想证明对于所有集合 和 ，成立 ∩ ⊆ 。以下哪项是进行反证法证明的良好起点?

A. 假设存在一个属于 的元素 ，它不属于∩ 。B. 假设存在一个属于 ∩ 的元素 ，它不属于 。C. 设 为 的一个元素。 D. 设 为 ∩ 的一个元素。

3. 将下面的一些陈述进行排列，以形成对以下命题的正确证明：“对于任意集合 和 ，如果 ⊆ ∩ ，那么 ⊆ 。”

- 因此 ⊆ ∩
- 由于 ∩ 包含了所有同时属于 和 的元素，因此 是 的一个元素。
- 然后 是 ∩ 的一个元素，因为 ⊆ ∩ 。
- 让 是 ∩ 的元素。
- 假设 ⊆ 。
- 假设 ⊆ ∩ ，并且让 是 的一个元素。
- 然后 是 的元素，因为 ⊆ ∩ 。
- 因此 ⊆ 。
- 假设 ⊆ 。

4. 证明对于任意集合 和 ，(∩) ∪ = 。将下面的陈述排列成一个正确的证明。

- 因此，特别地， 是 的一个元素。
- 其次，我们将证明 ⊆ (∩) ∪ 。
- 设 是 (∩) ∪ 中的一个元素。
- 因此 ⊆ (∩) ∪ 。
- 首先我们将证明 (∩) ∪ ⊆ 。

- 因此（ ∩ ）∪ ⊆ 。
- 由于 (∩) ∪ ⊆ 和 ⊆ (∩) ∪ ，我们有 (∩) ∪ = 。
- 然后 是 (∩) ∪ 的元素，因为 在 中或在另一个集合中。
- 然后 是 ∩ 的元素，或者 是 的元素。
- 让 是 的一个元素。

5. 设 : → 是一个函数，并设 ⊆ 是陪域的一个子集。定义 在 下的逆像为集合 $^{-1}$( ) = { ∈ : ( ) ∈ }。也就是说，它是定义域中所有被映射到 中元素的那些元素。

证明：如果 $_1$ ⊆ $_2$ 是陪域的子集，则 $^{-1}$($_1$) ⊆ $^{-1}$($_2$)。将下面的一些陈述排列起来以形成一个正确的证明。

- 因此 $_1$ ⊆ $_2$。
- 这意味着 ( ) 是 $_1$ 的一个元素。
- 因此， 是 $_2$ 的一个元素。
- 因此 $^{-1}$($_1$) ⊆ $^{-1}$($_2$)。
- 假设 $_1$ ⊆ $_2$。
- 由于 $_1$ ⊆ $_2$， ( ) 是 $_2$ 的一个元素。
- 这意味着 是 $^{-1}$($_2$) 的一个元素。
- 设 为 $_1$ 的一个元素。
- 设 是$^{-1}$($_1$)中的一个元素。

1.5.8 附加练习

1. 证明对于任何两个集合 和 ， ⊆ 当且仅当 ∪ = 。2. 集合 和 的交集，记作 ∩ ，是包含所有既属于 又属于 的元素的集合。证明对于任何两个集合 和 ， ⊆ 当且仅当 ∩ = 。

3. 证明：对于任意集合 、 和 ，如果 ∪ ⊆ ，则 ⊆ 且 ⊆ 。

4. 证明对于任意集合 、 和 ，若⊆ 且 ⊆ ，则 ∪ ⊆ 。

5. 集合 和 的差集，写作 \ ，是包含所有在 中但不在 中的元素的集合。空集合，写作 ∅，是包含没有任何元素的集合。证明如果 \ = ，则 ∩ = ∅ 。 6. 证明如果 \ = \ ，则 = 。

7. 设 : $\to$ 为一个函数，且 和 是 的子集。

(a) 证明 ($\cap$) $\subseteq$ ( ) $\cap$ ( )。 (b) 找一个函数和两个集合 和 的例子，使得 ($\cap$) $\neq$ ( ) $\cap$ ( )。

8. 设 : $\to$ 为一个函数，且 和 是 的子集。

(a) 证明 ($\cup$) $\subseteq$ ( ) $\cup$ ( )。 (b)
证明 ( ) $\cup$ ( ) $\subseteq$ ($\cup$)

(c) 你能从上面的两个证明中得出什么结论?

9. 给定一个函数 : $\to$ 和一个集合 $\subseteq$ ，我们将 在 下的逆像定义为集合 $^{-1}$( ) = { $\in$: ( ) $\in$ 。也就是说，它是定义域中所有被映射到 中元素的元素。

(a) 对于 : $\to$ 定义为 ( ) = ^{2}，以下每个集合是什么?

(a) $^{-1}$({1, 4, 9})b) $^{-1}$({2, 3, 5, 7})c) $^{-1}$({1, 2, . . . , 10})b) 证明对于任何集合 $\subseteq$,
(((

(c) 给出一个函数 和一个集合 的例子，使得 $\neq$ $^{-1}$(( ))。

(d) 证明对于任意集合 $\subseteq$, ($^{-1}$( )) $\subseteq$ 。

(e) 给出一个函数 和一个集合 ，使得 ($^{-1}$( )) $\neq$ 。

10. 设 : $\to$ 为一个函数，且 和 是 的子集。证明 $^{-1}$($\cap$) = $^{-1}$( ) $\cap$ $^{-1}$( )。

11. 设 : $\to$ 为一个函数，并设 和 为 的子集。证明 $^{-1}$($\cup$) = $^{-1}$( ) $\cup$ $^{-1}$( )。

12. 对于下面的每个关系，判断它是否是传递的。如果是，证明它。如果不是，给出一个反例。

(a) 在 上的关系“|”（整除）定义为：当 是 的倍数时， | 。

（b）实数集 上的关系“≤”（小于或等于）。

(c) 关系“⊥”（垂直于）平面中的直线集合。

(d) 关系“~”在平面内的三角形集合上（两个三角形是相似的，如果它们有相同的角度，但不一定大小相同）。

1.6 本章小结

我们既将逻辑视为数学的一个独立分支，也将其视为帮助我们更好地理解和撰写证明的工具。我们注意到数学陈述具有特定的逻辑形式，而分析这种形式有助于理解该陈述。

在最基本的层面上，一个陈述可能使用 *logical connectives* 将更简单的陈述组合起来。我们经常使用变量以及对这些变量的 *quantify*。基于这些联结词和量词来判定一个陈述的真或假，正是逻辑所关注的内容。由此，我们可以判断两个陈述是否在逻辑上等价，或者一个或多个陈述是否（在逻辑上）蕴涵另一个。

在撰写证明（在数学的任何领域中）时，我们的目标是解释为什么一个数学陈述是真的。因此，至关重要的是我们的论证能够蕴含该陈述的真实性。为此，我们首先必须知道该陈述为真意味着什么，同时还要确保构成证明的各个陈述能够正确地推出结论。要检验证明是否正确，必须对逻辑有牢固的理解。

然而，理解逻辑还有另一个有用的原因。理解一个陈述的逻辑结构常常能为如何写出该陈述的证明提供线索。

这并不是说写证明总是直截了当的。再次考虑*Goldbach conjecture*：

> 每一个大于 2 的偶数都可以表示为两个质数之和。

我们不打算在这里尝试证明该陈述，但至少可以根据该陈述的逻辑形式说明证明可能是什么样子。或许我们应该重写该陈述，以突出其中的量词和逻辑连接词：

> 对于所有整数 ，如果 是偶数且大于 2，那么存在整数 和 ，使得 和 都是素数，并且 = + 。

直接证明会是什么样子呢？由于该陈述以一个全称量词开始，我们会从“设 是一个任意整数”开始。陈述的其余部分是一个蕴含。在直接证明中，我们假设“如果”部分，因此下一行会是：“假设 大于 2 且是偶数。”我不知道接下来该做什么，但最终我们需要找到两个素数 和 （取决于 ），并解释我们如何知道 = + 。

或者我们尝试使用反证法。为此，我们首先假设我们要证明的命题的否定。否定是什么？根据我们所学的内容，我们应该能够看出它是，

> 存在一个整数 ，使得 是偶数且大于2，但对于所有整数 和 ，要么 或 不是素数，要么 ≠ + 。

这个陈述可能是真的吗？反证法会先假设它是真的，并最终得出一个矛盾，从而证明我们关于的假设

真理是错误的。而如果你能找到这样的矛盾，你就将证明数学中最著名的开放问题之一。祝你好运。

本章回顾

1. 完成命题 ¬ → (∧) 的真值表。 2. 假设你知道命题“如果彼得不高，那么昆西是胖的并且罗伯特是瘦的”为假。如果你知道昆西确实是胖的，那么关于彼得和罗伯特你能得出什么结论（如果有的话）？ 请解释（你可以参考问题 1.6.1）。 3. 命题 → (∨) 与 (→) ∨ (→) 在逻辑上是否等价？ 请解释你的答案。 4. 以下是否是一个有效的演绎规则？ 请解释。

$$\begin{array}{rl} & P \to Q \\ & P \to R \\ \hline \therefore & P \to (Q \wedge R). \end{array}$$

5. 为下面每个陈述写出其否定、逆命题和逆否命题。

(a) 如果停电，那么食物就会变质。 (b) 如果门是关着的，那么灯是关着的。 (c) ∀ (< 1 → ^{2} < 1)。 (d) 对所有自然数 ，如果 是素数，那么 是孤立数。 (e) 对所有函数 ，如果是可微的，那么 是连续的。 (f) 对所有整数 和 ，如果 · 是偶数，那么 和 都是偶数。 (g) 对于每个整数 和每个整数 ，存在一个整数 ，使得如果 > 0，那么 > 。(h) 对所有实数 和 ，如果 = 0，那么 = 0 或 = 0。 (i) 对于 Math 228 中的每一位学生，如果他们不理解蕴涵，那么他们将考试不及格。

6. 考虑以下陈述：“对于所有整数 ，如果 是偶数且 ≤ 7，那么 是负数或 ∈ {0, 2, 4, 6}。”

(a) 该陈述是真的吗？ 解释原因。(b) 写出该陈述的否定。它是真的吗？ 解释。(c) Sta

te 该陈述的逆否命题。它是真的吗？ Ex 纯文本。

(d) 叙述该命题的逆命题。它成立吗？解释。

7. 考虑如下陈述：$\forall\ (\forall\ (\ \ +\ \ =\ \ ) \to \forall\ (\ \ \cdot\ \ = 0))$。

(a) 用文字解释该陈述的含义。该陈述是否为真？务必说明你所采用的论域是什么。 (b) 写出该陈述的逆命题，用文字和符号两种形式表示。逆命题是否为真？ (c) 写出该陈述的逆否命题，用文字和符号两种形式表示。逆否命题是否为真？ (d) 写出该陈述的否定，用文字和符号两种形式表示。否定是否为真？

8. 化简下列各式。

(a) $\neg(\neg(\ \ \wedge \neg\ \ ) \to \neg(\neg\ \ \vee \neg(\ \ \to\ \ )))$. (b) $\neg\exists$
$\neg\forall\ \neg\exists\ (\ =\ \ +\ \ \to \exists\ \ (\ \ -\ \ =\ \ ))$.

9. 考虑如下陈述：“对于所有整数 ，如果 是奇数，那么 7 是奇数。”

(a) 证明该命题。你使用了什么样的证明方法？ (b) 证明逆命题。你使用了什么样的证明方法？

10. 假设你打破你的存钱罐，抓起一把共22枚硬币（便士、五分镍币、十分硬币和二十五美分硬币）。

(a) 证明你必须至少有 6 枚同一面额的硬币。 (b) 假设你有奇数枚一分硬币。证明你在其他某一种硬币中必定至少有一种数量为奇数。 (c) 你需要舀起多少枚硬币，才能确保要么有 4 枚完全相同的硬币，要么有 4 枚完全不同的硬币？证明你的答案。

11. 你遇到四个正在打桥牌的巨魔。他们宣称：

巨魔 1：这里的所有巨魔都至少看见一个无赖。巨魔 2：我至少看见一个只看见无赖的巨魔。巨魔 3：有些巨魔害怕山羊。巨魔 4：所有巨魔都害怕山羊。

是否有不害怕山羊的巨魔？当然请记住，所有的巨魔要么是骑士（总是说真话），要么是无赖（总是说谎）。

第二章

图论

图论作为数学的一个分支存在的时间并不长；第一本图论著作出版距今还不到100年。尽管与我们如今所称的图论相关的第一个问题可以追溯到1735年，但正是计算机的出现才展现了这一学科真正的实用性。它是一门兼具简洁之美与惊人深度的学科。图论的许多主要领域几乎不需要任何数学先修知识就可以理解，然而该领域的新研究每年仍会产生数百篇经同行评审的研究论文。

在本章中，我们将探讨你可以利用图及其性质来解决计算机科学、数学以及几乎所有其他应用科学中出现的问题的几种方法。

2.1 问题与定义

Objectives

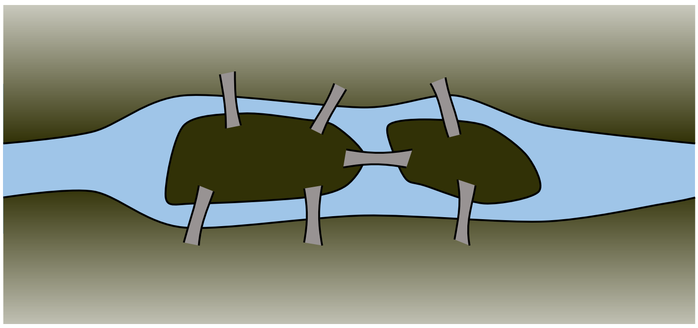
完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 使用图论的语言描述图的性质。2. 利用图的多种表示方式。3. 应用握手引理来回答关于图及其所表示的问题。

2.1.1 本节预览

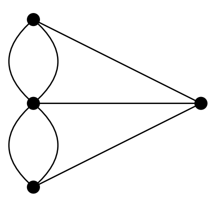
Investigate!

在欧拉的时代，普鲁士的哥尼斯堡城中有一条河，河中有两座岛屿。这些岛屿通过七座桥与河岸相连（如下图所示）。这些桥非常美丽，在休息日，城里的居民常常花时间在桥上散步。随着时间的推移，一个问题出现了：是否有可能规划一条路线，使你每座桥恰好只走一次？欧拉能够回答这个问题。你能吗？



图论是数学中一个相对较新的领域，最早由超级著名的数学家莱昂哈德·欧拉于1735年进行研究。此后，它蓬勃发展，成为几乎每一个科学分支中使用的强大工具，并且目前仍是数学研究中的一个活跃领域。

上述问题，被称为*Seven Bridges of Königsberg*，是最初启发图论的那个问题。考虑一个“不同的”问题：下面是一幅由四个点通过一些线连接而成的图。是否可能在不抬起铅笔的情况下，从某个点出发并在某个点结束，对每一条线恰好描画一次？



这两个问题之间存在明显的联系。点线图中的任何一条路径都精确对应于穿越柯尼斯堡各座桥的一条路径。

像这样的点线图被称为图（尽管从技术上讲，上面的图像是一个多重图）。图由一组称为顶点的点以及连接这些点的线（称为边）组成。当两个顶点由一条边连接时，我们称它们是相邻的。与河流、岛屿和桥梁的图片相比，观察图的好处在于我们现在有了一个

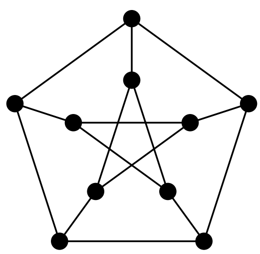
研究的数学对象。我们已经提炼出问题中“重要”的桥梁图部分。岛屿的大小、桥梁的材料、河中是否有鳄鱼等都无关紧要。重要的是哪些陆地与其他哪些陆地相连接，以及连接的次数。这是欧拉的伟大洞察。

我们将在第2.4节回到图中寻找路径的问题。在本节中，我们将探索图形表示或 *model* 现实世界问题的各种方式。在这个过程中，我们将介绍一些基本的定义、术语和符号，这些将在本章的其余部分中使用。

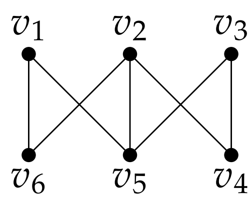
活动预览

为了了解图表及我们想要提问的问题类型，让我们探索四个图表示例。

G_1:



G_2:



G_3:

vertex	**adjacent to**
a	b, c
b	a, f
c	a, d, e
d	c, e, f
e	c, d
f	b, d

G_4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

图 $_3$以邻接表的形式呈现，其中每个顶点都有一个列表，列出与其相邻的其他顶点。图 $_4$以邻接矩阵的形式呈现，其中行和列对应于顶点，矩阵中的条目为1表示顶点相邻，为0表示顶点不相邻。在回答下面的问题之前，画出这些图的传统表示方式可能会有所帮助。

1. 首先，让我们计算每个图中的顶点和边的数量。 2. 我们称与特定顶点相邻的边的数量（即“从”顶点“出来”的边的数量）为该顶点的度。所有顶点的度按非递增顺序排列的列表称为该图的度序列。求出每个图的度序列。

3. 我们经常关注图中顶点之间的路径。如果任意一对顶点之间都存在一条路径，则称该图是连通的。有时会存在一条从某个顶点出发并最终回到自身的路径，这称为一个环。

（a）哪些图是连通的?

（b）哪些图包含环?

(c) 连通且不含回路的图称为树。对于每个图，需要删除多少条边才能将其变成一棵树？（如果它已经是一棵树，答案为 0。）

4. 对于哪些图，可以以不出现边交叉的方式绘制该图?

5. 设我们给图的每个顶点着色，使得相邻顶点始终具有不同的颜色。完成这一要求所需的最少颜色数称为该图的色数。求每个图的色数。

注意：如果这些图表示人与人之间的友谊，那么色数将告诉我们：如果想把所有人分成若干组，使得同一组内的人彼此还不是朋友，我们所需要的最少组数。

2.1.2 什么是图?

在我们开始研究图之前，我们需要就什么是图达成一致。虽然我们几乎总是把图想象成图片（由线连接的点），但这种理解相当含糊。线一定要是直的吗？线有多长或点有多大重要吗？是否可以有两条线连接同一对点？一条线可以连接三个点吗?

我们在数学中避免歧义的方法是提供具体而严谨的*definitions*。制定良好的定义并不容易，但却极其重要。定义是经共同认可的起点，数学中的一切真理都由此出发。是否存在一张没有边的图？我们必须查看定义来判断这是否可能。

我们希望我们的定义精确且不含歧义，但它也必须符合我们对所研究对象的直觉。它还需要是有用的：我们 *could* 将图定义为一种六条腿的哺乳动物，但那样并不能让我们解决任何关于桥梁的问题。相反，下面给出的是（如今）图的标准定义。

定义 2.1.1 图。

图是一个有序对 $= (\quad , \quad)$，由一个非空集合 （称为顶点）和一个由 的二元子集组成的集合 （称为边）构成。

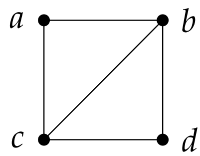
奇怪。在这个定义中，完全没有提到点或线。从

在定义中，一个图可以是

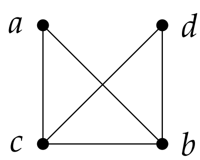
$$(\{a,b,c,d\},\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}).$$

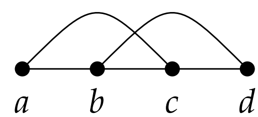
这里我们有一个包含四个顶点（字母 、 、 、 ）和五条边的图（这些边的配对为 { , }、{ , }、{ , }、{ , }、{ , }）。

观察集合以及由二元素集合组成的集合是很难处理的。这就是为什么我们常常绘制这些集合的一种表示。我们为每个顶点画一个点，并且当且仅当这两个顶点属于我们的边集中某个二元素子集时，用一条线将这两个点连接起来。因此，上述所描述的图的一种画法如下：



然而，我们也可以以不同的方式绘制图表。例如，以下任一图表：





我们应该小心"相同"的两个图是什么意思。实际上，根据我们的定义，这很简单：顶点集是否相等？边集是否相等？我们知道集合相等的含义，而图不过是两种特殊集合的对。

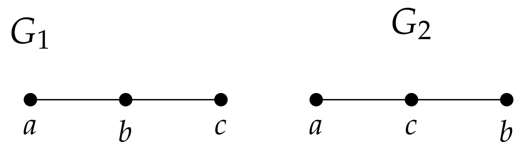
例 2.1.2

下面的图形相等吗？

$$G_1 = (\{a,b,c\},\{\{a,b\},\{b,c\}\}); \qquad G_2 = (\{a,b,c\},\{\{a,c\},\{c,b\}\}).$$

解答。否。这里两个图的顶点集是相同的，这是一个好的开始。此外，两个图都有两条边。在第一个图中，边为 { , } 和 { , }，而在第二个图中，边为 { , } 和 { , }。当然，{ , } = { , }，因此这不是问题。问题在于 { , } ≠ { , }。由于两个图的边集（作为集合）并不相等，因此这两个图（作为图）并不相等。

即使两个图不是*equal*，它们也可能在*basically*意义上相同。前一个例子中的图可以画成这样：



本质上相同（但可能并不完全相等）的图称为同构的。我们将在一个简短的例子之后给出该术语的精确定义：

例 2.1.3

考虑以下图形：

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ where } V_1 = \{a, b, c\} \text{ and } E_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\};$$

$$_2 = (\;_2,\;_2) \text{ 其中 } \;_2 = \{\;,\;,\;\} \text{ 和 } \;_2 = \{\{\;,\;\}, \{\;,\;\}, \{\;,\;\}\}.$$

这些图是一样的吗？

解答。这两个图并不相等。只需注意到 $_1 \neq \;_2$，因为 $\in \;_1$，但 $\notin \;_2$。然而，这两个图都由三个顶点组成，并且每一对顶点之间都有边相连。我们可以如下所示地画出它们：

显然我们想说这些图在本质上是相同的，因此尽管它们不相等，但它们将是*isomorphic*。我们可以重新命名一个图的顶点，从而得到第二个图。

直观地说，如果图基本相同，或者更好地说，如果它们除了顶点名称外完全相同，那么它们是同构的。为了精确地定义重命名顶点的概念，我们给出以下定义：

定义 2.1.4

两个图 $_1$ 和 $_2$ 之间的同构是图的顶点之间的一个双射 $: \;_1 \to \;_2$，使得当且仅当 $\{\;,\;\}$ 是 $_1$ 中的一条边时，$\{\;(\;),\;(\;)\}$ 是 $_2$ 中的一条边。

两个图是同构的，如果它们之间存在同构关系。在这种情况下，我们写作 $_1 \cong \;_2$。

同构本质上只是一个对顶点进行重命名的函数。它必须是一个双射，这样每个顶点都会得到一个新名称。这些新命名的顶点当且仅当它们在使用旧的名称时通过边相连，才通过边相连

names.

例 2.1.5

判断图 $_1$ = ($_1$, $_1$) 和 $_2$ = ($_2$, $_2$) 是否相等或同构。

$V_1 = \{a, b, c, d\}, E_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$
$V_2 = \{a, b, c, d\}, E_2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$

解答。两个图并不相等，因为 { , } ∈ $_1$，但 { , } ∉ $_2$。然而，由于两个图都包含相同数量的顶点和相同数量的边，它们 *might* 是同构的（在大多数情况下这还不够，但这是一个良好的开始）。

我们可以尝试构造一个同构。不妨设 ( ) = ，( ) = ，( ) = ，以及 ( ) = 。这显然是一个双射，但为了确保该函数是一个同构，我们必须确保它 *respects the edge relation*。在 $_1$ 中，顶点 和 由一条边相连。在 $_2$ 中， ( ) = 和 ( ) = 由一条边相连。到目前为止一切顺利，但我们还必须检查另外三条边。 $_1$ 中的边 { , } 对应于 { ( ), ( )} = { , }，但这里出现了一个问题。在 $_2$ 中， 和 之间没有边。因此， 不是同构。

然而，并非所有希望都已丧失。仅仅因为 不是一个同构，并不意味着根本不存在任何同构。我们可以再试一次。在这一点上，画出图形来看看它们应该如何对应，或许会有所帮助。

或者注意到，在 $_1$ 中，顶点 与所有其他顶点相邻。在 $_2$ 中，也有一个具有这种性质的顶点： 。因此，通过首先定义 ( ) = ，来构造双射 : $_1$ → $_2$。接下来，我们应该把 映射到哪里呢？在 $_1$ 中，顶点 只与顶点 相邻。在 $_2$ 中，恰好也有一个这样的顶点，即 。因此令 ( ) = 。至于最后两个，在这个例子中，我们可以自由选择：令 ( ) = 且 ( ) = （交换这两个也是可以的）。

我们应该检查这确实是一个同构。它肯定是一个双射。我们必须确保边被尊重。图 $_1$ 中的四条边是

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}.$$

在所提出的同构下，这些变为

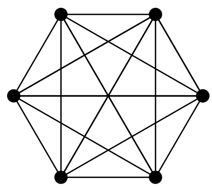
$$\{g(a), g(b)\}, \{g(a), g(c)\}, \{g(a), g(d)\}, \{g(c), g(d)\}$$

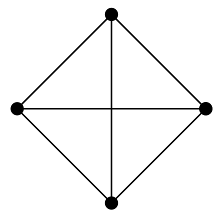
$$\{c,d\},\{c,b\},\{c,a\},\{b,a\},$$

它们恰好是 $_2$ 中的边。因此 是一个同构，所以 $_1 \cong \ _2$

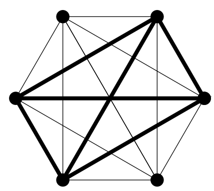
有时我们会讨论一个具有特殊名称的图（比如 $_n$ 或 *Petersen graph*），或者可能绘制一个没有任何标签的图。在这种情况下，我们实际上是在指代与该特定图的任意拷贝同构的 *all* 图。一个同构图的集合通常被称为同构类。[1]

除了相等和同构之外，我们还关心图之间的其他关系。例如，比较下面这一对图：





这些绝对不是同构的，但请注意，右边的图看起来好像是左边图的一部分，尤其是如果我们这样画的话：



我们想说较小的图是较大图的一个 *subgraph*。我们应当对此给出一个谨慎的定义。事实上，对于“子图”这一概念，有两种合理的理解。

定义 2.1.6 子图。

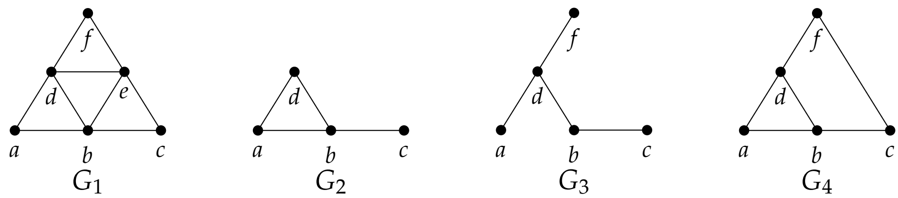
我们说 $' = (\ ', \ ')$ 是 $= (\ , \ )$ 的一个子图，并写作 $' \subseteq$ ，前提是 $' \subseteq$ 且 $' \subseteq$ 。我们说 $' = (\ ', \ ')$ 是 $= (\ , \ )$ 的一个诱导子图，前提是 $' \subseteq$ 且所有其端点仍在 $'$ 中的边也在 $'$ 中。

注意到每个诱导子图也是一个普通子图，但反之不成立。可以把子图看作是从较大的图中删除一些顶点和边所得到的结果。要使该子图成为诱导子图，我们仍然可以删除顶点，但此时只删除那些与被删除顶点相接的边。

[1]This is not unlike geometry, where we might have more than one copy of a particular triangle. There instead of *isomorphic* we say *congruent*.

示例 2.1.7

考虑以下图形:



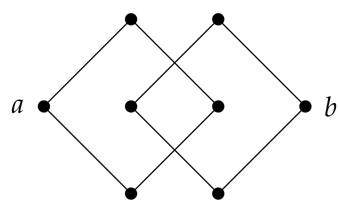
在这里, $_2$ 和 $_3$ 是 $_1$ 的子图。但只有 $_2$ 是一个 *induced* 子图。 $_1$ 中连接 $_2$ 中顶点的每条边也是 $_2$ 中的边。在 $_3$ 中,边 { , } 位于 $_1$ 中,但不在 $_3$ 中,尽管顶点 和 位于 $_3$ 中。

图 $_4$ 并不是 $_1$ 的子图,尽管看起来我们所做的只是移除了顶点 。原因在于,在 $_4$ 中我们有边 { , },但它并不是 $_1$ 的一个元素,因此我们不具备所需的 $_4 \subseteq\ _1$。

回到一些基本的图论定义。注意,我们上面绘制的所有图都有一个特点,即没有一对顶点通过多条边连接,也没有顶点与自身连接。像这样的图有时被称为简单图,尽管我们只称它们为*graphs*。这是因为我们对图的定义表明,边是由顶点的2元子集组成的集合。记住,说一个集合包含某个元素不止一次是没有意义的。所以,一对顶点不能通过多条边连接。此外,由于每条边必须是一个包含两个顶点的集合,因此我们不能有一个顶点通过一条边与自身连接。

也就是说,有时我们希望考虑重边(或更多条边)以及单边自环。例如,我们为柯尼斯堡七桥问题所画的“图”中就有重边,因为确实有两座桥将某个岛屿与近岸连接。我们将这些对象称为多重图。这个名字很贴切:一个 *multiset* 是一种集合,其中我们允许将同一个元素包含多次。

上面的图也是连通的:你可以沿着一些边的路径从任意一个顶点到达任意另一个顶点。一个不连通的图可以被看作是两个彼此分开的图被画得很近。例如,下面的图是**不**连通的,因为不存在从 到 的路径:



图中的顶点并不总是彼此之间都有边相连。如果我们添加所有可能的边,那么得到的图称为完全图。也就是说,一个图是完全的

如果每一对顶点之间都有一条边相连。由于一个图完全由哪些顶点与哪些其他顶点相邻所决定，因此对于给定数量的顶点，只存在一个完全图。我们给这种图一个特殊的名称：$_n$ 是在 个顶点上的完全图。

$_n$ 中的每个顶点都与另外 -1 个顶点相邻。我们把从给定顶点发出的边的数量称为该顶点的度。因此，$_n$ 中的每个顶点的度都是 -1。$_n$ 有多少条边？有人可能会认为答案应为 $(\ -1)$，因为我们把 -1 条边计数了 次（每个顶点一次）。然而，每条边都与 2 个顶点相关联，因此我们把每条边恰好计算了两次。因此，$_n$ 中共有 $(\ -1)/2$ 条边。或者，我们也可以说共有 $\binom{n}{2}$ 条边，因为要画一条边必须从 个顶点中选择 2 个。

一般来说，如果我们知道图中所有顶点的度数，就可以求出边的数量。所有顶点度数之和将始终等于边数的 *twice*，因为每条边都会使两个顶点的度各增加一次。注意，这意味着任何图中所有顶点度数之和必定是偶数！

这是我们关于所有图的第一个一般性结果的例子。它看起来相当简单无害，但我们将用它来证明各种其他命题。因此，让我们给它起一个名字，并正式陈述它。

引理 2.1.8 握手引理。

In any graph, the sum of the degrees of vertices in the graph is always twice the number of edges.

握手引理[2]有时被称为*degree sum formula*，并且可以用符号形式表示为

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2e.$$

这里我们使用记号 ( ) 表示顶点 的度。

引理的一个用途是实际计算图中的边数。为此，您必须给出图的度序列（或者能够从其他信息中找到它）。这是图中每个顶点的度的列表，通常按非递增顺序排列。

例子 2.1.9

如果一个图的度序列是，那么它必须有多少个顶点和边？

$$(4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)?$$

解。顶点的数量很容易找到。它等于度序列中的项数：7。要找出边的数量，我们计算度数之和

$$4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 20,$$

[2]A *lemma* is a mathematical statement that is primarily of importance in that it is used to establish other results.

因此边的数量是其一半：10。

握手引理也告诉我们什么是不可能的。

例 2.1.10

在最近的一次数学研讨会上，9位数学家通过握手互相问候。是否有可能每位数学家在研讨会上与恰好7个人握手?

解答。看起来这似乎是可能的。每位数学家选择一位不与其握手的人。但这不可能发生。我们在问，一个有 9 个顶点的图是否能使每个顶点的度都是 7 。如果这样的图存在，顶点度数之和将是 $9 \cdot 7 = 63$。这将是边数（握手次数）的两倍，从而得到一个有 31.5 条边的图。这是不可能的。因此，至少有一位（事实上是奇数位）数学家在研讨会上与 *even* 个的人握过手。

我们可以将前面的例子加以推广，得到如下命题。[3]

命题 2.1.11

In any graph, the number of vertices with odd degree must be even.

证明。假设存在一个图，其中度为奇数的顶点个数为奇数。那么该图中所有顶点的度数之和将是奇数，这是不可能的，根据握手引理。

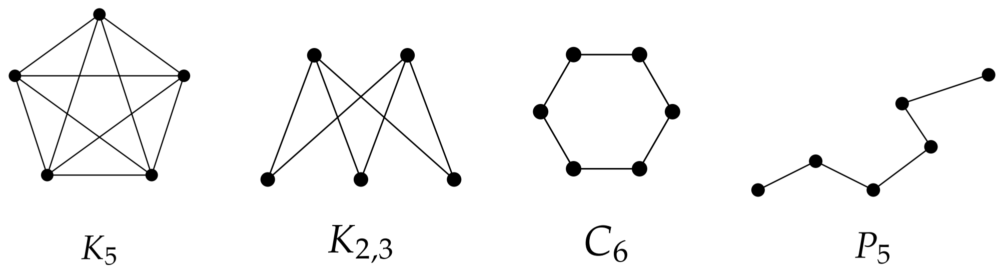
我们将在练习中进一步考虑握手引理的应用。

最终的定义：我们说一个图是二分图，如果顶点可以分为两个集合， 和 ，且集合 中的任意两个顶点不相邻，集合 中的任意两个顶点也不相邻。集合 中的顶点可以与集合 中的某些或所有顶点相邻。如果集合 中的每个顶点都与集合 中的所有顶点相邻，那么这个图是一个完全二分图，并且有一个特殊名称： $_{m,n}$ ，其中 | | = 和 | | = 。

命名图。有些图比其他图使用得更频繁，因此有专门的名称。

完全图，包含 个顶点。 $_{m,n}$ 完全二分图，包含 和 个顶点的集合。 $_n$ 个顶点的循环图，仅一个大环。 $_n$ + 1 个顶点的路径（因此有 条边），仅一个长路径。

[3]A **proposition** is a general statement in mathematics, similar to a theorem, although generally of lesser importance.



图论定义。在图论中有很多需要记住的定义。下面是我们已经使用过以及即将遇到的术语表。

图	由一组顶点构成，其中一些通过边相连。更精确地说，是一对集合 和 ，其中 是顶点的集合， 是 的由两个元素组成的子集的集合。
相邻的	如果两个顶点由一条边连接，则它们是相邻的。两条边如果共享一个顶点，则它们是相邻的。
二分图	一种图，可以将顶点划分为两个不相交的集合，使得同一集合中的任意两个顶点之间都没有边。
完全二分图	一个二分图，其中第一集合中的每个顶点都与第二集合中的每个顶点相邻。
完全图	任意一对顶点都相邻的图。
已连接	如果从任意一个顶点到任意另一个顶点都存在一条路径，则该图是连通的。
色数	图的一个适当顶点着色所需的最少颜色数。
循环	一条（见下文）起点和终点为同一顶点、但不包含任何其他重复顶点的路径。
顶点的度数	一个顶点的边的数量。
欧拉迹	一条恰好使用每条边一次的行走。
欧拉回路	一条起点和终点在同一顶点的欧拉迹。
多重图	多重图就像普通图一样，但可以在两个顶点之间包含多条边，也可以包含单边环（即从一个顶点连接到其自身的边）。
路径	一条路径是一个不重复任何顶点（或边）的游走，除了可能的第一个和最后一个。如果一条路径在同一顶点开始并结束，则称为一个环。

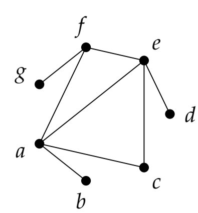
平面图 可以在（平面上）绘制且没有任何边相交的图。 子图 若 的每一个顶点和边也都是 的顶点或边，则称 是 的一个子图。若 的每一个顶点都是 的顶点，且 中任意一对顶点在 中相邻当且仅当它们在 中相邻，则称 是 的一个诱导子图。 树 一个没有回路的连通图。（如果去掉图必须连通这一要求，则该图称为森林。）树中度为 1 的顶点称为叶子。 顶点着色 为图的每一个顶点分配颜色。若相邻顶点总是被赋予不同的颜色，则该顶点着色是恰当的。 游走 一个顶点序列，使得序列中相邻的顶点（在图中）彼此相邻。若游走中没有边被重复，则称为迹；若迹中没有顶点被重复（首尾顶点可能相同），则称为路径。

2.1.3 阅读问题

1. 是否存在多个具有五个顶点和六条边的图？解释这个问题的含义以及你将如何回答它。
2. 如果一个图有 10 个顶点，每个顶点的度为 4，那么它有多少条边？
3. 阅读本节后你有哪些问题？请至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

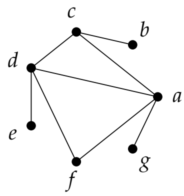
2.1.4 练习题

1. 考虑下面的图 。

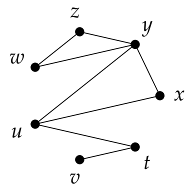


以下哪些图与 同构？选择所有适用项。

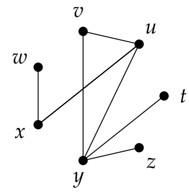
(a)



(b)

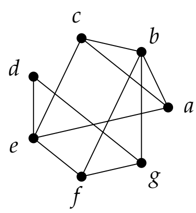


(c)

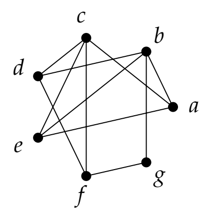


2. 以下哪些图彼此同构?

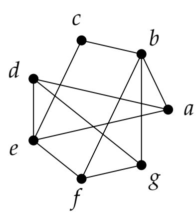
(a)



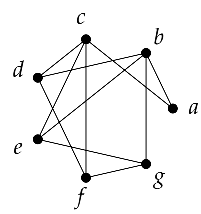
(c)



(b)



(d)



3. 图 $_1$ 有 8 个顶点，且每个顶点的度为 6。 $_1$ 有多少条边？图 $_2$ 有 7 个顶点，且每个顶点的度为 k，并且有 7 条边。 是多少？图 $_3$ 的所有顶点的度为 4，并且有 16 条边。 $_3$ 有多少个顶点?

4. 假设一个图的度序列为 (8, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 3)。这个图必须有多少条边?

5.

(a) 使得 $_n$ 是 $_5$ 的子图的最大 是多少？(b) 使得 $_n$ 是 $_5$ 的子图的最大 是多少？(c) 使得 $_n$ 是 $_5$ 的 *induced* 子图的最大 是多少？(d) 使得 $_n$ 是 $_5$ 的 *induced* 子图的最大 是多少?

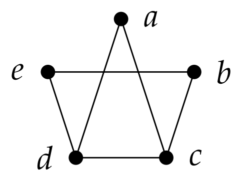
2.1.5 额外练习

1. 如果10个人彼此握手，发生了多少次握手？这个问题与图论有什么关系？ 2. 在一组5个人中，是否有可能每个人都与组内恰好2个人是朋友？那3个人呢？ 3. 是否有可能两个*different* (非同构)图具有相同的顶点数和边数？如果顶点的度数相同呢?

在这两个图中是相同的（因此例如两个图都有度为 1、2、2、3 和 4 的顶点）？画出两个这样的图，或者解释为什么不行。

4. 下面的两个图是否相等？它们是否同构？如果同构，请给出同构映射；如果不同构，请解释原因。

图 1: = { , , , , }, = {{ , }, { , }, { , }, { , }, { , }, { , }}。
图 2:



5. 考虑以下两个图：

$$G_1 \qquad V_1 = \{a,b,c,d,e,f,g\}$$
$$E_1 = \{\{a,b\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},$$
$$\{b,f\},\{c,g\},\{d,e\},\{e,f\},\{f,g\}\}.$$

$$G_2 \qquad V_2 = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\},$$
$$E_2 = \{\{v_1,v_4\},\{v_1,v_5\},\{v_1,v_7\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_6\},$$
$$\{v_3,v_5\},\{v_3,v_7\},\{v_4,v_5\},\{v_5,v_6\},\{v_5,v_7\}\}.$$

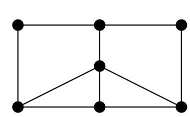
(a) 设 : 1 → 2 为一个将图1的顶点映射到图2的顶点的函数。该函数由下表给出：

x	a	b	c	d	e	f	g
$f(x)$	v_4	v_5	v_1	v_6	v_2	v_3	v_7

是否定义了图1和图2之间的同构关系？

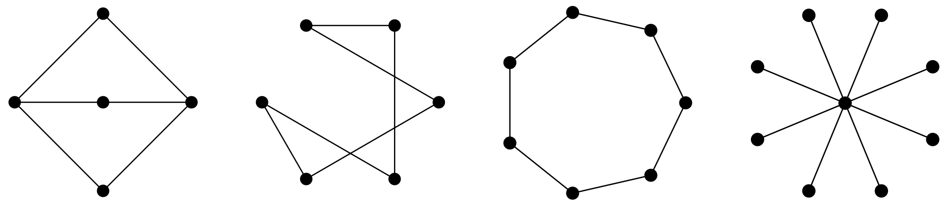
(b) 定义一个新函数 （其中 ≠ ），该函数定义了图1 与图 2 之间的一个同构。

(c) 下图所示的图是否与图1和图2同构？请解释。



6. 一个有 10 个顶点的图中，可能的最大边数是多少？在一个 *bipartite* 图中，10 个顶点可能的最大边数是多少？在一个 *tree* 中，10 个顶点可能的最大边数是多少？

7. 下列哪些图是二分图？说明你的理由。



8. 对于哪些 ≥ 3，图 $_n$ 是二分图?

9. 对于下列每一项，尝试给出两个具有给定性质的 *different* 无标号图，或解释为何这样做是不可能的。

（a）具有相同顶点数和相同边数的两棵不同的树。一棵树是一个没有环的连通图。（b）两个具有 8 个顶点且所有顶点度数均为 2 的不同图。（c）两个具有 5 个顶点且所有顶点度数均为 4 的不同图。（d）两个具有 5 个顶点且所有顶点度数均为 3 的不同图。

10. 判断下列关于子图的陈述是真还是假。对于为真的陈述，简要说明原因（1或2句话）。对于为假的陈述，给出一个反例。

(a) 完全图的任何子图也是完全的。 (b) 完全图的任何 *induced* 子图也是完全的。

(c) 二分图的任何子图都是二分图。

(d) 树的任何子图都是一棵树。

11. 我们经常使用集合论来定义图论概念。例如，给定一个图 = (,) 和一个顶点 ∈ ，我们定义

$$N(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}.$$

我们定义 [ ] = ( ) ∪ { }。本题的目标是弄清楚这一切意味着什么。

(a) 设 为图，其中顶点为 ，边为 ，给定如下：

= { , , , , , }， = {{ , }, { , }, { , }, { , }, { , }, { , }, { , }, { , }}。求 ( )、 [ ]、 ( ) 和 [ ]。(b) 对于 (a) 中的图，| ( )| 和 | [ ]| (这些集合的大小) 的最大和最小可能值分别是多少？请解释。(c) 给出一个图 = (,) (（可能与上面的图不同）)，使得对某个顶点 ∈ ，有 [ ] = 。是否存在一个图，使得对*all* ∈ 都有 [ ] = ？请解释。

(给出一个图 $= (\quad , \quad)$ 的例子，其中 $(\ ) = \emptyset$ 对于某些 $\in$ 属于 。是否存在一个图的例子，对于该图 $[\ ] =$ 对于另一个 $\in$ 也成立？请解释。

(e) 用文字描述 $(\ )$ 和 $[\ ]$ 一般表示什么意思。

12. 图是表示集合中元素之间关系的一种方式： 和 之间的边告诉我们 与 有关联（我们可以写作 $\sim$ ）。然而，并不是所有类型的关系都能通过图来表示。对于下面描述的每个关系，要么画出图，要么解释为什么该关系无法用图表示。

(a) 集合 $= \{1, 2, \cdots, 9\}$，以及当 $-$ 是 3 的非零倍数时的关系 $\sim$ 。(b) 集合 $= \{1, 2, \cdots, 9\}$，以及当 是 的倍数时的关系 $\sim$ 。(c) 集合 $= \{1, 2, \cdots, 9\}$，以及当 $0 < | \quad - \quad | < 3$ 时的关系 $\sim$ 。

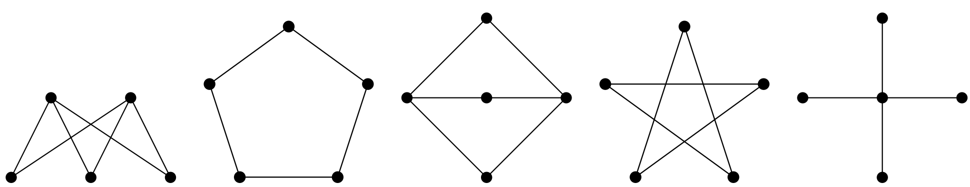
13. 考虑具有 个顶点的图。记住，图不需要是 *connected*。

(a) 为了保证至少有一个顶点的度为二或更大，该图至少需要多少条边？证明你的答案。 (b) 为了保证所有顶点的度都为二或更大，该图至少需要多少条边？证明你的答案。

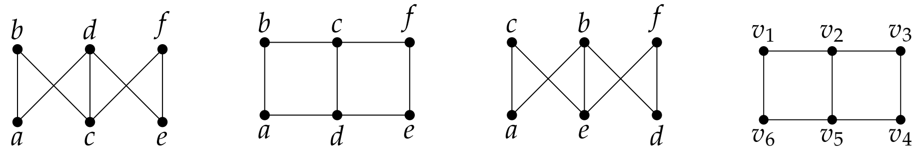
14. 证明任何至少有两个顶点的图必定存在两个度数相同的顶点。

15. 设 是一个连通图，具有 > 1 个顶点和 $- 1$ 条边。证明 有一个度为 1 的顶点。

16. 下列图形中哪些（如果有的话）是相同的？



上面的图是无标号的。通常我们认为一张图具有一个特定的顶点集合。下面的图中哪些（如果有的话）是相同的？



实际上，上面的所有图都只是图的*drawings*。图实际上是

一个抽象的数学对象，由两个集合 和 组成，其中 是 的 2 元子集的集合。下面的图是相同的还是不同的？

图 1: = { , , , , }, = {{ , }, { , }, { , }, { , }, { , }, { , }}。

图 2: = { ${}_1$, ${}_2$, ${}_3$, ${}_4$, ${}_5$}, = {{ ${}_1$, ${}_3$}, { ${}_1$, ${}_5$}, { ${}_2$, ${}_4$}, { ${}_2$, ${}_5$}, { ${}_3$, ${}_5$}, { ${}_4$, ${}_5$}}。

2.2 树

Objectives

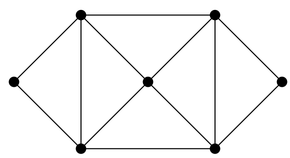
完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 证明树的基本事实。
2. 使用关于树的定理来解决问题。
3. 识别和构造生成树。

2.2.1 节预览

Investigate!

考虑下方绘制的图。



1. 找到一个仍然连通并且包含所有顶点、但边数最少的子图。 2. 找到一个不包含任何环、但边数最多的子图。 3. 你对上述示例中的边数有什么发现？这是巧合吗？

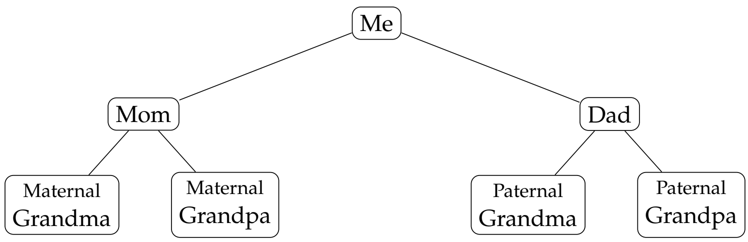
研究图论的一种非常有用且常见的方法，是将注意力限制在某一特定类型的图上。例如，与其试图理解一般意义上的所有图，不如只去真正理解完全图或二分图。现在我们正要这样做，来研究 *trees*。希望在本节结束时，我们能对这一类图有更好的理解，同时也能明白为什么它重要到值得单独用一节来讨论。

定义 2.2.1 树与森林。

树是一个不包含任何环的连通图。[4] 森林是不包含任何环的图。注意，这意味着一个

连通森林是一棵树。

上述定义是否符合你对哪些图应当称为树的直觉？试着想一些树的例子，并确保它们满足该定义。需要记住的一点是，虽然我们在图论中研究的树与您在其他学科中可能看到的树有关联，但这种对应关系并不完全一致。例如，在人类学中，你可能会研究家族树，比如下面这个，



到目前为止一切都还好，但是虽然你的祖父母（很可能）不是血亲，如果我们追溯得足够久远，他们很可能确实有*some*共同的祖先。如果你从你自己沿着这棵树向上追溯到那个共同的祖先，然后再通过你的另一位祖父母向下走，就会形成一个环，因此该图就不是一棵树。

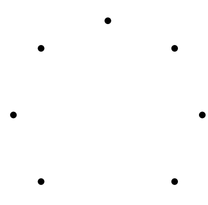
你可能也见过一种称为*decision tree* (例如用于判定级数是收敛还是发散的算法)的东西。有时它们也包含循环，因为对某个节点的决策可能会把你带回到之前的步骤。

上面的两个树的例子还有另一个值得一提的特征：树中的顶点具有明确的顺序。树的定义并不包含这种附加结构，尽管我们可以通过考虑有根树来施加这种结构，其中我们只需将一个顶点指定为 *root*。我们将在本节后面更详细地讨论这种树。

在本节中，我们将探讨树的一些基本性质，这将作为撰写图论证明的一个极好入门。我们还将考虑一种特殊的树，称为生成树，它是一种包含一个连通图中所有顶点的树。最后，我们将简要讨论有根树。

活动预览

1. 拿出一张纸，在圆周上画出 8 个顶点。



[4]Sometimes this is stated as “a tree is an acyclic connected graph;” “acyclic” is just a fancy word for “containing no cycles.”

我们将按照一些要求向此图添加边。

（a）首先，添加尽可能少的边，使得得到的图是连通的。也就是说，任意一对顶点之间都必须存在一条路径（当然，一条路径可以使用多条边）。

你画的图中有多少条边？(b) 你得到的结果图是一棵树吗？(c) 现在重新开始，再次从一个空图开始。这一次，在保证所得图不包含任何环的前提下，添加尽可能多的边。你画的图中有多少条边？(d) 你得到的结果图是一棵树吗？

2.2.2 树的性质

我们希望真正理解树。这意味着我们应该发现树的性质：是什么使它们与众不同，以及它们本身有哪些特殊之处。

树是一个连通且无环的图。我们还能说些什么吗？如果能给出图是树的其他等价条件就好了。也就是说，我们想知道是否存在一些所有树都具有的图论性质，甚至可能是 *only* 树所具有的性质。

为了了解我们可以说的内容，我们将考虑关于树的三个*propositions*。这些也将展示适用于图的一些重要证明技巧，而这些技巧恰好对于树来说稍微容易一些。

我们的第一个命题给出了树的另一种定义。也就是说，它给出了一个图成为树的充要条件。

命题 2.2.2

A graph is a tree if and only if between every pair of distinct vertices of there is a unique path.

证明。这是一个“当且仅当”的陈述，因此我们必须证明两个蕴含。我们首先证明：如果 是一棵树，那么在每一对不同的顶点之间都存在唯一的一条路径。

设 是一棵树，且令 和 为不同的顶点（如果 只有一个顶点，则结论自动成立）。为了证明 与 之间存在唯一的一条路径，我们必须证明两点：存在一条路径，并且不存在多于一条的路径。第一点是显然的；由于 是一棵树，它是连通的，因此任意一对顶点之间都存在一条路径。

为了表明路径是唯一的，我们假设在 和 之间存在两条路径，并得到一个矛盾。两条路径起初可能相同，但由于它们不同，必然存在某个第一个顶点 ′，在该顶点之后两条路径发生分岔。然而，由于两条路径都以 结束，在 ′之后存在某个第一个顶点，它们有

共有的，称其为 ′。现在考虑从 ′到 ′的两条路径。将它们合在一起，这构成了一个环，这与我们假设 是一棵树相矛盾。

现在我们考虑逆命题：如果在 的任意一对不同顶点之间都存在唯一的一条路径，那么 是一棵树。因此，假设如下命题成立：在 的任意一对不同顶点之间都存在唯一的一条路径。为了证明 是一棵树，我们必须证明它是连通的并且不包含任何回路。

这一部分的前半段很容易： 是连通的，因为在任意一对顶点之间都存在一条路径。为了证明 没有环，我们为反证起见，假设它确实存在环。设 和 是 的某个环中两个不同的顶点。由于我们可以沿着该环顺时针或逆时针从 到达 ，因此从 到 存在两条路径，这与我们的假设相矛盾。

我们已经证明了两个方向，因此完成了证明。

仔细阅读上面的证明。注意到两个方向都有两个部分：路径的存在性和路径的唯一性（这与没有环的事实有关）。在这种情况下，这两部分实际上是分开的。事实上，如果我们只考虑没有环的图（森林），那么即使可能没有 *exist* 路径在顶点之间，我们仍然可以进行证明的部分内容，探讨顶点之间路径的唯一性。

这个观察使我们能够陈述以下内容 *corollary*.[5]

推论 2.2.3

A graph is a forest if and only if between any pair of vertices in there is at most one path.

我们不提供该推论的证明（毕竟它应当可以直接由命题推出），但作为练习，你被要求在习题中给出一个严谨的证明。当你这样做时，尽量使用逆否命题证明法，而不是反证法。

我们的第二个命题告诉我们，所有树都有叶子：度为一的顶点。

命题 2.2.4

Any tree with at least two vertices has at least two vertices of degree one.

证明。我们用反证法证明。设 是一棵至少有两个顶点的树，并假设与命题相反，不存在两个度为一的顶点。

设 是 中长度尽可能长的一条路径。设 和 是该路径的端点。由于 不存在两个度为一的顶点，这两者中至少有一个的度为二或更高。设其为 。我们知道 与路径 中的一个顶点相邻，但现在它还必须与另一个顶点相邻，称之为′。

′在哪里？它不可能是 的一个顶点，因为如果是的话，从 到 ′将会有两条不同的路径：它们之间的那条边，以及 的前一部分（直到

[5]A corollary is another sort of provable statement, like a proposition or theorem, but one that follows direction from another already established statement, or its proof.

′）。但 ′ 也不可能在 之外，因为如果是这样，就会存在一条从 ′ 到 的路径，其长度比 还要长，而 已经具有可能的最长长度。

这个矛盾证明至少必须有两个度为一的顶点。事实上，我们可以说得更明确一点： 和 必须 *both* 的度为一。

该命题在证明关于树的陈述时非常有用，因为我们常常通过归纳法来证明关于树的结论。这是一种我们将在第 4.5 节中全面研究的证明技巧，但目前我们只需要理解，它有助于将给定的树与更小的树进行比较。为了证明某个结论对一棵具有 个顶点的树成立，我们将假设该结论对所有具有 − 1 个顶点的树都成立。通过移除一个度为 1 的顶点，我们得到这棵更小的树，然后只需要证明把该顶点放回去不会造成问题。

是否存在一棵恰好有 7 个顶点和 7 条边的树？试着画一个。有 7 个顶点的树可能只有 5 条边吗？这些看起来不可能画出来是有充分理由的。

命题 2.2.5

Let be a tree with vertices and edges. Then = − 1.

我们将证明该命题对于所有可能的 ≥ 1 的取值都成立。注意，如果 = 1，那么这棵树必须有 0 条边，所以是的， = − 1。然后我们可以考察具有 = 2 个顶点的树（只有一种，它有 = 1 = − 1 条边），接着考察所有具有 = 3 个顶点的树，然后是 = 4，依此类推，但那样会花费无穷的时间。真的！

相反，我们将进行一个版本的 *proof by contradiction*，称为最小反例。我们将假设命题不成立（就像我们开始任何反证法证明一样）。这意味着存在某个 *smallest* 树，对于这个树，命题不成立。如果这个最小反例（即最小犯罪者）有 个顶点，那么我们可以确保 *all* 树，具有 − 1 个顶点，是 *not* 反例。让我们看看这个是如何工作的。

证明。假设为了矛盾的推导，命题对于所有树并不成立。设 是一个命题不成立的树，并且在所有反例中具有最少的顶点数。设 为 的顶点数。

由于只有一个顶点的树没有边，因此这不能是我们的树 ，所以我们可以假设 ≥ 2。特别地，我们通过命题 2.2.4 知道 必须包含至少一个度为 1 的顶点，记作 0。

设 ′ 为从 中删除 $_0$（连同其相连的边）后得到的树。由于我们删除的是一个叶子， ′ 仍然是一棵树（ ′ 中任意一对顶点之间的唯一路径与它们在 中的唯一路径相同）。

现在 ′ 有 −1 个顶点。由于 是最小的树，且该命题对其不成立，我们知道该命题对 ′ 成立。所以 ′ 必须比顶点少一条边；也就是说， ′ 有 − 2 条边。但是 比 ′ 多一条边，所以它有 − 1 条边。这与我们假设 不满足该命题相矛盾。

该命题，从而完成了我们的证明。

2.2.3 生成树

树的一个优点是，它们为我们提供了几种遍历顶点的简单方法。如果一个连通图不是树，那么只要我们识别出一个*is*树的子图，仍然可以使用这些遍历算法。

首先我们应该考虑这是否有意义。给定任意一个连通图 ，是否总能找到一个是树的子图？其实这太容易了：你只需取 的一个顶点即可。如果我们想用这个子图来告诉我们如何访问所有顶点，那么我们希望该子图包含所有顶点。我们把这样的树称为生成树。

定义 2.2.6

给定一个连通图 ， 的一个生成树是 的一个子图，它是一棵树并且包含 的所有顶点。

事实证明，每个连通图都有一个（而且通常有很多个）。

定理 2.2.7

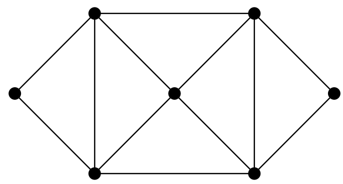
Every connected graph has a spanning tree.

我们怎么知道呢？我们可以给出一个为 *finding* 生成树的算法！从一个连通图 开始。如果没有环，那么 已经是一棵树，我们就完成了。如果存在一个环，令 为该环中的任意一条边，并考虑新图 $_1 = \; - \;$（即通过删除 得到的图）。这棵树仍然是连通的：因为 属于一个环，它的两个端点之间至少存在两条路径。现在重复这个过程：如果 $_1$ 没有环，我们就完成了；否则定义 $_2$ 为 $_1 - \; _1$，其中 $_1$ 是 $_1$ 中某个环上的一条边。继续下去。这个过程最终一定会停止，因为可删除的边只有有限条。结果将是一棵树，并且由于我们从未删除任何顶点，它是一棵 *spanning* 树。

这绝不是寻找生成树的唯一算法。你本可以从空图开始，添加属于 的边，只要添加这些边不会形成环。你可以选择首先添加哪些边：你可以始终添加与已添加边相邻的边（当然是在第一条边之后），或者按照其他顺序添加它们。最终得到的生成树取决于这些选择。

例 2.2.8

找出该图的两棵不同的生成树，



解答。这里有两棵生成树。

虽然我们不会对此进行详细讨论，但这些算法通常应用于*weighted*图。在这里，每条边都被赋予某种权重或成本。目标是找到一棵总权重尽可能小的生成树。这样的树称为最小生成树。寻找最小生成树基本上使用与我们上面描述的相同的算法，但在选择要添加的边时，总是选择最小的（或者在移除一条边时，总是移除最大的）。[6]

2.2.4 有根树

迄今为止，我们只将树视为一种特殊类型的图。然而，通常通过为树添加额外的结构来帮助解决问题是有用的。数据通常像树一样进行结构化。例如，这本书就有一个树状结构：为书本身画一个顶点。然后为每一章画一个顶点，并将它们与书本顶点连接。在每一章下面，为每一节画一个顶点，并将它与所属的章节连接。图中不会有任何循环，它将是一个树，但这是一个具有明确层级结构的树，如果我们不将“书本顶点”确定为“顶部”，就无法体现这种层级结构。

一旦树的一个顶点被指定为根，那么树上每个其他顶点都可以通过相对于根的位置来描述。这是可行的，因为树中任意两个顶点之间都有一条唯一的路径。因此，从任何顶点出发，我们可以以唯一的方式回到根。这也使我们能够描述有根树中不同顶点之间的关系。

如果两个顶点是相邻的，那么我们说其中一个是另一个的父节点，这个节点被称为父节点的子节点。在这两个节点中，父节点是离根更近的那个。因此，树的根是一个父节点，但不是任何顶点的子节点（在这一点上是唯一的：所有非根顶点都有*exactly one*个父节点）。

不出所料，顶点的孩子的孩子称为该顶点的孙子（它也是祖父母）。更一般地，我们说顶点　是

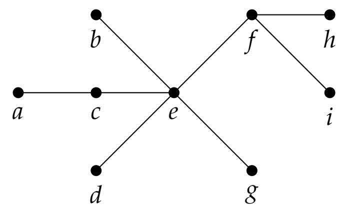
[6] If you add the smallest edge adjacent to edges you have already added, you are doing *Prim's algorithm*. If you add the smallest edge in the entire graph, you are following *Kruskal's algorithm*.

当 是从 到根的路径上的一个顶点时， 被称为 的祖先。

对于大多数树（事实上，除了一端为根的路径之外的所有树），都会存在这样的顶点对：二者互不为对方的后代。我们可以称它们为表兄弟或兄弟。事实上，如果顶点 和 具有相同的父节点，则称它们为兄弟。注意，兄弟节点永远不会相邻（你明白为什么吗？）。

例 2.2.9

考虑下面的树。



如果我们指定顶点 为根，那么 、 和 是 的子节点，并且彼此是兄弟节点 。除此之外，我们还可以说 是 的子节点，也是 的后代。顶点 是 的后代，事实上是 的孙节点。顶点 和 是兄弟节点，因为它们有共同的父节点 。

注意，如果我们选择不同的顶点作为根，情况会发生变化。如果 是根，那么它唯一的孩子是 ，而 也只有一个孩子，即 。然后 会成为 的孩子（而不是相反），并且 是 的后代，而不是祖先。现在， 和 是兄弟姐妹。

所有这些华丽的语言帮助我们描述如何通过树结构进行 *navigate*。遍历一棵树，以某种顺序访问每个顶点，是许多算法中的关键步骤。即使树没有根，我们也可以通过选择任何一个顶点作为根来形成一棵有根树。以下是这样做为什么有帮助的一个例子。

例 2.2.10

解释为什么每一棵树都是一个二分图。

解答。要证明一个图是二分图，我们必须将顶点划分为两个集合 和 ，使得同一集合中的任意两个顶点都不相邻。下面是一个完成此任务的算法。

指定任意一个顶点作为根。将该顶点放入集合 。然后将根的所有子节点放入集合 。这些子节点彼此不相邻（它们是兄弟节点），因此到目前为止是可行的。接着，将集合 中每个顶点的所有子节点（即根的所有孙节点）放入集合 。不断重复这一过程，直到所有顶点都被分配到某个集合中，在每一“代”之间在 和 之间交替。也就是说，当且仅当一个顶点是集合 中某个顶点的子节点时，它才属于集合 。

在示例中，我们对树进行划分的关键在于知道接下来应将哪个顶点分配到某个集合中。我们选择在访问下一代（层）的任何顶点之前，先访问同一代（层）的所有顶点。这通常称为广度优先搜索（之所以称为“搜索”，是因为你常常在遍历一棵树时寻找具有某些特定性质的顶点）。

相对地，我们也可以按不同的顺序对这棵树进行划分。先从根开始，把它放入 。然后寻找根的一个子节点放入 。接着找到该节点的一个子节点，放入 ，再找到它的子节点，放入 ，如此反复。当到达一个没有子节点的顶点时，就退回到它的父节点，看看父节点是否还有其他子节点。因此，我们尽可能快地从根向远处前进，然后回溯，直到能够再次向前推进。这称为深度优先搜索。

这些算法性的解释可以作为每一棵树都是二分图的一个证明，尽管需要花费一些精力来证明这些算法是 *correct* 的。另一种使用归纳法来证明所有树都是二分图的方法，在习题中被要求。

2.2.5 阅读问题

1. 假设 是一棵具有 10 个顶点的树。以下关于 的哪些陈述必须为真？选择所有适用的选项。

A. 在任意一对顶点之间都有唯一的一条路径。 B. 如果从 中移除任意一条边，所得图将是不连通的。 C. 如果在 中任意两个（原本不相邻的）顶点之间添加一条边，所得图将包含一个环。 D. 恰好有两个度为一的顶点。

2. 如果一棵树有 20 个顶点，它有多少条边？

3. 阅读本节后你有哪些问题？请至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

2.2.6 练习题

1. 以下陈述是对还是错？

（a）每一棵树都是二分图。（b）每一个二分图都是一棵树。（c）存在一片边数多于顶点数的森林。（d）存在一棵具有 6 个顶点和 6 条边的树。（e）每一棵具有 7 个顶点的树都有相同数量的边。

2. 一个森林包含30个顶点和21条边。这个图有多少个连通分量?

3. 一个包含22个顶点的连通图有29条边。在不知道具体是哪一张图的情况下，移除最少和最多多少条边可以得到一棵生成树?

删除边的最小数量：删除边的最大数量: ________ ________

4. 一棵树的平均度为1.992（也就是说，如果将所有顶点的度数相加并除以顶点的数量，得到的结果是1.992）。这棵树有多少个顶点?

5. 一棵树包含若干叶子（度为1的顶点）和四个非叶子顶点。非叶子顶点的度分别为8、6、5和3。该树有多少个叶子?

可能的最小叶子数量：可能的最大叶子数量: ________ ________

2.2.7 额外练习

1. 以下哪一张图是树?

(a) = (,), 其中 = { , , , , }, 且 = {{ , }, { , }, { , }, { , }, { , }} (b) = (,), 其中 = { , , , , }, 且 = {{ , }, { , }, { , }, { , }} (c) = (,), 其中 = { , , , , }, 且 = {{ , }, { , }, { , }, { , }} (d) = (,), 其中 = { , , , , }, 且 = {{ , }, { , }, { , }}

2. 对于下面的每一个度序列，判断它是否一定总是、一定从不，或者可能是某棵树的度序列。请记住，度序列是按非递增顺序列出图中所有顶点的度数（即与该顶点相接的边的数量）。

（a） (4, 1, 1, 1, 1) （b） (3, 3, 2, 1, 1) （c） (2, 2, 2, 1, 1) （d） (4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

3. 对于下面给出的每个度序列，判断它是否一定是、一定不是，或者可能是某棵树的度序列。请证明你的答案。

(a) (3, 3, 2, 2, 2) (b) (3, 2, 2, 1, 1, 1) (c) (3, 3, 3, 1, 1, 1)

(d) (4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

4. 假设你有一个包含 个顶点和 条边的图，且满足 = + 1。该图必须是树吗？证明你的答案。 5. 证明任何一个包含 个顶点和 条边的图（不一定是树），如果满足 > + 1，将不会是连通的。 6. 如果一个图 含有 个顶点和 条边，并且是连通的，同时满足 < + 1，它必须包含一个环吗？证明你的答案。

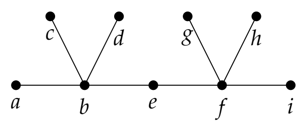
7. 我们定义森林为一个没有循环的图。

(a) 解释为什么这个名字是合适的。也就是说，解释为什么森林是树的并集。 (b) 假设 是由 棵树和 个顶点组成的森林。 有多少条边？解释。 (c) 证明任何具有 个顶点和 条边的图 ，如果满足 < + 1，必定包含一个环（即不是森林）。

8. 仔细证明推论 2.2.3：一个图是森林，当且仅当任意一对顶点之间至多存在一条路径。两个方向都使用逆否命题的证明方法（而不是反证法）。

9. 给出一个仔细的 *minimal criminal* 证明，说明每棵树都是二分图。

10. 考虑下图所示的树。



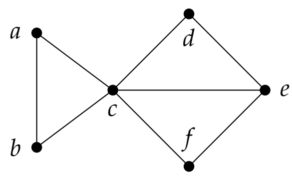
(a) 假设我们指定顶点 为根。列出每个顶点的子节点、父节点和兄弟节点。除了 之外，是否有其他顶点有孙子节点？ (b) 假设 是 *not* 被选为根。我们的根顶点选择是否改变了 所有的子节点 *number*？孙子节点的数量呢？每个有多少个？ (c) 实际上，选择树中的任何顶点，假设它不是根。解释为什么该顶点的子节点数量不依赖于哪个其他顶点是根。 (d) 上述部分是否适用于其他树？举出一个不同的树的例子，其中此规律成立。然后，要么证明它始终成立，要么举出一个例子，证明它在某些树中不成立。

11. 设 为一棵包含顶点 、 和 （可能还有其他顶点）的根树。证明如果 是 和 的后代，那么 是 的后代，或者 是 的后代。

12. 除非它本身已经是一棵树，否则给定的图 将会有多棵生成树。这些生成树必须有多相似或多不同?

(a) 给定图的所有生成树是否必须彼此同构? 解释原因或给出反例。 (b) 给定图的所有生成树是否必须具有相同数量的边? 解释原因或给出反例。 (c) 一个图的所有生成树是否必须具有相同数量的叶子（度为 1 的顶点）? 解释原因或给出反例。

13. 找出下图的所有生成树。有多少种不同的生成树? 有多少种不同的生成树 *up to isomorphism* (也就是说，如果按生成树之间是否同构进行分组，你会得到多少个组)?



14. 给出一个恰好具有 7 个不同生成树的图的例子。注意，这些生成树中的一部分或全部是同构的也是可以接受的。

15. 证明每一个不是树的连通图至少有三棵不同的（尽管可能同构的）生成树。 16. 考虑在一个图的每一棵生成树中都必须包含的边。是否每个图都必须有这样的一条边? 给出一个恰好只有一条这样的边的图的例子。

2.3 平面图

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 区分平面图和非平面图。2. 使用欧拉公式证明某些图是非平面图
。3. 将欧拉公式应用于多面体。

2.3.1 节预览

Investigate!

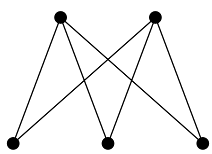
当一个连通图可以在没有任何边相交的情况下绘制时，它被称为平面图。当以这种方式绘制平面图时，它将平面划分为称为面的区域。

1. 如果可能，画出两个不同的平面图，它们具有相同的顶点数、边数和面数。

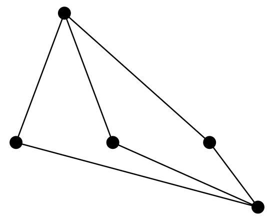
2. 如果可能，画出两个不同的平面图，它们具有相同的顶点数和边数，但面的数量不同。

什么时候可以画出一个图，使得没有任何边相交？如果这是*is*可能的，我们称该图为平面图（因为你可以把它画在*plane*上）。

注意，平面性的定义中包含了“有可能”这一措辞。这意味着，即使一个图看起来不像是平面的，它仍然可能是平面的。也许你可以以一种没有任何边相交的方式重新绘制它。例如，这是一个平面图：



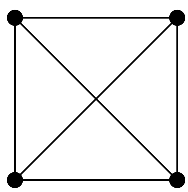
这是因为我们可以这样重新绘制它：

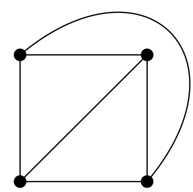


这些图是相同的，因此如果其中一个是平面的，另一个也必然是。然而，该图的原始绘制并不是该图的一个平面表示。

当一个平面图在没有边相交的情况下被绘制时，图的边和顶点把平面划分成若干区域。我们将每个区域称为一个面。上面的图有 3 个面（是的，我们 *do* 将“外部”区域也算作一个面）。无论你如何绘制该图（只要不让边相交），面的数量都不会改变，因此，把面的数量视为平面图的一个性质是合理的。

警告：只有当图以平面方式绘制时，才能计算面。例如，考虑同一张图的这两种表示：





如果你尝试使用左侧的图来数面，你可能会说有 5 个面（包括外部面）。但将该图画成平面表示会表明，事实上只有 4 个面。

活动预览

1.

(a) 画一个有 5 个顶点和 5 条边的连通平面图。你的图有多少个面（包括“外部”面）？ (b) 现在在你的图中添加一条边，连接两个原本不相邻的顶点。假设所得图仍然是平面的，列出此时它具有的顶点数、边数和面数。 (c) 再向图中添加一条边，这次连接到一个新顶点。假设所得图仍然是平面的，列出此时它具有的顶点数、边数和面数。

2. 现在再画至少三个相连的平面图，每个图至少包含六个顶点。对每个图分别统计顶点数 、边数 和面数 ，并将你的数据记录在下表中。

v	e	f

3. 你注意到有什么规律吗？如果在两个不相邻的顶点之间添加一条边，数字会发生什么变化？如果添加一个新顶点并将其连接到一个现有顶点，会发生什么？

猜想一个涉及顶点数量 、边数量 和面数量 的表达式，该表达式对于所有连通平面图保持不变。这个常数是多少？

提示。你可能会猜想一个形如 $\frac{v+e}{f}$ 的表达式。但这是不正确的，因为存在一个平面图，使得该值会是 $\frac{5+5}{2} = 5$，而另一个平面图中该表达式会是 $\frac{6+7}{3} \neq 5$。

如果 和 都增加1，什么样的表达式会保持不变？并且在 和 都增加1时也保持不变？

4. 一个立方体由六个正方形组成，每个正方形与它的邻居共享一条边。立方体的顶点连接三个正方形。

(a) 一个立方体有多少个顶点、边和面？

b) 这是否与您上面推测的关系相符？
Please provide the text you would like to have translated.

2.3.2 平面图的欧拉公式

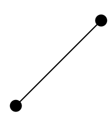
在任何连通平面图中，顶点数（ ）、边数（ ）和面数（ ）之间存在一种关系。这种关系称为欧拉公式。

平面图的欧拉公式。

对于任意具有 个顶点、 条边和 个面的连通平面图，我们有

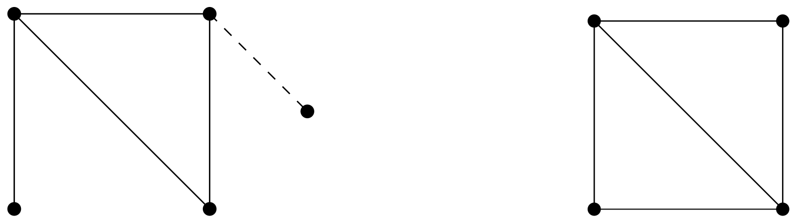
$$v - e + f = 2.$$

为什么欧拉公式是正确的？一种让我们确信其有效性的方法是一步一步地绘制一个平面图。先从图 $_2$ 开始：



任何连通图（除了一开始只有一个孤立顶点的情况）都必须包含这个子图。现在我们通过添加边和顶点来逐步构建我们的图。每一步要么是添加一个新顶点，并通过一条新边将其连接到你的某一部分

图（从而创建一个新的“尖刺”），或者通过用一条新边连接图中已存在的两个顶点（完成一个回路）。



这些“移动”有什么作用？当添加尖刺时，边的数量增加 1，顶点的数量增加 1，而面的数量保持不变。但这意味着 − + 不发生变化。完成一个回路会增加一条边，增加一个面，并且顶点的数量保持不变。因此，同样地， − + 不发生变化。

由于我们可以通过这两种操作的组合构建任何图，而且这样做不会改变数量 − + ，因此这个数量对于所有图都是相同的。但是请注意，我们的起始图 $_2$ 具有 = 2， = 1 和 = 1，因此 − + = 2。

我们在上面概述的论证并不完全正确，因为我们做出了一个不合理的假设，即所有图都可以仅通过我们描述的两种操作从 $_2$ 构建出来。为了避免这个问题，我们可以使用一个“最小罪犯”论证。你将在练习中被要求这样做，但其思想本质上与我们这里的相同，只不过我们从一个不满足该公式的最小连通平面图开始，然后 *remove* 一条边或一个顶点（以及它的边），从而得到一个更小的、满足该公式的连通平面图。但是，就像我们上面描述的添加操作一样，删除一条边或一个顶点并不会改变数量 − + 。

2.3.3 非平面图

Investigate!

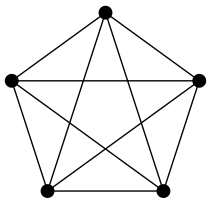
对于完全图 $_n$，我们希望能够说明一些关于顶点数、边数以及（如果该图是平面的）面的数量的内容。让我们先考虑 $_3$：

1. $_3$ 有多少个顶点？有多少条边？
2. 如果 $_3$ 是平面的，它应该有多少个面？

对 $_4$、 $_5$ 和 $_{23}$ 重复执行第 (1) 和 (2) 部分。

完全二部图呢？ $_{7,4}$ 有多少个顶点、边和面（如果它是平面的）？对于哪些 和 的取值， $_n$ 和 $_{m,n}$ 是平面的？

并非所有图都是平面的。如果边太多而顶点太少，那么一些边就不可避免地会相交。发生这种情况的最小图是 $_5$。



如果你试图在不让边相交的情况下重新绘制它，你很快就会遇到麻烦。似乎多了一条边。事实上，我们可以证明，无论你如何绘制它， $_5$ 都总会有边相交。

定理 2.3.1

$_5$ *is not planar.*

证明。该证明采用反证法。因此假设 $_5$ 是平面的。则该图必须满足平面图的欧拉公式。 $_5$ 有 5 个顶点和 10 条边，因此我们得到

$$5 - 10 + f = 2,$$

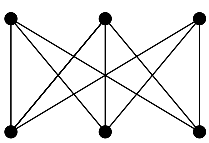
这表明，如果图在绘制时没有任何边相交，将会有 $= 7$ 个面。

现在考虑每个面周围有多少条边。每个面必须至少被3条边围绕。设 为图中所有面周围的 *boundaries* 总数。因此，我们有 3 $\leq$ 。但也有 $= 2$ ，因为每条边正好作为边界使用两次。将这两者结合，我们得到

$$3f \leq 2e.$$

但这是不可能的，因为我们已经确定 $= 7$ 且 $= 10$，并且 $21 \nleq 20$。这是一个矛盾，因此事实上 $_5$ 不是平面的。

另一个最简单的非平面图是 $_{3,3}$



证明 $_{3,3}$ 不是平面图，回答了经典的房屋与公用设施难题：不可能在不使线条相交的情况下，将三座房屋分别连接到三种公用设施。

定理 2.3.2

$_{3,3}$ *is not planar.*

证明。我们再次通过反证法进行。假设 $_{3,3}$ 是平面图。那么根据欧拉公式，图中将有 5 个面，因为 $=6$, $=9$，且 $6-9+\ =2$。

这 5 个面周围有多少条边界？设 为这个数。由于每条边都作为边界被使用两次，我们有 $=2$ 。另外，由于每个面被4 条或更多条边界所围绕， ≥ 4 。我们知道这成立，因为 $_{3,3}$ 是二部图，因此不包含任何 3 边环。于是 因此

$$4f \leq 2e.$$

但这将意味着 $20 \leq 18$，这显然是错误的。因此， $_{3,3}$ 不是平面的。

注意这些证明中的相似性和差异性。两者都是反证法证明，且都从使用欧拉公式推导图中面数（假设值）开始。然后，我们根据每个面周围的边数，找出面数和边数之间的关系。这是唯一的区别。在 $_5$的证明中，我们得到了$3\ \leq 2$ ，而在$_{3,3}$中，我们得到了$4\ \leq 2$ 。 的系数是关键。它是能够围绕任何面的一最小边数。如果某些边围绕一个面，那么这些边就形成一个环。所以这个数字就是图中最小环的大小。

一般来说，如果我们令 表示图中最小回路的大小（ 代表 *girth*，这是对此的技术术语），那么对于任何平面图都有 ≤ 2 。当这与欧拉公式不一致时，我们可以确定该图不可能是平面图。[7]

2.3.4 多面体

Investigate!

一个立方体是一个凸多面体的例子。它包含6个相同的正方形面，8个顶点和12条边。立方体是一个正多面体（也称为柏拉图立体），因为每个面都是相同的正多边形，每个顶点连接相等数量的面。

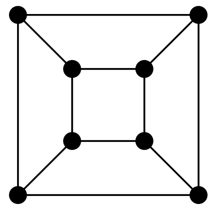
恰好还有四种正多面体：四面体、八面体、十二面体和二十面体，它们分别有 4、8、12 和 20 个面。这些多面体各自有多少个顶点和棱？

另一个你可能听过“顶点”、“边”和“面”这些术语的数学领域是几何学。多面体是由平坦的多边形面通过边和顶点连接而成的几何固体。我们特别关注凸

[7]Note that for technical reasons, the girth of a graph without any cycles (a forest) is defined to be infinity, and in this case, we definitely don't have $gf \leq 2e$, even though all trees are planar.

多面体，这意味着连接多面体内部任意两点的任一线段都必须完全包含在该多面体内部。[8]

注意，由于 $8 - 12 + 6 = 2$，立方体的顶点、边和面满足欧拉公式平面图。这不是巧合。我们可以通过将顶点和边投影到平面上，将立方体表示为平面图。一个这样的投影如下所示:



事实上，*every* 凸多面体可以投影到平面上，且边不会交叉。可以想象将多面体放置在一个球体内，球体的中心有一盏灯。多面体的边和顶点将投下阴影到球体的内部。然后，你可以在球体中间的一个投影面上切一个洞，并将球体“拉伸”至平面上展开。被穿孔的面成为平面图的“外部”面。

关键在于，我们可以将我们关于图（尤其是平面图）的知识应用到凸多面体上。由于每一个凸多面体都可以表示为一个平面图，我们可以看到，平面图的欧拉公式同样适用于所有凸多面体。我们还可以将我们在其他情境中用于图的同类推理方法应用到凸多面体上。例如，我们知道不存在一个所有 11 个顶点的度都为 3 的凸多面体，因为那样将会有 33/2 条边。

例 2.3.3

是否存在一个由三个三角形和六个五边形组成的凸多面体？那么由三个三角形、六个五边形和五个七边形（7 边形）组成的呢？

解答。这样的多面体会有多少条边？对于第一个提议的多面体，三角形将贡献总共9条边，五边形将贡献30条边。然而，这样计算每条边被算了两次（因为每条边正好与两个面相邻），因此得到39/2条边，这是不可能的。不存在这样的多面体。

第二个多面体没有这个障碍。七边形贡献的额外35条边总共有$74/2 = 37$条边。到目前为止，一切顺利。那么这个假设的多面体有多少个顶点呢？我们可以使用欧拉公式。有14个面，因此我们有 $- 37 + 14 = 2$，或者等价地 $= 25$。但现在用顶点数再次计算边数。每个顶点必须

[8]An alternative definition for convex is that the internal angle formed by any two faces must be less than 180 deg.

> 每个顶点的度数为 *at least* 三（也就是说，每个顶点至少连接三个面，因为所有多边形的内角必须小于 180°），因此顶点的度数和至少为 75。由于度数和必须恰好是边数的两倍，这意味着边数严格大于 37。再次强调，不存在这样的多面体。

为结束对平面图的这一应用，考虑正多面体。我们声称它们只有五种。我们如何知道这是真的呢？我们可以用图论来证明。

定理 2.3.4

There are exactly five regular polyhedra.

证明。回忆一下，正多面体的所有面都是相同的正多边形，并且每个顶点的度数都相同。根据正多边形的类型，考虑以下四种情况。

情形 1：每个面都是三角形。设 为面的数量。那么边的数量为 3 /2。利用欧拉公式，我们有 − 3 /2 + = 2，因此 = 2 + /2。现在每个顶点具有相同的度，设为 。因此边的数量也等于 /2。将这些结合起来得到

$$e = \frac{3f}{2} = \frac{k(2 + f/2)}{2},$$

其中说到

$$k = \frac{6f}{4 + f}.$$

和 都必须是正整数。注意，对于正的 $\frac{6f}{4+f}$ 是一个递增函数，并且其上界为位于 = 6 处的水平渐近线。因此， 唯一可能的取值是 3、4 和 5。这些取值都是可行的。要得到 = 3，需要 = 4（这是四面体）。当 = 4 时，取 = 8（八面体）。当 = 5 时，取 = 20（二十面体）。因此，恰好存在三个以三角形为面的正多面体。

情况 2：每个面都是正方形。现在我们有 = 4 /2 = 2 。使用欧拉公式，我们得到 = 2 + ，并且通过利用每个顶点的度 来计数边可得

$$e = 2f = \frac{k(2 + f)}{2}.$$

解出 得到

$$k = \frac{4f}{2 + f} = \frac{8f}{4 + 2f}.$$

这仍然是一个递增函数，但这一次水平渐近线位于 = 4，因此 唯一可能取的值是 3。这产生了 6 个面，于是我们得到一个立方体。只有一种具有正方形面的正多面体。

情形 3：每个面都是五边形。我们进行与上述相同的计算，这一次得到 $= 5\ /$ 2，因此 $= 2 + 3\ /2$。然后

$$e = \frac{5f}{2} = \frac{k(2 + 3f/2)}{2},$$

所以

$$k = \frac{10f}{4 + 3f}.$$

现在水平渐近线位于 $\frac{10}{3}$。这小于 4，因此我们只能期望有 k = 3。我们可以通过使用 12 个五边形来做到这一点，从而得到十二面体。这是唯一一个以五边形作为面的正多面体。

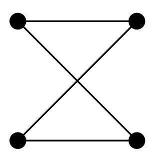
情形4：每个面都是一个 n-边形，且 n ≥ 6。按照上述相同的过程，我们推导出

$$k = \frac{2nf}{4 + (n-2)f},$$

其将增加至水平渐近线$\frac{2n}{n-2}$。当 $= 6$ 时，该渐近线位于 $= 3$。任何更大的 值将导致更小的渐近线。因此，不存在具有大于五边形面的正多面体。[9]

2.3.5 阅读问题

1. 下图所示的图是平面图吗？请解释你的答案。



2. 假设你画了一个有 10 个顶点和 14 条边的图，并且没有边交叉。你的图可能有多少个面？解释你的答案。

3. 阅读本节后你有哪些问题？请至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

2.3.6 练习题

1. 以下陈述是对还是错?

(a) $_7$ 是平面图 (b) $_6$ 不是平面图 (c) $_5$ 是平面图 (d) $_{3,3}$ 是平面图

[9] Notice that you can tile the plane with hexagons. This is an infinite planar graph; each vertex has degree 3. These infinitely many hexagons correspond to the limit as $f \to \infty$ to make $k = 3$.

(e) $_{4,4}$ 不是平面图 (f) $_{4,5}$ 是平面图 (g) $_{3,10}$ 不是平面图 (h) $_{2,5}$ 不是平面图

2. 假设 是一个平面连通图。它有 15 条边和 6 个面。 有多少个顶点?

3. 假设一个连通图有9个顶点，并且每个顶点的度数为3。

a. 该图有多少条边? b. 如果该图是平面的，它会有多少个面?

4. 让我们证明 $_{11}$ 不是平面图:

首先， $_{11}$ 有多少个顶点、多少条边? 如果我们假设 $_{11}$ 是平面的，那么它有多少个面 *would*? 然而，由于每个面至少由边围成，并且每条边恰好邻接个面，我们可以得到关于面的数量的一个界。基于这种推理，可能的最大面数是多少? ≤。这是一个矛盾，因此 $_{11}$ 不是平面的。证毕。

5. 假设图是平面图但不是连通的，并且有 7 个连通分量。绘制足够的例子以推导出这种情况的欧拉公式变体。 − + = .

2.3.7 额外练习

1. 一个平面图是否可能有 6 个顶点、10 条边和 5 个面? 请解释。 2. 图 有 6 个顶点，其度数分别为 2、2、3、4、4、5。图 有多少条边? 是否可能是平面图? 如果是，它会有多少个面? 如果不是，请解释。 3. 一个有 7 个顶点和 10 条边的连通图是否可能在绘制时没有任何边相交，并形成 4 个面? 请解释。

4. 具有10个顶点和边的图是否可能是一个连通的平面图? 请解释。

5. 是否存在一个面数为奇数的连通平面图，其中每个顶点的度都是 6? 证明你的结论。

6. 我在想一个包含12个面的多面体。其中七个是三角形，四个是四边形。这个多面体有11个顶点，包括围绕那个神秘面的顶点。最后一个面有多少条边?

7. 考虑一些经典的多面体。(a) 一个 *octahedron* 是由 8 个等边三角形组成的正多面体

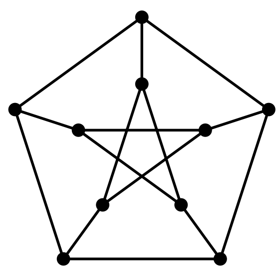
(它看起来有点像两个底面粘在一起的金字塔)。画出一个八面体的平面图表示。一个八面体（以及你的图）有多少个顶点、边和面?

(b) 足球的传统设计是（截角二十面体的球面投影）。它由 12 个正五边形和 20 个正六边形组成。没有两个五边形是相邻的（因此每个五边形的边只与六边形相共享）。一个截角二十面体有多少个顶点、棱和面? 解释你是如何得到这些答案的。加分：画出截角二十面体的平面图表示。

（c）你的“朋友”声称他用 2 个三角形、2 个正方形、6 个五边形和 5 个八边形构造了一个凸多面体。证明你的朋友在撒谎。提示：凸多面体的每一个顶点都必须至少与三个面相邻。

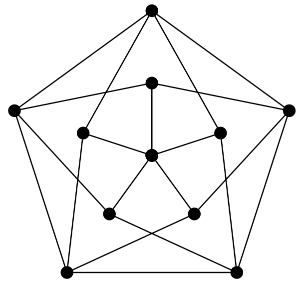
8. 使用最小反例论证证明欧拉公式，其中“最小”指边数最少 9. 使用最小反例论证证明欧拉公式，其中“最小”指 *vertices* 的数量最少。 10. 欧拉公式（ $-$ $+$ $=$ 2）对所有 *connected* 平面图都成立。如果一个图不是连通的呢? 假设一个平面图有两个连通分量。此时 $-$ $+$ 的值是多少? 如果它有 个连通分量呢?

11. 证明彼得森图（如下图）不是平面图。

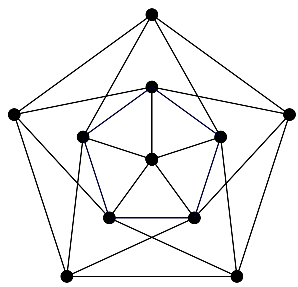


12. 证明任何具有 个顶点和 条边的平面图都满足$\leq 3 - 6$。

13. 证明任何平面图都至少有一个度不超过 5 的顶点。 14. 给出一个严谨的证明，说明下面的图不是平面图。



15. 解释为什么我们不能使用在练习 2.3.7.14 中所采用的同一类证明来证明下图不是平面图。然后说明你是如何仍然知道该图不是平面图的。



2.4 欧拉迹与欧拉回路

Objectives

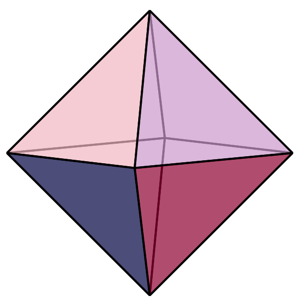
完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 判断一个图或多重图是否具有欧拉迹或欧拉回路。
2. 证明图具有欧拉路径的必要条件是必要的。
3. 区分欧拉迹和哈密顿路径，并判断在给定问题中哪一种更适合使用。

2.4.1 节预览

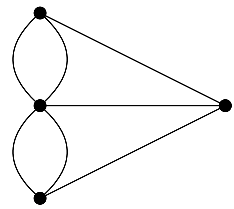
Investigate!

一只蜘蛛站在八面体（具有八个三角形面的多面体）的一個面上。她想沿著這個立體從一個面爬到另一個面，使得每條棱恰好被跨越一次。這可能嗎？如果可以，應該怎麼做？



如果我们从一个顶点出发，沿着边走到其他顶点，就在图中形成了一条*walk*。更准确地说，图中的一条行走（walk）是一个顶点序列，其中序列中的每个顶点都与其前后顶点相邻。如果这条行走恰好沿每一条边一次，则称该行走为欧拉迹（或欧拉行走或欧拉路径）。如果此外起点和终点相同（也就是说你恰好沿每一条边一次并最终回到起点），则该行走称为欧拉回路（或欧拉巡游）。当然，如果一个图不是连通的，就不可能找到这样的迹或回路。在本节的其余部分，假设所讨论的所有图都是连通的。

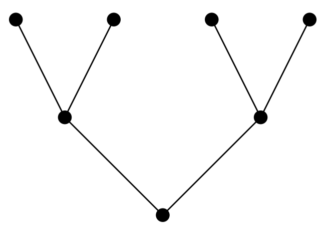
哥尼斯堡七桥问题本质上是关于欧拉迹是否存在的问题。当且仅当下面的多重图具有一条欧拉迹时，才存在一条恰好一次跨越每一座桥的路线：



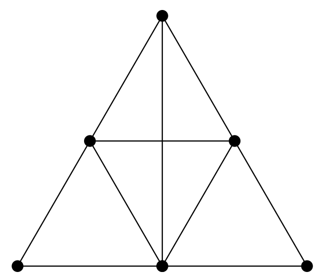
这个图足够小，我们实际上可以检查每一个不重复边的可能路径，并通过这样做让自己相信没有欧拉路径（更不用说欧拉回路）。在一些较小的图中，如果确实存在欧拉路径，通常也不难找到。我们的目标是找到一种快速方法来检查一个图是否有欧拉路径或欧拉回路，即使这个图非常大。

活动预览

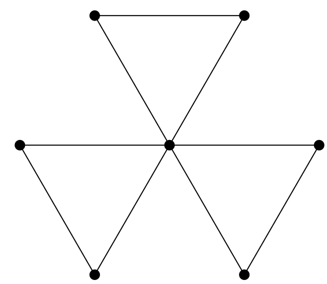
以下哪些图形具有欧拉路径？哪些具有欧拉回路？



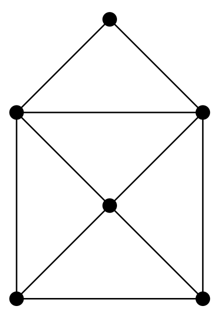
G_1



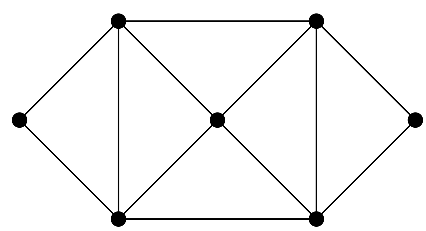
G_2



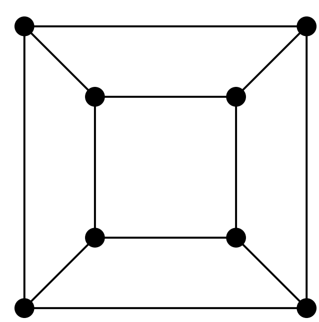
G_3



G_4



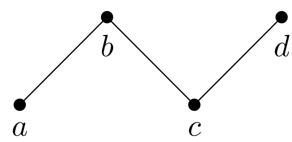
G_5



G_6

1. 写下上面图形的度数序列。度数序列与欧拉路径或回路的存在之间可能有什么联系？

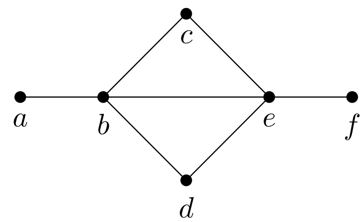
2. 记录欧拉迹或回路的一种方法是按顺序列出 *edges*。每条边都是一对顶点，为了表示我们沿该边行进的方向，可以将其写成有序对而不是集合。例如，考虑这个图：



我们可以写两个欧拉路径：

$$(a,b),(b,c),(c,d) \qquad \text{or} \qquad (d,c),(c,b),(b,a).$$

(a) 写出下面图的一个欧拉迹。



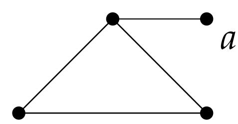
对于每个顶点，写下它的度以及它在你的边列表中出现的次数。

（b）假设你有一个度序列为 (4, 2, 2, 2, 2) 且存在欧拉迹的图。在你的边列表中，度为 4 的顶点的名称会出现多少次?

(c) 假设你有一个图，其欧拉迹以一份边的列表表示。关于在该列表中恰好出现 3 次的一个顶点，你可以得出什么结论？选择所有可能为真的选项。

2.4.2 欧拉迹的条件

保证一个图*not*具有欧拉回路的一种方法是加入一个“尖刺”，即一个度为 1 的顶点。



顶点 的度为1，如果你试图构造一条欧拉回路，就会发现你会在这个顶点被卡住。它是一个死端。也就是说，除非你从那里开始。但即便如此，也没有办法返回，因此不可能找到一条欧拉回路。不过，确实存在一条欧拉迹。它从顶点 开始，然后绕着三角形走一圈。你最终会停在那个度为3的顶点上。

每当你有一个任意奇数度的顶点时，你都会遇到类似的问题。

如果你从这样的一个顶点开始，你将无法在该处结束（在恰好一次遍历每条边之后）。在使用一条边离开起始顶点之后，从该顶点引出的边将剩下偶数条。其中一半可以用于返回该顶点，另一半用于离开。因此你返回，然后离开；返回，然后离开。用尽所有边的唯一方式是用最后一条边离开该顶点。另一方面，如果你有一个度为奇数的顶点，而你并未从该顶点开始一条迹，那么你最终会在该顶点被卡住。该迹会成对地使用与该顶点相接的边来到达并再次离开。最终，除了一条之外的这些边都会被用尽，只剩下一条用于到达的边，而没有任何边可以再次离开。

这段话的意思是：如果一个图存在欧拉迹并且有两个奇度顶点，那么欧拉迹必须从其中一个奇度顶点开始，并在另一个奇度顶点结束。在这种情况下，其他每一个顶点 *must* 都必须具有偶数度，因为到达这些顶点的边数必须与离开它们的边数相等。那么我们如何才能有一个欧拉回路呢？图中不能存在任何奇度顶点，因为欧拉迹必须从奇度顶点开始或在奇度顶点结束，但不可能两者兼有。因此，一个图要有欧拉回路，所有顶点都必须具有偶数度。

反之亦然：如果一个图的所有顶点都是偶度，那么该图具有欧拉回路；如果恰好有两个顶点是奇度，则该图具有欧拉迹。证明这一点有些棘手，但基本思想是你永远不会被“卡住”，因为在每个顶点处，每一条“入边”对应都有一条“出边”。如果你尝试构造欧拉迹而遗漏了一些边，你总是可以利用先前遗漏的边“拼接”进一个回路。

欧拉路径与回路。

- 一个图当且仅当每个顶点的度都是偶数时，才存在欧拉回路。
- 图形有欧拉路径当且仅当最多有两个奇度顶点。

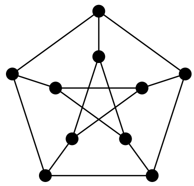
由于柯尼斯堡图的四个顶点的度均为奇数，因此该图不存在欧拉迹。因此，镇民不可能恰好一次走遍每一座桥。

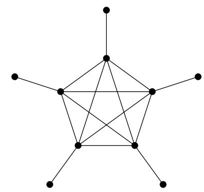
2.4.3 哈密顿路径

假设你想以这样一种方式游览柯尼斯堡：恰好一次访问每一块陆地（两个岛屿以及两岸）。这是可以做到的。用图论的术语来说，我们是在询问是否存在一条恰好一次访问每个顶点的路径。这样的路径称为哈密顿路径（或哈密顿路）。我们还可以考虑哈密顿回路，它是起点和终点在同一顶点的哈密顿路径。

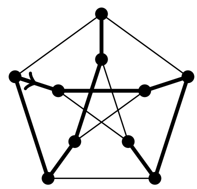
例 2.4.1

判断下面的图是否存在哈密顿路径。





解答。左侧的图有一条哈密顿路径（实际上有很多不同的），如下所示:



右侧的图没有哈密顿路径。你需要访问每一个“外侧”的顶点，但一旦访问其中一个，就会陷入死路。注意，这个图也没有欧拉迹，尽管存在有欧拉迹但没有哈密顿路径的图。

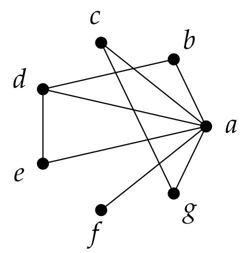
似乎找到哈密尔顿路径会更容易，因为图通常有更多的边而不是顶点，因此需要满足的条件更少。然而，没有人知道这是否是真的。目前没有已知的简单方法来判断一个图是否有哈密尔顿路径。对于小型图来说这不是问题，但随着图的规模增长，检查是否存在哈密尔顿路径变得越来越困难。事实上，这是一个问题的例子，直到目前为止，我们知道它对计算机来说通常太难解决，因为它是一个 NP-完全问题的例子。

2.4.4 阅读问题

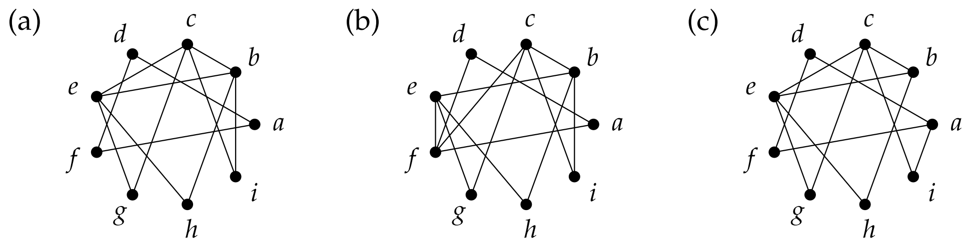
1. 是否存在一个具有欧拉回路但没有欧拉路径的图？解释你的答案。 2. 一棵树可以有欧拉巡回吗？一棵树可以有欧拉回路吗？解释你的答案。 3. 阅读完这一部分后，你有什么问题？写下至少一个你对本部分内容感兴趣的问题。

2.4.5 练习题

1. 在下列图中找到一条欧拉迹。



2. 以下哪个图包含欧拉回路？如果图包含欧拉回路，找出它。



3. 确定以下图形中哪些具有欧拉回路或欧拉路径。

(a)

$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d, e, f\} \\ E &= \{ab, af, bc, cd, ce, cf, de, ef\} \end{aligned}$$

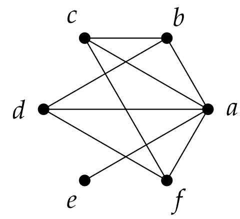
(b) 由邻接表给出的图：

u	v,w,y,z
v	u,w,x,y
w	u,v,x,z
x	v,w,y,z
y	u,v,x,z
z	u,w,x,y

(c) 由邻接矩阵给出的图：

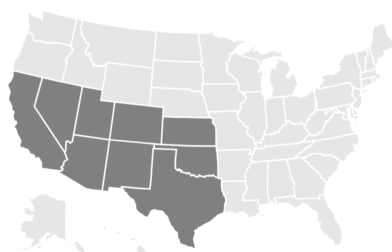
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 向下列图中添加一条边（在一对尚未相邻的顶点之间），使其具有一条欧拉迹。然后找出这条欧拉迹。



2.4.6 附加练习

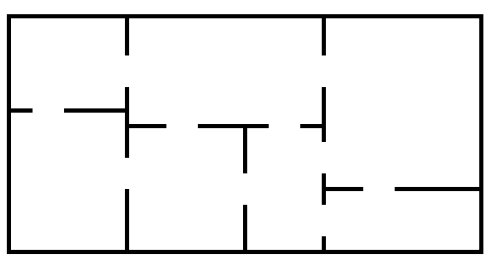
1. 你和你的朋友们想开车游览美国西南部。你们将访问以下九个州，并遵守一个相当奇怪的规则：你必须每条邻接州的边界只穿越一次（例如，你必须只穿越科罗拉多州和犹他州的边界一次）。你能做到吗？如果能，开始旅行的地点有关系吗？图论中的哪个事实解决了这个问题？



2. 以下哪个图包含欧拉轨迹？哪个包含欧拉回路？

(a) 4 (b) 5 (c) 5,7 (d) 2,7 (e) 7 (f) 7

3. Edward A. Mouse 刚刚完成了他全新的房子。平面图如下所示：

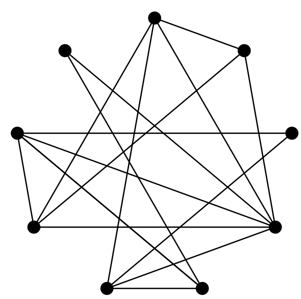


(a) 爱德华想带一位雌性老鼠朋友参观他的新居。他们是否可能恰好一次穿过每一扇门？如果可以，他们必须从哪些房间开始并在哪些房间结束这次参观？请解释。

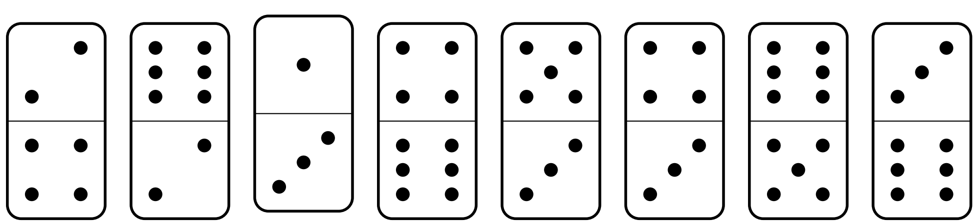
(b) 是否可以参观房子，每个房间恰好访问一次（不一定要使用每个门口）？请解释。

(c) 经过几年（以鼠年为单位），爱德华决定进行改造。他想在现有的房间之间添加一些新门。当然，他不能在房子的外部添加任何门。是否可以使每个房间都有奇数个门？请解释。

4. 对于哪些 ，图 $_n$ 含有一条欧拉回路？请解释。 5. 对于哪些 和 ，图 $_{m,n}$ 含有一条欧拉迹？一条欧拉回路？请解释。 6. 对于哪些 ， $_n$ 含有一条哈密顿路径？一个哈密顿回路？请解释。 7. 对于哪些 和 ，图 $_{m,n}$ 含有一条哈密顿路径？一个哈密顿回路？请解释。 8. 一位桥梁建造者来到哥尼斯堡，希望增建桥梁，使得 *is* 可以恰好一次走过每一座桥。需要建造多少座桥？ 9. 下面是一个表示一组学生之间友谊关系的图（每个顶点表示一名学生，每条边表示一段友谊）。学生是否可能围坐在一张圆桌旁，使得每位学生都坐在两位朋友之间？这个问题与迹有什么关系？



10. 桌上放着8块多米诺骨牌，如下图所示。如果将它们排成一行，使任何相邻接触的两端数字相同，那么两端数字之和是多少？

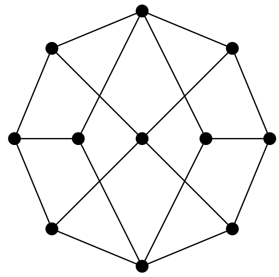


11. 我们是否可以根据图中顶点的度数来判断一个图是否存在哈密顿路径？

(a) 假设一个图有一条哈密顿路径。该图中度为 1 的顶点最多可以有多少个？解释为什么你的答案是正确的。(b) 找到一个没有哈密顿路径的图，尽管没有任何顶点

具有一阶。解释为什么你的例子有效。

12. 考虑以下图形:



(a) 寻找哈密尔顿路径。你的路径能扩展成哈密尔顿回路吗?

（b）该图是二分图吗？如果是，每个“部分”中有多少个顶点?

(c) 使用你在(b)部分的答案证明该图没有哈密尔顿回路。

(d) 假设你有一个二分图 ，其中一部分的顶点数量至少比另一部分多两个。证明 不具有哈密顿路径。

2.5 上色

Objectives

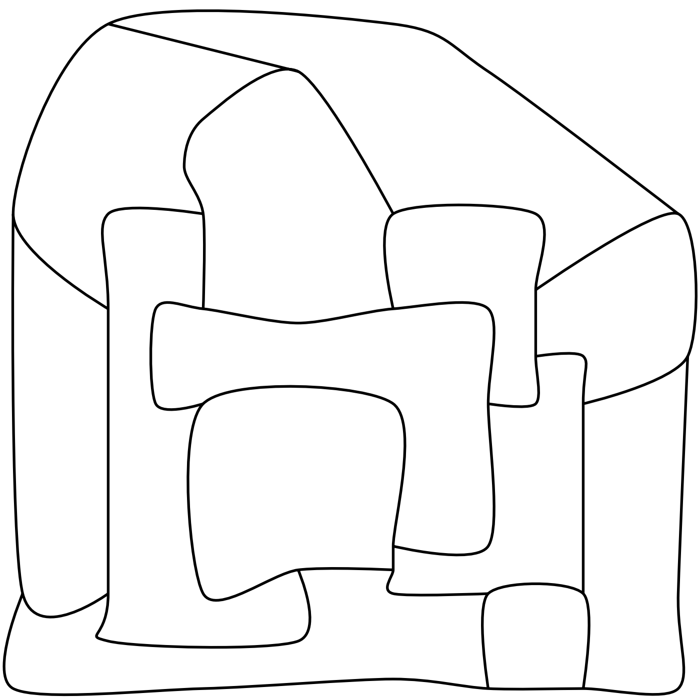
完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 确定图的色数。
2. 确定一个图的色指数
3. 决定在解决特定问题时，使用色数还是色指数更为合适。

2.5.1 节预览

Investigate!

虚构国度欧拉利亚的制图师绘制了该国各个公爵领地的边界。为了让地图更加美观，他们希望为每个区域着色。相邻的区域必须使用不同的颜色，但相距较远的两个区域使用相同的颜色则完全没有问题。制图师在仍然完成这一任务的前提下，最少可以使用多少种颜色？



也许图论中最著名的问题是如何给地图着色。

> 给定任意一张由国家、州、县等组成的地图，需要多少种颜色才能为地图上的每个区域着色，使得相邻区域的颜色彼此不同?

实际的制图人员通常使用大约七种颜色。一方面，他们要求水域使用特定的颜色，而且颜色越多，就越容易找到一种可行的着色方案。我们想知道是否存在一种更小的调色板，能够适用于任何地图。

这与图论有什么关系呢? 如果我们在每个区域的中心放置一个顶点（比如在每个州的首府），然后当两个州共享边界时就连接这两个顶点，我们就得到了一张图。给地图上的区域着色对应于给图中的顶点着色。由于相邻的区域不能涂成相同的颜色，当这些顶点彼此相邻时，我们的图中也不能出现颜色相同的顶点。

一般来说，给定任意一个图 ，对其顶点进行的着色称为（不出所料）顶点着色。如果这种顶点着色具有相邻顶点被赋予不同颜色的性质，那么该着色称为适当着色。每个图都存在一种适当的顶点着色。例如，你可以给每个顶点都使用一种不同的颜色。但通常可以做得更好。获得适当顶点着色所需的最少颜色数称为该图的色数，记作 ( )。

本节的目标是了解如何利用图着色来解决一些问题，并理解图着色的一些基本性质。

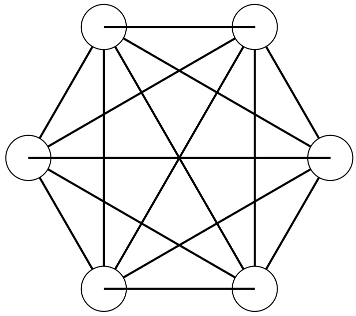
活动预览

对于下方的每个图:

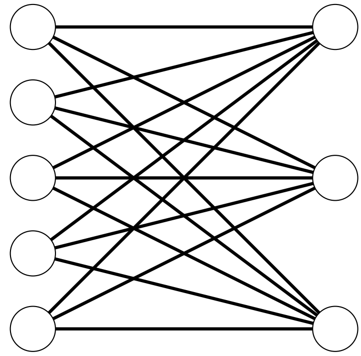
- 使用若干种颜色找到一个合法的顶点着色。也就是说，可以使用任意数量的颜色为顶点着色，但必须保证任意一对相邻顶点的颜色不同。

- 找到正确着色图的顶点所需的*fewest*种颜色。这被称为图的色数。思考一下你是如何知道你的答案是正确的。

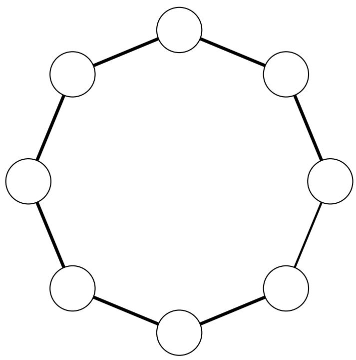
- 你能进行概括吗? 你能就特定类型的图的色数得出任何结论吗?



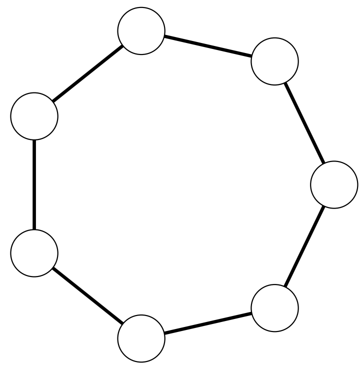
1.



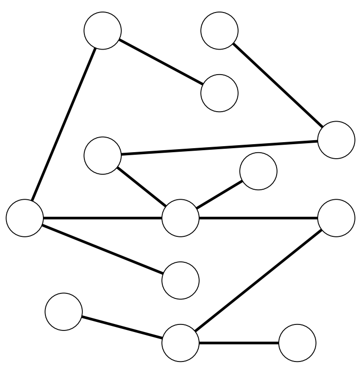
2.



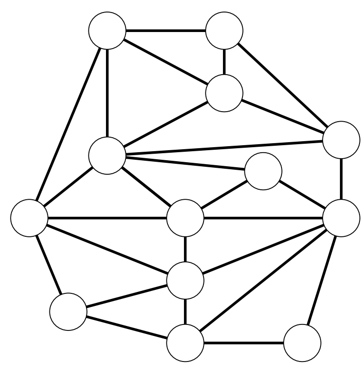
3.



4.



5.



6.

2.5.2 着色顶点

Investigate!

数学系计划下学期开设10门课程。某些课程不能同时进行（可能是因为它们由同一位教授授课，或者是老年学生的必修课程）。

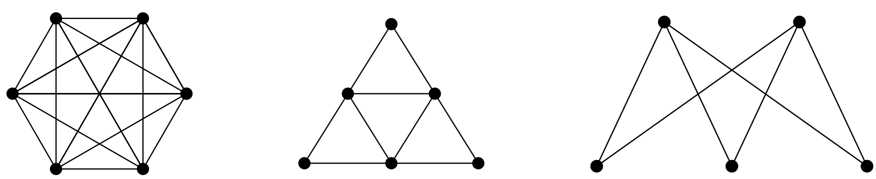
Class:	Conflicts with:
A	D I
B	D I J
C	E F I
D	A B F
E	C H I
F	C D I
G	J
H	E I J
I	A B C E F H
J	B G H

需要多少个不同的时间段来教授这些课程（并且哪些课程应该同时教授）？更重要的是，我们如何使用图着色来回答这个问题?

了解色数的最佳方法是实际尝试给一些图着色。

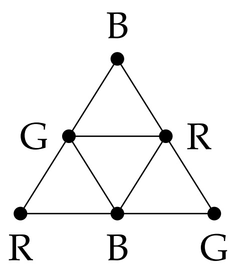
例 2.5.1

求下列图的色数。



解。左图是 $_6$。对该图进行恰当着色的唯一方法是给每个顶点赋予不同的颜色（因为每个顶点都与其他所有顶点相邻）。因此，其色数为 6。

中间的图只需 3 种颜色（红色、蓝色和绿色）就可以进行正确着色。例如：



由于存在三个两两相邻的顶点（即一个三角形），因此无法仅用两种颜色对其着色。因此其色数为 3。右侧的图就是 $_{2,3}$。与所有二分图一样，该图的色数为 2：将上排的顶点涂成红色，将下排的顶点涂成蓝色。

看起来，染色数可以变得无限大，没有任何上限。 $_n$ 的染色数是 ，这并不令人意外。那么，最初的地图着色问题怎么可能会有答案呢？如果图的染色数可以任意大，那么任何地图所需的颜色数量似乎都没有上界。但事实并非如此。

关键的观察是，尽管对于任意数 都确实存在一个色数为 的图，但只有某些图能够作为地图的表示而出现。如果你把一张地图转换成一个图，顶点之间的边对应于国家之间的边界。因此，你应该能够以这样的方式连接顶点，使得这些边不会相交。换言之，表示地图的图全都是 *planar*！

因此问题是：任何平面图的最大色数是多少？答案是图论中最著名的定理：

定理 2.5.2 四色定理。

If is a planar graph, then the chromatic number of is less than or equal to 4. Thus any map can be properly colored with 4 or fewer colors.

我们不会证明这个定理。真的。尽管该定理陈述和理解都很容易，但证明并非如此。事实上，目前并不存在该定理的“简单”已知证明。当前最好的证明仍然需要强大的计算机来检查一个包含 633 个 *reducible configurations* 的 *unavoidable set*。其思想是：每个图都必须包含这些可约配置之一（这一事实也需要由计算机来验证），而且可约配置实际上可以用 4 种或更少的颜色着色。

制图学当然不是图着色的唯一应用。存在许多情形，你可能希望对所讨论的对象进行划分，使相关的对象不处于同一集合中。例如，你可能希望安全地储存化学品。为避免爆炸，某些成对的化学品不应存放在同一房间。通过对一个图进行着色（其中顶点表示化学品，并

表示潜在负面相互作用的边），你可以确定存放这些化学品所需的最少房间数量。

这里是一个进一步的示例：翻译文本：

例 2.5.3

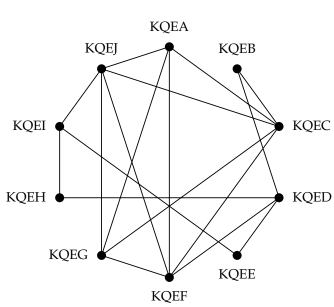
广播电台以特定频率广播信号。然而，可供选择的频率数量有限，因此全国范围内，许多电台使用相同的频率。这是可行的，因为这些电台相距足够远，它们的信号不会互相干扰；没有一台收音机会同时接收到它们的信号。

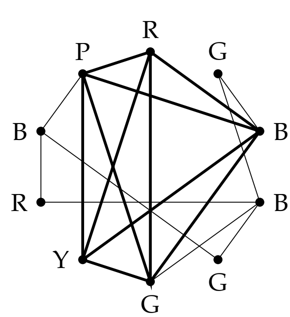
假设要在一个目前（就广播电台而言）尚未设台的地区建立 10 个新的广播电台。彼此距离足够近而会产生干扰的广播电台记录在下表中。这些电台最少可以使用多少个频率?

	KQEA	KQEB	KQEC	KQED	KQEE	KQEF	KQEG	KQEH	KQEI	KQEJ
KQEA			x			x	x			x
KQEB			x	x						
KQEC	x	x				x	x			x
KQED		x			x	x		x		
KQEE				x					x	
KQEF	x		x	x			x			x
KQEG	x		x			x				x
KQEH				x					x	
KQEI					x			x		x
KQEJ	x		x			x	x		x	

解。将问题表示为一个图，顶点表示各个电台，当两个电台足够接近以致产生干扰时，在它们之间连一条边。我们要寻找该图的色数。颜色相同的顶点表示可以使用相同频率的电台。

该图的色数为5。右侧展示了一个合法的5-着色。注意该图包含一个完全图 $_5$ 的拷贝，因此不能使用少于5种颜色。





在上面的例子中，着色数是 5，但这并不是四色定理 2.5.2 的一个反例，因为表示无线电台的图

不是平面的。要是能有一种快速方法来求（可能是非平面）图的色数就好了。事实证明，没有人知道是否存在一种高效的算法来计算色数。

尽管我们可能不容易找到一个图的精确色数，但我们往往可以给出色数的一个合理范围。换句话说，我们可以给出色数的上界和下界。

这并不太困难：对于每个图 ， 的色数至少为1，至多等于 的顶点数。

什么？你想要染色数的 *better* 界吗？那你可走运了。

图中的一个团（clique）是一个顶点集合，其中任意两个顶点都彼此相邻。换言之，大小为 的团就是完全图 ${}_n$的一个拷贝。我们将图的团数定义为使得该图包含一个大小为 的团的最大 。任何大小为 的团都不可能用少于 种颜色进行着色，因此我们得到一个很好的下界：

定理 2.5.4

The chromatic number of a graph is at least the clique number of .

有时，图 的色数与团数是 *equal*。这些图有一个特殊的名字；它们被称为完美图。如果你知道一个图是完美的，那么求色数只不过是寻找最大的团而已。[10]然而，并非所有图都是完美的。

作为一个上界，我们可以通过考察顶点的度来改进“顶点数”这一界。令 $\Delta(\ )$ 表示图 中任一顶点的最大度。对染色数的一个合理上界猜测是 $(\ ) \leq \Delta(\ ) + 1$。为什么这是合理的？从任意一个顶点开始，它与其所有邻居总是可以用 $\Delta(\ ) + 1$ 种颜色着色，因为在这个集合中最多只有 $\Delta(\ ) + 1$ 个顶点。现在向外展开！在任何时刻，如果你考虑一个已经着色的顶点，它的一些邻居可能已经着色，另一些可能没有。但无论如何，该顶点及其邻居都可以被赋予彼此不同的颜色，因为邻居最多只有 $\Delta(\ )$ 个，再加上正在考虑的那个顶点。

事实上，有一些图的例子，对于这些图 $(\ ) = \Delta(\ ) + 1$。对于任何 ，完全图 ${}_n$ 的色数是 ，但$\Delta(\ {}_n) = \ - 1$（因为每个顶点都与每个 *other* 顶点相邻）。此外，任何 *odd* 环的色数为 3，但环中每个顶点的度数都是 2。事实证明，这些是唯一两种会出现等式的例子，这一结果被称为布鲁克定理。

[10]There are special classes of graphs that can be proved to be perfect. One such class is the set of **chordal** graphs, which have the property that every cycle in the graph contains a **chord**—an edge between two vertices in the cycle which are not adjacent in the cycle.

定理 2.5.5 布鲁克斯定理。

Any graph satisfies $(\ ) \leq \Delta(\ )$*, unless is a complete graph or an odd cycle, in which case* $(\ ) = \Delta(\ ) + 1$.

该定理的证明 *just* 足够复杂，因此我们不在此给出（尽管在练习中要求你证明一个特殊情形）。鼓励富有冒险精神的读者查阅图论方面的书籍，以寻找如何证明该定理的思路。

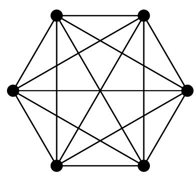
2.5.3 边着色

图的色数告诉我们关于给顶点着色的信息，但我们也可以探讨给边着色的问题。就像顶点着色一样，我们可以要求相邻的边必须使用不同的颜色。在这里，如果两条边都与同一个顶点相接，我们就认为它们是相邻的。对图 的边进行正确着色所需的最少颜色数称为 的色指数，记作 $'(\ )$。

示例 2.5.6

六个朋友决定用一个下午来下国际象棋。每个人都会与其他所有人各下一盘。他们有足够多的棋具，但没有人愿意同时进行多于一盘的对局。每盘棋持续一小时（多亏了他们方便的棋钟）。这场锦标赛将持续多少小时?

解答。用一个顶点表示每位选手，如果两位选手彼此对战，就在他们之间连一条边。在这种情况下，我们得到图 $_6$:



我们必须对边进行着色；每种颜色代表一个不同的小时。由于与同一顶点相连的不同边将被赋予不同的颜色，因此没有玩家会在同一时间进行两个不同的游戏（边）。因此，我们需要知道 $_6$ 的色指数。

注意到可以确定 $'(\ _6) \geq 5$，因为存在一个度为 5 的顶点。事实证明，5 种颜色就足够了（去找出这样一种着色）。因此朋友们将玩 5 个小时。

有趣的是，如果上述例子中的一位朋友离开，剩下的5名棋手仍然需要5个小时：$_5$的边色数也是5。

一般来说，我们能对色指数说些什么？当然 $'(\ ) \geq \Delta(\ )$。但它最多能高多少呢？只会高一点点。

定理 2.5.7 维津定理。

For any graph , the chromatic index $'(\ )$ *is either* $\Delta(\ )$ *or* $\Delta(\ ) + 1$.

起初，这一定理似乎让人觉得色指数可能并不太有趣。然而，判定一个图属于哪一种情形并不总是容易。满足 $'(\ ) = \Delta(\ )$ 的图称为 *class 1*，而其余的称为 *class 2*。二分图总是满足 $'(\ ) = \Delta(\ )$，因此属于 class 1（这一结果由 König 于 1916 年证明，比 Vizing 在 1964 年证明其定理早了几十年）。1965 年，Vizing 证明了所有满足 $\Delta(\ ) \geq 8$ 的平面图都是 class 1，但这一结论并不适用于所有满足 $2 \leq \Delta(\ ) \leq 5$ 的平面图。Vizing 猜想，所有满足 $\Delta(\ ) = 6$ 或 $\Delta(\ ) = 7$ 的平面图都是 class 1；其中 $\Delta(\ ) = 7$ 的情形已由 Sanders 和 Zhao 于 2001 年证明；而 $\Delta(\ ) = 6$ 的情形仍然悬而未决。

拉姆齐理论。还有一种我们可以考虑给边着色的有趣方式，与我们迄今为止讨论的内容相当不同。假如我们把图中的每一条边都涂成红色或蓝色，会怎样？我们能否做到而不比如说产生一个 *monochromatic* 三角形（即一个全红或全蓝的三角形）？当然，对某些图来说答案是肯定的。试着对 $_4$ 这样做。那 $_5$ 呢？ $_6$ 呢？我们能走多远？

上述问题并不太难，是一个有趣的练习。我们可以通过多种方式扩展这个问题。如果我们有三种颜色呢？如果我们试图避免其他图形呢？令人惊讶的是，关于这些问题我们知道的非常少。例如，我们知道，在使用三种颜色时，需要到 $_{17}$ 才能强制形成单色三角形，但没有人知道使用更多颜色时需要多大。同样地，我们知道，使用两种颜色时， $_{18}$ 是强制形成 $_4$ 的单色副本的最小图形，但为了强制形成单色 $_5$，我们所知道的最好的结果是一个范围，介于 $_{43}$ 和 $_{49}$ 之间。如果你对这些问题感兴趣，这一领域的图论被称为 Ramsey 理论。可以去了解一下。

2.5.4 阅读问题

1. 对错：如果一个图包含一个度为 5 的顶点，那么该图的色数至少为 5。请解释。
2. 用你自己的话解释色数和色指数之间的区别。 3. 阅读完本节后，你有什么问题？写下至少一个你对本节内容感到好奇的问题。

2.5.5 练习题

1. 以下每个问题都可以通过求一个图的色数或图的边色数来解决。

对于每个问题，说明你应该寻找图的顶点的一个恰当染色，还是图的边的一个恰当染色来解决该问题。注意：你很可能不需要

并没有足够的信息来真正解决这个问题，但这没关系。只需从原则上说明这是边着色还是顶点着色的应用。

(a) 斯内普教授希望用尽可能少的柜子来存放魔药原料，但有些原料不能存放在同一个柜子里，因为它们可能会发生危险的相互作用。需要多少个柜子? (b) 在一次快速约会活动中，每个人都必须花 5 分钟与另一位参与者交谈，然后再换到下一位。整个活动至少需要多长时间? (c) 五名学生将在招聘会上与四家公司进行实习面试。面试需要多少个时间段? (d) 数学系希望在春假期间安排统一的、为期一天的期中考试，但显然，同时修两门课的学生必须在不同的日子参加这两门课的考试（而这也是该计划唯一的问题）。考试需要安排多少天?

2. 每个图的色数是多少?

13__________

4 __________

13 __________

6,8 __________

7 __________

每个图的色度 ***index*** 是什么?

14__________

12 __________

5 __________

4,9 __________

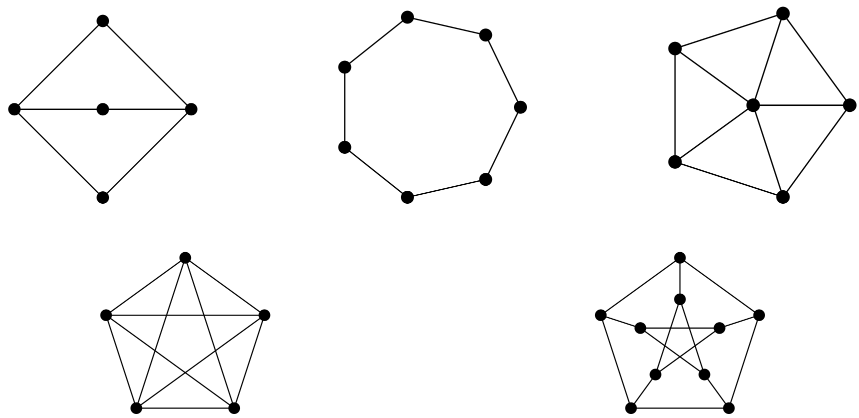
8 __________

4. 以下陈述涉及图的色数 ( ) 和色指数 ′( )。我们用 Δ( ) 表示 的最大度。以下陈述是真还是假?

(a) 如果一个图包含一个度为6的顶点，那么该图的边色数至少为6。 (b) ′( ) ≥ Δ( ). (c) 任何平面图的边色数至多为4。 (d) 对于任何环，边色数等于顶点色数。

2.5.6 额外练习

1. 要正确地给 $_{4,5}$ 的顶点着色，所需的最少颜色数是多少？也就是说，求该图的色数。 2. 画一个色数为 6 的图（即需要 6 种颜色才能正确给顶点着色）。你的图可以是平面图吗？请解释。 3. 求以下各个图的色数。



4. 一组由 10 位朋友组成的人决定前往森林中的一间小木屋（在那里绝对不可能出任何问题）。不幸的是，其中有几位朋友过去曾彼此交往过，事情现在仍然有点尴尬。为了到达小木屋，他们需要分乘若干辆车，而且任何曾经约会过的两个人都不能坐在同一辆车里。

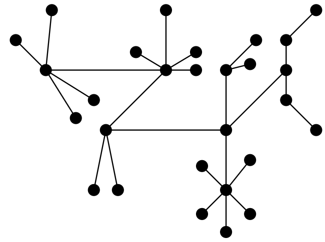
(a) 如果所有关系都是严格的异性恋，你至少需要多少辆车？用一个图来表示这种情况的一个例子。你会得到一种什么类型的图？ (b) 由于这些朋友中有一些彼此约会过，因此同性朋友之间也存在冲突，见下表。现在他们去小木屋时，最少可以乘坐多少辆不存在冲突的车？

Friend	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Conflicts	CFJ	J	AEF	H	CFG	ACEGI	EFI	D	AFG	B

5. 给立方体的顶点着色，使得任意两个相邻的顶点颜色不同，所需的最少颜色数是多少？

6. 证明任意树的色数为 2。回顾：树是一个没有环的连通图。

(a) 考虑下面的树。如果你把最左边的顶点染成红色，它的相邻顶点应该染成什么颜色？这个相邻顶点的相邻顶点又应该染成什么颜色？描述一种使用两种颜色给下面这棵树着色的过程。



(b) 如果你使用相同的过程为一个环着色，是否总能用两种颜色给它着色？(c) 证明你在(a)部分中的过程对任意一棵树都始终有效。(d) 现在，给出一个不同的证明，这一次使用归纳法，证明每一棵树的色数为 2。

7. 下面的两个问题可以使用图着色来解决。对于每个问题，用一个图来表示该情形，说明你应该给顶点着色还是给边着色，并解释原因，然后利用着色来解决问题。

(a) 你的魁地奇联赛有 5 支队伍。下周你将举行一场锦标赛，其中每支队伍都要与其他每支队伍各比赛一次。每支队伍每天最多只能进行一场比赛，但一天中有充足的时间安排多场比赛。该锦标赛最少需要用多少天才能完成?

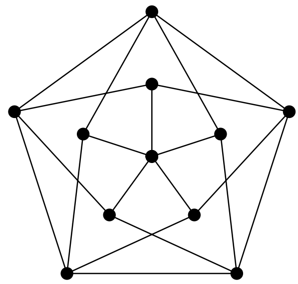
(b) 数学俱乐部的十名成员正在开车前往邻近州的数学会议。然而，其中一些学生曾经约会过，事情依然有些尴尬。每个学生列出他们拒绝与哪些其他学生共乘一辆车；这些冲突被记录在下表中。俱乐部最少需要多少辆车才能完成这次旅行？无需担心座位不够，只需要避免冲突。

Student:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Conflicts:	BEJ	ADG	HJ	BF	AI	DJ	B	CI	EHJ	ACFI

8. 证明6色定理：每个平面图的色数至多为6。不要假设4色定理（其证明要困难得多），但你可以假设每个平面图包含一个度数至多为5的顶点。

9. 不是所有图都是完美的。举一个色号为 4 的图的例子，该图不包含 $_4$ 的副本。也就是说，图中不应有四个顶点两两相邻。

10. 求下图的色数，并证明你的结论是正确的。



11. 证明：任何连通图 ，只要它至少包含一个度小于Δ( ) (中所有顶点的最大度) 的顶点，其染色数至多为 Δ( )。

12. 你有一套磁性字母（英文字母表中的26个字母各一个），需要把它们放进盒子里。出于显而易见的原因，你不希望把两个连续的字母放在同一个盒子里。假设盒子的容量不受限制，你最少需要多少个盒子？

13. 假设你将一个图的边涂成红色或蓝色（不要求相邻的边颜色不同）。要保证存在某个顶点与三条同色的边相邻，图必须满足什么条件？证明你的结论。 14. 证明：如果你将 $_6$ 的每一条边都涂成红色或蓝色，则必然存在一个单色三角形（即全红或全蓝的三角形）。

2.6 关系与图

Objectives

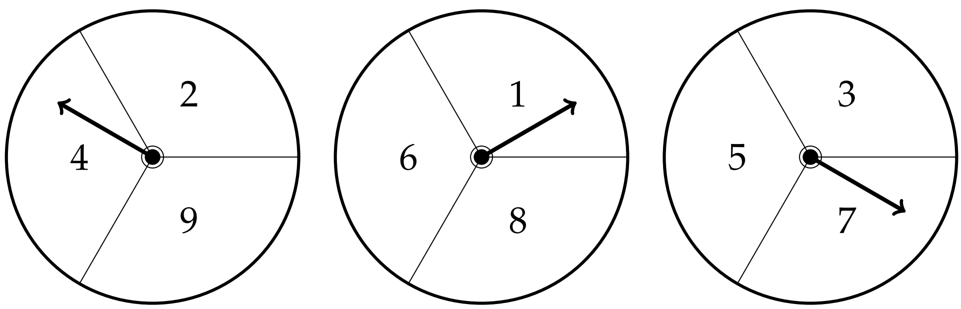
完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 解释图与关系之间的关系。 2. 判断一个关系是否是自反的、对称的或传递的。 3. 使用等价关系对一个集合进行划分，并使用一个划分来定义一个等价关系。

2.6.1 本节预览

Investigate!

考虑下面的三个转盘。



A　　　　B　　　　C

如果你和一位朋友各自选择一个不同的转盘并旋转它们，我们可以考虑九种可能的结果。例如，在转盘　和　之间，结果是

$$(2,1),(2,6),(2,8),(4,1),(4,6),(4,8),(9,1),(9,6),(9,8).$$

这表明转盘　在九次中会赢五次。比较其他转盘的组合。哪个转盘最好?

在本节中，我们将探讨图的一种推广，称为关系。我们将看到关系如何通过图表示，以及图如何用于表示关系。我们还将考虑关系可能具有的一些性质，以及如何利用这些性质将关系分类为不同类型。

活动预览

在一个给定的月份中，有些日期彼此更相似。比如，这个月的3号与24号更相似，而不像15号。这可能意味着什么？我们将探讨这种说法成立的两种方式。

1. 我们将说1到31之间的两个数字是相关的，记作 $\sim$ ，如果它们的差是7的倍数。例如，$3 \sim 24$，因为$24 - 3 = 3 \cdot 7$，但$3 \nsim 15$，因为$15 - 3 = 12$，而12不是7的倍数。

(a) 以下哪些是正确的？也就是说，以下哪些数字对是按照我们上面定义的方式相关的？

- ☐ $4 \sim 14$
- ☐ $7 \sim 14$
- ☐ $10 \sim 17$
- ☐ $17 \sim 24$
- ☐ $10 \sim 24$
- ☐ $20 \sim 10$
- ☐ $31 \sim 3$
- ☐ $25 \sim 25$

（b）在这种情况下，以下关于 $\sim$ 关系的哪些陈述是正确的？

☐ 对每一个数 ， $\sim$ ☐ 对任意一个数 ， $\nsim$ ☐ 对任意数 和 ，如果 $\sim$ ，那么 $\sim$ ☐ 对任意数 和 ，如果 $\sim$ 且 $\sim$ ，那么 $=$ ☐ 对任意数 和 ，如果 $\sim$ 且 $\sim$ ，那么 $\sim$

(c) 我们用 [ ] 表示与 有关的所有数的集合。例如，$[7] = \{7, 14, 21, 28\}$。求下列各项：

- $[1] =$;________________________
- $[2] =$;________________________
- $[3] =$;________________________
- $[4] =$;________________________
- $[5] =$;________________________
- $[6] =$ 。________________________

上面 [ ] 中是否有任何数字出现在多个集合中？

2. 当你用 7 去除 7 的倍数时，会得到一个整数。如果你用 7 去除另一个数，结果可以写成小数，或者写成商和余数。例如，$19 \div 7$ 的结果是 2 余 5，因为我们可以写成 $19 = 2 \cdot 7 + 5$。余数也称为模数。在 Python（以及许多其他语言）中，取模运算符写作 %。例如，19 % 7 的结果是 5。请对几个数字尝试一下。

(a) 找出 1 到 31 之间所有模 7 余 5 的数 。也就是说，找出所有满足a % 7 = 5 的 。

(b) 由于模是一个函数，每个数字在除以 7 时都有一个确定的模。这意味着模将 1 到 31 之间的数字划分为不同的集合：每个数字都属于具有特定模的集合之一。我们已经找到了模为 5 的集合。找到其他的集合。

- a % 7 = 0: ; ________________
- a % 7 = 1: ; ________________
- a % 7 = 2: ; ________________
- a % 7 = 3: ; ________________
- a % 7 = 4: ; ________________
- a % 7 = 6: . ________________

(c) 我们可以使用模数来定义1到31之间数字的关系。我们将说， ~ ，如果a % 7 = b % 7。换句话说，两个数字是相关的，如果它们属于我们上面找到的划分的同一集合。

以下哪项是正确的？也就是说，以下哪些数字对是通过这个模运算关系相关的？

- ☐ 4 ~ 14
- ☐ 7 ~ 14
- ☐ 10 ~ 17
- ☐ 17 ~ 24
- ☐ 10 ~ 24
- ☐ 20 ~ 10
- ☐ 31 ~ 3
- ☐ 25 ~ 25

2.6.2 一般关系

图是表示不同对象之间关系的一种方式。我们已经看到如何使用图来表示哪些人是朋友，或者哪些课程有时间冲突，或者哪些电台的频率过于接近以至于不能使用相同的频率。

所有事物之间可能的关系方式都可以通过图表示。然而，在本节中，我们将考虑关系的更一般概念，并探讨它们如何与图相关联。

考虑学生与课程之间关系的一个例子：当某个学生（在某个特定学期）选修某门课程时，这种关系就成立。这是两个不同集合（学生和课程）之间的关系。如果我们使用图来说明这种关系，那么该图将是 *bipartite*，因为两个学生之间永远不存在这种关系，两个课程之间也永远不存在这种关系。

图实际上是一个顶点集和一个边集： = (，)；集合 的每个元素都是 的一个两元素子集。若我们想强调图的二分性，可以将 拆成两个集合并写作 = ((，),)。在这种记号下，为使图为二分图，我们希望每条边都是一对 (，)，其中 属于 ， 属于 。换句话说，每条边都是 与 的笛卡尔积的一个元素，写作 ，

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

(另一种说法是， × 是“由 和 中的元素组成的所有有序对的集合。”)

注 2.6.1 这里有一个细微之处需要指出：我们所描述的二部图实际上具有从 到 的 *directed edges*，因为我们考虑的是 *ordered* 对。我们对图的定义把边视为顶点的两个元素的 *subsets*，而子集是无序的。只要 和 是不相交的集合 ，这里就不会产生混淆，但我们也会看到一些关系，其中 和 共享某些元素，而我们仍然关心顺序。稍后再详细讨论这一点。

这个例子恰好说明了什么是一般的二元关系。下面给出严谨的定义。

定义 2.6.2

二元关系是有序对的集合。若这些有序对是集合 × 的一个子集，我们称该二元关系是关于集合 和 的关系。若这些有序对是集合 × 的一个子集，我们称二元关系是关于集合 的关系。

请注意， × 只是所有有序对的集合，其中两个坐标都来自 。

例 2.6.3

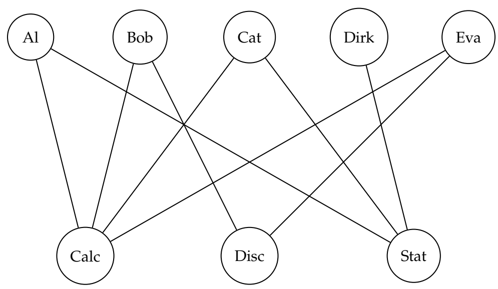
考虑一个学生集合 和一个课程集合 。设 = {Al, Bob, Cat, Dirk, Eva}，且 = {Calculus, Discrete, Statistics}。除 Dirk 之外的所有人都在 Calculus，Bob 和 Eva 在 Discrete，而 Al、Cat 和 Dirk 在 Statistics。我们可以在 和 之间定义一个表示“正在修读”的关系 ，它对某个学生成立

当且仅当该学生正在修读该课程。将该关系写成 × 的一个子集，并画出它的二部图。

解。为了精确地写出该关系，我们只需给出有序对的集合：

= {(Al, 微积分), (Al, 概率统计), (Bob, 微积分), (Bob, 离散数学), (Cat, 微积分), (Cat, 概率统计), (Dirk, 概率统计), (Eva, 微积分), (Eva, 离散数学)}

我们可以将这种关系绘制为一个二分图：



例 2.6.4

考虑集合 = {1, 2, 3, 4, 5, 6} 上的“是倍数”关系 。将其写为有序对的集合。这个关系会创建图吗？

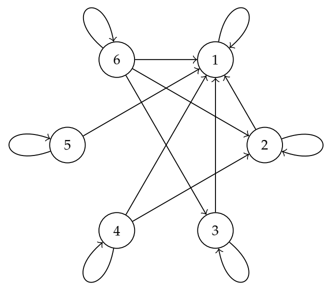
解答。首先，让我们思考哪些元素应该有关联，哪些不应该。我们知道6是2的倍数，因此（6，2）满足关系，但6不是4的倍数，因此（6，4）不满足该关系。更准确地说，我们说（6，2）∈ ，但（6，4）∉ 。

让我们列出 的所有元素：

$$M = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4),\\ (5,1),(5,5),(6,1),(6,2)(6,3),(6,6)\}.$$

这个关系不是一个图，原因有二：首先，元素与自身相关，其次，关系中元素的顺序不是对称的（例如，6与2相关，但2与6没有相关性）。

然而，我们仍然可以绘制类似图形的东西来说明这个关系：由于关系的方向很重要，我们将有 *directed* 条边。仅此一点就会创建一个有向图。由于顶点可以有指向自身的边，我们将这个结构称为多重图，因此可以将关系视为一个有向多重图。



在集合 和 上的二元关系 总是可以“反转”以给出一个在集合 和 上的关系。也就是说， 表示集合 中的事物如何与集合 中的事物相关；这些位于 中的事物与位于 中的事物相关，只是以一种 *inverse* (反向)的方式。我们将称这个新的关系为 的逆关系。

定义 2.6.5

给定一个 bi对于任意关系 ，定义 $^{-1}$ 为 的逆关系，记作 t 他设置

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

关系 来自例 2.6.3，表示一个特定学生在一个特定的班级中。逆关系 $^{-1}$ 表示一个特定的班级中有一个特定的学生。例如，(微积分, Al) 是 $^{-1}$ 的一个元素。图形上，虽然我们可以将班级集合放在上方，学生放在下方，但图像上不会有任何区别。

来自例子2.6.4的关系 告诉我们，例如6是2的倍数，因为(6, 2) ∈ 。对于逆关系，我们有(2, 6) ∈ $^{-1}$，这意味着2是6的因子。对于这个例子，我们将关系表示为一个有向多重图。逆关系的图看起来完全相同，但所有箭头都会指向相反的方向。

创建新关系的另一种方法是将两个关系组合起来。假设除了例 2.6.3 中的“正在修读”关系之外，我们还定义了一个“由……教授”关系，用来将每门课程与其任课教师对应起来。比如，X 教授教授微积分。在这种情况下，由于 Al 正在修读微积分，而微积分是由 X 教授教授的，我们可以得出结论：Al 正在和 X 教授一起上课。

定义 2.6.6

设 是从集合 到 的一个关系， 是从 到 的一个关系。 与 的复合是

∘ = {(,) ∈ × : (,) ∈ 且 (,) ∈ ，对某个 ∈ }

注意我们写这两个关系的顺序：是 ∘ ，而不是 ∘ 。该

我们之所以这样做（这可能看起来有些反直觉），是因为它与 *functions* 的复合的常用记号一致。事实上，函数不过是一种特定类型的关系！

例 2.6.7

写出关系 ∘ ，它是由例2.6.3 中的关系与 = {(Calculus, Prof X), (Discrete, Prof L), (Statistics, Prof X), (Statistics, Prof S)} 复合而成。注意，这里我们是在说统计学课程由 X 教授和 S 教授共同授课。

解法。我们正在寻找的关系是学生与教授之间的关系。我们可以从 的每个元素开始，通过课程跟随教授(s) via 来*extend*它。例如，从Cat开始，注意到 (Cat, Calculus) ∈ 。现在通过 看看Calculus与什么相关：(Calculus, Prof X) ∈ 。因此，我们可以将这些关系合并，得出(Cat, Prof X) ∈ ∘ 。

一种替代方法是仅仅考虑哪些学生与教授的配对通过一门共同的课程相联系。配对 (Al, Prof L) 是否应当成为该复合关系的一个元素？不，因为不存在一门既由 Al 选修又由 L 教授授课的课程。另一方面，由于存在一门共同的课程，我们可以得出 (Al, Prof X) ∈ ∘ 。事实上，这门共同的课程可以是微积分或统计学（中间共有的步骤有多少并不重要，只要至少有一个即可）。

以下是完整关系：

∘ = {(Al, 教授 X), (Al, 教授 S), (Bob, 教授 X), (Bob, 教授 L), (Cat, 教授 X), (Cat, 教授 S), (Dirk, 教授 X), (Dirk, 教授 S), (Eva, 教授 X), (Eva, 教授 L)}

当你将一个关系与其逆关系组合时，常常会发生一些有趣的事情。你可能在微积分或代数中见过类似的 *functions*： ( ) = ^{x} 具有逆函数 $^{-1}$( ) = ln( )，我们知道 ($^{-1}$( )) = $^{\ln(x)}$ = 。但函数是每个“输入”都有恰好一个“输出”的关系，所以将一个函数与其逆函数组合只是得到恒等函数，这可能并不令人惊讶。当输入可以有多个输出，而输出可以有多个输入时，我们就会得到更多的东西。

例 2.6.8

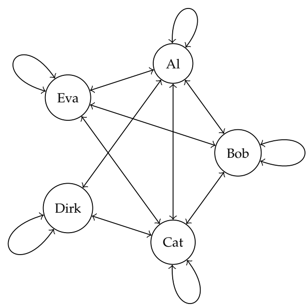
描述关系 $^{-1}$ ∘ （使用示例2.6.3 中我们熟悉的关系 ）。这告诉我们关于学生和课程什么信息？

解答。通过遵循关系，我们可以从说Al在微积分课程开始，且Al选修了微积分，因此Al与Al是相关的。但同时，Bob也选修了微积分，因此现在Al也与Bob相关。那么Bob与Al也相关吗？是的，

由于Bob正在学习微积分，而微积分是Al学习的课程。

该复合关系告诉我们哪些学生对至少有一门共同的课程。这几乎涵盖了所有学生对，唯独 Dirk 与 Bob 或 Eva 没有关联，因为 Bob 和 Eva 不修统计学，而统计学是 Dirk 唯一修的课程。

与其写出该关系（它几乎会涵盖整个 × ），这里给出的是图的表示。



虽然这里我们画的是一个有向多重图，但双向的箭头意味着我们实际上完全可以只画一个多重图。

2.6.3 关系的性质

从这一点开始，我们将只考虑定义在单一集合上的关系（即从一个集合到其自身的关系）。为了帮助理解这些关系，让我们考虑关系可能具有或不具有的一些基本性质。

D定义 2.6.9 自反、对称与传递 ive.

设 为集合 上的一个关系。我们说，

- 若对所有 ∈ ，都有(,) ∈ ，则 是自反的。
- 若对所有 、 ∈ ，若(,) ∈ ，则(,) ∈ ，则 是对称的。
- 是传递的，如果对于所有的 、 、∈ ，若(,) ∈ 且 (,) ∈ ，则 (,) ∈ 。

让我们仔细考察这些属性中的每一项。

在接下来的讨论中，考虑一些集合上的关系的标准例子将会很有帮助。我们在这里考虑的大多数关系都会使用 *infix* 记号来书写，这只是表示我们把关系符号放在它所关联的两个对象之间。比如，*less than* 关系几乎总是写成 $2 < 6$，而不是写成 $(2, 6) \in <$。

例 2.6.10 自反关系与非自反关系。

当每个元素都与其自身相关时，一个关系是自反的。以下是自反关系：

- 任意数集上的“ 小于等于 ”关系。是否有 $3 \leq 3$ 成立？更重要的是，每个数是否都不大于自身？由于答案是肯定的，这个关系是自反的。

- “within 3”关系，当两个数 和 满足 − | ≤ 3 时成立。为证明这是自反的，我们只需注意到 | − | = 0 ≤ 3。

- 来自例 2.6.4 的“是……的倍数”关系。注意，该关系的有向多重图在每个顶点处都有自环。

然而，这些关系并非自反的：

- “和为零”关系，在数字 和 上成立，当+ = 0时。注意，虽然0 + 0 = 0，因此(0, 0)是该关系的一个元素，但其他任何数字都与自身不相关。

- 任何由图描述的关系。请记住，图不能有回到同一顶点的边（自环），因此图上的边关系不是自反的。（多重图可以是自反的，也可以不是。）

如果没有元素与其自身相关（例如图的边关系），则我们称这种关系为非自反关系。当然，有些关系既不是自反的，也不是非自反的。

检验一个关系是否是自反的相对容易。另两个性质是以蕴涵的形式表述的，这使它们稍微复杂一些。

例 2.6.11 对称和非对称关系。

从本质上讲，对称关系是“两个方向都成立”的关系。更准确地说，如果与 有关系，那么 也与 有关系。

以下关系是对称的。

- “within 3” 关系：如果 | − | ≤ 3，则 | − | ≤ 3。

- “ ‘求和为零’ 关系：如果 + = 0，那么当然 + = 0。”

- 对于任何图，边关系都是对称的。当然，对于*directed*图，这通常并不成立。

另一方面，这些关系并不是对称的。

- ≤ 不是对称的。我们所需要做的只是证明某个关系不是

对称性是要找到某些 和 ，使得 ≤ ，但 ≰ 。嗯, 3 ≤ 4，但 4 ≰ 3。证毕。

- “是……的倍数”这一关系不是对称的。6 是 2 的倍数，但 2 不是 6 的倍数。

非对称的关系实际上可能是反对称的，这意味着当且仅当 = 时，同时包含 (,) 和 (,) 的那些 *only* 元素。注意，有些关系既不是对称的也不是反对称的。

用逆关系的术语来说，一个关系当且仅当它等于其逆关系时是对称的。

例子 2.6.12 及物关系与不及物关系。

如果 与 有关系，并且 与 有关系，这是否意味着 与 有关系？如果无论 、 和 是什么，这都成立，那么我们就说这种关系是传递的。

这是一些传递关系。

- ≤假设 ≤ 且 ≤ 。那么显然 ≤ 。
- “是……的倍数”关系。这是一个值得书写证明的例子：假设 是 的倍数，并且 是 的倍数。那么 = （其中 为某个整数），并且 = （其中为某个整数）。通过代入可得， = ，因此 是 的倍数。

然而，以下关系不具有传递性。

- “within 3” 关系不是传递的。我们只需要找到三个不满足该条件的数即可。比如 1、3 和 5 呢？在这里，1 与 3 的距离在 3 以内，而 3 与 5 的距离也在 3 以内，但 |1 − 5| = 4，因此该关系不成立于 (1, 5)。
- “和为零”关系不是传递的。请注意，我们从未声称 、 和 必须是不同的数字。设 = 5， = − 5，且 = 5。那么 + = 0 且 + = 0，因此该关系适用于 (,) 和 (,)。但是 + = 10，因此该关系不适用于 (,)。

图的边关系可能是传递的，也可能不是。如果它的边关系是传递的，图会是什么样子？

2.6.4 等价关系

现在我们将做一件在数学中非常典型的事情：我们将考察我们最常见的关系类型，分析它们具有什么性质，然后把同样具有这些性质的其他关系归类为一种特定的关系类别。

我们最熟悉的关系是相等关系。哪些性质的

等式关系具有哪些性质？当然，每个事物都等于它自身，所以等式是*reflexive*。如果 = ，那么 = ，所以等式是*symmetric*。如果 = 且 = ，那么 = ，所以等式是*transitive*。

reflexive、*symmetric* 和 *transitive* 还有哪些其他关系？正是那些行为方式类似于相等性的关系。我们称这样的关系为等价关系。

定义 2.6.13 等价关系。

一个具有自反性、对称性和传递性的关系称为等价关系。

注 2.6.14 另一类以经典关系为模型的关系的例子是偏序。这是一种像“小于等于”一样具有自反性、*antisymmetric*以及传递性的关系。也许你已经注意到，子集关系，记作 $\subseteq$，感觉很像 $\leq$。这是因为 $\subseteq$ 也是一个偏序。我们上面看到的“是……的倍数”关系也是如此。

关于偏序以及它们所偏序的集合（称为偏序集或 PoSet），我们可以说的有很多有趣的内容。改天再说。

在本节中，到目前为止我们所考虑的例子都不是等价关系，但等价关系在数学中无处不在。它们如此常见，以至于人们很容易忽视它们，觉得根本不值得一提。让我们来看一些例子。

例 2.6.15

证明关系 $\equiv_2$ 是一个等价关系，该关系在两个整数之间成立当且仅当它们的差是偶数。也就是说， $\equiv_2$ 当且仅当 $-$ $= 2$ ，对某个整数 。

解答。我们只需检验所需的三个性质。

1. $\equiv_2$ 是自反的：对任意整数 ，我们有 $-$ $= 0$，且当 $= 0$ 时有 $0 = 2$ ，因此 $\equiv_2$ 。2. $\equiv_2$ 是对称的：固定任意整数 和 ，并假设 $\equiv_2$ 。这意味着对某个整数 ，有 $-$ $= 2$ 。那么 $-$ 呢？很好，我们将有 $-$ $= 2(-\ )$，而 $-$ 是一个整数，因此我们有 $\equiv_2$ 。3. $\equiv_2$ 是传递的：固定任意整数 、 和 ，并假设 $\equiv_2$ 且 $\equiv_2$ 。这意味着对某些整数 和 ，有 $-$ $= 2$ ，且 $-$ $= 2$ 。那么 $-$ 呢？很好，

$$c - a = (c - b) + (b - a) = 2k + 2j = 2(k + j).$$

由于 $+$ 是整数，我们可知 $\equiv_2$ ，符合要求。

例 2.6.16

如果两个图具有相同的度序列，我们称它们为“度序列等价”。这是一个等价关系吗?

解答。是的，确实如此。显然，每个图的度数序列与其自身相同，因此关系是自反的。如果 ${}_1$与 ${}_2$的度数序列相同，则 ${}_2$与 ${}_1$的度数序列相同，因此关系是传递的。最后，如果 ${}_1$与 ${}_2$的度数序列相同，而 ${}_2$又与 ${}_3$的度数序列相同，那么它们都具有相同的度数序列，因此 ${}_1$与 ${}_3$ (的度数序列相同，即关系是传递的)。

这个例子几乎显而易见得不言自明。这是因为我们说过，如果两个事物的某个定义良好的性质是 *equal*，那么这两个事物是相关的，而相等性满足等价关系的性质。我们接下来的目标是更好地理解这一点，并看到这正是给我们一个等价关系的原因。

2.6.5 等价类与划分

给定*any*关系 ，我们可以考察与某个特定元素相关的元素的*set*。对于“is taking”关系，我们可以问Al正在选修哪些课程（即与Al相关的课程）。对于“is a multiple of”，我们可以问6是哪些数的倍数。研究这种关系的一种方法是研究与每个元素相关的事物的集合。

定义 2.6.17

让 是集合 上的一个关系，且 是 中的一个元素。 的关系类，记作 [ ]，是所有满足 (,) ∈ 的元素 的集合（即与 通过 相关的 的集合）。也就是说，

$$[a] = \{b \in A : (a, b) \in R\}.$$

当 是等价关系时，我们称关系类为等价类。

例 2.6.18

求集合 = {1, 2, 3, 4, 5, 6} 上“是……的倍数”关系的关系类。

解。由于每个元素都有一个关系类，因此将有六个关系类。它们是:

$$[1] = \{1\}$$
$$[2] = \{1, 2\}$$
$$[3] = \{1, 3\}$$

$$[4] = \{1, 2, 4\}$$
$$[5] = \{1, 5\}$$
$$[6] = \{1, 2, 3, 6\}.$$

例如，我们通过考虑所有满足该关系的数对 (4,) 找到了 [4]：4 是 1、2 和 4 的倍数，因此这些就是我们找到的 的可能取值。

回顾示例 2.6.4 的解答中所示的该关系的有向多重图。关系类是什么？它们无非就是每个顶点的邻居（这里的“邻居”指的是沿着箭头的正确方向前进）。

例 2.6.19

找到整数集上的 $\equiv_2$ 关系的等价类。

解法。哦不！我们的集合是无限的，所以我们将有无穷多个关系类？好吧，我们最好开始吧……

与 1 相关的数字有哪些？记住，我们要的是与 1 的差是 2 的倍数的整数。所以 3 当然是。还有 5、7、-1、-3，等等……所有的奇数？是的，因为任意两个奇数的差是偶数。我们还可以说，任意两个偶数的差也是偶数，因此 2 的等价类将包含所有偶数。到目前为止，我们已经有：

$$[1] = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$$
$$[2] = \{\ldots, -4, -2, 2, 4, 6, \ldots\}$$

实际上，我认为我们已经完成了。虽然 [3]、[4]、[5] 等都是完全有效的等价类，但与 3 相关的元素将与与 1 相关的元素完全相同，因为 $1 \equiv_2 3$。这是因为关系是传递的！如果 $3 \equiv_2$ ，那么我们知道 $1 \equiv_2$ 。

所以我们有正好两个等价类。每个整数都恰好属于这两个等价类中的一个，而任何整数的等价类就是它所属的类。

仔细检查上面的两个例子。对于“是倍数关系”，这不是一个等价关系，一些元素属于多个（不同的）关系类。但是对于 $\equiv_2$，这是一个等价关系，每个元素恰好属于一个等价类。这不是偶然的。为了理解这一点，我们将定义一个新术语。

定义 2.6.20

给定一个非空集合 ， 的一个划分是由 的非空子集组成的一个集合 ，使得 中的每个元素恰好属于 中的一个元素。

那个定义涉及了很多符号和集合。不过其实并不复杂：划分是一种将一个集合分解成*disjoint*个子集的方式，这些子集*cover*整个集合。子集彼此不相交意味着没有任何元素同时属于*more than one*个子集。子集覆盖该集合意味着每个元素都属于 *at least one*个子集。

例 2.6.21

给出集合 $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的几个不同划分。解答。这里有很多选择！一种选择是：

$$P_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}.$$

那是将 划分为两个子集的一种划分。另一种划分：

$$P_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

另一个：

$$P_3 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\},$$

这恰好是一个偶数和奇数的划分。我们还有一个平凡的划分：

$$P_4 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

注意：这是集合 ${}_4$ 内的一个单一集合。

有时把划分的元素视为子集会有点令人困惑，因为划分本身是一个集合，而集合的集合往往难以表述。我们有时把划分称为一个*collection*，并把划分中的每个元素称为*parts*或*blocks*。

现在的大致思路是：对于任何等价关系，等价类形成一个划分；而对于任何划分，我们可以定义一个关系“在同一子集内”，它将是一个等价关系。我们已经看到，$\equiv_2$ 的等价类形成了一个划分。现在让我们反过来考虑。

例 2.6.22

在集合 $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上，从划分 $= \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\}$ 定义一个等价关系 $\sim$。

解答。设若 的两个元素属于 的同一个元素，则认为它们是等价的。也就是说，$1 \sim 4$ 且 $4 \sim 1$，以及 $2 \sim 3$、$2 \sim 5$、$3 \sim 5$、$3 \sim 2$。

5 ~ 2，和 5 ~ 3。等待。我们还有 1 ~ 1，2 ~ 2，依此类推，因为每个数字都在与自身相同的子集中。

从直观上看，这个关系是自反的、对称的和传递的，因此它是一个等价关系。

定理 2.6.23

Given any equivalence relation on a set , the equivalence classes form a partition of .

Given any partition = { 1, 2, . . . , } of a set , the relation $\equiv_P$ defined by $\equiv_P$ if and only if and belong to the same block of , is an equivalence relation.

Further, the equivalence classes for the equivalence relation formed by a partition are exactly the original partition, and the equivalence relation built by the partition of its equivalence classes is exactly the original equivalence relation.

2.6.6 阅读问题

1. 考虑定义在整数集上的关系 ，当且仅当 − ≥ 4 时， 与 满足该关系。因此 ，例如，(2, 7) ∈ ，但(8, 6) ∉ 。下列哪些关系的性质是 所具有的?

A. 是自反的。 B. 是非自反的。 C. 是对称的。 D. 是反对称的。 E. 是传递的。

2. 并非所有图都具有传递性的边关系。但是否有一些图具有这种性质？如果有，请给出一个例子并解释为什么它是传递的。如果没有，请解释原因。

3. 阅读完本节后，你有哪些问题？请至少提出一个你对本节内容感到好奇的问题。

2.6.7 练习题

1. 以下哪些整数上的关系是自反的?

(a) ~ 当且仅当 + 是奇数。(b) ~ 当且仅当 + 是正数。(c) ~ 当且仅当 ≥ 0。(d) ~ 当且仅当 是正数。

(e) ~ 当且仅当 − 是 10 的倍数。

2. 以下哪种整数关系是对称的?

(a) ~ 当且仅当 + 是奇数。(b) ~ 当且仅当 + 为正。(c) ~ 当且仅当 ≥ 0。(d) ~ 当且仅当 为正。(e) ~ 当且仅当 − 是 10 的倍数。

3. 以下哪些整数上的关系是传递的?

(a) ~ 当且仅当 + 是奇数。(b) ~ 当且仅当 + 为正。(c) ~ 当且仅当 ≥ 0。(d) ~ 当且仅当 为正。(e) ~ 当且仅当 − 是 10 的倍数。

4. 在 1, 2, 3, 4 上定义关系 $_1, \ldots, {}_6$ 通过

(a) $_1 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$, (b) $_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. (c) $_3 = \{(2, 4), (4, 2)\}$. (d) $_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$, (e) $_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$, (f) $_6 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$.

对于每个关系，判断它是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。

5. 对于全体人的集合上的以下每一种关系，判断该关系是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性以及传递性。

（a）a ~ b 当且仅当 a 比 b 年长。（b）a ~ b 当且仅当 a 和 b 有共同的祖父母。（c）a ~ b 当且仅当 a 与 b 的名字相同。（d）a ~ b 当且仅当 a 和 b 出生于同一天。

6. 对于整数集合上的以下关系，判断该关系是否具备自反、非自反、对称、反对称和传递性：

(a) ~ 当且仅当 + = 0。 (b) ~ 当且仅当 − 是一个整数。 (c) ~ 当且仅当 = 2 。(d) ~ 当且仅当 > 1。

2.6.8 附加练习

1. 考虑集合 $\{1, 2, ..., 8\}$ 上的关系 $>$。

(a) 绘制关系 $>$ 的有向图。

（b）画出逆关系 $>^{-1}$ 的有向图。

(c) $>$ 的逆关系是否与关系 $\leq$ 相同？请解释。

2. 判断正误：对于集合 上的任意关系 ，关系 $^{-1}$ 当且仅当 是对称的时才是对称的。说明你的理由。

3. 判断正误：对于集合 上的任何关系 ， 与其逆关系的复合， $\circ$ $^{-1}$，总是自反的。请证明你的答案。

4. 如果可能，找出集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上一个既自反又对称但不传递的关系示例。如果这样的关系存在，画出该关系的有向多重图，并列出定义它的有序对。解释你的答案。 5. 如果可能，找出集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上一个既自反又传递但不对称的关系示例。如果这样的关系存在，画出该关系的有向多重图，并列出定义它的有序对。解释你的答案。 6. 如果可能，找出集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上一个既对称又传递但不自反的关系示例。如果这样的关系存在，画出该关系的有向多重图，并列出定义它的有序对。解释你的答案。 7. 下面这个论证中，认为任何既对称又传递的关系都必须是自反的，这个论证哪里出了问题？设 是集合 上的一个关系，且 是对称且传递的。由于 是对称的，若 ，则有 。由于是传递的，

如果 且 ，则 成立。由于这对所有元素 都成立，我们得到对于 中的所有 ， 都成立，因此 是自反的。

8. 假设 是集合 $= \{1, 2, ..., 6\}$ 上的一个等价关系。 的有向多重图可能是什么样的？给出至少两个不同的例子

用这样的 及其图形来说明你的答案。

9. 考虑定义在集合 = {1, 2, 3, 4, 5} 上的关系 ， 由 = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)} 给出。 是否是一个等价关系？请证明你的答案。

不论你的答案是什么，对于 ∈ ，关系类[ ] 是什么样的？你能仅凭这些信息判断 是否是等价关系吗?

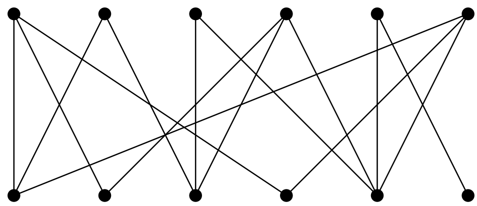
10. 考虑学生集合上的“独行者”关系，它描述友谊，并且在学生与其自身之间成立 *only*（即，除了自己之外，没有人与任何人成为朋友）。这是一个等价关系吗？请证明你的答案。如果它是一个等价关系，等价类是什么样的?

2.7 二分图中的匹配

Investigate!

给定一个二分图，匹配是边的一个子集，其中每个顶点恰好属于其中一条边。我们在此活动中的目标是发现一些判断二分图何时具有匹配的标准。

下图是否包含一个匹配？如果是，请找出一个。



并非所有二分图都有匹配。画出尽可能多本质上不同的、**没有**匹配的二分图例子。你的目标是找出阻碍图拥有完美匹配的所有可能障碍。写下图拥有匹配的*necessary*个条件（也就是说，填空：如果一个图有一个匹配，那么 ）。然后问问自己这些条件是否充分（也就是说，是否真的有：如果 ，那么该图就有一个匹配？）。

我们以另一个图论问题的示例作为结尾，以展示该领域的多样性和广阔性。

假设你有一个二分图 。它由两个顶点集合 和 组成，存在一些边将 中的某些顶点与 中的某些顶点连接（当然，不存在连接两个都在 中或都在 中的顶点的边）。 的一个匹配是边的一个子集，使得 中的每个顶点恰好属于该子集中的一条边，并且 中的任何顶点在该子集中至多属于一条边。在实践中，我们将假设 | = || (这两个集合具有相同数量的顶点)，因此这意味着图中的每个顶点都恰好属于匹配中的一条边。[11]

一些背景可能会让这更容易理解。将集合 中的顶点看作班级中的学生，而将集合 中的顶点看作演讲主题。如果学生 想要在主题 上做演讲，那么我们就在顶点 ∈（属于 ）与顶点 ∈（属于 ）之间连一条边。 当然，有些学生可能想要讲多个主题，因此他们对应的顶点的度数会大于 1。 作为老师，你希望为每个学生分配一个独特的主题。因此，你需要在 中找到一个匹配：从这些边中选择一个子集，使得每个学生恰好与一个主题配对，并且没有任何一个主题被分配给两个学生。[12]

[11]What we are calling a *matching* is sometimes called a *perfect matching* or *complete matching*. This is because it is interesting to look at non-perfect matchings as well. We will call those *partial* matchings.

[12]The standard example for matchings used to be the *marriage problem* in which A consisted of the

问题是：二分图在什么时候包含一个覆盖 的匹配？为了开始回答这个问题，先考虑是什么可能阻止该图包含一个匹配。这不一定能告诉我们图 *does* 何时有一个匹配，但至少这是一个开始。

不可能存在匹配的一种情况是：在 中有一个顶点不与 中的任何顶点相邻（因此其度为 0）。还有什么情况呢？如果有两个学生都只喜欢同一个主题，而没有其他选择呢？那么在把这个唯一的主题分配给第一个学生之后，第二个学生就再也没有他喜欢的主题了，这就非常类似于第二个学生的度为 0。又或者，如果有三个学生在他们之间只喜欢两个主题呢？同样地，在给其中一个学生分配一个主题之后，我们就把问题化简为前一种情况：两个学生只喜欢一个主题。我们可以用这种方式继续推广到越来越多的学生。

到此为止应该已经很清楚：如果存在一个由 名学生组成的群体，而作为一个整体他们喜欢的主题数量不超过 -1，那么就不可能存在任何匹配。这对任何 的取值以及任何由 名学生组成的群体都成立。

为了使其更具图论风格，设你有一个顶点集合 ⊆ 。定义 ( ) 为 中顶点的所有邻居所组成的集合。也就是说， ( ) 包含所有（在 中）与 中至少一个顶点相邻的顶点。（在学生/主题图中， ( ) 是 中学生所喜欢的主题集合。）我们上面的讨论可以总结如下：

匹配条件。

如果一个二分图 $= \{\ ,\ \}$ 存在一个覆盖 的匹配，则

$$|N(S)| \geq |S|$$

对于所有 ⊆ 。

逆命题成立吗？假设 对所有 ⊆ 都满足匹配条件 $|\ (\ )| \geq |\ |$（每个顶点集合的邻居数至少与该集合中的顶点数一样多）。这是否意味着存在一个匹配？令人惊讶的是，是的。这个显然的必要条件也是充分的。[13]这是一个由菲利普·霍尔于 1935 年首次证明的定理。[14]

定理 2.7.1 Hall 婚姻定理。

Let be a bipartite graph with sets and . Then has a matching of if and only if

$$|N(S)| \geq |S|$$

men in the town, B the women, and an edge represented a marriage that was agreeable to both parties. A matching then represented a way for the town elders to marry off everyone in the town, no polygamy allowed. We have chosen a more progressive context for the sake of political correctness.

[13]This happens often in graph theory. If you can avoid the obvious counterexamples, you often get what you want.

[14]There is also an infinite version of the theorem, which was proved by Marshal Hall, Jr. The name is a coincidence though as the two Halls are not related.

for all ⊆ .

这个定理有相当多种不同的证明——简单地在网上搜索一下就能让你入门。

除了在婚姻和学生展示主题中的应用，匹配在各个领域都有应用。我们以一个这样的例子作结。

例 2.7.2

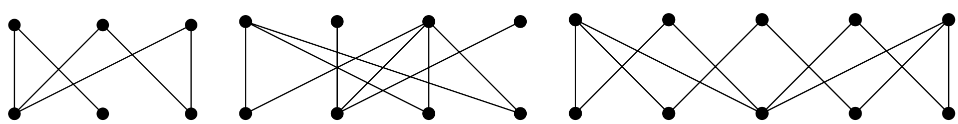
设你将一副52张的标准扑克牌发成13堆，每堆4张。证明：你总能从每一堆中各选一张，使得所选的13张牌恰好包含13种牌值各一张：A、2、3、. . .、10、J、Q 和 K。

解。直接这样做会很困难，但我们可以利用匹配条件来帮助。构造一个图，其中集合 中有 13 个顶点，每个代表 13 种牌值之一；集合 中有 13 个顶点，每个代表 13 堆中的一堆。如果牌值为 的牌在堆 中，则在顶点 ∈ 与顶点 ∈ 之间画一条边。注意，我们只是寻找 的一个匹配；每一种牌值都需要在这些堆中恰好出现一次。

如果匹配条件成立，我们就会有一个匹配。给定任意一组牌值（一个集合 ⊆ ），我们必须证明| ( )| ≥ | |。也就是说，包含这些值的牌堆数量至少等于不同值的数量。但如果不是这样呢？设 | | = 。如果| ( )| < ，那么这些牌堆中的不同牌的数量将少于 4 （因为每个牌堆包含4 张牌）。但是具有这 个不同值的牌共有 4 张，因此至少有一张牌必须在另一个牌堆中，这就产生了矛盾。因此匹配条件成立，所以存在一个匹配，如所要求的那样。

练习

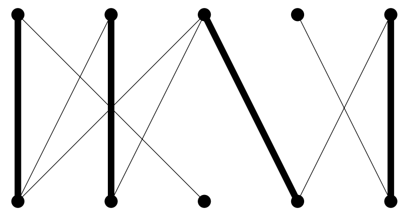
1. 为下面的二分图找到一个匹配，或解释为什么不存在匹配。



2. 一个没有匹配的二分图仍然可能有一个部分匹配。这里我们的意思是一个由 *edges* 组成的集合，其中没有任何顶点属于多于一条边（但也可能不属于任何边）。每一个（至少有一条边的）二分图都有一个部分匹配，因此我们可以在图中寻找最大的部分匹配。

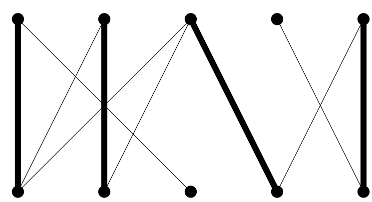
你的“朋友”声称她已经找到了该问题的最大部分匹配

下图（她的匹配用粗体显示）。她解释说无法添加任何其他边，因为她部分匹配中未使用的所有边都连接到已匹配的顶点。她说得对吗?

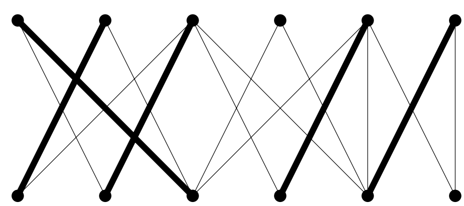


3. 检查一个部分匹配是否为极大的一种方法是构造一条交替路径。这是一串相邻边的序列，在匹配中的边与不在匹配中的边之间交替出现（任何一条边都不能被使用超过一次）。如果一条交替路径以匹配中的一条边 *not* 开始并结束，那么它被称为一条增广路径。

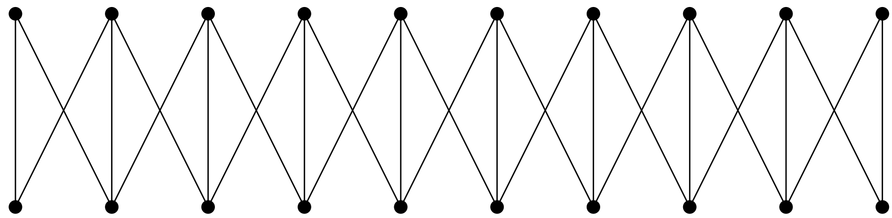
（a）在你朋友的图中，针对当前的部分匹配，找出可能的最长交替路径。它是增广路径吗？这将如何帮助你找到一个更大的匹配?



(b) 找到下面这个部分匹配的最长可能的交替路径。是否存在增广路径？该部分匹配是否是该图中存在的最大匹配?



4. 维斯特洛大陆最富有的两个家族决定通过联姻结成联盟。第一个家族有10个儿子，第二个家族有10个女孩。两个家族中孩子的年龄彼此对应。为避免不当之举，家族坚持每个孩子必须与年龄相同的人，或年龄相差一个位置（小一位或大一位）的人结婚。事实上，表示可接受婚姻的图如下所示:



问题是：有多少种不同的可接受的婚姻安排，能够将这20个孩子全部配对成婚?

(a) 如果我们要求恰好有 6 个男孩娶的不是与自己同龄的女孩，有多少种婚姻安排是可能的? (b) 你能将前一个答案加以推广，从而得到婚姻安排的总数吗? (c) 你如何知道你的答案是正确的? 尝试用不同的方法来计数。考察更小的家庭规模并得到一个数列。 (d) 你能给出一个符合该问题的递推关系吗?

5. 我们称顶点集合 ⊆ 为一个顶点覆盖，如果图中的每一条边都与覆盖中的某个顶点相关联（因此顶点覆盖覆盖了这些 *edges*）。由于 本身就是一个顶点覆盖，每个图都存在一个顶点覆盖。有趣的问题在于寻找一个最小顶点覆盖，即使用尽可能少的顶点的顶点覆盖。

(a) 假设你有一个图的匹配。你如何利用它来得到一个最小顶点覆盖? 你的方法总是有效吗? (b) 假设你有一个图的最小顶点覆盖。你如何利用它来得到一个部分匹配? 你的方法总是有效吗? (c) 在一个图中，最小顶点覆盖的大小与最大部分匹配的大小之间有什么关系?

6. 对于匹配的许多应用而言，使用二分图是有意义的。然而，你可能会想，是否存在一种方法可以在一般的图中寻找匹配。

（a）对于哪些 n，完全图 K_n 具有匹配?

（b）证明：如果一个图有一个匹配，那么 | | 是偶数。 c） 逆命题是否成立? 也就是说，所有满足 | | 为偶数的图都有一个匹配吗? d） 如果我们还要求匹配条件呢? 证明或反驳：如果一个具有偶数个顶点的图对所有 ⊆ 都满足 | ( )| ≥ | |，那么该图有一个匹配。

2.8 本章小结

希望本章能让你对图论主题的广泛多样性以及这些研究为何引人入胜有所了解。还有许多其他值得探讨的有趣领域，而且这个列表一直在不断增长；图论是数学研究中一个活跃的领域。

图论之所以是一个如此丰富的研究领域，原因之一是它涉及到一个基本概念：任何一对对象可以是相关的，也可以是不相关的。对象是什么以及“相关”是什么意思，会根据上下文的不同而有所变化，这导致了图论在科学和其他数学领域的广泛应用。对象可以是国家，如果两个国家共享边界，它们就是相关的。对象可以是大陆块，如果它们之间有桥梁连接，则它们是相关的。对象可以是网站，如果一个网站链接到另一个网站，则它们是相关的。或者我们可以完全抽象：对象是顶点，如果它们之间有边，则它们是相关的。

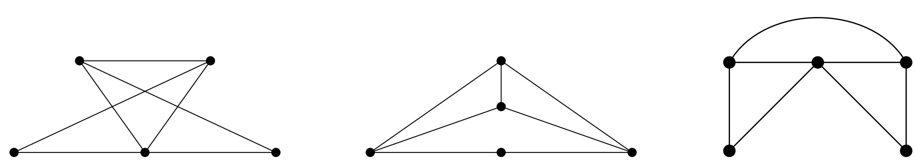
我们对图提出什么问题取决于具体应用，但往往会引出更深层次、更一般且更抽象、值得独立研究的问题。以下是我们所考虑过的问题类型的简要概述：

- 该图能否在平面上无边交叉地绘制？如果可以，这种绘制将平面划分为多少个区域？
- 是否可以使用少量颜色为图的顶点上色，使得相关的顶点具有不同的颜色？需要多少种颜色？
- 是否可以在不抬起铅笔的情况下，恰好沿图的每条边走一遍？图还可能拥有其他类型的“路径”吗？
- 你能找到具有某些性质的子图吗？例如，一个（双部）图在什么情况下包含这样一个子图：其中所有顶点都只与另一个顶点相关联？

毫不奇怪，这些问题通常是相互关联的。例如，当图是平面图时，图的色数不能大于4。图是否具有欧拉轨迹取决于每个顶点相邻的顶点数量（以及这些数量是否总是偶数）。即使是二分图中匹配的存在性也可以通过路径来证明。

本章回顾

1. 以下哪一张（如果有的话）图形相同？哪些不同？请解释。



2. 前一个问题中的哪些图包含欧拉迹或欧拉回路？哪些图是平面的？ 3. 画一个具有欧拉回路但不是平面的图。 4. 画一个既没有欧拉迹又不是平面的图。 5. 考虑图 = (,)，其中 = { , , , , , , }，且 = { , , , , , }（这里我们使用边的简写：例如， 实际上表示 { , }）。 (a) 图 是否与 ′ = (′, ′) 同构，其中 ′ = { , , , , , , }，且 ′ = { , , , , , }？如果是，请给出该同构；如果不是，请解释你是如何判断的。 (b) 找一个具有 7 个顶点和 6 条边且与 不同构的图 ″，或者解释为什么这是不可能的。 (c) 写出 的 *degree sequence*。也就是说，按递减顺序写出所有顶点的度数。 (d) 找一个与 具有相同度序列但与 不同构的连通图 ‴，或者解释为什么这是不可能的。 (e) 是什么类型的图？是完全图吗？是二分图吗？是一棵树吗？是一个圈吗？是一条路径吗？是轮图吗？ (f) 是平面图吗？

(g) 的色数是多少？请解释。

（h） 是否有欧拉迹或欧拉回路？请解释。

6. 如果一个图有 10 个顶点和 10 条边，并且包含一条欧拉回路，那么它一定是平面图吗？它会有多少个面？

7. 假设 是一个有 个顶点的图，每个顶点的度为 5。

(a) 对于哪些 的值这个有意义？(b) 对于哪些 的值图形有欧拉路径？(c) 图形可能是平面的最小 值是多少？（棘手）

8. 在一次学校舞会上，6 名女生和 4 名男生轮流（成对）互相跳舞。

(a) 如果每个女孩都与每个男孩跳舞，有多少对舞伴？(b) 如果每个人都与其他所有人跳舞（不分性别），有多少对舞伴？(c) 解释可以用哪些图来表示这些情况。

9. 在一个由 个人组成的群体中，是否可能每个人在该群体中都有奇数个朋友？如果可以，关于 你能得出什么结论？

10. 你的朋友向你发起挑战，要求你创建一个包含9个三角形和6个五边形的凸多面体。

(a) 使用 *only* 这些形状构建这样一个多面体是否可能？请解释。 (b) 你决定加入一个七边形（七边的多边形）。你新的凸多面体包含多少个顶点？ (c) 假设你成功构建了新的 16 面多面体，是否每个顶点都是相同数量面的交汇点？每个顶点是否可以连接 3 或 4 个面？如果可以，那么每种类型的顶点各有多少个？

11. 是否存在一个需要 5 种颜色才能对其顶点进行正确着色的凸多面体？请解释。12. 图 $_{n,n}$ 有多少条边？对于哪些 的取值，该图包含欧拉回路？对于哪些 的取值，该图是平面的？13. 图 有 6 个顶点，其度数分别为 1、2、2、3、3、5。 有多少条边？如果 是平面的，它将有多少个面？ 是否有欧拉迹？14. 正确地给 $_7$ 的顶点着色所需的最少颜色数是多少？根据你的答案，你能判断 $_7$ 是否是平面图吗？15. 正确地给 $_{3,4}$ 的顶点着色所需的最少颜色数是多少？根据你的答案，你能判断 $_{3,4}$ 是否是平面图吗？16. 证明 $_{3,4}$ 不是平面图。请使用欧拉公式来完成证明，而不仅仅是依据 $_{3,3}$ 不是平面图这一事实。

17. 正十二面体是由12个正五边形组成的正凸多面体。

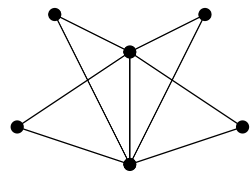
（a）假设你用三种颜色给每个五边形着色。证明必定存在两个相邻的五边形被涂成相同的颜色。（b）如果使用四种颜色会怎样？（c）如果不是十二面体，而是给立方体的各个面着色，又会怎样？

18. 判断下列陈述的真伪，并证明你的结论。

(a) 如果两个图 $_1$ 和 $_2$ 具有相同的色数，则它们是同构的。 (b) 如果两个图 $_1$ 和 $_2$ 具有相同的顶点数和边数，并且具有相同的色数，则它们是同构的。 (c) 如果两个图是同构的，则它们具有相同的色数。

19. 若一个具有7个顶点的平面图 将平面划分为8个区域，那么 必须有多少条边?

20. 考虑下图：



(a) 该图是否具有欧拉迹或欧拉回路？请解释。

(b) 该图是平面图吗？请解释。(c) 该图是二分图吗？是完全图吗？是完全二分图吗？(d) 该图的色数是多少?

21. 对下面的每一部分，判断该陈述是真还是假。解释为什么为真的陈述是真的，并为假的陈述给出反例。

(a) 每个二分图都是平面图。 (b) 每个二分图的色数都是 2。 (c) 每个二分图都有一条欧拉迹。 (d) 二分图中的每个顶点的度都是偶数。 (e) 一个图是二分图当且仅当所有顶点的度之和是偶数。

22. 考虑以下陈述：“如果一个图是平面图，那么它有欧拉路径。”

(a) 写出该命题的逆命题。

(b) 写出该命题的逆命题。

(c) 写出该陈述的否定。

(d) 逆否命题有可能是假的么？如果是假的，这说明了什么？(e) 原命题是真的还是假的？证明你的答案。(f) 该命题的逆命题是真的还是假的？证明你的答案。

23. 设 为一个包含 个顶点和 条边的连通图。使用数学归纳法证明，如果 包含恰好一个环（除了其他的边和顶点），则 = 。

注意：这里要求你证明平面图欧拉公式的一个特殊情形，因此在你的证明中不要使用该公式。

第3章

计数

在数学中，你最先学到的事情之一就是如何计数。现在我们希望能够快速而精确地对大量事物进行计数。例如：

- 在由10个人组成的一组中，如果每个人都与其他所有人恰好握手一次，那么一共会发生多少次握手？
- 将10块女童子军饼干分发给7个男童子军，有多少种方式？
- “anagram”的字母重排有多少个？

在处理这些问题之前，我们先来看看计数的基础知识。

3.1 帕斯卡的算术三角形

Objectives

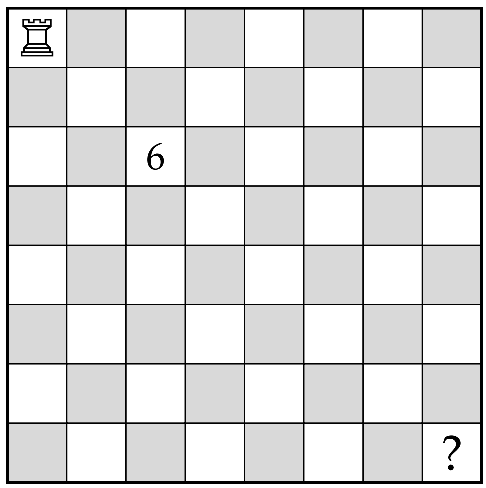
完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 使用帕斯卡三角形回答关于格路径、比特字符串和子集的计数问题。
2. 解释帕斯卡三角形是如何生成的，以及它如何与计数问题相关。
3. 解释为什么帕斯卡三角形与许多不同类型的计数问题有关。

3.1.1 部分预览

Investigate!

在国际象棋中，车只能沿直线（不能沿对角线）移动。车从左上角移动到右下角，有多少种方式，只能向下和向右移动?



另外，这与如果你使用14种可用配料中的一半，你能点多少披萨有什么关系?

活动预览

让我们找出车可以走到棋盘上不同格子的路径数量。

1. 第三行第三列的方格中的6表示到达该方格的不同路径有6条，尽管只有四个方格是车必须经过才能到达那里。一条路径是DDRR（下下右右）。列出所有6条路径。
2. 到第四行第二列的方格有多少条路径（在6的左下方对角线位置）？将所有路径列出，形式为D/R字符串。总共有多少条路径？也就是说，那个方格应该填写多少?
3. 现在我们来找通往第四行第三列方格的路径（直接位于6下方）。首先，列出所有以R结尾的路径。

接下来，列出所有以 D 结尾的路径。
还有其他路径吗？总共有多少条路径通向这个方格?

4. 继续填写棋盘，可以直接计数 D/R 字符串，或使用你在前一个任务中的观察。棋盘右下角的数字是多少？

1653年，布莱兹·帕斯卡在关注那些将奠定概率论基础的问题时，在他的 *Treatise on Arithmetical Triangle* 中收集了关于一个三角形数阵的若干事实。这种数的排列早在10世纪就已出现在中国、印度和波斯。中国和波斯对这一三角形的研究服务于我们如今所称的代数：求 次根，本质上就是解多项式方程。在印度文献中，这个三角形中的数字作为计数问题的解出现：从六个 *tastes* 中，你可以组成多少种由一个、两个或三个……组成的组合？14世纪的欧洲数学家将该三角形展示为形数表（可以排列成几何形状的数），而形数本身正是毕达哥拉斯及其追随者著作的核心。

那么，这个蕴藏着如此多不同数学问题奥秘的非凡三角形究竟是什么？请看，帕斯卡三角形：

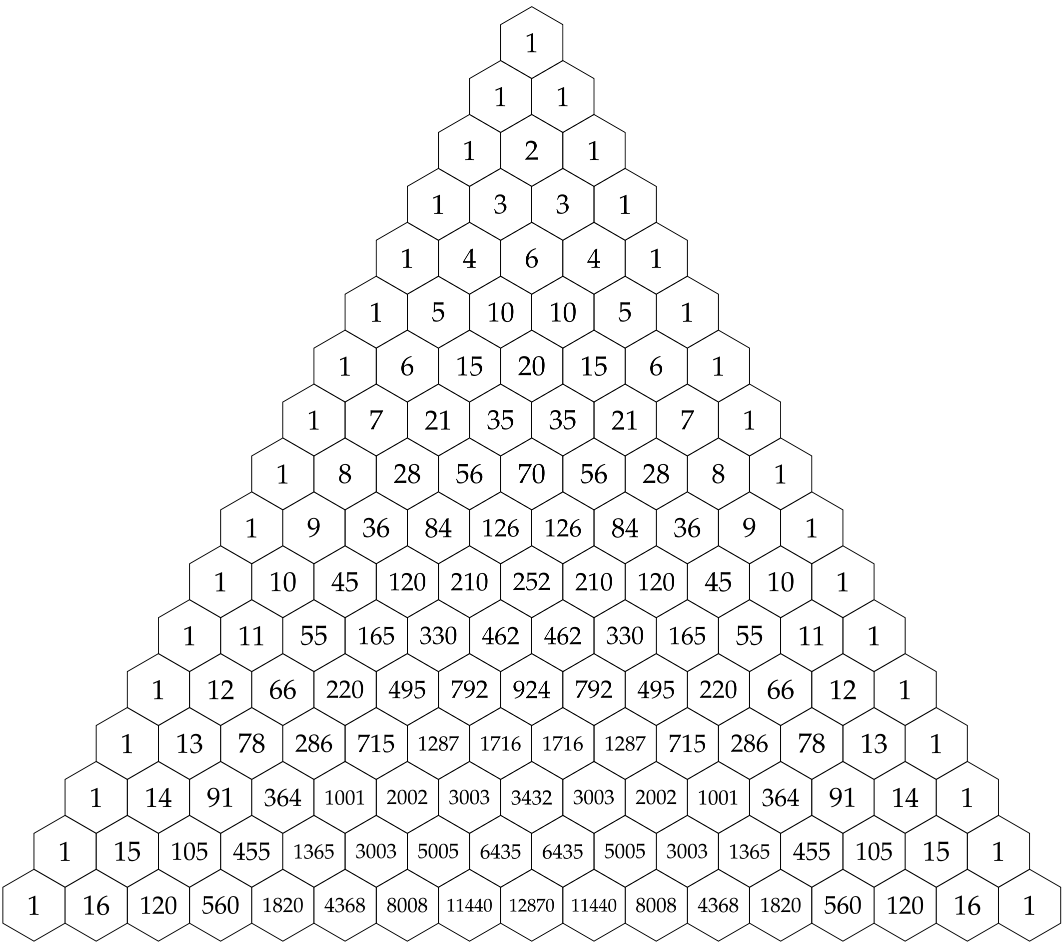


图 3.1.1 帕斯卡三角形。

花点时间凝视这个三角形的美。你注意到了什么？你有什么疑问？特别看看第 5 行（我们把顶行的 1 称为 0，所以第 5 行是 1、5、10、10、5、1）。这一行中的数字与这些数字有什么关系

在它们之上？注意到 $5 = 1 + 4$ 和 $10 = 4 + 6$ 吗？这个情况在三角形的其他地方出现吗？

事实上，三角形中的每一个数都是*sum of the two numbers above it*。让我们把这作为帕斯卡三角形的*definition*。然后我们就可以生成任意多行的三角形。正是这种加法定义在中国和波斯被用来求 次方根，我们将在本节末尾简要提及这一用法。然而，我们感兴趣的是计数问题，因此我们现在的主要目标是观察帕斯卡三角形中的数字如何成为各种计数问题的答案。

这里有一些看起来彼此不同、但我们可以进行计数的离散对象：格点路径、比特串、子集以及披萨。我们将分别给出每一种计数问题的一个例子（并说明这些对象究竟是什么）。正如我们将要看到的，帕斯卡三角形中的数给出了所有这些问题的答案。

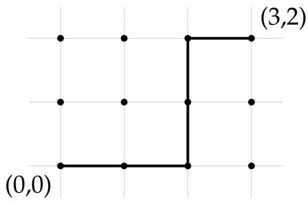
在我们开始之前，先介绍一点记号。让我们根据位置给帕斯卡三角形中的每个数起一个名字。把每个数看作位于某一行和某一列：行从上往下计数，从 0 开始；列从左向右计数，也从 0 开始。位于第 行、第 列的条目记作 $\binom{n}{k}$。例如，$\binom{6}{3} = 20$，因为它是第 6 行、第 3 列的数值。出于很快就会明白的原因，我们把 $\binom{n}{k}$ 读作“选 ”。我们可以用这些名称重写这个三角形：

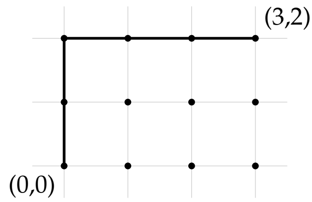
$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

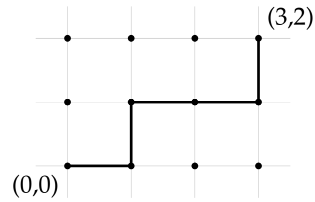
3.1.2 格子路径

整数格是笛卡尔平面中所有点的集合，这些点的 和 坐标都是整数。如果你喜欢在方格纸上绘制图形，那么格点就是所有网格线的交点集合。

格点路径是在格点上连接两点、仅通过水平和垂直方向移动的最短路径之一。例如，下面是从点 (0, 0) 到 (3, 2) 的三条可能的格点路径：







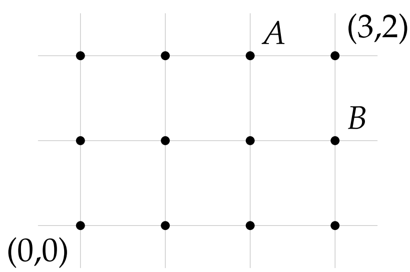
注意，为确保路径是*shortest*可能的，每一步必须向右或向上。此外，在这种情况下，无论我们选择哪条路径，都必须向右走三步，向上走两步。无论我们以什么顺序走这些步骤，路径的步数始终为五步。因此，每条路径的长度为五。

我们要问的计数问题是：*how many* 梯形路径从 (0, 0) 到 (3, 2) 有多少条？在这种情况下，画出所有路径不会花太多时间。或者我们可以将每条路径列为一串“方向”字符串，例如 ， ，或者 ，这些字符串对应于上面画出的三条路径，其中 表示在 方向上移动一个单位， 方向也类似。我们将得到以下十条路径：

$$\begin{array}{cccccc} & xxxyy & xxyxy & xyxxy & yxxxy & \\ xxyyx & xyxyx & yxxyx & xyyxx & yxyxx & yyxxx. \end{array}$$

当起点和终点之间的距离更大时，我们会希望找到一种更高效的方法来计算路径数量。

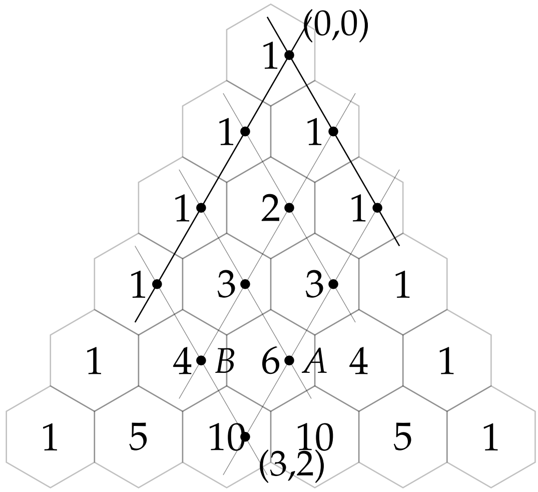
让我们运用从车的路径（令人惊讶的是，其实是格点路径）中学到的内容。考虑下面所示的格点：



从 (0,0) 到 (3,2) 的任何格路径都必须恰好经过 和 中的一个。点 距离 (0,0) 有 4 步，其中两步在 方向。最后一步也在 方向，因此从 (0,0) 到 (3,2) 且经过 的路径，正好是我们上面列出的以 结尾的六个字符串。对于经过点 的路径，最后一步将在 方向，因此从 (0,0) 到 (3,2) 且经过 的路径，正好是我们上面列出的以 结尾的四个字符串。所以，到达 (3,2) 的路径总数就是 6 + 4。

这里的一般性观察是：为了求从 (0, 0) 出发并到达 (,) 的路径数量，我们可以求到达终点左侧紧邻点 (− 1,) 的路径数量，并加上到达终点正下方紧邻点 (, − 1) 的路径数量。这正是生成帕斯卡三角形的方式！事实上，如果我们适当地旋转格点，使得点 (0, 0) 位于顶部的

在三角形和沿三角形边的坐标轴上，我们可以看到帕斯卡三角形中的数字恰好给出了到达每个格点的路径数。



为了使这一观察对实际寻找从原点到给定点的路径数量有所帮助，我们注意到，决定帕斯卡三角形中 *row* 的是路径的 *length*，而在 方向上的步数表明我们在三角形中深入了多远——也就是帕斯卡三角形的 *column*。

示例 3.1.2

从 (0, 0) 到 (4, 7) 一共有多少条格点路径？解答。这些路径的长度是 4 + 7 = 11。查看帕斯卡三角形的第 11 行：

$$1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1.$$

数到第7个位置（记住1位于位置0），这给了我们 $\binom{11}{7} = 330$ 条不同的路径。

3.1.3 位串

"Bit" 是 "binary digit"（二进制数字）的简称，因此比特串就是由二进制数字组成的字符串。二进制数字仅仅是数字 0 和 1。下面所有内容都是比特串：

$$1001 \quad 0 \quad 1111 \quad 1010101010.$$

字符串中比特（0 或 1）的数量就是字符串的长度；上述字符串的长度分别是 4、1、4 和 10。我们也可以问其中有多少个比特是 1。一个比特字符串中 1 的数量称为该字符串的权重；上述字符串的权重分别是 2、0、4 和 5。

定义 3.1.3 比特串。

- 一个 位字符串是长度为 的比特字符串。也就是说，它是一个包含 个符号的字符串，其中每个符号都是一个比特，即 0 或 1。
- 比特串的权重是其中 1 的个数。
- B 是所有权重为 的 位字符串的集合。

例如，集合 B^3_2 的元素是比特串 011、101 和 110。这些是仅有的包含三个比特且恰好有两个比特为 1 的字符串。

计数问题：有多少个 5 位字符串的权重是 3？换句话说，我们是在求基数 $|B^5_3|$.

我们就把它们列出来，看看有多少。

11100 11010 10110 01110
11001 10101 01101 10011 01011 00111.

太好了。十个。实际上，我有个坦白：我并不是从零开始把这些全都打出来的。我只是把我们之前找到的从 (0,0) 到 (3,2) 的 10 条格点路径列表稍作修改而已。每个 变成了 1，每个 变成了 0。毕竟，任何长度为 、且需要在 方向走 步的格点路径，都可以用由两种符号组成的 个符号的字符串来表示，其中有 个符号属于其中一种。不管我们把这两种符号叫做 和 ，还是叫做 1 和 0，都不会改变我们得到的 *how many* 字符串。

因此，帕斯卡三角形与格点路径之间的同样关系也适用于比特串，这并不令人惊讶。观察上面的 10 个字符串。第一行包含所有以 0 结尾的 B^5_3 中的比特串。在这个结尾的 0 之前，我们有一个属于 B^4_3 的字符串，因为它必须长度为 4、权重为 3（结尾的 0 增加了长度，但不增加权重）。第二行包含所有以 1 结尾的 B^5_3 中的比特串。在这个结尾的 1 之前，我们有一个属于 B^4_2 的字符串，因为它必须长度为 4、权重为 2（结尾的 1 增加了长度和权重）。因此，权重为 3 的 5 位比特串的数量等于权重为 3 的 4 位比特串数量与权重为 2 的 4 位比特串数量之和。用符号表示为：

$$|\mathbf{B}^5_3| = |\mathbf{B}^4_3| + |\mathbf{B}^4_2|.$$

现在我们有两个充分的理由相信，帕斯卡三角形告诉我们具有给定权重的比特串的数量：格点路径与比特串之间存在一一对应关系，而且用于生成帕斯卡三角形的递归关系同样也适用于比特串。因此，我们现在可以利用该三角形来计数比特串。

例 3.1.4

有多少个11位比特串具有权重5?

解答。将有 $\binom{11}{5}$ 个这样的字符串。从帕斯卡三角形可知，$\binom{11}{5}$ = 为 462

3.1.4 子集与披萨

集合 的一个子集是指其所有元素也都属于 的任意集合。可以这样理解：从集合 开始，移除其中的一些元素（或者不移除任何元素，或者移除全部元素），所得的集合就是 的一个子集。（关于集合的更多信息可参见第 0.2 节和第 5.1 节。）

假设我们考虑集合 = {1, 2, 3, 4, 5}。集合 中恰好包含 3 个元素的子集有多少个？让我们把它们全部列出来：

$$\{1,2,3\} \quad \{1,2,4\} \quad \{1,3,4\} \quad \{2,3,4\}$$
$$\{1,2,5\} \quad \{1,3,5\} \quad \{2,3,5\} \quad \{1,4,5\} \quad \{2,4,5\} \quad \{3,4,5\}.$$

再次，我们看到共有十个。事实上，我们列出的顺序与之前列出的十个重量为 3 的 5 位比特串以及从 (0,0) 到 (3,2) 的十条格点路径的顺序相同。等等，这甚至有意义吗？子集和比特串究竟有什么关系？

将位串中的每一位看作表示集合中的一个元素。集合 有五个元素，因此我们需要五位来表示 的一个子集。如果位置 上的位是0，这意味着我们*not*将 包含在我们的子集中，而该位置为1则表明 在子集中。三个1表示我们对三个元素说了“是”。

例 3.1.5

下面的位串分别对应于 {1, 2, 3, 4, 5, 6} 的哪些子集?

101011 001000 111111 000000

解答。这里我们不固定字符串的权重，因此我们的子集不会都具有相同的大小。对应关系如下：

$$\begin{array}{c|l} 101011 & \{1,3,5,6\} \\ 001000 & \{3\} \\ 111111 & \{1,2,3,4,5,6\} \\ 000000 & \emptyset \end{array}$$

最后一个子集是空集：不包含任何元素的集合（我们也可以写成 {}）。这是 *every* 集合的一个子集！

备注 3.1.6 我们在这里所做的是给定一个 *bijection*，它连接了权重为 3 的 5 位字符串集与 的 3 元子集集之间。双射是一个函数 : → ，满足 中的每个元素是来自 的恰好一个元素的像。你可以证明，如果两个集合之间存在双射，那么它们的元素个数是相同的。这是我们将在接下来的章节中使用的常见计数技巧。

这个例子再次说明，帕斯卡三角形能够给出计数问题的答案。一个含有 个元素的集合的 元子集的数量，与权重为 的 位比特串的数量相同，而这正是该三角形中第 行第 列的数$\binom{n}{k}$。

例 3.1.7

集合 { , , , , , , } 的子集中，恰好有 4 个元素的有多少个? 解。该集合包含 7 个元素，因此，4 元子集的数量等同于重量为 4 的 7 位比特串的数量，即 $\binom{7}{4} = 35$。

到这个时候，我敢肯定大家都已经相当饿了，所以我们去吃点披萨吧。但我们该点哪种披萨呢? 别太夸张了，就从现有的十种配料中选择三种。我们一共可以点多少种不同的披萨?

啊哈！所以这就是我们为什么关心对子集进行计数！！每一种披萨选择不过是由 10 种配料组成的集合中的一个 3 元素子集。我们现在知道如何计算它：$\binom{10}{3} = 120$ 种不同的披萨。

如果我们在晚餐时想要一杯意大利汽水呢? 假设我们想从现有的13种口味糖浆中加入两种不同的口味。有多少种不同的汽水是可能的? 这正是一个含有13个元素的集合的所有2元素子集的数量：$\binom{13}{2} = 78$.

这就是为什么我们把 $\binom{n}{k}$ 读作 “ 选 ”。它表示从包含 个元素的集合中选取 个元素的方式数，因为选择 个元素正是构造一个包含 个元素的子集的方法。

我们可以将格路径的计数看作从 个事物中选择 个：在路径的 个步子中，我们选择其中 个沿 方向。比特串也可以这样理解：在字符串的 个位中，我们选择其中 个为1。

现在，只要这些现实世界中的各种计数问题本质上不过是在询问一个集合的子集数量，我们就都能回答。帕斯卡三角形包含了所有这些答案。

子集计数。

一个包含 个元素的集合的 元子集的数量，等于帕斯卡三角形中第 行、第 列的数：$\binom{n}{k}$，读作 “ 选 ”。这表示从一个包含 个项目的集合中选择 个项目的方式数。

3.1.5 代数?

我们之前说过，帕斯卡三角形的一个原始用途是解决 *algebra* 中的问题。计算子集（或比特串或格路径）与代数有什么关系?

假设你展开二项式表达式 ($+ 1)^6$ (即将二项式 $+ 1$ 自乘六次)。手动完成这一操作可能会很繁琐，但像 SageMath 这样的计算机代数系统可以轻松完成这一任务。

```
展开 (( x +1)^6)
```

```
x^6 + 6*x^5 + 15*x^4 + 20*x^3 + 15*x^2 + 6*x + 1
```

这些系数看起来熟悉吗? 考虑帕斯卡三角形的第6行:

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1.$$

为什么是这些系数?

试一试 3.1.8

修改上面的 SageMath 代码以展开 ($+ 1)^{10}$。 ^{6} 的系数是多少?

为了看清为什么这不仅仅是巧合，让我们看看 ($+$ $)^3$ 的展开，并且非常仔细地进行。我们实际上是在将其完全展开相乘

$$(x + y)(x + y)(x + y).$$

这意味着我们必须展开二项式，如下所示。（我们将为每个版本的 和 使用不同的字体，以便跟踪每个部分的来源。）

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 =& (x+y)(\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathcal{X}+\mathcal{Y})\\
=&[(x+y)(\mathbf{x}+\mathbf{y})]\mathcal{X}+[(x+y)(\mathbf{x}+\mathbf{y})]\mathcal{Y}\\
=&[(x+y)\mathbf{x}+(x+y)\mathbf{y}]\mathcal{X}+[(x+y)\mathbf{x}+(x+y)\mathbf{y}]\mathcal{Y}\\
=&[x\mathbf{x}+y\mathbf{x}+x\mathbf{y}+y\mathbf{y}]\mathcal{X}+[x\mathbf{x}+y\mathbf{x}+x\mathbf{y}+y\mathbf{y}]\mathcal{Y}\\
=&x\mathbf{x}\mathcal{X}+y\mathbf{x}\mathcal{X}+x\mathbf{y}\mathcal{X}+y\mathbf{y}\mathcal{X}+x\mathbf{x}\mathcal{Y}+y\mathbf{x}\mathcal{Y}+x\mathbf{y}\mathcal{Y}+y\mathbf{y}\mathcal{Y}.
\end{aligned}$$

这种重复分配导致了一个项的总和，每一项都是三个变量的乘积。我们看到，每一项都是*choosing*的结果，要么是每个二项式中的 ，要么是 。例如，项 $\mathcal{Y}$ 是选择第一个二项式中的 、第二个二项式中的 以及第三个二项式中的 的结果。

假设我们想找到 ^{2} 项的系数。我们收集同类项，将所有选择了 两次（且 选择了一次）的项聚集在一起。或者， ^{2} 项来自所有包含两个 和一个 的项，

就像一个比特串或格路径一样。不管你如何理解，结果是我们有 $\binom{3}{2} = 3$ 个形如 2 的项。

希望这点已经很清楚：它可以推广到对任意正整数 的(+)^n 的展开。这被称为 *binomial theorem.*

定理 3.1.9 二项式定理。

The th row of Pascal's triangle gives the coefficients of the expansion of (+)^n. That is, for any positive integer ,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.,$$

so the coefficient of $^{n-k}$ *is* $\binom{n}{k}$.

因此，帕斯卡三角形中的数常被称为二项式系数。

例 3.1.10

在不将二项式展开的情况下，给出 (+)^5 的展开式。解答。我们取帕斯卡三角形的第 5 行：1, 5, 10, 10, 5, 1。于是展开式为，

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

3.1.6 阅读问题

1. 为什么从 (0, 0) 到 (3, 5) 的格点路径数量与权重为 5 的 8 位字符串的数量相同?

2. 以下哪些计数问题的答案是 $\binom{11}{5}$? 请选择所有适用的选项。

A. 从 (0, 0) 到 (11, 5) 一共有多少条格点路径? B. 集合 {1, 2, . . . , 11} 中恰好包含 5 个元素的子集有多少个? C. 权重为 5 的 11 位二进制串有多少个? D. 从 11 种可选口味中为一个巨型圣代选择 5 种冰淇淋口味的方式有多少种?

3. 集合 {1, 2, . . . , 8} 中大小为 3 的子集的数量，与集合 {1, 2, . . . , 7} 中大小为 2 或 3 的子集的数量相同。解释为什么这在直观上是有道理的。

4. 阅读本节后你有哪些问题? 请就本节的内容写出至少一个你感到好奇的问题。

3.1.7 练习题

1. 使用帕斯卡三角形求出下列各项的数值。

(a) $\binom{7}{2}$ (c) $\binom{8}{3}$ (e) $\binom{8}{7}$

(b) $\binom{7}{3}$ (d) $\binom{10}{5}$ (f) $\binom{13}{2}$

2. 计算帕斯卡三角形各行的下列和。

$$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}.$$

$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}.$$

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}.$$

现在基于你在上述计算中的工作，给出对帕斯卡三角形第13行的和的一个猜测。

3. 考虑从 (3,4) 到 (8,10) 的格点路径。
每一条这样的路径有多长？在 x 方向上
有多少步？有多少条不同的路径？

4. 从 (，) 到 (，) 有多少条格点路径？请将你的答案表示为一个二项式系数，例如 $\binom{n}{k}$，并说明 和 分别是什么。

5. 考虑比特串 100110010。
比特串的长度是多少？
该比特串的权重是多少？
有多少个比特串（包括这个比特串）与它具有相同的权重长度？

6. 考虑集合 B^8_3 权重为3的8位字符串的。
每个比特串中有多少个 1？每个比特串中有多少个 0？

这个集合中有多少个位串？
汉明重量为5的8位比特串有多少个？

7. 假设你正在从 *D.P. Dough* 点一个卡尔佐内。你想要5种不同的配料，从他们提供的10种素食配料中选择。

a. 你的卡尔佐内有多少种选择？ b. 如果你拒绝把青椒作为配料之一，你的卡尔佐内有多少种选择？

c. 如果你*insist*坚持把青椒作为你的配料之一，你的卡尔佐内有多少种选择？

这三个问题是如何相互关联的？你明白为什么这样是有道理的吗？

8. 集合 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} 有多少个包含六个元素的子集？
其中有多少包含数字 1？
在所有6元素子集的总数中，有多少个子集不包含数字1？

9. 在$(\ + 3)^{16}$中，$\ ^{14}$的系数是多少？

10. 在$(\ + 2)^{17} + \ ^{4}(\ + 3)^{21}$的展开式中，$\ ^{9}$的系数是多少？

3.1.8 额外练习

1. 从 (0, 0) 到 (8, 3) 有多少个格点路径？从 (0, 0) 到 (3, 8) 有多少个格点路径？为什么这两个数字相同是有意义的？请解释你的推理。

2. 假设你正在计算从 (0, 0) 到 (4, 3) 的格点路径。我们知道这样的路径数量是 $\binom{4+3}{4} = \binom{7}{4} = 35$。这里有另一种计算这些路径的方法：考虑你的第一步在 方向上的位置。这里有五种不同的选择；计算每种情况下的路径数量。

(a) 从 (0, 0) 到 (4, 3) 有多少条路径，其中第一步是在 方向（即，经过点 (0, 1) 的路径）？ (b) 从 (0, 0) 到 (4, 3) 有多少条路径，其中第一步是在 方向，然后一步在 方向（因此它们经过点 (1, 0) 然后是 (1, 1)）？ (c) 列出剩下的三个情况，并说明每个情况有多少条路径。 (d) 验证每个情况下的路径总和是 35。然后描述这些数字在帕斯卡三角形中的位置。找到这个模式的另一个实例并验证它是否有效。

3. 解释为什么在 $(\ + \ )^{8}$ 的展开中，$\ ^{5} \ ^{3}$ 的系数与 $\ ^{3} \ ^{5}$ 的系数相同？

考虑 $(\ + \ )^{5}$ 的展开。

(a) 使用二项式定理展开$(\ + \ )^{5}$。 (b) 使用$(\ + \ )^{5}$的展开式，应用分配律计算$(\ + \ )^{5} \cdot (\ + \ )$。简化你的答案，但展示所有步骤。 (c) 你的前一个答案与应用二项式定理展开$(\ + \ )^{6}$时得到的结果有何关系？

3.2 合并结果

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 运用加法原理和乘法原理来计算一个事件的结果数量。

2. 使用和与积的原理结合解决计数问题。

3. 从加法原理的角度证明乘法原理。

3.2.1 本节预览

Investigate!

一副标准的扑克牌包含52张牌。有四种花色：梅花、方块、红心和黑桃。每种花色包含13种牌值：A、2、3、……、10、J、Q和K。

我们将红桃和方块称为红色牌（梅花和黑桃为黑色牌）。在每一种花色中，J、Q 和 K 被称为人头牌（其余的称为数字牌）。

假设你从一副牌中抽取两张牌。有多少种不同的组合使得第一张牌是红牌，第二张牌是人头牌?

Combinatorics 是关于计数的，但从这个词来看，我们发现它实际上处理的是事物如何 *combine*。在本节中，我们将考虑两种非常不同的方式，来组合我们在组合数学问题中计数的结果。

活动预览

1. 一家餐厅提供 8 种开胃菜和 14 种主菜。如果：你有多少种选择?

   a. 你将只吃一道菜，是开胃菜还是主菜?

   b. 你特别饿，想同时吃一道开胃菜和一道主菜吗?

2. 想一想你用来解决关于开胃菜和主菜的问题的方法。你能把这些方法表述为在计数时如何把两种数量的事物组合起来的规则吗？把这些方法的规则写下来。

3. 你的规则有效吗？让我们将它们应用到另一个计数问题中来检验。已知一副标准扑克牌有12张人头牌和26张红牌，请回答下列问题。

(a) 有多少种方法可以选取一张牌，它要么是人头牌 *or*，要么是红牌？

（b）有多少种方式可以选取一张既是人头牌*and*红色牌的牌？

3.2.2 什么是 *Outcomes*?

在开始计数之前，先简要说明一下我们是如何提出计数问题的。计数问题通常以“某件事情有多少种发生方式”的形式来提问。也就是说，存在一个事件，它可能产生不同的结果，而我们所计数的正是这些不同的结果。或者，我们也可以采取一种不那么“主动”的视角，去询问一个集合中元素的数量，例如具有特定长度和重量的比特串集合。然而，这同样可以改写为一个关于事件的问题：如果你从该比特串集合中随机选择一个比特串，会发生多少种情况?

所以，计算一个集合中的元素，或计算一个事件的结果数量，并没有什么本质区别。让我们把每一个计数问题都看作是在询问一个*outcomes*的*set*中的元素个数。

在最基本的层面上，计数一点也不难：只需把所有结果写成一个编号列表，看看你用了多少个编号。让我跟你讲讲我的领结收藏。我有，

1. 一个紫色的领结。
2. 一个绿色的领结。
3. 一个条纹领结。 4. 一个佩斯利花纹的领结。

我有多少个领结（我可以用多少种方式选择一个领结）？ 嗯，我的编号列表中最大的数字是 4，所以我有四个领结。[1] 当然，正如我们在上一节中看到的那样，我们可以使用一些捷径来避免把所有结果都一一列出来，比如使用帕斯卡三角形来求出我们列表中的项目数量。

当我们想把已经数过的两个或更多列表合并成一个新列表时，计数才开始变得有趣起来。例如，假设除了我那份包含四个领结的清单外，我还有一份包含七双新奇袜子的清单。如果我想要戴一个很酷的领结或者穿一双新奇袜子，我可以问自己一共有多少种选择。好的，把这两个清单合并成一个包含11个项目的新清单：也许可以先列出四个领结，然后继续计数（把第一双袜子记为5），直到把另外七个项目都列出来，最后数到11。

[1]Obviously this example is quite outdated; only four bow ties? What sort of mathematician do you take me for?

在这个例子中，我们将两组结果（选择一个领结和选择一双袜子）合并，得到一组新的结果（选择一个领结或一双袜子）。得到的这组结果包含 11 个元素。

现在考虑这个问题：如果我想同时佩戴一个领结和一双新奇袜子，我有多少种选择？同样地，我需要将我的两个结果集合并，得到一个新的结果集。但这个新的结果集将包含28个元素。我是如何知道应该把原来每个集合中的元素个数相乘，而不是相加的呢？我们再次在合并结果：得到的结果集包含28个元素，这些元素全部都是由一个领结和一双袜子组成的结果。现在再读一读前一段！它们听起来非常相似！

这两种情形之间的差异很微妙。我们可以从两种方式来思考如何组合结果：

1. 我们可以将结果的 *sets* 结合起来。
2. 我们可以将集合中的 *outcomes* 合并。

能够区分这些运算是组合数学中的一项关键技能。

例 3.2.1

假设你的冰箱门上有一些磁性字母和数字：有五个字母（A、B、C、D 和 E
）以及三个数字（1、2 和 3）。你的哥哥说，如果把这些磁铁集合合并起来
，你会得到一组 8 个磁铁。你的姐姐说，你可以用 15 种方式组合这些磁铁。

你的兄弟姐妹在考虑哪些结果集？

解答。你的兄弟正在考虑将结果集合合并。字母的结果集合是 { , , , , }，数字的结果集合是 {1, 2, 3}。合并后的磁铁结果集合是 { , , , , , 1, 2, 3}，其中包含 8 个元素。

你妹妹正在考虑将结果本身进行组合。结果集合为 { 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3}，其中包含 15 个元素。

3.2.3 加法原理与乘法原理

让我们仔细写下可以用来组合结果集合以及集合中结果的规则。

原理 3.2.2 求和原理。

If an event results in outcomes, and event results in 不相交 *outcomes, then the event " or " results in + outcomes.*

重要的是事件必须是互斥的：即，不能同时发生 和 。例如，一副标准的52张牌包含26张红牌和12张面牌。然而，选择一张既是红牌又是面牌的方式的数量不是 $26 + 12 = 38$。这是因为有6张牌既是红牌又是面牌。

例子 3.2.3

有多少个以 A 或 B 开头的两个字母的"单词"？（这里的单词只是字母的序列；不必是英语，甚至不需要可发音。）

解决方案。首先，有多少个以A开头的两个字母单词？我们只需要选择第二个字母，这可以通过26种方式完成。所以有26个以A开头的单词。也有26个以B开头的单词。为了选择一个以A或B开头的单词，我们可以从前26个或后26个中选择，总共有52个单词。

我们有两组结果：以A开头的单词和以B开头的单词。通过结合这两组结果，我们创建了一个新的结果集，得到以A或B开头的单词集，根据加法原理，这个新集合包含52个结果。

当需要借助其他计数方法来计算结果集合时，我们常常使用这一原理。

示例 3.2.4

有多少个权重为6的10位字符串以11或00开头？

解答。在第3.1节中，我们学习了如何计数具有固定长度和重量的比特串。重量为6的10位比特串的总数是 $\binom{10}{6} = 210$（该数值是通过帕斯卡三角形得到的）。然而，我们只想计数那些以11或00开头的（而不是以10或01开头的）。

由于不存在同时以 11 和 00 开头的位串，我们可以应用加法原理。我们将计算每个结果集合的大小，然后将结果相加。

有多少个权重为6且以11开头的10位字符串？如果字符串以11开头，那么在剩余的八位中必须有四个1，这样总权重才是6。这就相当于询问权重为4的8位字符串的数量，因此共有 $\binom{8}{4} = 70$ 个这样的字符串。类似地，还有 $\binom{8}{6} = 28$ 个以00开头的字符串（所有六个1都必须在剩余的8位中）。根据加法原理，我们要计数的字符串总数是 $70 + 28 = 98$。

我们也可以以一种可能被称为*subtraction principle* (但并不是)的方式来使用求和原理*indirectly*。

例 3.2.5

有多少个重量为6的10位二进制串在其前三位中至少包含一个1？解答。一个串在前三位中至少有一个1的方式有很多种：它可以以100、010、001、101、110、011或111开头。我们可以分别计算以每一种情况开头的字符串数量，然后多次应用加法原理。但我们不这么做。

假设我们要计数的字符串数量是 。令 为权重为 6 的 10 位字符串的数量，这些字符串在其前三位中的任意一位上 *do not* 有一个 1。那么 + 是多少？这就是权重为 6 的 10 位字符串的总数，即 $\binom{10}{6} = 210$。 也很容易求：以 000 开头、长度为 10 且权重为 6 的比特串，末尾必须是一个长度为 7、权重为 6 的比特串。共有 $\binom{7}{6} =$ 其中的七个。

因此，我们有

$$x + 7 = 210,$$

所以 $= 210 - 7 = 203$。

虽然在前一个例子中我们不想多次使用加法原理，但其实是可以的。加法原理适用于两个以上的事件。比如，除了你的四个蝴蝶领结和七双袜子之外，你还可以从五个皮带扣中选择一个。现在你一共有多少种选择？你将有 $4 + 7 + 5 = 16$ 种选择。

示例 3.2.6

有多少个以 5 个元音之一开头的两个字母的单词？

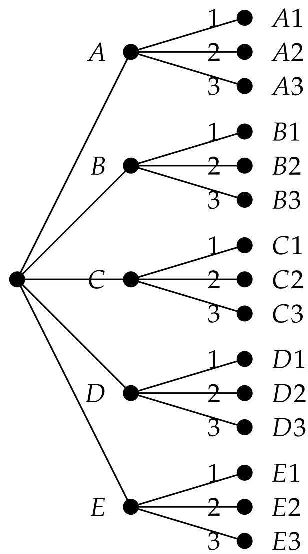
解。以 A 开头的两字母单词有 26 个，以 E 开头的还有 26 个，依此类推。根据加法原理，单词的总数因此为 $26 + 26 + 26 + 26 + 26 = 130$。当然，直接计算 $5 \cdot 26$ 会更简单。

注意，在前面的例子中，当对一组大小相同的结果集使用加法原理时，直接相乘会更快。让我们利用这一观察，将其表述为一个新的原理。

原理 3.2.7 乘积原理。

If event can occur in ways, and each possibility for allows for exactly ways for event , then the event “ and ” can occur in · ways.

形象理解乘法原理的一个好方法是把结果看作一棵树中的“层级”。为说明这一点，考虑例 3.2.1 中的计数问题：从 { , , , , } 中选取一个字母，随后从 {1, 2, 3} 中选取一个数字，一共有多少种方式？下面是一幅树形图，展示了其中的情况。



树的每个叶节点对应一个结果。该树表明，第二层的三个结果被重复了五次，对应第一层的每一个结果各一次。

例 3.2.8

有多少个以5个元音字母之一开头的两字母单词？这一次使用乘法原理来回答这个问题。

解答。我们如何将选择一个两字母单词理解为两个同时发生的事件序列呢？事件 是“选择作为单词开头的元音”。事件 是“为单词选择第二个字母”。根据乘法原理，事件“ 和 ”发生的方式共有$5 \cdot 26 = 130$ 种。

当然，例 3.2.6 和例 3.2.8 的解是相同的，但我们所组合的结果以及组合它们的方式是不同的。

在应用加法原理时，我们合并了五个互不相交的结果集合。其中一个这样的结果集合是，

$$\{AA, AB, AC, AD, \ldots, AZ\}$$

另一个是，

$$\{EA, EB, EC, ED, \ldots, EZ\}.$$

也就是说，每一组结果都是由两个字母组成的单词集合，且分别以不同的元音开头。加法原理将这五个集合合并，形成了一个新集合，其中包含与原有各集合完全相同的元素，只是把它们汇总到同一个集合中。

另一方面，当我们应用乘法原理时，我们将结果合并为两个集合。第一个集合是，

$$\{A, E, I, O, U\}$$

第二组是,

$$\{A, B, C, D, \ldots, Z\}.$$

乘法原理将这些集合中的元素组合起来，形成一组新的结果（这些结果不在任何被组合的集合中出现）。

与加法原理一样，我们经常使用乘法原理来定义那些首先需要仔细计数的结果集合。

例 3.2.9

从 (0, 0) 到 (10, 10) 有多少条格点路径经过点 (4, 7)？解答。我们可以用帕斯卡三角形来计算格点路径的数量，但如何确保路径经过某个特定的点呢？其实，任何经过 (4, 7) 的路径都必须先从 (0, 0) 走到 (4, 7)，然后再从 (4, 7) 完成到 (10, 10) 的旅程。

从(0, 0)到(4, 7)的路径数量是$\binom{11}{4} = 330$。

从 (4, 7) 到 (10, 10) 的路径数量是 $\binom{9}{3} = 84$。（这些路径的长度为 9，并且在 方向上有 6 步。）

现在将这些与...等等，什么原则结合起来？要从(0, 0)到(10, 10)经过(4, 7)，我们需要首先选择一条从(0, 0)到(4, 7)的路径，然后*add on*一条从(4, 7)到(10, 10)的路径。那么这是求和原则吗???

不！记住，加法原理是将两个结果集合合并在一起。如果我们应用加法原理，就会得到一个更大的集合，其中包含各个单独集合中所包含的那 330 + 84 条路径。这些都不是我们想要计数的路径。我们希望将结果集合中的不同元素以所有可能的组合方式进行组合。这就是为什么这里使用乘法原理才是正确的。

因此，我们要计算的路径总数是 $330 \cdot 84 = 27720$。

乘法原理同样可以推广到两个以上的事件。

示例 3.2.10

由三个字母后跟三个数字可以组成多少种车牌?

解答。这里有六个事件：第一个字母、第二个字母、第三个字母、第一个数字、第二个数字和第三个数字。前三个事件各有 26 种可能；后三个事件各有 10 种可能。因此，根据乘法原理，车牌的总数为 $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

这有道理吗？想一想我们如何挑选车牌号码。我们有多少选择？首先，我们需要挑选第一个字母。有26个选择。现在，对于每一个字母，都有26个选择。

第二个字母：以 A 为首字母时有 26 个第二个字母，以 B 为首字母时有 26 个第二个字母，依此类推。我们把 26 重复相加 26 次。或者更快地说：前两个字母共有 $26 \cdot 26$ 种选择。

现在，对于前两个字母的每一种选择，第三个字母都有 26 种选择。也就是说，以 AA 开头时第三个字母有 26 种选择，以 AB 开头时第三个字母也有 26 种选择，依此类推。这样的第三个字母选择共有 $26 \cdot 26$ 组，因此前三个字母一共有 $(26 \cdot 26) \cdot 26$种选择。而对于这 $26 \cdot 26 \cdot 26$种字母选择中的每一种，剩余的数字还有一大堆选择。

实际上，数字将有正好1000种选择。我们可以看到这一点，因为有1000个三位数（从000到999）。对于第一个数字有10种选择，第二个数字有10种选择，第三个数字也有10种选择。乘法原则告诉我们我们需要相乘：$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$。

总的来说，三个字母有 26^3 种选择，数字有 10^3 种选择，因此车牌共有 $26^3 \cdot 10^3$ 种选择。

前一个例子的答案使用了指数。那么是否有一个我们需要学习的指数原理呢？我们并不单独把它分出来，因为在我们构造结果集的思路上并没有什么不同。不过，我们经常会看到乘法原理应用于同一事件被重复多次的情况。下面是两个例子。

示例 3.2.11

假设你掷一个12面的骰子七次，记录每次掷出出现的数字。有多少种可能的七次掷骰序列？

解决方案。每次掷骰子可以产生12种不同的结果，因此根据乘法原理，总的序列数是12^7。

示例 3.2.12

你可以制作多少种不同的比萨，如果你可以从10种配料中选择，并且比萨上可以有任意数量的配料？

解法。如果我们想应用乘法原理，我们必须将选择比萨的复合事件看作是将一些个别事件按所有可能的组合方式结合的结果。这些事件是什么？这个问题有多个答案，但以下是最有用的。

首先，决定是否要在披萨上加凤尾鱼。这个事件可能导致两种结果（是或不是凤尾鱼）。接下来，决定是否要黑橄榄。然后是加拿大培根，再然后是切碎的番茄，依此类推。每个事件都有两种结果，我们必须将所有十个事件的结果结合起来。

将这些结果组合起来，形成与一份披萨对应的单一结果。因此，根据乘法原理，可能的披萨共有 2^{10} 种。

顺便一提，解决这个问题的另一种方法是将每个披萨“编码”为一个位串，其中 1 表示包含该配料，0 表示不包含。这样，披萨的数量就是长度为 10 的位串的数量。位串中的每一位都有两种可能取值，因此共有 2^{10} 个 10 位的位串。

注意：“and”并不意味着“乘以”。例如，有多少张扑克牌既是红色又是人头牌？不是 $26 \cdot 12$。答案是 6，而要回答这个问题我们需要了解一些关于扑克牌的知识。

例 3.2.13 计数函数。

有多少个函数 $: \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{\ ,\ ,\ ,\ \}$?

解答。记住，函数将定义域中的每一个元素恰好映射到陪域中的一个元素。要确定一个函数，我们只需要指定定义域中每个元素的像。我们可以把 1 送到哪里？有 4 种选择。我们可以把 2 送到哪里？同样有 4 种选择。这里共有 5 个“事件”（为定义域中的一个元素选择其像），每个事件都有 4 种可能（该像的选择）。因此共有 $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ 个函数。

这不仅仅是一个关于我们如何在某个特定计数问题中使用乘法原理的例子。这里我们给出的是对乘法原理某些应用的一种一般性解释，所使用的是严格定义的数学对象：函数。每当我们遇到一个计数问题，询问重复事件的结果数量时，我们都可以将其理解为：从 $\{1, 2, \ldots,\ \}$（其中 是事件重复的次数）到 $\{1, 2, \ldots,\ \}$（其中 是该事件可能发生的方式数）的函数的个数。

3.2.4 组合原则

让我们回到本节的 *Investigate!* 问题：从一副标准的52张扑克牌中，有多少种方式可以依次选取两张牌，使得第一张是红牌，第二张是人头牌？

这看起来有点像乘法原理，因为结果由成对的牌组成。第一个事件的结果有26张红牌，第二个事件的结果有12张面牌。然而，答案并不是 $26 \cdot 12$。问题在于，尽管选择第一张牌有26种方式，但并不是在 *for each* 的情况下，每一种都有12种方式来选择第二张牌。如果第一张牌既是红色又是面牌，那么第二张牌就只有11种选择。

在第3.3节中，我们将探讨一些在事件不是互斥时调整计数问题的方法，但如果我们小心的话，现在就可以解决我们的卡片问题。

考虑两张牌所有可能结果的全集。我们能否将这些结果划分为两个互不相交的集合（以便应用加法原理），并且每个集合都可以用乘法原理来构成?

在所有结果中，我们首先统计那些以一张红色的非人头牌开头的结果。26 张红牌中，有 6 张是人头牌，因此有 20 张红色的非人头牌。对于其中每一种，第二张牌可以从 12 张人头牌中选择。根据乘法原理，以一张红色的非人头牌开头的两张牌结果数为 $20 \cdot 12 = 240$。

现在，我们还没有计数哪些结果? 正是以红色人头牌开头的两张牌结果。我们可以作为第一张牌的有6张，而对每一种，第二张牌都有11种选择。因此，以红色人头牌开头的两张牌结果的数量是 $6 \cdot 11 = 66$。

最后，将加法原理应用于这两个互不相交的结果集合，可以看出两张牌结果的总数是 $240 + 66 = 306$。

我们以另外两个示例来结束本节，说明如何在同一个计数问题中同时使用加法原理和乘法原理。

例 3.2.14

从 $(0, 0)$ 到 $(9, 9)$ 的格路径中，有多少条经过 $(2, 6)$ 或 $(6, 2)$? 解答。我们很幸运，从 $(0, 0)$ 到 $(9, 9)$ 的路径中，没有任何一条同时经过 $(2, 6)$ 和 $(6, 2)$。这意味着我们可以对这两个结果集合应用加法原理：经过 $(2, 6)$ 的路径和经过 $(6, 2)$ 的路径。我们将对这两个互不相交的结果集合中的每一个，应用乘法原理来确定路径的数量。

经过 $(2, 6)$ 的从 $(0, 0)$ 到 $(9, 9)$ 的路径，每一条都是从 $(0, 0)$ 到 $(2, 6)$ 的路径与从 $(2, 6)$ 到 $(9, 9)$ 的路径的拼接。第一部分有 $\binom{8}{2} = 28$ 条路径，第二部分有 $\binom{10}{7} = 120$ 条路径，因此应用乘法原理可得 $28 \cdot 120 = 3360$ 条经过 $(2, 6)$ 的路径。

从 $(0, 0)$ 到 $(9, 9)$ 且经过 $(6, 2)$ 的路径同样可以计算为

$$\binom{8}{6} \cdot \binom{10}{3} = 28 \cdot 120 = 3360$$

(而经过反思，这两个数字相同并不令人惊讶，因为每一条经过 $(2, 6)$ 的路径都可以被反射，从而生成一条经过 $(6, 2)$ 的路径）。

因此，经过 $(2, 6)$ 或 $(6, 2)$ 的路径总数是 $3360 + 3360 = 6720$。

例 3.2.15

有多少个仅使用数字 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的两位数，其各位数字的 *sum* 为偶数？

解法。首先考虑结果集。一些两位数，其数字之和为偶数，包括11、13、15、22、24、31……好吧，也许把它们列出来并不那么难（这也是检查我们工作的好方法）。无论如何，我们还是试着使用加法和乘法原理。

关于所有这些数字，我们注意到了什么？看起来两个数字要么都必须是偶数，要么都必须是奇数，才能使它们的和为偶数。我们可以考虑这两种情况，并使用乘法原理分别对每种情况进行计数。

统计“奇-奇”数：第一位有三种选择，第二位也有三种选择。因此共有 $3 \cdot 3 = 9$ 个奇-奇数。

计算“偶偶”数字：第一个数字有两种选择，第二个数字也有两种选择。因此，存在 $2 \cdot 2 = 4$ 个偶偶数字。

合起来，共有9个+ 4个= 13个两位数，其各位数字之和为偶数。

3.2.5 阅读问题

1. 在计数问题中，当组合数字时，你将如何判断应该使用加法还是乘法？请解释你目前对此的思考方式。

2. 你的表亲正在尝试解决一个计数问题，关于他在宿舍和教室之间可以选择多少条不同的路线。他有9条合理的路线，同样地，从教室返回宿舍也有9条路线。

可能有多少次往返？你的表兄说是 18 次，因为从他的宿舍到教室之后，还必须再加上一条返回宿舍的路线。他说得对吗？为什么或为什么不？

3. 阅读本节后你有哪些问题？请至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

3.2.6 练习题

1. 你的衣橱里有 6 件衬衫，3 条裤子和 15 条蝴蝶结领带。你能搭配出多少种不同的服装？

2. 在你的大学面试中，你必须打领带。你拥有8条普通（无聊的）领带和3条（很酷的）领结。

a. 你的颈饰有多少种选择？

b. 你意识到这次面试是为小丑学院准备的，所以你可能应该同时佩戴一条普通领带和一条蝴蝶结领带。现在你有多少种选择？

c. 对于你剩下的服装，你有 2 件衬衫，7 条裙子，3 条裤子和 8 条连衣裙。你想选择一件衬衫搭配裙子或裤子，或者只穿一条连衣裙。你有多少种搭配可以选择?

3. 我们通常用十进制（或基数 10）来书写数字，这意味着数字是由 10 个不同的“数字”{0, 1, . . . , 9} 组成的。不过，有时用十六进制或基数 16 来书写数字也很有用。此时可以用来组成数字的不同数字共有 16 个：{0, 1, . . . , 9, A, B, C, D, E, F}。例如，一个三位的十六进制数可以是 2B8。

a. 有多少个三位十六进制数，其中第一个数字是E或F? b. 有多少个六位十六进制数以字母（A-F）开头并以数字（0-9）结尾? c. 有多少个四位十六进制数以字母（A-F）开头或以数字（0-9）结尾（或两者都符合）?

4. 设 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

a. 一共有多少个子集? b. 有多少个子集包含 {2, 3, 5} 作为其子集? c. 有多少个子集至少包含一个奇数? d. 有多少个子集恰好包含一个偶数?

5. 令 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}。

a. 基数为 4 的子集有多少个? b. 有多少个基数为 4 的子集以 > {2, 3, 5} 作为其子集? c. 有多少个基数为 4 的子集至少包含一个奇数? d. 有多少个基数为 4 的子集恰好包含一个偶数?

6. 设 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

(a) 有多少个子集?

（b） 的子集中恰好包含 5 个元素的有多少个? （c） 的子集中只包含偶数的有多少个? （d） 的子集中包含偶数个元素的有多少个?

7. 你打破存钱罐，发现里面有许多一分和五分的硬币。你开始把这些硬币排成每行4枚。

a. 你发现自己在摆放包含数量相同的便士和五分镍币的行。为了好玩，你决定把所有可能的这样的行都摆出来。如何

你需要多少枚硬币?

b. 你需要多少枚硬币才能组成所有可能的由4枚硬币构成的排列（不一定是等量的便士和镍币）?

8. 有多少个 11 位二进制字符串包含 4 个或更多的 1?

9. H 有多少个 {0, 1, . . . , 9} 的子集的基数为 7 或更多?

10. 从 (5, 5) 出发的最短格点路径有多少条，并且

a. 终点在 (12, 12)? b. 终点在 (12, 12)，并经过 (8, 9)? c. 终点在 (12, 12)，并避开 (8, 9)?

3.2.7 附加练习

1. 你的蓝光收藏包含9部喜剧片和7部恐怖片。给出一个问题示例，其答案是:

（a）16。（b）63。

2. 数字 735000 可分解为 $2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^2$。它有多少个因数? 请使用乘法原理解释你的答案。

3.3 非互斥结果

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 使用维恩图来计算非互不相交集合并集中的结果数量。 2. 对两个和三个集合应用容斥原理。 3. 解释为什么容斥原理有效。

3.3.1 本节预览

Investigate!

最近一项针对 *The Pie Hole* 的口碑营销活动调查了顾客对派的偏好。人们被问及是否喜欢 (A) 苹果派、(B) 蓝莓派或 (C) 樱桃派（受访者对每一种派都回答“是”或“否”，且可以对多种派回答“是”）。下表显示了调查结果。

Pies enjoyed:	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
Number of people:	20	13	26	9	15	7	5

在受访者中，有多少人至少喜欢一种派？另外，请解释为什么答案不是95
。

在第3.2节中，我们探讨了求和原理，作为将两个（或更多）*disjoint*结果集组合的一种方法。如果这些结果不是互不相交的，会发生什么？

需要采取不同的方法。例如，在统计既是人头牌或红牌的扑克牌数量时，我们不能应用加法原理来声称有 $12 + 26 = 38$ 张牌。问题恰恰在于有六张牌同时既是人头牌又是红牌。对此有几种不同的处理方法，我们将在本节中加以探讨。

活动预览

1. 考虑长度为 3 的八个比特串。让我们求出以 1 开头或权重为 2（即恰好包含两个 1）的字符串数量。

(a) 列出所有以 1 开头的 3 位比特串。 (b) 列出所有权重为 2 的 3 位比特串。

(c) 现在列出所有以 1 开头或权重为 2 的 3 位字符串。但要偷懒：不要从头开始列出。使用你在上面两个任务中的列表。

(d) 这些列表中有多少个字符串?

- 以1开头的字符串： ______
- 权重为2的字符串 ______
- 以1开头或权重为2的字符串： ______
- 同时以 1 *and* 开头的字符串的权重为 2： ______

2. 你是如何将上面的两个列表合并在一起的？解释你是如何做到的。然后再想一种你本可以使用的其他方法，并解释它会有什么不同。

3. Xiang 和 Omari 正在讨论他们在历史上最喜欢的数学家。Xiang 有一份包含 7 位最爱的名单，而 Omari 有一份包含 5 位的名单。他们发现两人有 3 位数学家是共同的。他们合并后的名单上共有多少位数学家?

3.3.2 使用维恩图计数

为了理解如何处理合并并非互不相交的结果集合，使用一些集合论中的记号会很有帮助，我们将在这里简要回顾这些记号。

令 为第一个事件的结果集， 为第二个事件的结果集。当我们询问任一事件发生的方式数时，新的结果集包含所有在 、 或两者中的结果。这无非是集合 和 的并集，表示为 ∪ 。

加法原则仅在没有任何结果属于两个事件时适用。集合 和 共有的元素是它们交集中的元素，记作 ∩ 。两个集合的交集本身是一个集合。如果集合 和 是不相交的，那么交集中的元素为 *no*，因此交集是空集，记作 $\emptyset$。

我们正在计算结果的*number*，所以我们真正感兴趣的是集合的大小（或基数）。我们将集合 的大小写作 | |。

有了这个符号，我们可以将求和原理重新表述如下。

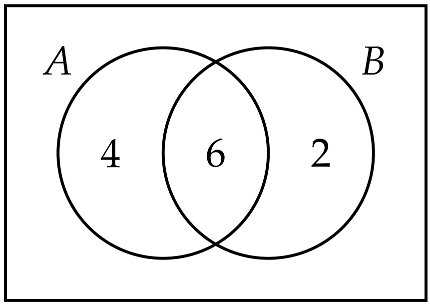
原则 3.3.1 和集的加法原则.

Given two sets and , if ∩ = $\emptyset$, then

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

现在考虑当集合不是不相交时，求和原则会发生什么。假设我们想找到 | ∪ |，并且知道 | | = 为 10，| | = 为 8。如果我们知道集合是互不相交的，那么 | ∪ | 将是 18。但如果我们不知道集合是互不相交的，我们需要更多的信息。我们必须知道这 8 个元素中有多少

在 中的也都是 的元素。假设我们还知道 | ∩ | = 6。现在我们可以准确地说明 中有多少个元素，以及其中有多少在 中、有多少不在（10 个元素中有 6 个在 中，因此有 4 个在 中但不在 中）。我们可以如下填写一个维恩图：



这表明在 ∩ 中有 6 个元素，在 中但不在 中有 4 个元素（我们可以写作 | \ | = 4），以及在 中但不在 中有 2 个元素（写作 | \ | = 2）。现在 *these* 三个集合 *are* 互不相交，因此我们可以使用加法原理来求 ∪ 中的元素个数。结果是 6 + 4 + 2 = 12。

例 3.3.2

有多少个汉明重量为 4 的 7 位二进制串以 11 开头或以 00 结尾，或两者兼有？

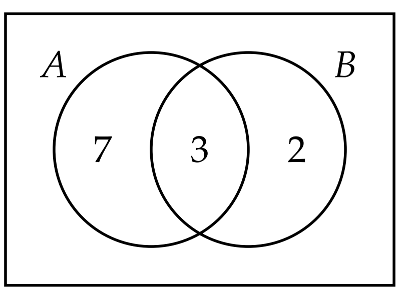
解。设 为以11开头、权重为4的7位字符串的集合。我们有 | | = $\binom{5}{2}$ = 10。
设 为以00结尾、权重为4的7位字符串的集合。我们有 | | = $\binom{5}{4}$ = 5。

但并不是真的| ∪ | = 10 + 5 = 15，因为像 1101100 这样的字符串既以 1 1 开头又以 00 结尾。它既被包含在以 11 开头的 10 个字符串中，也被包含在以 00 结尾的 5 个字符串中。我们必须找出同时属于 和 的字符串数量。我们有

$$|A \cap B| = \binom{3}{2} = 3$$

(的确，交集里有三个字符串：1111000、1110100 和 1101100)。

我们现在可以填写一个维恩图：



表示 的圆中一共有 10 个元素，其中有 3 个也属于

和另外7个只属于 的元素。 的圆圈包含总共5个元素，其中3个也属于 ，另外2个只属于 。 ∪ 中的元素数量是每个区域中元素数量的总和。

$$||A \cup B| = 7 + 3 + 2 = 12.$$

我们可以对三个集合做类似的操作。

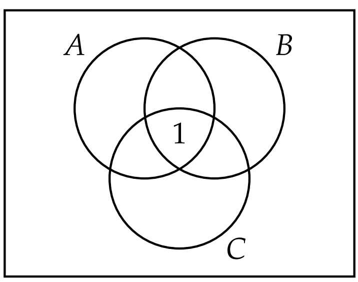
示例 3.3.3

一项涉及三门学科的考试，代数、生物学和化学，共有41名学生参加。下表显示了每个单一学科及其各种组合中有多少学生未通过：

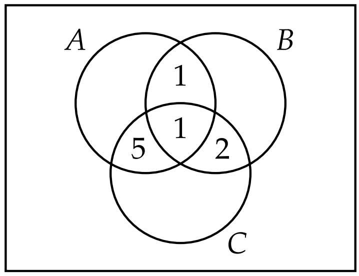
Subject:	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
Failed:	12	5	8	2	6	3	1

有多少学生至少一门科目不及格？

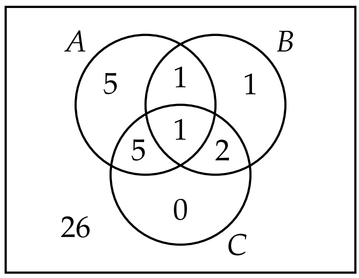
解答。答案不是37，尽管上面的数字之和是37。例如，虽然12名学生未通过代数课程，但其中2名学生也未通过生物学课程，6名学生未通过化学课程，其中1名学生三门课程都没通过。实际上，那名三门课程都没通过的学生在总共的37中被计数了7次。为了澄清这一点，我们可以将未通过代数课程的学生看作集合 的元素，生物学和化学课程同理，分别为集合 和集合 。那名三门课程都没通过的学生是集合 ∩ ∩ 的唯一元素。因此，在维恩图中：



现在让我们填入其他的交集。我们知道 ∩ 包含 2 个元素，但其中 1 个元素已经被计数过了。因此我们应在 与 相交（但不与 相交）的区域中填入 1。同样地，我们计算 (∩) \ 和 (∩) \ 的基数：



接下来，我们确定应该填写在剩余区域中的数字，包括所有三个圆之外的区域。最后这个数字是没有不及格任何科目的学生人数：



我们发现“ only”区域有5个学生，因为 的整个圆圈需要有12个学生，而其中7个学生已经被计算在内。同样，我们计算出“ only”区域只有1个学生，“ only”区域没有学生。

因此，至少有一门课不及格的学生人数为15人（每个不相交区域中数字的总和）。所有三门课都及格的学生人数为26人：总学生人数41人，减去至少有一门课不及格的15人。

注意我们也可以回答其他问题。例如，有多少学生只化学不及格？没有。有多少学生通过了代数但生物和化学都不及格？这对应于位于 和 的交集但在 之外的区域，其中包含 2 名学生。

这是一个有趣的数学事实。

$$12 + 5 + 8 - 2 - 6 - 3 + 1 = 15.$$

这是否巧合，以上例子中将每个科目挂掉的学生人数相加，恰好得到至少有一科挂掉的学生人数？这表明可能有一种更简单的方法来求解非不相交集合的并集的大小。

3.3.3 容斥原理

写一个代数公式来概括我们在前面的例子中所做的事情会很好。更好的是，这个代数公式应该是一个

are 不相交的情形的推广。

考虑再次举例，其中 $| \quad | = 10$, $| \quad | = 8$，且 $| \quad \cap \quad | = 6$。我们说过 $| \quad \cup \quad | = 12$，是通过加上 $4 + 6 + 2$ 得到的。

如果 和 是不相交的，那么 $| \quad \cup \quad |$ 将会是 $| \quad | + | \quad | = 10 + 8 = 18$。我们看到它恰好相差 6，而这正好是 $| \quad \cap \quad |$。所以也许我们猜想，

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

这就说得通了！当我们把集合 中的元素个数与集合 中的元素个数相加时，属于两个集合的那六个元素被恰好计算了两次。因此，如果把它们减去，我们就把它们恰好计算了一次。

换句话说，我们有：

定理 3.3.4 并集的基数（2个集合）。

For any finite sets and ,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

例 3.3.5

有多少个权重为4的7位比特串以11开头或以00结尾，或两者兼有？使用定理3.3.4，并与例3.3.2进行比较。

解答。我们有 $| \quad | = \binom{5}{2} = 10$, $| \quad | = \binom{5}{4} = 5$，以及 $| \quad \cap \quad | = \binom{3}{2} = 3$。因此：

$$|A \cup B| = 10 + 5 - 3 = 12.$$

这是合理的，因为那三个以 11 开头并以 00 结尾的比特串既被计入以 11 开头的 10 个串中，又被计入以 00 结尾的 5 个串中，因此在把它们减去之前，我们恰好对它们多计了一次。

对于三个集合，我们也可以通过仔细去除被多次计数的元素来计算并集中的元素数量。由于集合之间重叠的方式更多，公式也更加复杂。

定理 3.3.6 并集的基数（3 个集合）。

For any finite sets , , and ,

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| = {} & |A| + |B| + |C| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ & + |A \cap B \cap C| .\end{aligned}$$

为了确定至少有一个元素属于 、 或 ，我们将这些集合中的所有元素加起来。然而，当我们这么做时，任何同时属于

和 被计数了两次。此外，同时属于 和 的每个元素也被计数了两次， 和 中的元素亦然，因此我们将这些各自从我们的和中减去一次。但现在，那些位于 ∩ ∩ （同时属于三个集合）的元素怎么办？我们把它们加了三次，但也减了三次。它们尚未被计入。因此我们在最后把这些元素再加回来。

示例 3.3.7

在 $\{1, 2, \ldots, 50\}$ 中，有多少个数是 2、3 或 5 的倍数？

解答。在 $\{1, 2, \ldots, 50\}$ 这些数中，设 为 2 的倍数组成的集合， 为 3 的倍数组成的集合， 为 5 的倍数组成的集合。我们有 | | = 25，| | = 16，以及 | | = 10。（这些数可以通过除法得到；例如，由于大约三分之一的数是 3 的倍数，我们可以计算 50/3 = 16.66，因此该集合中有 16 个 3 的倍数。）集合中的一些数同时是 2 和 3 的倍数，例如 6、12、18、……，也就是所有 6 的倍数。这样的数有 | ∩ | = 8 个。同样地，同时是 2 和 5 的倍数（即 10 的倍数）的有 | ∩ | = 5 个，同时是 3 和 5 的倍数（即 15 的倍数）的有 | ∩ | = 3 个。三个条件都满足的数有 | ∩ ∩ | = 1 个（只有数字 30）。

利用定理 3.3.6，我们得到：

$$|A \cup B \cup C| = 25 + 16 + 10 - 8 - 5 - 3 + 1 = 36.$$

让我们用这个例子来更好地理解该定理。考虑数字21。它被计入哪些集合？它在 中，但不在 或 中，因此它被计入那16个3的倍数之中，而没有被计入任何其他集合，所以在我们的完整计数中它恰好被计入一次。对于所有只分别是2、3或5中某一个的倍数的其他数字也是如此。

数字18属于集合 和 ，因此也属于 ∩ 。它被计入2的25个倍数、3的16个倍数以及6的8个倍数中。因此在我们的总数中它被加了两次又减去了一次，这意味着它恰好被计数一次。对于恰好属于两个单独集合的所有数字，情况也是如此。

那 30 呢？它属于所有这些集合。因此，当我们把 2、3 和 5 的倍数相加时，它被加入到总数中三次。但它也被减去了三次——对应每一对集合各一次。所以在我们的总数中它一开始根本没有被计入……直到最后一步我们再把它加回来，此时它恰好被计算了一次。

这种先加上、再减去、再加回去、如此反复的过程称为容斥原理（Principle of Inclusion/Exclusion），简称 PIE。这个原理可以应用于任意数量的集合，但集合越多，公式就会变得越复杂。例如，下面就是四个集合情况下的 PIE 形式。

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D|$$

$$-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|$$
$$+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|$$
$$-|A\cap B\cap C\cap D|\,.$$

呼！至于五个集合嘛... 开个玩笑。但即使我们不写下来，希望我们都能看到你 *would* 必须写下的内容。实际上，当我们能够通过识别一些简化计算的方法时，例如，两个集合的所有交集都具有相同的大小时，PIE通常只在三个集合以上使用。此类示例将在第3.8节中探讨。

3.3.4 重叠与乘积原理

到目前为止，我们在本节中讨论的内容都涉及到当结果集不互斥时，求和原理如何应用。我们在应用乘积原理时，是否也需要担心重叠情况?

不完全是。

产品原则的一种应用是计算概率，在这个上下文中，我们确实区分事件是独立的还是相关的。我们将在第3.7节进一步探讨这一点。本质上，要计算两个事件发生的概率，我们可以将它们各自的概率相乘，当且仅当这两个事件是*independent*时：即一个事件的结果不会影响另一个事件的结果。

在计算概率时，尽管与结果计数密切相关，但乘法原理本身并不要求结果集是互斥的，也不区分依赖事件和独立事件。*does* 重要的是第二个事件的结果数不受第一个事件结果的影响。

我们在应用乘法原则时，*do* 经常做出的一种区分是事件的结果是否可以“重复”。考虑以下示例。

例子 3.3.8

有多少个3个字母的单词（由三个字母组成的序列），当，

1. 是否允许重复？ 2. 是否
不允许重复?

解法。根据乘法原理，我们将三个事件结合起来： 是选择第一个字母的事件， 是选择第二个字母的事件， 是选择第三个字母的事件。如果我们要计算单词中字母可以重复时的单词数量，那么每个事件包含26种结果。因此，允许重复时，三个字母的单词数是 $26^3 = 17,576$。

当不允许重复时，事件 的结果数仍然是26，但事件 的结果数只有25，因为无论事件 的结果是什么，该字母都不能被选择作为第二位置的字母。

这个词。同样，无论事件 和 的结果如何，事件 的结果数始终为24：即在前两个事件中未被选择的任何字母。因此，包含无重复字母的3个字母词的数量为$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15,600$。

事件 的实际结果集合会因事件 的每一种可能结果而不同，这有点奇怪。不过这并不重要，只要结果集合的 *size* 不发生变化即可。

我们将在下一节 3.4 中更深入地探讨诸如前面例子那样的问题。不过在此之前，这里给出一个乘法原理并不容易适用的最后一个例子。

例 3.3.9

解释为什么乘法原理不适用于以下计数问题：有多少个字母按字母顺序排列的三字母单词？

解答。我们首先可能尝试将事件 设为选择第一个字母， 设为选择第二个字母， 设为选择第三个字母。事件 有26种结果。事件 有多少种结果呢？如果我们选择 作为第一个字母，那么第二个字母可以从集合$\{ , , , \}$中选择，因此看起来事件 有4种结果。然而，如果我们选择 作为第一个字母，那么任何字母都可以作为第二个字母，因此事件 有26种结果。糟糕！

问题在于，单词中第二个（以及第三个）字母的结果数量会根据前一个事件的结果而变化。这些事件不是独立的，而且不仅如此，它们的 *size* 也不是独立的，因此乘法原理不适用。

我们将在第 3.5 节中看到，在字母可以重复的情况下，如何回答上述计数问题。如果我们进一步限制问题，要求字母必须互不相同（并且按字母顺序排列），那么我们已经知道如何回答这个问题了。因为对于任意一个由三个字母组成的 *set*，恰好只有一个由这三个字母按字母顺序排列而成的三字母单词，所以我们只需计算由三个字母构成的集合的数量即可。这就是 $\binom{26}{3}$。然后我们只要查看帕斯卡三角形来找到这个值……哎呀。我们的三角形并没有延伸到那么远。我想我们应该想个不用三角形来计算这个值的方法。继续往下读吧！

3.3.5 阅读问题

1. 以下哪一项最能描述容斥原理的用途？

A. 计算两个或多个不一定互不相交的集合的并集大小。 B. 计算两个或多个集合的并集大小，只要它们是

不相交。C. 计算两个或多个独立结果集合交集的大小。D. 求相互依赖的结果集合交集的大小。

2. 为什么容斥原理*add*三个集合交集的大小，而不是减去？请用你自己的话解释。 3. 阅读本节之后你有什么问题？至少写一个你对本节内容感到好奇的问题。

3.3.6 练习题

1. 假设你有集合 和 ，其中 | = 9 且 | | = 19。

(a) | ∩ | 的最大可能值是多少?

(b) | ∩ | 的最小可能值是多少?

(c) | ∪ | 的可能取值是什么?

2. 如果 | | = 5 且 | | = 2，那么 | ∪ | + | ∩ | 是多少?

3. 一组大学生被问及他们的电视观看习惯。在调查的学生中，30个学生观看*The Walking Dead*，24个观看*The Blacklist*，28个观看*Game of Thrones*。此外，18个学生观看*The Walking Dead*和*The Blacklist*，10个观看*The Walking Dead*和*Game of Thrones*，12个观看*TheBlacklist*和*Game of Thrones*。有7个学生观看了所有三个节目。调查中至少观看了其中一档节目的学生有多少人? 4. 在最近的一项调查中，100名学生报告了他们是否喜欢土豆泥、炸薯条或双倍烤土豆。54个学生喜欢土豆泥，39个喜欢炸薯条，51个喜欢双倍烤土豆。此外，18个学生喜欢土豆泥和炸薯条，28个喜欢炸薯条和双倍烤土豆，29个喜欢土豆泥和烤土豆，11个喜欢三种风格的土豆。多少学生*hate*土豆？解释为什么你的答案是正确的。

5. 有多少个 13 位串（即长度为 13 的比特串）满足:

a. 以子串 011 开头？ b. 具有重量 8（即恰好包含 8 个 1）并以子串 011 开头？ c. 要么以 011 开头，要么以 01 结尾（或两者皆是）？ d. 具有重量 8，且要么以 011 开头，要么以 01 结尾（或两者皆是）？

6. 在 {1, 2, . . . , 715} 中，有多少个 ∈ {1, 2, . . . , 715} 使得 是 4、3 或 5 中一个或多个的倍数?

7. 小于1400的正整数中，有多少个是4、7或9的倍数？使用容斥原理。

8. 我们想要只使用字母表的前 = 12 个字母来构造由 13 个字母组成的“词”。例如，如果 = 5，我们可以使用前 5 个字母，{ ， ， ， ， }。（回顾一下，“词”只是字母串，不一定是真正的英语单词。）

a. 这些词一共有多少个?

b. 这些单词中有多少个不包含重复字母?

c. 这些单词中有多少个以子词“ade”开头?

d. 这些单词中有多少个既以“ade”开头，又以“be”结尾，或者两者都有？ e. 包含没有重复字母的单词中，有多少个不包含子词“bed”？

9. 美国Gridtown镇除了拥有一流的甜甜圈店外，还以其精确规划的网格状街道和大道而闻名。街道东西走向，大道南北走向，贯穿全镇，既不弯曲，也从不被公园、学校或类似设施所打断。

假设你住在第 4 街和第 4 街的拐角处，在第 19 街和第 19 街的拐角处工作。因此，为了尽快到达工作地点，你必须行走 30 个街区。

a. 假设你想以最快的方式到达工作地点，你可以走多少条不同的路线？ a. 现在假设你想在上班途中停下来买一个甜甜圈，在第18大道与第16街拐角处你最喜欢的甜甜圈店。停在这家甜甜圈店并前往工作的路线有多少条（同样要确保是最短路线）？ a. 灾难降临格里德镇：在第7大道第6街与第7街之间有一个坑洞。为了避开这段难看（而且危险）的路段，你可以走多少条上班路线？ a. 坑洞已经修好了（呼！），并且在第7大道与第6街的拐角处新开了一家甜甜圈店。开车经过其中一家或两家甜甜圈店的上班路线有多少条？ 提示：甜甜圈店供应PIE。

3.3.7 补充练习

1. 设 、 和 为集合。

(a) 求 |(∪) \ |，已知 | | = 50，| | = 45，| | = 40，| ∩ | = 20，| ∩ | = 15，| ∩ | = 23，以及 | ∩ ∩ | = 12。

(b) 用 、 和 来描述一个基数为26的集合。

2. 有多少三位数（100 到 999）的 *sum of the digits* 是偶数？（例如，343 的各位数字之和是偶数：$3 + 4 + 3 = 10$，这是偶数。）求出答案并用至少两种 *different* 方式解释为什么它是正确的。

3.4 组合与排列

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 正确判断在解决计数问题时应使用组合还是排列。

2. 应用正确的组合或排列来解决计数问题。

3. 解释组合与排列之间的关系，以及它们的公式为何是正确的。

3.4.1 本节预览

Investigate!

你决定用不同颜色的胶带条装饰你的魔杖。你有 10 种不同的颜色可以选择，你将使用其中的五种颜色来创造五条不同的彩色条纹。可能的魔杖设计有多少种?

乘法原理为我们提供了一种在每个结果由较小部分组合而成时计数结果数量的方法。一个典型的例子是计算由三个字母组成的“单词”的数量；我们计数的每一个结果（单词）都是由三个更小的部分（字母）组合而成。由于每个较小的部分都有 26 种选择，因此可能的结果有 $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3$ 种。

乘法原理并不要求被组合的每一部分都必须从大小相同的集合中选取。我们将利用这一观察，建立一种标准方法来计数这样一些结果：各个部分都从一个固定集合中选取，但不允许任何一个部分被使用超过一次。例如，我们可以问：由互不相同的字母组成的 3 个字母的单词有多少个。

这些排列被称为置换。我们还将考虑另一种计数技术，即计数组合，它与置换相关，但所计数的对象不同。我们将探讨这两种计数技术之间的关系，以及它们如何用于解决广泛的计数问题。

活动预览

你有一堆扑克牌筹码，分别有五种不同的颜色：红色、蓝色、绿色、紫色和黄色。

1. 底部芯片必须是红色或蓝色的情况下，可能的两芯片堆叠数量是多少？

(a) 列出所有可能的两芯堆叠。例如，底部是红色芯片、顶部是绿色芯片的堆叠可以列为“RG”。 (b) 使用加法原则，我们注意到有些堆叠底部是蓝色的，另一些堆叠底部是红色的，因此总共有可能的堆叠。 (c) 如果我们使用乘法原则，那么底部芯片有{v*}种选择，顶部芯片有{v*}种选择，因此总共有{v*}种堆叠。

2. 如果底部的筹码必须是红色或蓝色，顶部的筹码必须是绿色、紫色或黄色，那么可能有多少种不同的三芯筹码堆叠方式？

提示。这个问题与前一个问题有什么关系？我们可以对这10个两芯片堆做些什么，将它们变成三芯片堆吗？

3. 有多少种不同的三芯片堆叠，其中没有颜色重复？

(a) 首先，底部是蓝色且中间是绿色的无重复颜色的三芯堆叠有多少种？底部是蓝色且中间是黄色的无重复颜色的三芯堆叠有多少种？事实上，对于任何底部是蓝色且中间是其他颜色的堆叠，都有可能的堆叠。 (b) 如果我们坚持底部是蓝色，中间芯片的颜色有多少种选择？将此与前一个问题的答案结合起来，底部是蓝色的无重复颜色的三芯堆叠有多少种？ (c) 当然，我们不必从底部是蓝色开始。底部芯片的颜色有多少种选择？那么，无重复颜色的三芯堆叠一共有多少种？

(d) 有多少种没有重复颜色的四芯棒？

假设你想拿三颗不同颜色的筹码并把它们放进你的口袋里。

(a) 一种结果是拿取蓝色、绿色和紫色的筹码。多少种不同颜色的三颗筹码堆与这个单一的口袋对应？

提示。使用这三种颜色，你有多少种选择来决定哪块芯片在底部？中间？顶部？

(b) 拿起红色、黄色和绿色筹码会得到多少种不同的筹码堆叠？(c) 因此，在所有可能的三枚筹码堆中，我们可以把筹码分成大小为 的若干组，其中每一组对应于同一把口袋里的筹码。有多少种不同的口袋筹码？(d) 如果你拿四枚筹码，有多少种不同的口袋筹码？

3.4.2 计数序列

排列是对对象的一种（可能的）重新排列。例如，字母 a, b, c 有 6 种排列：

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

在我们的离散结构中，每个排列实际上是一个固定长度的 *sequence* 或 *tuple*。

我们知道我们已经在上面列出了它们——第一个放哪个字母有 3 种选择，然后下一个字母有 2 种选择，最后一个字母只剩 1 种选择。乘法原理告诉我们要将 $3 \cdot 2 \cdot 1$ 相乘。

示例 3.4.1

有多少种字母 a, b, c, d, e, f 的排列（置换）方式？解答。我们不想尝试列出所有这些字母的长度为6的排列。然而，如果我们真的这么做，我们需要先选择一个字母来写。这个字母有6种选择。对于每个第一个字母的选择，第二个字母有5种选择（因为不能重复第一个字母；我们在重新排列字母，每个字母只有一个），接着每种选择都有4种第三个字母的选择，3种第四个字母的选择，2种第五个字母的选择，最后只有1种选择来选择最后一个字母。所以共有$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$种字母排列方式。

这里有一种有用的记号： !，读作“ 的阶乘”，是所有小于或等于 的正整数的乘积（为方便起见，我们也定义 0! 等于 1）。因此，如前一例所示，6 个字母的排列数是 $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$。这可以推广为：

定理 3.4.2 个元素的排列。

There are $! = \cdot (- 1) \cdot (- 2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ *permutations of (distinct) elements.*

示例 3.4.3 计数双射函数.

有多少个函数 $: \{1, 2, \ldots, 8\} \to \{1, 2, \ldots, 8\}$ 是 *bijective*?

解答。回忆一下函数是双射意味着什么：陪域中的每一个元素都必须恰好是定义域中一个元素的像。使用两行表示法，我们可以将其中一个双射写成

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 7 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

我们真正做的只是重新排列值域的元素，因此我们正在创建一个8个元素的排列。事实上，“排列”是用来描述从有限集合到自身的双射函数的另一个术语。

如果你相信这一点，那么你会看到答案必须是 $8! = 8 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 1 = 40320$。你也可以直接看到这一点：对于定义域中的每一个元素，我们必须选择一个不同的值域元素进行映射。发送 1 的位置有 8 种选择，发送 2 的位置有 7 种选择，依此类推。我们使用乘法原理进行相乘。

有时我们并不想对给定的所有字母/数字/元素进行排列。

例 3.4.4

从字母 a 到 g 可以组成多少个不含重复字母的四字母“单词”？

解法。这个问题就像是排列四个字母的问题，只不过现在每个字母有更多的选择。对于第一个字母，有7个选择。对于每一个选择，第二个字母有6个选择。接着第三个字母有5个选择，最后一个字母有4个选择。总的单词数是$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$。

这不是7!，因为我们从未乘以3、2或1。不过，如果我们取消3、2和1，我们可以用7!来表示。这样，我们可以将答案写为

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4.$$

通常，我们可以问，从一个包含 个物体的集合中选择 个物体，有多少种排列方式。（在上面的例子中， = 4， = 7。）我们用 (,) 来表示这个数字，有时称其为 -排列。

从上面的例子中，我们可以看到，要计算 (,)，我们必须将乘法原则应用于 个数字，从 开始并向后计数。例如

$$P(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7.$$

注意到 (10, 4) 开始看起来像 10!，但我们在 7 后停止。我们可以通过除去不需要的阶乘部分来正式解释这种“停止”：

$$P(10,4) = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10!}{6!}.$$

小心：分母中的阶乘不是 4!，而是 (10 − 4)!。

定义 3.4.5 -排列的 元素。

(,) 是 个元素的 -排列的数量，即从 个不同的物体中选择 个物体的方式数。

定理 3.4.6

The number of -permutations of elements is

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)).$$

请注意，当 = 时，我们有 (,) = $\frac{n!}{(n-n)!}$ = !（因为我们定义 0! 为 1）。这是有道理的——我们已经知道 ! 给出了所有 个对象的排列数。

例子 3.4.7 计算单射函数的个数。

有多少个函数 : {1, 2, 3} → {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} 是 *injective*?

解答。注意，在这里询问 *bijections* 的数量是没有意义的，因为一个也没有（因为陪域大于定义域，不存在满射）。但要使一个函数是单射，我们只是不允许多次使用陪域中的同一个元素。

我们需要从陪域中选择一个元素作为 1 的像。有 8 种选择。然后需要从剩余的 7 个元素中选择一个作为 2 的像。最后，剩余的 6 个元素中的一个必须作为 3 的像。因此，函数的总数是 8 · 7 · 6= (8, 3)。

这在一般情况下表明：当 | | = 且 | | = 时，单射 : → 的数量为 (,)。

3.4.3 计数集合

让我们考虑另一种对序列进行计数的方法：先计数集合，然后排列它们。

示例 3.4.8

你的篮球队有12名球员。假设每个人都可以打任何位置，有多少种方式可以选择5名球员同时在场上?

解决方案。这个问题实际上太模糊了。我们是指有多少种方法可以选择五名球员吗？还是指有多少种方法可以选择五名球员来填补五个位置？[2] 让我们回答这两个问题。

首先，如果我们只想从12名球员中选择5名，这就像是从12种比萨配料中挑选5种（尽管不那么美味）。我们知道有$\binom{12}{5}$种方法可以做到这一点，根据帕斯卡三角形，我们知道这是792。

另一方面，如果我们想为五个不同的位置挑选五名球员……嗯，我们可以先从 792 种不同的五人组合 *sets* 中选取一种，然后将他们排列到这五个位置上。对于场上的五名球员，我们从中选出一人担任控球后卫，再从剩下的四人中选出一人担任得分后卫，依此类推。这样一来，安排球员的方式共有 5 · 4 · 3 · 2 · 1= = 5! 种。因此，为五个位置挑选五名球员的总方式数是

$$\binom{12}{5} \cdot 5! = 792 \cdot 120 = 95,040.$$

等等。我们本来可以直接找到那个数字的。没有先选择五个球员，我们有12个选择来选控球后卫，然后是11个选择来选得分后卫，依此类推。因此，选出五个球员来填补五个位置的总方式数就是排列数 {v*}。

$$P(12, 5) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95,040.$$

谢天谢地，答案是一样的！

上面的例子说明了计算由 个元素构成的 -排列数的第二种方法：先选择哪些个元素将出现在排列中，然后计算对它们进行排列有多少种方式。一旦你选定了这 个对象的集合，我们知道对它们进行排列（置换）有 ！种方式。但你如何从这个对象中选出 个呢？你有 个对象，并且需要从中 *choose* 个。你可以通过 (^{n} 来做到这一点。
) 方式。

使用乘法原理将这两个步骤结合起来，我们得到 (,) 的另一个公式：

$$P(n, k) = \binom{n}{k} \cdot k!.$$

[2]I'm told the five positions are called point guard, shooting guard, small forward, power forward, and center. Who knew?

这太巨大了！

我们已经有 (,) 的闭式公式。我们可以将其代入：

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!.$$

如果我们随后将等式两边除以 !，就得到$\binom{n}{k}$的一个闭式公式。

定理 3.4.9 $\binom{n}{k}$ 的封闭式公式。

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}.$$

对 $\binom{n}{k}$ 所计数的事物集合的另一种称呼是组合。我们说 $\binom{n}{k}$ 计算从 个元素中选取 个元素的组合数。有时我们甚至用记号 (,) 来代替 $\binom{n}{k}$。

显然，组合和排列是密切相关的。计数每个的公式非常相似；只是 $\binom{n}{k}$ 的分母中多了一个 !。这个额外的 ! 解释了 $\binom{n}{k}$ 不区分 个物体出现的不同顺序。我们只是选择（或挑选）这 个物体，而不是排列它们。

例 3.4.10

你决定举办一次晚宴。尽管你非常受欢迎，拥有14位不同的朋友，但你只有足够的椅子可以邀请其中的6位。

1. 你有多少种选择来决定邀请哪 6 位朋友？

2. 如果你不仅需要决定邀请哪些朋友，还需要决定在你的长桌旁如何为他们安排座位，那么你有多少种选择？

解答。

1. 你只需从14人的群体中选择6位朋友。这可以用 $\binom{14}{6}$ 种方式完成。我们可以通过使用帕斯卡三角形或闭式公式来找到这个数：$\frac{14!}{8!\cdot 6!} = 3003$。

2. 这里你必须计算从14人中选出6位朋友进行排列的所有方式。因此答案是 (14, 6)，其可以计算为 $\frac{14!}{8!} = 2162160$。

注意到我们可以把这个计数问题看作一个关于计数函数的问题：从由 6 把椅子组成的集合到由 14 位朋友组成的集合，有多少个单射函数（这些函数是单射的，因为你不能让一把椅子对应到你的两位朋友）。

这些数字之间是如何关联的？注意， $(14, 6)$ 比 $\binom{14}{6}$ 大 *much*。这是有道理的。$\binom{14}{6}$ 只是选出 6 位朋友，而 $(14, 6)$ 不仅选出这 6 位朋友，还对他们进行排列。事实上，我们可以准确地说明 $(14, 6)$ 大多少。在这两个计数问题中，我们都是从 14 位朋友中选出 6 位。对于第一个问题，我们到此为止，共有 3003 种方式。但对于第二个计数问题，这 3003 种选出 6 位朋友的方式中的每一种，都可以恰好以 6! 种方式进行排列。因此现在我们有 $3003 \cdot 6!$ 种选择，这正好等于 2162160。

或者，从另一个角度来看第一个问题。我们想从14位朋友中选出6位，但并不关心选取的顺序。要从14位朋友中选出6位，我们可以这样做：

$$14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9.$$

这是一个合理的猜测，因为第一个客人有 14 种选择，第二个有 13 种，依此类推。但这个猜测是错误的（事实上，该乘积正好是 $2162160 = (14, 6)$）。它区分了我们邀请客人的不同顺序。为纠正这一点，我们可以除以 6 位客人的不同排列数（这样这些都会只算作一种结果）。安排 6 位客人恰好有 6! 种方式，因此第一个问题的正确答案是

$$\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{6!}.$$

注意，另一种写法是

$$\frac{14!}{8! \cdot 6!}.$$

这正是我们最初拥有的。

也许“组合”这个称呼具有误导性。我们并不是指像组合锁那样的组合（在那里顺序显然至关重要）。或许更好的隐喻是风味的组合——你只需要决定要组合哪些风味，而不是以什么顺序去组合它们。

那你怎么知道？ 什么时候使用组合，什么时候使用排列 tTranslation Text:

顺序重要吗？几乎你查阅的每一个关于组合与排列的资料都会对下面的论断作出某种变体表述。

当顺序重要时使用排列，当顺序不重要时使用组合。

这到底是什么意思？为什么说这是区分这两种计数技术的一种极其糟糕的方法？让我们通过一个例子来探讨。

假设你正在提议一种新的彩票游戏。在这个游戏中，五个编号的球将从一个包含编号为1到50的球的机器中随机射出。如果

如果玩家正确选中了开出的五个号码，他们就赢得头奖。

当然，我们想知道赢得这种彩票游戏的概率，这就要求我们知道有多少种不同的结果。球会随机地从机器中飞出来，因此一种结果可能是得到这些球

$$26, 5, 42, 17, 33.$$

如果你手里拿着一张号码为5、17、26、33、47的彩票，你会认为自己中奖了吗？大多数彩票游戏都会认为你中了，因为你拥有相同的号码，只是顺序不同。

在这个意义上，数字的*order*并不重要。更好的说法是，相同数字的*any*顺序被视为同一个结果，并且只计算一次。因此，实际上我们是在计算五个数字的*sets*，而不是五个数字的*sequences*。每个结果都是一个组合，因此结果的数量应该是 (52, 5) = $\binom{52}{5}$.

另一方面，如果我们必须按照机器给出数字的顺序来选择，那么实际上是在将一个数字序列与另一个数字序列进行匹配。序列的数量是 (52, 5)。在这种情况下，我们会说顺序是重要的。

好的，到目前为止一切顺利。但下面的例子怎么样呢？

例 3.4.11

在其中有多少个三字母“单词”

1. 字母是否按字母顺序排列？ 2. 单词中的字母可以以任意顺序出现吗？

解答。第一个问题中，“顺序重要吗”？从某种意义上讲，绝对重要！我们只想计算字母按正确顺序排列的单词。但是从标准的组合/排列的角度来看，顺序并不重要。

更好的做法是问问自己，是否应该将每个结果表示为字母的集合还是字母的序列。确实，单词是字母的序列，但我们是在计数所有可能的序列吗？不是的，我们只为每一组字母计一个序列。啊，对，字母的集合。每个结果都恰好对应一个由三个字母组成的集合。我们是在计数集合，因此我们计数组合。结果的数量是 (26, 3) = $\binom{26}{3}$.

对于第二个问题，看起来顺序似乎不重要。嗯，对吐出字母的机器来说顺序无关紧要，但如果我们要去匹配这些字母，顺序就很重要。不，换个角度这样想：我们是在统计每一种可能的字母序列吗？是的！所以这是排列，结果的数量是 (26, 3)。

在对比特串进行计数时，还会出现另一种具有迷惑性的次序用法。回顾一下，权重为 的 位比特串是由 个比特（0 和 1）组成的串，其中有 个比特为1。

例如，权重为 2 的 4 位字符串有

$$1100,\ 1010,\ 1001,\ 0110,\ 0101,\ 0011.$$

比特串的顺序重要吗？当然重要！这是唯一重要的因素。上面的所有字符串都包含完全相同数量的 0 和 1；它们仅由比特的顺序来区分。

然而，权重为 的 位字符串的数量是 $\binom{n}{k}$，而并非一个排列。这是怎么回事？

没有什么是坏的；我们只是在没有考虑正确的对象来考虑顺序。当我们 *choose* 从 个事物中选出 个时，实际上是在选择 *positions*（例如，填充 1）。我们选择这些位置的顺序无关紧要，重要的是我们选择的是哪些位置。也就是说，位串 1001 是选择位置 1 和 4 来放置 1 的结果。如果我们选择位置 4 然后是 1，我们仍然会得到相同的位串。

总结来说，顺序是否重要的问题在决定组合和排列之间时可能会引导我们走错方向。相反，我们应该决定我们所计算的结果是集合还是序列。如果我们在计算集合，考虑组合。如果我们在计算序列，考虑排列。

3.4.4 商原则

我们有两种方式来表示组合数和排列数之间的数字关系。使用乘法原理，我们有，

$$P(n,k) = \binom{n}{k} \cdot k!$$

可以重写为，

$$\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!}.$$

这个第二个公式表明，可能存在一个 *quotient principle*，我们可以用它来为此辩解。

让我们思考一下除法是什么意思。举例来说，可以将除法问题 24 ÷ 6 = 4 理解为：如果你有 24 个东西，按每组 6 个进行分组，那么组数将是 4.[3]

现在让我们来看一个大小为 4 的集合的所有 3-排列：例如，使用字母 、 、 、 组成所有 3 个字母的单词的方式。我们知道这样的单词数量是 (4, 3) = 4 · 3 · 2= 24。把它们全部列出来会很有帮助。

$$\begin{array}{cccccc}
abc & acb & bac & bca & cab & cba \\
abd & adb & bad & bda & dab & dba \\
acd & adc & cad & cda & dac & dca \\
bcd & bdc & cbd & cdb & dbc & dcb
\end{array}$$

[3]The other way to interpret this statement is that if you divide 24 things into six groups, then each group will have size 4, but this is less useful for what we will do.

看看第一行。这些排列有什么共同点？它们正是使用字母 、 、 以不同顺序排列的所有排列。因此它们有6个并不奇怪，因为排列三个元素的方式数是$3! = 6$。同样地，第二行有6个使用字母 、 、 以不同顺序排列的排列，依此类推。

重点是，如果我们只想计算四个字母中的三个字母有多少个 *sets*，那么每个集合都正好对应表格中的一行。表格中有24个元素，每行有6个元素，所以必须有 $24 \div 6 = 4$ 行。当然，我们并不感到惊讶，因为 $\binom{4}{3} = 4$。

对这一现象更为严格的数学解释是使用第 2.6 节中的等价关系与划分的语言。我们从排列开始，然后在排列上定义一个 *equivalence relation*，规定只要两个排列包含完全相同的元素，它们就是等价的。由该等价关系，我们得到一个将排列集合划分为 *equivalence classes* 的 *partition*。我们要计数的组合恰好就是这些等价类。由于每个等价类的大小都相同，我们可以通过用排列的总数除以每个等价类的大小来得到等价类的数量。

这种商原则对于解决那些答案并非显然属于排列或组合的问题也很有用。

例子 3.4.12

你决定用不同颜色的胶带条装饰你的魔杖。你有 10 种不同的颜色可以选择，你将使用其中的五种颜色来创造五条不同的彩色条纹。可能的魔杖设计有多少种？

解答。我们解决这个问题的第一次尝试，可能是把我们要计数的每一种结果看作从 10 种颜色中取出的一个 5 排列。这样会得到答案 $(10, 5) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30,240$。那么为什么这并不正确呢？让我们开始列出所有可能的结果。

1. 红色，蓝色，绿色，黄色，橙色。
2. 红色，蓝色，绿色，黄色，紫色。
3. 蓝色，绿色，红色，黄色，橙色。
4. 橙色，黄色，绿色，蓝色，红色。
5. 等等。

在开始这个列表时，也许我们曾问自己，红、红、蓝、蓝、红是否应该列入其中，并意识到它不应该。我们可能还考虑过，项目 1 和 3 是否真的不同。它们是不同的，因为一根魔杖的外部颜色是红色，而另一根不是。

但是第1项和第4项怎么样呢？它们有相同的五种颜色，但顺序不同。然而，如果你像魔术师那样转动魔法棒，你就很容易从魔法棒1得到魔法棒4。啊哈！我们看到，在我们的排列列表中，每根魔法棒恰好被计算了两次：如果它们只是彼此的*reverse*，那么这两个排列是等价的。

由于我们可以将这些排列分成大小为 2 的组，并且每一组对应一根魔杖，我们可以看出正确答案是，

$$\frac{P(10,5)}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 15,120.$$

当当！

3.4.5 阅读问题

1. 判断正误：由 0–9 中两个不同数字组成的序列数量是由 0–9 中两个不同数字组成的集合数量的 *twice*。简要说明。 2. 判断正误：由 0–9 中三个不同数字组成的序列数量是由 0–9 中三个不同数字组成的集合数量的 *3 times*。简要说明。 3. 阅读本节后你有什么问题？至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

3.4.6 练习题

1. 一家披萨店提供 8 种配料。

   a. 他们的菜单上可以有多少种两种配料的披萨？假设不允许重复配料。 b. 在允许零到 8 种配料（但不允许重复配料）的情况下，总共可以有多少种披萨？ c. 披萨店将在菜单上把这 8 种配料列成两个大小相等的列。左侧一列的配料有多少种排列方式？

2. 一个组合锁由一个带有 41 个数字的刻度盘组成。要打开这把锁，你先向右转动刻度盘直到到达第一个数字，然后向左转到第二个数字，再向右转到第三个数字。这些数字必须彼此不同。共有多少种不同的组合？

3. 使用数字2到9，求满足以下条件的不同的7位数的个数：

   a. 数字可以重复使用。 b. 数字不能重复，但可以以任意顺序排列。

c. 数字不能重复，且必须按递增顺序书写。

4. 为了整理你的房间，你购买了一个新的浮动书架，用来放置你堆放在角落里的30本书。这些书都是不同作者的作品。新的书架足够大，可以容纳19本书。小心：在回答接下来的两个问题之前，问问自己哪个答案应该更大。

a. 从书架上的30本书中选择并排列其中19本，有多少种方法？注意，这里允许书最终以任意顺序排列。 b. 如果你坚持必须按作者的字母顺序排列，从书架上的30本书中排列其中19本，有多少种方法？

5. 一个词的*anagram*只是其字母的重新排列。“ambidextrously”有多少种不同的字母重排？

6. 以字母“s”开头的单词“seeded”的变位词有多少个？

7. “goggles” 有多少个变位词？

8. 在一次商务团建活动中，你们由40名男女商务人士组成的团队去打高尔夫球。

a. 你需要把人分成若干个四人组（每组4人）：第一组、第二组，依此类推。你可以用多少种方式做到这一点？ b. 在付出所有努力之后，你意识到实际上你希望每个四人组都包含10名董事会成员中的一名（他们已经包含在这40名高尔夫球手之中）。你可以用多少种方式做到这一点？

9. 亚瑟王和他的13位骑士围坐在他们的圆桌旁有多少种不同的座位安排？

10. 考虑集合 和 ，其中 | = 13，且| | = 22。

a. 有多少个函数 : → ？b. 有多少个函数 : → 是单射的？

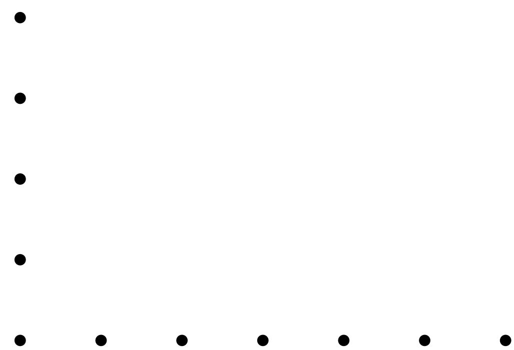
11. 考虑函数 :{1, 2, 3, 4, 5} → {1, 2, 3, 4, 5, 6}。

a. 总共有多少个函数？

b. 有多少个函数是单射的？ c. 这些单射函数中有多少个是 *increasing*？ 递增的意思是，如果 < ，那么 ( ) < ( )，换句话说，随着输入变大，输出也变大。

3.4.7 附加练习

1. 从下图所示的点中选取顶点，可以组成多少个三角形？注意，我们不允许退化三角形——即三个顶点共线的情形——但允许非直角三角形。请解释为什么你的答案是正确的。



2. 我们已经看到， (,) 的公式是 ! (−)!。你在~~这里的任~~务是解释 *why* 这是正确的公式。

(a) 假设你有 12 枚筹码，每一枚颜色都不同。你可以做出多少种不同的 5 枚筹码的堆叠？解释你的答案，并说明为什么这与使用公式 (12, 5) 是相同的。 (b) 再次使用这 12 枚筹码的情境，12! 计数的是什么？ 7! 计数的是什么？请解释。 (c) 解释为什么在计算 (12, 5) 时，用 12! 除以 7! 是合理的（从筹码的角度来说明）。 (d) 你的解释是否适用于除 12 和 5 之外的其他数字？请使用变量 和 来解释公式 (,) = $\frac{n!}{(n-k)!}$。

3.5 多重集的计数

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 识别其结果可以用多重集表示的计数问题。 2. 使用多重集以及木棒和石子图示来表示计数问题的结果。 3. 使用木棒和石子法解决计数问题。

3.5.1 本节预览

Investigate!

Skittles 有五种“口味”。有多少种不同的 8 个 Skittles 的拿法?

假设你烤了 8 个相同的纸杯蛋糕，准备送给你最喜欢的五位离散数学老师。你有多少种分配这些纸杯蛋糕的方法?

为什么上面两个计数问题的答案是相同的?

我们现在已经知道如何解决许多类型的计数问题了。如果我们正在计数的一组结果中的每一个结果都可以表示为一个序列，那么我们将其计为一个排列（如果序列中的项不重复），或者使用乘法原理（如果它们重复）。如果我们要计数的结果中不区分各项的不同排列（即顺序不重要），那么我们就把该结果看作一个集合，并将其计为一个组合。然而，集合从不允许元素重复；每个元素要么在集合中，要么不在。

因此，我们的计数方法中存在一个明显的空白。如果我们想要计数的结果是一些项的集合，其中不区分项出现的顺序，但可以包含重复的项，该怎么办?换句话说，我们如何完成下表?　　译文:

	Distinguished Arrangements?	
	Yes	No
Repeats OK	Sequences Prod. Principle n^k	
No repeats	Sequences Permutations $P(n, k)$	Sets Combinations $\binom{n}{k}$

我们想要计数的是某种类似集合的结构，但这种结构*does*允许集合中的元素出现多于一次。这样的结构称为多重集。

定义 3.5.1

多重集是元素的一个无序集合，其中每个元素都可以出现任意次数。一个元素出现的次数称为它的重数。

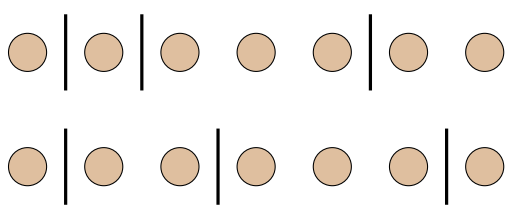
多重集使用与集合相同的记法书写：用花括号括起来的、以逗号分隔的列表，例如 $\{1, 2, 2, 5\}$。

在本节中，我们将探讨如何使用多重集来表示各种各样的计数问题。随后，我们将提出一种方法，将多重集转换为一种特殊类型的位串，以便我们可以利用帕斯卡三角形中的数来计算多重集的数量。

活动预览

1. 找一组相同的物体，比如硬币或方糖。再拿几件分隔物，可以是牙签、火柴或笔。

将便士排成一行。我们通过在便士之间的空隙放置牙签，把这一行分成若干组。我们会区分分组的先后顺序。例如，将 7 枚便士分成 4 组的两种不同方式如下所示：



我们将允许一个或多个组不包含任何便士（通过让两根牙签彼此相邻，或放在所有便士之前或之后）。

通过摆放正确数量的硬币和木棍，计算将一排硬币分成给定数量的组的方式数。

(a) 如果你想把一排便士分成4组，需要多少根牙签?

(b) 将一排三个便士分成两组有多少种方法？(c) 将一排四个便士分成两组有多少种方法？(d) 将一排五个便士分成两组有多少种方法？(e) 将一排三个便士分成三组有多少种方法？(f) 将一排四个便士分成三组有多少种方法？(g) 将一排五个便士分成三组有多少种方法？(h) 根据你以上的答案，猜想将一排七个便士分成四组有多少种方法。

提示。在帕斯卡三角形中寻找你在前面问题中找到的数字。

3.5.2 来点 Cookie

考虑以下计数问题：

你有7块饼干要分给4个孩子。你可以用多少种方式来分配？

花点时间想一想你可能会如何解决这个问题。你可以假设不给某个孩子任何饼干是可以接受的。另外，所有饼干都是相同的，而且分发饼干的顺序并不重要（因此，先给第二个孩子再给第一个孩子，与相反的顺序不算作不同的结果）。

在解决问题之前，这里有一个错误的答案：你可能会猜测答案应该是 4^7，因为对于这 7 块饼干中的每一块，都有 4 个可以把饼干给到的孩子可选。这个想法看起来合理，但却是错误的。要理解原因，考虑几个可能的结果：我们可以把前六块饼干分配给孩子 A，把第七块饼干分配给孩子 B。另一个结果是把第一块饼干分配给孩子 B，把剩下的六块饼干分配给孩子 A。这两种结果都包含在 4^7 的答案中。但对于我们的计数问题，这两种结果实际上是相同的——孩子 A 得到六块饼干，孩子 B 得到一块饼干。如果这些饼干彼此不同，这将是正确的答案，但事实并非如此。

结果实际上是什么样的？我们如何表示它们？一种方法是将一个结果写成由四个数字组成的字符串，如下所示：

$$3112,$$

这表示一种结果：第一个孩子得到 3 块饼干，第二个和第三个孩子各得到 1 块饼干，第四个孩子得到 2 块饼干。以这种方式表示时，数字出现的顺序很重要。1312 是一种不同的结果，因为第一个孩子得到的是 1 块饼干而不是 3 块。字符串中的每个数字都可以是 0 到 7 之间的任意整数。但答案不是 7^4。我们需要这些数字的 *sum* 为 7。

我们还可以用另一种方式来表示结果，即写下一串由七个字母组成的字符串：

ABAADCD,

这表示第一块饼干给孩子A，第二块饼干给孩子B，第三和第四块饼干给孩子A，依此类推。事实上，这个结果与前一个完全相同——A得到3块饼干，B和C各得到1块，D得到2块。字符串中的七个字母中的每一个都可以是4个可能字母之一（每个孩子对应一个），但这样的字符串数量并不是4^7，因为在这里顺序确实*not*重要。事实上，表示同一结果的另一种写法是

AAABCDD.

这将是结果的首选表示方式。由于字母可以按任意顺序书写，为了计数的目的，我们不妨按 *alphabetical* 的顺序来写。因此我们会先写完所有的 A，然后写完所有的 B，依此类推。事实上，由于我们不区分不同的排列，这就好像我们在写一个集合，只不过这个多重集可以包含某个元素多次。

因此，我们现在有两种有用的方式来思考这些结果。

1. 作为一个包含7个元素的多重集，每个元素都是四个孩子之一（或代表他们名字的字母）。例如，

$$\{A, A, A, B, C, D, D\}.$$

   每次一个孩子出现在多重集时，意味着这个孩子得到了一个饼干，因此该孩子在多重集中的重数是这个孩子得到的饼干数量。

2. 作为一个由 4 个非负数构成且和为 7 的字符串。例如，

3112.

   字符串中数字的位置表示孩子，而数字本身表示该孩子获得的饼干数量。

在我们考虑如何计算以这种方式表示的结果数之前，这里有几个我们可以用这些方式表示的计数问题的例子。

例 3.5.2

你从一个包含六种口味的袋子里抓出十颗软糖豆。用多重集和数字串两种方式写出三种可能的结果。

解答。由于每一把都是口味的多重集，用多重集来思考这个问题更为自然。因此，例如，我们可以有：

$$\{R, R, G, G, G, B, B, B, B, Y\}$$

这意味着你拿到了两颗红色、三颗绿色、四颗蓝色和一颗黄色的果冻豆（没有紫色或橙色），或者

$$\{R, R, R, R, R, R, R, R, R, R\}$$

这意味着你得到了十颗红色果冻豆。你也可以有

$$\{R, G, B, Y, P, O, O, O, O, O\}$$

意味着你有一个红色、一个绿色、一个蓝色和一个黄色，还有五个橙色的果冻豆。

对应的六个数字和为10的序列是

$$2, 3, 4, 1, 0, 0; \qquad 10, 0, 0, 0, 0, 0; \qquad 1, 1, 1, 1, 1, 5.$$

(我们在数字之间添加了逗号，因为并非每个数字都是单个数字。) 请注意，对于这种表示方式，我们需要约定一个固定的口味顺序，在这个例子中并不是按字母顺序，而是我们在列出多重集时使用的相同顺序。

例 3.5.3

你有12本相同的离散数学书籍，想要将它们放在5个书架上。使用多重集和数字串写出三种可能的结果。

解答。这里用数列来表示更自然，因为我们可以直接说明每个书架上放多少本书。我们需要5个加起来等于12的数。例如，我们可以有

1. 3, 3, 3, 2, 1，表示第一个书架上有3本书，第二个书架上有3本，第三个书架上有3本，第四个书架上有2本，第五个书架上有1本。

2. 0, 0, 12, 0, 0，意味着所有12本书都在中间的书架上。

3. 1, 1, 1, 1, 8，表示前四个书架各有一本书，最后一个有 8 本。

对应的多重集是

1. {1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5}，表示书架1被分配了三本书，书架2被分配了三本书，等等。注意该多重集中共有12个元素，每个元素对应一本书。这里的数字表示书架；某个数字的重数表示该书架上的书的数量。

2. {3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3}。多重集中唯一的书架是书架 3，其重数为 12，这意味着书架 3 得到 12 本书。

3. {1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5}。其中书架 1 放一本书，书架 2 放一本书，书架 3 放一本书，书架 4 放一本书，书架 5 放剩下的所有书。

这个最后的例子也可以作为一个关于求解具有非负整数解的方程的问题来提问。特别是，我们可以提出关于方程 + + + + = 12 的解的问题。可以将每个变量视为表示每个书架上放多少本书。我们将直接这样提问，但认识到如何将其他问题表示为这样的方程是很有用的。

3.5.3 用位串表示多重集

现在让我们回到最初的问题，将7块饼干分配给4个孩子，并实际计算结果的数量。

当我们在计算普通集合时，我们看到帕斯卡三角形中的数字给出了集合的计数。事实上，我们看到这是真的，因为我们可以将每个集合表示为一个位字符串。每当一个元素在集合中时，我们用1表示，如果元素不在集合中，我们用0表示它的缺席。

这基本上就是我们对多重集所做的事情，但必须使用由非负数组成的字符串，而不仅仅是 0 和 1，因为多重集中的一个元素可以出现超过 0 次或 1 次。但如果我们能够把这些数字字符串转换成某种其他形式的位串，那么我们就可以使用帕斯卡三角形来计数多重集的数量。

如下是我们可以这样做的方法。给定一个多重集如 作为

$$\{A, A, A, B, C, D, D\}$$

我们有一个数列表示为

$$3, 1, 1, 2.$$

嗯，与其写成单个数字，不如把每个写成由相应数量的 1 组成的序列。所以这个例子变成了

$$111, 1, 1, 11.$$

这有点别扭，因为我们使用逗号来分隔数字。为了更清楚起见，让我们切换到两种不同的符号。我们将它们称为棍子和

石子，其中石子表示 1，棍子表示一个逗号。因此，该序列

$$111, 1, 1, 11$$

变成

$$\circ\circ\circ|\circ|\circ|\circ\circ.$$

这是一个由十个符号组成的字符串，其中7个是石头，3个是棍子。

太棒了！无论我们使用哪两种符号（你也可能看到这些被称为“星与杠”（stars and bars）或“球与箱”（balls and bins）），我们都可以利用帕斯卡三角形来计算它们的排列方式数目。重量为 3（或重量为 7）的 10 位比特串的数量是 $\binom{10}{3} = 120.$

从饼干的角度来看，我们可以把这个“木棍和石头”图理解为：在分到多少块饼干之后，我们停止给第一个孩子发饼干，开始给第二个孩子发。然后，再分到多少块时切换到第三个孩子？又在分到多少块时切换到第四个孩子？所以

$$\circ\circ\circ|\circ|\circ|\circ\circ$$

这意味着三个饼干给第一个孩子；然后我们换人，给第二个孩子一个饼干，再换人，给第三个孩子一个饼干，换人，给第四个孩子两个饼干。注意我们需要7个石子和3根木棍——每个饼干对应一个石子，每次在孩子之间切换对应一根木棍，所以木棍的数量比孩子少一个（最后一个孩子之后不需要再切换——我们已经完成了）。

顺便一提，我们还可以回答一个相关的问题：将7块饼干分给4个孩子且每个孩子至少得到一块，有多少种方法？对应的棍子和石头图可以说明什么？这些图必须以至少一块石头开始并以至少一块石头结束（这样孩子A和D能得到饼干），并且任意两根棍子不能相邻（这样孩子B和C不会被跳过）。一种确保这一点的方法是只在石头*between*的空隙中放置棍子。有7块石头，它们之间有6个空位，因此必须从这6个空位中选取3个放置隔板。因此，将7块饼干分给4个孩子且每人至少一块的方法共有$\binom{6}{3}$种。

另一种（也是更一般的）方法来处理这个修改后的问题是，首先给每个孩子一块饼干。现在剩下的 3 块饼干可以在 4 个孩子之间分配，且没有限制。因此我们有 3 个石头和 3 根棍子，共计 6 个符号，其中 3 个必须是杠。因此我们再次看到有 $\binom{6}{3}$ 种分配饼干的方法。

除了孩子和饼干之外，棍子和石头也可以用于计数问题。下面是一些例子：

示例 3.5.4

你最喜欢的数学冰淇淋店提供10种口味。使用恰好6勺（不一定彼此不同），你能制作多少种奶昔？加入口味的顺序并不重要（反正都会被搅拌在一起），

但你可以重复。因此，一种可能的选择是三重巧克力、双重樱桃和薄荷巧克力片。

解法。我们得到六勺，每一勺都可以是十种可能口味之一。将每一勺表示为一颗星。想象沿着柜台按口味逐一往下看：你先看到香草，然后跳到下一个，巧克力。你对巧克力说“是”三次（用三颗石子），然后切换到下一个口味。你继续跳过，直到到达樱桃口味，对它说“是”两次。再一次切换，你来到薄荷巧克力碎。你说“是”一次。然后你继续切换，直到越过最后一个口味，不再说“是”（因为你已经说了六次“是”）。一共有十种口味可选，因此我们必须从一个口味切换到下一个口味九次。这九次切换就是九根隔板。

既然我们确信棍子和石头的数量是正确的，我们就可以简单地回答这个问题：有 6 块石头和 9 根棒子，因此共有 15 个符号。我们需要从中选出 9 个作为棒子，所以可能的奶昔数量是

$$\binom{15}{9}.$$

示例 3.5.5

有多少个7位电话号码，其数字是非递增的？也就是说，每一位数字都小于或等于前一位。

解答。我们需要确定 7 位数字，因此将使用 7 颗石子。木棍表示从每一个可能的单个数字切换到下一个更小数字的变化。因此，电话号码 866-5221 可以用木棍和石子的图表来表示。

$$|\circ||\circ\circ|\circ|||\circ\circ|\circ|.$$

每一位数字都有10种选择（0-9），因此我们必须在不同选择之间切换9次。我们有7个石子和9根隔板，所以电话号码的总数是

$$\binom{16}{9}.$$

示例 3.5.6

该方程有多少个整数解?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13.$$

(一个方程的整数解是一个解，其中未知数必须具有整数值。)

1. 其中 $_i \geq 0$ 对于每个 $_i$?
2. 其中 $_i > 0$ 对于每个 $_i$?
3. 其中 $_i \geq 2$ 对于每个 $_i$?

解答。这个问题就像把13块饼干分给5个孩子。我们需要说明这13个单位分别分配给5个变量各多少。换句话说，我们有13个石子和4根隔板（这些棍子就像方程中的“+”符号）。

1. 如果 $_i$ 可以是 0 或更大，我们处于没有限制的标准情况。所以 13 块石头和 4 根棍子可以以 $\binom{17}{4}$ 种方式排列。 2. 现在每个变量必须至少为 1。所以给每个变量分配一个单位以满足这个限制。现在剩下 8 块石头，仍然有 4 根棍子，所以解的数量是 $\binom{12}{4}$。 3. 现在每个变量必须为 2 或更大。所以在进行任何计数之前，给每个变量分配 2 个单位。现在剩下 3 块石头和 4 根棍子，所以解的数量是 $\binom{7}{4}$。

用函数计数。本节中的许多计数问题乍一看可能似乎是计数 *functions* 的例子。毕竟，当我们尝试计算将饼干分发给孩子的方式时，我们是在将每块饼干分配给一个孩子，就像你将函数域的元素分配给值域中的元素一样。然而，将 7 块饼干分配给 4 个孩子的方式有 $\binom{10}{7} = 120$ 种，而函数 $: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{\ ,\ ,\ ,\ \}$ 的个数是 $4^7 = 16384$。这里到底发生了什么?

当我们计算函数时，我们认为以下两个函数是不同的:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & c & c & c & c \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ b & a & c & c & c & c & c \end{pmatrix}.$$

但这两个函数对应于 *same* 的饼干分配：孩子 和 各得一个饼干，孩子 得到剩下的饼干（孩子 没有得到饼干）。

要点：域的元素是可区分的，但 cookies 是不可区分的。这类似于排列（如计数函数）和组合（不是）的区别。

3.5.4 阅读问题

1. 以下哪些计数问题不是你会用棍子和石头来解决的例子?

A. 你可以通过多少种方式将六个独特的礼物分发给三个朋友?

B. 你可以用多少种方式将六个相同的礼物分发给三个朋友？ C. 如果掷三个相同的6面骰子，你可以得到多少种不同的数字组合？ D. 当每一球冰淇淋可以是六种不同的口味时，你可以制作多少种不同的三球奶昔？

2. 当你使用棍棒和石头计数结果时，顺序重要吗？你允许重复吗？你回答的意思是什么（顺序指什么，重复指什么）？

3. 阅读本节后你有哪些问题？请至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

3.5.5 练习题

1. 多重集是对象的集合，与集合类似，但同一个对象可以出现多次（元素的顺序仍然无关紧要）。例如，{1, 1, 2, 5, 5, 7} 是一个大小为 6 的多重集。

a. 如何使用数字0到9中的10个数字创建大小为9的*sets*？ b. 如何使用数字0到9中的10个数字创建大小为9的*multi*集合？

2. 使用数字2到7，求满足以下条件的不同五位数的数量：

a. 数字不能重复，且必须按递增顺序书写。(*Increasing* 意味着 *strictly* 递增。例如，134 的数字是递增的，而133的数字则不是。) b. 数字 *can* 可以重复，并且必须按 *non-decreasing* 顺序书写。（现在数字不需要严格递增；133 的数字是非递减的。）

3. 体育课后，你被要求将16个相同的躲避球放入10个箱子中。

a. 如果没有任何限制，你可以用多少种方式做到这一点？

b. 如果每个箱子必须至少包含一个躲避球，有多少种方法可以做到这一点？

4. 方程 + + = 12 有多少个整数解，其中

a. 、和 都是正数吗？ b. 、和 都是非负数吗？ c. 、和 都大于或等于 −3。

5. 在玩 Yahtzee 时，你掷五个标准的六面骰子。一次掷骰可能出现多少种不同的结果？骰子的顺序不计。

在玩超级雅茨时，你会掷4颗常规的10面骰子。那么一次掷骰子可能有多少种不同的结果？

6. 你的朋友告诉你她手里有 9 枚硬币（只有 1 美分、5 美分、10 美分和 25 美分的硬币）。如果你猜对她每种硬币各有多少枚，她就会把这些硬币给你。如果你是随机猜的，你猜对的概率是多少？

7. 满足 ${}_1 + {}_2 + {}_3 + {}_4 = 35$ 的整数解有多少个，其中 ${}_1 \geq 4$、${}_2 \geq 4$、${}_3 \geq 1$，以及 ${}_4 \geq 4$？

8. 考虑函数 $:\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$。

a. 这些函数中有多少个是严格递增的？请解释。（一个函数是严格递增的，如果 $<$ ，则 $( ) < ( )$。） b. 这些函数中有多少个是非递减的？请解释。（一个函数是非递减的，如果 $<$ ，则 $( ) \leq ( )$。）

9. *Conic*，你最喜欢的数学主题快餐免下车餐厅提供 28 种可以加入汽水的口味。你有足够的钱购买一杯大杯汽水并添加 7 种口味。如果满足以下条件，你可以点多少种不同的汽水组合：

a. 你拒绝使用任何一种口味超过一次？ b. 你拒绝重复，但在意加入口味的顺序？ c. 你允许自己多次加入同一种口味？ d. 你允许多次加料，并且在意加入口味的顺序？

3.5.6 附加练习

1. 以下每个计数问题都可以用棍棒和石块来解决。对于每个问题，请说明图示的结果

$$\circ\circ\circ|\circ||\circ\circ|$$

表示（前提是棍子和石子的数量与题目要求一致）。否则，说明为什么该图示不表示任何结果，以及一个正确的图示应当是什么样子。

(a) 从一个包含5种不同口味的罐子中选取6颗果冻豆，有多少种方法？

(b) 你有多少种方法可以将5个相同的棒棒糖分发给6个孩子？

(c) 你可以使用按字母顺序排列的 5 个元音字母组成多少个 6 字母单词？

(d) 方程 ${}_1+{}_2+{}_3+{}_4=6$有多少个解?

2. 解决下面的三个计数问题。然后说明为什么它们都有相同的答案是合理的。也就是说，说明你如何将它们相互解释。

(a) 有多少种方法可以将8块饼干分发给3个孩子?

（b）方程 $+\ +\ = 8$ 在非负整数中的解有多少个? （c）使用红色、蓝色和黄色的蜡笔，可以组成多少种不同的 8 支蜡笔的组合?

3. 我们用“棍和石子”图来表示多重集，然后通过计算这些图的数量来确定多重集的数量。只有当每个多重集都恰好对应一个“棍和石子”图，反之亦然时，这个过程才是有效的。

(a) 清楚地写下将多重集转换为棍棒图的规则。也就是说，描述函数 ，该函数将多重集作为输入并输出棍棒图。 (b) 证明函数 是双射。也就是说，证明每个棍棒图都对应着一个唯一的多重集，反之亦然。

3.6 组合证明

Objectives

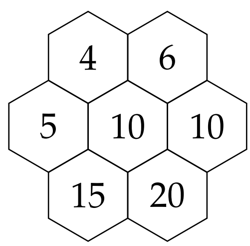
完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 编写答案已给定的计数问题。
2. 写出一个计数问题的两种不同解法。
3. 使用组合证明证明二项式恒等式。

3.6.1 本节预览

Investigate!

观察帕斯卡三角形内部的任意一个单元格以及围绕它的六个数字。例如，你可以看看这个单元格：



在围绕我们选定的单元格的六个数字中，我们将它们分成两组，每组三个数字，组与组之间交替。因此，对于这个例子，我们有一组包含 4、10 和 15，另一组包含 5、6 和 20。但请注意：

$$4 \cdot 10 \cdot 15 = 600 = 5 \cdot 6 \cdot 20.$$

这个无论你选择哪个中心单元格都有效吗？为什么？

组合学最酷的地方之一就是你通常可以用截然不同的方式回答相同的计数问题。当我们意识到这一点时，往往可以将问题泛化，揭示出两个不同的表达式，它们必须表示相同的数量。计数问题本身就成了这两个表达式相等的证明。这种证明方式称为组合证明。

活动预览

通常可以用两种不同的方法找到一个计数问题的答案。这样做会得到两个给出答案的公式，它们可能看起来不同，

但它们必须相等（因为它们都是同一个问题的正确答案）。这就提供了两个公式相等性的证明，称为组合证明。让我们探索几个例子。

1. 考虑所有权重为 3 的 7 位字符串的集合。也就是说，由 0 和 1 组成、长度为 7 且恰好包含三个 1 的字符串。有多少这样的字符串?

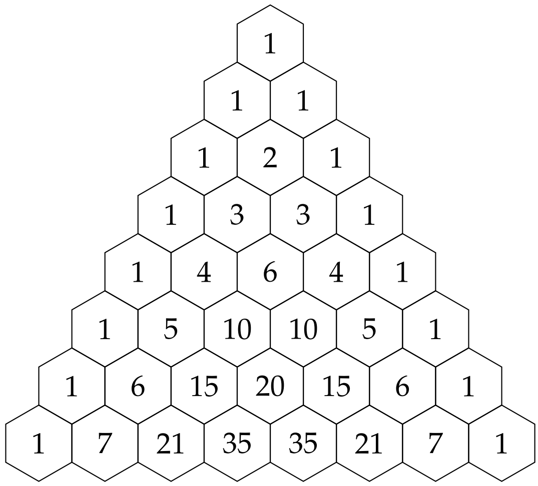
(a) 将答案表示为一个单独的二项式系数。(b) 现在只计算那些以 1 开头、权重为 3 的 7 位比特串。有多少个? (c) 现在只计算那些以 01 开头、权重为 3 的 7 位比特串。有多少个? (d) 现在只计算那些以 001 开头、权重为 3 的 7 位比特串。有多少个? (e) 继续这个过程，直到你以二项式系数的一个 *sum* 计数完所有权重为 3 的 7 位比特串。这个和是多少?

2. 考虑计数问题“你有多少种方法可以排列单词 *STATISTICS* 的字母? ” 注意，这不仅仅是一个排列问题，因为有重复的字母。

(a) 有多少种方法可以在这个字谜的十个位置中选择三个由字母 *S* 占据? (b) 在剩下的七个位置中，有多少种方法可以选择三个由字母 *T* 占据? (c) 继续采用这种方法，直到你得到一个用二项式系数的乘积表示 *STATISTICS* 的字母排列方式数量的表达式。把这个乘积写出来。(d) 现在再次回答这个计数问题，这一次从先询问有多少种方法为字母 *A* 选择位置开始。以你喜欢的任何方式继续，直到你得到一个不同的、用二项式系数的乘积表示 *STATISTICS* 的字母排列方式数量的表达式。把这个乘积写出来。(e) 再尝试另一种方法。直接说答案是 10! 有什么问题? 这个值太大了，但我们可以通过除以某个数来纠正，以考虑等价的结果。你应该除以什么? 把你的答案写成阶乘的商。你得到的答案和之前一样吗?

3.6.2 帕斯卡三角形中的模式

再看一下帕斯卡三角形。暂时忘记它的来源。仅仅把它看作一个数学对象。你注意到了什么？



这个三角形中隐藏着大量的规律，多到足以写成一本相当规模的书。这里仅列出其中一些最明显的：

1. 三角形边界上的所有条目都是 1。 2. 任何不在边界上的条目是其上方两个条目的和。 3. 三角形是对称的。在任何一行中，左侧的条目在右侧是镜像对称的。 4. 给定行上所有条目的和是 2 的幂次方。（你应该检查一下这个！）

我们想以更精确的方式陈述这些观察结果，然后证明它们是正确的。现在，帕斯卡三角形中的每个元素实际上都是二项式系数。位于三角形最顶端的 1 是 $\binom{0}{0}$。下一行（我们将其称为第 1 行，尽管它不是最顶端的那一行）由 $\binom{1}{0}$ 和 $\binom{1}{1}$ 组成。第 4 行（即 1, 4, 6, 4, 1 这一行）由二项式系数组成。

$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}.$$

基于对帕斯卡三角形中各元素的这种描述，我们可以将上述观察改写如下：

1. $\binom{n}{0} = 1$ 和 $\binom{n}{n} = 1$。 2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$。 3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$。 4. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$。

每一个都是二项式恒等式的例子：一个涉及二项式系数的恒等式（即方程）。

我们的目标是建立这些恒等式。我们希望证明它们对所有的 和 的取值都成立。这些证明可以通过多种方式完成。一种选择是给出代数证明，使用 $\binom{n}{k}$ 的公式
:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

下面是你可以如何对上面的第二个恒等式进行处理的方法。

例子 3.6.1

给出二项式恒等式的代数证明

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

解答。

Proof。根据$\binom{n}{k}$的定义，我们有

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

和

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}.$$

因此，从方程的右端开始：

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!}\\ &= \frac{(n-1)!k}{(n-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!\,k!}\\ &= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{(n-k)!\,k!}\\ &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

第二行（找到公分母的地方）之所以成立，是因为 k(k − 1)! = k! 以及 (n − k)(n − k − 1)! = (n − k)!. ■

这当然是一个有效的证明，但也完全没有用。即使你完全理解了这个证明，它也没有告诉你*why*这个恒等式成立。一种更好的方法

就是先解释$\binom{n}{k}$ *means*是什么，然后说明为什么这同样也是$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$的含义。让我们看看这在我们上面观察到的四个恒等式中是如何运作的。

例 3.6.2

解释为什么 $\binom{n}{0}=1$ 且 $\binom{n}{n}=1$。
解答。这些二项式系数告诉我们什么？那么，$\binom{n}{0}$ 给出了从一个包含 个对象的集合中选取 0 个对象的方式数。这样做只有一种方式，即不选择任何对象。因此 $\binom{n}{0}=$ 为 1。同样地，$\binom{n}{n}$ 给出了从一个包含 个对象的集合中选取 个对象的方式数。这样做只有一种方式：选取全部 个对象。因此 $\binom{n}{n}=1.$

或者，我们知道 $\binom{n}{0}$ 是具有权重为 0 的 位字符串的数量。只有一个这样的字符串，即全 0 字符串。所以 $\binom{n}{0}=1$。同样，$\binom{n}{n}$ 是具有权重为 的 位字符串的数量。只有一个具有此属性的字符串，即全 1 字符串。

另一种方式：$\binom{n}{0}$ 给出了一个大小为 的集合中包含 0 个元素的子集的数量。这样的子集只有一个，即空集。$\binom{n}{n}$ 给出了包含 个元素的子集的数量。这样的子集也只有一个，即原集合（包含所有元素）。

示例 3.6.3

解释为什么 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$。
解。最容易看出这一点的方法是考虑比特串。$\binom{n}{k}$ 是长度为 且包含 个 1 的比特串的数量。在这些串中，有一些以 1 开头，其余以 0 开头。先考虑所有以 1 开头的比特串。在这个 1 之后，必须还有 $-$ 个比特（使总长度达到 ），并且其中恰好有 $-$ 个是 1（因为我们已经有一个了，而总共需要 个）。这样的串有多少个？恰好有 $\binom{n-1}{k-1}$ 个这样的比特串，因此在所有长度为 且包含 个 1 的比特串中，有 $\binom{n-1}{k-1}$ 个以 1 开头。类似地，以 0 开头的有 $\binom{n-1}{k}$ 个（我们仍然需要 $-$ 个比特，而现在其中必须有 个是 1）。由于包含 $-$ 个比特且有 个 1 的比特串共有 $\binom{n-1}{k}$ 个，这就是长度为 、包含 个 1 且以 0 开头的比特串的数量。因此 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$。

另一种方式：考虑这个问题，如何从包含 个选择的菜单中选择 个比萨配料？一种方法是直接使用 $\binom{n}{k}$。回答同一个问题的另一种方法是首先决定是否需要凤尾鱼。如果你想要凤尾鱼，那么你仍然需要从仅有的 -1 个选择中挑选 -1 个配料。这可以用 $\binom{n-1}{k-1}$ 种方式完成。如果你不想要凤尾鱼，那么你仍然需要从 -1 个选择中挑选 个配料（凤尾鱼被排除）。你可以用 $\binom{n-1}{k}$ 种方式完成。由于含有凤尾鱼的选择与不含凤尾鱼的选择是互斥的，因此总选择数是 $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$。但等等，我们用两种方法回答了同一个问题。

不同的方式，因此两个答案必须相同。因此 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$。你也可以通过计数子集，甚至格子路径来解释（证明）这个恒等式。

示例 3.6.4

证明二项式恒等式 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$。

解答。为什么这是真的？$\binom{n}{k}$ 计算从 个选择中选取 个事物的方式数。另一方面，$\binom{n}{n-k}$ 计算从 个选择中选取 – 个事物的方式数。这两者真的相同吗？那么，如果不是选取那 – 个事物，而是选择将它们排除在外，会怎样呢？从 个选择中排除 – 个事物，有多少种方式？显然这同样是 $\binom{n}{n-k}$（一旦你已经选定这些事物，包含还是排除它们并不重要）。而如果你排除了 – 个事物，那么你就包含了其余的 个事物。因此，结果的集合应该是相同的。

让我们尝试像上面一样的披萨计数示例。从 个选择中选择 个配料有多少种方法？一方面，答案很简单，$\binom{n}{k}$。另一种方法是列出所有你不想要的配料。为了得到一个恰好包含 个配料的披萨，你需要从 – 个配料中选择不放在披萨上的配料。你有$\binom{n}{n-k}$种选择你不想要的配料。这两种方法都能得到一个有 个配料的披萨，实际上是所有获得 个配料披萨的方法。因此，这两个答案必须相同：$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$。

您也可以使用位字符串、子集或格路径来证明（解释）这个恒等式。位字符串的论证很不错：$\binom{n}{k}$ 计算长度为 且有 个 1 的位字符串的数量。这也是长度为 且有 个 0 的位字符串的数量（只需将每个 1 替换为 0，每个 0 替换为 1）。但是，如果一个长度为 的字符串有 个 0，它必须有 – 个 1。并且正好有 $\binom{n}{n-k}$ 个长度为 且有 – 个 1 的字符串。

例 3.6.5

证明二项式恒等式 $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$。

解答。让我们再来一次“披萨证明”。我们需要找一个关于披萨配料的问题，其答案是 2^n。比如这样：如果一家披萨店提供 种配料，在每种配料最多使用一次的前提下，从不加任何配料到加上所有配料，使用任意数量的配料，你能做出多少种披萨？

一方面，答案是 2^n。对于每一种配料，你可以说“是”或“否”，因此每种配料都有两种选择。

另一方面，将可能的比萨分成不相交的组：没有配料的比萨、只有一种配料的比萨、两种配料的比萨

配料等。如果我们不想要任何配料，那么只有一款这样的比萨（可以称之为空比萨），但最好将这个数字视为 $\binom{n}{0}$，因为我们选择了 0 种 种配料。有多少款比萨有 1 种配料？我们需要选择 1 种配料，从 种配料中选择，因此是 $\binom{n}{1}$。我们有：

- 0 种配料的披萨：$\binom{n}{0}$
- 含1种配料的披萨: $\binom{n}{1}$
- 2 种配料的披萨： $\binom{n}{2}$
- ...
- 具有 种配料的披萨：$\binom{n}{n}$。

所有可能披萨的总数将是这些之和，这正是我们试图证明的恒等式的左边。

再次，我们本可以使用子集、位串或格路径来证明该恒等式（尽管格路径的论证有点棘手）。

希望这能给出一些关于二项式恒等式解释性证明的思路。值得指出的是，更传统的证明也可以是美丽的。[4] 例如，考虑以下相当巧妙的最后一个恒等式证明。

源文本：展开二项式 (+)^n：译文：

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x \cdot y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

让 = 1 和 = 1. 我们得到：

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n.$$

当然，这可以简化为：

$$(2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

有个好玩的可以试试：令 = 1, = 2。挺妙吧？

3.6.3 更多证明

上述示例中给出的解释性证明通常称为组合证明。一般来说，要为一个二项式恒等式（例如 = ）给出一个组合证明，你需要做如下事情：

[4]Most every binomial identity can be proved using mathematical induction, using the recursive definition for $\binom{n}{k}$. We will discuss induction in Section 4.5.

1. 找一个你可以用两种方法解答的计数问题。

2. 解释为什么计数问题的一个答案是 。

3. 解释为什么计数问题的另一个答案是 。

由于 和 都是同一个问题的答案，我们必须有 = 。棘手之处在于提出这个问题。这并不总是显而易见，但你解决的计数问题越多，就会变得越容易。你将开始把某些类型的答案识别为某些类型问题的答案。更常见的情况是，你在解决一个计数问题时，恰好想出了两种不同的求解方法。现在你就得到了一个二项式恒等式，而证明就在眼前。这个证明 *is* 你刚刚解决的问题以及你的两种解法。

例如，考虑这样一个计数问题：

> 有多少个由10个字母组成的单词，恰好包含四个A、三个B、两个C和一个D？

让我们试着解决这个问题。我们有 10 个位置放字母。其中 4 个必须是 A。选择这 4 个 A 的位置有 $\binom{10}{4}$ 种方法。那 B 放在哪里呢？现在只剩下 6 个位置；我们需要从中选 3 个。这可以用 $\binom{6}{3}$ 种方法完成。两个 C 需要放在剩余 3 个位置中的两个，因此有 $\binom{3}{2}$ 种放法。这样就只剩下 D 的一个位置了，不过我们也可以把这 1 种选择写成 $\binom{1}{1}$。因此答案是：

$$\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}.$$

但为什么要止步于此呢？我们也可以用另一种方法找到答案。首先让我们决定把唯一的一个 D 放在哪里：我们有 10 个位置，需要从中选择 1 个，因此可以用 $\binom{10}{1}$ 种方式完成。接下来，从 $\binom{9}{2}$ 种方式中选择一种来放置两个 C。现在还剩下 7 个位置，其中有 3 个需要填入 B。这样做有 $\binom{7}{3}$ 种方式。最后，A 的放置方式有 $\binom{4}{4}$ (that is, onl y one) 种。于是，这个问题的另一种答案是

$$\binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{4}.$$

有趣。这给出了二项式恒等式：

$$\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{4}.$$

这里再给出几个带有组合证明的二项式恒等式。

例 3.6.6

证明该恒等式

$$1n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-1)2+n1=\binom{n+2}{3}.$$

解答。为了给出一个组合证明，我们需要想出一个可以用两种方式回答的问题：一种方式给出恒等式的左边，另一种方式给出恒等式的右边。关于该问什么问题的线索来自右边：$\binom{n+2}{3}$ 计数从一组 $+2$ 个东西中选取 3 个的方式数。把这些东西命名为 $1, 2, 3, \ldots,$ $+2$。换句话说，我们要找的是这些数的 3 元子集（因为顺序不应当重要，子集正是应当考虑的对象）。我们需要稍微巧妙一些，来解释为什么左边同样给出了这些子集的数量。证明如下。

Proof. 考虑这样一个问题：“集合 $\{1, 2, 3, \ldots,$ $+2\}$ 有多少个由 3 个元素组成的子集？” 我们用两种方法来回答这个问题：

答案1：我们必须从由 $+2$个元素组成的集合中选择3个元素。这可以通过$\binom{n+2}{3}$种方式完成。

答案2：按子集中间的数是什么将这个问题分情况讨论。设每个子集为按递增顺序写成的 { , , }。我们对每个不同的 的取值计算子集的数量。 的最小可能值是 2，最大值是 $+1$。

当 $=2$ 时，有 $1\cdot$ 个子集： 有 1 种选择， 有 种选择（3 到 $+2$）。

当 $=3$ 时，有 $2\cdot(\ -1)$ 个子集： 有 2 种选择， 有 -1 种选择。

当 $=4$ 时，有 $3\cdot(\ -2)$ 个子集：对 有 3 种选择，对 有 -2 种选择。

以此类推。当 $=$ $+1$ 时， 有 种选择，而 只有 1 种选择，因此有 $\cdot 1$ 个子集。

因此子集的总数是

$$1n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-1)2+n1.$$

由于答案1和答案2是同一问题的答案，它们必须相等。因此

$$1n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-1)2+n1=\binom{n+2}{3}.$$

∎

例子 3.6.7

证明二项式恒等式

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

解法。我们将提供两种不同的证明。第一种将与前面的例子（计数子集）非常相似。第二种证明稍微巧妙一些，使用格路径。

*Proof*考虑这个问题："当有 2　种配料可供选择时，使用　种配料你可以做多少个披萨？"

答案 1：共有 2　种配料，从中必须选择　种。这可以通过 $\binom{2n}{n}$ 种方式完成。

答案2：将配料分成两组，每组　种（例如　种肉类和　种蔬菜）。任何选择　种配料都必须同时包含第一组和第二组中的若干种。分别考虑肉类配料数量的每一种可能情况：

0 种肉类：$\binom{n}{0}\binom{n}{n}$，因为你需要从　种肉类中选择 0 个，并从　种蔬菜中选择　个。

1 种肉类：$\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}$，因为你需要　种肉类中的 1 种，所以 $-$　种蔬菜中的 1 种。

2种肉类:$(\ {}^{\ }_{2})(\ {}_{-2})$选择 2 种肉类和剩余的　$-$ 2 种配料，来自　种蔬菜。

等等。最后的情况是　种肉类，可以用 $\binom{n}{n}\binom{n}{0}$ 种方式完成。

因此，可能的比萨饼总数是

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

这还不是左侧。。。还没有。注意到 $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}$ 和 $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}$ 等等，根据示例 3.6.4 中的恒等式。因此，我们确实得到了

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2.$$

由于这两个答案是对同一个问题的回答，它们必然相等，因此

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

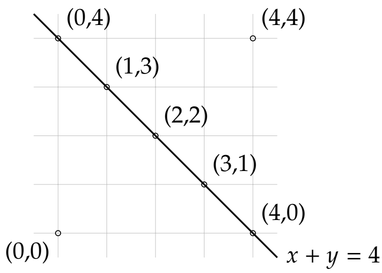
■

作为一种替代性的证明，我们使用格路径。这样做是合理的，因为该恒等式的右端让我们联想到从 (0, 0) 到 (,) 的路径数量。

*Proof*考虑这个问题：从(0, 0)到(,)有多少条格点路径?

答案1：我们必须行进 2 步，其中有 步必须朝向上方向。因此共有 $\binom{2n}{n}$ 条路径。

回答 2：请注意，从 (0, 0) 到 (,) 的任何路径必须穿越直线 + = 。也就是说，任何路径必须经过以下其中一个点：（0, ）、（1, − 1）、（2, − 2）、……、（ , 0）。例如，在 = 4 的情况下，情况是这样的：



有多少条路径经过 (0,)? 为了到达那个点，您必须行进 个单位，其中 0 个单位是向右的，所以有 $\binom{n}{0}$ 种方式到达 (0,)。从 (0,) 到 (,) 需要 步，其中 0 步是向上的。因此，从 (0,) 到 (,) 有 $\binom{n}{0}$ 种方式。所以，从 (0, 0) 到 (,) 经过 (0,) 的路径总共有 $\binom{n}{0}\binom{n}{0}$ 条。

那么通过 (1, − 1) 呢? 到达那里有 $\binom{n}{1}$ 条路径（ 步，向右 1 步），并且有 $\binom{n}{1}$ 条路径完成到 (,) 的行程（ 步，向上 1 步）。因此，从 (0, 0) 经过 (1, − 1) 到 (,) 有 $\binom{n}{1}\binom{n}{1}$ 条路径。

一般来说，要通过点 (, −) 到达 (,)，我们到达中点有 $\binom{n}{k}$ 条路径，然后从中点到 (,) 有 $\binom{n}{k}$ 条路径。因此共有 (n)( ) 从(0, 0)到(,)的路径通过(, −)。

综上所述，从 (0, 0) 到 (,) 且恰好经过这些中点之一的路径总数为

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

由于这两个答案是对同一个问题的回答，它们必然相等，因此

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

■

3.6.4 阅读问题

1. 下列哪一项描述了组合证明的总体策略?

A. 提出一个可以用两种方式回答的计数问题（并给出答案）。B. 提出两个都可以用同一种方法回答的计数问题（并回答这些问题）。C. 化简该组合恒等式两边的代数表达式。D. 假设该恒等式在某个最小取值处不成立，并通过考察更小的取值得到矛盾。

2. 写一个计数问题，你可以用来确定身份:

$$\binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}.$$

3. 阅读本节后你有哪些问题? 请至少写出一个你对本节内容感到好奇的问题。

3.6.5 练习题

1. 为该恒等式 10 + 10 = 2 · 10 构造一个组合证明。

- 其一：考虑这个问题："以 3 或 4 开头的两位数有多少个？" 或者：考虑这个问题："从 10 种配料中选择，可以做出多少种 2 种配料的披萨？"
- 回答这个问题的第一种方式是 10 + 10。
- 要么：这是因为有10个以3开头的数字，另外还有10个以4开头的数字。或者：这是因为第一种配料有10种选择，第二种配料也有10种选择。
- 第二个答案是 2 · 10。
- 或者：这是因为第一位数字有 2 种选择，而第二位数字有 10 种选择。

或者：这是因为你必须要么选择两种相同的配料，要么选择两种不同的配料。

- 由于这两个表达式回答的是同一个问题，它们必然相等。因此 $10 + 10 = 2 \cdot 10$。

2. 如果你被要求给出恒等式 $\binom{n}{2}\binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{2}$ 的一个组合证明，下列哪些问题是合理可用的?

A. 从　种选择中选取 2 种冰淇淋口味，并为你的圣代选择　种配料，有多少种方式?　B. 从　个领结的集合中，选择　个放入托运行李，再选择另外 2 个放入随身行李，有多少种方式?　C. 数学俱乐部有　名学生。选择一个规模为 2 或　的子集来负责秋季募款活动，有多少种方式?　D. 从　名学生的班级中，选出 2 名担任级长，另选　名加入派对策划委员会，有多少种方式?

3.6.6 额外练习

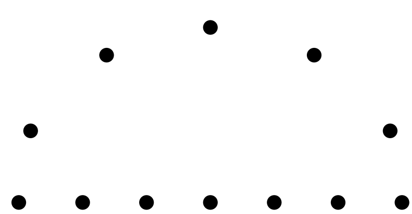
1. 给出恒等式 $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$ 的一个组合证明。

2. 假设你拥有　顶帽和　蝴蝶领结。当然，　和　都大于 1。

(a) 你可以做出多少种菲斯帽和领结的组合？你一次只能戴一顶菲斯帽和一个领结。请解释。 (b) 解释为什么答案是 *also* $\binom{x+y}{2} - \binom{x}{2} - \binom{y}{2}$。（如果这是你在第 (a) 问中声称的答案，请再试一次。） (c) 利用你对 (a) 和 (b) 两问的回答，给出该恒等式的一个组合证明

$$\binom{x+y}{2} - \binom{x}{2} - \binom{y}{2} = xy.$$

3. 怎样的人　你可以用下面的点画出多少个三角形，作为 ve　rtices?

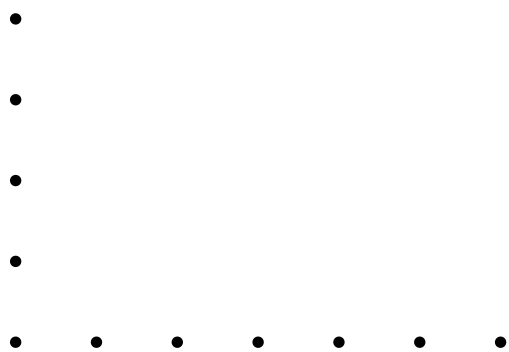


（a）求一个表达式，该答案是三个项之和

涉及二项式系数。

（b）求一个表示该答案的表达式，该答案是两个二项式系数之差。（c）将上述结果加以推广，陈述并用组合证明证明一个二项式恒等式。假设你在水平轴上有 个点，在半圆中有 个点。

4. 考虑以下所示点作为顶点可以构成的所有三角形。注意，我们不允许退化三角形（即三个顶点共线的情形），但允许非直角三角形。



(a) 找出三角形的数量，并解释为什么你的答案是正确的。

(b) 使用不同的方法再次求出三角形的数量。解释为什么你的新方法是可行的。 (c) 陈述一个由你上面两个答案所确立的二项式恒等式（也就是说，给出你的两个答案所证明的那个二项式恒等式）。然后使用 m 和 n 进行推广。

5. 一位女性即将结婚。她有15位最好的朋友，但只能从中选出6位作为伴娘，其中一位需要担任首席伴娘。她可以有多少种选择方式？

（a）如果她先选出6名伴娘，然后从中选一位担任主伴娘，会怎样？（b）如果她先选定主伴娘，然后再选另外5名伴娘呢？（c）解释为什么 $6\binom{15}{6} = 15\binom{14}{5}$。

6. 考虑如下恒等式：

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(a) 这是真的吗？对 和 取几个值试一试。

(b) 使用 $\binom{n}{k}$ 的公式给出该恒等式的代数证明。

(c) 给出该恒等式的组合证明。

7. 给出恒等式 $\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k}\binom{k}{2}$ 的一个组合证明。

8. 考虑二项式恒等式

$$\binom{\ }{1} + 2\binom{\ }{2} + 3\binom{\ }{3} + \cdots + \binom{\ }{\ } = \ 2^{n-1}。$$

(a) 给出该恒等式的一个组合证明。提示：如果在一组由　个人组成的群体中，有若干人想去参加密室逃脱，并且在参加的人中需要有一人担任队长，会怎样？

(b) 通过展开 $(1 + \ )^n$ 并对两边求导，给出一种替代证明。

9. 为恒等式 $1 + 2 + 3 + \cdots + \ = \binom{n+1}{2}$ 给出一个组合证明。

10. 考虑集合 B_2^6 (中长度为 6、权重为 2) 的比特串。

(a) 有多少个这样的比特串以 1 开头？

(b) 那些比特串中有多少个以01开头？

(c) 有多少个位串是以 001 开头的？(d) 是否还有其他我们尚未计数的字符串？它们是哪些，有多少个？(e) 在 B_2^6 中一共有多少个位串？(f) 你刚刚给出了哪一个二项式恒等式的组合证明？

11. 让我们来计算三进制数字串，也就是说，每一位数字都可以是 0、1 或 2 的字符串。

(a) 含有恰好　位的三进制数字串有多少个？ (b) 含有恰好　位且有　个 2 的三进制数字串有多少个？ (c) 含有恰好　位且有　− 1 个 2 的三进制数字串有多少个？（提示：可以把那个非 2 的数字放在哪里？然后它可能是什么？） (d) 含有恰好　位且有　− 2 个 2 的三进制数字串有多少个？（提示：参见前一个提示。） (e) 含有恰好　位且有　−　个 2 的三进制数字串有多少个？ (f) 含有恰好　位且不含 2 的三进制数字串有多少个？（提示：这是一种什么样的数字串？）

(g) 使用上述部分给出该恒等式的组合证明

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+2^3\binom{n}{3}+\cdots+2^n\binom{n}{n}=3^n.$$

12. 将单词“rearrange”中的字母重新排列有多少种方法？请至少用两种不同的方法回答这个问题，以建立一个二项式恒等式。

13. 用组合方法证明下面的恒等式。

$$\binom{2}{2}\binom{n}{2}+\binom{3}{2}\binom{n-1}{2}+\binom{4}{2}\binom{n-2}{2}+\cdots+\binom{n}{2}\binom{2}{2}=\binom{n+3}{5}.$$

14. 在例 3.6.5 中，我们证明了帕斯卡三角形中任意一行的和都是 2 的幂。具体来说，

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

那里的论证使用了一个计数问题：“使用任意数量的 种不同配料，你能做出多少种披萨？”作为练习，请用不同的问题给出该恒等式的新证明。

(a) 使用一个关于计数子集的问题。(b) 使用一个关于计数二进制串的问题。(c) 使用一个关于计数格点路径的问题。

15.

（a）斯坦利杯由两支球队进行七战四胜制的系列赛来决定。你的球队可以以多少种方式获胜？让我们用两种方法来回答这个问题：

i. 在7场比赛中你的队伍需要赢下多少场？这种情况有多少种发生方式？ ii. 如果系列赛打满7场呢？也就是说你赢下最后一场。前6场比赛可以有多少种进行方式？ iii. 如果系列赛只打6场呢？这种情况有多少种？5场呢？4场呢？ iv. 计算你的队伍获胜方式数有哪两种不同的方法？写出一个涉及二项式系数（也就是 $\binom{n}{k}$ 们）的等式。这是帕斯卡三角形中的哪一种模式的例子？

(b) 推广。 如果规则改变，你参加一场九局五胜的比赛（需要赢 5 场）会怎样？ 如果你参加一场 局的比赛，并且需要 场胜利才能被称为冠军，会怎样？

16. 设 $_1$，$_2, \ldots$，$_j$ 是一组和为 的正整数（即 $\sum_{i=1}^{j} {}_i =$ ）。使用包含 个顶点的两个图来解释为什么

$$\sum_{i=1}^{j} \binom{k_i}{2} \leq \binom{n}{2}.$$

3.7 概率论的应用

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 使用计数技术来计算事件发生的概率。 2. 理解概率的基本规则。 3. 计算复合事件的概率，包括独立事件和依赖事件。

3.7.1 本节预览

Investigate!

假设你像17世纪的法国贵族德·梅雷骑士一样，喜欢就掷公平的六面骰子（每个编号为1到6）的结果进行赌博。你会跟他打赌，在单个骰子掷四次的情况下，他不可能至少掷出一次6吗？那如果是跟他打赌，在同时掷两枚骰子共24次的情况下，他不可能至少掷出一次双6呢？

为了做出这些决定，我们应该决定

1. 在掷一枚骰子四次的情况下，至少出现一次 6 的概率有多大？

在24次掷两颗骰子的过程中，至少出现一次双六的可能性有多大？

3. 既然比值 4:6 等于比值 24:36，这些事件的概率是否应该相同？这正是德·梅雷骑士的想法。你也这么认为吗？

这里有一个 Python 脚本，可以帮助你直观地体会上述问题。你可以通过对相应的行进行注释和取消注释来在两个问题之间切换（以 # 开头的行是注释）。看看你有多幸运吧！

```
导入 random

for i in range (4) : die = random . randint (1 ,6)
print (f" 你 ␣ 掷出 ␣ 了 ␣ { die }")


# 对于 i 在 range (24) 中:
```

```
#     die1 = random.randint(1,6)
#     die2 = random.randint(1,6)
#     print(f"You rolled a {die1} and a {die2}")
```

如果你会一些 Python，你可能想修改脚本，将实验运行 1000 次，看看其中有多少次是“胜利”。

我们可以通过观察在重复进行某个实验时事件发生的频率，来对概率 *empirically* 形成一种直观感受。正如骑士德·梅雷的例子所展示的那样，我们对概率的直觉常常并不完全正确。运用我们已经学习过的计数技术，我们可以解释为什么我们的直觉会出现偏差，以及真实的概率究竟是多少。

我们在本章中考虑的大多数关于计数的问题也可以转化为概率问题。例如：使用小写字母可以组成多少个长度为8的密码？随机选择8个小写字母，得到你的密码的概率是多少？

虽然概率学的主题广泛且复杂，但离散概率的基础无非是计数。因此，在这里我们将简要地看一下计数的学习如何帮助我们理解概率。

活动预览

假设你在一个有30名学生的班级里。至少有两名学生在同一天出生的可能性有多大？

假设所有的日子发生的概率相等，并且没有人是在2月29日出生的。你相信答案会超过25%吗？超过50%吗？超过70%吗??? 让我们来找出答案。

1. 首先，我们所说的概率是什么意思？如果你掷一枚公平的六面骰子，掷出 6 的概率是多少？掷出偶数的概率是多少？ 2. 我们将把事件的概率定义为该事件发生的方式数除以所有可能发生情况的总数。

（a）假设你掷两个骰子（一个红色、一个绿色）。一共有多少种结果？（b）在这些结果中，有多少种在两个骰子上有*different*个数字？提示：使用1到6的数字，可以组成多少个由两个不同数字构成的序列？（c）结合你在上面得到的两个数量，两个骰子显示不同数字的概率是多少？（d）掷三个骰子时得到三个不同数字的概率是多少？（假设骰子颜色各不相同。）

3. 现在说说生日。一年有365天。

(a) 30 个生日的可能序列有多少种?

(b) 包含 30 个生日且不含重复的可能序列有多少种?

(c) 30个人中没有生日重复的概率是多少?

(d) 在这 30 个人中，要么他们的生日都不相同，要么至少有两个人生日相同。由于这是必然事件，其概率为 1。那么，至少有两个人（在这 30 人中）生日相同的概率是多少? (e) 要使至少有两个人生日相同的概率大于 90%，所需的最少人数是多少?

3.7.2 概率计算

想一想我们在日常生活中是如何使用概率语言的。我们可能会说，掷一枚硬币有 50 % 的概率正面朝上。或者说，在掷两枚骰子时，骰子点数之和为 7 比点数之和为 2 更有可能。赌场在为二十一点设定赔付时，当然依赖于某些牌组始终比其他牌组更有可能出现。所有这些都假定事件中存在某种 *randomness*，并且即便在这种随机性之中，对可能发生的事情也存在某种 *consistency*。我们将假定这种现实模型。

我们可以为其赋予概率的事物称为随机试验。它们可以有不同的可能结果。我们将随机试验的可能结果的（有限）*set* 称为样本空间（我们通常将该集合记为 ）。根据定义，进行一次随机试验将总是从样本空间中产生且仅产生一个结果。

在本节中，我们始终假设均匀概率分布，这意味着我们坚持认为样本空间中的每个结果都是等可能的。于是，样本空间 中任一特定结果的概率恰好是$\frac{1}{|S|}$。

注 3.7.1 均匀概率分布是一种常见且合理的假设，但它确实会使我们无法提出某些问题。例如，把飞镖掷向飞镖靶并不是均匀分布的，同样，掷加权骰子也不是。图钉落地时尖端朝上的概率是多少? 但我们又该如何开始回答这些问题呢? 我们必须对结果的实际概率作出一些假设（也许通过一些重复实验来确定）。

研究不同的概率分布还有其他原因，而这也是概率论课程中的一个主要研究主题。

例 3.7.2

假设你掷两枚公平的硬币（一枚便士和一枚五分镍币）。可能结果的样本空间是什么？得到两个正面的概率是多少？

解答。样本空间是该实验所有可能结果的集合，在本例中为集合 { , , , }。因此，得到两个正面的概率是 $\frac{1}{4}$。事实上，由于样本空间中共有 4 个结果，每个结果的概率都是 $\frac{1}{4}$。

计算 *outcomes* 的概率确实如此简单。更有意思的是，当我们去求一个事件的概率时：事件是样本空间的一个子集。对于某个特定的随机试验，我们可能会关心许多不同的事件，而且它们不必互斥。一个事件也可以是只包含一个结果的集合，或者是不包含任何结果的集合。

例如，假设你掷一个公平的6面骰子。样本空间包含六个结果 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。我们可能关心的一些事件包括掷出一个偶数（子集 $\{2, 4, 6\}$）、掷出一个小于3的数（集合 $\{1, 2\}$）或掷出一个小于10的数（子集 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$）。事实上，我们现在知道我们可以询问的事件总共有 $2^6 = 64$ 个，因为样本空间有64个子集。

我们的直觉对上述示例事件有什么暗示？掷出偶数的可能性应与掷出奇数一样大，因此我们希望掷出偶数的概率是 $\frac{1}{2}$。同样，掷出小于 3 的数字的概率应为 $\frac{1}{3}$，因为三分之一的可能结果小于 3。那掷出小于 10 的数字呢？嗯，这 *must* 会发生，所以概率是 100%，作为分数就是 1。

与我们的直觉一致，我们如下定义事件的概率。

定义 3.7.3

假设一个随机试验的样本空间为 。事件 的概率等于 中结果的数量除以 中结果的数量。我们将其记为 ( ) = $\frac{|E|}{|S|}$。

示例 3.7.4

假设你掷一个标准的六面骰子（每个面上标有从 1 到 6 的数字）。你掷出一个偶数的概率是多少？

解答。样本空间是所有可能掷骰结果的集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。该事件，记为表示偶数的 ，是结果集合$\{2, 4, 6\}$。因此，事件 发生的概率为

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

我们花了很多时间学习如何计算集合的大小。然后，我们可以通过计算样本空间（集合）和事件（集合）的大小来计算概率。

例子 3.7.5

如果你从一副标准的52张扑克牌中抽取5张牌，抽到四条（四张同点数的牌）的概率是多少?

解答。首先，让我们计算样本空间，它将由所有五张牌的手牌组成。手牌中牌的顺序不重要，因此我们将仅计算52张牌的5元素子集。因此，样本空间包含$\binom{52}{5}$个元素。（这个数字略低于260万：确切来说是2,598,960。）

现在，多少手牌会是四条呢？我们可以通过首先选择哪一个13个点数将是四条来计算，这可以通过$\binom{13}{1} = 13$种方式完成。那手中的另一张牌呢？它可以是48张其他牌中的一张，所以四条的手牌数量是$13 \cdot 48 = 624$。

这使得获得四条的概率为,

$$P(\text{4-of-a-kind}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} \approx 0.00024.$$

一个重要的细节：每当我们计算样本空间和事件的大小时，必须确保我们确实在计算样本空间中属于该事件的元素数量 *of*。特别是，如果我们计算样本空间中的 *subsets* 张牌（使用组合而不是使用排列来计算牌序列），那么我们必须计算事件中 *subsets* 张牌的数量。

有趣的是，我们也可以用排列来求得得到四条的概率：5 张牌序列的数量是 (52, 5) = 311, 875, 200。求四条序列的数量要稍微复杂一些。四条的牌面值有 13 种可能，第五张牌在剩下的 48 张牌中选择。但这五张牌可以有 5! 种不同的排列方式。因此，四条序列的数量是 $13 \cdot 48 \cdot 5!$。由此得到,

$$P(\text{4-of-a-kind}) = \frac{13 \cdot 48 \cdot 5!}{P(52, 5)} \approx 0.00024.$$

这是否接近我们之前得到的同一个答案？它*exactly*是相同的（我们可以通过注意到分子和分母中都多出了一个 5! 来验证这一点）。

虽然在组合与排列之间进行选择（只要你对样本空间和事件都选择同一种）会得到相同的概率，但这并不总是成立，正如你将在一些附加练习中被要求去探索的那样。

3.7.3 概率规则

这里有一些基本的概率事实，它们可以从我们对概率的定义和计数的理解中轻松推导出来。虽然我们仍然假设样本空间中的各个结果是等可能的（均匀概率分布），这些规则对所有概率分布都适用。

首先，我们通常关心一个事件 *does not* 发生的概率。我们称之为该事件的补集。请记住，事件是样本空间的子集，未“在”该事件中的意思是你处于该子集的补集中。使用与集合相同的符号，事件 的补集将写作 。以下是事件的概率与其补集之间的关系。

定理 3.7.6

The probability of the complement of an event is

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

证明。记住 $(\ ) = \frac{|E|}{|S|}$，即事件 中结果的数量除以总结果的数量。但是，事件 中有多少个结果呢？所有其他的。也就是说，

$$\left|\overline{E}\right| = |S| - |E|.$$

所以我们可以确定，我们有

$$P(\overline{E}) = \frac{\left|\overline{E}\right|}{|S|} = \frac{|S| - |E|}{|S|} = \frac{|S|}{|S|} - \frac{|E|}{|S|} = 1 - P(E).$$

让我们通过一个例子来说明这个证明。

例 3.7.7

假设你抛一枚公平的硬币 10 次。你得到至少一次正面的概率是多少？

解。得到至少一个正面的方式有很多种，但得到没有正面（也就是全是反面）的方式只有一种。因此，将所求概率作为一个更容易计算的概率的补来计算是合理的。

样本空间是所有10次抛掷序列的集合。总共有多少个序列呢？对于序列中的每个项，它可以是正面（H）或反面（T），因此有$2^{10} = 1024$种可能的序列。

我们想要找出得到至少一个正面的概率。我们可以把这个问题看作一个计数问题：有多少个10次投掷的序列至少包含一个正面？除了那个全是反面的序列之外，其他的1024个序列都有正面。所以有

1023 个序列中至少有一个正面。因此，获得至少一个正面的概率是 $\frac{1023}{1024}$。

等一下，我们有使用定理 3.7.6 吗？虽然没有明确使用，但本质上我们已经使用了这个定理。使用该定理，我们会说得到至少一个正面的概率是

$$1 - P(\text{all tails}) = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}.$$

不 te that 我们进行的计算需要减去 f ractions:

$$1 - \frac{1}{1024} = \frac{1024}{1024} - \frac{1}{1024} = \frac{1024-1}{1024} = \frac{1023}{1024}.$$

因此，无论我们通过减法计算补集的大小，还是使用补集公式并减去分数，我们得到的答案是一样的。

补充概率在回答关于骰子的历史问题时非常有用。

示例 3.7.8

在四次掷骰子中，至少掷出一个6的概率是多少?

这与在24次掷骰中至少掷出一对双6的概率相同吗?

解。补事件是将一枚骰子掷四次并且*never*得到6。在6^4种可能的掷法中，有5^4种不包含6。因此，四次掷骰至少得到一个6的概率是

$$P(\text{at least one } 6) = 1 - P(\text{no } 6) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.5177.$$

对于24次掷骰出现双6的变体，我们同样使用补事件：不出现双6的概率是多少？这意味着在每一次掷骰中，你得到的是其余35种点数组合之一。

$$P(\text{at least one double } 6) = 1 - P(\text{no double } 6) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0.4914.$$

的确，梅雷骑士注意到，在玩掷两枚骰子的游戏时，从长期来看他往往会输钱。他向谁求助呢？当然是布莱兹·帕斯卡！

另一种思考互补概率的方法是说

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1.$$

概率为1意味着该事件是确定的，因此也许我们应该将其理解为

给出事件 发生或未发生的概率。这正是我们通过加法规则表示概率的含义。

定理 3.7.9

Suppose and are two 不相交 *events. Then the probability of either or happening is,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

If and are not disjoint, then the probability of or occurring is,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

这一事实的证明是本节中的一道练习。不过，通过一个例子，应当可以清楚地看到它是如何起作用的。

例 3.7.10

假设你掷一个公平的6面骰子。掷出一个偶数或小于3的数字的概率是多少?

解。我们不需要定理来回答这个问题。样本空间是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，事件是子集 $= \{1, 2, 4, 6\}$。因此 ( ) $= \frac{4}{6}$。

为了看清这个 4 从何而来，令 表示掷出偶数的事件（因此 $= \{2, 4, 6\}$），并令 表示掷出小于 3 的数的事件（因此 $= \{1, 2\}$）。注意记号 ( ) = (∪) 是有意义的，因为作为集合，我们确实有 = ∪ 。

如果我们回到事件概率的定义，我们得到，

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{|A \cup B|}{|S|}.$$

我们必须求集合 ∪ 的大小。但我们知道如何求非互不相交集合的并集大小：使用容斥原理（PIE）！因此 | ∪ | $= 3 + 2 - 1 = 4$。

正如该例所示，我们基本上已经将加法原理翻译成了概率的语言。我们能否对乘法原理也做同样的事情?

我们使用乘法原理来求两个事件按顺序先后发生的方式数量。许多概率问题要求计算这类复合事件的概率。让我们通过一个例子来看看这是怎么回事。

例 3.7.11

掷一颗六面骰子得到偶数并抛硬币得到正面的概率是多少?

解答。首先我们将从定义出发直接求出概率。该

样本空间由骰子和硬币的所有结果对组成，因此 $= \{(1,\ ), (1,\ ), (2,\ ), (2,\ ), (3,\ ), (3,\ ), (4,\ ), (4,\ ), (5,\ ), (5,\ ), (6,\ ), (6,\ )\}$。不必逐一列出这些，我们可以使用乘法原理来计算样本空间的大小：$|\ | = 6 \cdot 2 = 12$。我们感兴趣的事件是结果集合 $= \{(2,\ ), (4,\ ), (6,\ )\}$。显然其大小为 3，这也可以表示为 $3 \cdot 1$。因此该事件的概率为 $(\ ) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$。

现在分别考虑这两个事件。设 为掷出一个偶数， 为抛硬币并得到正面。第一个事件的概率是 $(\ ) = \frac{3}{6}$。第二个事件的概率是 $(\ ) = \frac{1}{2}$。看起来，将这些概率组合起来的正确方法是将它们相乘：

$$P(E) = (A \text{ and } B) = P(A)P(B) = \frac{3}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

将分数相乘只需分别相乘分子和分母，这多么方便；而这与把乘法原理应用到分数的分子和分母是一样的。

上述例子之所以成立，是因为这些事件是相互独立的。直观地说，这意味着第一个事件的结果对第二个事件的结果没有任何影响。实际上，我们像使用乘法原理一样使用这一原则来*define*独立性。

定义 3.7.12

给定两个事件 和 ，如果两个事件同时发生的概率等于各自发生概率的乘积，则称它们相互独立：

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

注意，在定义中我们将 和 同时发生的事件描述为交集 $\cap$ 。由于事件是集合，取交集是合理的。两个集合的交集包含同时属于这两个集合的所有元素，这正是我们在这里想要的。

这突显了这个定义与乘积原理之间的一个关键区别。我们使用乘积原理通过结合两个集合中的结果来构建一个新的结果集合。这创造了新的结果类型。例如，乘积原理将结合以下集合：

$$\{1,2,3\} \text{ and } \{H,T\} \text{ into } \{1H,1T,2H,2T,3H,3T\}.$$

这*not*是两个集合的交集（实际上它是笛卡尔积：$\times\ = \{(\ ,\ ) : \ \in\ ;\ \in\ \}$）。独立性的定义涉及相对于一个固定结果集合的概率。因此，在独立性定义中的 和 的元素已经是类似于我们使用该乘积所构造的序列。

原则。

如果在例 3.7.11 中（我们掷一次骰子并抛一次硬币）更加严谨一些，我们应该将首先掷出偶数这一事件 描述为集合

$$A = \{(2,H),(2,T),(4,H),(4,T),(6,H),(6,T)\}$$

以及随后掷出正面的事件 作为集合

$$B = \{(1,H),(2,H),(3,H),(4,H),(5,H),(6,H)\}.$$

于是我们得到 ( ) = $\frac{6}{12}$ 和 ( ) = $\frac{6}{12}$，其乘积为 ( ) ( ) = $\frac{6}{12}\frac{6}{12} = \frac{36}{144} = \frac{1}{4}$。因此，示例中的解答是正确的，但具有误导性。事件 和 的确是相互独立的，因为

$$A \cap B = \{(2,H),(4,H),(6,H)\}$$

因此 (∩) = $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$。

例 3.7.13

假设你掷一个12面的骰子（编号从1到12）。考虑以下事件：

- 是掷出一个为 3 的倍数的数字的事件。
- 是掷出一个倍数的事件 的 4。
- 是掷出小于 7 的点数这一事件。

事件 和 是否独立？那么 和 呢？ 和 呢？

解。样本空间是集合 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}。事件 是集合 {3, 6, 9, 12}， 是集合 {4, 8, 12}， 是集合 {1, 2, 3, 4, 5, 6}。因此，这些事件各自的概率为

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \quad P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

要决定事件 和 是否独立，我们计算 (∩)。事件 和 的交集（意味着掷出的数字既是 3 的倍数又是 4 的倍数）是$\frac{1}{12}$ (交集的唯一元素是 12)。我们将其与 ( ) ( ) = $\frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ 进行比较。既然这些相等，这些事件相互独立。

不过，事件 和 是 not 独立的。由于 ∩ = {4}，我们有 (∩) = $\frac{1}{12}$。但是 ( ) ( ) = $\frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$。由于这些不相等，这些事件不是独立的。这很合理，因为小于7的4的倍数比不是4的倍数的要少。

最后， 和 相互独立： (∩) = $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$，且 ( ) ( ) = $\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$。

当事件不是相互独立时，我们会得到一个新的、有趣的问题可以提出：在另一个事件已经发生的情况下，一个事件 *given* 发生的概率是多少？这称为……

3.7.4 条件概率

著名的概率问题，被称为蒙提霍尔问题，提出了如下难题。你参加了游戏节目 *Let's Make a Deal*，并将赢得你决定打开的三扇门中其中一扇后面的奖品。其中一扇门后面是一辆汽车；另外两扇门后面是山羊。你先选择一扇门，但在打开之前，主持人（蒙提·霍尔）会揭示另一扇门，显示其后面是一只山羊。随后你有机会更换选择。你应该换吗？如果你换了，得到汽车的概率是多少？

> 顺便说一下……这个问题也许是最早“走红”的数学题之一，尽管它是在星期天的报纸杂志*Parade*中出现时才引起关注。发表后，大约有10,000名读者（其中近1000名拥有博士学位）写信投诉作者Marilyn vos Savant错了。她并没有错。

你可能会想说，当你换门时，得到汽车的概率是 $\frac{1}{2}$。毕竟，还剩下两扇门，而汽车在其中一扇后面。然而，我们必须问，在蒙提已经在另一扇未被选择的门后揭示了一只山羊这一条件下，得到汽车的概率是多少 *given*。

定义 3.7.14

给定两个事件 和 ， 在给定 条件下的条件概率为，

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

这个定义是否符合我们对条件概率含义的直觉？让我们从样本空间来思考。我们想知道在假设 已经发生的条件下， 发生的概率。换句话说，我们只关心属于的样本空间中的元素。

如果 成为样本空间，那么 中唯一可能发生的结果是那些在 *and* 中的结果。所以，也许条件概率的定义确实应该是，

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

很抱歉，我不负责概率定义。事实证明，

标准定义也是一样好的。因为，

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{|A\cap B|}{|S|}}{\frac{|B|}{|S|}}=\frac{|A\cap B|}{|B|}.$$

呼。又一次危机化解了。

例 3.7.15

假设你闭着眼睛掷两枚六面骰子。你的朋友说：“嘿，看，至少有一枚骰子是 4。”你掷出的点数和为 7 的概率是多少？

解答。首先注意到，掷出点数和为 7 的概率是$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，因为在可能出现的 36 个数对中，有 6 个数对的和为 7：$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$。然而，现在我们处在至少有一颗骰子为 4 的情形。这将样本空间限制为包含一个 4 的 11 个数对（我们可以使用 PIE 计数为 $6+6-1$）。其中，只有两个的和为 7：$\{(3,4),(4,3)\}$。因此，在已知有一颗骰子为 4 的条件下，掷出点数和为 7 的概率是$\frac{2}{11}$.

如果我们使用条件概率的定义，我们会以稍微不同的方式计算，但会得到相同的答案。我们有事件 （和为7）和 （至少有一个骰子是4）。那么 $(\ )=\frac{11}{36}$，以及 $(\ \cap\ )=\frac{2}{36}$。因此 $(\ |\ )=\frac{2}{11}$.

请注意，在已知 *the red* 个骰子是 4（比如它们是不同颜色）的情况下，掷出点数和为 7 的概率会不同！那将是 $\frac{1}{6}$，因为我们实际上只是询问另一个骰子掷出 3 的概率。

例 3.7.16

假设你从一副标准的52张扑克牌中抽取两张牌。在已知第一张牌是红色的条件下，第二张牌是人头牌的概率是多少？

在已知第二张牌是人头牌的条件下，第一张牌是红色的概率是多少？

解。我们的样本空间由两张牌的 $52\cdot 51$ 个序列组成。事件 是那些序列中第一张牌为红色牌的配对。事件 是那些序列中第二张牌为人头牌的配对。

我们正在寻找 $(\ |\ )$ 和 $(\ |\ )$，因此我们需要求 $(\ )$、$(\ )$ 以及 $(\ \cap\ )$。在 中共有 $26\cdot 51$ 个配对（先从 26 张红牌中选一张，然后从剩余的 51 张牌中任选一张），因此

$$P(A)=\frac{26\cdot 51}{52\cdot 51}=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}.$$

在 中有$12\cdot 51$个配对（先从12张人头牌中选一张，然后再从

剩余的51张牌），所以

$$P(B) = \frac{12 \cdot 51}{52 \cdot 51} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

求交集的大小要稍微更具挑战性一些（我们已在“组合原理”小节中这样做过）。有 $20 \cdot 12$ 对以一张红色的非人头牌开始并以一张人头牌结束，另外还有 $6 \cdot 11$ 对以一张红色的人头牌开始并以一张人头牌结束。因此

$$P(A \cap B) = \frac{20 \cdot 12 + 6 \cdot 11}{52 \cdot 51} = \frac{306}{2652} = \frac{3}{26}.$$

因此，在第一张牌是红色的条件下，第二张牌是人头牌的概率是,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{26}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{13}.$$

给定第二张卡是面牌的条件下，第一张卡是红色的概率是,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{26}}{\frac{3}{13}} = \frac{1}{2}.$$

等一下！什么？在第二张卡片是人头卡的情况下，第一张卡片是红色的概率与第一张卡片是红色的概率是相同的吗？？看起来 (|) = ( )，并且 (|) = ( )。那可能意味着什么？

看看当你在条件概率的定义中清除分母时会发生什么

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

变成

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

这看起来几乎像是事件独立性的定义，只是现在在乘积中，我们用的是 (|)，而不是 ( )。但是如果 和 是独立的， (|) 到底是什么意思呢？如果事件是独立的，那么给定 已经发生， 发生的可能性不应该更多也不应该更少。因此我们应该有 (|) = ( )。这正是我们在上一个例子中看到的。

3.7.5 阅读问题

以下关于方程 (∪) = ( ) + ( ) 的说法中，哪些是正确的？

A. 只要事件 和 是互斥的，这个说法就成立。

B. 这是正确的，只要事件 和 是独立的。

C. 这始终为真。D. 这
从不为真。

2. 以下哪些关系对任意两个事件 和 成立?

A. (∩) = ( ) ( ). B.
(∩) = ( ) (|) C.
(∩) = ( ) (|) D. (
∩) = ( ) (|)

3. 阅读完这一部分后，你有什么问题？请至少提出一个你对材料感兴趣的问题。

3.7.6 练习题

1. 你将一枚公平的硬币抛掷三次，并记录每次是正面（H）还是反面（T）。

(a) 列出样本空间中的所有元素。例如，一个结果是 HHT。 (b) 假设你打赌朋友，你会得到比反面更多的正面。列出该事件中的所有元素。 (c) 获得比反面更多的正面的概率是多少？ (d) 获得恰好两个正面的概率是多少？获得恰好三个正面的概率是多少？

2. 假设你抛一个公平的硬币 15 次。

(a) 样本空间的大小是多少？ (b) 得到正好 8 次正面朝上的事件的大小是多少？那么得到正好 8 次正面朝上的概率是多少？ (c) 不得到正好 8 次正面朝上的事件的大小是多少？不得到正好 8 次正面朝上的概率是多少？使用概率的定义和前面的答案。如果你使用事件的概率是 1 减去事件补集的概率这一事实，那么你得到的同一事件的概率是多少？

3. 假设你掷一枚公平的硬币16次。

(a) 样本空间的大小是多少？

(b) 得到恰好 4 个正面的事件的大小是多少？

得到正好12次正面朝上的事件的大小是多少？得到正好4次正面朝上或正好12次正面朝上的事件的大小是多少？

（c）得到恰好4次正面和恰好12次正面的概率之和是多少？

_______________ + _______________ = _______________

得到恰好 4 个正面或得到恰好 12 个正面的概率是多少？通过计算事件的大小除以样本空间的大小来求解。

_______________ ÷ _______________ = _______________.

4. 你有一袋特别的数学主题 M&M 巧克力豆。这袋子承诺里面有 5 颗蓝色、4 颗红色、1 颗橙色、1 颗绿色、2 颗棕色和 3 颗黄色的 M&M 巧克力豆。

找到以下事件的概率。

(a) 如果你挑选一个M&M糖，得到蓝色或黄色的概率是多少？ (b) 如果你同时挑选两个M&M糖，得到一个蓝色和一个黄色的概率是多少？ (c) 如果你一次挑选一个M&M糖，首先得到蓝色，接着得到黄色的概率是多少？

5. 在一副标准的 52 张牌中，26 张是红色，26 张是黑色。因此，抽到一张红牌的概率是 0.5。

（a）掷一枚硬币两次，都是反面的概率是多少？（b）如果从一副标准扑克牌中发给你两张牌，这两张牌都是红色的概率是多少？

6. 假设你只拿八张扑克牌，四张红色、四张黑色。你还有一枚公平的硬币，可以随意抛掷任意多次。

(a) 比较抛一次硬币得到反面的概率与抽到一张红牌的概率。 (tails) =; (red) =。差值: __________

（b）比较掷硬币两次得到两个反面的概率与抽取两张红牌（不放回）的概率。 (两个反面) =; (两张红牌) =。差异: __________

(c) 比较抛硬币三次得到三个反面的概率与抽取三张红牌（不放回）的概率。 (3 tails) =; (3 reds) = 。差值: __________

(d) 比较抛硬币四次得到四次反面的概率与抽取四张红牌（不放回）的概率。 (4 次反面) =; (4 张红牌) =。差值: （e）比较抛硬币五次得到五次反面的概率与抽取五张红牌（不放回）的概率。 (5 次反面) =; (5 张红牌) =。差值:

7. 假设你有三枚骰子：一枚四面骰、一枚六面骰和一枚八面骰。每枚骰子都是公平的，编号从 1 到其面数。你同时掷这三枚骰子。

(a) 骰子点数之和为3的概率是多少？ (b) 骰子点数之和为6的概率是多少？ (c) 掷出时三个骰子都显示相同点数的概率是多少？ (d) 在掷出时*given*骰子点数之和为6，三个骰子都显示相同点数的概率是多少?

8. 你掷三枚公平的六面骰子。三个骰子都显示不同数字的概率是多少?

三个骰子都显示相同数字的概率是多少?

骰子是否可能既不是全部相同的点数，也不是全部不同的点数？如果是这样，这种情况发生的概率将为 0。那么这个概率是多少?

3.7.7 附加练习

1. 在玩五张牌扑克时，葫芦是一种手牌，它由同一牌值的三张牌和另一牌值的两张牌组成。例如，你可以拿到三张7和两张4。

用两种不同的方法求拿到葫芦牌型的概率：

(a) 假设五张牌一次性发出，则样本空间的大小为 $\binom{52}{5}$。 (b) 假设牌是逐张发出的，则样本空间的大小为 (52, 5)。

这两个答案是一样的吗？为什么这说得通?

2. 一个随机数生成器以相等的概率选择个位数字（0 到 9）。假设该生成器产生五个数字。

这五个数全部不同的概率是多少？请用两种方法回答这个问题：

(a) 假设这些数字按顺序从生成器中产生，因此样本空间的大小为 10^5。

(b) 假设这些数以多重集的形式出现，或者等价地，要求这些数必须以非递减顺序出现。你将需要使用星与棒方法来计算样本空间的大小。

这两个答案是一样的吗？为什么这说得通？

3. 证明定理 3.7.9。4. 10 位朋友每人都有一副扑克牌，并将其充分洗匀。每位朋友从自己的牌堆中抽取一张牌。至少有一对朋友抽到相同牌的概率是多少？5. 房间里需要有多少人，才能使至少有两个人拥有相同生日（一年中的同一天）的概率达到 50 %？假设所有生日等可能，且没有人出生在闰日（2 月 29 日）。6. 在你高中毕业 20 周年的同学聚会上，你遇到了一位多年未联系的老朋友。你们聊到了宠物，特别是猫和狗。她告诉你她有两只宠物，而且至少有一只是猫。她有两只都是猫的概率是多少？（假设养猫或养狗的可能性相同。）

7. 另一位老朋友无意中听到了你们关于宠物的谈话，说他也有两只宠物，而且他养得最久的那一只是猫。那么他有两只猫的概率是多少？为什么这个答案与前一个问题不同？

8. 你正在玩一个有三个杯子的壳牌游戏。一个杯子下面有两个绿色球，另一个杯子下面有两个红色球，第三个杯子下面有一个绿色球和一个红色球。你闭上眼睛，你的朋友重新排列这些杯子。然后你睁开眼睛，随机选择一个杯子。你看到这个杯子里有一个绿色球。问：该杯子下另一个球也是绿色的概率是多少？请用条件概率来解释你的答案。

3.8 使用容斥原理的高级计数

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 运用容斥原理解决涉及重数有界的多重集的计数问题。
2. 应用容斥原理解决涉及错位排列的计数问题。
3. 应用容斥原理解决涉及满射函数的计数问题。

3.8.1 部分预览

Investigate!

你有11个相同的小迷你酸橙派要分给4个孩子。然而，你不希望任何一个孩子得到超过3个派。你可以以多少种方式分配这些派？

棍子和石头方法使我们能够计算将 10 块饼干分配给 3 个孩子的方式数，以及方程 $+\ + = 10$ 的自然数解，例如。一个相对容易的修改使我们能够对这些问题施加一个 *lower bound* 限制：也许每个孩子必须至少得到两块饼干，或者 $, , \geq 2$。这是通过先给每个孩子（或变量）分配 2 块饼干（或单位），然后再使用棍子和石头方法分配剩余部分来完成的。

如果我们想要一个 *upper bound* 限制呢？例如，我们可能坚持要求没有孩子获得超过 4 个饼干，或者 $, , \leq 4$。事实证明，这要困难得多。

注意，如果我们考虑互补事件，即孩子们 *do* 获得超过 4 个饼干的分配方式，那么我们就回到了一个带有下限的棍棒问题。如果我们能够计算这个数目，那么从总的分配数中减去它应该能给我们所需的答案。然而，问题在于，“没有孩子获得超过 4 个饼干”的互补事件是“至少有一个孩子获得超过 4 个饼干”。我们知道如何处理要求 *all* 个孩子至少获得 4 个饼干的情况，但如果是 *one or more* 个孩子至少获得 4 个饼干的情况，我们该如何处理呢？我们必须使用容斥原理（PIE）。

活动预览

首先，让我们回顾一下我们在第3.5节中学到的一些“棍棒和石头”类型的问题。

然后我们将对此进行修改，并应用第3.3节中的容斥原理。

1. 假设我们有10块饼干要分给三个孩子：Albie、Bertie 和 Charlie。

（a）在没有任何限制的情况下，我们可以用多少种方式分配这些饼干？

(b) 如果每个孩子至少要得到两块饼干，我们可以有多少种分配方式？提示：先给每个孩子最少数量的饼干。剩下的饼干有多少种分配方式？(c) 如果 Albie 至少得到 3 块饼干，Bertie 至少得到 2 块饼干（而 Charlie 没有任何限制），你可以有多少种分配方式？

2. 让我们再次考虑要分配给 Albie、Bertie 和 Charlie 的 10 块饼干。这一次，我们将施加一些上界限制。

(a) 如果 Albie *does* 得到超过 3 块饼干（因此至少 4 块），我们有多少种分配饼干的方法？如果 Albie *does not* 得到超过 3 块饼干，我们有多少种分配饼干的方法？(b) 如果 Bertie *does* 得到超过 3 块饼干，我们有多少种分配饼干的方法？(c) 如果 Albie 和 Bertie 都 *do* 得到超过 3 块饼干，我们有多少种分配饼干的方法？(d) 使用两个集合的容斥原理，如果 *at least one* Albie 或 Bertie 得到超过 3 块饼干，我们有多少种分配饼干的方法？也就是说，要么 Albie 得到超过 3 块饼干，要么 Bertie 得到超过 3 块饼干，或者两者都得到超过 3 块饼干。(e) 如果 *neither* Albie 和 Bertie 都没有得到超过 3 块饼干，我们有多少种分配饼干的方法？

3.8.2 多重集的容斥原理

容斥原理（PIE）提供了一种方法，用于求不一定互不相交的集合之并的基数。我们在第 3.3 节中已经看到它如何应用于三个集合。要找出在集合 、 和 的 *one or more* 中有多少元素，我们只需把这些集合中各自的元素数量加起来即可。然而，如果

如果这些集合之间存在任何重叠，这些元素就会被多次计数。因此我们要减去每一对集合的交集中的元素。但这样做会把同时属于三个集合的元素多减去一次，所以我们需要把它加回来。从集合的基数来看，我们有

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

例 3.8.1

三个孩子，阿尔贝托、伯纳黛特和卡洛斯，决定分享11块饼干。他们想知道，在每个人得到的饼干不超过4块的前提下，有多少种分法（不知为何，这些孩子可以接受有人一块饼干也得不到）。

解答。若没有“至多4个”的限制，答案将是 $\binom{13}{2}$，使用11块石子和2根小棒（将三个孩子分隔开）。现在计算一个或多个孩子违反条件的方式数，即至少得到4块饼干。

设 为阿尔贝托得到超过 4 块饼干的结果集合。设 为伯纳黛特得到超过 4 块饼干的结果集合。设 为卡洛斯得到超过 4 块饼干的结果集合。于是（为了进行减法）我们要找的是集合 $\cup$ $\cup$ 的大小。使用 PIE，我们必须求出 $| \ |$、$| \ |$、$| \ |$、$| \ \cap \ |$ 等等的大小。下面是我们得到的结果。

- $| \ | = \binom{8}{2}$. 首先给阿尔贝托5块饼干，然后在不加限制的情况下，用6块石子和2根棍子把剩下的6块分给三个孩子。
- $| \ | = \binom{8}{2}$. 就像上面一样，只是现在伯纳黛特一开始得到5块饼干。
- $| \ | = \binom{8}{2}$. 卡洛斯先得到5块饼干。
- $| \ \cap \ | = \binom{3}{2}$。给 Alberto 和 Bernadette 各 5 块饼干，剩下 1 块（石头）分给三个孩子（2 根木棍）。
- $| \ \cap \ | = \binom{3}{2}$. 阿尔贝托和卡洛斯先得到5块饼干。
- $| \ \cap \ | = \binom{3}{2}$. 伯纳黛特和卡洛斯先得到5块饼干。
- $| \ \cap \ \cap \ | = 0$. 三个孩子都得到4个或更多饼干是不可能的。

综合以上所有，我们可以看到

$$|A \cup B \cup C| = \binom{8}{2} + \binom{8}{2} + \binom{8}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} + 0 = 75.$$

因此，原始问题的答案是 $\binom{13}{2} - 75 = 78 - 75 = 3$。现在我们看到这一点，就说得通了。确保没有任何孩子得到更多的唯一方法是

比每人 4 块饼干少的一种分配方式是给两个孩子各 4 块饼干，另一个孩子 3 块；至于是哪一个孩子，有三种选择。通过这一观察我们本可以更快地找到答案，但这个例子的目的在于说明 PIE 是有效的！

对于四个或更多的集合，我们不写出容斥原理（PIE）的公式。相反，我们只考虑其原则：把所有单个集合中的元素加起来，然后减去被计算了两次的东西（属于由*pair*个集合组成的交集的元素）；接着把被过度移除的元素加回来（属于三个集合交集的元素）；然后再减去被过度加回的元素（属于四个集合交集的元素）；如此反复，加回来、再减去、再加回来，等等。若不是因为在这些问题中，所有单个集合的基数都相等，所有两个集合交集的基数也相等，三个集合的亦然，依此类推，那么这将会非常困难。因此，我们可以把这些情况全部归并在一起，并乘以由1个、2个、3个，……集合组成的不同组合的数量。

例 3.8.2

将10块饼干分给4个孩子，在每个孩子得到的饼干不超过2块的情况下，有多少种分配方式?

解答。将 10 块饼干分给 4 个孩子共有 $\binom{13}{3}$ 种方法（使用 10 颗石子和 3 根木棍）。我们将减去所有某个孩子得到 3 块或更多饼干的情况。有多少种这样的结果呢？我们可以在开始之前先给孩子 A 3 块饼干，从而强制他吃到 3 块或更多。这样一来，问题就化为在没有任何限制的情况下，将 7 块饼干分给 4 个孩子。在这种情况下，我们有 7 颗石子（剩余的 7 块饼干）和 3 根木棍（比孩子人数少 1），因此可以用 $\binom{10}{3}$ 种方式分配饼干。当然，我们可以选择任意一个 4 个孩子中的一个来给他过多的饼干，因此看起来共有 $\binom{4}{1}\binom{10}{3}$ 种给某一个孩子分配过多饼干的方式。但事实上，我们多算了。

我们必须剔除两名孩子拿到过多饼干的那些结果。选择2名孩子给予额外饼干有 $\binom{4}{2}$ 种方式。这样需要6块饼干，只剩下4块饼干。因此我们有4个石子，仍然有3根棍子。剩余的4块饼干因此可以以 $\binom{7}{3}$ 种方式分配（对于选择哪2名孩子被过度喂食的 $\binom{4}{2}$ 种选择中的每一种）。

但现在我们减去得太多了。我们必须把所有给三个孩子分配过多饼干的情况加回来。这会用掉9块饼干，只剩下1块用棍子和石头分配给4个孩子，这可以有$\binom{4}{3}$种方式。我们必须对每一种可能的被过度喂食的三个孩子的选择都考虑这种结果，而选择这3个孩子的方式有$\binom{4}{3}$种。

接下来我们会减去所有给四个孩子分配过多饼干的情况,

但在这种情况下，那个数字是 0。

总的来说，我们得到分配 10 块饼干给 4 个孩子的方式数，且每个孩子最多得到 2 块饼干为:

$$\binom{13}{3} - \left[\binom{4}{1}\binom{10}{3} - \binom{4}{2}\binom{7}{3} + \binom{4}{3}\binom{4}{3}\right]$$

是

$$286 - [480 - 210 + 16] = 0.$$

这很有道理：绝无可能把10块饼干分给4个孩子，并确保没有任何一个人得到超过2块。稍微令人惊讶的是

$$\binom{13}{3} = \left[\binom{4}{1}\binom{10}{3} - \binom{4}{2}\binom{7}{3} + \binom{4}{3}\binom{4}{3}\right],$$

但既然 PIE 是有效的，这个等式就必须成立。

为了避免你认为这些问题总是有更简单的解决方案，请考虑下面这个例子。

例 3.8.3

在之前（例子 3.5.6）我们计算了方程的解的数量

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13,$$

其中 $_i \geq$ 对于每个 $_i$ 为 0。

这些解中有多少个在每个 $_i$ 上都满足 $0 \leq {}_i \leq 3$?

解。我们必须减去其中一个或多个变量取值大于 3 的解的数量。我们需要使用容斥原理（PIE），因为分别统计五个变量中每一个大于 3 的解的数量会对同一解进行多次计数。结果如下:

- 总解: $\binom{17}{4}$。
- 其中 $_1 > 3$: $\binom{13}{4}$ 的解。先给 $_1$ 4 个单位；然后将剩余的 9 个单位分配给这 5 个变量。
- 当 $_1 > 3$ 且 $_2 > 3$ 的解: $\binom{9}{4}$。在你给 $_1$ 分配 4 个单位并再给 $_2$ 分配 4 个单位之后，你只剩下 5 个单位可供分配。
- 满足 $_1 > 3$、$_2 > 3$ 且 $_3 > 3$ 的解: $\binom{5}{4}$。
- 满足 $_1 > 3$、$_2 > 3$、$_3 > 3$ 和 $_4 > 3$ 的解: 0。

我们还需要考虑这样一个事实：在上面 $_1$ 的位置我们可以选择任意五个变量中的一个（因此会有 $\binom{5}{1}$ 种这样的结果），在 $_1$ 的位置可以选择任意一对变量，而 $_2$ ($\binom{5}{2}$ 的结果有) 种，依此类推。正因为如此才会发生重复计数，所以我们需要使用容斥原理（PIE）。综合起来，满足 $0 \leq \ _i \leq 3$ 的解的个数是

$$\binom{17}{4} - \left[\binom{5}{1}\binom{13}{4} - \binom{5}{2}\binom{9}{4} + \binom{5}{3}\binom{5}{4}\right] = 15.$$

3.8.3 错位排列的计数

Investigate!

为了你的毕业恶作剧，你决定交换你最喜欢的五位教授门上的姓名牌。为了让他们都不觉得被忽视，你想确保所有的姓名牌都贴错门。可以通过多少种方式实现这一点?

PIE 的高级用法不仅限于“棍棒和石头”。对 个元素 $\{1, 2, 3, \ldots, \ \}$ 的一个错排是指一种排列，其中没有任何元素保持在原位。例如，三个元素 $\{1, 2, 3\}$ 共有 6 种排列:

$$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321.$$

但其中大多数都有一个或多个元素被固定：123 的三个元素都被固定，因为三个元素都在各自的原始位置上；132 有第一个元素被固定（1 在其原来的第一位置上），等等。事实上，三个元素的唯一错位排列是

$$231 \text{ and } 312.$$

如果我们增加到 4 个元素，就有 24 种排列（因为第一个元素有 4 种选择，第二个有 3 种选择，第三个有 2 种选择，最后只剩下 1 种选择）。这些之中有多少是错排? 如果你列出全部 24 种排列并剔除那些不是错排的，就只会剩下 9 个错排。让我们看看如何使用 PIE 得到这个数。

例 3.8.4

4 个元素的错排有多少种?

解答。我们先计算所有排列，然后减去那些不是错排的。4 个元素共有 $4! = 24$ 种排列。现在，要使一个排列 *not* 成为错排，4 个元素中至少有一个必须被固定。选择固定哪一个元素有 $\binom{4}{1}$ 种选择。一旦固定，我们需要找到

另外三个元素的一种排列。三个元素共有 3! 种排列。

但是现在我们把非错位排列数算多了，所以必须减去那些固定两个元素的排列。选择要固定哪两个元素有 $\binom{4}{2}$ 种，对于每一对，剩余元素有 2! 种排列。但这样减得过多了，因此要把固定 3 个元素的排列加回来，一共有 $\binom{4}{3}1!$ 个。最后减去固定全部四个元素的 $\binom{4}{4}0!$ 个排列（回忆 $0! = 1$）。综合起来，我们得到 4 个元素的错位排列数为：

$$4! - \left[\binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \binom{4}{3}1! - \binom{4}{4}0!\right] = 24 - 15 = 9.$$

当然，我们可以使用类似的公式来计算任意数量元素的错排。不过，元素越多，公式就越长。下面是另一个例子：

例 3.8.5

五位先生参加了一场聚会，把他们的帽子留在门口。聚会结束时，他们匆忙地在离开时拿起帽子。有多少种不同的方式可能发生，使得没有任何一位先生戴上自己的帽子？

解。我们在计算 5 个元素的错排。先生们以任意顺序拿帽子共有 5! 种方式——但其中许多排列会导致有人拿到自己的帽子。因此，我们要减去一个或多个男人拿到自己帽子的所有情况。换言之，我们要减去非错排。为此需要使用容斥原理（PIE）。因此答案是：

$$5! - \left[\binom{5}{1}4! - \binom{5}{2}3! + \binom{5}{3}2! - \binom{5}{4}1! + \binom{5}{5}0!\right].$$

3.8.4 计数函数

Investigate!

1. 考虑所有函数 $:\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$。总共有多少个函数？其中有多少个是单射？记住，如果每个输入都映射到不同的输出，则该函数是单射。

2. 考虑所有函数 $:\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$。其中有多少个 *injections* 具有这样的性质：对于任意 $\in \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$( ) \neq$ ？

你的朋友声称答案是:

$$5! - \left[\binom{5}{1}4! - \binom{5}{2}3! + \binom{5}{3}2! - \binom{5}{4}1! + \binom{5}{5}0!\right].$$

解释为什么这是正确的。

3. 回忆：*surjection* 是这样一种函数，其陪域中的每个元素都在值域中。从集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的函数 中，有多少个是满射？使用容斥原理（PIE）！

在本章中我们已经看到，许多计数问题可以被重新表述为关于具有某些性质的函数的计数问题。这是合理的，因为许多计数问题可以被视为计算将一个集合中的元素分配到另一个集合中的元素的方式数量。

例 3.8.6

你决定把你的视频游戏收藏送出去，以便更好地把时间花在学习高等数学上。在以下条件下，你有多少种方式可以做到这一点：

1. 你想把你3款不同的PS4游戏在5个朋友之间分配，使得没有任何朋友得到超过一款游戏？

2. 你想把你 8 款不同的 3DS 游戏分给 5 位朋友吗？

3. 你想把你那 8 个不同的 SNES 游戏分配给 5 个朋友，使得每个朋友至少得到一个游戏吗？

在每种情况下，将计数问题建模为一个函数计数问题。
解答。

1. 我们必须使用三个游戏（称为 1、2、3）作为定义域，并使用 5 个朋友（a、b、c、d、e）作为陪域（否则当某个朋友没有得到任何游戏时，函数就无法在整个定义域上定义）。那么，以 $\{1, 2, 3\}$ 为定义域、以 { , , , , } 为陪域的函数有多少个？答案是 $5^3 = 125$，因为我们可以将 5 个元素中的任意一个指定为 1 的像，将 5 个元素中的任意一个指定为 2 的像，并将 5 个元素中的任意一个指定为 3 的像。但这并不是我们计数问题的正确答案，因为这些函数中有一个是 $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$；一个朋友可以得到不止一个游戏

游戏。我们真正需要做的是计数 *injective* 个函数。这给出 (5, 3) = 60 个函数，这就是我们计数问题的答案。

2. 再次，我们需要将这 8 个游戏作为定义域，将这 5 位朋友作为陪域。我们在计数所有函数，因此分配这些游戏的方式数是 5^8。

3. 这个问题更难。以游戏作为定义域、朋友作为陪域（反过来将不会给出一个函数）。确保每个朋友至少得到一个游戏，意味着陪域中的每个元素都在值域中。换句话说，我们在寻找 *surjective* 函数。你如何计算这些?

在例 3.2.13 中，我们看到了如何计算所有函数（使用乘法原理），而在例 3.4.7 中，我们学习了如何计算单射函数（使用排列）。满射函数并不那么容易计数（除非定义域的大小小于陪域，在这种情况下一个也没有）。

这个想法是计算那些*not*满射的函数，然后从函数的总数中减去它。当陪域中包含两个元素时，这种方法效果非常好:

例 3.8.7

有多少个函数 : {1, 2, 3, 4, 5} → { , } 是满射的?

解答。总共有 2^5 个函数，分别有两种选择可以决定如何将定义域的 5 个元素映射到值域中。现在，在这些函数中，*not* 满射的函数必须排除一个或多个值域中的元素。因此，首先考虑 不在值域中的情况。这种情况只有一种可能 : 所有元素都映射到 。或者，我们可以排除 不在值域中。然后所有元素都映射到 ，所以只有一个这样的函数。这些是函数无法是满射的唯一方式（没有函数同时排除 和 从值域中），所以总共有 $2^5 - 2$ 个满射函数。

当对域中有三个元素时，现在有三个选择可以排除范围中的单个元素。此外，我们还可以选择一对两个元素从范围中排除，并且必须确保我们不会重复计数。现在是使用容斥原理的时候!

例 3.8.8

有多少个从 {1, 2, 3, 4, 5} 到 → { , , } 的满射函数?

解答。再次从函数的总数开始：3^5 (，因为定义域中的五个元素中的每一个都可以映射到陪域中的三个元素中的任意一个)。

现在我们来计数那些是 *not* 满射的函数。

首先排除 从值域中。然后我们有两种选择（ 或 ）来决定如何映射域中的每个元素。因此，排除 的情况下有 2^5 个函数。类似地，排除 的情况下有 2^5 个函数，排除 的情况下有 2^5 个函数。那么我们是否已经统计了所有非满射的函数？是的，但事实上，我们有些函数被重复统计了。例如，将所有元素映射到 的函数，是我们在排除 时计算的 2^5 个函数之一，也是我们在排除 时计算的 2^5 个函数之一。我们必须减去所有特别排除两个元素的函数。当我们排除 和 时，有 1 个函数（所有元素都映射到 ），当我们排除 和 时，有 1 个函数，当我们排除 和 时，也有 1 个函数。

我们使用容斥原理（PIE）：为了计算非满射的函数，我们分别把排除 、 和 的函数数目加起来；然后减去排除成对元素的函数数目。接着我们会把排除三个元素一组的函数再加回来，只是并不存在这样的函数。我们发现，*not* 满射的函数的数量是

$$2^5 + 2^5 + 2^5 - 1 - 1 - 1 + 0.$$

也许一种更具描述性的写法是

$$\binom{3}{1}2^5 - \binom{3}{2}1^5 + \binom{3}{3}0^5.$$

因为每一个 2^5 都是从陪域的 3 个元素中选择 1 个将其从值域中排除的结果；三个 1^5 中的每一个都是从陪域的 3 个元素中选择 2 个将其排除的结果。把 1 写成 1^5 也同样合理：我们对定义域中的 5 个元素各自只有 1 种去向可选。

现在我们终于可以计算满射函数的数量：

$$3^5 - \left[\binom{3}{1}2^5 - \binom{3}{2}1^5\right] = 150.$$

你可能会担心，当陪域元素超过3个时，计数满射函数会变得过于繁琐。我们需要使用包容排斥原理（PIE），但当集合超过3个时，PIE的公式非常长。然而，我们运气不错。正如我们在上面的例子中看到的，排除单个元素的函数数量是相同的，无论排除哪个单个元素。类似地，排除一对元素的函数数量对每一对元素都是相同的。对于更大的陪域，我们将看到相同的行为，排除3个、4个及更多元素时也会如此。因此，我们可以直接一次性地加上或减去这些元素的数量，而不需要分别处理每个元素，只要你知道它们有多少个。这种方法有效。

就像本节中其他类型的计数问题那样，只不过现在各种集合组合的大小是一个数的幂，而不是二项式系数或阶乘。下面是陪域中有 4 个和 5 个元素时的情况。

例 3.8.9

1. 有多少个函数 : $\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{\ ,\ ,\ ,\ \}$ 是满射？ 2. 有多少个函数 : $\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{\ ,\ ,\ ,\ ,\ \}$ 是满射？

解答。

1. 一共有 4^5 个函数；我们将减去那些不是满射的函数。我们可以排除陪域中的任意一个元素，这样对于每个被排除的元素将剩下 3^5 个函数。这样计数过多，因此我们减去排除陪域中两个元素的函数，每一对给出 2^5 个函数。但这样又排除了过多，因此我们把排除陪域中三个元素的函数加回去，每一个三元组给出 1^5 个函数。排除单个元素的函数共有 $\binom{4}{1}$ 组，排除一对元素的函数共有 $\binom{4}{2}$ 组，排除三个元素的函数共有 $\binom{4}{3}$ 组。这意味着 *not* 为满射的函数数量是：

$$\binom{4}{1}3^5 - \binom{4}{2}2^5 + \binom{4}{3}1^5.$$

现在我们可以说，满射函数的数量是：

$$4^5 - \left[\binom{4}{1}3^5 - \binom{4}{2}2^5 + \binom{4}{3}1^5\right].$$

2. 满射函数的数量是：

$$5^5 - \left[\binom{5}{1}4^5 - \binom{5}{2}3^5 + \binom{5}{3}2^5 - \binom{5}{4}1^5\right].$$

我们从函数总数 5^5 中减去所有非满射的函数。可以从陪域中选择一个元素将其从值域中排除的方式有 $\binom{5}{1}$ 种，而每一种对应 4^5 个函数。但这样会发生重复计数，因此我们使用容斥原理（PIE），再减去从值域中排除两个元素的函数：可排除的两个元素有 $\binom{5}{2}$ 种选择，而每一对对应 3^5 个函数。这样减得过多，所以我们再把从值域中排除 3 个元素的函数加回来：选择要排除的 3 个元素有 $\binom{5}{3}$ 种，然后有 2^5 个函数

对于每一种元素的选择。最后，我们再减去对于 $\binom{5}{4}$ 种 4 元素选择中的每一种、排除 4 个元素的那个单一函数。

如果你恰好精确地计算这个数，你会得到 120 个满射。这也恰好是 5! 的值。这看起来似乎是一个惊人的巧合，直到你意识到，任何满射函数 ： → ，只要 | = | |是有限的，就必然是一个双射。在这种情况下，双射的数量总是 | |!。我们在这里得到的是下面这个恒等式的一个 *combinatorial proof*:

$$n^n - \left[\binom{n}{1}(n-1)^n - \binom{n}{2}(n-2)^n + \cdots + \binom{n}{n-1}1^n\right] = n!.$$

我们已经看到，计数满射函数是容斥原理高级用法的又一个很好的例子。此外，计数单射函数实际上等同于排列，而计数所有函数则有一种解法，类似于那些顺序重要但允许重复的计数问题（例如从给定的一组字母可以组成多少个单词）。

这些并不仅仅是我们在本章中所开发技术的又几个例子。恰恰相反：我们在本章中学到的一切，都是 *counting functions* 的一个例子！

例 3.8.10

使用从 到 的八个字母可以组成多少个五字母单词？其中有多少个不包含重复字母？

解答。到现在为止，存在 8^5 个单词，以及没有重复字母的 (8, 5) 个单词，应该不足为奇。这里的新要点在于我们实际上是在计数函数。对于第一个问题，我们是在计数从 $\{1, 2, \ldots, 5\}$ 到 { , , . . . , } 的所有函数。定义域中的数字表示单词中字母的 *position*；陪域表示可以分配到该位置的字母。如果我们要求没有重复字母，那么就是在要求单射函数。

如果 和 是 *any* 集合，且 | | = 为 5、| | = 为 8，那么从 → 的函数 的数量是 8^5，而单射的数量是 (8, 5)。因此，如果你能将你的计数问题表示为一个函数计数问题，那么大部分工作就已经完成了。

示例 3.8.11

$\{1, 2, \ldots, 9\}$ 有多少个子集？有多少个 9 位比特串（任意权重）？

解答。我们在第3.1节中看到，这两个问题的答案都是2^9，因为我们可以对集合中的每一个9个元素（比特串中的位置）回答是或否（或0或1）。但是，2^9也看起来像是通过计数函数得到的答案。实际上，如果你计数所有的函数 ： $\to$ ，且 $|\ | = 9$ 和 $|\ | = 2$，这正是你得到的答案。

这很有道理！设 $= \{1, 2, \ldots, 9\}$，并且 $= \{\ ,\ \}$。我们给集合中的每个元素分配一个“是”或“否”。或者用比特串的语言来说，我们把比特串中的 9 个位置作为定义域，把集合 $\{0, 1\}$ 作为陪域。

到目前为止，我们还没有使用函数作为二项系数（组合数）的模型。请花一点时间思考一下组合与排列之间的关系，具体来说是 $\binom{9}{3}$ 和 $(9, 3)$。我们 *do* 已经有了 $(9, 3)$ 的函数模型。这是从一个大小为 3 的集合（例如 $\{1, 2, 3\}$）到一个大小为 9 的集合（例如 $\{1, 2, \cdots, 9\}$）的 *injective* 个函数的数量，因为将定义域中的第一个元素映射到哪里有 9 种选择，然后第二个只有 8 种选择，第三个有 7 种选择。例如，这个函数可能如下所示：

$$f(1) = 5 \qquad f(2) = 8 \qquad f(3) = 4.$$

这是一个不同于以下的函数：

$$f(1) = 4 \qquad f(2) = 5 \qquad f(3) = 8.$$

现在，$(9, 3)$ 会正确地将这些视为不同的结果，但 $\binom{9}{3}$ 会把这些（以及其他一些）只计为一个结果。事实上，从函数的角度来看，$\binom{9}{3}$ 只是计算单射函数可能的值域数量。这并不令人意外，因为二项系数计算的是子集，而值域是陪域的一个可能子集。[5]

虽然可以将组合解释为函数，但或许更好的建议是在函数并非恰当解释计数问题的方式时，改用组合（或“棍子和石头”方法）。

3.8.5 练习题

1. 你最喜欢的免税快餐店的一美元菜单上有 7 种商品。你有 \$16 可花。如果你把钱全部花完，并且：你能买到多少种不同的餐食组合?

   a. 至少购买每种商品各一件。

   b. 可能跳过一些项目。

   c. 每种物品不要超过 2 个。

[5]A more mathematically sophisticated interpretation of combinations is that we are defining two injective functions to be *equivalent* if they have the same range, and then counting the number of equivalence classes under this notion of equivalence.

2. 在熬夜学习数学之后，你和你的朋友决定去你们最喜欢的免税快餐墨西哥餐厅 *Burrito Chime*。你决定从一美元菜单点餐，该菜单共有 6 种商品。你们这一行人有 \$17 可花（并且会全部花掉）。

a. 有多少种不同的订单是可能的？（下单的 *order* 顺序并不重要，只在于点了哪些商品以及每种商品点了多少。） b. 如果你想至少每种商品各要一件，有多少种不同的订单是可能的？ c. 如果你不想任何一种商品超过 4 件，有多少种不同的订单是可能的？

3. 在又上一节体育课之后，你需要把14个相同的躲避球收进5个箱子里。这一次，每个箱子最多只能放6个球。你有多少种放置方式？

4. 考虑方程 $_1 + \ _2 + \ _3 + \ _4 = 19$。对于所有 $\in \{1, 2, 3, 4\}$，在 $1 \leq \ _i \leq 6$ 的条件下，有多少个解？

5. 假设你计划把7颗金星奖励给你班级里的12名学生中的一些人。每名学生最多只能得到一颗星。你有多少种分配方式？

a. 使用帕斯卡三角形求出数值答案。

a. 使用容斥原理。

6. 有多少个排列 $\{1, 2, 3, 4\}$ 保持恰好一个元素不变？

7. 12位某个年龄段的女士在博物馆的帽子寄存处寄存她们的红色帽子。当她们离开时，帽子寄存员随机地归还帽子。恰好8位女士能收到自己帽子的方式有多少种（其余4位女士不能收到自己的帽子）？

8. 格林奇偷偷溜进一间房间，里面有 8 份分别送给 8 个不同人的圣诞礼物。他接着把礼物上的姓名标签互相调换。如果满足以下条件，他可以有多少种做法：

a. 不允许任何礼物保持其原标签吗？解释你答案中的每个术语代表什么。 b. 恰好有4个礼物保持其原标签？解释。 c. 恰好有7个礼物保持其原标签？解释。

9. 考虑函数 $: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ \}$。有多少个函数具有如下性质：(1) $\neq$ 或 (2) $\neq$ ，或两者同时成立？

10. 考虑集合 和 ，且$|\ | = 8$ 和 $|\ | = 5$。多少个函数 $:\ \to$ 是满射的？

11. 设 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$。有多少个单射函数 $: \to$ 具有如下性质：对每个 $\in$ ，$(\ ) \neq$ ？

3.8.6 附加练习

1. 基于上一问，给出该恒等式的一个组合证明：

$$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k} - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \binom{n+k-(2j+1)}{k-2j}.$$

2. 通过写出 {1, 2, 3, 4} 的所有排列，并划掉其中不是错位排列的，来说明错位排列的计数是如何进行的。使用 PIE 记录被你多次划掉的排列。

3. 设 $_n$ 为 个对象的错排数。例如，使用本节的技巧，我们可得：

$$d_3 = 3! - \left(\binom{3}{1}2! - \binom{3}{2}1! + \binom{3}{3}0!\right).$$

我们可以使用 $\binom{n}{k}$ 的公式将这一切用阶乘来表示。化简之后，对于 $_3$ 我们将得到

$$d_3 = 3!\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right).$$

将其推广以找到 $_n$ 的一个更优雅的公式。加分题：当 很大时，所有排列中大约有多少比例是错排？运用你在微积分中关于泰勒级数的知识。

3.9 本章小结

Investigate!

假设你有一大盒动物饼干，里面包含10种不同动物的饼干，而且每一种都有很多。对于下面的计数问题，请仔细考察它们的相同点和不同点，然后给出答案。所有答案都属于以下之一:

$$P(10,6), \quad \binom{10}{6}, \quad 10^6, \quad \binom{15}{9}.$$

1. 你能排出多少种包含6块饼干的动物游行队列?
2. 你可以排成多少种由6块动物饼干组成的动物游行队列，使得动物按字母顺序出现?
3. 将6种不同的动物按字母顺序排列，有多少种方式?
4. 如果6种不同的动物可以按任意顺序排成一排，有多少种排法?
5. 给6个孩子每人一个动物饼干，有多少种给法?
6. 有多少种方式可以给6个孩子每人一个动物饼干，且确保没有两个孩子得到相同的动物?
7. 将6只长颈鹿分给10个孩子有多少种方式?
8. 写一个关于给孩子们动物饼干的问题，其答案是 $\binom{10}{6}$。

在本章中我们已经掌握了多种不同的计数技巧，因此可能很难判断在何时应用哪一种技巧。确实，很容易混淆，并在给定的问题中使用错误的计数方法。通过练习，你会不断进步。随着练习的深入，你会开始注意到一些趋势，这些趋势可以帮助你区分不同类型的计数问题。以下是一些建议，或许能在你决定如何着手解决计数问题以及检查你的解是否正确时提供帮助。

- 记住，你是在某个 *list of outcomes* 中计数项目的数量。写下这个列表的一部分。写下列表中间的一个元素——你是如何判断你的元素确实在列表中的?你提出的答案会不会让你多次得到这个元素?
- 如果在列表中生成一个元素涉及选择某些东西（例如，

选择一个字母或选择一个放置字母的位置等），你所选择的事物可以重复吗？记住，排列和组合是从一个集合 *without* 中选择对象，可重复。

- 顺序重要吗？这里要小心，并且要确保你清楚自己的答案真正意味着什么。通常，当以不同的顺序选择相同的对象会得到不同的结果时，我们就说顺序是重要的。当顺序 *does not* 重要时，会使用组合以及“棍子和石头”。

- 在考虑顺序和是否允许重复时，有四种可能性。如果顺序重要且允许重复，答案将形如 ^{k}。如果顺序重要且不允许重复，我们有 (,)。如果顺序不重要且允许重复，使用隔板法。如果顺序不重要且不允许重复，使用 $\binom{n}{k}$。但要小心：这只适用于你在进行“选择”的情况，在确定属于哪一种情形之前，你应该清楚自己到底在选择什么。

- 思考如何用集合或函数来表示你的计数问题。我们知道如何对不同类型的集合和不同类型的函数进行计数。

- 正如我们在组合证明中看到的那样，你通常可以用不止一种方法解决一个计数问题。这样做，然后比较你的数值答案。如果它们不一致，说明哪里出了问题。

虽然我们已经介绍了许多计数技巧，但实际上对于*enumerative combinatorics*这一庞大主题，我们只是触及了皮毛。就在你阅读这段文字的同时，仍有数学家在这一领域进行原创研究。计数真的可能非常困难。

在下一章中，我们将从一个截然不同的方向来探讨计数问题，并在此过程中同时回答无穷多个计数问题。我们将为相关问题创造*sequences*个答案。

本章回顾

1. 你有 15 份礼物要分给你的 5 个孩子。如果满足以下条件，有多少种分配方式：

   a. 礼物是相同的，并且每个孩子至少得到一份礼物？ b. 礼物是相同的，并且有些孩子可能得不到礼物？ c. 礼物是不同的，并且有些孩子可能得不到礼物？ d. 礼物是不同的，并且每个孩子至少得到一份礼物？

2. 对于以下每一个计数问题，说明答案是 $\binom{10}{4}$、 (10, 4)，还是都不是。如果你的答案是“都不是”，请说明正确的答案应当是什么。

(a) 从 (0, 0) 到 (10, 4) 有多少条最短晶格路径?

(b) 如果你有 10 个领结，并且你想为下周从中选出 4 个，你有多少种选择?

(c) 假设你有 10 个领结，并且在接下来的 4 天里每天都会佩戴一个不同的领结。你有多少种选择?

(d) 如果你想在下周（周一到周日）从你的10条领结中佩戴其中4条，有多少种方式可以实现?

(e) 从10位同学中，给你最喜欢的4位朋友排名有多少种方式?

(f) 如果有10名学生来到他们教授的办公室，但一次只能容纳4人，那么有多少种不同的由4名学生组成的组合可以最先见到教授?

（g）可以用字母表的前 10 个字母组成多少个 4 个字母的单词?

(h) 用字母表前10个字母能组成单词“cake”的方式有多少种?

（i）将10个相同的苹果分配给4个孩子，有多少种分配方式?

(j) 如果你有10个孩子（并且住在一只鞋子里）和4种麦片，你的孩子们可以有多少种方式吃早餐?

（k）在一个由10个二进制数字组成的字符串中，恰好安排4个1，有多少种方式?

（l）你想选择 4 个互不相同的个位数字作为你的乐透号码。你有多少种选择?

(m) 有10个孩子想吃冰淇淋。你有4种口味。给孩子们任意数量的冰淇淋，一共有多少种分配方式?

（n）从 $\{1, 2, \ldots, 10\}$ 到 $\{\ ,\ ,\ ,\ \}$ 的 1-1 函数有多少个?

(o) 从 $\{1, 2, \ldots, 10\}$ 到 $\{\ ,\ ,\ ,\ \}$ 存在多少个满射函数?

(p) 你的10条领结中的每一条都与4副吊带裤搭配。你可以搭配多少种服装?

(q) 聚会结束后，10个孩子每人从4种派对小礼物中选择一种。共有多少种结果?

(r) 集合 $\{1, 2, \ldots, 10\}$ 的 6 元素子集有多少个

(s) 有多少种方法可以把11个孩子分成5个有名称的队伍?

(t) 方程 $_1+{}_2+\cdots+{}_5=6$ 有多少个解，其中每个 $_i$ 都是非负整数？ (u) 你的乐队要去巡演。开车可达的城市有 10 个，但只够时间演出其中的 4 个。你在选择巡演城市时有多少种选择？ (v) 对于你选择的这 4 个城市，有多少种不同的演出顺序？ (w) 在可供选择的 10 种早餐麦片中，你想吃 4 碗。你有多少种不同的选择方式？ (x) 有 10 种不同类型的饼干。你想做一个由 4 块饼干组成的叠层。你可以做出多少种不同的叠层？ (y) 从你位于 (0,0) 的家出发，你想去位于 (5,4) 的甜甜圈店或位于 (3,6) 的那一家。你可以走多少条不同的路径？ (z) 有多少个 10 位数字不包含由 4 个重复数字组成的子串？

3. 回想一下，你拥有9条普通领带和5条蝴蝶结领带。你意识到，在小丑学院的面试中系超过两条领带也是可以的。

a. 你必须选择一些领带来佩戴。从一条都不戴到全部都戴都可以。你有多少种选择？ b. 如果你想至少佩戴一条普通领带和一条蝴蝶结领带，并且也可以选择一直到佩戴全部领带，那么你在选择佩戴哪些领带时有多少种选择？ c. 如果你恰好佩戴 9 条普通领带中的 3 条，以及 5 条蝴蝶结领带中的 2 条，那么在选择佩戴哪些领带时你有多少种选择？ d. 一旦你选定了 3 条普通领带和 2 条蝴蝶结领带，在必须将一条蝴蝶结领带戴在最外层的前提下，你有多少种佩戴顺序？

4. 给出一个计数问题，其答案是 $8\cdot 3\cdot 3\cdot 5$。再给出一个问题，其答案是 $8+3+3+5$。

5. 考虑形如 $= {}_1\,{}_2\,{}_3\ldots{}_n$ 的数，其中共有 位数字，每一位数字都取自集合 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}。例如，若 $=4$，则数 $= {}_1\,{}_2\,{}_3\,{}_4$ 将由来自集合 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} 的 4 位数字组成。

令 $=11$。

a. 这样的数字有多少个？

b. 有多少这样的数字，其数字的 *sum* 是偶数？ c. 有多少这样的数字包含的偶数数字比奇数数字多？

6. 在最近一项针对航空公司乘客的小型调查中，27 人表示他们在去年乘坐过美国航空，20 人乘坐过捷蓝航空，29 人乘坐过大陆航空。在这些人中，13 人表示他们乘坐过美国航空和捷蓝航空，10 人乘坐过捷蓝航空和大陆航空，11 人乘坐过美国航空和大陆航空。共有 6 名乘客乘坐过这三家航空公司。

调查了多少名乘客？（假设上述结果构成了整个调查。）

7. 回顾一下，所谓 10 位字符串，是指由二进制数字组成、长度为 10 的字符串。

a. 总共有多少个 10 位二进制字符串?

b. 有多少个权重为 5 的 10 位字符串?

c. 集合 {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} 的子集有多少个包含恰好 5 个元素?

8. 在 $(\ + 3)^{15} + \ ^{3}(\ + 5)^{21}$ 的展开式中， ^{10} 的系数是多少?

9. 有多少个包含恰好 3 个元音字母的 10 个字母的单词？（例如，一个包含 5 个元音的 8 个字母单词是 “aaioobtt”；本题中不要把 “y” 视为元音。）如果不允许字母重复，又会怎样?

10. 对于以下各项，求从 (4, 4) 到 (10, 10) 的最短格点路径的数量，这些路径：

a. 经过点 (6, 5)。

b. 避开（不经过）点 (9, 9)。 c. 要么经过 (6, 5)，要么经过 (9, 9)（或两者都经过）。

11. 你住在网格镇第2街和第4街的拐角处，在第17街和第20街的拐角处的一栋建筑里工作。有多少条路线可以让你从家到工作地点再返回家，但返程走的是一条不同的路线?

12. 有多少个 11 位二进制串以 101 开头或以 10 结尾，或两者兼有?

13. 有多少个权重为 5 的 15 位比特串以 101 开头，或以 10 结尾，或两者兼有?

14. 我们用字母集合 、 、 、 、 、 ……5来构造字母的单词，方式是只提供前5个字母，因此会使用到所有字母。

a. 在不重复使用字母的情况下，我们能从这些字母中组成多少个 5 字母单词，使其不包含由连续字母构成的子词“bad”？ a. 有多少个单词不包含以不一定连续（但保持顺序）的字母形式出现的子词“bad”？

15. 用格路径解释为什么 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n}$。

16. 假设你有16张一美元的钞票要作为奖品发给你最优秀的6名离散数学学生。如果：

a. 6名学生中的每一位至少得到1美元?

b. 一些学生可能什么都得不到? c. 每个学生至少得到1美元，但不超过8美元?

17. 有多少个函数 : {1, 2, 3, 4} → {1, 2, 3, 4} 满足:

a. (1) = 1 或 (2) = 2（或两者）? b. (1) ≠ 1 或 (2) ≠ 2（或两者）? c. (1) ≠ 1 *and* (2) ≠ 2，且是单射? d. 是满射，但 ∀ ∈ {1, 2, . . . , 4}， ( ) ≠ ?

18. 有多少个函数将 {1, 2, 3, 4, 5} 映射到 *onto* {1, 2, 3}（即，有多少个 *surjections*? ）

19. 为了感谢你的数学教授整个学期都做得如此出色，你决定给教授烤一些饼干。你会制作13种不同类型的饼干。

a. 如果你想给教授 8 种不同类型的饼干，你可以选择多少种不同的饼干类型组合? 解释你的答案。 b. 为了保持趣味性，你决定每种类型的饼干数量都不同。如果你仍然想选择 8 种饼干类型，你可以用多少种方式来选择这些饼干类型，并决定哪一种最多、第二多，等等? 解释你的答案。 c. 你又改变了主意。这一次你决定总共制作 23 块饼干。每块饼干都可以是你会烘焙的 13 种饼干中的任意一种（允许有些类型不做）。你有多少种选择? 解释。 d. 你意识到之前的计划没有考虑到展示效果。这一次，你再次想要制作 23 块饼干，每一块都可以是 13 种饼干中的任意一种。然而，现在你计划把饼干做成数字 1、2、……、23 的形状。你有多少种方式来选择将哪种饼干做成哪一个数字? 解释。 e. 上一个计划的唯一缺陷是，你的教授可能无法品尝到全部 13 种不同的饼干。要求每一种饼干至少出现一次，在这种条件下，你有多少种方式来选择将哪种饼干做成哪一个数字? 解释。

20. 对于前一个问题的哪些部分（练习 3.9.19），将计数问题解释为计数某些函数是有意义的? 请说明定义域和值域应该是什么，以及你是在计数所有函数、单射、满射，还是其他类型的函数。

Chapter 4

序列

我们已经将 *finite* 序列作为一种离散结构和可计数的对象加以考察。在本章中，我们将考虑可能是 *infinite* 的数列。当序列本身是无限的时，询问可能有多少个序列就不再有意义，但它仍然与计数存在一个有趣的联系：序列中的每一项都可以表示对某个计数问题的一个答案！

4.1 描述序列

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 使用恰当的记号来表示一个序列。2. 解释序列的通项公式与递归定义之间的区别。3. 根据序列的描述求出其递归定义。

4.1.1 本节预览

Investigate!

相传在河内有一座修道院，院中有一座宏伟的大厅，内立着三根高大的柱子。第一根柱子上放着64个巨大的圆盘（或垫圈），大小各不相同，从大到小依次叠放。修道院的僧侣们世世代代都在移动这些圆盘，试图将整叠圆盘移到第三根柱子上。然而，由于圆盘的尺寸限制，僧侣们一次只能移动一个。每移动下一个圆盘之前，必须先将当前圆盘放到某一根柱子上。而且因为这些圆盘既沉重又脆弱，僧侣们绝不能把较大的圆盘放在较小的圆盘之上。当僧侣们最终完成这项任务之时，世界将走向终结。

你的任务：弄清楚在我们需要开始担心世界末日之前还要过多久。

这个谜题叫做 *Tower of Hanoi*。你的任务是找到完成谜题所需的最小步数。这听起来确实像是在进行计数。

问题。也许你有答案？如果没有，我们还能尝试什么？

谜题的答案取决于你需要移动的盘子数量。实际上，我们可以先回答1个盘子的情况，然后是2个盘子，再到3个盘子，依此类推。如果我们列出每个盘子数量的答案，我们将得到一个数字序列。序列中的第 项就是这个问题的答案：“完成具有 个盘子的汉诺塔谜题所需的最小移动次数是多少？”

试试看。找出将 个盘子移动到另一个柱子的最小步数，适用于不同的 值。

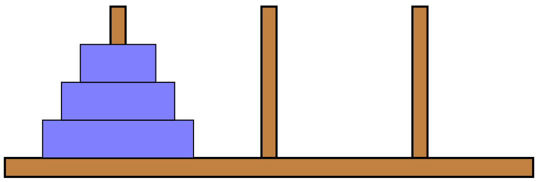


图 4.1.1 汉诺塔问题。

你可能会疑惑，为什么我们要构造这样一个序列，而不是直接回答问题。通过观察这个数列的增长方式，我们可以更深入地理解问题。对于少量圆盘，所需移动次数很容易计算。然后我们可以在该序列的前几项中寻找规律。希望这能提示我们一种方法，用来求出该序列的第 项，也就是我们问题的答案。当然，我们还需要验证我们所猜测的规律是否正确，并且这个正确的规律确实能够给出我们认为的第 项；但如果一开始没有一个公式，就不可能证明你的公式是正确的。

在本节中，我们将探讨如何以各种方式表示数字序列，以及可以用来描述序列的两种公式。我们将看到，序列本身也是值得研究的有趣数学对象。

活动预览

让我们感受一下汉诺塔谜题中的序列。

1.

(a) 将 2 个圆盘移动到另一根柱子上所需的最少步数是多少？(b) 将 3 个圆盘移动到另一根柱子上所需的最少步数是多少？(c) 将 4 个圆盘移动到另一根柱子上所需的最少步数是多少？(d) 为了求将 5 个圆盘移动到另一根柱子上所需的最少步数，我们尝试将这个任务与移动 4 个圆盘的任务联系起来。以下每个任务各需要多少步？

a. 将 4 个最小的圆盘移动到第二根柱子：步。 b. 将最大的圆盘移动到第三根柱子：步。 c. 将 4 个最小的圆盘移动到第三根柱子（放在最大圆盘之上）：步。

因此，th e 将五个 d 移动所需的最少移动次数 isks 是：

（e）推广最后一个观察结论。设 $_n$ 表示将 个圆盘从起始柱移动到另一根柱子所需的最少移动次数。那么 $_{n-1}$ 表示将 -1 个圆盘移动到另一根柱子所需的移动次数。

给出用 $_{n-1}$ 表示 $_n$ 的公式。

4.1.2 序列与公式

序列只是一个有序的数字列表。不同于一个*set*的数字，序列中数字的顺序是序列的一个本质特征。基于这一原因，当我们使用变量来表示序列中的各项时，它们将看起来像这样：

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

为了同时指代该 *entire* 序列，我们将写作 $(\ _n)_{n\in\mathbb{N}}$ 或 $(\ _n)_{n\geq 0}$，或者有时在不够严谨的情况下，只写 $(\ _n)$（在这种情况下，我们假定该序列从 $_0$ 开始）。

我们可能会用另一个字母替换 ，而且有时我们会省略 $_0$，从 $_1$ 开始；在这种情况下，我们会用 $(\ _n)_{n\geq 1}$ 来指代整个序列。下标中的数字称为指标（index 的复数）。

虽然我们常常只是把数列看作一个有序的数字列表，但它实际上是一种函数。具体而言，数列 $(\ _n)_{n\geq 0}$ 是一个以 为定义域的函数，其中 $_n$ 是自然数 的像。稍后我们将以与你在代数或微积分中处理函数几乎相同的方式来操作数列。我们可以将一个数列上移或下移，将两个数列相加，或者求一个数列的变化率。这些操作与对函数所做的完全相同。

话虽如此，牢记严格的数学定义固然有帮助，但我们通常通过写出前几个项来描述数列。

例 4.1.2

你能找出以下序列中的下一个项吗?

1. $7, 7, 7, 7, 7, \ldots$
2. $3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
3. $1, 5, 2, 10, 3, 15, \ldots$
4. $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$
5. $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$
6. $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$
7. $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$
8. $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$
9. $3, 2, 1, 0, -1, \ldots$
10. $1, 1, 2, 6, \ldots$

解答。不，你不能。

你可能会猜测接下来的项是：

1. 7
2. -3
3. 4
4. 64
5. 49
6. 34
7. 28
8. 17
9. -2
10. 24

事实上，那些正是我在编造这个例子时心中所想的序列的后续项，但并没有办法确定它们是正确的。尽管如此，我们仍然经常会这样做。给定一个序列的前几项，我们可以问：该序列中的模式暗示接下来的项是什么。

鉴于序列的任何有限个初始项都不足以确定我们所处理的是哪一个序列，我们需要找到另一种方式来指定一个序列。我们考虑两种主要的方法来做到这一点：

定义 4.1.3 闭公式。

序列（ $_n$） $_{n\in\mathbb{N}}$的闭式公式，是指使用对 进行固定且有限次数运算来表示$_n$ 的公式。这正是你通常所理解的关于 的公式，就好像你是在用 来定义一个函数一样（因为你确实正是在这样做）。

定义 4.1.4 递归定义。

一个序列 ($_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的递归定义（有时也称为归纳定义）由递推关系和初始条件组成：递推关系是一个将序列中的某一项与之前的项（索引较小的项）联系起来的方程，而初始条件是一份包含该序列若干项的列表（其项数比递推关系中的项数少一）。

It is easier to understand what is going on here with an example:

例 4.1.5

这里是一些数列的封闭公式：

- $a_n = n^2$.
- $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $a_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}}{\sqrt{5}}$.

注意在每个公式中，如果给定了 ，你可以直接计算$_n$：只需代入 。例如，在第二个序列中要找 $_3$，只需计算 $_3 = \frac{3(3+1)}{2}$。 = 6.

以下是一些序列的递归定义：

- $= 2\ _{n-1}$，且 $_0 = 1$。
- $= 2\ _{n-1}$ 与 $_0 = 27$。
- 一个 $= \ _{n-1} + \ _{n-2}$，其中 $_0 =$ 为 0，且 $_1 =$ 为 1。

在这些公式中，如果给定了 ，你不能直接计算$_n$；你首先需要找到 $_{n-1}$ (或 $_{n-1}$和 $_{n-2}$)。在第二个序列中，要找到 $_3$，你需要取2 $_2$，但要找到 $_2 = 2\ _1$，我们需要知道 $_1 = 2\ _0$。我们知道这些，因此我们可以通过这些方程追溯，找到 $_1 = 54$， $_2 = 108$，最后是 $_3 = 216$。

你也许会想，为什么我们要费心使用数列的递归定义。毕竟，用递归定义来求 $_n$ 比用闭式公式更困难。这确实如此，但为一个数列找到闭式公式也比找到递归定义更困难。因此，为了得到一个有用的闭式公式，我们可能先找到递归定义，然后再利用它来求出闭式公式。

示例 4.1.6

作为击败恶龙的奖励，国王承诺第一天给你一粒米，之后在这个月的其余时间里，每天给你的米粒数都是前一天的两倍。

为了不被欺骗，你讨价还价，让他也同意每天额外增加一粒米。

第30天你将收到多少粒米？

解答。我们可以写出序列 $(\ _n)_{n\geq 1}$ 的前几项

这给出了你在第 天获得的米粒数。我们得到

$$1, 3, 7, 15, \ldots,$$

因为，例如，在第4天，你取第3天拥有的米粒数（全部七粒），将其加倍再加1，得到15。第二天你会得到 $2 \cdot 15 + 1 = 31$。

通过实际计算这些值，我们立刻就能看出递推关系是什么：

$$a_n = 2a_{n-1} + 1.$$

这是合理的，因为该序列所建模的问题说明我们每天将谷粒的数量翻倍，然后再加 1。我们可以直接从题目中读出这个递推关系。

原始问题询问的是 $_{30}$。我们可以使用递推关系来求它，但首先需要求 $_{29}$，而要得到它又需要 $_{28}$，这又先需要 $_{27}$，依此类推。虽然我确信我们可以一直推回到已经求出的 $_{4}$，但这听起来工作量很大。

如果能有一个封闭公式，那就好多了。如果我们能够 *solve the recurrence relation* 并找到那个封闭公式，我们就可以直接把 30 代入 。

让我们猜一猜。它看起来这个序列接近于 2, 4, 8, 16, ……，其闭式公式是 2^n。那个序列的各项都比我们序列中的各项大 1，因此我们可能猜测

$$a_n = 2^n - 1.$$

说清楚一点，我们没有充分的理由相信这个猜测是正确的，但也许在本章后面我们会有。然而，如果它 *is* 正确，那么我们就稳了（而且已经对米饭厌烦到不行）：

$$a_{30} = 2^{30} - 1 = 1,073,741,823.$$

这并不是说递归定义在求解 $_n$ 时没有用。给定一个递归定义，你总是可以计算出 $_n$；只是可能需要一些时间。

示例 4.1.7

在由 $_n = 2\ _{n-1} -\ _{n-2}$ 定义的数列中求 $_6$，其中 $_0 = 3$ 且 $_1 = 4$。解。我们知道 $_6 = 2\ _5 -\ _4$。因此要找到 $_6$，我们需要找到 $_5$ 和 $_4$。那么

$$a_5 = 2a_4 - a_3 \qquad \text{and} \qquad a_4 = 2a_3 - a_2,$$

所以如果我们只要能找到 $_3$和 $_2$，就万事俱备了。当然

$$a_3 = 2a_2 - a_1 \qquad \text{and} \qquad a_2 = 2a_1 - a_0,$$

因此我们只需要找到 $_1$ 和 $_0$。但这些已给出。因此

$$\begin{aligned}
a_0 &= 3\\
a_1 &= 4\\
a_2 &= 2\cdot 4 - 3 = 5\\
a_3 &= 2\cdot 5 - 4 = 6\\
a_4 &= 2\cdot 6 - 5 = 7\\
a_5 &= 2\cdot 7 - 6 = 8\\
a_6 &= 2\cdot 8 - 7 = 9.
\end{aligned}$$

注意，现在我们可以猜测该数列第 项的一个闭式公式： $_n =$ $+ 3$。为了确保这始终有效，我们可以将这个公式代入递推关系：

$$\begin{aligned}
2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2((n-1)+3) - ((n-2)+3)\\
&= 2n + 4 - n - 1\\
&= n + 3\\
&= a_n.
\end{aligned}$$

不过，这还不够，因为可能存在多个满足同一递推关系的闭式公式；我们还必须检查我们的闭式公式在数列的初始项上是否一致。由于 $_0 = 0 + 3 = 3$ 和 $_1 = 1 + 3 = 4$ 是正确的初始条件，我们现在可以得出结论，已经得到了正确的闭式公式。

为数列寻找闭式公式，甚至递归定义，都并非易事。并不存在一种通用的方法。正如在计算积分或求解微分方程时一样，掌握一套可供运用的技巧很有帮助，但有时并没有简单的答案。

一种有用的方法是将给定的序列与另一个我们已经知道其闭式公式的序列联系起来。为此，我们需要一些“已知序列”，用来与未知序列进行比较。下面列出了一些值得了解的序列。我们将在接下来的章节中验证这些公式。

常见序列。

1, 4, 9, 16, 25, …… 平方数。序列 ($_n)_{n\geq 1}$ 的闭式公式为 $_n =$ ^{2}

1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . 三角数列。序列 $(\ _n)_{n\geq 1}$ 的闭式公式为 $_n = \frac{n(n+1)}{2}$。1, 2, 4, 8, 16, 32, . . . 2的幂。序列 $(\ _n)_{n\geq 0}$ 的闭式公式为 $_n = 2^n$。1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . 斐波那契数列（或斐波那契序列），通过递归定义为 $_n = \ _{n-1} + \ _{n-2}$，其中 $_1 = \ _2 = 1$。

例 4.1.8

使用公式 $_n = \frac{n(n+1)}{2}$ 和 $_n = 2^n$ 来找到与以下序列一致的闭式公式。假设每个第一个项对应 $= 0$。

1. $(\ _n)$: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ... 2. $(\ _n)$: 3, 5, 9, 17, 33, ... 3. $(\ _n)$: 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ... 4. $(\ _n)$: 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... 5. $(\ _n)$: 0, 1, 3, 7, 15, 31, ... 6. $(\ _n)$ 3, 6, 12, 24, 48, ... 7. $(\ _n)$: 6, 10, 18, 34, 66, ... 8. $(\ _n)$: 15, 33, 57, 87, 123, ...

解答。我们希望将这些序列与三角数（0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . .）进行比较，当我们从 n = 0 开始时，以及与 2 的幂：（1, 2, 4, 8, 16, . . .）。

1. (1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, . . .)。注意，如果我们从每一项中减去 1，就得到序列 $(\ _n)$。因此我们有 $_n = \ _n + 1$。于是一个闭式公式是 $_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$。对前几个 做一个快速检验即可确认这是正确的。

2. (3, 5, 9, 17, 33, . . .)。这个数列中的每一项比2的某个幂大1，因此我们可以猜测其闭式公式为 $_n = \ _n + 1 = 2^n + 1$。若我们尝试这个公式，则得到 $_0 = 2^0 + 1 = 2$ 和 $_1 = 2^1 + 1 = 3$。我们错了，因为索引被错位了。我们真正想要的是 $_n = \ _{n+1} + 1$，从而得到 $_n = 2^{n+1} + 1$。

3. (0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, . . .)。注意到所有这些项都是偶数。如果我们提取出一个 2 会发生什么？我们得到 ($_n$)！更精确地说，我们发现 $_n/2 = \ _n$，因此这个序列的闭合公式是 $_n = \ (\ + 1)$。 4. (3, 6, 10, 15, 21, 28, . . .)。这些都是三角数。然而，我们从 3 作为初始项开始，而不是从作为第三项开始。因此，如果我们将 2 代入 $_n$ 的公式中，我们就能得到结果。因此，闭合公式是 $_n = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$ (，其中 $+ 3$ 来自 $(\ + 2) + 1$)。将序列看作函数时，我们通过 2 进行水平平移：$_n = \ _{n+2}$，这将使图形向左平移 2 个单位。

5. (0, 1, 3, 7, 15, 31, . . .)。尝试在每个项上加 1，我们得到 2 的幂。你可能会猜到这一点，因为每一项比前一项大约是两倍（2 的幂是 *exactly* 前一项的两倍）。封闭公式：$_n = 2^n - 1$。

6. (3, 6, 12, 24, 48, . . .)。这些数字每次也都在翻倍，但也都是3的倍数。将每个数字除以3得到1, 2, 4, 8, . . .。啊哈。我们得到封闭公式 $_n = 3 \cdot 2^n$。

7.（6，10，18，34，66，. . .）。为了从一项到下一项，我们几乎将每一项加倍。所以也许我们可以把它与 2^n 联系起来。是的，每一项都比某个 2 的幂大 2。所以我们得到 $_n = 2^{n+2} + 2$（其中的 $+ 2$ 是因为第一项比 2^2 大 2，而不是 2^0）。或者，我们也可以把这个序列与本例中的第二个序列联系起来：从 3，5，9，17，. . . 开始，我们看到这个序列是那个序列各项的两倍。那个序列的闭式公式是 $_n = 2^{n+1} + 1$。这里的序列将是它的两倍，因此 $_n = 2(2^n + 1)$，这与我们之前得到的结果相同。

8. (15, 33, 57, 87, 123, . . .)。试着将每个项除以 3。这样得到的序列是 5, 11, 19, 29, 41, . . .。现在对每个项加 1：6, 12, 20, 30, 42, . . .，这就是本例中的 ($_n$)，除了是从 6 开始，而不是 0。所以让我们从公式 $_n = \ (\ + 1)$ 开始。为了从 6 开始，我们进行移位：$(\ + 2)(\ + 3)$。但这多了一次，所以减去 1：$(\ + 2)(\ + 3) - 1$。这样我们就得到了我们的序列，但除以 3。所以我们想要的是 $_n = 3((\ + 2)(\ + 3) - 1)$。

4.1.3 部分和与差分

某些数列自然地作为另一个数列的项和出现。

例 4.1.9

Sam 记录她在“做很多俯卧撑挑战”的每天完成了多少个俯卧撑。设 $(\ _n)_{n\geq 1}$ 为描述该挑战第 天完成的俯卧撑数量的数列。该数列开始

$$3, 5, 6, 10, 9, 0, 12, \ldots.$$

描述一个序列 $(\ _n)_{n\geq 1}$，它给出 Sam 在第 天之后所做俯卧撑的*total number*。

解。我们可以很容易地求出这个序列的各项。

$$3, 8, 14, 24, 33, 33, 45, \ldots.$$

这里 $_1$ 只是 $_1$，但随后

$$b_2 = 3 + 5 = a_1 + a_2,$$

$$b_3 = 3 + 5 + 6 = a_1 + a_2 + a_3,$$

等等。

一般来说，我们可以用几种方式来描述 $_n$。我们可以递归地将其描述为
，

$$b_n = b_{n-1} + a_n,$$

因为在 天之后完成的俯卧撑总数等于在 -1 天之后完成的数量，加上第 天完成的数量。

如果想要更接近一个闭式公式，我们可以写成

$$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

或者使用 *summation notation* 表示同样的内容：

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

然而，请注意，这些并不是真正的闭式公式，因为即使我们有了 $_n$ 的公式
，随着 的增加，我们仍然需要进行越来越多的计算。

给定任意序列 $(\ _n)_{n\in\mathbb{N}}$，我们总是可以通过形成一个新的序列 $(\ _n)_{n\in\mathbb{N}}$。

$$b_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

由于 $(\ _n)$ 的各项是序列 $(\ _n)$ 的初始部分之和，我们称 $(\ _n)$ 为 $(\ _n)$ 的部分和序列。不久我们将看到，有时可以从 $(\ _n)$ 的闭式公式得到 $(\ _n)$ 的闭式公式。

为简化这些求和的书写，我们将经常使用类似$\sum_{k=1}^{n}$ k 的记号。这表示把 从 1 变化到 时的所有 k 相加。

例 4.1.10

使用 $\sum$ 表示法重写求和式：

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$ 2. $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{50}$ 3. $6 + 10 + 14 + \cdots + (4\ \ - 2)$.

解答。

1. $\sum_{k=1}^{100} k$ 2. $\sum_{k=0}^{50} 2^k$ 3. $\sum_{k=2}^{n}(4k-2)$

它通常也很有用查看一个序列（ $_n$）的差分序列。这里我们指的是序列（ $_n$），其中

$$d_n = a_{n+1} - a_n.$$

例如，如果($_n$) = (1, 4, 9, 16, 25, . . .) (是平方数，那么 $_n$ = ^{2})，则差值序列为($_n$) = (3, 5, 7, 9, . . .)， 因为4 − 1 = 3, 9 − 4 = 5， 依此类推。我们还可以在这里找到差值序列的闭式公式，因为我们已经有了 $_n$的闭式公式。我们将得到

$$d_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

一般来说，从一个数列的闭式公式到差分数列的闭式公式是比较容易的。而反过来并不总是容易的。实际上，从一个差分数列开始，如何得到“原始”数列呢?

思考递归关系在这里是有帮助的。因为

$$d_n = a_{n+1} - a_n,$$

我们有那个

$$a_{n+1} = a_n + d_n.$$

这很有道理：要从一个序列的项到达下一项，你需要加上这两项之间的差值。啊！你加上了差值。所以 ***original sequence is the sequence of partial sums of the sequence of differences!***

在接下来的章节中，我们将看到理解差异的顺序可以精确地告诉我们在哪里寻找封闭公式。这些差异还暗示了如何创建递归定义。

示例 4.1.11

找到一个与这个数列的项一致的递推关系和初始条件：1, 5, 17, 53, 161, 485 . . ..

解答。找到递推关系会更容易，如果我们有一些问题的背景（比如汉诺塔问题）。然而，我们只有这个数列。记住，递推关系告诉你如何从前面的项得到后面的项。这里发生了什么？我们可以观察项之间的差异：4，12，36，108，……注意这些差距是按3的倍数增长的。原始数列也是如此吗？$1 \cdot 3 = 3$，$5 \cdot 3 = 15$，$17 \cdot 3 = 51$，依此类推。似乎我们总是得到比下一个项少2。啊哈！

所以 $_n = 3\ _{n-1} + 2$ 是我们的递推关系，初始条件是 $_0 = 1$。

4.1.4 Python中的序列

检查封闭公式是否与序列中的初始项一致，可以使用计算器，或者更好的是，使用像 Python 这样的编程语言。你可以通过定义一个返回序列中第 项的函数来实现这一点。

这里有一个例子：假设你想检查你为序列 $(\ _n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$ 找到的一个公式是否正确。也许你猜测 $_n = 2^n - 1$。试着运行下面的代码。（注意：在 Python 中， 符号表示别的含义，因此进行幂运算时我们使用 **。）

```
def a(n): return 2** n
-1 print (a (3) )
```

看起来很有希望，但我们应该小心：我们的序列以 $_0 = 1$ 开始，这使得 $_3 = 15$。现在尝试修改 a(n) 的定义（通过更改返回值），以得到正确的闭式公式。

也许你想打印出该序列的前 20 项？这很容易用 Python 实现，只需将这些项放入一个列表中：

```
定义 a(n): 返回 2**( n +1) - 1 序
列 = [] 对于 n 在 范围 (20) : 序
列 . 追加 (a(n)) 打印 ( 序列 )
```

注意，range(20) 从 0 开始，到 19 结束（它是列表 [0,1,2,...,19]）。

我们也可以使用 python 根据递归定义来生成一个序列的项。假设我们想要探索序列 $_n = 2\ _{n-1} + 1$，其初始条件为 $_0 = 1$。在 python 中，我们可以如下生成该序列。

```
```pythondef a(n):    if n == 0:        return 1    else:
return 2* a(n -1) +1# 只打印前10项for i in range(1
0):    print(a(i))```
```

你是否明白如何将递推关系转化为一个递归的 Python 函数？试着动手玩一玩上面的代码，探索其他序列。

4.1.5 阅读问题

1. 对于下面序列的公式，选择所有属于 *closed* 公式的（而不是 *recursive* 公式）。

A. $a_n = 3(n-1)+2$

B. $a_n = \dfrac{n^2+2n+3}{4n}$

C. $a_n = 3a_{n-1}+2$

D. $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$

2. 将左侧的每个序列拖动到与该序列一致的递推关系上。

$5, 5, 5, 5, 5, \ldots$	$a_n = a_{n-1}+1$
$2, 3, 5, 9, 17, \ldots$	$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$
$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$	$a_n = 2a_{n-1} - 1$
$3, 4, 7, 11, 18, \ldots$	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

3. 你有什么问题？写下至少一个关于本节内容的问题，可能是你或你的同学在阅读本节后会好奇的。

4.1.6 练习题

1. 对于具有闭式公式 $_n = {}^2 + 5 \quad + 4$ 的数列，求项 $_7$。 2. 考虑具有递推关系 $_n = {}_{n-1} + 6$ 且初始项为 $_0 = 3$ 的数列。求项 $_4$。 3. 考虑具有递推关系 $_n = 7 \cdot {}_{n-1}$ 且初始项为 $_0 = 9$ 的数列。求项 $_6$。 4. 通过将下列各数列 $(_n)_{n \geq 1}$ 与一个著名数列联系起来，求它们的闭式公式。假设给出的第一项是 $_1$。

a. $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$
```

= b. 3, 5, 8, 12, 17, . . .
n = c. 11, 16, 22, 29, 37, . . .
n = d. 25, 121, 721, 5041, 40321,
. . . n = ___________

5. 对于下面给出的每个数列，通过将其与另一个已知公式的数列相关联，找到 n 的闭式公式，即数列的第 项（假设这里的首项始终为 $_0$）。

a. 0, 1, 3, 7, 15, 31, . . .
n = b. −1, 0, 7, 26, 63, 12
4, . . . n = c. 0, 3, 12, 27,
48, 75, . . . n = d. 1, 3, 8,
17, 32, 57, . . . n = ___________

4.1.7 额外练习

1. 考虑序列 $(\ _n)_{n\geq 1}$，它以 1, 3, 5, 7, 9, . . . 开始（即按顺序的奇数）。

(a) 给出该数列的递归定义和闭式公式。 (b) 写出（ $_n)_{n\geq 2}$ 的部分和数列（ n ）。写下（ n）的递归定义并猜测闭式公式。

2. 斐波那契数列是 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .（其中 $_0 = 0$）。

(a) 写出部分和序列的前几项：0, 0 + 1, 0 + 1 + 1, . . . (b) 猜测一个用单个斐波那契数表示的部分和序列的公式。例如，你可能会说 $_0 + \ _1 + \cdots + \ _n = 3\ ^2_{n-1} +$ ，尽管那肯定不正确。

3. 考虑下面的三个序列。对于每一个，给出一个递归定义。这些序列之间有什么关系？

(a) 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, ⋯⋯
（b）5, 6, 11, 17, 28, 45, 73,
⋯⋯（c）0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ⋯
⋯

4. 写出由 $_1 = 3$; $_n = 2\ _{n-1} + 4$ 给出的数列的前几项。然后求数列 10，24，52，108，⋯⋯ 的一个递归定义。

5. 写出由 $_n = {}^2 - 3\ + 1$ 给出的序列的前几项。然后求该序列的一个闭式公式（从 $_1$ 开始）0, 2, 6, 12, 20, ...

6. 证明 $_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 5^n$ 是递推关系 $_n = 7\ _{n-1} - 10\ _{n-2}$ 的一个解。要使其成为该序列的闭式公式，初始条件需要是什么?

7. 证明 $_n = 2^n - 5^n$ 也是递推关系 $_n = 7\ _{n-1} - 10\ _{n-2}$ 的一个解。要使它成为该数列的闭式公式，初始条件需要是什么?

8. 求具有递归定义 $_n = 2\ _{n-1} -\ _{n-2}$，且 $_1 = 1$ 和 $_2 = 2$ 的数列的闭式公式。

9. 为具有闭式公式 $_n = 3 + 2$ 的数列给出两个不同的递归定义。证明你的定义是正确的。至少其中一个递归定义应使用前两个项且不含常数。

10. 使用求和 ($\sum$) 或积 ($\prod$) 符号重写以下内容。

(a) $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2$. (b) $1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + 425$. (c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{50}$. (d) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2$.

(e) $(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{3}{4}) \cdots (\frac{100}{101})$.

11. 展开下列求和与乘积。也就是说，将它们逐项完整地写出来。

(a) $\sum_{=1}^{100}(3 + 4\ )$. (b) $\sum_{k=0}^{n} 2^k$. (c) $\sum_{k=2}^{50} \frac{1}{(\ ^2 - 1)}$. (d) $\prod_{k=2}^{100} \frac{^2}{(\ ^2 - 1)}$. (e) $\prod_{k=0}^{n}(2 + 3\ )$.

12. 假设你在平面上画了 条直线，使得每一对直线都相交（没有平行线），且没有三条直线在同一点相交。这将创建一些平面区域，包括一些无界区域。将区域的数量称为 $_n$。找到一个递归公式，用于计算 条直线所创建的区域数量，并证明你的递归公式是正确的。

13. 三元字符串是由0、1和2组成的序列。就像二进制字符串，但有三个符号。

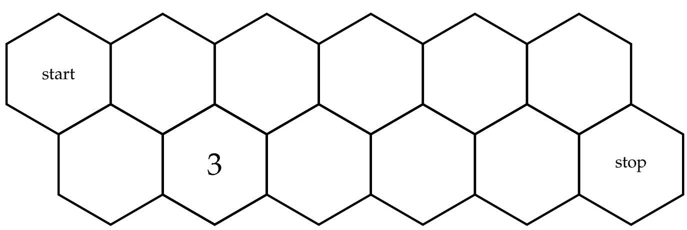
我们称一个三进制字符串为 *good*，如果它从不包含一个 2 后面紧跟着一个 0。令 $_n$ 为长度为 的好字符串的数量。例如，$_1 = 3$，而 $_2 = 8$（因为长度为 2 的 9 个三进制字符串中，只有一个不是好的）。

找到具有证明的递归公式 $_n$，并使用该公式计算 $_5$。

14. 考虑长度为 且权重为 的比特串（即由0和1组成的串，其中包含 个1）。我们知道如何计算固定 和 的这些比特串的数量。现在，我们将计算长度和权重固定的 *sum* 的比特串数量。例如，假设我们要计算所有比特串，其中 $+ = 11$。

(a) 寻找这些不同长度的字符串的例子。最长的字符串是什么？最短的呢？ (b) 每个长度的字符串有多少个？使用这个来计算总字符串数（和为11）。 (c) 另一种方法：让 $= +$ 变化。和为 $= 1$ 的字符串有多少个？和为 $= 2$ 的字符串有多少个？以此类推。找出并解释一个递推关系，用于序列 $(_n)$，它给出了和为 的字符串的数量。 (d) 将你上面发现的内容用帕斯卡三角形来描述。你发现了什么规律？

15. 当蜜蜂下棋时，它们使用如下所示的六边形棋盘。蜂后每次可以移动一个格子，方向可以是直接向右、向上右或向下右（但不能向左移动）。从左上角的六边形到右下角的六边形，蜂后可以走多少条不同的路径？请解释你的答案，并说明这与之前的问题的关系。（例如，从底行第二个六边形到达有三条路径。）



16. 令 $_n$ 表示用 1×2 多米诺骨牌铺满 $2 \times$ 国际象棋棋盘的方式数。写出数列 $(_n)_{n \geq 1}$ 的前几项，然后给出递归定义。解释为什么你的递归公式是正确的。

4.2 增长率

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

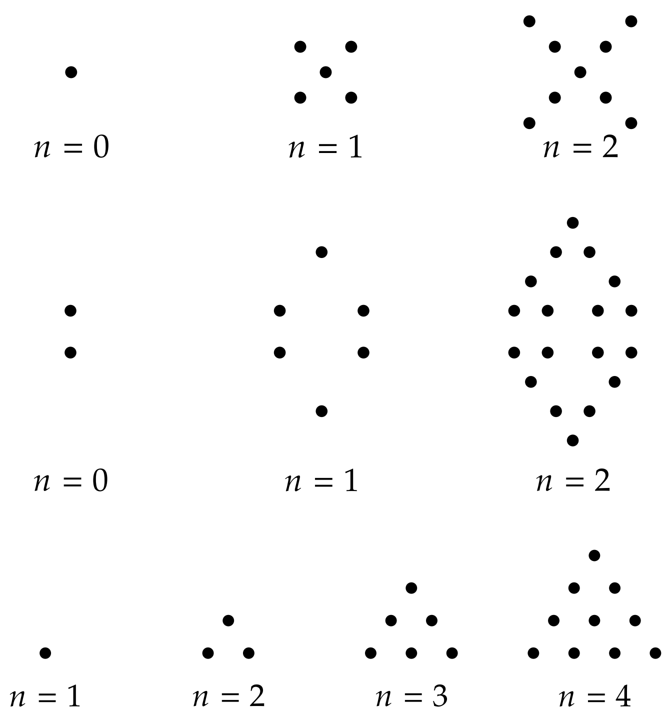
1. 根据序列的增长率判断其是等差数列还是等比数列。

2. 给出等差数列和等比数列的递归定义和通项公式。

4.2.1 本节预览

Investigate!

对于下面每一种点的图案，画出该序列中的下一个图案。描述这些图案中点的数量的增长率。然后猜测一个递归定义，以及一个用于表示第 个图案中点的数量的闭式公式。



我们的目标是为序列找到闭式公式。我们的主要策略将是

首先确定数列在各项之间是如何变化的。这将引出该数列的递推关系，并由此求得一个闭式公式。我们从两类特别常见且有用的数列开始：等差数列和等比数列。在此过程中，我们将探讨一些求解递推关系的技巧。

活动预览

1. 探索来自 *Investigate!* 活动的第一组点阵。我们将用 $_n$ 表示图形 中的点的数量。该序列以 1, 5, 9, . . . 开始

   (a) 你预计该序列中接下来的两个图形各有多少个点？(b) 该序列是如何增长的？要得到下一个图形，需要增加多少个点，或者乘以多少？(c) 设 $_n$ 表示第 个图形中的点数。为 $_n$ 写出一个递归定义。(d) 猜想第 个图形中点数的一个闭式公式。

2. 现在来看来自 *Investigate!* 活动的第二个点阵序列。我们将用 $_n$ 表示图形 中的点数。该序列以 2、6、18、. . . 开始。

   (a) 你预计该序列接下来的两个图形中会有多少个点？(b) 该序列是如何增长的？要得到下一个图形，你需要增加多少个点或乘以多少？(c) 设 $_n$ 表示第 个图形中的点数。为 $_n$ 写出一个递归定义。(d) 猜测第 个图形中点数的一个闭式公式。

3. 现在看看来自 *Investigate!* 活动的第三个点序列。我们将令 $_n$ 表示图形 中的点数。该序列从 1, 3, 6, 10, . . . 开始。

   (a) 在该序列中，接下来的两个图形你预计会有多少个点？(b) 设 $_n$ 为第 个图形中的点的数量。为 $_n$ 写出一个递归定义。(c) 猜测第 个图形中点的数量的一个封闭公式。

4.2.2 等差数列

假设你开始经营一家销售数学艺术版画的生意。第零周你卖出两张版画。此后每一周，你卖出的版画数量都比前一周多四张。你在第 周会卖出多少张版画？

我们可以轻松计算出数列的前几项：2, 6, 10, 14, ⋯⋯ 我怎么知道这是正确的呢？从问题中可以看出，要从一个项到达下一个项，我们必须加 4。因此，数列的递推关系式显然是

$$a_n = a_{n-1} + 4.$$

该数列的 *rate of growth* 是常数 4，因为任意两项之间的 *difference* 为 4（注意，我们可以将递推关系写成 $_n - {}_{n-1} = 4$）。

我们称序列具有 *constant rate of change* 等差算术序的uences ences.

现在让我们为我们的数列找到一个通项公式。第一项是 $_0 = 2$。要得到 $_1$，我们加 4。下一项需要再次加 4，这意味着我们已经在初始项上加了两次 4。然后再加一次 4，因此对于 $_3$ 总共加了三次。事实上，为了得到 $_n$，我们将把 4 加到 $_0$ 上共 次。因此，该数列的通项公式为

$$a_n = 2 + 4n.$$

这适用于任何等差数列。也就是说，任何具有恒定差值的数列都会有一个 *linear* 的闭式公式，其中线性函数的"斜率"就是公差。

等差数列。

如果一个数列的各项相差一个常数，我们称该数列为等差数列。如果该数列的首项（ $_0$）为 ，公差为 ，则有，

递归定义： $_n = {}_{n-1} +$ ，其中 $_0 =$ 。闭式公式： $_n = +$ 。

正如我们在上面的例子中所做的那样，对于递归定义，我们需要指定 $_0$。然后我们需要用 $_{n-1}$ 来表示 $_n$。如果我们把首项称为 ，那么 $_0 =$ 。对于递推关系，根据等差数列的定义，相邻两项之间的差是某个常数，记为 。因此 $_n - {}_{n-1} =$ ，或者换句话说，

$$a_0 = a \qquad a_n = a_{n-1} + d.$$

现在让我们来论证为什么这个闭式公式是正确的。我们可以采用的一种方法是使用一种有时被称为"望远镜法"的技术（这个名字的含义希望很快就会变得清楚）。

我们将递推关系写成其 *difference* 形式，对从 $_1$ 开始直到 $_n$ 的所有项，得到 $_n - {}_{n-1} =$ 。由此得到如下：

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= d \\ a_2 - a_1 &= d \\ a_3 - a_2 &= d \\ &\vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= d \end{aligned}$$

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

现在我们把所有 个方程加在一起。

在右边，我们将 自身相加 次，因此和为 · 。在左边，我们得到的和是
:

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}).$$

但是看看当我们重新分组并消去同类项时会发生什么:

$$\cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \cdots + \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} + a_n - \cancel{a_{n-1}} = a_n - a_0.$$

将总和 *telescopes* 压缩得整洁紧凑，便于存储。

将两边结合起来，我们得到

$$a_n - a_0 = d \cdot n$$

其变为

$$a_n = a_0 + d \cdot n$$

正如我们所声称的。

我们上面做的 telescoping 在其他上下文中也很有用（见练习 4.2.7.6），但现在我们已经建立了闭式公式的一般形式，我们可以将其应用于任何算术序列。

示例 4.2.1

为下面的等差数列求递归定义和通项公式。假设所列出的第一项是 $_0$。

1. 2, 5, 8, 11, 14, ⋯
⋯ 2. 50, 43, 36, 29,
……

解答。首先，我们应该通过取连续项的差来检查这些数列是否确实是等差数列。这样做将揭示公差 。

1. 5 − 2 = 3, 8 − 5 = 3，等等。要从每一项到下一项，我们加三，因此 =
3。递归定义因此为 $_n$ = $_{n-1}$ + 3，其中 $_0$ = 2。闭式公式是 $_n$ = 2 + 3 。

2. 这里的公差是 −7，因为我们把 −7 加到 50 上得到 43，依此类推。因此
，我们得到一个递归定义： $_n$ = $_{n-1}$ − 7，且 $_0$ = 50。其通项公式为 $_n$ =
50 − 7 。

4.2.3 等比数列

像 3、6、12、24、48、⋯⋯ 这样的序列怎么样？这不是等差数列，因为各项之间的差不恒定。然而，相邻项之间的 *ratio* 是常数：$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \cdots = 2$。我们把这样的序列称为等比数列。

认识到该数列是等比的，使我们可以轻松写出一个递归定义。 $_n = 2\ _{n-1}$，且 $_0 = 3$。

闭式公式也不难推导出来。例如，我们如何得到项 $_3$ 呢？我们从 3 开始，然后乘以 2 得到 $_1$，再乘以 2 得到 $_2$，第三次再乘以 2 得到 $_3$。因此，我们一共将 3 乘以 2 三次，或者 $_3 = 3 \cdot 2^3$。看起来像是 $_n = 3 \cdot 2^n$。

一般来说，首项为 、公比为 的等比数列的递推定义为

$$a_n = a_{n-1} \cdot r; a_0 = a.$$

为了得到下一项，我们将前一项乘以 。

对于一般的闭式公式，我们可以再次尝试类似望远镜求和的方法，尽管我们需要消去分数。相反，让我们演示另一种解决递推关系的方法，称为迭代法。这里的想法是，我们逐步推导到 $_n$ 并注意到其中的规律。写出

$$\begin{aligned}
a_0 &= a\\
a_1 &= a_0 \cdot r\\
a_2 &= a_1 \cdot r = a_0 \cdot r \cdot r = a_0 \cdot r^2\\
a_3 &= a_2 \cdot r = a_0 \cdot r^2 \cdot r = a_0 \cdot r^3\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1} \cdot r = a_0 \cdot r^{n-1} \cdot r = a_0 r^n.
\end{aligned}$$

我们必须将第一个项 乘以 多次，精确来说是 次。我们得到 $_n = \ \cdot\ ^n$。

几何级数。

一个数列如果相邻项之间的比值是恒定的，则称为几何数列。假设首项 $_0$ 为 ，公比为 。那么我们有，

递归定义： $_n = \ _{n-1}$，其中 $_0 =$ 。闭式公式： $_n = \ \cdot\ ^n$。

示例 4.2.2

找到以下几何数列的递归公式和闭式公式。再次提醒，列出的第一个项是 $_0$ 。

1. 3, 6, 12, 24, 48, ⋯ ⋯ 2. 27, 9, 3, 1, 1/3, ……

解法。首先检查这些数列是否真的是等比数列，通过

将每一项除以前一项。如果这个比值确实是常数，我们就找到了 。

1. 6/3 = 2，12/6 = 2，24/12 = 2，等等。是的，要从任一项得到下一项，我们乘以 = 2。因此递推定义为 $_n$ = 2 $_{n-1}$，且 $_0$ = 3。闭式公式为 $_n$ = 3 · 2^n。

2. 公比为 = 1/3。因此，该数列的递推定义为 $_n = \frac{1}{3}$ $_{n-1}$，其中 $_0$ = 27，且通项公式为 $_n = 27 \cdot \frac{1}{3}^n$。

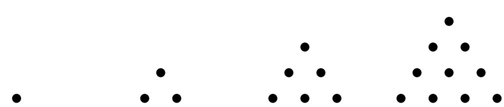
几何数列是指其增长率与数列自身成 *proportional* 比例的数列。正如你可能在微积分中看到的，恰恰是指数函数具有这一性质。

在上面的例子和公式中，我们假设第 *initial* 项是 $_0$。如果你的数列从 $_1$ 开始，你可以很容易地找到本应是 $_0$ 的那一项，并在公式中使用它。例如，如果我们想要数列 2, 5, 8, . . . 的一个公式，并坚持 2 = $_1$，那么我们可以找到 $_0$ = −1（因为该数列是公差为 3 的等差数列，所以我们有 $_0 + 3 =$ $_1$）。那么其通项公式将是 $_n$ = −1 + 3 。

备注 4.2.3 如果你查看其他资料，可能会发现它们给出的算术序列和几何序列的闭式公式与我们的不同。具体来说，你可能会看到公式 $_n$ = + (− 1) （算术）以及 $_n$ = · $^{n-1}$ (几何)。哪个是正确的？两个都正确！在我们的情形中，我们取 为 $_0$。如果相反我们以 $_1$ 作为初始项，就会得到你在别处看到的（稍微更复杂的）公式。

4.2.4 超越等差数列与等比数列

看看序列 ($_n)_{n\geq1}$，它以 1、3、6、10、15、. . . 开始。这些称为三角数，因为它们表示等边三角形中点的数量（想想你如何摆放 10 个保龄球瓶：一排 4 个，加上一排 3 个，再加上一排 2 个和一排 1 个）。



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$

这个数列是等差数列吗？不是，因为 3 − 1 = 2 且 6 − 3 = 3 ≠ 2，所以不存在公差。这个数列是等比数列吗？不是。3/1 = 3，但 6/3 = 2，所以不存在公比。怎么办？

注意到项 *do* 之间的 *differences* 构成一个等差数列：2，3，4，5，6，……。换句话说，该序列的变化率是等差的：

$- \; {}_{n-1} =$ ，这立即给出了递推关系 ${}_n = \; {}_{n-1} +$ 。

另一种理解方式是，序列 $(\; {}_n)$ 的第 项是序列 1, 2, 3, 4, 5, ⋯ 的前 项的 *sum*。因此，$(\; {}_n)$ 是序列 1, 2, 3, ⋯ 的部分和序列（*partial* 和，因为我们并没有对无限多个项全部求和）。

如果我们展开递推关系，将三角数写成如下形式，这一点应该会更加清楚：

$$
\begin{aligned}
T_1 &= 1 = 1\\
T_2 &= 3 = 1+2\\
T_3 &= 6 = 1+2+3\\
T_4 &= 10 = 1+2+3+4\\
&\vdots \qquad \vdots\\
T_n &= 1+2+3+\cdots+n.
\end{aligned}
$$

我们在这里实际上使用的是 *iteration*。我们也可以通过使用裂项相消来看到这一点，取 ${}_0 = 0$：

$$
\begin{aligned}
T_1 - T_0 &= 1\\
T_2 - T_1 &= 2\\
T_3 - T_2 &= 3\\
&\vdots\\
T_n - T_{n-1} &= n.
\end{aligned}
$$

将这些方程求和，右侧变为 $1+2+3+\cdot\cdot\cdot+$ ；左侧相消，仅剩 ${}_n - \; {}_0 = \; {}_n$。

如果我们知道如何把等差数列的各项相加，我们就能为一个其差分等于该等差数列各项的数列找到一个闭式公式。考虑一下我们如何求前100个正整数的和（也就是，${}_{100}$）。我们不按顺序相加，而是重新分组，把 $1 + 100 = 101$ 相加。下一对要合并的是 $2 + 99 = 101$。然后是 $3 + 98 = 101$。以此类推。这样得到50对，每一对的和都是101，因此 ${}_{100} = 101 \cdot 50 = 5050$.[1]

一般来说，使用同样的重新分组方法，我们发现 ${}_n = \frac{n(n+1)}{2}$。顺便说一句，这恰好与 $\binom{n+1}{2}$ 完全相同；如果你把三角数看作是在一个有 $+1$ 个人的聚会上发生的握手次数的计数，这就说得通了：第一个人握 次手，接下来的人再多握 -1 次，依此类推。

这一切的要点在于，有些数列虽然不是算术数列或几何数列，但可以被解释为算术和几何的部分和序列。

[1]This insight is usually attributed to Carl Friedrich Gauss, one of the greatest mathematicians of all time, who discovered it as a child when his unpleasant elementary teacher thought he would keep the class busy by requiring them to compute the lengthy sum.

序列。幸运的是，我们有一些方法可以快速计算这些求和，我们将在接下来的两个章节中探讨。

4.2.5 阅读问题

1. 将左侧的每个公式与右侧所描述的公式类型进行匹配。

$a_n = 3 \cdot 2^n$	Arithmetic; closed
$a_n = 3a_{n-1}$	Arithmetic; recursive
$a_n = a_{n-1} + 3$	Geometric; closed
$a_n = 2n + 3$	Geometric; recursive

2. 你如何判断一个数列是否是某个等差数列或等比数列的部分和数列？请结合一个例子描述你将如何进行检验。

3. 你有什么问题？写下至少一个关于本节内容的问题，可能是你或你的同学在阅读本节后会好奇的。

4.2.6 练习题

1. 考虑递推关系 $_n = _{n-1} + 7$。

   （a）求由该递推关系和初始条件 $_0 = 17$ 所定义的数列的前五项。（b）求由该递推关系和初始条件 $_0 = 17$ 所定义的数列的通项公式。（c）求另一个数列的前五项，该数列同样由相同的递推关系定义，但这次的初始条件为 $_0 = 1$。（d）求第二个数列的通项公式。

2. 考虑递推关系 $_n = 7 _{n-1}$。

   （a）求由递推关系和初始条件 $_0 = 10$ 所定义的数列的前五项。 b）求由递推关系和初始条件 $_0 = 10$ 所定义的数列的通项公式。 c）求另一数列的前五项，该数列同样由相同的递推关系定义，但这一次的初始条件为 $_0 = 17$。 d）求该第二个数列的通项公式。

3. 求以下数列的通项公式，该数列以 3, 27, 243, 2187, 19683, ... 开始。假设 $_0 = 3$ 。

4. 为以 16、26、36、46、56、…… 开始的序列找到一个闭式公式。假设 $_0 = 16$.

5. 考虑以下数列：1, 7, 13, 19, 25, . . ., 其中 $_0 = 1$。

（a）以下哪一项可以作为该序列的递归定义？

□ $= 1 \cdot 6^n$ $_n = 6 \cdot$ $_{n-1}$; $_0 = 1$ □
$_n =$ $_{n-1}$ □ $_{n-2}$; $_0 = 1$ □ $_n =$ $_{n-1} + 6$; $_0 = 1$
□ 以上都不是 (b) 求该序列的闭式公式。(c) 30
07 是否是该序列的一项？

6. 你的暑期工作每周支付你 $1000，并且作为不半途而废的奖励，每周加薪 $50。第 10 周你将赚多少钱？

7. 你姐姐的暑期工作每周支付她1000美元，作为不轻言放弃的奖励，每周加薪5%。她在第10周将赚多少钱？

8. 求 和 ，使得125, ， 1 构成等差数列的一部分。 =, =。然后再求 和 ，使该数列构成等比数列的一部分。=, =。警告： 和 可能不是整数。
) (

9. 找到 和 ，使得4、 、 31 构成一个等差数列。 =, = 然后再找到 和 ，使得该序列构成一个等比数列。 =, = 警告： 和 可能不是整数。)
(

4.2.7 补充练习

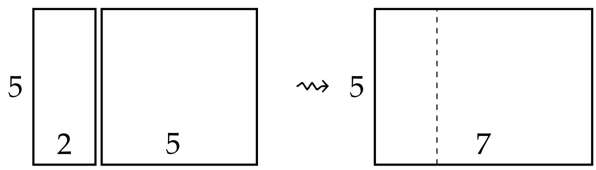
1. 假设糖果机当前正好装有650颗彩虹糖，每次有人投进一枚25美分硬币，机器就会正好吐出7颗彩虹糖。

（a）投入20枚25美分硬币后，机器里还会剩下多少颗彩虹糖？（b）机器里是否会在某个时刻恰好剩下0颗彩虹糖？请解释。

2. 是否存在一对整数（ ， ），使得 , $_1$, $_1$, 构成等差数列，并且 , $_2$, $_2$, 构成等比数列，且 $_1$, $_2$, $_1$, $_2$ 均为整数？

3. 有没有既是算术数列又是几何数列的序列？如果有，你能找到多少个？如果没有，请解释为什么没有。

4. 从任何矩形开始，我们可以通过将一个正方形附加到较长的一边来创建一个新的、更大的矩形。例如，如果我们从一个 2×5 的矩形开始，我们会粘上一个 5×5 的正方形，形成一个 5×7 的矩形：



下一个矩形将通过将一个7×7 的正方形附加到5×7矩形的顶部或底部形成。

(a) 使用此规则创建一个矩形序列，从一个 1×2 矩形开始。然后写出矩形的 *perimeters* 序列（序列的第一个项是 6，因为一个 1×2 矩形的周长是 6；下一个项是 10）。

(b) 重复上述部分，这次从一个 1×3 的矩形开始。

(c) 为你在(a)和(b)部分中得到的每个周长序列找到递推公式。别忘了给出初始条件。(d) 这些序列是等差的吗？等比的吗？如果不是，它们是否 *close* 成为其中之一（即差值或比值是否 *almost* 保持常数）？解释。

证明初始项为 $\neq 0$，公比为 的几何序列的闭式公式为$_n =$ ^{n}，使用*telescoping*。

6. 利用望远镜法求和。序列出现的另一个背景是微积分，当你学习序列和级数时（这是微积分中对我们所说的部分和序列的术语）。我们在这里发展的一些技术也可以应用到那里。这是一个望远镜求和的例子，类似于我们使用的望远镜技巧。

考虑从 $(\ _n)_{n\geq 1}$ 开始的序列

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots.$$

也就是说，每一项都是第 n 个三角数的倒数。求该数列前 n 项的和：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T_k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{T_n}.$$

7. 等比数列具有恒定的增长率，意思是相邻项的比值始终相同。但是，在等比数列中，我们能对相邻项的 *difference* 说些什么呢?

(a) 考虑几何数列 1, 2, 4, 8, 16, …… 求相邻项之间的差。也就是说，求它的差分序列。 (b) 为该差分序列求一个闭式公式。然后利用这个闭式公式，为原序列找到一个不同的递推关系（不同于 ${}_n = 2\,{}_{n-1}$）。 (c) 对你选择的另一个几何数列重复以上两个部分。然后解释你在一般情况下发现了什么。

8. 以下序列都不是等差数列或等比数列：

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

$$3, 5, 8, 12, 17, \ldots$$

$$0, 2, 5, 9, 14, \ldots$$

解释这些数列彼此之间有什么共同点，然后利用这一点为每一个数列找到一个闭式公式。它们的闭式公式彼此之间有什么关系？一般而言你能得出什么结论？

4.3 多项式数列

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 根据数列的差分序列判断其是否具有多项式闭式公式，并确定该多项式的次数。

2. 对一系列初始项拟合一个适当次数的多项式。

3. 解释多项式序列的递推关系如何与其闭式公式相关。

4.3.1 本节预览

Investigate!

一个标准的 8×8 棋盘包含 64 个方格。实际上，这只是单位正方形的数量。棋盘上一共有多少个不同大小的正方形？从较小的棋盘开始：1×1、2×2、3×3，等等。求一个用于计算 $\times$ 棋盘中正方形总数的公式。

我们已经看到，算术数列以恒定的速率增长，因此它们的闭式公式是线性函数。那么，增长得更快的数列又如何呢？如果它们的变化率（实际上是项与项之间的差）本身以恒定的速率增长，会怎样？

在第 4.2 节中，我们声称三角数（即前 个正整数之和）具有闭式公式

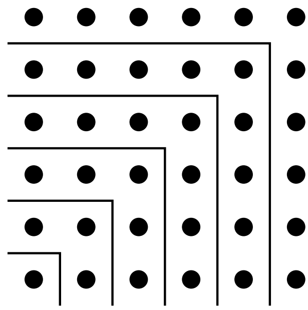
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

因此，这个数列的差分序列是等差的，所以它是一个二次多项式（即二次函数）。

本节的目标是探究这一现象。我们将验证这确实是三角数的闭式公式，并将其扩展到具有等差差分的其他数列，然后探究增长速度更快的序列。

活动预览

1. 当你在数学系的走廊里漫步时，发现自己正凝视着下面展示的引人入胜的艺术作品。



(a) 图中有多少个点？这些点形成一个 a× 的正方形，总共有 个点。

______ ______ ______

(b) 我们也可以通过从最小到最大地对每个“钩形”区域求和来计算点的总数：

___ + ___ + ___ + ___ + ___ + ____.

(c) 计算点的总数的另一种方法是将这个和的各项进行分组。1 + 11 =; 3 + 9 =; 5 + 7 =。由于有三对和，总计为 3· =。_____

___

（d）如果我们将该图形进行推广，使其有 个钩子，那么最大的钩子中会有多少个点？

第二大钩子中将有多少个点？

(e) 最小和最大钩子的和是多少？

第二小的钩子与第二大的钩子之和是多少？

(f) 如果我们继续添加成对的钩子（下一个最小的加上下一个最大的），我们将有多少对？

然后相乘，总点数将是：. ___________

提示。让我们假设 是偶数。如果不是这样，那么就会有一个单独的“中间”钩子没有被加到任何东西上，但这一点会被这样一个事实所抵消： /2 会计作半个钩子的和。

4.3.2 求和算术序列：逆序并加法

让我们仔细地求前　个正整数的和。把这个和记作　$_n$，并把它写两次，一次按通常顺序，一次按相反顺序。

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
 & T_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & n \\
+ & T_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & +\cdots+ & 1 \\
\hline
 & 2T_n & = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & +\cdots+ & n+1
\end{array}
$$

然后我们把这两个方程相加。左边是 2　$_n$。在右边，发生了一件很棒的事情：求和中的所有项都是相同的！因此，我们不再把一堆不同的数相加，而只是把同一个数重复相加。这正是乘法最擅长的事情！和中有　项，因此我们得到，

$$2T_n = n(n+1).$$

解出　$_n$ 可得，

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

不出所料。

这种技术适用于任何算术和。

示例 4.3.1

求和：2 + 5 + 8 + 11 + 14 + · · ·+ 470。

解答。思路是模仿我们如何找到三角数的公式。如果把首项和末项相加，得到472。第二项与倒数第二项相加也等于472。为了跟踪所有内容，我们可以如下表示。把这个和称为　。然后，

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
 & S = & 2 & + & 5 & + & 8 & +\cdots+ & 467 & + & 470 \\
+ & S = & 470 & + & 467 & + & 464 & +\cdots+ & 5 & + & 2 \\
\hline
 & 2S = & 472 & + & 472 & + & 472 & +\cdots+ & 472 & + & 472
\end{array}
$$

因此为了求 2　，我们把472 自身相加若干次。是多少次呢？我们需要确定这个和中有多少项（加数）。由于这些项构成一个等差数列，和中的第　项（把 2 计为第 0 项）可以表示为 2 + 3　。如果2 + 3　= 470，那么　= 156。因此　的取值范围是从 0 到 156，共有 157 项。这就是 2　的和中 472 的个数。因此

$$2S = 157 \cdot 472 = 74104.$$

现在很容易找到　：

$$S = 74104/2 = 37052.$$

这适用于任何*arithmetic*序列的和。将和称为 。反转并相加。这会产生一个数字，将其自己加上多次。找出次数。相乘。除以2。完成。

例子 4.3.2

求 $6 + 10 + 14 + \cdots + (4 \quad - 2)$ 的闭式公式。

解答。我们再次面对一个等差数列的和。这个数列有多少项？显然，数列中的每一项都呈现出 $4 \quad - 2$ 的形式（由最后一项可得）。那么对于哪些 值呢？为了得到6， $= 2$。为了得到$4 \quad - 2$，取 $=$ 。因此，要找出项数，我们必须计算在范围 $2, 3, \ldots,$ 中的整数个数。这个数为 $- 1$。（从1到 共有 个数，因此如果从2开始，则少一个。）

现在反转并相加：

$$\begin{array}{rcccccccc} S = & 6 & + & 10 & + \cdots + & 4n-6 & + & 4n-2 \\ + \quad S = & 4n-2 & + & 4n-6 & + \cdots + & 10 & + & 6 \\ \hline 2S = & 4n+4 & + & 4n+4 & + \cdots + & 4n+4 & + & 4n+4 \end{array}$$

由于有 $- 1$ 项，我们得到

$$2S = (n-1)(4n+4) \qquad \text{so} \qquad S = \frac{(n-1)(4n+4)}{2}.$$

除了求和，我们还可以使用这种技巧为那些我们识别为部分和序列的序列找到闭式公式。

例子 4.3.3

使用部分和来寻找 $(\ _n)_{n\geq 0}$ 的一个闭式公式，该序列起始为 $2, 3, 7, 14, 24, 37, \ldots \ldots ..$ 假设该序列的递推关系为 $_n = \ _{n-1} + 3 \quad - 2$。

解答。首先，如果你观察各项之间的差，你会得到一个差分序列 $(\ _n)_{n\geq 1}$: 1, 4, 7, 10, 13, . . ., 这是一个等差数列。确实，我们注意到 $_n = 3 \quad - 2$，这与递推关系一致。换一种写法：

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 2 + 1 = 2 + d_1 \\ a_2 &= 2 + 1 + 4 = 2 + d_1 + d_2 \\ a_3 &= 2 + 1 + 4 + 7 = 2 + d_1 + d_2 + d_3 \end{aligned}$$

等等。我们可以用等差数列来表示 $(\ _n)$ 的通项，如下：

$$a_n = 2 + 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 3n - 2.$$

我们可以反转并相加，但最初的 2 不符合我们的模式。这只是意味着我们需要把这个 2 排除在反转部分之外：

$$\begin{array}{rrcccccccc} & a_n = & 2 & + & 1 & + & 4 & +\cdots+ & 3n-2 \\ + & a_n = & 2 & + & 3n-2 & + & 3(n-1)-2 & +\cdots+ & 1 \\ \hline & 2a_n = & 4 & + & 2+3n-3 & + & 2+3n-3 & +\cdots+ & 2+3n-3 \end{array}$$

不计第一项（4），共有 个由 $2+3\ \ -3=3\ \ -1$ 组成的加数，因此右端变为 $4+(3\ \ -1)$ 。

最后，解出 $_n$，我们得到

$$a_n = \frac{4+(3n-1)n}{2}.$$

为确保无误，我们检查 $_0 = \frac{4}{2} = 2$、 $_1 = \frac{4+2}{2} = 3$，等等。我们得到了正确的闭式公式。

注意到，具有算术（即线性）变化率的数列的通项公式是一个二次函数。有意思……

4.3.3 高次多项式

既然我们知道如何计算等差数列前 项的和，我们就可以求出那些其项与项之间的差构成等差数列的数列的闭式公式。但如果我们考虑这样一个数列：它是某个数列前 项之和，而这个数列本身又是一个等差数列的和，那会怎样呢？

棋盘上一共有多少个正方形（包含所有尺寸）？一个棋盘由 64 个小正方形组成，但我们还要考虑边长更大的正方形。即使我们只考虑一个 8×8 的棋盘，已经有很多需要计数。因此，不如构造一个数列：第一项是 1×1 棋盘上的正方形数量，第二项是 2×2 棋盘上的正方形数量，依此类推。稍加思考，我们就得到这个数列

$$1, 5, 14, 30, 55, \ldots.$$

这个数列不是等差数列（也不是等比数列），但也许它的差分序列是。对差分我们得到

$$4, 9, 16, 25, \ldots.$$

不足为奇：计算一个 4×4 棋盘中正方形数量的一种方法是注意到，其中边长为 1 的正方形有 16 个，边长为 2 的有 9 个，边长为 3 的有 4 个，边长为 4 的有 1 个。因此，原始序列只是这些平方数的和。现在，这个差分序列不是等差的，因为它的差分序列（即原始序列的二次差分）不是常数。事实上，这个二次差分序列是

$$5, 7, 9, \ldots,$$

它 *is* 一个等差数列（公差为 2）。注意，我们的原始数列具有常数的三阶差分（也就是说，原始数列的差分的差分的差分是常数）。我们将这样的数列称为 Δ^3-常数数列。数列 1, 4, 9, 16, . . . 具有常数的二阶差分，因此它是一个 Δ^2-常数数列。一般地，如果一个数列的第 阶差分是常数，我们就称该数列为 Δ^k-常数数列。

例 4.3.4

以下哪些序列在某个 的取值下是Δ^k-常数?

1. 2, 3, 7, 14, 24, 37, ⋯⋯
2. 1, 8, 27, 64, 125, 216, ⋯
⋯ 3. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,
⋯⋯

解答。

1. 这是例 4.3.3 中的序列，我们通过将该序列识别为一个等差数列的部分和序列而找到了一个闭式公式。确实，一阶差分序列为 1，4，7，10，13，. . .，而它自身的差分是 3，3，3，3，. . .。因此 2，3，7，14，24，37，. . . 是一个 Δ^2-常数序列。 2. 这些是完全立方数。一阶差分序列为 7，19，37，61，91，. . .；二阶差分序列为 12，18，24，30，. . .；三阶差分序列是常数：6，6，6，. . .。因此完全立方数是一个 Δ^3-常数序列。 3. 如果我们取一阶差分，得到 1，2，4，8，16，. . .。等等，什么？那正是我们最开始的序列。所以取二阶差分又会再次得到同样的序列。无论我们重复多少次，始终都会得到同一个序列，这尤其意味着不存在有限阶的差分会成为常数。因此，这个序列对任何 都不是 Δ^k-常数序列。

Δ^0-常数序列本身就是常数，因此它们的闭式公式很容易计算（就是那个常数）。Δ^1-常数序列是等差的，我们也有一种方法来求它们的闭式公式。每一个 Δ^2-常数序列都是一个等差序列的和，因此我们也可以为它们找到公式。但请注意，Δ^2-常数序列的闭式公式的形式总是二次的。例如，平方数是 Δ^2-常数，其闭式公式为 $_n =$ ^{2}。三角数（同样是 Δ^2-常数）有闭式公式 $_n = \frac{n(n+1)}{2}$，将其展开后也会得到一个 ^{2} 项。看起来，每当我们增加序列的复杂度，也就是说，在得到常数之前增加差分的次数时，我们也会增加 the

用于闭式公式的多项式的次数。我们从常数到线性再到二次。各项之间的差分序列告诉我们该序列的增长速率。如果一个序列以恒定的速率增长，那么该序列的公式将是线性的。如果序列以一个自身以恒定速率增长的速率在增长，那么该公式是二次的。你可能在别处见过这一点：如果一个函数具有恒定的二阶导数（变化率），那么该函数必定是二次函数。

这在一般情况下有效：

定理 4.3.5 多项式拟合。

The closed formula for a sequence will be a degree polynomial if and only if the sequence is Δ^k-constant (i.e., the th sequence of differences is constant).

这告诉我们，棋盘上方格数的序列 1, 5, 14, 30, 55, . . .，我们看到它是 Δ^3 常数的，将具有一个三次（3 次多项式）闭式公式。

现在，一旦我们知道了序列的闭式公式的格式，就更容易实际找到闭式公式。如果闭式公式是一个度数为 的多项式，我们只需要 + 1个数据点来“拟合”该多项式到数据上。

例 4.3.6

找到序列 3, 7, 14, 24, . . . 的公式。假设 $_1 = 3$。

解法。首先，检查公式是否在某一层次上具有常数差异。第一次差异序列是 4、7、10，...，这是等差数列，因此第二次差异序列是常数。该序列是 Δ^2-常数，所以 $_n$ 的公式将是一个二次多项式。也就是说，我们知道对于某些常数 、 和 ，

$$a_n = an^2 + bn + c.$$

现在来求 、 和 。首先，最好先知道 $_0$ 是什么，因为代入 $= 0$ 会大大简化上面的公式。在这种情况下，$_0 = 2$（从常数差分序列反向推导）。因此

$$a_0 = 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c,$$

所以 $= 2$。现在代入 $= 1$ 和 $= 2$。我们得到

$$a_1 = 3 = a + b + 2$$

$$a_2 = 7 = a4 + b2 + 2.$$

此时，我们有两个（线性）方程和两个未知数，因此可以求解关于 和 的方程组（可以使用代入法、消元法，甚至矩阵）。我们得到 $= \frac{3}{2}$，以及 $= \frac{-1}{2}$，因此 $_n = \frac{3}{2}\ ^2 - \frac{1}{2}\ + 2$。

例 4.3.7

寻找一个封闭公式，用于计算一个 $\times$ 棋盘上的正方形数量。解答。我们已经看到序列 1, 5, 14, 30, 55, . . . 是 Δ^3-constant 的，因此我们在寻找一个三次多项式。即，

$$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

如果我们知道 $_0$ 是什么，就可以求出 。我们从三阶差分反向推导，得到 $_0 = 0$（这并不令人惊讶，因为在一个 0×0 的棋盘上没有任何方格）。因此 $= 0$。现在代入 $= 1$、 $= 2$，以及 $= 3$:

$$\begin{aligned} 1 =& a + b + c \\ 5 =& 8a + 4b + 2c \\ 14 =& 27a + 9b + 3c. \end{aligned}$$

如果我们解这个方程组，我们得到 $= \frac{1}{3}$, $= \frac{1}{2}$ 和 $= \frac{1}{6}$。因此，一个 $\times$ 棋盘上的正方形数量是 $_n = \frac{1}{3}\ {}^3 + \frac{1}{2}\ {}^2 + \frac{1}{6}\ = \frac{1}{6}\ (\ + 1)(2\ + 1)$。

注: $_n$由于棋盘上的方格问题实际上是在求平方和，我们现在有一个很好的公式来表示$\sum_{k=1}\ ^2$。

示例 4.3.8

为（ $_n)_{n\geq 0}$ 找到一个闭式公式，它从 2， 3， 7， 14， 24， 37， . . . 开始。假设该序列的递推关系是 $_n = \ _{n-1} + 3\ - 2$

解答。注意我们已经在示例 4.3.3 中做过这件事，但现在我们可以使用多项式拟合来求解。

（一次）差分序列是 1, 4, 7, 10, 13, . . .（这与递推关系中给出的内容一致）。二次差分序列是 3, 3, 3, 3, . . ., 是常数！因此我们预计 $_n$ 的闭式公式将是一个二次多项式。也就是说，我们猜想，

$$a_n = an^2 + bn + c.$$

由于 $_0 = 2$，我们知道 $= 2$（因为 $\cdot 0^2 + \ \cdot 0^2 + \ = 2$）。然后，我们可以看看在 $= 1$ 和 $= 2$ 时会发生什么:

$$\begin{aligned} a_1 = 3 =& a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 \\ a_2 = 7 =& a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2. \end{aligned}$$

简化这一点，我们必须找到满足这些方程的 和

$$1 = a + b$$
$$5 = 4a + 2b.$$

使用计算机代数系统或代入法或消元法，我们发现 $= \frac{3}{2}$, $= -\frac{1}{2}$。因此，闭式公式为，

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2.$$

在将该解展开并相乘之后，这与我们在例 4.3.3 中发现的一样。

并非所有序列都以多项式作为其闭式公式。我们可以使用有限差分理论来识别这些序列。

例 4.3.9

判断以下数列是否可以用多项式描述，如果可以，其次数是多少。

1. 1, 2, 4, 8, 16, . . .2. 0, 7, 50,
183, 484, 1055, . . .3. 1, 1, 2, 3
, 5, 8, 13, . . .

解答。

1. 正如我们在例 4.3.4 中看到的，这个序列对于任何 都不是 Δ^k-常数。因此该序列的闭式公式不是多项式。事实上，我们知道其闭式公式是 $_n = 2^n$，它的增长速度快于任何多项式（因此不是多项式）。 2. 一阶差分序列是 7, 43, 133, 301, 571, ... 二阶差分为：36, 90, 168, 270, ... 三阶差分：54, 78, 102, ... 四阶差分：24, 24, ... 就我们所能判断的，这个差分序列是常数，因此该序列是 Δ^4-常数，相应地，其闭式公式是一个 4 次多项式。 3. 这是斐波那契数列。一阶差分序列是 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . ., 二阶差分是 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5 . . .. 我们注意到在最初的几项之后，又得到了原来的序列。因此差分永远不可能成为常数，所以斐波那契数列的闭式公式不是多项式。

警告 4.3.10 一个 次多项式由其 + 1 个系数完全确定（其中 +1 是因为常数项）。因此，当给定一个序列的 + 1 项时，我们总能找到一个 次多项式。

如果我们取这 + 1 项，我们就可以做差、差的差、差的差的差……直到（经过 步之后）只剩下一个数为止。据我们所知，这个第 阶差分是常数。这并不意味着我们已经找到了 *right* 序列的闭式公式。这就是为什么在特定语境下研究序列如此重要。

4.3.4 利用技术求解方程组

多项式拟合的要点在于：如果我们能够确定一个序列的闭式公式是一个多项式，那么我们就可以找到该公式。由于我们知道多项式的次数，我们所需要做的只是求出它的系数；并且在有足够多的序列项时，我们可以建立一个包含足够多线性方程的方程组，其解就是这些系数。然而，这需要求解一个线性方程组。

对于一个二次多项式，我们需要找到三个系数（常数项、 的系数，以及 ^{2} 的系数）。由三个线性方程组成的方程组就足以确定这三个未知数。事实上，由于 $_0$ 将是常数项，我们实际上只需要两个方程和两个未知数，这用手工求解并不困难。

对于高次数多项式，方程的数量更多，手工求解会十分繁琐。幸运的是，计算机可以很容易地求解这些方程。下面我们演示如何使用免费的计算机代数系统 SageMath，以及 Python，来求解这些方程组。除了这两种选择之外，几乎任何计算机代数系统（包括 Wolfram Alpha）都可以求解这些方程组。

假设我们有如下由三个方程和三个未知数组成的系统，如同上面的棋盘示例所示：

$$
\begin{aligned}
1 &= a + b + c\\
5 &= 8a + 4b + 2c\\
14 &= 27a + 9b + 3c
\end{aligned}
$$

在 SageMath 中，我们可以使用 solve 方法来求解方程组。下面是代码：

```
变量 ( 'a␣b␣c ') 求解 ( [ a+
b+c ==1 , 8* a +4* b +2* c
==5 , 27* a +9* b +3* c ==14
], a ,b ,c)
```

[[a == （1/3）， b == （1/2）， c == （1/6）]]

这比在 Python 中更容易，但 Python 可能更容易获得。在 Python 中解决该系统的一种方法是使用 numpy 库。在这种情况下，你需要创建一个系数矩阵和一个常数向量，然后使用 solve 方法。代码如下：

```
import numpy as np A = np . array ([[1 ,1 ,1] ,[8 ,4 ,2] ,[27 ,
9 ,3]]) b = np . array ([1 ,5 ,14]) x = np . linalg . solve (A ,b)
print (x)
```

这里发生情况的解释：我们构建一个由方程组系数组成的矩阵 A（而不是我们正在寻找的闭式公式的系数），

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

以及用于常数项的向量 b,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

numpy 所做的是求解矩阵方程

$$Ax = b.$$

满足该矩阵方程的向量 将是该系统中未知量的取值（因此该向量为 , ,]）。

当然，一旦你找到了多项式的系数，仍然应该用这些系数写出闭式公式。一个始终很好的做法是，用一个你没有用来建立方程组的 来检验该公式是否成立。

4.3.5 阅读问题

1. 将左侧的每个数列与右侧它可能具有的闭式公式类型进行匹配。

$3, 7, 11, 15, 19, \ldots$	Linear formula
$3, 4, 7, 13, 23, \ldots$	Quadratic formula
$3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$	Cubic formula
$3, 5, 8, 12, 17, \ldots$	Exponential (not a polynomial)

2. 假设（ n）是一个数列，其差分数列的闭式公式是一个二次多项式。你能对（ n ）的部分和数列说些什么？请解释。

3. 你有什么问题？写下至少一个关于本节内容的问题，可能是你或你的同学在阅读本节后会好奇的。

4.3.6 练习题

1. 考虑数列 10, 13, 16, 19, 22 . . .，其中 $_1 = 10$。

(a) 该数列的递归定义是什么？(b) 给出该数列第 n 项的通项公式。(c) 1555 是否是该数列中的一项？(d) 有限数列 10, 13, 16, . . . , 433 有多少项？(e) 求和：10 + 13 + 16 + . . . + 433。(f) 利用你在上面得到的结果，求 $_n$，即数列 3, 13, 26, 42, 61, . . . 的第 n 项。

2. 考虑数列 $(\ _n)_{n\geq 0}$，它以 5, 10, 15, 20, ... 开始。

a. 该数列的下一项是什么？ b. 求该数列第 项的公式。 $_n$ = c._________ 求该数列前100项的和：$\sum_{k=0}^{99}\ _k$。

3. 考虑下列和 9 + 14 + 19 + 24 + · · ·+ 229.

a. 该和中有多少项（加数）？ b. 使用本节讨论的一种方法计算该和。

4. 考虑序列 −18，−6，6，18，. . .，12 + 6。

a. 这个数列中有多少项？你的答案将以 为变量。 b. 倒数第二项是什么？c. 计算数列中所有项的和，结果以 为变量。

5. 使用本节中的一种技术找到 2 + 8 + 14 + 20 + · · ·+ 1808。

6. 使用多项式拟合求出数列 $(\ _n)_{n\geq 0}$ 的第 项公式，该数列起始为 0, 9, 20, 33, 48, 65, . . . $_n$ = _________

7. 使用多项式拟合来求序列 $(a_n)_{n\geq 0}$ 的第 n 项公式，该序列起始为–1, 4, 11, 20, 31, 44, . . . a_n = ________

8. 使用多项式拟合求出数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ 的第 n 项公式，该数列起始为 5, 5, 17, 53, 125, 245, . . . a_n = ________

9. 使用多项式拟合来求该数列（$a_n)_{n\geq 1}$ 的第 n 项公式，该数列起始为 9、43、117、243、433，…… 注意上面的第一项是 a_1，而不是 a_0。 a_n = ________

10. 假设 $a_n = 2n^2 + 3n + 2$。通过计算 $a_n - a_{n-1}$，找出差分序列的闭式公式。尽可能简化你的答案。

11. 使用多项式拟合来找出序列（$a_n)_{n\geq 1}$的第 n 项的公式，该序列的前几项为：7，32，87，184，335，... 请注意，上述的第一项是 a_1，而不是 a_0。 a_n = ________

4.3.7 附加练习

1. 你友好的邻里小店有一台糖果机，第一位投入一枚25美分硬币的顾客会得到7颗彩虹糖，第二位得到10颗，第三位得到13颗，第四位得到16颗，依此类推。投入20枚硬币后，糖果机总共发放了多少颗糖果？投入 n 枚硬币后呢？

2. 不甘示弱，街对面的超市安装了一台糖果机，第一位顾客给4颗Skittles，第二位给7颗，第三位给12颗，第四位给19颗，以此类推。投入20枚硬币后，这台机器总共发出了多少颗Skittles？投入 n 枚硬币后呢？

3. 构造具有以下性质的序列

(a) 3, 3, 3, 3, . . . 作为其第二差分。 (b) 1, 2, 3, 4, 5, . . . 作为其第三差分。 (c) 1, 2, 4, 8, 16, . . . 作为其第100差分。

4. 考虑数列 1, 3, 7, 13, 21, ... 解释为什么你知道这个数列的闭式公式是二次的。然后通过将这个数列与平方数列 1, 4, 9, 16, . . . 进行比较来“猜测”正确的公式（不要使用多项式拟合）。

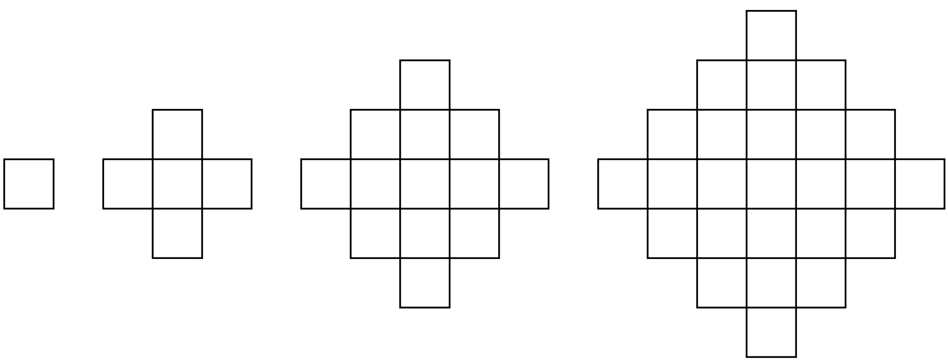
5. 使用与前一个练习中类似的技巧，求数列 2, 11, 34, 77, 146, 247, ... 的闭式公式
。

6. 考虑数列 2, 7, 15, 26, 40, 57, . . .（其中 $_0 = 2$）。通过观察相邻项之间的差，将该数列表示为一个部分和数列。然后通过计算第 个部分和，求出该数列的闭式公式
。

7. 如果你有足够的牙签，你可以制作一个大的三角形网格。下面是尺寸为1和尺寸为2的三角形网格。尺寸为1的网格需要3根牙签，尺寸为2的网格需要9根牙签。

(a) 令 $_n$ 为构建一个大小 的三角形网格所需的牙签数量。写出该序列的前五项 $_1$，$_2$, ⋯ 。 (b) 找出该序列的递归定义。解释为什么你是正确的。 (c) 该序列是算术序列还是几何序列？如果不是，它是算术序列或几何序列的部分和序列吗？解释为什么你的答案是正确的。 (d) 使用你在部分 (c) 中的结果
，找出该序列的闭式公式。展示你的计算过程。

8. 如果你要在方格纸上给一个 $\times$ 的正方形涂阴影，你可以用无聊的方式（边与纸张边缘平行），也可以用有趣的方式，如下图所示：



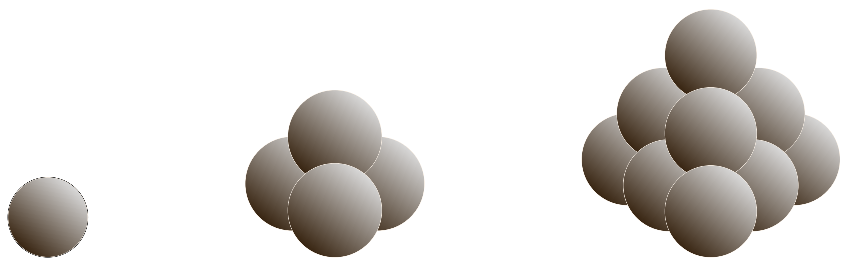
这里有趣的是，一个 3×3 的正方形现在的面积是 13。我们的目标是找到一个 $\times$ （对角）正方形面积的公式。

(a) 写出该面积序列的前几项（假设 $_1 = 1$， $_2 = 5$，等等）。该序列是等差还是等比？如果不是，它是否是某个等差序列或等比序列的部分和序列？结合对角线上的正方形，解释为什么你的答案是正确的。

(b) 使用你在(a)部分得到的结果，为该序列找到一个闭式公式。展示你的推导过程。注意，虽然这里有很多方法可以找到闭式公式，但你应当具体使用部分和的方法。

（c）尽可能用其他各种有趣的方法找到该闭式公式。

9. 推广练习问题 5：为 $_n$ = ^{2} + + 的差分序列找到一个闭式公式。也就是说，证明每个二次序列都有算术差分。 10. 你能使用多项式拟合找到序列 4, 7, 11, 18, 29, 47, . . . 的第 项公式吗？解释为什么或为什么不行。 11. 序列 2, 6, 18, 54, 162, . . . 的第 项差分序列会一直保持常数吗？解释。 12. 在空闲时间，幽灵海盗喜欢将炮弹堆成三角形基底的金字塔（即四面体），就像这里的图片所示：



注意：这些是实心的四面体，因此会有一些炮弹被遮挡而看不见（例如，右侧的图片中后面有一个炮弹没有显示出来）。

海盗们想知道要建造一座15层高的金字塔需要多少颗炮弹（从而打破世界炮弹堆叠纪录）。你能帮忙吗？

（a）令 ( ) 表示堆成一个高为 层的金字塔所需的炮弹数量。因此 (1) = 1， (2) = 4，等等。计算 (3)、 (4) 和 (5)。

（b）使用多项式拟合来为 ( ) 找到一个闭式公式。展示你的过程。（c）回答海盗的问题：他们需要多少个炮弹才能堆成一个 15 层高的金字塔？（d）加分：在帕斯卡三角形中定位这个序列。为什么这说得通？

4.4 指数序列

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 根据其递推关系识别一个序列是否为指数型序列。
2. 应用特征根法求解相应的递推关系。

4.4.1 节预览

Investigate!

你有大量的 1×1 正方形和 1×2 多米诺骨牌。你想把它们排列成一条 1×1
5 的条带。你能有多少种方式做到这一点?

如果这些方块有三种不同的颜色，而多米诺骨牌有四种不同的颜色，会怎么样? 为什么第二个问题比第一个更容易?

提示。先从建立一个递推关系开始。不同的 1×3 条带和 1×4 条带是如何与 1×5 条带相关的?

在第 4.3 节中我们看到，如果一个序列存在某一阶差分为常数，那么该序列就有一个多项式的闭式公式。是否存在永远不会出现常数差分的序列? 它们的闭式公式会是什么样子?

考虑斐波那契数列:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots.$$

如果我们看一阶差分，就会得到这个序列:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots,$$

这就是斐波那契数列本身。这并不令人惊讶，因为斐波那契数列是由递推关系 $_n =$ $_{n-1} +$

当然，如果我们再取一次差分，就会得到同样的序列，一次又一次，因此不存在任何第 阶差分是常数。

另一个具有这种行为的序列是 2 的幂:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \ldots$$

具有差异

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots.$$

我们也可以从递归关系中看出这一点，因为

$$a_n = 2a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-1}.$$

这个序列的增长率，事实上任何等比数列的增长率，都是该序列本身。

如果你学过微积分，你可能记得，那些以自身（或近似自身）作为变化率（在微积分语境下即导数）的函数，恰好就是指数函数。在这里也是如此：等比数列由于具有指数型的闭式公式，其变化率也等于其自身。

在本节中，我们将探讨变化速率与序列自身成正比的序列，并看看它们如何都具有指数型的闭式公式，或其某种变体。

活动预览

1. 考虑递推关系

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}.$$

由于第 项由前两项的组合给出，我们需要两个初始项来确定该数列。不同的初始项会得到不同的数列。

(a) 如果初始条件是 $_0 = 1$， $_1 = 2$，你得到什么序列？给出前五项（包括 1 和 2）。 (b) 根据前几项，这个序列的一个闭式公式是什么？ (c) 如果初始条件是 $_0 = 1$， $_1 = 3$，你得到什么序列？给出前五项。 (d) 根据前几项，这个序列的一个闭式公式是什么？ (e) 如果初始条件是 $_0 = 2$， $_1 = 5$，你得到什么序列？给出前五项。 (f) 根据前几项，这个序列的一个闭式公式是什么？提示。该序列中的各项与前两个序列中的各项是如何关联的？

4.4.2 等比数列求和：乘、移位与相减

假设一台糖果机按等比数列发放糖果：第一次给 1 颗糖，第二次给 2 颗，接着是 4 颗、8 颗，依此类推。经过 10 次操作后，你一共会收到多少颗糖果？

我们可以创建部分和的序列，如 $1, 1+2, 1+2+4, 1+2+4+8, \ldots$ 这给出

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$$

这不是一个几何数列，但几乎是。实际上，如果我们在每一项上加 1，我们就得到了看起来像是几何数列 $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$，所以我们可以猜测这个求和数列的闭式公式是 $2^{n+1}-1$。如果这是正确的，那么糖果问题的答案就是 $2^{11}-1=2047$。

更引人注目的是这样一个观察：几何序列的部分和序列再次呈几何性质。让我们考虑如何一般地求解几何序列的和。

我们不能像求等差数列和那样简单地反转和相加。你明白为什么吗？我们得到相同的项重复加到自己身上很多次，是因为存在一个常数差。于是当我们朝一个方向加上这个差时，朝另一个方向减去这个差，留下一个常数总和。对于几何级数，我们有一种不同的技巧。

例子 4.4.1

$3+6+12+24+\cdots+12288$ 是什么？

解答。将每一项乘以公比 2。我们得到 2　$= 6+12+24+\cdots+24576$。现在相减：2　$-$　$= -3+24576 = 24573$。由于 2　$-$　$=$　，我们得到答案。

为了更好地看到上述例子发生了什么，我们可以这样写：

$$\begin{array}{rrrll}
 & S = & 3+ & 6+12+24+\cdots+12288 & \\
- & 2S = & & 6+12+24+\cdots+12288 & +24576 \\
\hline
 & -S = & 3+ & 0+0+0+\cdots+0 & -24576
\end{array}$$

然后将两边都除以 -1，我们得到相同的　结果。其思路是，通过将和数乘以公比，每一项变成下一项。我们将和数移位，使得减法大部分抵消，只留下第一项和新的最后一项。

例 4.4.2

找到　( ) 的闭式公式 $= 2+10+50+\cdots+2\cdot 5^n$。

解法。公比是 5。所以我们有

$$\begin{array}{rrll}
 & S & = 2+10+50+\cdots+2\cdot 5^n & \\
- & 5S & = \quad 10+50+\cdots+2\cdot 5^n & +2\cdot 5^{n+1} \\
\hline
 & -4S & = 2-2\cdot 5^{n+1} &
\end{array}$$

因此　$= \dfrac{2-2\cdot 5^{n+1}4}{-}$

尽管这看起来像是一种新技术，但你可能以前已经使用过它。

例 4.4.3

将 0.464646 . . . 表示为分数。

解决方案。设 $= 0.46464646\cdots$ 。考虑 0.01 。我们得到：

$$\begin{array}{rrl} & N = & 0.4646464\ldots \\ - & 0.01N = & 0.00464646\ldots \\ \hline & 0.99N = & 0.46 \end{array}$$

所以 $= \frac{46}{99}$。我们做了什么？我们将重复小数 0.464646... 看作是几何级数 0.46, 0.0046, 0.000046, ... 的和。公比是 0.01。唯一的实际区别是，我们现在计算的是 *infinite* 几何和，我们不需要考虑额外的“最后”项。实际上，这是通过求极限得到的，就像在微积分中计算 *infinite* 几何和时那样。

总结一下，我们现在可以找到一个闭式公式，用于一个序列 $_n$，其增长速率是一个指数函数：$_n - {}_{n-1} = {}_n$，其中 $_n$ 是一个几何数列（即一个指数函数）。我们得到什么样的闭式公式呢？它是 *another* 指数函数！

4.4.3 特征根法

假设我们要解决一个以前两项的组合形式表示的递推关系，例如 $_n = {}_{n-1} + 6\ {}_{n-2}$ 。换句话说，我们要找到一个满足 $_n - {}_{n-1} - 6\ {}_{n-2} = 0$ 的 的函数。想一想我们是如何逐步构建这个序列的。

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 6a_0 \\ a_3 &= a_2 + 6a_1 = a_1 + 6a_0 + 6a_1 \\ a_4 &= a_3 + 6a_2 = a_1 + 6a_0 + 6a_1 + 6^2a_0 + 6a_1 \end{aligned}$$

我们就停在这里，同意这一点变得非常复杂。然而，我们确实注意到，在每一步中，我们会做的事情之一是将前一次迭代乘以6。因此，我们的闭式公式将包含6乘以若干次。因此，合理的猜测是，解将包含看起来像几何级数的部分。也许解的形式会是 ^{n}，其中 是某个常数。

好的地方是，我们知道如何检查一个公式是否实际上是递推关系的解：代入它。如果我们将 ^{n} 代入上面的递推关系，会发生什么？我们得到

$$r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0.$$

现在求解 ：

$$r^{n-2}(r^2 - r - 6) = 0,$$

因此通过因式分解，$= -2$ 或 $= 3$（或者 $= 0$，尽管这对我们没有帮助）。这告诉我们 $_n = (-2)^n$ 是该递推关系的一个解，$_n = 3^n$ 也是。哪一个是正确的？它们都正确，除非我们指定初始条件。注意我们也可以有 $_n = (-2)^n + 3^n$。或者 $_n = 7(-2)^n + 4 \cdot 3^n$。事实上，对于任意 和 ，$_n =$ $(-2)^n +$ 3^n 都是一个解（试着把它代入该递推关系）。要找到 和 的取值，使用初始条件。

这将我们引向一种更为一般的求解递推关系的技术。注意，正如上面所做的那样，我们总是能够将 $^{n-2}$ 因式分解出来。因此，我们真正关心的只是另一部分。我们把这另一部分称为该递推关系的特征方程。我们感兴趣的是求出特征方程的根，这些根被称为（不出所料）特征根。

特征根。

给定一个递推关系 $_n +$ $_{n-1} +$ $_{n-2} = 0$，特征多项式为

$$x^2 + \alpha x + \beta$$

给出特征方程：

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0.$$

如果 $_1$ 和 $_2$ 是特征多项式的两个不同根（即特征方程的解），则递推关系的解为

$$a_n = ar_1^n + br_2^n,$$

其中 和 是由初始条件确定的常数。

例 4.4.4

求解递推关系 $_n = 7$ $_{n-1} - 10$ $_{n-2}$，其中 $_0 = 2$ 且 $_1 = 3$。解。将递推关系改写为 $_n - 7$ $_{n-1} + 10$ $_{n-2} = 0$。现在构造特征方程：

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

并解 ：

$$(x - 2)(x - 5) = 0,$$

因此 $= 2$ 和 $= 5$ 是特征根。因此我们知道该递推关系的解将具有如下形式

$$a_n = a2^n + b5^n.$$

为了求出 和 ，将 $= 0$ 和 $= 1$ 代入，得到一个包含两个未知数的二元方程组：

$$2 = a2^0 + b5^0 = a + b$$

$$3 = a2^1 + b5^1 = 2a + 5b.$$

解决这个系统得到 $= \frac{7}{3}$ 和 $= -\frac{1}{3}$，因此递推关系的解是

$$a_n = \frac{7}{3}2^n - \frac{1}{3}5^n.$$

或许最著名的递推关系是 $_n = \quad _{n-1} + \quad _{n-2}$，它与初始条件 $_0 = 0$ 和 $_1 = 1$ 一起定义了斐波那契数列。但请注意，这正是我们可以使用特征根技巧的递推关系类型。当我们这么做时，唯一改变的是特征方程无法因式分解，因此我们必须使用二次公式来求解特征根。事实上，这样做会得到第三个最著名的无理数 ，黄金比例。

在离开特征根法之前，我们应该思考在求解特征方程时可能会发生什么。上面我们给出了一个例子，其中特征多项式有两个不同的根。这些根可以是整数，或者也可能是无理数（需要使用二次公式来求解）。在这些情况下，我们知道递推关系的解是什么样的。

然而，特征多项式也有可能只有一个根。这种情况会在特征多项式分解为 $(\quad - \quad)^2$ 时发生。此时，^{n} 仍然会是该递推关系的一个解，但我们将无法使用一般形式 $_n = \quad _1^n + \quad _2^n$ 来为所有初始条件找到解，因为我们无法区分 $_1^n$ 和 $_2^n$。不过我们很幸运：

重根的特征根法。

假设递推关系 $_n = \quad _{n-1} + \quad _{n-2}$ 的特征多项式只有一个根 。则该递推关系的解为

$$a_n = ar^n + bnr^n$$

其中 和 是由初始条件确定的常数。

注意 ^{n} 中多出的 。这使我们能够根据初始条件求解常数 和 。

例 4.4.5

解这个递推关系 $_n = 6 \quad _{n-1} - 9 \quad _{n-2}$，初始条件为 $_0 = 1$ 和 $_1 = 4$。

解. 特征多项式是 $^2 - 6 \quad + 9$. 我们求解特征方程

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

通过因式分解:

$$(x-3)^2 = 0,$$

所以 $= 3$ 是唯一的特征根。因此我们知道该递推关系的解具有如下形式

$$a_n = a3^n + bn3^n$$

为了一些常数 和 。现在使用初始条件 我们:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 = a3^0 + b \cdot 0 \cdot 3^0 = a \\ a_1 &= 4 = a \cdot 3 + b \cdot 1 \cdot 3 = 3a + 3b. \end{aligned}$$

由于 $= 1$，我们发现 $= \frac{1}{3}$。因此，递推关系的解是

$$a_n = 3^n + \frac{1}{3}n3^n.$$

尽管我们不会考虑比这些更复杂的例子，但这种特征根技术可以应用于更加复杂的递推关系。例如，${}_n = 2\,{}_{n-1} + {}_{n-2} - 3\,{}_{n-3}$ 的特征多项式是 ${}^3 - 2\,{}^2 - \; + 3$。假设我们知道如何分解这样一个三次（或更高次）多项式，就可以很容易地找到特征根，从而解出该递推关系（如果有 3 个不同的根，解的形式将类似于 ${}_n = {}_1^n + {}_2^n + {}_3^n$）。特征根也有可能是复数。

然而，特征根技术只对求解具有特定形式的递推关系有用：${}_n$ 被表示为若干个先前项的线性组合。这类递推关系称为具有常系数的线性齐次递推关系。“齐次”指的是递推关系中除了 ${}_j$ 项的倍数之外不存在额外项这一事实。例如，${}_n = 2\,{}_{n-1} + 1$ 是 *non-homogeneous*，因为存在额外的常数 1。求解此类问题有一些通用方法，但我们在这里不予考虑，除了使用前面描述的望远镜求和或迭代方法之外。

4.4.4 阅读问题

1. 以下哪些递推关系适合尝试使用特征根法？选择所有适用的选项

A. $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2}$

B. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3}$

C. $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{2}{3}(-1)^n$

D. $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5$

E. $^2 - 3\ \ - 1 = 0$

2. 在完成特征根法的过程中，在哪一步需要参考初始条件？如果不使用这些初始条件会发生什么？请解释。

3. 你有哪些问题？请就本节内容写出至少一个你或一位同学可能感到好奇的问题。

4.4.5 练习题

1. 求 $6 + 30 + 150 + \cdots + 6 \cdot 5^{19}$。

2. 求 $1 - \frac{7}{4} + \frac{49}{16} - \cdots + (-1)^{37}\frac{7^{37}}{4^{37}}$。

3. 求解递推关系 $_n = \ _{n-1} + 2^n$，其中 $_0 = -2$。 $_n =$ ______________________

4. 求递推关系 $_n = 2\ _{n-1} + 24\ _{n-2}$ 的解，初始项为 $_0 = 2$ 和 $_1 = 2$。 $_n =$ ___________

5. 求解递推关系 $_n = \ _{n-1} + 2\ _{n-2}$，初始项为 $_0 = 2$ 和 $_1 = 1$。

= ~~求递推关系 $_n = \ _{n-1} + 2\ _{n-2}$~~的解，初始项为 $_0 = 9$ 和 $_1 = 14$。

$_n =$ ____________________________

6. 求递推关系 $_n = \ _{n-1} + 2\ _{n-2}$ 的解，初始项为 $_0 = 4$ 和 $_1 = 17$。 $_n =$ ___________

4.4.6 补充练习

1. 求序列 $(\ _n)_{n\geq 0}$ 中以下项 3, 5, 11, 21, 43, 85 . . . 的下两个项。然后给出该序列的递归定义。最后，使用特征根法求该序列的闭式公式。

2. 考虑数列 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, . . .（其中 $_0 = 2$）。

   (a) 描述该序列的增长速率。

   (b) 找到该序列的递归定义。

   （c）求该数列的一个闭式公式。（d）如果你考察各项之间差的数列，然后再考察二阶差分、三阶差分，依此类推，是否会得到一个常数数列？解释你是如何知道的。

3. 显示 t 4^n 是递推关系 $_n = 3\ _{n-}$ 的解

$1 + 4\ _{n-2}$.

4. 假设 ^{n} 和 ^{n} 都是形如 $_n = \quad _{n-1} + \quad _{n-2}$ 的递推关系的解。证明：对于任意常数 、 ，$\cdot\ ^n + \quad \cdot\ ^n$ 也是该递推关系的一个解。

5. 回想一下你家附近杂货店里的那台神奇的糖果机。假设第一次投入一枚 25 美分硬币时，会出来 1 颗彩虹糖；第二次出来 4 颗彩虹糖；第三次出来 16 颗彩虹糖；第四次出来 64 颗彩虹糖；以此类推。

(a) 求第 n 位顾客得到多少颗 Skittles 的递推公式和闭式公式。 (b) 通过使用特征根法求解递推关系来验证你得到的闭式公式解。

6. 令 $_n$ 为你可以使用有 4 种颜色的 1×1 正方形和有 5 种颜色的 1×2 多米诺骨牌制作的 $1 \times$ 铺砖设计的数量。

(a) 首先，找出一个描述该问题的递推关系。解释为什么这个递推关系是正确的（结合问题的背景）。(b) 写出数列 $_1, \ _2, \ldots$ 的前 6 项。(c) 求解该递推关系。也就是说，找出 $_n$ 的一个闭式公式。

7. 你可以使用 1×1 块砖块，它们有 2 种不同的颜色，以及 1×2 块砖块，它们有 3 种不同的颜色。我们想要弄清楚，用这些砖块可以制作多少种不同的 $1 \times$ 路径设计。

（a）求长度为 的路径序列 $_n$ 的一个递归定义。

(b) 使用特征根法解递推关系。

解这个递推关系 $_n = 2 \ _{n-1} - \ _{n-2}$。

(a) 如果初始项是 $_0 = 1$ 和 $_1 = 2$，解是什么？ (b) 初始项需要是什么才能使 $_9 = 30$？ (c) 对于哪个 存在初始项使得 $_9 =$ ？

9. 考虑递推关系 $_n = 4 \ _{n-1} - 4 \ _{n-2}$。

(a) 求递推关系的通解（注意重复根的情况）。 (b) 当 $_0 = = 1$ 且 $_1 = = 2$ 时，求解。 (c) 当 $_0 = = 1$ 且 $_1 = = 8$ 时，求解。

10. 这是一个令人惊讶的序列应用，来回答一个计数问题：有多少种车牌由6个符号组成，仅使用三个数字1、2和3，以及四个字母a、b、c和d，并且没有数字出现在任何字母之后

字母？例如，“31ddac”、“123321”和“ababab”都是可接受的车牌，但“13ba2c”不是。

(a) 首先通过考虑不同的情形来回答这个问题：有多少个车牌不含任何数字？有多少个包含一个数字，等等。

(b) 现在使用本节的技术来说明为什么答案是 $4^7 - 3^7$。

4.5 归纳法证明

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 识别数学归纳法证明的各个部分，以及它们与所要证明的陈述之间的关系。 2. 使用数学归纳法证明命题。 3. 解释为什么数学归纳法证明是有效的。

4.5.1 本节预览

Investigate!

6^n的单位数字（最右边的数字）是什么？答案是否依赖于 ？

数学归纳法是一种强有力的证明技术，只要这一系列陈述有一个起点，就可以用它来证明对于一*sequence*的陈述它们都为真。例如，如果我们试图说明 6^n 的个位数字，我们是在对 = 1、然后 = 2、然后 = 3，依此类推提出这一断言。

归纳与递归定义密切相关；归纳法证明中的主要思想是解释如何从序列中的一个陈述推导到下一个陈述。

活动预览

1. 假设 6^{472} 的个位数字是 2。也就是说，假设 6^{472} = 19, 381, 6 . . . . . . 2. 那么 6^{473} 的个位数字会是多少？

提示。$6^{473} = 6 \cdot 6^{472}$。2. 6^2、6^3 和 6^4 的个位数字分别是多少？ 3. 以下哪些是正确的？选择所有适用的。

A. 如果 6^k 的个位数字是 6，那么 6^{k+1} 的个位数字是 6。B. 如果 6^k 的个位数字是 2，那么 6^{k+1} 的个位数字是 2。C. 6^{472} 的个位数字是 2。D. 6^{472} 的个位数字是 6。

4. 解释你对上一题的答案。

4.5.2 递归推理

我们已经看到，递归地描述一个序列通常比用闭合公式描述该序列更容易。现在我们将看到，使用类似的递归推理如何帮助我们通过一种叫做数学归纳法的证明技巧来证明陈述。当陈述的不同实例（例如，对于不同的 值）递归地相关时，这种证明方法特别有用。

例如，假设我们想要证明一个关于具有递归定义的序列中所有项的事实。考虑序列 $(\ _n)_{n\geq 0}$，其递归定义为 $\ _n = 3\ _{n-1} - 2$，且 $\ _0 = 5$。我们能否证明该序列中的每一项都是奇数?

让我们先写出这个序列的前几项:

$$5, 13, 37, 109, \ldots.$$

到目前为止，这些数看起来都是奇数。下一个数会是奇数吗? 当然，我们可以直接用递推关系来计算它。我们将取 $3 \cdot 109 - 2$。我们实际上并不关心 *which* 这是哪个奇数，只关心它确实是奇数。我们知道它会是奇数，因为两个奇数的乘积是奇数，而从一个奇数中减去 2 仍然得到奇数。

很好，所以 $\ _4$是奇数。 $\ _5$也会是奇数吗? 会的，使用与上面相同的论证： $\ _5 = 3\ _4 - 2$。我们刚刚确信 $\ _4$是奇数（无需求出它的实际值），所以3 $\ _4$是奇数，而它再减去2仍将是奇数。

那 $\ _6$怎么样? 做同样的事情。事实上，为什么我们要使用某个特定的数字作为索引? 如果每次都是相同的参数，我们应该能够只给出这个参数一次，并说它总是有效。

假设我们已经发现 $\ _k$ 是奇数（其中 是任意的自然数）。由此我们可以得到 $\ _{k+1}$ 是奇数，因为 $\ _{k+1} = 3\ _k - 2$，而且奇数 $\ _k$ 乘以 3 仍然是奇数，再减去 2 仍然得到一个奇数。太好了。让我们把这些汇总成一个证明。

证明。我们声称，对于任意 ≥ 0，数 $\ _n$ 是奇数，其中 $\ _n = 3\ _{n-1} - 2$ 且 $\ _0 = 5$。

当 $= 0$ 时，该断言为真，因为 $\ _0 = 5$ 是奇数。

进一步地，我们可以证明每个更大的 都有$_n$为奇数，因为只要 $\ _k$是奇数，$\ _{k+1}$ (也是奇数，因为 $\ _{k+1} = 3\ _k - 2$，并且3倍的奇数减去2总是奇数)。

因此，对于所有 ≥ 0， $\ _n$是奇数。

不久我们将为归纳证明给出一种更为严格的结构，但其基本思想正是我们上面所介绍的。

4.5.3 证明的形式化

数学归纳法可以证明许多对所有自然数都成立的命题，而不仅仅是关于序列的命题。特别是，当存在时，应当使用归纳法

从一个案例到下一个案例的某种方式——当你能看到如何始终“再做一步”时。

思考我们如何用逻辑符号书写命题，我们将使用归纳法来证明如下形式的命题

$$\forall n P(n),$$

其中论域（我们所量化的 的取值）具有某个最小元素。设该论域是自然数。于是我们正在证明如下这些 *sequence* 个陈述：

$$P(0), P(1), P(2), P(3), \ldots.$$

我们用归纳法这样做：先证明基例，即 (0) 为真（或 ( )，其中 是我们论域中的最小元素）。接下来，我们证明归纳步，即对所有 ≥ 0（或 ≥ ），有 ( ) → (+ 1)。

综合来看，这些已经足以证明 ( ) 对所有 都成立。我们怎么知道的？也就是说，为什么这种证明方式是有效的？好，让我们来说服自己 (3) 是真的。我们知道 (0) 为真。并且因为我们知道 (0) → (1)，于是我们也知道 (1) 为真。因为 (1) → (2)，我们接着得到 (2) 为真。最后，因为 (2) → (3)，我们就有 (3)。这里 3 并没有什么特别之处。我们可以按自己的意愿继续往上推，***to any value!***

想象一排竖立在边缘上的多米诺骨牌。我们想要论证：一分钟之内，所有的多米诺骨牌都会倒下。要发生这种情况，你需要推倒第一块骨牌。这就是基例。同时，还必须保证骨牌之间足够靠近，使得任何一块骨牌倒下时，都会带动下一块骨牌倒下。这就是归纳情形。如果这两个条件都满足——你推倒了第一块骨牌，并且每一块骨牌都会使下一块倒下——那么所有的多米诺骨牌都会倒下。

归纳法很强大！想想看，当你不必亲手推倒每一块多米诺骨牌时，把它们推倒会容易多少。你只需启动连锁反应，然后依靠多米诺骨牌彼此之间的相对接近来完成剩下的一切。

在撰写数学归纳法证明时，我们将遵循一种标准的写作风格。采用这种风格写作可以帮助我们使思路井然有序，甚至可能有助于我们构思证明。

以下是数学归纳法证明的一般结构：

归纳证明结构。

首先说明你想要证明的命题是什么：“令 ( ) 为命题……”。要证明 ( ) 对所有 ≥ 0 都成立，你必须证明两个事实：

1. 基础情形：证明 (0) 为真。你可以直接证明。这通常很容易。2. 归纳情形：证明对所有 ≥ 0, ( ) → (+ 1)。也就是说，证明对于任意 ≥ 0，如果 ( ) 为真，那么 (+ 1) 也为真。这是一个“如果……那么……”陈述的证明，因此你可以假设 ( ) 是

为真（ ( ) 被称为 *inductive hypothesis*）。然后，你必须在该假设下解释为什么 (+ 1) 也为真。

假设你在上述两个部分都成功，那么你可以得出结论："因此，根据数学归纳法原则，命题 ( ) 对所有 ≥ 0 都成立。"

有时，命题 ( ) 仅对 ≥ 4 等值成立，或者是其他某个值。在这种情况下，将上述所有的 0 替换为 4（或其他值）。

在尝试通过数学归纳法证明一个命题之前，首先思考*why*该命题是否可以通过归纳推理来证明。解释为什么归纳法是正确的方法，并大致说明为什么归纳步骤会有效。然后，坐下来，按照上述结构写出一个仔细、正式的证明。

4.5.4 示例

以下是数学归纳法证明的一些示例。

例子 4.5.1

证明对于每个自然数 ≥ 1， $1 + 2 + 3 + \cdots + \quad = \frac{n(n+1)}{2}$。
解法。首先，让我们从归纳法的角度来思考这个方程。事实上，我们知道这对其他原因是成立的（倒序加法就可以想到）。但为什么归纳法可能适用呢？左边是从 1 到 的数字之和。如果我们知道如何计算这个和，那么再加一个项（ + 1）就不难了。例如，如果 $= 100$，假设我们知道前 100 个数字的和是 5050（即 $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050$，这是成立的）。现在要找到前 101 个数字的和，更合理的做法是直接将 101 加到 5050 上，而不是重新计算整个和。我们得到 $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 + 101 = 5050 + 101 = 5151$。事实上，添加一个新的项总是很容易的。这就是我们应该使用归纳法的原因。

现在是正式证明：

*Proof*设 ( ) 为命题 $1 + 2 + 3 + \cdots + \quad = \frac{n(n+1)}{2}$。我们将证明 ( ) 对所有自然数 ≥ 1 成立。

基本情况： (1) 是陈述 $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ 这显然是真的。

归纳步骤：令 ≥ 1 为自然数。假设（作为归纳假设） ( ) 为真。这意味着 $1 + 2 + 3 + \cdots + \quad = \frac{k(k+1)}{2}$。我们将证明 (+ 1) 也为真。也就是说，我们必须证明 $1 + 2 + 3 + \cdots + \quad + (\ + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$。为了证明这个等式，先将 + 1 加到归纳的两边

假设:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1).$$

现在，简化右侧我们得到:

$$\begin{aligned}\frac{k(k+1)}{2}+k+1&=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+2)(k+1)}{2}.\end{aligned}$$

因此 (+ 1) 为真，因此根据数学归纳法原则， ( ) 对所有自然数 ≥ 1 都为真。■

请注意，在证明 (+ 1) 从 ( ) 得出这一部分时，我们使用了方程 ( )。这是归纳假设。在证明类似于这样的和的事实时，如何使用归纳假设通常是直接的。在其他证明中，归纳假设的位置可能不那么明显。

例 4.5.2

证明对于所有 $\in$ ，$6^n - 1$ 是 5 的倍数。

解答。再次，从理解问题的动态开始。增加 会产生什么作用？让我们用几个例子来试试。如果 $=1$，那么是的，$6^1 - 1 = 5$ 是 5 的倍数。把 增加到 2 会是什么样子？我们得到 $6^2 - 1 = 35$，这同样是 5 的倍数。接下来， $= 3$ ：但与其只是计算 $6^3 - 1$， 的增加究竟做了什么？我们仍然会减去 1，但现在先要再乘以一个 6。换一种角度看，我们是在把一个比 5 的倍数大 1 的数乘以 6（因为 $6^2 - 1$ 是 5 的倍数，所以 6^2 比 5 的倍数大 1）。比 5 的倍数大 1 的数是什么样的？它们的个位数字必定是 1 或 6。当你把这样的数乘以 6 时会发生什么？这取决于具体的数，但无论如何，新数的个位数字必定是 6。然后如果再减去 1，就得到个位为 5，因此是 5 的倍数。

关键是，每次我们再乘以一个六，结果的末尾数字仍然是6，所以减去1就得到一个5的倍数。现在是正式证明:

*Proof*让 ( ) 表示“$6^n - 1$ 是 5 的倍数”。我们将证明 ( ) 对所有 $\in$ 都成立。

基例: (0) 为真: $6^0 - 1 = 0$，是 5 的倍数。

归纳法情况：设 为任意自然数。假设，对于

由归纳法可知，( ) 为真。也就是说，$6^k - 1$ 是 5 的倍数。那么 $6^k - 1 = 5$ ，其中 为某个整数。这意味着 $6^k = 5 + 1$。将两边同时乘以 6:

$$6^{k+1} = 6(5j + 1) = 30j + 6.$$

但是我们想了解$6^{k+1} - 1$，因此从两边减去1 边缘:

$$6^{k+1} - 1 = 30j + 5.$$

当然，$30 + 5 = 5(6 + 1)$，因此是 5 的倍数。

因此，$6^{k+1} - 1$ 是 5 的倍数，换句话说，(+ 1) 为真。因此，根据数学归纳法原理，( ) 对所有 ∈ 都为真。■

我们不得不稍微动点脑筋（也就是说，使用一些代数），在应用归纳假设之前先在 $6^{k+1} - 1$ 中找到 $6^k - 1$。这正是归纳证明之所以具有挑战性的原因。

在上面的两个例子中，我们从 = 1 或 = 0 开始。如果需要，我们可以稍后再开始。

例 4.5.3

证明对于所有整数 ≥ 5，都有 $^2 < 2^n$。

解答。首先，论点的思路。当我们将 增加1时会发生什么？在左侧，我们增加了平方数的底数，并进入下一个平方数。右侧，我们增加了2的幂次。这意味着我们将数字翻倍。那么问题是，数字翻倍和进入下一个平方数之间有什么关系？想一想两个连续平方数之间的差异是什么样子的。我们有$(+ 1)^2 -$ ^{2}。这可以因式分解:

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1 - n)(n + 1 + n) = 2n + 1.$$

但是，将右侧加倍会使其增加 2^n，因为 $2^{n+1} = 2^n + 2^n$。当 足够大时，$2^n > 2 + 1$。

我们在这里说的是，每次 增加时，左边增长的速度比右边慢。因此，如果左边开始较小（就像当 = 5时），它永远无法赶上。现在是正式的证明:

*Proof*令 ( ) 为命题 $^2 < 2^n$。我们将证明 ( ) 对所有整数 ≥ 5 都成立。

基例： (5) 是陈述 $5^2 < 2^5$。由于 $5^2 = 25$ 且 $2^5 = 32$，我们看到 (5) 确实为真。

归纳情形：设 ≥ 5 为任意整数。为进行归纳，假设 ( ) 为真。也就是说，假设 $^2 < 2^k$。我们将证明 (+ 1) 为真，即 $(+ 1)^2 < 2^{k+1}$。要证明这样的不等式，从左端开始

并向右侧推进：

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&< 2^k + 2k + 1 && \text{...by the inductive hypothesis.} \\
&< 2^k + 2^k && \text{... since } 2k + 1 < 2^k \text{ for } k \geq 5. \\
&= 2^{k+1}.
\end{aligned}
$$

沿着等式和不等式推导下去，我们得到 (+ 1)^2 < 2^{k+1}，换句话说，(+ 1)。因此，根据数学归纳法原理，( ) 对所有 ≥ 5 都成立。■

之前的例子可能让你想起了微积分中的 *racetrack principle*，它说的是，如果 ( ) < ( )，并且 ′( ) < ′( ) 对于 > 成立，那么 ( ) < ( ) 对于 > 也成立。相同的原理：较大的函数增长速度比较小的函数更快，因此较大的函数会保持较大。在离散数学中，我们没有导数，所以我们看差异。因此，归纳法是我们要采用的方法。

警告。能力越大，责任越大。归纳法并不是魔法。能够假设 ( ) 为真看起来非常强大。毕竟，我们要证明的是 ( ) 为真，而唯一的区别在于变量： 与 。我们是在假设我们想要证明的结论本身就为真吗？并非如此。我们假设 ( ) 为真，只是为了证明 (+ 1) 为真。

尽管如此，你可能还是会开始相信可以用归纳法证明任何事情。考虑下面这个不正确的“证明”，它声称每个加拿大人都有相同的眼睛颜色：令 ( ) 表示“任意 个加拿大人都有相同的眼睛颜色”这一命题。 (1) 为真，因为每个人与自己相比都有相同的眼睛颜色。现在假设 ( ) 为真。也就是说，假设在任意一组由 个加拿大人组成的群体中，每个人都有相同的眼睛颜色。现在考虑一个任意由 + 1 个加拿大人组成的群体。由于 ( ) 为真，其中前 个人必定都有相同的眼睛颜色。同样，由于 ( ) 为真，其中后 个人也必定有相同的眼睛颜色。因此，事实上，这个群体中的所有人都必须具有相同的眼睛颜色。于是 (+ 1) 为真。由数学归纳原理可知，( ) 对所有 都为真。

显然出了问题。问题在于，证明 ( ) 蕴含 (+ 1) 的过程中假设了 ≥ 2。我们只证明了 (1) 为真。事实上， (2) 是假的。试一试：再读一遍上一段，把每个 都替换为 1。你能找出该论证中的错误吗？

4.5.5 阅读问题

1. 假设你想要使用数学归纳法证明，对于所有 ≥ 1 的取值，1 + 3 + 5 + · · ·+ 2 − 1 = ^{2}。以下哪一项将是该证明的一个合适的 *first line*？选择所有适用的。

A. 设 ( ) 为如下命题：“1 + 3 + 5 + · · ·+ 2 − 1 = ^{2}。”

B. 对于每个 ≥ 1，令 $( )$ 表示命题："前 个奇数的和是 ^{2}。" C. 假设对所有 ≥ 1，有 $1+3+\cdots+2 \quad -1 = \quad ^2$。D. 令 $( )$ 表示命题："对所有 ≥ 1，$1+3+\cdots+2 \quad -1 = \quad ^2$。" E. 由于 $(1)=1=1^2$，基例成立。

2. 假设你想证明 $(\, , 3) \geq \binom{n}{3}$ 对所有 ≥ 4 成立。写出归纳法证明的第一行。

3. 你有什么问题？写下至少一个关于本节内容的问题，可能是你或你的同学在阅读本节后会好奇的。

4.5.6 练习题

1. 假设你正试图通过数学归纳法证明命题 $( )$ 对所有 ≥ 0 都成立。你会在证明的 *induction step* 中尝试证明什么？（选择所有适用项。）

A. 即假设对任意 ≥ 0，$( )$ 为真，我们可以证明 $(\quad +1)$ 为真。 B. 即对所有 ≥ 0，$( )$ 蕴含 $(\quad +1)$。 C. 即假设对任意 ≥ 0，$(\quad +1)$ 为真，我们可以证明 $( )$ 为真。 D. 即对所有 ≥ 0，$(\quad +1)$ 蕴含 $( )$。 E. 即至少存在一个 ≥ 0，使得 $( )$ 蕴含 $(\quad +1)$。

2. 假设你想证明以下命题：

$$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1) \text{ for all } n \geq 1.$$

证明的第一行应该是什么？

A. 令 $( )$ 为命题"$2+4+6+\cdots+2 \quad = \quad (\quad +1)$。" B. 令 $( )$ 为命题"$2+4+6+\cdots+2 \quad = \quad (\quad -1)$，对所有 ≥ 1。" C. 假设 $( )$ 对所有 ≥ 1 都为真。D. 令 $( ) = 2+4+6+\cdots+2$ 。E. 假设 $( ) = \quad (\quad +1)$，对所有 ≥ 1。

3. 假设你正在通过数学归纳法证明以下命题：

$$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1) \text{ for all } n \geq 1.$$

为了建立基础案例，您需要展示什么？

A. 证明 (1) 是正确的。也就是说，证明 2 = 1(1 + 1)。 B. 证明 (2) 是正确的。也就是说，证明 2 + 4 = 2(2 + 1)。 C. 证明 (1) 和 (2) 都是正确的。 D. 证明 (1) 推出 (2)。 E. 无需证明，因为该和已经有超过 = 1 项。

4. 假设你正在通过数学归纳法证明以下陈述：

$$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1) \text{ for all } n \geq 1.$$

归纳步骤的第一行会是什么？

A. 假设 ( ) 对某个任意的 ≥ 1 为真，也就是说，假设 2 + 4 + 6 + · · ·+ 2 = (+ 1)。 B. 假设 ( ) 对所有 ≥ 1 为真，也就是说，假设 2+4+6+· · ·+2 = (+1)。 C. 假设对于任意的 ≥ 1, ( ) 蕴含 (+ 1)。 D. 假设 ( ) 对某个足够大的 ≥ 1 为真；例如，假设 2 + 4 + 6 + · · ·+ 432 = 216(217)。

5. 将下面的一些陈述进行排列，以构造一个正确的归纳证明，证明递推关系 $_n = 5 _{n-1} + 4$，在初始条件 $_0 = 0$ 下，具有闭式公式 $_n = 5^n - 1$。

- 这简化为 $_{k+1} = 5^{k+1} - 5 + 4 = 5^{k+1} - 1$，因此 (+ 1) 为真。
- 因此，根据数学归纳原理，对于所有 ≥ 0, ( )都成立。
- 现在假设对于任意整数 ≥ 0，命题 (+ 1) 为真。
- 于是 $_{k+1} = 5 _k + 4$，所以 (+ 1) 为真。
- 然后 $_k = 5^k - 1$。
- 令 ( ) 为命题：“ $_n = 5^n - 1$”。
- 根据递推关系，我们有 $_{k+1} = 5 _k + 4 = 5(5^k - 1) + 4$。
- 请注意，$_0 = 5^0 - 1 = 0$，因此 (0) 为真。
- 现在假设对于任意整数 ≥ 0, ( ) 为真。

6. 排列以下一些陈述，以构建一个正确的归纳证明，证明对于所有 ≥ 1，数字 $14^{n} - 1$ 是 13 的倍数。

- 然后 $14^k - 1 = 13 \cdot$ 对于某个整数 。
- 因此，根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 ≥ 1 都成立。
- 注意到 $14^2 - 1 = (14 - 1)(14 + 1)$ 由平方差可知，因此这是 13 的倍数。
- 现在假设对于所有 ≥ 1， ( ) 都为真。
- 因此 $14^k = \frac{14^{k+1}-1}{14}$，它也必须是 13 的倍数。
- 由于 $14^{k+1} - 1 = 14(14^k - 1) + 14 - 1 = 14(13 \cdot \ ) + 13$，我们可以看出 $14^{k+1} - 1$ 是 13 的倍数。
- 设 ( ) 为如下命题：“$14^n - 1$ 是 13 的倍数。”
- 因此， ($+ 1$) 为真。
- 注意到 $14^1 - 1 = 13$，因此这肯定是 13 的倍数。
- 现在假设 ( ) 对于任意整数 ≥ 1 是成立的。

7. 将下面的一些陈述排列起来，以构造一个正确的数学归纳法证明，证明对于所有 ≥ 1，$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + {}_n = {}_{n+2} - 1$，其中 $_n$ 是第 个斐波那契数。

- 根据斐波那契数的定义， $_{k+1} + {}_{k+2} = {}_{k+3}$，因此右边可化简为 $_{k+3} - 1$ 。
- 于是根据归纳假设，$1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + {}_{k+1} = {}_{k+2} - 1$。
- 也就是说，假设 $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + {}_k = {}_{k+2} - 1$。
- 对于基例，注意到 $1 + 1 + 2 = 4 = {}_5 - 1$.
- 让 ( ) 表示命题，“$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + {}_n =$
- 因此， ($+ 1$) 为真，因此根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 ≥ 1 都为真。
- 然后在等式两边加上 $_{k+1}$，我们得到 $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + {}_k + {}_{k+1} = {}_{k+1} + {}_{k+2} - 1$。
- 对于基例，注意到 (1) 和 (2) 为真，因为 $1 = 2 - 1$ 且 $1 + 1 = 3 - 1$。
- 现在假设 ( ) 对于任意整数 ≥ 2 为真。
- 从等式两边减去 $_{k+1}$，我们得到 ( )，而这也是我们所假设为真的。

4.5.7 附加练习

1. 在去集市的路上，你用你的奶牛换来了一些魔法黑巧克力浓缩咖啡豆。这些豆子具有这样的特性：每天午夜时分，每一颗豆子都会分裂成两颗，从而使你的存量翻倍。你决定利用这一点，并且每天早上（大约上午 8 点）吃掉 5 颗豆子。

(a) 解释为什么以下陈述是真的：*if* 在第 天中午你拥有的豆子数量以5 结尾，那么在第 天+ 1 的中午你仍然会拥有一个以 5 结尾的豆子数量。(b) 为什么上述事实不足以得出你将始终拥有一个以 5 结尾的豆子数量这一结论？你还需要什么额外的事实？(c) 假设你拥有了 (b) 部分中的额外事实，并且已经成功证明了 (a) 部分中的事实，你如何知道你将始终拥有一个以 5 结尾的豆子数量？通过仔细解释上述两个事实如何证明你在 *day 4* 时特别会拥有一个以 5 结尾的豆子数量，来说明正在发生的事情。换句话说，解释为什么归纳法在这种情境下是有效的。

2. 使用数学归纳法证明对于所有 ∈ ，有$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$。

3. 证明对于所有 ∈ ，$7^n - 1$ 是 6 的倍数。

4. 证明 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2\ \ - 1) = {}^2$，对所有 ≥ 1。

5. 证明 ${}_0 + {}_2 + {}_4 + \cdots + {}_{2n} = {}_{2n+1} - 1$，其中 ${}_n$ 是第 个斐波那契数。

6. 证明对于所有 ≥ 4，$2^n <$!。（回忆： $! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot$ 。）

7. 用数学归纳法证明， ${}_0 + {}_1 + {}_2 + \cdots + {}_n = {}_{n+2} - 1$，其中 ${}_n$ 是第 个斐波那契数（ ${}_0 = 0$， ${}_1 = 1$，且 ${}_n = {}_{n-1} + {}_{n-2}$）。

8. 僵尸欧拉和僵尸柯西，两位著名的僵尸数学家，刚刚注册了 Myspace 账号。一天之后，僵尸柯西的关注者数量多于僵尸欧拉。此后每天，僵尸柯西新增的关注者数量与僵尸欧拉新增的关注者数量完全相同（且二者都不会失去任何关注者）。解释如何用数学归纳法的证明来表明：在第一天之后的每一天，僵尸柯西的关注者都会多于僵尸欧拉。也就是说，说明基例和归纳步骤分别是什么，以及为什么它们结合起来能够证明在第 4 天僵尸柯西的关注者会多于僵尸欧拉。

9. 找出在只使用3分的射门得分和7分的达阵得分的情况下，一支橄榄球队不可能恰好得到的最大得分（忽略安全分、加罚踢失以及两分转换的可能性）。证明

你的答案是通过数学归纳法正确的。

10. 证明 n 个平方的和可以如下求得

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

11. 证明一个凸 边形的内角和是(− 2) · 180°。（凸 边形是指具有 条边，且每个内角都小于180°的多边形。）

12. 下面这个关于“事实”的“证明”有什么问题：对所有的 ， + 3 = + 7（当然，除了它所声称要证明的东西本身是假的这一点之外）？

证明。设 ( ) 为命题 + 3 = + 7。我们将证明 ( ) 对所有 ∈ 成立。假设 ( ) 成立，即 + 3 = + 7。我们必须证明 (+ 1) 成立。现在，由于 + 3 = + 7，双方同时加 1。得到 + 3 + 1 = + 7 + 1。重新分组得到 (+ 1) + 3 = (+ 1)+ 7。但这正是 (+ 1)。因此，根据数学归纳法原则， ( ) 对所有 ∈ 成立。

13. 前一个问题中的证明不起作用。但是，如果我们修改“事实”，我们可以得到一个有效的证明。证明对于所有 ∈ 的值， + 3 < + 7。你可以用代数来证明这个命题（不使用归纳法），但本练习的目标是写出一个有效的归纳法证明。

14. 找出下面“证明”中的漏洞，该“证明”声称对于每个 ∈ ， < 100。

证明。令 ( ) 表示命题 < 100。我们将证明对所有 ∈ ， ( ) 都成立。首先建立基例：当 = 0 时， ( ) 成立，因为 0 < 100。现在进行归纳步骤，假设 ( ) 成立。也就是说， < 100。现在如果 < 100，那么 是某个数，比如 80。当然，80 + 1 = 81，仍然小于 100。因此 + 1 < 100 也成立。但这正是 (+ 1) 所声称的，因此我们已经表明 ( ) → (+ 1)。因此根据数学归纳法原理，对所有 ∈ ， ( ) 都成立。

15. 虽然上述证明不起作用（最好不行，因为它试图证明的陈述是错误的！），我们可以证明类似的结论。证明存在一个严格递增的数列 $_1$， $_2$， $_3$, . . .（不一定是整数），使得对于所有 ∈ ， $_n$ < 100。（严格递增的意思是对于所有 ， $_n$ < $_{n+1}$，即每一项必须大于前一项。）

16. 以下关于“事实”的“证明”有什么问题：对于所有 ∈ ，数 ^{2} + 是奇数?

证明。设 ( ) 为命题"$^2+$ 是奇数。"我们将证明对所有 $\in$ ，( ) 都成立。为进行归纳，假设 ( ) 成立，即 $^2+$ 是奇数。现在考虑命题 ($+1$)。现在 ($+1)^2+($ $+1) =$ $^2+2$ $+1+$ $+1=$ $^2+$ $+2$ $+2$。根据归纳假设，$^2+$ 是奇数，当然 2 $+2$ 是偶数。奇数加偶数总是奇数，因此 ($+1)^2+($ $+1)$ 是奇数。因此根据数学归纳法原理，对所有 $\in$ ，( ) 都成立。

17. 现在给出该陈述的一个有效证明（使用归纳法，尽管你也许可以不使用归纳法完成），即："对所有 $\in$ ，数 $^2+$ 是偶数。"

18. 证明存在一列正实数 $_0$，$_1$，$_2$, . . .，使得对所有 $\in$ ，其部分和 $_0+$ $_1+$ $_2+\cdots+$ $_n$ 都严格小于 2。提示：思考你可以如何定义 $_{k+1}$，以使归纳论证能够成立。

19. 用归纳法证明：如果有 个人彼此都握一次手，则握手的总次数是 $\frac{n(n-1)}{2}$。

20. 使用归纳法证明 $\sum_{k=0}^{n}\left(\ \right)=2^n$。也就是说，帕斯卡三角形的第 行的和为 2^n。

21. 用数学归纳法证明 $\binom{4}{0}+\binom{5}{1}+\binom{6}{2}+\cdots+\binom{4+n}{n}=\binom{5+n}{n}$。（这是冰球杆定理的一个例子。）

22. 使用对数的乘积法则（log( ) = log( ) + log( )）通过对 的归纳证明, log(^{n}) = log( )，对所有自然数 ≥ 2。

23. 设 $_1$，$_2$, . . . , $_n$ 为可微函数。用数学归纳法证明：

$$(f_1+f_2+\cdots+f_n)'=f_1'+f_2'+\cdots+f_n'.$$

你可以假设 ($+$)$'$ = $'+$ $'$, 对于任意可微函数 和 。

24. 假设 $_1$，$_2$, . . . , $_n$ 是可微函数。使用数学归纳法证明广义乘积法则：

$$(f_1f_2f_3\cdots f_n)'=f_1'f_2f_3\cdots f_n+f_1f_2'f_3\cdots f_n+f_1f_2f_3'\cdots f_n+\cdots+f_1f_2f_3\cdots f_n'.$$

您可以假设两个函数的乘积法则是正确的。

25. 在练习 1.3.8 中，我们证明了下面的是一个有效的推导规则：

$$\begin{array}{rl} & P\to Q\\ & Q\to R\\ \hline \therefore & P\to R\end{array}$$

现在使用数学归纳法证明你可以将任意数量的这种陈述串联起来。也就是说，证明对任意 ，下面的是一个有效的推导规则：

$$\begin{array}{rc} & P_1 \rightarrow P_2 \\ & P_2 \rightarrow P_3 \\ & \vdots \\ & P_{n-1} \rightarrow P_n \\ \hline \therefore & P_1 \rightarrow P_n. \end{array}$$

4.6 强归纳法

Objectives

完成本节后，您应该能够做到以下内容。

1. 解释数学归纳法与强归纳法之间的区别。

2. 使用强归纳法证明命题。

4.6.1 本节预览

Investigate!

从一张正方形纸开始。你想把这个正方形切成更小的正方形，而且不留下任何浪费（最终得到的每一块纸都必须是正方形）。显然，可以把正方形切成 4 个正方形。你也可以把它切成 9 个正方形。事实证明，你还可以把正方形切成 7 个正方形（尽管它们的大小并不都相同）。你还能得到哪些其他数量的正方形呢?

有时，为了证明 $(+1)$ 为真，若能知道 $( )$ *and* (-1) *and* (-2) 都为真，会很有帮助。当证明关于由前两项的组合给出的递推关系时，确实就是这种情况。

例 4.6.1

证明 2^n 是递推关系 $_n = 5\ _{n-1} - 6\ _{n-2}$ 的一个解，其初始条件为 $_0 = 1$ 和 $_1 = 2$。

解答。

Proof. 令 $( )$ 为命题，“ $_n = 2^n$。” 我们将证明这对所有 ≥ 0 都成立。

基本情况： $_0 = 2^0 = 1$ 和 $_1 = 2^1 = 2$ 都符合初始条件。

归纳步骤：令 ≥ 2 为任意的。假设 $( )$ 和 (-1) 都为真。也就是说，假设 $_k = 2^k$ 且 $_{k-1} = 2^{k-1}$。我们将证明 $(+1)$ 为真。考虑 $_{k+1}$。我们有

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 5a_k - 6a_{k-1} \\ &= 5 \cdot 2^k - 6 \cdot 2^{k-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=10 \cdot 2^{k-1} - 6 \cdot 2^{k-1}\\
&=4 \cdot 2^{k-1}\\
&=2^{k+1}.
\end{aligned}
$$

因此，根据数学归纳法原则， ( ) 对所有 ≥ 0 都成立。■

嗯，几乎就是数学归纳法的原理。我们这样做对吗?

有时我们可能希望回溯得更远，以使用一个假设，即 ( ) 对于 远小于 + 1 成立。这就是强归纳法的思想，也是本节的主题。

活动预览

1. 考虑以下谜题:

你有一块矩形巧克力，由 个相同的巧克力方块组成。你可以沿着任意一行或一列把这块巧克力掰开。要把它分成 个单独的巧克力方块，你需要掰开多少次?

一开始，这个问题可能看起来不可能解决。也许我们是想询问所需的 *smallest*次休息次数。让我们来探讨一下。

(a) 假设你从一个 1 × 3 的条形开始。你需要多少次断裂才能将其减少为单个小方块?

（b）如果你有一个 1 × 4 小节，需要多少个断点?

如果你有4个方块排列成一个2 × 2的方阵，那么第一次断开会要求你将巧克力断成两块1 × 2的条状。然后，每块都需要更多的断开，最终从2 × 2变成单独的方块，共需要多少次断开。

(c) 一个6格的条形可以是一个1 × 6条形，需要断裂，或者是一个2 × 3条形。

现在有两种继续进行的方式。

a. 将长条分成两个 1 × 3 长条，每个都需要更多的断裂，总共需要断裂次数。 b. 将长条分成一个 1 × 2 长条和一个 2 × 2 长条。1 × 2 长条需要更多的断裂，而 2 × 2 长条也需要更多的断裂，总共需要断裂次数。

（d）基于以上数据，我们对将一个由 个方格组成的条形分割成单个方格所需的断裂次数，应当作出怎样的猜想（用 表示）？ 将一个 方格条形分割成单个方格将需要 次断裂。

(e) 我们相信这一点吗？假设你用一次折断把这根棒分成两根更小的棒，分别有 和 个方块。如果该猜想是正确的，还需要多少次折断才能把大小为 的那根棒进一步缩小？

还需要多少次破裂才能减小 bar 的尺寸？

用 和 表示，包括最初的一次在内，这一共是多少次中断？

但 + 是什么？我们通过把 个正方形分成两块得到了 和 ，因此 + = 。这使我们得到的断裂总数为 。

4.6.2 分治法

将递归定义想象成搭建梯子的说明。你可以把梯子搭得任意高，因为只要你站在前一个横档上，就有构建下一个横档的指令。

归纳法是相应的证明技巧。要证明你可以把梯子爬到任意高度，你需要先证明你能够踏上梯子（基例），然后再证明从任意一个梯级都能到达下一个梯级（归纳步）。

更具体地说，假设你正试图证明你能够到达梯子的第 4 级。你已经成功证明你可以到达第 1 级，并且从任意一级都可以到达下一级。因此，你可以到达第 1 级，而从第 1 级可以到达第 2 级。从第 2 级可以到达第 3 级，从第 3 级可以到达第 4 级。因此，你可以到达第 4 级。

但请注意，在这个过程中，你知道你已经走过了第 1 到第 3 个梯级。我们不妨假设，在尝试到达下一个梯级之前，已经走过了其下方的所有梯级。这就是强归纳法背后的思想。

对强归纳而言，一个更好的梯子隐喻是把梯子看作可以彼此叠加的东西。我们想要论证，爬上一把有20个横档的梯子是可能的。让我们把它分成两把更小的梯子，比如一把有12个横档的梯子和一把有8个横档的梯子。因为20是我们尚未被说服的最小规模，我们可以假设这两把梯子都能爬上去。那么，把这两把梯子拼在一起，你就得到12 + 8 = 20个横档。

在把自己弄伤之前，我们最好从这个摇摇欲坠的比喻中走下来。让我们来看一下强归纳法的形式化定义。

强归纳法的证明结构。

首先说明我们要证明的内容：“设 ( ) 为该命题……”。然后确立两个事实：

1. 基例：证明 (0) 为真。（也许还需要证明其他所需的基例。）

2. 归纳情形：假设对所有 ≤ ，( ) 都成立。证明 (+ 1) 成立。

总结道，“因此，由强归纳法， ( ) 对所有 > 0 成立。”

当然，如果需要，可以将 0 替换为更大的基本情况。[2] 为了说明强归纳法，我们回到巧克力棒问题。

命题 4.6.2

Given an -square rectangular chocolate bar, it always takes − 1 breaks to reduce the bar to single squares.

证明。令 ( )为如下命题："将一块由 个方格组成的巧克力棒分成单个方格需要 − 1次掰断。"

基例：考虑 (2)。这些正方形必须排列成一个 1×2 的矩形，我们需要 $2 - 1 = 1$ 次切割，将其化为单个正方形。

归纳情形：固定任意的 ≥ 2，并假设对所有 ≤ ， ( ) 都成立。考虑一个（ + 1）平方的长方形巧克力板。沿任意一行或一列将巧克力板断开一次。这会得到两块巧克力板，设其大小分别为 和 。也就是说，我们得到一块 平方的长方形巧克力板和一块 平方的长方形巧克力板，并且 + = + 1。

我们还知道 ≤ 且 ≤ ，因此根据我们的归纳假设，( ) 和 ( ) 都为真。将 方块条减少为单个方块需要 − 1 次折断；将 方块条减少为单个方块需要 − 1 次折断。这样做会使我们的原始条被减少为单个方块。总计需要最初的一次折断，加上 − 1 次和 − 1 次折断，总共为

$$1 + a - 1 + b - 1 = a + b - 1 = k + 1 - 1 = k$$

中断。因此 (+ 1) 为真。

因此，通过强归纳法， ( ) 对所有 ≥ 2 都成立。

下面是一个在数学上更相关的示例：

例 4.6.3

证明任意大于 1 的自然数要么是素数，要么可以写成素数的乘积。

解答。首先，思路是：如果我们取某个数 ，它也许是素数。如果是这样，我们就完成了。如果不是，那么它是合数，因此是两个较小数的乘积。每个因子都小于 （但至少为2），所以我们可以对这些数重复同样的论证。这样我们就把问题化简到了一个更小的情形。

现在是正式证明：

Proof。令 ( ) 为如下命题：" 要么是素数，要么可以写成素数的乘积。"我们将证明对于所有 ≥ 2， ( ) 都成立。

[2]Technically, strong induction does not require you to prove a separate base case. This is because when proving the inductive case, you must show that $P(0)$ is true, assuming $P(k)$ is true for all $k < 0$. But this is not any help so you end up proving $P(0)$ anyway. To be on the safe side, we will always include the base case separately.

基例： (2) 为真，因为 2 确实是素数。

归纳情形：假设对所有 $\leq$ ，( ) 都为真。我们要证明 ($+1$) 为真。也就是说，我们要证明 $+1$ 要么是素数，要么是素数的乘积。如果 $+1$ 是素数，则结论成立。否则， $+1$ 有多于 2 个因子，因此我们可以写成 $+1 =$ $_1 \cdot$ $_2$，其中 $_1$ 和 $_2$ 都小于 $+1$（且大于 1）。由归纳假设， $_1$ 和 $_2$ 各自要么是素数，要么可以写成素数的乘积。无论哪种情况，我们都有 $_1 \cdot$ $_2 =$ $+1$ 可以写成素数的乘积。

因此通过强归纳法，对于所有 ≥ 2， ( ) 都为真。 ■

你使用普通归纳法还是强归纳法取决于你想要证明的命题。如果你想稳妥起见，总是可以使用强归纳法。它确实是*stronger*，因此可以完成“弱”归纳法能够完成的一切。话虽如此，使用普通归纳法往往更容易，因为你只能在一个地方使用归纳假设。在证明中，*elegance* 也值得一提。如果你能用更简单的工具证明一个命题，那样做是很好的。

4.6.3 阅读问题

1. 判断正误：在强归纳法证明中，为了证明归纳步骤，你应当假设 ($+1$) 为真，并证明对所有 $\leq$ ，( ) 都为真。 2. 以下关于数学归纳法与强归纳法之间关系的陈述哪些是正确的?

A. 任何归纳法的证明都可以写成强归纳法的证明。 B. 任何强归纳法的证明都可以写成归纳法的证明。 C. 强归纳法之所以“更强”，是因为其基例更强。 D. 强归纳法之所以“更强”，是因为其归纳假设更强。

3. 你有什么问题? 写下至少一个关于本节内容的问题，可能是你或你的同学在阅读本节后会好奇的。

4.6.4 练习题

1. 假设你试图通过强归纳法证明一个命题 ( ) 对所有 ≥ 0 都成立。你会在证明的 *induction step* 中尝试证明什么? （选择所有适用项。）

A. 即假设对于所有 $\leq$ ，( ) 为真；对于任意的 ≥ 0，我们可以证明 ($+1$) 为真。B. 即（ (0) $\wedge$ (1) $\wedge \cdots \wedge$ ( )）蕴含 ($+1$)，对所有 ≥ 0。

C. 假设对于任意的 ≥ 0, $(+1)$ 为真，我们可以证明对于所有 $\leq$, $( )$ 为真。 D. $(+1)$ 蕴含对于所有 $\leq$, $( )$。 E. 对于至少一个 ≥ 0, (-2) 蕴含 $(+1)$。

2. 巧克力棒问题的一个更简单版本如下：假设你有一根由 个方格组成的巧克力棒。你可以沿着巧克力棒做一次直线折断，将其分成两块。无论你在哪里折断，只要进行 -1 次折断，你就会把巧克力棒分成 块。

将以下部分陈述按正确顺序排列，以通过强归纳法构成该断言的证明。

- 假设对于任意的 ≥ 1，所有 $\leq$ 时，$( )$ 为真。
- 因此，根据强归纳原理，$( )$ 对所有 ≥ 1 都成立。
- (1) 为真，因为一块长为 1 格的巧克力棒已经是一整块。
- 考虑一块长度为 $+1$ 的巧克力条。
- 让 $( )$ 表示一个长度为 块的巧克力棒可以通过进行 -1 次断裂被分成 块。
- 无论你在哪里折断这根条形物，都会得到两个较小的条形物，长度分别为 和 。
- 因此，断点总数为 $-1+ -1+1= + -1$，即 $+1-1=$ 。
- 由于 和 不超过 ，因此可以分别使用 1和 -1的分割将这些较小的条形分解为单个方块。

4.6.5 附加练习

1. 假设一个橄榄球队只得3分的进球和7分的触地得分（忽略安全分、错失的额外分和两分转换的可能性）。使用 *strong* 数学归纳法证明该队可以得到任何12分或更高的分数。2. 使用 *strong* 数学归纳法证明一个凸多边形的内角和是 $(-2)\cdot 180°$。 (一个凸多边形是一个具有 条边的多边形，其中每个内角小于 180°。)3. 证明每个正整数要么是2的幂，要么可以表示为若干个不同的2的幂之和。

4. 使用强归纳法证明：每个自然数要么是一个斐波那契数，要么可以表示为 *distinct* 个斐波那契数的 *sum*。

5. 我们之前已经证明，对于任意一棵树，边的数量总是比顶点的数量少一。也就是说，具有 个顶点和 条边的树满足 = + 1。

使用对顶点数进行强归纳的方法，给出该事实的另一种证明。具体做法是选取一个非叶子顶点，并将其“拆分”为两个顶点，使每个顶点分别属于一棵不同的树。

6. 假设某个实数 具有如下性质： $+ \frac{1}{x}$ 是一个整数。证明：对所有自然数 ， ${}^{n} + \frac{1}{x^n}$ 都是整数。

7. 下面是一个称为双重归纳的较为复杂的归纳技巧的例子。

你将证明斐波那契数满足恒等式 ${}_{n}^{2} + {}_{n+1}^{2} = {}_{2n+1}$。做到这一点的一种方法是证明更一般的恒等式，

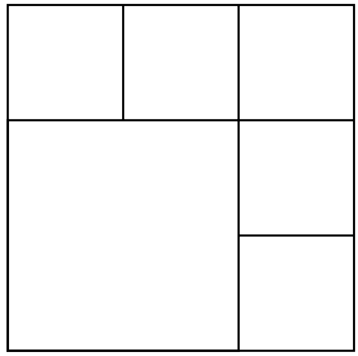
$$F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1} = F_{m+n+1},$$

并意识到当 = 时，我们得到了期望的结果。

注意到我们现在有两个变量，因此我们希望同时对所有 ≥ 0 *and* 所有 ≥ 0 证明这一点。对于每一对这样的 (,)，令 (,) 为命题 ${}_{m}\ {}_{n} + {}_{m+1}\ {}_{n+1} = {}_{m+n+1}$

(a) 首先固定 = 0，并用数学归纳法证明 (0,) 对所有 ≥ 0 都成立。注意，这个证明将非常容易。(b) 现在固定一个任意的 ，并用*strong* 数学归纳法证明 (,) 对所有 ≥ 0 都成立。(c) 现在你可以得出结论： (,) 对所有 , ≥ 0 都成立。你相信这一点吗？解释为什么这种归纳是有效的。例如，为什么你上面的证明能够保证 (2, 3) 为真？

8. 给定一个正方形，你可以通过沿着与原正方形边平行的线进行切割，将该正方形切分成更小的正方形（这些线不需要贯穿原正方形的整条边长）。例如，沿着下图所示的线切割，你将把一个正方形分成 6 个更小的正方形：



使用强归纳法证明：对于任意 ≥ 6，都可以将一个正方形切分成 个更小的正方形。

4.7 本章小结

Investigate!

每天你的魔法巧克力包裹的浓缩咖啡豆存量都会翻倍（每一颗都会分成两半），但随后你会吃掉其中的5颗。第0天开始时你有10颗。

1. 写出该序列的前几项。然后给出该序列的递归定义，并解释你如何知道它是正确的。

2. 使用数学归纳法证明：在第 天你拥有的豆子数量的个位数字对于所有 ≥ 1 都始终为 5。

3. 求该数列第 n 项的一个闭式公式，并用数学归纳法证明其正确性。

在本章中，我们探讨了数列和数学归纳法。乍一看，它们似乎并不完全相关，但二者之间存在一个联系：递归推理。当我们面对许多情况（也许是无限多种情况）时，通常通过说明某个特定情况与其他情况之间的关系，比从头描述它要更容易。对于数列，我们可以通过说明序列中第 项与 *previous* 项之间的关系来描述它。在证明一个包含变量 的命题对所有 的取值都成立时，我们可以基于为什么 $=$ -1 的情况成立，来说明为什么 $=$ 的情况也成立。

虽然以递归的方式思考问题通常比以绝对的方式思考更容易（至少在你习惯这种思维方式之后），但我们的最终目标是超越这种递归式的描述。对于数列，我们希望找到该数列第 项的 *closed formulas*。对于证明，我们希望知道该命题在某个特定的 下为真（而不仅仅是在假设该命题对前一个 的值为真的前提下）。在本章中，我们看到了一些从递归描述转向绝对描述的方法。

- 如果一个数列的各项以恒定的差或恒定的比率递增（这两者都是递归描述），那么该数列分别是等差数列或等比数列，并且我们可以基于初始项以及公差或公比为每一种给出闭式公式。

- 如果一个序列的各项以多项式速度增长（也就是说，如果各项之间的差分构成一个具有多项式闭式公式的序列），那么该序列本身可以由一个多项式闭式公式给出（其次数比分序列的次数高一阶）。

- 如果一个数列的项以指数速率增长，那么我们可以预期该数列的闭式公式是指数形式的。这些序列通常具有

相对较好的递推公式，并且 *characteristic root technique* 使我们能够找到这些序列的闭式公式。

- 如果我们想证明一个命题对所有 的取值（大于某个最初的小值）都成立，并且我们能够说明为什么当 = 时该命题成立会推出当 = + 1时该命题也成立，那么*principle of mathematical induction*就给出了该命题对所有 的取值（大于基例）都成立。

在本章中，我们试图理解*why*上面列出的这些事实是真的。在某种程度上，这正是证明——无论是否使用归纳法——试图完成的事情：它们解释了为什么数学真理确实是真理。随着我们发展对数学进行推理的能力，确保我们的推理方法是可靠的是一个好主意。研究判断推理是否良好的数学分支是*mathematical logic*，这正是下一章的主题。

本章回顾

1. 求 $7 + 13 + 19 + \cdots + 1243$。 2. 考虑数列 28, 38, 48, 58, . . . , 10 − 2。

a. 这个数列中有多少项? b. 倒数第二项是什么?
c. 求该数列所有项的和。

3. 考虑由 $_n = 6 \cdot 5^{n-1}$ 给出的序列。

a. 求该数列的前 4 项。 $_1$ =,___ $_2$ =,___ $_3$ =,___ $_4$ =,___ …… 这是哪一类数列? （□ 等差 □ 等比 □ 都不是） b. 求前 22 项的 *sum*。也就是计算 $\sum_{k=1}^{22} {}_k$。

4. 考虑数列 5, 11, 19, 29, 41, 55, …… 假设 $_1 = 5$。

(a) 通过将每一项写成一个序列的和，求该序列第 n 项 $_n$ 的闭式公式。提示：先求 $_0$，但在合并求和时忽略它。 (b) 再次求闭式公式，这一次使用多项式拟合或特征根方法（视情况而定）。展示你的推导过程。 (c) 再次求闭式公式，这一次通过将该序列识别为某些著名序列的变形。加以说明。

5. 使用多项式拟合求该数列的第 n 项公式，该数列 $(\ _n)_{n\geq 1}$ 的开头为，

$$11, 22, 35, 50, 67, \ldots$$

注意上面的第一项是 $\ _1$，而不是 $\ _0$。
$\ _n =$ ________

6. 假设某个特定数列的闭式公式是一个三次多项式。关于以下情况的闭式公式，你能说些什么：

(a) 部分和的序列？ (b) 二阶差分的序列
？

7. 考虑由递归方式给定的数列：$\ _1 = 4$, $\ _2 = 6$，以及 $\ _n = \ _{n-1} + \ _{n-2}$。

(a) 写出该序列的前 6 项。(b) $\ _n$ 的闭式公式可能是一个多项式吗？请解释。

8. 数列 $(\ _n)_{n\geq 1}$ 以 −1, 0, 2, 5, 9, 14 . . . 开始，并且具有闭式公式

$$a_n = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

利用这一事实来找到以 4, 10, 18, 28, 40, . . . 开始的序列 $(\ _n)_{n\geq 1}$ 的一个闭式公式。

9. 在歌曲 *The Twelve Days of Christmas* 中，我的真爱在第一天送给我 1 件礼物；然后是 2 件礼物和 1 件礼物；然后是 3 件礼物、2 件礼物和 1 件礼物；依此类推。在这十二天里，我的真爱总共送给了我多少件礼物？

10. 考虑递推关系 $\ _n = \ _{n-1} + 20\ _{n-2}$，其前两项为 $\ _0 = 4$ 和 $\ _1 = 9$。

a. 写出由该递推关系定义的数列的前 5 项。 $\ _2 =$,____ $\ _3 =$,____ $\ _4 =$,____ ⋯ b. 求解该递推关系。也就是说，求 $\ _n$ 的闭式公式。 $\ _n =$ __________

11. 考虑递推关系 $\ _n = 3\ _{n-1} + 18\ _{n-2}$，其前两项为 $\ _0 = 5$ 和 $\ _1 = 7$。

a. 求该数列的接下来的两项（$\ _2$ 和 $\ _3$）：
$2 =$ ____ $\ _3 =$ ____ b. 求解该递推关系。也就是说，求出 $\ _n$ 的闭式公式。
$\ _n =$ __________

12. 你的魔法巧克力兔子像兔子一样繁殖：每只大兔子每天会产生 2 只新的小兔子，而每天前一天出生的每只小兔子都会长成一只大兔子。假设你一开始有 2 只小兔子，而且没有任何兔子会死亡（或被吃掉）。

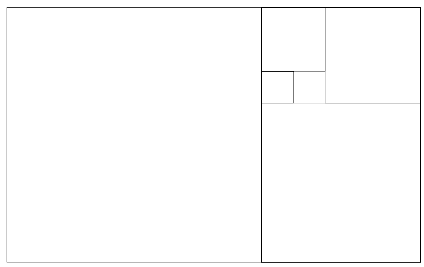
（a）写出该数列的前几项。

（b）给出该序列的递归定义，并解释为什么它是正确的。

(c) 求该序列第 n 项的闭式公式。

13. 考虑斐波那契数的 *squares* 的部分和序列： $^2_1$, $^2_1 + {}^2_2$, $^2_1 + {}^2_2 + {}^2_3$, …… 。该序列起始为 1, 2, 6, 15, 40, ……

(a) 用斐波那契数来猜想第 n 个部分和的一个公式。提示：将每一项写成乘积。(b) 用数学归纳法证明你的公式是正确的。(c) 解释这个问题与下面这幅图有什么关系：



14. 用数学归纳法证明下列陈述：

(a) $! <\ ^n$ 对于 ≥ 2

(b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(\ +1)} = \frac{}{+1}$，对于所有 $\in\ ^+$。(c) $4^n - 1$ 是 3 的倍数，对于所有 $\in$ 。(d) 你*cannot*使用 4 分和 9 分邮票恰好凑出的 *greatest* 邮资金额是 23 分。(e) 每个偶数的平方都能被 4 整除。

15. 用数学归纳法证明 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \ ^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ 对所有 ≥ 1 成立。

16. 假设 $_0 = 1$，$_1 = 1$，且 $_n = 3\ _{n-1} - 2\ _{n-2}$。使用强归纳法证明：对所有 ，$_n = 1$。

17. 用归纳法证明：对于任意 ≥ 1，任何包含 个元素的集合都有 2^n 个不同的子集。

Chapter 5

D 离散结构再探

在前面的各章中，我们已经看到了许多离散结构及其性质和用途的例子。接下来的各节是对我们所探讨的每一种主要结构的独立综述。这些内容既可以在学习本书其他材料之前先行阅读，也可以在学习之后作为复习和参考。

5.1 集合

注意，本节包含了大量关于我们可以对集合说些什么的细节。如果你从未接触过并集或维恩图，值得仔细阅读这一部分。

在我们的学习中（实际上在整个数学中）我们将使用的最基本的对象是 *sets*。接下来的很多内容可能是复习，但你能够熟练掌握集合论的语言非常重要。下面我们使用的大多数记号都是标准的，尽管其中一些可能与你之前见过的略有不同。

对我们来说，集合只是对象的一个无序集合。两个例子：我们可以考虑在 *Doctor Who* 中扮演过 *The Doctor* 的所有演员所组成的集合，或者 1 到 10（含）之间的自然数集合。在第一个例子中，汤姆·贝克是该集合的一个元素（或成员），而伊德里斯·艾尔巴以及其他许多人则不是该集合的元素。此外，这两个例子对应的是不同的集合。两个集合当且仅当它们包含完全相同的元素时才相等。例如，包含《独立宣言》中所有元音字母的集合，与单词“questionably”中的元音字母集合完全相同（也就是全部元音）；我们不关心顺序或重复，只关心某个元素是否属于该集合。

5.1.1 符号

我们需要一些记号来使讨论集合更容易。考虑：

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

读作：“ 是包含元素 1、2 和 3 的集合。” 我们使用花括号“{, }”来括起集合的元素。还有一些记号：

$$a \in \{a, b, c\}.$$

符号“∈”读作“属于”或“是……的元素”。因此，上述内容表示 是包含字母 、 和 的集合中的一个元素。注意，这是一个真命题。也可以说 不在那个集合中：

$$d \notin \{a, b, c\}.$$

请注意：当我们想要表达集合 的一个元素是 时，我们写“ ∈ ”。例如，考虑集合，

$$A = \{1, b, \{x, y, z\}, \emptyset\}.$$

这确实是一个奇怪的集合。它包含四个元素：数字 1、字母 b、集合 { , , }，以及空集 ∅ = {}，也就是不包含任何元素的集合。 在 中吗？答案是否定的。 中的四个元素都不是字母 ，因此我们必须得出结论： ∉ 。类似地，考虑集合 = { 1, }。尽管 的元素都是 的元素，我们仍然不能说 *set* 是 的一个元素。因此 ∉ 。（很快我们将看到 是 的一个 *subset*，但这与作为 的一个 *element* 是不同的。）

我们已经通过列出元素的方式描述了上面的集合。有时这很难做到，尤其是当集合中有很多元素（也许是无限多个）时。例如，如果我们想让 成为所有偶自然数的集合，我们可以写成，

$$A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\},$$

但这有点不精确。更好的方式是

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \text{ there exists } n \in \mathbb{N} \text{ such that } x = 2n\}.$$

让我们仔细来看一下。首先，有一些新的符号需要理解：“ ”是通常用来表示自然数的符号，我们这里将其视为集合 {0, 1, 2, 3, . . .}。接下来，冒号“: ”读作 *such that*；它将集合中的元素与这些元素必须满足的条件分隔开来。因此，把这些合在一起，我们会把这个集合读作：“所有属于自然数的 的集合 ，使得存在某个属于自然数的 ，使 等于 的两倍。”换句话说，就是所有偶数自然数的集合。下面是表示同一个集合的另一种写法。

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ is even}\}.$$

注意：有时数学家会用 | 或 ∍ 来表示“使得”这一符号，而不是用冒号。另外，关于 0 是否属于自然数，数学家之间的看法大致各占一半，因此在这一点上要格外小心。

这种记号通常称为集合构造表示法。它通过精确说明元素必须满足的条件来告诉我们如何 *build* 一个集合（该条件是“:”符号之后的逻辑陈述）。阅读并理解以这种方式写成的集合需要练习。下面是一些更多的例子：

例 5.1.1

用文字描述下列每个集合，并通过列出足够多的元素来看出其规律。

1. { ： + 3 ∈ }。2.
{ ∈ ： + 3 ∈ }。

3. { : ∈ 或 – ∈ }. 4.
{ : ∈ 且 – ∈ }.

解答。

1. 这是所有比某个自然数小 3 的数所组成的集合（即，如果给它们加上 3 ，就得到一个自然数）。该集合也可以写成 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$（注意 0 是自然数，所以 -3 属于这个集合，因为 $-3 + 3 = 0$）。

2. 这是所有比某个自然数少 3 的自然数的集合。因此这里我们只有 $\{0, 1, 2, 3 \ldots\}$。

3. 这是所有整数（正整数和负整数，记作 ）的集合。换句话说, $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$。

4. 这里我们想要所有的数 ，使得 和 – 都是自然数。只有一个：0。因此我们得到集合 $\{0\}$。

集合构造表示法还有一种细微的变体。虽然条件通常是在“使得”之后给出，但有时它被隐藏在第一部分中。下面是一个例子。

例 5.1.2

列出下面各集合中的几个元素，并用文字描述它们。集合 是整数的集合；正整数和负整数。

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \in \mathbb{N}\}$

2. $B = \{x^2 : x \in \mathbb{N}\}$

解答。

1. 满足其平方是自然数这一条件的整数集合。嗯，每一个整数在平方之后都会得到一个非负整数，也就是一个自然数。因此 = = $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$。 2. 这里我们要找的是所有 ^{2}的集合，其中 是一个自然数。所以这个集合就是完全平方数的集合。 = $\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$。我们也可以用更严格的集合构造表示法来写这个集合，即 = { ∈ : = ^{2}，其中 ∈ }。

We already have a lot of notation, and there is more yet. Below is a handy chart of symbols. Some of these will be discussed in greater detail as we move forward.

特殊集合。

$\emptyset$ 空集是不包含任何元素的集合。 自然数集。也就是说 , $= \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$。 整数集。也就是说, $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$。 有理数集。 实数集。 ( ) 任意集合 的幂集是由 的所有子集组成的集合。

集合论记号。

$\{,\}$ 我们使用这些花括号来包围一个集合的元素。因此 $\{1, 2, 3\}$ 是包含 1、2 和 3 的集合。: { : $> 2\}$ 是所有满足 大于 2 的 所组成的集合。$\in$ $2 \in \{1, 2, 3\}$ 表明 2 是集合 $\{1, 2, 3\}$ 的一个元素。$\notin$ $4 \notin \{1, 2, 3\}$，因为 4 不是集合 $\{1, 2, 3\}$ 的元素。$\subseteq$ $\subseteq$ 表明 是 的子集： 的每一个元素也都是 的元素。$\subset$ $\subset$ 表明 是 的真子集： 的每一个元素也都是 的元素，但 $\neq$ 。$\cap$ $\cap$ 是 与 的交集：包含所有同时属于 和 的元素的集合。$\cup$ $\cup$ 是 与 的并集：包含所有属于 或 或二者的元素的集合。$\times$ $\times$ 是 与 的笛卡尔积：由所有有序对 (,) 组成的集合，其中 $\in$ 且 $\in$ 。$\setminus$ $\setminus$ 是 与 的差集：包含所有属于 但不属于 的元素的集合。 的补集是所有不属于 的元素所组成的集合。| | 的基数（或大小）是 中元素的个数。

—

Investigate!

1. 求下列每个集合的基数。

(a) $= \{3, 4, \cdots, 15\}$。 (b) $= \{ \in : 2 < \leq 200\}$。 (c) $= \{ \leq 100 : \in$ 且对某个 $\in$ ，（ $= 2 + 1$）$\}$。

2. 找到两个集合 和 ，使得$| \ | = 5$，$| \ | = 6$，且$| \ \cup \ | = 9$。$| \ \cap \ |$ 是多少?

3. 求集合 和 ，满足$| \ | = | \ |$，使得$| \ \cup \ | = 7$ 且$| \ \cap \ | = 3$。$| \ |$ 是多少?

4. 设 $= \{1, 2, \ldots, 10\}$。定义 $_2 = \{ \subseteq : | \ | = 2\}$。求$| \ _2|$。

5. 对于任意集合 和 ，定义 $= \{ : \in$ 且 $\in \}$。如果 $= \{1, 2\}$ 且 $= \{2, 3, 4\}$，$| \ |$ 是什么? $| \ \times \ |$ 是什么?

5.1.2 集合之间的关系

我们已经说明了两个集合相等意味着什么：它们恰好具有相同的元素。因此，例如，

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}.$$

(请记住，元素写下来的顺序并不重要。) 另外，

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 1 + 1, 1 + 1 + 1\} = \{I, II, III\} = \{1, 2, 3, 1 + 2\}$$

因为这些都是表示包含前三个正整数的集合的不同写法（我们如何写并不重要，重要的是它们是什么）。

关于集合 $= \{1, 2, 3\}$ 和 $= \{1, 2, 3, 4\}$ 呢? 显然 $\neq$ ，但注意到 的每个元素也是 的元素。因为这个原因，我们说 是 的 *subset*，或者用符号表示为 $\subset$ 或 $\subseteq$ 。两个符号都可以读作“是..的子集”。区别在于，有时我们想表达 要么等于 ，要么是 的子集，这时我们使用 $\subseteq$。这类似于 $<$ 和 $\leq$ 之间的区别。

例 5.1.3

设 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$， $= \{2, 4, 6\}$， $= \{1, 2, 3\}$，以及 $= \{7, 8, 9\}$。判断下列哪些为真、为假或无意义。

1. $\subset$. 2. $\subset$. 3. $\in$. 4. $\emptyset \in$. 5. $\emptyset \subset$. 6. $<$. 7. $3 \in$. 8. $3 \subset$. 9. $\{3\} \subset$.

解答。

错误。例如，1 ∈ ，但1 ∉ 。

2. 正确。 中的每个元素都是 中的元素。

3. 错误。 中的元素是 1、2 和 3。*set* 不等于 1、2 或 3。

4. 错误。 恰好有 6 个元素，并且其中没有任何一个是空集。

5. 对。空集中的一切（没有东西）也是 的一个元素。请注意，空集是每个集合的子集。

6. 无意义。一个集合不能小于另一个集合。

7. 正确。3 是集合 的一个元素。

8. 无意义。3 不是一个集合，因此它不能是另一个集合的子集。

9. 正确。3 是集合 {3} 的唯一元素，并且是 的一个元素，因此 {3} 中的每个元素都是 的一个元素。

在上面的例子中， 是 的一个子集。你可能想知道还有哪些集合是 的子集。如果你将所有这些 的子集合并成一个新集合，我们得到一个集合的集合。我们称所有 的子集的集合为 的幂集，并写作 ( )。

示例 5.1.4

让 = {1, 2, 3}。求 ( )。解答。 ( ) 是一个集合的集合，其中所有的集合都是 的子集。所以

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

注意到虽然 2 ∈ ，但写成2 ∈ ( ) 是错误的，因为 ( ) 中的元素都不是数！另一方面，我们确实有 {2} ∈ ( )，因为 {2} ⊆ 。

一个 ( ) 的子集是什么样的？注意到 {2} ⊈ ( )，因为并不是 {2} 中的每个元素都在 ( ) 中。但我们确实有 {{2}} ⊆ ( )。{{2}} 的唯一元素是集合 {2}，而 {2} 也是 ( ) 的一个元素。我们可以取 ( ) 的所有子集的集合，并称之为 (( ))。或者甚至是那个集合的幂集。

比较集合的另一种方法是通过它们的*size*。注意在上面的例子中， 有6个元素，而 、 和 都有3个元素。集合的大小称为该集合的基数。我们会写作| | = 6，| | = 3，等等。对于具有有限个元素的集合，集合的基数就是集合中元素的数量。注意，{1, 2, 3, 2, 1}的基数是3。我们不计算重复项（事实上，{1, 2, 3, 2, 1}与{1, 2, 3}完全是同一个集合）。也有具有无限的集合

基数，例如 、有理数集（记作 ）、偶自然数集，以及实数集（ ）。可以区分不同的无限基数，但这超出了本文的范围。对我们而言，一个集合要么是无限的，要么是有限的；如果是有限的，那么我们可以通过计数元素来确定它的基数。

例 5.1.5

1. 求 $= \{23, 24, \ldots, 37, 38\}$ 的基数。 2. 求 $= \{1, \{2, 3, 4\}, \emptyset\}$ 的基数。 3. 如果 $= \{1, 2, 3\}$，那么 ( ) 的基数是多少?

解答。

1. 由于 $38 - 23 = 15$，我们可以得出该集合的基数是 $| \ | = 16$（因为 23 被包含在内，所以需要加一）。2. 这里 $| \ | = 3$。3. 这三个元素是数字 1、集合 $\{2, 3, 4\}$ 以及空集。3. 我们在上面列出了幂集 ( ) 的元素，一共有 8 个元素（每一个都是一个集合）。因此 $| \ (\ )| = 8$。（你可能会想，是否对于所有集合 ，$| \ |$ 与 $| \ (\ )|$ 之间存在某种关系。这是一个很好的问题，我们将在第 3 章中探讨。）

5.1.3 集合上的运算

是否可以将两个集合相加？并不完全可行，不过有一种类似的做法。如果我们想把两个集合合并，得到属于任一集合的对象的集合，那么可以取这两个集合的并集。用符号表示，

$$C = A \cup B,$$

读作“ 是 与 的并集”，意味着 的元素恰好是那些属于 或属于 （或同时属于二者）的元素。例如，如果 $= \{1, 2, 3\}$ 且 $= \{2, 3, 4\}$，那么 $\cup \ = \{1, 2, 3, 4\}$。

集合上的另一个常见运算是交集。我们写作，

$$C = A \cap B$$

并且说，“ 是 与 的交集”，当 中的元素恰好是同时属于 和 的那些元素。因此，如果 $= \{1, 2, 3\}$ 且 $= \{2, 3, 4\}$，那么 $\cap \ = \{2, 3\}$。

在处理集合时，我们通常对“全部”指的是什么有一定的认识。也许我们只关心自然数。在这种情况下，我们会说我们的全集是 。有时我们用 来表示这个全集。

鉴于这一背景，我们可能希望讨论在特定集合中所有是 *not* 的元素。我们说 是 的补集，并写作，

$$B = \overline{A}$$

当 包含所有不在 中的元素时。假设我们的宇宙是 $\{1, 2, \ldots, 9, 10\}$，而 $= \{2, 3, 5, 7\}$，那么 $= \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$。

当然，我们可以同时执行多个操作。例如，考虑

$$A \cap \overline{B}.$$

这是所有既是 的元素又不是 的元素的集合。我们做了什么？我们从 开始，去除了所有在 中的元素。另一种写法是集合差：

$$A \cap \overline{B} = A \setminus B.$$

重要的是要记住，这些对集合的操作（并集、交集、补集和差集）会产生其他集合。不要将它们与上一节的符号（属于和子集）混淆。 $\cap$ 是一个集合，而 $\subseteq$ 是对或错。这与 $3 + 2$（这是一个数字）和 $3 \leq 2$（这是错误的）之间的差异是一样的。

例 5.1.6

让 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$， $= \{2, 4, 6\}$， $= \{1, 2, 3\}$，和 $= \{7, 8, 9\}$。如果宇宙是 $= \{1, 2, \ldots, 10\}$，求：

1. $\cup$.
2. $\cap$.
3. $\cap$.
4. $\cap$.
5. $\cup$.

6. $\setminus$. 7. ($\cap$) $\cup$ $\cap$. 8. $\emptyset \cup$. 9. $\emptyset \cap$.

解答。

1. $\cup$ $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} =$ ，因为 中的所有元素已经都在 中。 2. $\cap$ $= \{2, 4, 6\} =$ ，因为 中的所有元素都在 中。 3. $\cap$ $= \{2\}$，因为 和 中唯一的共同元素是 2。 4. $\cap$ $= \emptyset$，因为 和 没有共同元素。 5. $\cup$ $= \{5, 7, 8, 9, 10\}$。首先我们发现 $\cup$ $= \{1, 2, 3, 4, 6\}$，然后我们取出不在该集合中的所有元素。

6. $\setminus \;\; = \{1, 3, 5\}$，因为元素1、3和5在　中但不在　中。这与 $\cap \overline{\;\;}$ 相同。7. $(\;\;\cap \overline{\;\;}\;) \cup \overline{\;\;\cap\;\;} = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$。该集合包含所有要么在　中但不在　中（即$\{7, 8, 9\}$），要么不同时在　和　中的元素（即$\{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$）。8. $\emptyset \cup \;\; = \;\;$，因为空集不会增加任何元素。9. $\emptyset \cap \;\; = \emptyset$，因为不可能有元素既在一个集合中又在空集中。

拥有这样的记号是很有用的。我们经常希望向集合中添加或从集合中移除元素，而我们的记号使我们能够精确地做到这一点。

例 5.1.7

如果　$= \{1, 2, 3\}$，那么我们可以将加入数字 4 后得到的集合表示为　$\cup \{4\}$。如果我们想表示从　中去掉数字 2 所得到的集合，可以写作　$\setminus \{2\}$。

不过要小心。如果你向集合中添加一个元素，你会得到一个新的集合！因此你会有　$= \;\; \cup \{4\}$，然后可以正确地说　包含 4，而　不包含。

还有一种将集合组合起来的方法对我们很有用：笛卡尔积，　$\times$　。这个听起来很高深，但其实你早就见过了。当你在微积分中绘制函数时，你是在笛卡尔平面中作图。它是所有实数有序对（ , ）的集合。我们可以对*any*一对集合这样做，而不仅仅是实数与自身。

换句话说，　$\times \;\; = \{(\;,\;) : \;\; \in \;\;$ 且 $\;\; \in \;\; \}$。第一个坐标来自第一个集合，第二个坐标来自第二个集合。有时我们会想要取一个集合与其自身的笛卡尔积，这是可以的：　$\times \;\; = \{(\;,\;) : \;,\; \in \;\; \}$（我们也可能把这个集合写作　^{2}）。注意，在　$\times$　中，我们仍然想要 *all* 有序对，而不仅仅是第一和第二个坐标相同的那些。我们还可以取 3 个或更多集合的乘积，得到有序三元组、四元组，等等。

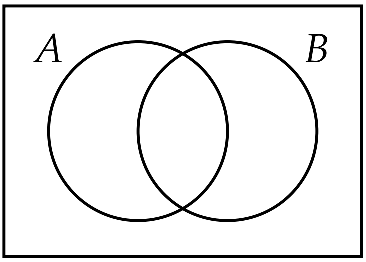
例 5.1.8

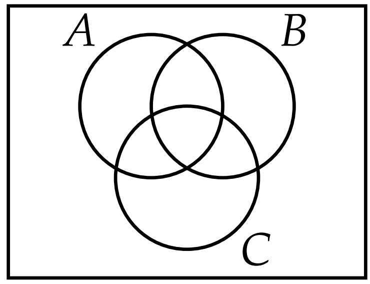
设　$= \{1, 2\}$，且　$= \{3, 4, 5\}$。求　$\times$　和　$\times$　。你预计　$\times$　中有多少个元素？

解。　$\times \;\; = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$。　$\times \;\; = \;\;^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$。$|\;\;\times\;\;| = 9$. 将会有3对第一坐标为3的，另外还有3对第一坐标为4的，以及最后3对第一坐标为5的。

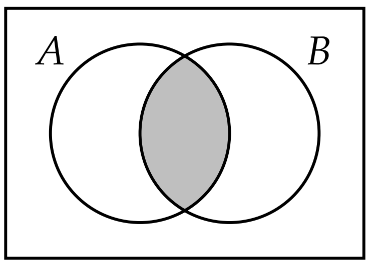
5.1.4 维恩图

我们可以使用一种非常直观的可视化工具来表示集合上的运算。维恩图将集合表示为相互交叠的圆。当我们进行某种运算时，可以将所讨论的区域进行着色。我们还可以通过在相应区域中标注数字来表示某个特定集合的基数。

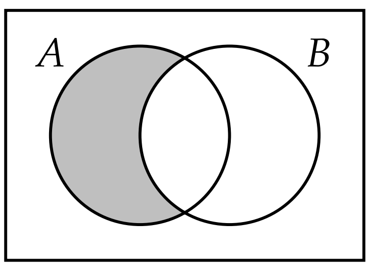




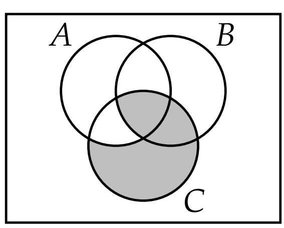
每个圆表示一个集合。包含这些圆的矩形表示全集。为了表示这些集合的组合，我们将相应的区域涂上阴影。例如，我们可以将 $\cap$ 画成:



这里是 $\cap \overline{}$ 的一种表示，或等价地， $\setminus$:



一个更复杂的例子是 $(\cap) \cup (\cap \overline{})$，如下所示。



注意到，上述阴影区域也可以通过另一种方式得到。

我们也可以从整个 开始，然后排除 与 在 之外重叠的区域。该区域是 (∩) ∩ ‾ 。因此，上面的维恩图也表示 ∩ ((∩) ∩ ‾)。所以，仅仅利用这幅图，我们已经确定了

$$(B \cap C) \cup (C \cap \overline{A}) = C \cap \overline{\left((A \cap C) \cap \overline{B}\right)}.$$

5.1.5 练习

1. = {2, 4, 5, 6, 7} 和 = {2, 4, 5, 6, 8} 求下列各集合。你的答案应包含花括号

a. ∪ .
b. ∩ .
c. \ . d
. \ .

2. 如果存在，求下列集合的最小元素。

a. { ∈ : ^{2} − 3 ≥ 4} b. { ∈ : ^{2} − 7 ∈ } c. { ^{2} + 4 : ∈ } d. { ∈ : = ^{2} + 4 存在某个 ∈ }

3. 求下列基数。

a. | | 当 = {4, 5, 6, 7, . . . , 33}. b. | | 当 = { ∈ : −7 ≤ ≤ 91 ” }. c. | ∩ | 当 = { ∈ : ≤ 27} 且 = { ∈ : 是素数 }.

4. 设 = {8, 10, 11, 12, 13}，且 = {8, 16, 17, 24, 32}。求一个同时是 和 的子集且规模尽可能大的集合。

5. 找到一个规模尽可能小的集合，使其同时包含 {4,6,7,9} 和 {5,6,7,9,10} 作为子集。

6. 设 = { ∈ : 39 ≤ < 55} 且 = { ∈ : 16 < ≤ 44}。假设 是一个集合，使得 ⊆ 且 ⊆ 。 的可能最大基数是多少?

7. 设 = {1, 4, 7, 12, 14}，且 = {1, 4, 14}。满足 ⊆ 且 ⊆ 的集合 有多少个?

8. 设 = {2, 3, 4, 5, 6}， = {4, 5, 6, 7, 8}，且 = {3, 6, 8}。

a. 求 ∩ 。

b. 求 ∪ 。c. 求
\ 。d. 求 ∩ (
∪)。

9. 令 = { ∈ : 2 ≤ < 14} 和 = { ∈ : 为偶数}。

a. 求 ∩ . b.
求 \ .

10. 设 = { ∈ : 3 ≤ ≤ 13}, = { ∈ : 是偶数}，以及 = { ∈ : 是奇数}。

(a) 计算 ∩
。(b) 计算 ∪
。(c) 计算
∩ 。(d) 计算
∪ 。

11. 找到一组集合 和 ，使得 ∩ = {3, 5} 且 ∪ = {2, 3, 5, 7, 8}。

12. 找到一个集合 和 的例子，使得 ⊆ 且 ∈ 。

13. 回忆 = {. . . , −2, −1, 0, 1, 2, . . .}（整数）。设 + = {1, 2, 3, . . .} 为正整数。设 2 为偶数，3 为 3 的倍数，依此类推。

(a) + ⊆ 2 吗？解释。

(b) 2 ⊆ + 吗？解释。

(c) 找到 2 ∩ 3 。用文字和集合符号描述这个集合。(d) 将 { ∈ : ∃ ∈ (= 2 ∨ = 3)} 表示为已经在此问题中描述的两个集合的并集或交集。

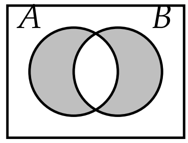
14. 令 $_2$ 为所有除 2 外的 2 的倍数组成的集合。令 $_3$ 为所有除 3 外的 3 的倍数组成的集合。依此类推，令 $_n$ 为所有除 外的 的倍数组成的集合，其中任何 ≥ 2。用语言描述集合 $_2 \cup\ _3 \cup\ _4 \cup \cdots$。

15. 绘制一个维恩图来表示以下内容：

(a) ∪ (b) (
∪) (c) ∩ (
∪)d) (∩
) ∪ (e) ∩
∩
(

(f) (∪) \

16. 使用集合符号描述一个由 和 构成的集合，该集合具有以下维恩图：



17. 设 = { , , , }。求 ( )。

18. 设 = {1, 2, . . . , 9}。 的子集中恰好包含一个元素的有多少个（即有多少个单元素子集）？恰好包含两个元素的子集（包含正好两个元素的子集）有多少个？

19. 设 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}。求所有满足 {2, 3, 5} ⊆ 的集合 ∈ ( )。

20. 找到一对集合 和 的例子，使得 | | = 4, | | = 5, 且 | ∪ | = 9。

21. 找一个集合 和 的例子，使得 | | = 3, | | = 4, 且 | ∪ | = 5。

22. 是否存在集合 和 ，使得| | = | |, | ∪ | = 10，且 | ∩ | = 5？解释。

23. 设 = {2, 4, 6, 8}。假设 是一个集合，且 | | = 5。

a. | ∪ | 的最小和最大可能值是多少？请解释。 b. | ∩ | 的最小和最大可能值是多少？请解释。 c. | × | 的最小和最大可能值是多少？请解释。

24. 设 = { ∈ : 10 ≤ < 20}。找出满足下述性质的集合的例子，并非常简要地解释为什么你的例子可行。

(a) 一个集合 ⊆ ，且| | = 10，使得 \ = {10, 12, 14 }。 (b) 一个集合 ∈ ( )，且 | | = 5。 (c) 一个集合 ⊆ ( )，且 | | = 5。 (d) 一个集合 ⊆ × ，且| | = 5 。 (e) 一个集合 ⊆ ，使得| | ∈ 。

25. 设 、 和 为集合。

(a) 假设 ⊆ 且 ⊆ 。这是否意味着 ⊆ ？证明你的答案。提示：要证明 ⊆ ，你必须证明如下蕴含：“对所有 ，若 ∈ ，则 ∈ 。” (b) 假设 ∈ 且 ∈ 。这是否意味着 ∈ ？给出一个例子来证明这并不总是发生（并解释为什么

你的示例是可行的）。你应该能够给出一个示例，其中 | | = | | = | | = 2。

26. 在一副标准扑克牌中，有 26 张红色牌和 12 张人头牌。请使用集合以及你所学到的关于基数的知识，解释为什么只有 32 张牌要么是红色牌，要么是人头牌。27. 找到一个集合 的例子，使其满足 | | = 3，只包含其他集合，并且具有如下性质：对所有集合 ∈ ，我们也有 ⊆ 。解释为什么你的例子是可行的。（供参考：具有这种性质的集合称为传递的。）28. 考虑集合 和 ，其中 = {3, | |}，并且 = {1, | |, | |}。这些集合是什么？ 29. 解释为什么不存在一个集合 使其满足 = {2, | |}。30. 找出所有满足以下条件的集合 、 和 。

$$
\begin{aligned}
A &= \{1, |B|, |C|\} \\
B &= \{2, |A|, |C|\} \\
C &= \{1, 2, |A|, |B|\}
\end{aligned}
$$

.

5.2 函数

本节包含了关于函数的许多细节，其中很大一部分在非离散的语境中你应该已经很熟悉。阅读时，思考我们在这里谈论函数的方式可能与你在数学其他领域中所了解的有哪些不同。

一个函数是一个规则，它将每个输入映射到一个输出。我们称输出为输入的像。函数的所有输入的集合称为定义域。所有允许输出的集合称为值域。我们可以写 ： → 来描述一个名称为 ，定义域为 ，值域为 的函数。这并没有告诉我们 *which* 函数 的具体形式。为了定义这个函数，我们必须描述规则。通常通过给出一个公式来计算任意输入的输出（尽管这并不是描述规则的唯一方式）。

例如，考虑函数 ： → ，其定义为 ( ) = ^{2} + 3。这里，定义域和值域是相同的集合（自然数）。规则是：取输入，将其与自身相乘并加上 3。这是可行的，因为我们可以将此规则应用于每个自然数（定义域中的每个元素），并且结果总是自然数（值域中的元素）。然而请注意，并不是每个自然数实际上都是输出（没有办法得到 0、1、2、5 等）。*are* 输出的自然数集合称为函数的值域（在此情况下，值域是 $\{3, 4, 7, 12, 19, 28, \ldots\}$，即所有比完全平方数大 3 的自然数）。

使规则成为*function*的关键在于每个输入都有*exactly one*输出。也就是说，规则必须是一个好的规则。我们为输入7分配什么输出？对于任何特定的函数，只能有一个答案。

例 5.2.1

以下都是函数的示例：

1\. ： → 定义为 ( ) = 3 。定义域和值域都是整数集。然而，值域仅为 3 的整数倍集。 2. ：{1, 2, 3} → { ， ， } 定义为 (1) = ， (2) = , 和 (3) = 。定义域是集合{1, 2, 3}，值域是集合 { ， ， }，值域是集合 { ， }。注意 (2) 和 (3) 是值域中的相同元素。这是可以的，因为定义域中的每个元素仍然只有一个输出。

3\. ：{1, 2, 3, 4} → 由下表定义：

x	1	2	3	4
$h(x)$	3	6	9	12

这里的定义域是有限集合 {1, 2, 3, 4}，而陪域是自然数集合 。一开始你可能会认为这个函数是相同的

作为上面定义的 。它绝对不是。尽管规则相同，但定义域和值域不同，因此这是两个不同的函数。

例 5.2.2

仅仅因为你可以像编写函数一样描述一个规则，并不意味着该规则就是一个函数。以下内容并不是函数。

1. : → ，由 ( ) = $\frac{n}{2}$ 定义。这不是一个函数的原因是并非每个输入都有一个输出。 把 3 映射到哪里？规则说明 (3) = $\frac{3}{2}$，但 $\frac{3}{2}$ 不是陪域的元素。

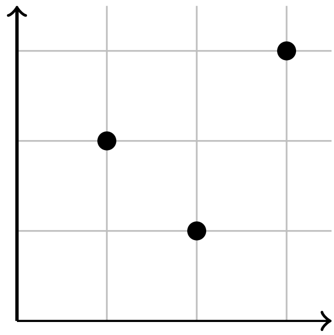
2. 考虑这样一条规则：把每个人与他们的电话号码对应起来。如果把人的集合看作定义域，把电话号码的集合看作陪域，那么这就不是一个函数，因为有些人有两个电话号码。把定义域和陪域对调也无济于事，因为有些电话号码属于多个人（假设在你阅读本文时，仍有一些家庭在使用固定电话）。

5.2.1 描述函数

值得区分函数与其描述。函数是一个抽象的数学对象，无论是否有人讨论它，它都以某种方式存在。但当我们 *do* 想要讨论这个函数时，我们需要一种方式来描述它。一个特定的函数可以用多种方式来描述。

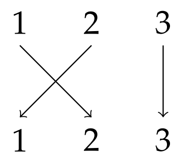
一些微积分教材讨论 *Rule of Four*，认为每个函数都可以用四种方式来描述：代数方式（一个公式）、数值方式（一个表格）、图形方式，或用文字描述。在离散数学中，我们仍然可以使用这些方式中的任何一种来描述函数，但由于我们主要关注定义域为 或 的一个有限子集的函数，因此也可以更加具体。

以图形方式描述一个函数通常意味着绘制该函数的图像：在平面上绘制这些点。我们可以这样做，并可能得到如下所示的图像，对于函数 $: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$。



将这些点连接起来或尝试将它们拟合到某个曲线是绝对错误的。领域中只有三个元素。曲线意味着该领域包含一个实数区间。

这里是另一种表示相同函数的方法 n:



这表明函数 将 1 映射到 2，将 2 映射到 1，将 3 映射到 3：只需跟随箭头。

上面用来定义函数的箭头图在可视化函数时非常有用。我们将经常处理具有 *finite* 范围的函数，因此这种类型的图像通常比传统的函数图更有用。

请注意，对于有限域，找到一个能为任何输入提供输出的代数公式通常是不可能的。当然，我们可以使用分段定义的函数，比如

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{if } x = 1 \\ x-1 & \text{if } x = 2 \\ x & \text{if } x = 3 \end{cases}.$$

这描述的功能与上面完全相同，但我们都可以同意这是一种荒谬的方式。

由于我们将频繁使用具有小定义域和值域的函数，让我们采用一些符号来描述它们。我们需要的只是一种清晰的方式来表示定义域中每个元素的像。事实上，写一个值表完全可以解决这个问题：

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	3	2	4	1

我们通过将其写成一个“矩阵”，使每个输入直接对应其输出，从而进一步简化这一过程：

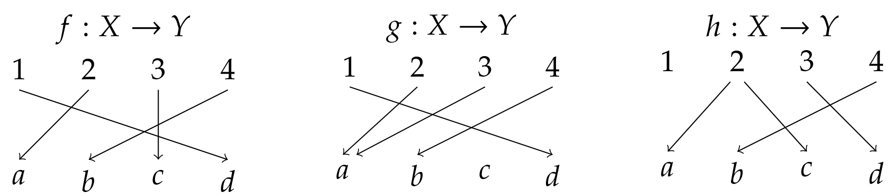
$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

请注意，这只是符号表示，而不是线性代数课上会看到的那种矩阵（例如，无法对这些矩阵进行运算或进行行简化）。

两行符号表示法相对于箭头图的一个优点是，使用两行符号表示法时，更难不小心定义出一个不是函数的规则。

示例 5.2.3

以下哪个图表示一个函数？设 $= \{1, 2, 3, 4\}$ 和 $= \{\ ,\ ,\ ,\ \}$。



解答。 是一个函数， 也是。对于一个值不是任何输入的像，或者 来自值域并同时是来自定义域的 2 和 3 的像，这没有问题。我们可以用我们的两行符号表示这些：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & c & b \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & a & b \end{pmatrix}$$

.

然而， 不是一个函数。事实上，它失败了有两个原因。首先，域中的元素 1 没有被映射到任何元素的陪域。其次，域中的元素 2 被映射到多个陪域元素（ 和 ）。请注意，这两种问题中的任何一个都足以使一个规则不是函数。通常，以下的映射都不是函数：

可能也有助于思考如何写出 的两行符号表示。我们可能会有如下表示：

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & a, c? & d & b \end{pmatrix}.$$

在1下没有任何东西（差），而我们需要在2下放置不止一件东西（非常差）。有了一个实际上是函数的规则，两行符号表示法将始终“有效”。

我们还会对定义域为 的函数感兴趣。在这里，两行符号表示法不适用，但通常可以代数地描述函数。即使是表格也有些不方便，因为它们不能完全描述函数。例如，考虑由下表给出的函数 : → 。

x	0	1	2	3	4	5	...
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	...

我给你的条目是否已经足够，让你能够确定 (6)? 你也许会猜测 (6) = 36，但你没有办法确切地 *know* 这一点。也许我是在故意刁难，原本打算让 (6) = 42。事实上，对于每一个自然数 ，都存在一个与上表一致的函数，但它的 (6) = 。

好吧，假设我确实是指 (6) = 36，而且事实上，你认为在支配这个函数的那个规则确实就是该规则。那么我就应该说明这个规则是什么。 ( ) = ^{2}。现在就不可能再有任何混淆了。

给出一个明确的公式来计算域中任何元素的像是描述一个函数的好方法。我们将说这些明确的规则是函数的封闭公式。

还有一种非常有用的方法来描述定义域为 的函数，它特别依赖于自然数的结构。我们可以定义一个函数 *recursively*！

例 5.2.4

考虑函数 : → ，其定义为 (0) = 0，且 (+1) = ( )+2 +1。求 (6)。

解答。规则指出 (6) = (5) + 11（我们使用 6 = + 1，因此 = 5）。不过我们并不知道 (5) 是什么。好吧，我们知道 (5) = (4) + 9。因此我们需要计算 (4)，这将需要知道 (3)，而这又将需要知道 (2),. . . 这会有尽头吗?

是的！这个过程一定会结束，因为我们的定义域是 ，所以存在一个最小元。并且我们已经显式给出了 (0) 的值，所以没有问题。我们也可以选择从 (6) 向上推导，而不是从 (6) 向下推导:

(1) = (0) + 1 = 0 + 1 = 1 (2) = (1) + 3 = 1
+ 3 = 4 (3) = (2) + 5 = 4 + 5 = 9 (4) = (3)
+ 7 = 9 + 7 = 16 (5) = (4) + 9 = 16 + 9 = 25
(6) = (5) + 11 = 25 + 11 = 36

看起来这个递归定义的函数与显式定义的函数 ( ) = ^{2} 是相同的。是这样吗? 稍后我们将证明它确实如此。

递归定义的函数往往更容易从“现实世界”的问题中构建，因为它们描述了函数值如何变化。然而，这也有代价。要计算某个单一输入的像会更困难，因为你需要知道定义域中其他（先前）元素的像。

递归定义的函数。

对于一个函数 : → ，递归定义由一个初始条件以及一个递推关系组成。初始条件是明确给出的 (0) 的值。递推关系是一个用 ( )（以及可能的 本身）来表示 (+ 1) 的公式。

示例 5.2.5

给出下列函数的递归定义。

1. : → 给出你建造饲养箱后第 年时其中蜗牛的数量，假设你一开始有 3 只蜗牛，并且蜗牛的数量每年翻倍。2. : → 给出你开始俯卧撑挑战后第 天你能做的俯卧撑数量，假设你在第 0 天能做 7 个俯卧撑，并且每天可以多做 2 个俯卧撑。3. : → 定义为 ( ) = !。回忆 ! = 1 · 2 · 3 · · · · · (− 1) · 是从 1 到 的所有数的乘积。我们还定义 0! = 1。

解答。

初始条件是 (0) = 3。为了得到 (+ 1)，我们将去年的蜗牛数量翻倍，去年数量由 ( ) 给出。因此 (+ 1) = 2 ( )。完整的递归定义包含这两个，并可写为：

$$f(0) = 3;\ f(n+1) = 2f(n).$$

2. 我们被告知在第 0 天你可以做 7 个俯卧撑，因此 (0) = 7。第 + 1 天你能做的俯卧撑数量比第 天多 2 个，其数量由 ( ) 给出。因此

$$g(0) = 7;\ g(n+1) = g(n) + 2.$$

3. 这里 (0) = 1. 要得到递推关系，考虑如何从 (+ 1) = (+ 1)! 得到 ( ) = !。如果你将这两个都写成积的形式，你会看到 (+ 1)! 就像 !，只是多了一个项在积中，即额外的 + 1。因此我们有，

$$h(0) = 1;\ h(n+1) = (n+1) \cdot h(n).$$

5.2.2 满射、单射与双射

我们现在开始研究函数可能具备或不具备的特殊性质。

在上面的例子中，你可能已经注意到，有时陪域中的某些元素并不在值域中。当这种情况 *does not* 发生时（也就是说，当陪域中的每个元素都在值域中），我们称该函数是满射，或者说该函数将定义域映射到 *onto* 陪域。这个术语应该是有道理的：函数把定义域（完整地）放在陪域之上。满射函数的一个更正式的数学术语是“满射”，我们也说一个满射的函数是“满射函数”。

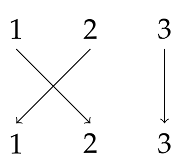
在图片中:

满射　　　　非满射

例子 5.2.6

哪些函数是满射（即，映射到整个集合）？

1. : → 由 ( ) = 3 定义。 2. : {1, 2, 3} → { , , } 由 = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 定义。 3. : {1, 2, 3} → {1, 2, 3} 定义如下:



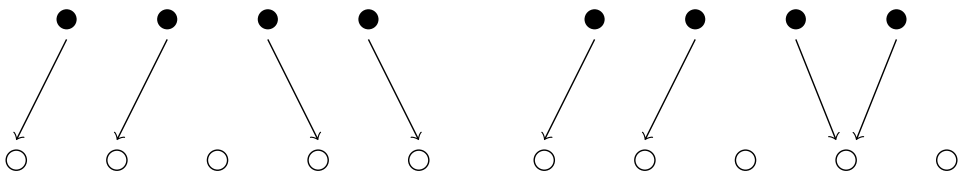
解答。

1. 不是满射。值域中存在一些不在范围内的元素。例如，没有 ∈ 被映射到数字 1（规则会说 $\frac{1}{3}$ 会被映射到 1，但 $\frac{1}{3}$ 不在定义域内）。实际上，函数的值域是 3 （3 的整数倍），这与 不相等。 2. 不是满射。没有 ∈ {1, 2, 3}（定义域）使得 ( ) = ，因此 ，作为值域中的元素，不在范围内。注意，矩阵的底行中缺少一个来自值域的元素。

3. 是满射的。陪域中的每个元素也都在值域中。陪域中没有任何元素被遗漏。

要成为一个函数，规则不能将定义域中的单个元素映射到值域中的两个或多个不同元素。然而，我们已经看到反过来是允许的：一个函数可能将值域中的相同元素映射到定义域中的两个或多个不同元素。当这种情况*does not*发生时（即每个值域元素最多是一个定义域元素的像），我们称该函数为一对一函数。同样，这个术语是有意义的：我们将最多一个定义域元素映射到一个值域元素。一个输入对应一个输出。一对一函数的数学术语是注射函数。我们称一对一函数为单射函数。

在图片中：

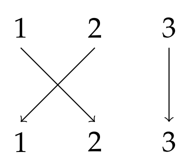


单射　　　　非单射

例 5.2.7

哪些函数是单射（即一一对应）？

1. : → 由 ( ) = 3 定义。 2. : {1, 2, 3} → { , , } 由 = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$ 定义。 3. : {1, 2, 3} → {1, 2, 3} 定义如下：



解答。

1. 是单射。每个值域中的元素都被分配到域中的一个元素。如果 是三的倍数，则仅 /3 被映射到 。如果 不是 3 的倍数，则没有输入与输出对应。

2. 不是单射。输入 2 和 3 都被映射到输出 。注意，在矩阵的底行中，陪域中的某个元素出现了不止一次。

3. 是单射的。每个输出只出现一次。

注意："surjective"和"injective"并不是反义词。你可以从上面的两个例子中看到，存在这样的函数：满射但非单射，单射但非满射，既是单射又是满射，或者两者都不是。在函数既是一一对应又是到上的情况下（既是单射又是满射），我们称该函数为双射，或称其为双射函数。

为说明这两种性质之间的对比，请并列考虑对每一种性质更为正式的定义。

单射与满射。

如果陪域中的每个元素都是定义域中*at most*一个元素的像，则该函数是单射。

若陪域中的每个元素都是定义域中*at least*某个元素的像，则该函数是满射。

注意，这两个性质都由陪域中的元素发生了什么来决定：它们可能作为像被重复出现，或者可能被"遗漏"（不成为像）。单射函数没有重复，但可能会也可能不会遗漏元素。满射函数不遗漏元素，但可能会也可能不会有重复。双射函数则既没有重复，也不遗漏元素。

5.2.3 像与逆像

在讨论函数时，我们有用于描述定义域中的一个元素（比如 ）及其在陪域中的对应元素的记号（我们写作 ( )，它 *is* 的像）。有时我们希望讨论定义域某个子集的所有像元素。我们也可能希望从陪域中的某个元素（比如 ）出发，讨论它是定义域中哪个元素或哪些元素（如果有的话）的像。我们可以写成"定义域中那些满足 ( ) = 的 "，但这样写太冗长了。下面介绍一些记号来让事情变得更简单。

为了解决第一种情况，我们需要的是一种描述定义域中某个子集里的元素的像的 *set* 的方法。设 : → 是一个函数，并且 ⊆ 是定义域的某个子集（可能是全部）。我们将使用记号 ( ) 来表示 在 下的像，即 中那些作为来自 的元素之像的元素所组成的集合。也就是说， ( ) = { ( ) ∈ : ∈ }。

我们也可以从相反的方向来做这件事。我们可以问，定义域中的哪些元素被映射到陪域中的某个特定集合。设 : → 为一个函数，并且设 ⊆ 是陪域的一个子集。那么我们将记作 $^{-1}$( )

对于 下 的逆像，即 中那些映射到 中元素的元素集合。换句话说，$^{-1}($ $) =$ $\{$ $\in$: $($ $) \in$ $\}$。

我们常常对那些像为余域中某个特定元素 的元素（或元素集合）感兴趣。上述记号是可行的：$^{-1}(\{$ $\})$ 是定义域中所有被 映射到 的元素所组成的集合。把它看作一个集合是有意义的：可能没有任何元素被映射到 （如果 不在值域中），在这种情况下 $^{-1}(\{$ $\}) = \emptyset$。或者 可能把多个元素映射到 （如果 不是单射）。作为一种记号上的简化，我们通常省略 外面的集合括号，而改写为 $^{-1}($ $)$ 来表示这个集合。

警告：$^{-1}($ $)$ 不是一个反函数！反函数只对双射存在，但 $^{-1}($ $)$ 对任意函数 都有定义。关键在于：$^{-1}($ $)$ 是一个 *set*，而不是定义域的一个 *element*。这只是对 $^{-1}(\{$ $\})$ 的一种不严谨记号。为了帮助区分这一点，我们将 $^{-1}($ $)$ 称为 在 下的完全逆像。它不是 在 $^{-1}$ (下的像，因为函数 $^{-1}$ 可能并不存在)。

例子 5.2.8

考虑函数 : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{$, , , $\}$，给定为

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & a & b & b & b & c \end{pmatrix}.$$

求 $(\{1, 2, 3\})$, $^{-1}(\{$, $\})$, 以及 $^{-1}($ $)$。

解。$(\{1, 2, 3\}) = \{$, $\}$，因为 和 是值域中 1、2和3映射到的元素。$^{-1}(\{$, $\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，因为这些正是 映射到 和 的元素。

$-1($ $) = \emptyset$，因为 不在 的值域中。

例 5.2.9

考虑函数 : $\to$ ，其定义为 $($ $) =$ $^2 + 1$。求 (1) 和 $(\{1\})$。然后求 $^{-1}(1)$、$^{-1}(2)$ 和 $^{-1}(3)$。

解。注意 $(1) \neq$ $(\{1\})$. 前者是一个元素：$(1) = 2$。后者是一个集合：$(\{1\}) = \{2\}$。

为了求 $^{-1}(1)$，我们需要找出所有满足 $^2 + 1 = 1$ 的整数 。显然只有0可行，因此 $^{-1}(1) = \{0\}$（注意，尽管只有一个元素，我们仍然将其写成包含一个元素的集合）。

要找到 $^{-1}(2)$，我们需要找到所有 使得 $^2 + 1 = 2$。我们看到 $^{-1}(2) = \{-1, 1\}$。

最后，如果 $^2 + 1 = 3$，那么我们正在寻找一个满足 $^2 = 2$ 的 。不存在这样的整数，所以 $^{-1}(3) = \emptyset$。

由于 $^{-1}($ $)$ 是一个集合，因此询问 $\left| \ ^{-1}(\ ) \right|$ 是有意义的，即映射到 的定义域中元素的数量。

例 5.2.10

找一个函数 $:\{1,2,3,4,5\}\to$ ，使得$\left| {}^{-1}(7)\right| = 5$。
解答。这样的函数只有一个。我们需要定义域中的五个元素映射到数字 7 $\in$ 。由于定义域中只有五个元素，它们都必须映射到7。所以

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

.

函数定义。以下是我们在使用函数时所涉及的所有主要概念和定义的总结。

- 一个函数是一个规则，它将一个集合的每个元素（称为定义域）精确地对应到另一个集合的一个元素（称为值域）。
- 符号： $:\ \to$ 是我们表示函数名为 ，定义域是集合 ，值域是集合 的方式。
- 要为一个定义域较小的函数指定规则，使用两行符号表示法，通过编写矩阵，将每个输出直接写在其对应输入的下方，如下所示：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

.

- $(\ ) =$ 表示定义域（输入）中的元素 被分配到共域中的元素 。我们说 是输出。或者，我们称 为 下 的像。
- 范围是余域的一个子集。它是所有被函数映射到至少一个定义域元素的元素的集合。也就是说，范围是所有输出的集合。
- 一个函数是单射（注入映射或一一映射），如果陪域中的每个元素至多是定义域中一个元素的像。
- 一个函数是满射（或称为“映射”或“到”）如果值域中的每个元素都是至少一个定义域中元素的像。
- 双射是既是单射又是满射的函数。换句话说，如果余域中的每个元素都是来自定义域的恰好一个元素的像。
- 定义域中元素 的像是 被映射到的陪域中的元素 。也就是说，在 下的像是 $(\ )$。

- 陪域中元素 的完全逆像，记作 $^{-1}(\ )$，是定义域中所有被该函数映射到 的元素的*set*。
- 子集 的像是集合 $(\ ) = \{\ (\ ) \in\ :\ \in\ \}$。
- 陪域的一个子集 的逆像是集合 $^{-1}(\ ) = \{\ \in\ :\ (\ ) \in\ \}$.

阅读问题

1. 用你自己的话解释函数的陪域（codomain）与函数的值域（range）之间的关系。 2. 如果一个函数的定义域和陪域大小相同，那么这个函数一定是 *surjective* 吗？一定是 *injective* 吗？它是否可能只满足其中之一？简要说明你的想法。 3. 你有什么问题？至少写一个在阅读本节内容后你或你的同学可能会好奇的问题。

5.2.4 练习

1. 考虑函数 $: \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$，其定义为

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. 求 (4)。 b. 在定义域中找到一个 ，使得$(\ ) = 4$。 c. 在定义域中找到一个元素 ，使得$(\ ) =$ 。d. 找到一个陪域中但不在值域中的元素。

2. 以下函数的定义域和陪域均为 {1, 2, 3, 4, 5}。对每一个函数，判断它是（仅）单射、（仅）满射、双射，还是既非单射也非满射。

(a) $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $(\ ) = \begin{cases} & \text{如果 } < 3 \\ -2 & \text{如果 } \geq 3 \end{cases}$ (c) $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{if } x < 3 \\ x & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$

3. 考虑以下函数 : $\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3\}$。对于每一个，判断它是（仅仅）单射、（仅仅）满射、双射，还是既不是单射也不是满射。

(a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 4 \\ 6-x & \text{if } x \geq 4 \end{cases}$

(c) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. 考虑以下函数 : $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5\}$。对每一个，判断它是（仅）单射、（仅）满射、双射，还是既非单射也非满射。

(a) $f(x) = 6 - x$

(b) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5. 写出所有函数 : $\{1,2,3,4\} \to \{\ ,\ \}$（使用两行表示法）。
有多少个函数？有多少个是满射？有多少个是单射？有多少个是双射？

6. 写出所有函数 : $\{1,2\} \to \{\ ,\ ,\ ,\ \}$（用两行表示法）。一共有多少个函数？其中有多少是满射？多少是单射？多少是双射？

7. 考虑函数 :$\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4\}$，由下表给出：

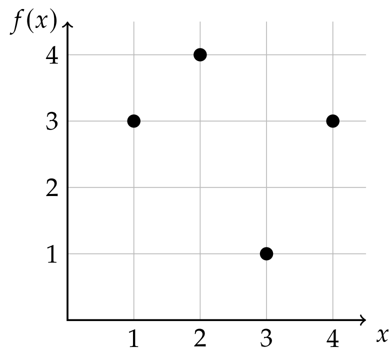
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	2	4	1	2

(a) 是单射吗？请解释。

(b) 是否为满射？请解释。

(c) 用两行表示法写出该函数。

8. 考虑函数 : {1, 2, 3, 4} → {1, 2, 3, 4} 由下图给出。



(a) 是单射吗？请说明。(b) 是满射吗？请说明。(c) 用两行表示法写出该函数。

考虑函数 : → ，定义为*recursively*

$$f(0) = 1 \text{ and } f(n+1) = 3 \cdot f(n).$$

求 f(12)。

10. 假设 : → 满足递推关系

$$f(n+1) = f(n) + 6.$$

请注意，这些信息不足以确定该函数，因为我们没有初始条件。对于下面给出的每一个初始条件，求 (7) 的值。

a. 如果 (0) = 1. b. (0) = 7.
c. (0) = 17. d. (0) = 155.

假设 : → 满足递推关系

$$f(n+1) = \begin{cases} \frac{f(n)}{2} & \text{if } f(n) \text{ is even} \\ 3f(n)+1 & \text{if } f(n) \text{ is odd} \end{cases}.$$

注意，在初始条件 (0) = 1 下，函数的取值为： (1) = 4， (2) = 2， (3) = 1， (4) = 4，等等，其像在这三个数之间循环。因此 不是单射（当然也不是满射）。在其他初始条件下会是吗？[1]

(a) 如果 满足初始条件 (0) = 5, 是单射吗？解释原因，或者给出定义域中两个具有相同像的具体元素的例子。

(b) 如果 满足初始条件 (0) = 3, 是否是单射？解释原因，或者给出定义域中具有相同像的两个元素的具体例子。 (c) 如果 满足初始条件 (0) = 27, 那么可以得到 (105) = 10，并且小于 105 的任意两个数都没有相同的像。是否可能是单射？请解释。 (d) 证明无论你选择什么初始条件，该函数都不可能是满射。

12. 对于下面给出的每个函数，判断该函数是否为单射，以及是否为满射。

(a) : → 由 ( ) = + 4 给出。 (b) : → 由 ( ) = + 4 给出。 (c) : → 由 ( ) = 5 − 8 给出。 (d) : → 由 ( ) = { /2（若 为偶数）(+ 1)/2（若 为奇数）给出。

13. 设 = {1, 2, 3, . . . , 10}。考虑函数 : ( ) → ，其定义为 ( ) = | |。也就是说， 以 的一个子集作为输入，并输出该集合的基数。

（a） 是否是单射？证明你的答案。（b） 是否是满射？证明你的答案。（c）求 $^{-1}(1)$。（d）求 $^{-1}(0)$。（e）求 $^{-1}(12)$。

14. 设 = { ∈ : 0 ≤ ≤ 999} 为所有三位或更少位数字的集合。定义函数 : → ，使得 ( ) = + + ，其中 、 和 是 中该数的各位数字（将小于 100 的数用前导 0 写成三位数）。换言之， 返回其输入数字的各位数字之和。例如， (253) = 2 + 5 + 3 = 10。

(a) Let $A = \{n \in X : 306 \leq x \leq 323\}$. Find $f(A)$.

[1]It turns out this is a *really* hard question to answer in general. The *Collatz conjecture* is that no matter what the initial condition is, the function will eventually produce 1 as an output. This is an open problem in mathematics: nobody knows the answer.

(b) 求 $^{-1}(\{1, 3\})$。(
c) 求 $^{-1}(2)$。(d) 求
$^{-1}(139)$。

15. 考虑集合 $^2 = \times$ ，即所有有序对(,) 的集合，其中 和 是自然数。考虑一个函数 : $^2 \to$ ，定义为 ((,)) = + 。

(a) 设 = {(,) ∈ ^{2}: , ≤ 10}。求 ( )。(b) 求 $^{-1}(3)$ 和 $^{-1}(\{0, 1, 2, 3\})$。(c) 给出 $^{-1}($ $)$ 和 $^{-1}(\{0, 1, . . . , \})$ 的几何描述，对任意 ≥ 1。(d) 求 $|\ ^{-1}(8)|$ 和 $|\ ^{-1}(\{0, 1, . . . , 8\})|$。

16. 设 : → 为某个函数。假设 3 ∈ 。如果你知道，关于 $^{-1}(3)$ 你能说些什么？

(a) 是单射吗？解释。

（b） 是满射吗？说明。（
c） 是双射吗？说明。

17. 找到一个集合 和一个函数 : → ，使得 $^{-1}(0) \cup\ ^{-1}(1) =$ 。
18. 如果你知道以下内容，你能对集合 和 得出什么结论？

(a) 是否存在一个单射函数 : → ？解释。(b) 是否存在一个满射函数 : → ？解释。(c) 是否存在一个双射函数 : → ？解释。

19. 假设 : → 是一个函数。以下哪些是可能的？请解释。

(a) 是单射但不是满射。(b) 是满射但不是单射。(c) | | = | | 且 是单射但不是满射。(d) | | = | | 且 是满射但不是单射。(e) | | = | |， 和 是有限的，且 是单射但不是满射。(f) | | = | |， 和 是有限的，且 是满射但不是单射。

20. 设 : → 和 : → 为函数。我们可以定义 和 的合成为函数 ∘ : → ，其中每个 ∈ 的像为 (( ))。也就是说，先将 代入 ，再将结果代入 （就像代数和微积分中的合成运算一样）。

(a) 如果 和 都是单射的, ∘ 必须是单射的吗? 解释。

(b) 如果 和 都是满射的, 那么 ∘ 必须是满射吗? 解释。

(c) 假设 ∘ 是单射。你能说出关于 和 的什么, 若有的话? 请解释。

(d) 假设 ∘ 是满射。你能说出关于 和 的什么吗? 请解释。

21. 考虑函数 : → , 其定义为 ( ) = { + 1, 如果 是偶数; − 3 , 如果 是奇数。

(a) 是否为单射? 证明你的结论。

(b) 是否为满射? 证明你的结论。

22. 在学期末, 一位教师为她的每位学生分配一个字母成绩。这是一个函数吗? 如果是, 哪些集合构成定义域和陪域? 该函数是单射、满射、双射, 还是都不是?

23. 在 *Hearts* 这项游戏中, 四名玩家从一副 52 张的牌中各自被发到 13 张牌。这是否是一个函数? 如果是, 哪些集合构成定义域和值域, 并且该函数是单射、满射、双射, 还是都不是?

24. 七名玩家在玩五张梭哈。每位玩家最初从一副 52 张的牌中各得到 5 张牌。这是一个函数吗? 如果是, 哪些集合构成定义域和陪域? 该函数是单射、满射、双射, 还是都不是?

25. 考虑函数 : → , 它给出了在一个有 个人的房间中, 在假设每个人都与其他所有人握手的情况下所发生的握手次数。给出该函数的递归定义。

26. 设 : → 是一个函数, 且 ⊆ 是其定义域的一个有限子集。你能说说 | | 与 | ( )| 之间的关系吗? 请同时考虑一般情况, 以及当你知道 是单射、满射或双射时会发生什么。

27. 设 : → 为一个函数, 且 ⊆ 为值域的一个有限子集。你能说出 | | 和 | $^{-1}$( )| 之间的关系吗? 考虑一般情况以及当你知道 是单射、满射或双射时的情况。

28. 设 : → 为一个函数, ⊆ , ⊆ 。

(a) 是否 $^{-1}$(( )) = ? 是总是成立、有时成立, 还是从不成立? 解释。(b) 是否 ($^{-1}$( )) = ? 是总是成立、有时成立, 还是从不成立? 解释。(c) 如果上述一个或两个结论并非总是成立, 你还能说些什么? 对于特定类型的函数, 等式是否总是成立? 是否存在除等式之外、始终成立的其他关系? 请探讨。

29. 设 : → 为一个函数，且 、 ⊆ 为定义域的子集。

(a) f(A ∪ B) = f(A) ∪ f(B) 吗？总是、有时，还是从不？请解释。 (b) f(A ∩ B) = f(A) ∩ f(B) 吗？总是、有时，还是从不？请解释。

30. 设 : → 为一个函数，且 、 ⊆ 为陪域的子集。

(a) 是否 $^{-1}$(∪) = $^{-1}$( ) ∪ $^{-1}$( )？总是、有时，还是从不？解释。(b) 是否 $^{-1}$(∩) = $^{-1}$( ) ∩ $^{-1}$( )？总是、有时，还是从不？解释。

CHAPTER 6

其他主题

6.1 生成函数

在离散数学中，有一种极其强大的工具用于处理序列，称为生成函数。其思想是这样的：与其研究一个无限序列（例如：2, 3, 5, 8, 12, . . .），不如考察一个对该序列进行编码的单一函数。但这并不是一个以第 项作为输出的函数。相反，这是一个其幂级数（类似于微积分中的幂级数）能够“展示”该序列各项的函数。因此，例如，我们会考察幂级数 $2 + 3 \ + 5 \ ^2 + 8 \ ^3 + 12 \ ^4 + \cdots$；它以系数的形式展示了序列 2, 3, 5, 8, 12, . . .。

一个无限幂级数仅仅是形式为 $_n$ ^{n} 的项的无限和，其中 $_n$ 是某个常数。因此，我们可以这样写一个幂级数：

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

或像这样展开

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots.$$

在生成函数的语境下，我们将这样的幂级数称为*generating series*。生成级数生成该序列

$$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots.$$

换句话说，通过生成级数生成的序列就是无限多项式的 *coefficients* 序列。

示例 6.1.1

由生成级数 $3 + 8 \ ^2 + \ ^3 + \frac{x^5}{7} + 100 \ ^6 + \cdots$所表示的是什么序列?

解法。我们只需要读取每个 ^{n} 项的系数。因此， $_0 =$ 为 3，因为 ^{0} 的系数是 3（ $^0 =$ 为 1，所以这是常数项）。 $_1$ 是多少？它不是 8，因为 8 是 ^{2} 的系数，所以 8 是序列的 $_2$ 项。为了找到 $_1$，我们需要查看 ^{1} 的系数，在这种情况下是 0。所以 $_1 =$ 为 0。继续下去，我们得到 $_2 =$ 为 8， $_3 =$ 为 1， $_4 =$ 为 0， $_5 = \frac{1}{7}$ 为 。因此，我们得到了序列

$$3, 0, 8, 1, 0, \frac{1}{7}, 100, \ldots.$$

注意，在讨论生成函数时，我们总是从我们的

> 包含 $_0$ 的序列。

现在你可能会很自然地问，为什么我们要做这样的事情。一个原因是，用幂级数来编码一个序列可以帮助我们跟踪序列中每一项分别是哪一项。例如，如果我们写下序列 1, 3, 4, 6, 9, . . . , 24, 41, . . .，那么就不可能确定 24 是第几项（即使我们约定第一项应该是 $_0$）。然而，如果我们改写成生成级数，那么就会得到 $1 + 3 \quad + 4 \ ^2 + 6 \ ^3 + 9 \ ^4 + \cdots + 24 \ ^{17} + 41 \ ^{18} + \cdots$。这样一来就很清楚，24 是该序列的第 17 项（也就是说，$_{17} = 24$）。当然，为了获得这一好处，我们也可以用许多其他方式来展示序列，比如 $1_0\, 3_1\, 4_2\, 6_3\, 9_4 \cdots 24_{17}\, 41_{18} \cdots$；但我们并不这样做。原因在于，生成级数看起来就像一个普通的幂级数（尽管我们对它的解释不同），因此我们可以像对待幂级数那样对它进行操作，例如写出它收敛到什么。

例如，从微积分中我们知道幂级数 $1 + \quad + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$收敛到函数 ^{x}。因此，我们可以使用 ^{x} 来描述 ^{x} 的幂级数系数序列。当我们写下一个简洁的函数，其具有一个无限的幂级数并视其为生成级数时，我们称这个函数为 *generating function*。在这个例子中，我们会说

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots \text{ has generating function } e^x.$$

6.1.1 构造生成函数

^{x} 的示例非常具体。我们有一个相当奇怪的序列，而我们之所以知道它的生成函数，只是因为我们恰好知道 ^{x} 的泰勒级数。我们现在的目标是收集一些工具，以构建某个给定序列的生成函数。

让我们看看一些非常简单的数列的生成函数是什么。最简单的数列：1, 1, 1, 1, 1, . . .。*generating series* 看起来是什么样的？它只是 $1 + \quad + \ ^2 + \ ^3 + \ ^4 + \cdots$。现在，我们能为这个幂级数找到一个封闭的公式吗？可以！这个特定的级数实际上只是一个公比为 的几何级数。因此，如果我们使用第 4.4 节中的“乘法、平移和减法”技巧，我们有

$$\begin{array}{rrl} & S = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ - & xS = & \quad\;\; x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\ \hline & (1-x)S = & 1 \end{array}$$

因此我们看到

$$1 + x + x^2 + x^3 \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

你可能还记得从微积分中学到，这只在幂级数的收敛区间内才成立，在这种情况下是当 | | < 1。这对我们来说确实如此，但我们并不在意。我们永远不会给 代入任何具体的值，因此只要存在某个 的取值使得生成函数和生成级数一致，我们就满意了。而在这种情况下，我们是满意的。

1, 1, 1, ...

对于 1, 1, 1, 1, 1, 1, . . . 的生成函数是 1 1 –

让我们使用这个基本生成函数来求更多序列的生成函数。如果我们用 – 替换，我们得到

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \text{ which generates } 1, -1, 1, -1, \ldots.$$

如果将 替换为3 则得到

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots \text{ which generates } 1, 3, 9, 27, \ldots.$$

通过替换 $\frac{1}{1-x}$ 中的 ，我们可以得到多种序列的生成函数，但并非全部。例如，你无法为 代入任何值来得到序列 2, 2, 2, 2, . . . 的生成函数。不过，我们还没有走到绝路。注意到序列 2, 2, 2, 2, . . . 的每一项，都是将序列 1, 1, 1, 1, . . . 的对应项乘以常数 2 得到的。因此，也将生成函数乘以 2。

$$\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots \text{ which generates } 2, 2, 2, 2, \ldots.$$

同样地，为了求序列 3, 9, 27, 81, . . . 的生成函数，我们注意到该序列是将序列 1, 3, 9, 27, . . . 的每一项都乘以 3 得到的。由于我们已经有了序列 1, 3, 9, 27, . . . 的生成函数，因此我们可以说

$$\frac{3}{1-3x} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3x + 3 \cdot 9x^2 + 3 \cdot 27x^3 + \cdots \text{ which generates } 3, 9, 27, 81, \ldots.$$

那么序列 2, 4, 10, 28, 82, ⋯⋯ 呢？这里各项总是比 3 的幂大 1。也就是说，我们将序列 1, 1, 1, 1, ⋯⋯ 和 1, 3, 9, 27, ⋯⋯ 按项相加。因此，我们可以通过将各自的生成函数相加来得到一个生成函数：

$$\begin{aligned} 2 + 4x + 10x^2 + 28x^3 + \cdots &= (1+1) + (1+3)x + (1+9)x^2 + (1+27)x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

乐趣不止于此：如果我们将原始生成函数中的 替换为^2，我们就得到

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \cdots \text{ which generates } 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots.$$

我们如何得到 0, 1, 0, 1, 0, 1, . . .? 从前一个序列开始，将它*shift* 1。但这是如何做到的呢？为了看清移位是如何起作用的，我们先尝试求序列 0, 1, 3, 9, 27, . . . 的生成函数。我们知道$\frac{1}{1-3x}$ = 1 + 3 + 9 ^{2} + 27 ^{3} + · · ·。为了在前面得到一个 0，我们需要生成级数看起来像 + 3 ^{2} + 9 ^{3} + 27 ^{4} + · · ·（因此没有常数项）。乘以 会产生这种效果。因此，0, 1, 3, 9, 27, . . . 的生成函数是$\frac{x}{1-3x}$。这同样也适用于得到 0, 1, 0, 1, 0, 1, . . . 的生成函数：

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \cdots \text{ which generates } 0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots.$$

如果我们把序列 1, 0, 1, 0, 1, 0, . . . 和 0, 1, 0, 1, 0, 1, . . . 按项相加，会怎样？我们应该得到 1, 1, 1, 1, 1, 1 . . .. 当我们把生成函数相加时会发生什么？它是可行的（试一试）！

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}.$$

这里有一个狡猾的问题：如果你取 *derivative* 的$\frac{1}{1-x}$ 会发生什么？我们得到$\frac{1}{(1-x)^2}$。另一方面，如果我们逐项对幂级数进行求导，我们得到 (1 + + ^{2} + ^{3} + · · ·)$'$ = 1 + 2 + 3 ^{2} + 4 ^{3} + · · ·，这就是 1、2、3、4、……的生成级数。这意味着

1, 2, 3, ...

1, 2, 3, 4, 5, …… 的生成函数是 1 (1 −)$_2$。

取二阶导数：$\frac{2}{(1-x)^3}$ = 2 + 6 + 12 ^{2} + 20 ^{3} + · · ·。因此$\frac{1}{(1-x)^3}$ = 1 + 3 + 6 ^{2} + 10 ^{3} + · · ·是三角数 1、3、6、10 …… 的生成函数（尽管这里我们有 $_0$ = 1，而通常是 $_0$ = 0）。

6.1.2 差分

我们已经看到如何利用乘法（乘以常数或乘以 ）、代换、加法和求导，从$\frac{1}{1-x}$得到生成函数。要使用这些方法中的每一种，你必须注意到一种把序列 1, 1, 1, 1, 1…… 变换成所需序列的方式。这并不总是容易的。而且这也并非我们分析序列的常用方式。我们经常考虑的一件事是序列各项之间的差分序列。事实证明，这在寻找生成函数时也会很有帮助。差分序列通常比原序列更简单

序列。因此，如果我们知道差分的生成函数，我们希望利用它来找到原始序列的生成函数。

例如，考虑序列 2, 4, 10, 28, 82, ⋯⋯。我们如何转到首差序列：2, 6, 18, 54, ⋯⋯？我们希望用 4 减去 2， 用 10 减去 4， 用 28 减去 10， 依此类推。因此，如果我们（逐项）用序列 0, 2, 4, 10, 28, ⋯⋯ 去减 2, 4, 10, 28 ⋯⋯， 就可以得到结果。我们可以通过将 2, 4, 10, 28 ⋯⋯ 的生成函数乘以 ， 来得到0, 2, 4, 10, 28, ⋯⋯ 的生成函数。用 表示 2, 4, 10, 28, 82, ⋯⋯ 的生成函数。那么：

$$
\begin{array}{rl}
A & = 2 + 4x + 10x^2 + 28x^3 + 82x^4 + \cdots \\
- \quad xA & = 0 + 2x + 4x^2 + 10x^3 + 28x^4 + 82x^5 + \cdots \\
\hline
(1-x)A & = 2 + 2x + 6x^2 + 18x^3 + 54x^4 + \cdots
\end{array}
$$

虽然我们并不能得到完全准确的差分序列，但可以得到一个近似的结果。在这个特定情况下，我们已经知道生成函数 （我们在上一节中找到了它），但在大多数时候，我们将使用这种差分技术来 *find* ：如果我们拥有差分序列的生成函数，就可以进而求解 。

示例 6.1.2

找到序列 1, 3, 5, 7, 9, ⋯ 的生成函数。

解答。注意到相邻项之差的序列是常数。我们知道如何求任意常数序列的生成函数。因此，记序列 1, 3, 5, 7, 9, . . . 的生成函数为 。我们有

$$
\begin{array}{rl}
A & = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \cdots \\
- \quad xA & = 0 + x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \cdots \\
\hline
(1-x)A & = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots
\end{array}
$$

我们知道 2 + 2 2 + 2 3 + 2 4 + ⋯ = 2 1 − ——。因此

$$(1-x)A = 1 + \frac{2x}{1-x}.$$

现在求解 ：

$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

这有意义吗？在我们将两个分式简化为一个之前，我们将序列 1, 1, 1, 1, . . . 的生成函数与序列 0, 2, 4, 6, 8, 10, . . . 的生成函数相加（记住 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 生成 1, 2, 3, 4, 5, . . ., 乘以 2 会将其移位，使零在前面，并且每项都翻倍）。如果我们逐项相加，就得到了正确的序列 1, 3, 5, 7, 9, . . .。

既然我们已经有了奇数的生成函数，我们可以利用它来找到平方数的生成函数
:

示例 6.1.3

找到1，4，9，16，...的生成函数。注意我们取1 = $_0$。

解。再次，我们引入序列 的生成函数。利用差分:

$$\begin{array}{rl} A &= 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots \\ - \quad xA &= 0 + x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots \\ \hline (1-x)A &= 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots \end{array}$$

由于 1 + 3 + 5 ^{2} + 7 ^{3} + · · · = 1 + (1 −)$_2$ 我们有 = 1 + (1 −)$_3$。

在上面的每个例子中，我们都找到了相邻项之间的差，这给了我们一个差分序列，而这个序列的生成函数是已知的。我们可以将这一思想推广到序列各项之间更复杂的关系。例如，如果我们知道该序列满足递推关系 $_n$ = 3 $_{n-1}$ − 2 $_{n-2}$? 换句话说，如果我们取序列中的一项，减去前一项的 3 倍，再加上再前一项的 2 倍，就会得到 0（因为 $_n$ − 3 $_{n-1}$ + 2 $_{n-2}$ = 0）。这一关系对序列中除前两项之外的所有项都成立。因此，在前两项之后，这些计算结果所形成的序列将是一个由 0 组成的序列，而我们显然知道它的生成函数。

示例 6.1.4

数列 1, 3, 7, 15, 31, 63, . . . 满足递推关系 $_n$ = 3 $_{n-1}$ − 2 $_{n-2}$。求该数列的生成函数。

解法。调用序列 的生成函数。我们有

$$\begin{array}{rl} A &= 1 + 3x + 7x^2 + 15x^3 + 31x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ -3xA &= 0 - 3x - 9x^2 - 21x^3 - 45x^4 - \cdots - 3a_{n-1}x^n - \cdots \\ + \quad 2x^2A &= 0 + 0x + 2x^2 + 6x^3 + 14x^4 + \cdots + 2a_{n-2}x^n + \cdots \\ \hline (1 - 3x + 2x^2)A &= 1 \end{array}$$

我们将 乘以−3 ，这会把每一项向右移动一位，并将它们乘以3。第三行中，我们将 乘以2 ^{2}，这会把每一项向右移动两位，并将它们乘以2。当我们把对应项相加时，我们对每一项执行：减去前一项的3倍，再加上再前一项的2倍。这将发生在 $_1$之后的每一项上，因为 $_n$ − 3 $_{n-1}$ + 2 $_{n-2}$ = 0。一般来说，我们可能有

生成级数开头的两个项，尽管在这种情况下第二项也恰好为 0。

现在我们只需要解出 ：

$$A = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2}.$$

6.1.3 乘法与部分和

当你将两个生成函数相乘时，序列会发生什么？让我们来看一看： $= {}_0 + {}_1 \; + {}_2 {}^2 + \cdots$； 以及 $= {}_0 + {}_1 \; + {}_2 {}^2 + \cdots$。要将 和 相乘，我们需要进行大量的分配（无限次的 FOIL？），但请记住，我们会把同类项合并，而且只需要写出前几项就能看出模式。常数项是 ${}_0 {}_0$。 的系数是 ${}_0 {}_1 + {}_1 {}_0$。依此类推。我们得到：

$$= {}_0 {}_0 + ({}_0 {}_1 + {}_1 {}_0) + ({}_0 {}_2 + {}_1 {}_1 + {}_2 {}_0) {}^2 + ({}_0 {}_3 + {}_1 {}_2 + {}_2 {}_1 + {}_3 {}_0) {}^3 + \cdots.$$

示例 6.1.5

“将”序列 1, 2, 3, 4, . . . 与序列 1, 2, 4, 8, 16, . . . “相乘”。解。新的常数项就是 1·1。下一项将是 1·2+2·1 = 4。再下一项：$1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11$。再来一项：$1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 26$。得到的序列是

$$1, 4, 11, 26, 57, \ldots.$$

由于序列 1, 2, 3, 4, ⋯ 的生成函数是 $\frac{1}{(1-x)^2}$，而序列 1, 2, 4, 8, 16, ⋯ 的生成函数是 $\frac{1}{1-2x}$，因此序列 1, 4, 11, 26, 57, ⋯ 的生成函数是 $\frac{1}{(1-x)^2(1-2x)}$。

考虑一个特殊情形：将一个序列乘以 1, 1, 1, ⋯⋯。例如，将 1, 1, 1, ⋯⋯ 与 1, 2, 3, 4, 5 ⋯⋯ 相乘。第一项是 $1 \cdot 1 = 1$。接着是 $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3$。然后是 $1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6$。下一项将是 10。我们得到的是三角数。更精确地说，我们得到的是序列 1 , 2, 3, 4, 5, ⋯⋯ 的部分和序列。从生成函数的角度来看，我们取 $\frac{1}{1-x}$ (生成 1, 1, 1, 1, 1 ⋯⋯) 的生成函数，并将其与 $\frac{1}{(1-x)^2}$ (生成 1, 2, 3, 4, 5, ⋯⋯) 的生成函数相乘，这就得到 $\frac{1}{(1-x)^3}$。这并不令人惊讶，因为我们之前已经为三角数找到了相同的生成函数。

关键在于，如果你需要为某个特定序列的前 项之和找到一个生成函数，并且你知道 *that* 序列的生成函数，你可以将其乘以 $\frac{1}{1-x}$。要从部分和序列回到原始序列，你需要考察差分序列。当你得到差分序列时，最终相当于乘以 1 − ，或者等价地，除以 $\frac{1}{1-x}$。乘以 $\frac{1}{1-x}$ 会得到部分和，除以 $\frac{1}{1-x}$ 会得到差分。

6.1.4 使用生成函数求解递归关系

我们以一个例子作为结尾，说明学习生成函数的众多理由之一是非常有帮助的。我们可以使用生成函数来解递推关系。

例 6.1.6

解这个递推关系 $_{n} = 3\ _{n-1} - 2\ _{n-2}$，初始条件为 $_{0} = 1$ 和 $_{1} = 3$。

解法。我们在上面的一个例子中看到，这个递推关系给出了序列 1, 3, 7, 15, 31, 63, . . .，其生成函数为 1 1 − 3 + 2 $_2$。我们通过将生成函数称为 ，然后计算 − 3 + 2 ^{2} 来实现这一点，这个结果就是 1，因为其他所有项都相互抵消了。

但是，知道生成函数如何帮助我们呢？首先，将生成函数分解为两个更简单的函数。为此，我们可以使用部分分式分解。首先对分母进行因式分解：

$$\frac{1}{1-3x+2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}.$$

部分分式分解告诉我们，可以将这个分式写成两个分式之和（我们对给定的分式进行分解）：

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x} \quad \text{for some constants } a \text{ and } b.$$

为求得 和 ，我们使用公分母将这两个分解后的分数相加。这将得到

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a(1-2x)+b(1-x)}{(1-x)(1-2x)}.$$

所以

$$1 = a(1-2x) + b(1-x).$$

这必须对所有的 值成立。如果 = 1，则方程变为 1 = − ，因此 = −1。当 = $\frac{1}{2}$ 时，我们得到 1 = /2，因此 = 2。这告诉我们我们可以像这样分解分数：

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x}.$$

这完成了部分分式分解。注意，这两个分式是我们已知的生成函数。实际上，我们应该能够展开它们每一个。

$$\frac{-1}{1-x} = -1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - \cdots \text{ which generates } -1, -1, -1, -1, -1, \ldots.$$

$2\,1 - 2 \;= 2 + 4 \;+ 8\;^2 + 16\;^3 + 32\;^4 + \cdots$生成 2, 4, 8, 16, 32, ...

我们可以给出这些数列中第 项的闭式公式。第一个只是$_n = -1$。第二个是 $_n = 2^{n+1}$。我们感兴趣的数列只是它们的和，所以递推关系的解是

$$a_n = 2^{n+1} - 1.$$

我们现在可以将生成函数加入到求解递推关系的方法列表中。

6.1.5 练习

1. 通过将它们与已知生成函数的序列联系起来，找到以下每个序列的生成函数。

(a) 4, 4, 4, 4, 4, ... (b) 2, 4, 6, 8, 10, ... (c) 0, 0, 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... (d) 1, 5, 25, 125, ... (e) 1, −3, 9, −27, 81, ... (f) 1, 0, 5, 0, 25, 0, 125, 0, ... (g) 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 5, ...

2. 找到由以下生成函数生成的数列：

(a) 4 1 。 (b) 1 1 − 4 。 (c) 1 + 。 (d) 3 (1 +)$_2$。 (e) 1 + + ^{2}1 −)^2 (提示：乘法)。 (

3. 展示如何通过三种不同的方法得到三角数的生成函数：

(a) 对生成函数 1, 1, 1, 1, 1, . . . 进行两次求导

(b) 使用差分。

(c) 乘以两个已知的生成函数。

4. 使用差分法找到 4, 5, 7, 10, 14, 19, 25, . . . 的生成函数。

5. 寻找具有递推关系 $_n = 3 _{n-1} - _{n-2}$ 的数列的生成函数，初始项为 $_0 = 1$ 和 $_1 = 5$。

6. 利用斐波那契数的递推关系求斐波那契数列的生成函数。

7. 使用乘法求斐波那契数部分和序列的生成函数，$_0$，$_1$，$_2$, . . .，其中 $_0 = _0$，$_1 = _0 + _1$，$_2 = _0 + _1 + _2$，$_3 = _0 + _1 + _2 + _3$，等等。

8. 找到具有闭式公式 $_n = 2(5^n) + 7(-3)^n$ 的序列的生成函数。

9. 找到生成函数为 3 1 − 4 + 1 1 − 的数列第 项的闭式。

10. 求具有生成函数 2 (1 −)$_2$ · 1 − − $_2$ 的序列的 $_7$。

11. 解释我们如何知道 1 (1 −)$_2$ 是 ~~1, 2, 3,~~ 4, ... 的生成函数。

12. 从序列 1, 2, 3, 4, ⋯ 的生成函数出发，求下列各个序列的生成函数。

（a）1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, ... b）1, −2, 3, −4, 5, −6, ... c）0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... d）0, 3, 9, 18, 30, 45, 63, ... （提示：将该序列与前一个联系起来。）

13. 你可以假设 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . . 的生成函数是 1 1 − − 2 (因为确实如此~~)。利用这~~一事实，求下面每个生成函数所生成的序列。

(a) $\frac{x^2}{1-x-x^2}$。 (b) $\frac{1}{1-x^2-x^4}$。 (c) $\frac{1}{1-3x-9x^2}$。(d) $\frac{1}{(1-x-x^2)(1-x)}$。

14. 求序列 1, −2, 4, −8, 16, ⋯ 的生成函数。

15. 求序列 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . 的生成函数。

16. 假设 是序列 3, 5, 9, 15, 23, 33, . . . 的生成函数。

（a）求相邻项差的序列的生成函数（用 表示）。 b）写出相邻项差的序列，并求其生成函数（不涉及 ）。 c）利用（a）和（b）的结果，求原序列的生成函数。

6.2 数论简介

我们已经使用自然数来解决问题。在离散数学中，这是一个正确的数字集合，因为我们总是处理一定数量的事物。自然数一直是一个工具。现在，让我们花一点时间来检查这个工具。我们能从自然数本身发现什么数学规律呢?

这是数论的主要问题：数论是数学中一个庞大、古老、复杂，而且最重要的是美丽的分支。从历史上看，数论被称为“数学女王”，并且在很大程度上属于*pure*数学，是为自身而研究的，而不是作为理解现实世界应用的手段。然而，近年来这种情况已经发生了变化，数论的应用不断被发掘。其中最为人所熟知的例子，可能就是RSA密码学，它是互联网上用于加密数据的方法之一。正是数论使这一切成为可能。

什么样的问题属于数论的范畴？这里有一个激励性的例子。回想我们在研究数学归纳法时，曾问过：

哪些邮资金额可以只使用5美分和8美分的邮票精确凑出?

我们已经能够证明，任何大于27美分的 *any* 金额都可以被凑出。你可能会想，如果我们改变邮票的面值会发生什么。如果我们改用4美分和9美分的邮票呢？是否会存在一个界限，使得超过该金额后所有金额都可以被凑出？那么，再次地，我们可以用一张9美分的邮票替换两张4美分的邮票，或者用七张4美分的邮票替换三张9美分的邮票。在每一种情况下，我们都可以多凑出1美分的邮资。将此作为归纳步骤，我们就可以证明，任何大于23美分的邮资金额都可以被凑出。

如果我们有 2 分和 4 分的邮票，会怎样呢？在这里看起来不太有希望。如果我们取若干张 2 分邮票和若干张 4 分邮票，我们能对总额说些什么呢？它可能会是奇数吗？看起来不太可能。

Why 5和8有效，4和9有效，但2和4无效吗？这些数字有什么特殊之处？如果我给你一对数字，你能立刻告诉我它们是否有效吗？我们将在首先研究一些数字本身的简单性质后，回答这些问题，以及更多问题。

6.2.1 可除性

加法和乘法对自然数来说都很容易。如果我们把注意力扩展到所有整数，那么减法也同样容易（我们需要负数，这样就可以从任何一个数中减去任何另一个数，甚至可以用较小的数去减较大的数）。除法是第一个带来挑战的运算。如果我们想要扩展我们的数集，使任何除法都成为可能（也许要排除除以 0），那就需要考虑有理数（即所有可以写成分数的数的集合）。这将走得太远，因此我们拒绝这个选项。

事实上，并不是每个数都能被其他数整除，这是一件好事。这有助于我们理解自然数的结构，并为许多有趣的问题和应用打开了大门。

如果给定数字 和 ，可能会有÷ 得到一个整数。在这种情况下，我们说 *divides* ；用符号表示，我们写作 | 。如果成立，那么 是 的除数或因子， 是 的倍数。换句话说，如果 | ，那么 = ，对于某个整数 （这表示 是 的某个倍数）。

整除关系。

给定整数 和 ，我们称“ 整除 ”，并记作

$$m \mid n$$

假设 ÷ 是一个整数。因此，下列断言表示同一件事：

1. | 。
2. = 对于某个整数 。
3. 是 的因子（或除数）。 4
. 是 的倍数。

注意到 | 是一个命题。它要么为真，要么为假。另一方面， ÷ 或 / 是某个数字。如果我们想声明 / 不是整数，因此 不整除 ，那么我们可以写 ∤ 。

示例 6.2.1

判断下列每个陈述是对还是错。

1. $4 \mid 20$
2. $20 \mid 4$
3. $0 \mid 5$
4. $5 \mid 0$
5. $7 \mid 7$
6. $1 \mid 37$
7. $-3 \mid 12$
8. $8 \mid 12$
9. $1642 \mid 136299$

解答。

1. 正确。4“可以整除”20五次，且没有余数。换句话说，$20 \div 4 = 5$，这是一个整数。我们也可以通过说20是4的倍数来证明这一点：$20 = 4 \cdot 5$。

2. 错误。虽然 20 是 4 的倍数，但 4 是一个 mult 这一说法是错误的20的倍数。

3. 错误。$5 \div 0$ 甚至都未定义，更不用说是整数了。

4. 正确。事实上，对所有 都有 | 0。因为 0 是每个数字的倍数：0 = · 0 。 5. 正确。事实上，对所有 都有 | 。6. 正确。1 能整除所有数字（除了 0）。 7. 正确。负数在可整除关系中同样适用。这里 12 = − 3 · 4。3 | − 12 也成立，并且 − 3 | − 12 也成立。 8. 错误。8 和 12 都能被 4 整除，但这并不意味着 12 能被 8 整除。 9. 错误。见下文。

这个最后的例子提出了一个问题：如何判断 | ？当然，如果你有一个可信的计算器，你可以询问它 ÷ 的值。如果它输出的不是整数，你就知道 ∤ 。然而，这有点像作弊：我们没有除法，那么我们真的应该用除法来检查可除性吗?

虽然我们不完全知道如何进行除法，但我们知道如何进行乘法。我们可以尝试将 乘以越来越大的数字，直到接近 。多接近呢？嗯，我们希望确保如果我们将 乘以下一个更大的整数时，结果会超过 。

例如，我们来尝试这个，决定 1642 | 136299。开始找 1642 的倍数：

$$1642 \cdot 2 = 3284 \qquad 1642 \cdot 3 = 4926 \qquad 1642 \cdot 4 = 6568 \qquad \cdots.$$

这些都远小于136299。我猜我们可以稍微跳 ahead 一点：

$$1642 \cdot 50 = 82100 \qquad 1642 \cdot 80 = 131360 \qquad 1642 \cdot 85 = 139570.$$

啊，所以我们需要查看80到85之间的数字。试试83：

$$1642 \cdot 83 = 136286.$$

这是我们能做到的最好吗？我们距离目标136299还差多少？如果我们相减，得到136299 − 136286 = 13。所以我们知道不能达到84；那样会太多。换句话说，我们已经发现

$$136299 = 83 \cdot 1642 + 13.$$

自1642年13<以来，我们现在可以安全地说1642年∤ 136299。

原来我们上面经历的过程可以对任何一对数字重复。我们总是可以将数字 写成数字 的某个倍数加上某个余数。我们之所以知道这一点，是因为我们从小学就学过带余数的除法。这只是用乘法来表达的方式。由于可以用过程来找到余数，这个事实通常被称为除法算法：

除法算法

给定任意两个整数 和 ，我们总能找到一个整数 ，使得

$$a = qb + r$$

其中 是一个整数，满足 0 ≤ < | |

这个想法是我们可以总是取足够大的 的倍数，使得余数 尽可能小。我们确实允许 = 0 的情况，在这种情况下我们有 | 。

6.2.2 余数类

除法算法告诉我们，当除以 时，只有 种可能的余数。如果我们固定这个除数，我们可以按余数对整数进行分组。每个组称为模 的余数类（有时也叫做剩余类）。

示例 6.2.2

描述模5的剩余类。

解答。我们想根据一个数被 5 除时的余数来对数进行分类。根据除法算法，我们知道将恰好有 5 个余数类，因为 只有 5 种可能的取值（0 ≤ < 5）。

首先考虑 = 0。这里我们在寻找所有能被 5 整除的数，因为 = 5 + 0。换句话说，5 的倍数。我们得到一个无限集合

$$\{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}.$$

注意我们也包括负整数。

接下来考虑 = 1。当整数除以 5 时，哪些数的余数为 1？嗯，显然 1 有余数 1，6 也有，11 也有。负数呢？这里我们需要小心：−6 并没有余数 1。我们可以写 −6 = −2 · 5 + 4 或 −6 = −1 · 5 − 1，但这其中只有一个是“正确”的除法算法实例： = 4，因为我们需要 为非负数。所以实际上，为了得到 = 1，我们会有 −4，或者 −9，等等。因此我们得到了余数类

$$\{\ldots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}.$$

还剩下三个。2、3 和 4 的余数类分别是

$$\{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \ldots\}$$
$$\{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, \ldots\}$$
$$\{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, 24, \ldots\}.$$

注意在上面的例子中，*every* 整数恰好属于一个余数类。用技术性的说法是，模 的余数类构成了整数的一个划分。[1] 关于划分最重要的事实是，可以从一个划分定义出一个等价关系：这是一种定义在数对之间的关系，在所有重要方面都像“等于”关系那样起作用。[2]

抛开那些有趣的技术性语言不谈，这个想法其实非常简单。如果两个数属于同一个余数类，那么在某种意义上，它们是相同的。也就是说，它们在 *up to division by* 下是相同的。在上面 = 5 的情况下，数字 8 和 23 虽然不是同一个数，但在除以 5 时是相同的，因为它们的余数都是 3。

除数是什么很重要：在模 5 的意义下，8 和 23 是相同的，但在模 7 的意义下则不同，因为 8 除以 7 的余数是 1，而 23 除以 7 的余数是 2。

考虑到这些，我们引入一些符号。我们想说8和23基本上是相同的，尽管它们并不相等。说8 = 23是错误的。相反，我们写8 ≡ 23。但这并不总是成立。当我们考虑按5进行除法时，它是成立的，因此我们需要以某种方式表示这一点。我们实际上写的是：

$$8 \equiv 23 \pmod{5}$$

读作“8 与 23 在模 5 意义下同余”（或简称“模 5”）。当然，接着我们可以观察到

$$8 \not\equiv 23 \pmod{7}.$$

模 n 同余。

我们说 对 取模 同余，并写作，

$$a \equiv b \pmod{n}$$

假设 和 被 除时具有相同的余数。换言之，假设 和 属于模 的同一剩余类。

许多书对模 的同余给出了略有不同的定义。它们说，当且仅当 | − 时， ≡ (mod)。换句话说，如果两个数的差是 的倍数，那么这两个数在模 意义下是同余的。那么哪一种定义是正确的呢？事实证明这并不重要；它们是等价的。

为了解释原因，考虑两个数 和 ，它们在模 意义下同余。于是 和 在被 除时具有相同的余数。我们有

$$a = q_1 n + r \qquad b = q_2 n + r.$$

[1]It is possible to develop a mathematical theory of partitions, prove statements about all partitions in general, and then apply those observations to our case here.

[2]Again, there is a mathematical theory of equivalence relations which applies in many more instances than the one we look at here. See Subsection 2.6.4.

这里这两个 确实是相同的。考虑当我们取 和 的差时会得到什么：

$$a - b = q_1 n + r - (q_2 n + r) = q_1 n - q_2 n = (q_1 - q_2)n.$$

所以 − 是 的倍数，或者等价地， | − 。

另一方面，如果我们先假设 | − ，因此 − = ，那么考虑当我们把每一项都除以 会发生什么。将 除以 会留下某个余数，将 除以 也会如此。然而，将 除以 将留下 0 的余数。因此，左边的余数必须相互抵消。也就是说，余数必须相同。

因此我们有：

同余与整除。

对于任意整数 、 和 ，我们有

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{if and only if} \quad n \mid (a - b).$$

在同余式与普通等式之间来回切换也将很有用。上述事实对此有所帮助。我们知道，当且仅当 | − 时，有 ≡ (mod)；当且仅当存在某个整数 ，使得 − = 。将该等式重新排列，得到= + 。换句话说，如果与 在模 下同余，那么 等于 加上某个 的倍数。这与我们先前的观察一致：某一特定余数类中的所有数都比 的各个倍数大同样的量。

全等与相等。

对于任意整数 、 和 ，我们有

≡ (mod) 当且仅当 = + ，对某个整数 。

6.2.3 同余的性质

我们之前说过，模 的同余在许多重要方面与相等的行为方式相同。具体来说，我们可以证明模 的同余是一个等价关系，这需要检查以下三个事实：

模 的同余是一个等价关系。

给定任意整数 、 和 ，以及任意正整数 ，以下结论成立：

1. ≡ （模 ）。
2. 如果 ≡ (mod)，那么 ≡ (mod)。

3. 如果 ≡ (mod) 且 ≡ (mod)，则 ≡ (mod)。

换言之，模 的同余是自反的、对称的和传递的，因此它是一个等价关系。

你应该花点时间说服自己，上述每一条性质在同余关系下确实成立。尝试分别使用余数的定义和整除的定义来解释每一条性质。

接下来，考虑在进行基本算术运算时同余的性质如何表现。我们已经知道，如果用两个同余的数相减，结果将同余于 0（即是 的倍数）。如果把一个同余于 1 的数与一个同余于 2 的数相加，会怎样呢？我们会得到一个同余于 3 的数吗？

同余与算术。

设 ≡ (mod)，且 ≡ (mod)。则下列成立：

1. + ≡ + （模 ）。
2. − ≡ − （模 ）。
3. ≡ （模 ）。

上述事实可能写得有些奇怪，但思想很简单。如果我们有一个成立的同余，并且在两边加上同样的东西，结果仍然是一个成立的同余。这听起来就像是在说：

如果 ≡ (mod)，则 + ≡ + (mod)。

当然这也是真的；这是 = 的特殊情形。但我们所得到的结论在更一般的情况下也成立。把同余看作“基本相等”。如果我们有两个基本相等的数，并且在两边加上基本相同的东西，结果仍将基本相等。

这看起来很合理。真的如此吗？让我们证明第一个事实：

证明。假设 ≡ (mod)，且 ≡ (mod)。这意味着 = + ，且= + ，其中 和 为整数。将这些等式相加：

$$a + c = b + d + kn + jn.$$

但是 + = (+) ，这只是 的一个倍数。因此 + = + + (+) ，换句话说， + ≡ + (mod)。

另外两个事实可以用类似的方法证明。

关于同余的这些事实的一个重要推论是，我们基本上可以在一个同余式中把任何一个数替换为与它同余的任何其他数。下面通过一些例子来看看这是如何（以及为什么）成立的：

示例 6.2.3

求3491除以9的余数。

解答。我们可以做长除法，但还有另一种方法。我们想找到 ，使得 $\equiv 3491 \pmod 9$。现在 $3491 = 3000 + 400 + 90 + 1$。当然，$90 \equiv 0 \pmod 9$，所以我们可以把和中的 90 替换为 0。为什么这样做是可以的？实际上我们是从两边减去了"相同"的东西：

$$\begin{aligned} x &\equiv 3000 + 400 + 90 + 1 \pmod 9 \\ -\quad 0 &\equiv 90 \pmod 9 \\ x &\equiv 3000 + 400 + 0 + 1 \pmod 9. \end{aligned}$$

接下来，注意到 $400 = 4 \cdot 100$，而 $100 \equiv 1$（mod 9）（因为 $9 \mid 99$）。因此我们实际上可以把 400 简单地替换为 4。再次，我们是在诉诸这样一个主张：我们可以替换同余的元素，但实际上我们是在诉诸关于同余算术的性质 3：我们知道 $100 \equiv 1$（mod 9），因此如果把等式两边都乘以 4，就得到 $400 \equiv 4$（mod 9）。

同样地，我们可以用 3 替换 3000，因为 $1000 = 1 + 999 \equiv 1 \pmod 9$。因此，我们原来的同余式变为

$$x \equiv 3 + 4 + 0 + 1 \pmod 9$$

$$x \equiv 8 \pmod 9.$$

因此，3491 除以 9 的余数是 8。

上述例子应该会使你相信，著名的 9 的整除判别法是正确的：一个数的各位数字之和能被 9 整除，当且仅当原数能被 9 整除。事实上，我们现在还知道更多：任意一个数与其各位数字之和在模 9 意义下同余。[3]

我们再试一个。

例 6.2.4

求3^{123}除以7的余数。

解答。当然，我们在处理同余，因为我们想要找到最小的正 ，使得 $\equiv 3^{123} \pmod 7$。现在先写 $3^{123} = (3^3)^{41}$。我们有：

$$3^{123} = 27^{41} \equiv 6^{41} \pmod 7,$$

由于 $27 \equiv 6 \pmod 7$。进一步注意到 $6^2 = 36$ 与 1 在模 7 下同余。因此我们可以进一步简化：

$$6^{41} = 6 \cdot (6^2)^{20} \equiv 6 \cdot 1^{20} \pmod 7.$$

[3]This works for 3 as well, but definitely not for any modulus in general.

但是 $1^{20} = 1$，所以我们完成了：

$$3^{123} \equiv 6 \pmod{7}.$$

在上述示例中，我们利用了这样一个事实：如果 ≡ (mod)，那么 $^p \equiv$ ^{p} (mod)。这只是多次应用性质 3。

到目前为止，我们已经看到如何在同余下进行加法、减法和乘法。那么除法呢？我们之所以一直等到现在才讨论它，是有原因的。事实证明，我们不能简单地进行除法。换句话说，即使 ≡ (mod)，我们也不能知道 ≡ (mod)。例如，考虑

$$18 \equiv 42 \pmod{8}.$$

这是真的。现在18和42都能被6整除。然而，

$$3 \not\equiv 7 \pmod{8}.$$

虽然这行不通，但注意到 $3 \equiv 7 \pmod{4}$。我们不能用 6 去除 8，但可以用 8 和 6 的最大公因数去除 8。这种情况总会发生吗？

假设 ≡ (mod)。换句话说，对某个整数 ，我们有 = + 。当然， 能被 整除， 也是如此。因此， 也必须能被 整除。现在，如果 和 没有除 1 以外的公因子，那么我们必须有 | 。但一般来说，如果我们试图用 去除 ，并不能保证得到的是 的整数倍，其中一部分 也可能被约掉。为了稳妥起见，我们先尽可能多地从 中除去因子。取 和 的最大公因子，并把它从 中约掉。这样， 剩余的因子将来自于 ，这完全没有问题。

我们将把 和 的最大公约数称为 gcd(,)，对于 *greatest common divisor*。在上面的例子中，$\gcd(6, 8) = 2$，因为 6 和 8 的最大公约数是 2。

同余与除法。

假设 ≡ (模)。则 ≡ (模 $\frac{n}{\gcd(d,n)}$)。
如果 和 没有公共因子，则 gcd(,) = 1，因此 ≡ (mod)。

例子 6.2.5

简化以下同余式使用除法：(a) $24 \equiv 39 \pmod{5}$ 和 (b) $24 \equiv 39 \pmod{15}$。

解答。(a) 24 和 39 都能被 3 整除，而 3 和 5 没有公因子，因此我们得到

$$8 \equiv 13 \pmod{5}.$$

(b) 再次，我们可以除以 3。然而，盲目地这样做会得到 $8 \equiv 13 \pmod{15}$，这已经不再成立。相反，我们还必须对模数进行除法操作。

将15除以3和15的最大公因数，即3。我们再次得到

$$8 \equiv 13 \pmod 5.$$

6.2.4 解同余

既然我们已经有了一些用于支配同余关系的代数规则，我们就可以尝试在一个同余式中求解未知数。例如，是否存在一个满足下式的 ，

$$3x + 2 \equiv 4 \pmod 5,$$

如果是的话，它是什么?

在这个例子中，由于模数较小，我们可以简单地尝试每个可能的 值。实际上只有 5 个值需要考虑，因为任何满足同余的整数都可以用与其模 5 同余的其他整数替代。在这里，当 $= 4$ 时，我们得到 $3 + 2 = 14$，这确实对模 5 同余 4。这意味着 $= 9$ 和 $= 14$ 以及 $= 19$ 等也将是解，因为正如我们上面所看到的，在同余中替换任何数字为一个同余的数字并不会改变同余的真实性。

因此在这个例子中，只需对 $\in$ 取 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$，计算 $3 + 2$。这样分别得到 2、5、8、11 和 14，其中只有 14 与 4 同余。

让我们也看看如何使用我们关于同余代数的规则来解决这个问题。如果模数更大，这种方法会比试错策略简单得多。首先，我们知道可以在等式两边都减去 2:

$$3x \equiv 2 \pmod 5.$$

然后为了将两边同时除以 3，我们先在两边都加上 0。当然，在右边，我们希望这个 0 是 10（是的，10 的确等于 0，因为它们在模 5 意义下同余）。这就得到，

$$3x \equiv 12 \pmod 5.$$

现在将两边同时除以3。由于 $\gcd(3, 5) = 1$，我们不需要改变模数:

$$x \equiv 4 \pmod 5.$$

注意到这实际上给出了*general solution*：不仅 可以4，而且 可以是任何与4同余的数。我们可以保持这样，或者写成“ $= 4 + 5$ ，其中 为任意整数。”

例 6.2.6

解下列同余方程，求 。

1. $7 \equiv 12$（模13）。
2. $84 - 38 \equiv 79$（模 15）。

3. $20 \equiv 23$（模 14）。

解答。

1. 我们在这里只需要把等式两边都除以 7。我们不断地在右边加上 13，直到得到一个 7 的倍数（加 13 等同于加 0，所以这是允许的）。我们得到 25、38、51、64、77——找到了。因此我们有：

$$7x \equiv 12 \pmod{13}$$
$$7x \equiv 77 \pmod{13}$$
$$x \equiv 11 \pmod{13}.$$

2. 这里，由于我们有大于模数的数，在应用任何代数运算之前可以先将它们化简。我们有 $84 \equiv 9$，$38 \equiv 8$，以及 $79 \equiv 4$。因此，

$$84x - 38 \equiv 79 \pmod{15}$$
$$9x - 8 \equiv 4 \pmod{15}$$
$$9x \equiv 12 \pmod{15}$$
$$9x \equiv 72 \pmod{15}.$$

我们通过在同余式两边加上 $0 \equiv 60 \pmod{15}$ 得到了 72。现在将两边同时除以 9。然而，由于 $\gcd(9, 15) = 3$，我们也必须将模数除以 3：

$$x \equiv 8 \pmod{5}.$$

因此，解是那些模 5 同余于 8，或者等价地，同余于 3 的值。这意味着从某种意义上说，模 15 有 3 个解：3、8 和 13。我们可以将解写为：

$$x \equiv 3 \pmod{15};\ x \equiv 8 \pmod{15};\ x \equiv 13 \pmod{15}.$$

3. 首先，对 14 取模：

$$20x \equiv 23 \pmod{14}$$
$$6x \equiv 9 \pmod{14}.$$

我们现在可以将等式两边同时除以 3，或者尝试将 9 增加 14 的倍数以得到 6 的倍数。如果我们除以 3，就得到，

$$2x \equiv 3 \pmod{14}.$$

现在尝试在 3 上加上 14 的倍数，希望得到一个可以被 2 整除的数。这是行不通的！每次我们在右边加上 14，结果仍然是奇数。我们永远得不到一个偶数，因此也永远无法除以 2。因此，这个同余方程没有解。

上面的最后一个同余说明了同余方程可能没有解的情形。事实上，我们本可以立刻看出这一点。看看原来的同余：

$$20x \equiv 23 \pmod{14}.$$

如果我们将其写成一个方程，就得到

$$20x = 23 + 14k,$$

或者等价地，20 − 14 = 23。我们可以很容易地看出这个方程在整数中没有解。左边始终是偶数，而右边是奇数。如果右边能被 *any* 整除而左边不能，也会出现类似的问题。

因此一般来说，给定同余式

$$ax \equiv b \pmod{n},$$

如果 和 都能被某个 不能整除的数整除，那么将不存在解。事实上，我们实际上只需要检查 和 的一个除数：最大公约数。因此，更简洁的表述是：

无解的同余方程。

如果 gcd(,) ∤ ，则 ≡ (mod) 没有解。

6.2.5 线性丢番图方程的求解

离散数学研究由整体数量构成的对象。因此，当我们想要解方程时，通常是在寻找 *integer* 解。那些旨在只具有整数解的方程最早在第三世纪由希腊数学家亚历山大的丢番图进行研究，因此被称为 *Diophantine equations*。也许最著名的丢番图方程例子是 $^2 + {}^2 = {}^2$。该方程的整数解被称为勾股三元组。一般来说，求解丢番图方程是困难的（事实上，已经证明不存在一种通用算法可以判定一个丢番图方程是否有解，这一结果被称为马季亚谢维奇定理）。我们将把注意力限制在 *linear* 丢番图方程上，它们要容易处理得多。

丢番图方程。

含有两个或更多变量的方程，如果只关注整数解，则称为丢番图方程。线性丢番图方程具有如下形式 $_1 {}_1 + {}_2 {}_2 + \cdots + {}_n {}_n =$ ，其中常数为 $_1, \ldots, {}_n$ ， 。

丢番图方程的一个解是指该方程中仅由整数组成的解。

我们已经具备了解决线性丢番图方程所需的工具。我们将以该方程作为主要示例进行讨论

$$51x + 87y = 123.$$

总体策略将是把方程转化为同余式，然后解这个同余式。[4] 让我们通过这个具体的例子来看看可能如何进行。

首先，检查是否可能没有解，因为 51 和 87 的一个公因数不是 123 的因数。实际上，我们只需要检查 $\gcd(51, 87) \mid 123$ 是否成立。这个最大公因数是 3，而且是的，$3 \mid 123$。到这一步，我们不妨把这个最大公因数提取出来。因此，改而求解：

$$17x + 29y = 41.$$

现在注意到，如果存在解，那么对于这些　和　的取值，无论我们用什么去除，等式两边都必须具有相同的余数。特别地，如果我们把等式两边都除以 17，就必须得到相同的余数。因此我们可以放心地写道

$$17x + 29y \equiv 41 \pmod{17}.$$

我们选择17，因为17　的余数为0。这将使我们能够将同余式简化为一个变量。我们也可以选择模29的同余式，尽管通常有充分的理由选择较小的数，因为这将使我们能够简化另一个系数。在我们的例子中，我们按如下方式简化同余式：

$$\begin{aligned} 17x + 29y &\equiv 41 \pmod{17} \\ 0x + 12y &\equiv 7 \pmod{17} \\ 12y &\equiv 24 \pmod{17} \\ y &\equiv 2 \pmod{17}. \end{aligned}$$

现在在这一点上，我们知道　$= 2 + 17$　对任意整数　都成立。如果我们没有犯错，我们应该能够把它代回我们原来的丢番图方程中来求　：

$$\begin{aligned} 17x + 29(2 + 17k) &= 41 \\ 17x &= -17 - 29 \cdot 17k \\ x &= -1 - 29k. \end{aligned}$$

我们现在已经找到了所有的丢番图方程的解。对于每个　，　$= -1 - 29$　和　$= 2 + 17$　将满足方程。我们可以检查几个案例。如果　$= 0$，解为 $(-1, 2)$，并且是的，$-17 + 2 \cdot 29 = 41$。如果　$= 3$，解为 $(-88, 53)$。如果　$= -2$，我们得到 $(57, -32)$。

总结这个过程，要解　+　=　，我们，

[4]This is certainly not the only way to proceed. A more common technique would be to apply the **Euclidean algorithm**. Our way can be a little faster, and is presented here primarily for variety.

1. 将方程两边都除以 gcd(,)（如果这没有使右边成为整数，则没有解）。假设 + = 已经以这种方式简化。

2. 选择 和 中较小的一个（这里假设是 ），并转换为模 的同余式：

$$ax + by \equiv c \pmod{b}.$$

这将化简为一个只含一个变量 的同余式：

$$ax \equiv c \pmod{b}.$$

3. 如我们在上一节中所做的那样，解这个同余式。将你的解写成方程，例如，

$$x = n + kb.$$

4. 将其代入原来的丢番图方程，并求解 。

5. 如果我们想知道某一特定范围内的解（例如，0 ≤ , ≤ 20），就选取不同的 值，直到得到所有所需的解。

这里是另一个例子：

示例 6.2.7

如何仅使用5美分和8美分的邮票凑出$6.37？你可能使用的邮票数量的最小值和最大值分别是多少？

解法。首先，我们需要一个丢番图方程。我们将在分币单位下进行计算。设 为 5 分邮票的数量， 为 8 分邮票的数量。我们有：

$$5x + 8y = 637.$$

转化为同余并求解：

$$\begin{aligned} 8y &\equiv 637 \pmod{5} \\ 3y &\equiv 2 \pmod{5} \\ 3y &\equiv 12 \pmod{5} \\ y &\equiv 4 \pmod{5}. \end{aligned}$$

因此 = 4 + 5 。然后5 + 8(4 + 5) = 637，所以 = 121 − 8 。

这表明，凑成 6.37 的一种方法是使用 121 枚 5 美分邮票和 4 枚 8 美分邮票。为了找到邮票数量的最小值和最大值，尝试不同的 值。

k	(x, y)	Stamps
-1	(129, -1)	not possible
0	(121, 4)	125
1	(113, 9)	122
2	(105, 13)	119
⋮	⋮	⋮

这不足为奇。拥有最多邮票意味着我们拥有尽可能多的5分邮票，而要得到最少的邮票数量，则需要拥有最少的5分邮票。为了最小化5分邮票的数量，我们希望选择 ，使得121 − 8 尽可能小（但仍为正）。当 = 15时，我们得到 = 1 和 = 79。

因此，为了凑成 $6.37，你可以最少使用 80 枚邮票（1 枚 5 美分邮票和 79 枚 8 美分邮票），也可以最多使用 125 枚邮票（121 枚 5 美分邮票和 4 枚 8 美分邮票）。

使用这种方法，只要你能够解一元线性同余方程，就可以解二元线性丢番图方程。不过，有时解线性同余方程会非常繁琐。例如，假设你需要解，

$$13x \equiv 6 \pmod{51}.$$

你*could*不断在右边加上51，直到得到13的倍数：你会得到57、108、159、210、261、312，而312是其中第一个能被13整除的。这个方法可行，但工作量实在太大。相反，我们可以把*back*转化为一个丢番图方程：

$$13x = 6 + 51k.$$

现在像本节中那样求解 *this*。将其写成模 13 的同余：

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 6 + 51k \pmod{13} \\ -12k &\equiv 6 \pmod{13} \\ 2k &\equiv -1 \pmod{13} \\ 2k &\equiv 12 \pmod{13} \\ k &\equiv 6 \pmod{13}. \end{aligned}$$

所以 = 6 + 13 。现在回过头来求出 ：

$$\begin{aligned} 13x &= 6 + 51(6 + 13j) \\ x &= 24 + 51j. \end{aligned}$$

当然，你可以在同余式和丢番图方程之间来回切换，想切换多少次都可以。如果你 *only* 使用了这种技术，

你本质上是在复制欧几里得算法，这是一种更标准的解二次方程的方法。

6.2.6 练习

1. 设 、 和 是整数。证明：如果 | ，则 | 。2. 设 、 和 是整数。证明：如果 | 且 | ，则 | + 且 | − 。3. 写出 $= 4$ 的余数类。 4. 使得 16 和 25 属于同一模 的余数类的最大 是多少？写出它们共同所属的余数类，并给出一个大于 100 且属于该余数类的数的例子。 5. 设 、 、 、和 为整数。证明：如果 ≡ (mod) 且 ≡ (mod)，则 − ≡ − (mod)。

6. 求 3^{456} 当被除以时的余数

（a）2。（b）5。（c）7。（d）9。

7. 重复前一个练习，这次除以 2^{2019}。

8. 确定以下哪些同余式有解，并通过试错法找到任何解（在0和模数之间）。

（a）4 ≡ 5（模 6）。（b）6 ≡ 3（模 9）。（c） $^2 \equiv 2$（模 4）。

9. 判定下列同余式中哪些有解，并通过试探法找出其解（在 0 与模数之间）。

（a）4 ≡ 5（模 7）。（b）6 ≡ 4（模 9）。（c） $^2 \equiv 2$（模 7）。

10. 解同余：5 + 8 ≡ 11 (mod 22)。也就是说，描述一般解。

11. 解同余式：6 ≡ 4 (mod 10)。

12. 解这个同余：4 ≡ 24 (mod 30)。

13. 解这个同余式：341 ≡ 2941 (模 9)。

14. 我在想一个数字。如果你将我的数字乘以7，加上5，然后将结果除以11，你会得到余数2。如果你将我的原始数字除以11，你会得到什么余数？

15. 使用模算术求解下列线性丢番图方程（描述其通解）。

$$6x + 10y = 32.$$

16. 使用模算术解以下线性丢番图方程（描述一般解）。

$$17x + 8y = 31.$$

17. 使用模运算求解以下线性丢番图方程（描述一般解）。

$$35x + 47y = 1.$$

18. 你有一个13盎司的瓶子和一个20盎司的瓶子，想要精确测量2盎司的水。然而，你的水源有限。如果水进入任意一个瓶子并被倒掉，它就永远消失了。你最少需要多少水才能开始并完成这个任务?

SELECTED HINTS

1 · 逻辑与证明 1.1 · 数学命题 1.1.6 · 额外练习

1.1.6.3. 首先理解每个陈述的含义。对于 (c) 部分，不需要假设论域是一个无限集。

1.2 · 推论 1.2.6 · 附加练习

1.2.6.4. 当然，存在许多答案。假设该陈述为真，并且逆命题为 *not* 真是有帮助的。思考这在现实世界中的意义，然后开始用不同的方式表达它。一些思路：使用“必要且充分”的语言，使用“仅当”表达，考虑否定，使用“否则”语言。

1.3 · 逻辑规则 1.3.8 · 附加练习

1.3.8.1. 你可能可以通过手动推理这些情况，但试着做一个真值表。使用两个命题，表示“我们是表亲”，表示“我们都是骗子”。

1.3.8.4. 你应该使用符号 、 、 、写下三个陈述。如果 Geoff 是个诚实者，那么这三个陈述都为真。如果他是个说谎者，那么这三个陈述都为假。但无论哪种情况，我们还不知道这四个原子陈述是对还是错，因为他还没有单独陈述它们。

真值表可能会有所帮助，尽管它可能并非完全必要。

1.3.8.8.

(a) 将有三行使该陈述为假。 (b) 考虑这三行结果为假的情况，并说明在这些行中 、 和 的真值是什么。 (c) 你要寻找一行，其中 为真且整个陈述为真。

1.3.8.9. 写下三个陈述，然后对每一个取否定（因为他是个说谎者）。你应该会发现汤米吃了一样东西并喝了一样东西。（ 代表黄瓜三明治。）

1.3.8.11. 就真值表而言，这些概念意味着什么?

1.3.8.14. 尝试一个例子。如果 ( ) 是谓词，“ 是素数”呢? 如果它是，“如果能被 4 整除，那么它是偶数”呢? 当然，例子不足以证明一般性的结论，但这正是这个问题的核心。

1.3.8.15. 将这些陈述翻译成符号，然后使用形式化规则来简化否定（即量词规则和德摩根定律），可能会有所帮助。简化之后，例如对于第一个，你应该得到 $\forall$ ($\neg$ ( ) $\wedge$ $\neg$ ( ))。然后再把它翻译回英语。

1.4 · 证明

1.4.8 · 附加练习

1.4.8.6. 其中一个蕴含将给出直接证明；另一个将通过逆否命题证明。

1.4.8.7. 这实际上是一个关于修改"$\sqrt{2}$ 是无理数"的证明的练习。在那里你证明了它们是偶数；在这里它们将是 3 的倍数。

1.4.8.8. （a）部分应该是一个相对容易的直接证明。（b）部分寻找一个反例。

1.4.8.10. 这里采用反证法是合理的，因为这样你可以假设 *and* 都是奇数。由此推出 ^{2} 是偶数，因此是 4 的倍数（为什么？以及为什么这会构成矛盾？）。

1.4.8.12. 每一部分使用不同的证明方式。

1.4.8.14. 注意，如果 $\log(7) = \frac{a}{b}$，那么 $7 = 10^{\frac{a}{b}}$。7 的任何一个幂是否可能与 10 的某个幂相同?

1.4.8.15. 如果存在呢？推导出 必须是奇数，并继续推导直至出现矛盾。

1.4.8.16. 通过分类讨论证明逆否命题。将有 4 种情况需要考虑。

1.4.8.17. 你朋友的证明确实是一个证明，但它证明了什么？由给定的证明可以推出什么蕴涵？这有帮助吗?

1.4.8.19. 考虑由每个人拥有的朋友数构成的*numbers*集合。若每个人的朋友数都不同，这个集合必须包含20个元素。这可能吗？为什么不?

1.4.8.20. 这感觉像是鸽巢原理，虽然稍微复杂一些。至少，你可以尝试模仿鸽巢原理中使用的证明风格。要怎样安排这些集数的间隔，才能确保你的六十个中没有任意两个相隔正好为 4?

1.5 · 关于离散结构的证明 1.5.8 · 附加练习

1.5.8.1. 要证明 $\subseteq$ 当且仅当 $\cup$ $=$ ，你需要证明两个蕴含：

(a) 若 $\subseteq$ ，则 $\cup$ $=$ 。

(b) 如果 $\cup$ $=$ ，则 $\subseteq$ 。

要证明两个集合相等，我们通常证明它们分别是对方的子集。

2 · 图论 2.1 · 问题与定义 2.1.4 · 练习题

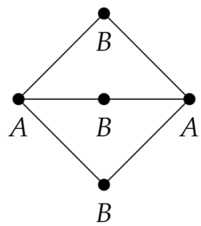
2.1.4.5. 记住， $_n$ 是一条包含 条边和 + 1 个顶点的路径。

2.1.5 · 附加练习

2.1.5.3. 两种情况都有可能。去找一些例子。

2.1.5.6. 二分图有点棘手。你肯定会想要一个完全二分图，但它可能是 $_{5,5}$，或者也许是 $_{1,9}$，或者……

2.1.5.7. 第一个图是二分图，这可以通过如下方式对其进行标注而看出。



剩下的三个中有两个也是二分图。

2.1.5.8. $_4$ 是二分图； $_5$ 不是。那么其他所有的 取值呢?

2.1.5.11. 你应该能够直接从定义中推导出一切。不过，或许知道其中的 表示邻域会有所帮助。

2.1.5.12. 小心确保边不是“有向”的。在图中，如果 与 相邻，则 与 相邻。在关系的语言中，我们说边关系是对称的。

2.1.5.13. 你可能想要对某些特定的 值回答问题，以便更好地理解它们，但最终的答案应该以 为变量。

2.1.5.14. 先尝试一个小例子：任何具有 8 个顶点的图必定有两个顶点具有相同的度。若非如此，度序列会是什么?

2.1.5.15. 使用握手引理 2.1.8。如果所有顶点的度都是 2，会发生什么?

2.2 · 树

2.2.7 · 额外练习

2.2.7.3. 注意：图形可能不连通。

2.2.7.4. 尝试练习 2.2.7.2.

2.2.7.5. 尝试通过反证法证明，并考虑图的生成树。

2.2.7.7. 对于部分(b)，尝试一些简单的例子应该能得到公式。然后你只需要证明它是正确的。

2.2.7.8. 检视命题 2.2.2 的证明可以提供你所需的大部分内容，但务必只给出相关部分，并注意不要使用 proof by

矛盾。

2.2.7.9. 最小性应该是指顶点数量。如果你有一个最小反例并移除一个叶子顶点，那么结果图将是一个更小的树，因此...

2.2.7.10. 如果 是根节点，那么 将有三个子节点（ 、 和 ），它们都是兄弟节点，并且 是它们的父节点。 将没有任何子节点。

一般来说，如果一个顶点不是根节点，如何确定它将拥有多少个子节点?

2.2.7.14. 这里有一个包含7条边的示例。

2.2.7.15. 前面的练习将会有所帮助。

2.2.7.16. 注意，这样的一条边如果被移除，将会使该图不连通。我们把具有这样一条边的图称为1-连通的。

2.3 · 平面图 2.3.7 · 补充练习

2.3.7.3. 欧拉公式会告诉你什么?

2.3.7.5. 你可以使用握手引理来用 （顶点的数量）表示边的数量。

2.3.7.11. 最短环的长度是多少? （这个量通常被称为图的圈长。）

2.3.7.14. 该图的围长为4。

2.3.7.15. 围长发生了什么变化? 注意：我们的边数也不同了。最好检查一下欧拉公式。

2.4 · 欧拉迹与回路 2.4.6 · 补充练习

2.4.6.7. 这比前面三个问题更难。思考哈密顿路径在每隔一步时需要位于图的哪一“侧”。

2.4.6.9. 如果按顺序读取学生的名字，你需要准确地读取每个学生的名字一次，最后一个名字必须是与第一个学生是朋友的学生的名字。这是什么类型的循环?

2.4.6.10. 绘制一个包含6个顶点和8条边的图。什么样的路径是合适的?

2.5 · 着色 2.5.6 · 附加练习

2.5.6.6.

（c）按照该过程，最终你会给每一个顶点着色吗? 是否会存在一个无法按照该过程着色的顶点?

2.5.6.7.

(a) 你会希望将球队作为顶点、将比赛作为边。给哪一个着色才有意义?

2.5.6.10. 色数是 4。现在证明这一点!

请注意，这里不能使用四色定理、布鲁克定理或团数。事实上，这个称为 *Grötzsch graph* 的图，是不包含任何三角形且色数为 4 的最小图。

2.5.6.13. 你可以对 $_5$ 着色，使得每个顶点恰好邻接两条蓝边和两条红边。然而，有一个只有 5 条边的图，无论你如何给边着色，都会导致某个顶点关联到三条同色的边。这个图是什么? 你如何将其推广?

2.5.6.14. 前一个练习作为起点很有用。

2.8 · 本章小结

· 本章回顾

2.8.23. 你可能想把证明分成两部分。首先用归纳法证明环 $_n$ 有 $=$ 。然后考虑如果该图不仅仅是这个环会发生什么。

3 · 计数 3.2 · 组合结果 3.2. 6 · 练习题

3.2.6.9. 将问题分解为4种情况。

3.2.7 · 附加练习

3.2.7.2. 作为一个更简单的例子，$6 = 2 \cdot 3$ 有 4 个约数。它们是 $1 = 2^0 \cdot 3^0$，$2 = 2^1 \cdot 3^0$，$3 = 2^0 \cdot 3^1$，以及 $6 = 2^1 \cdot 3^1$。

3.3 · 非互斥结果 3.3.6 · 练习题

3.3.6.6. 要找出有多少个能被4和5整除的数，例如，计算 $715/(4 \cdot 5)$ 并向下取整。

3.3.7 · 附加练习

3.3.7.1. 对于(a)部分，你可以使用PIE的公式，但对于(b)部分，画一个维恩图可能更合适。

3.3.7.2. 你可以考虑一些情况。例如，任何形式为 ODD-ODD-EVEN 的数字其和将是偶数。或者，假设前三个数字是 54，多少个三位数的数字其各位之和是偶数? 如果前两个数字是 19 呢?

3.4 · 组合与排列 3.4.7 · 附加练习

3.4.7.1. 如果你任意选取三个点，就可以得到一个三角形，除非这三个点全部在 轴或 轴上。也有其他的起始方法，任何正确的方法都应得到相同的答案。

3.5 · 多重集合计数 3.5.5 · 练习题

3.5.5.6. 概率将等于 1 除以你的朋友可能拥有的 9 枚硬币的不同组合数量。

3.5.6 · 附加练习

3.5.6.3.

(b) 这实际上需要证明四个事实：每个多重集都对应至少一个图示，且每个图示都对应至少一个多重集；然后，每个多重集至多对应一个图示，且每个图示至多对应一个多重集。换言之，我们必须证明该函数是定义良好的、单射的并且是满射的。

3.6 · 组合证明 3.6.6 · 补充练习

3.6.6.3. 将有185个三角形。但要找到它们……

(a) 这个三角形的多少个顶点可以位于水平轴上?

（b）*any* 三个点能作为顶点吗?

3.6.6.4. 答案是120。

3.6.6.6. 试做练习 3.6.6.5。

3.6.6.7. 如果你想要一对共同担任首席伴娘的人呢?

3.6.6.8. 对于组合证明：如果你还不知道你会有多少位伴娘怎么办?

3.6.6.9. 统计握手次数。

3.6.6.13. 这一条可能会让你想起示例 3.6 .6

3.6.6.14. 对于格点路径，思考 2^n 会计数哪一类路径。并非所有路径都会在同一点结束，但你可以将终点的集合描述为一条直线。

3.6.6.16. $_n$ 有多少条边？这两个图中有一个将不是连通的（除非 $= 1$）。

3.7 · 概率的应用 3.7.6 · 练习题

3.7.6.7.

(b) 你可以列出得到 6 的所有方式，或者用棍子和石头来计算。

3.7.7 · 附加练习

3.7.7.4. 使用互补概率。如果你的答案比你原先预期的更大，也不要感到惊讶。

3.9 · 章节总结

· 本章回顾

3.9.16. 使用星与隔板法。

4 · 数列 4.1 · 描述数列 4.1.6 · 练习题

4.1.6.4. 尝试对每一项加上或减去同一个小数，看看是否能识别出该数列。

4.1.6.5. 尝试对每一项加上、减去或除以一个常数，使该数列更容易识别。

对于第(d)部分，尝试将该序列表示为两个著名序列的和。

4.1.7 · 额外练习

4.1.7.8. 你需要写出序列，猜测一个闭合公式，然后验证你是否正确。

4.1.7.9. 写出序列，猜测递归定义，并验证闭式公式是否是该递归定义的解。

4.1.7.12. 试举一个例子：当你画出第 4 条直线时，它将与另外三条直线相交，因此会被分成四个线段，其中两个是无限的。每一个线段都会把先前的一个区域分成两个。

4.1.7.13. 考虑三种情况：最后一位是 0、1 或 2。其中两种应当很容易计数，但以 0 结尾的字符串前面不能是 2，因此需要多花一些功夫。

4.1.7.15. 递归地思考，就像你在帕斯卡三角形中所做的那样。

4.1.7.16. 铺砌一个 2×1 的棋盘只有一种方法，而铺砌一个 2×2 的棋盘有两种方法（你可以以两种方式放置多米诺骨牌）。一般地，考虑覆盖左上角的那块多米诺骨牌可能取向的两种方式。

4.2 · 增长率 4.2.7 · 补充练习

4.2.7.5. 我们可以将递推关系写成$\frac{a_n}{a_{n-1}} =$ 。当你把这个递推关系在不同的 取值下的所有不同版本相乘时，会发生什么?

4.2.7.6. 利用裂项相消法求和。

利用 $_n = \frac{n(n+1)}{2}$这一事实，序列中的每一项都是$\frac{2}{n(n+1)}$。

以下分数减法的结果是什么：$\frac{2}{3} - \frac{2}{4}$，还是 $\frac{2}{4} - \frac{2}{5}$? 是什么

总体上发生了什么?

4.4 · 指数数列 4.4.5 · 练习题

4.4.5.3. 使用伸缩法或迭代法。

4.5 · 归纳法证明 4.5.7 · 附加练习

4.5.7.9. 不可能恰好得到 11 分。你能证明对于任何 ≥ 12 都可以得到 分吗?

4.5.7.11. 从（ $+ 1$）-边形开始，并将其分割成一个 边形和一个三角形。

4.5.7.15. 对于归纳步骤，你可以假设你已经有一个严格递增的序列，直到 $_{k}$，其中 $_{k} < 100$。现在你只需要找到下一个项 $_{k+1}$，使得 $_{k} < {}_{k+1} < 100$。 $_{k+1}$ 应该是什么?

4.5.7.17. 对于归纳情形，你需要证明 $(\ + 1)^2 + (\ + 1)$ 是偶数。将其因式分解，并找出其中等于 $^2 +$ 的那一部分。你对该量作了什么假设?

4.5.7.18. 这与练习 4.5.7.15 类似，不过在那里你证明的是一个序列的所有项都小于某个值，而这里你要证明的是其和小于某个值。但部分和构成了一个序列，因此这实际上非常相似。

4.5.7.19. 我们已经在不使用归纳法的情况下证明了这一点，但从归纳的角度来看有助于阐明这个问题（而且很有趣）。

为了完成归纳步骤，你需要回答的问题是：当第 $+ 1$ 个人进入房间时，会发生多少次新的握手？为什么把这个数量加上去就能得到正确的公式?

4.5.7.20. 思路如下：由于帕斯卡三角形中的每一个条目都是其上方两个条目的和，我们可以通过把第 行中的所有成对条目相加来得到第 $+ 1$ 行。但这样做会把第 行中的每个条目使用两次。因此每次下降到下一行，总和都会翻倍。当然，第 0 行的和是 $1 = 2^0$ (基本情形)。现在尝试用形式化的归纳证明把这一点表述得精确。在归纳情形中你将使用这样一个事实：$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$。

4.5.7.21. 为了理解为什么这有效，可以在帕斯卡三角形的一个副本上试一试。我们沿着一条对角线把各项相加，从第 4 行左侧的那个 1 开始。假设我们把这条对角线上的前 5 个数相加。主张是：这个和等于这 5 个数中最后一个数的下方且偏左的位置上的那个数。注意，如果这一点成立，而我们改为相加前 6 个数，那么就需要在先前的和上再加上右边紧挨着的那个数。但这两个数加在一起正好给出它们下面的那个数，而这个数正好位于对角线上第 6 个数的下方且偏左的位置。如果你能跟上这一点，就能看出其中的道理。不过，这并不是一个很好的证明，还需要一个形式化的数学归纳法证明。

4.5.7.23. 你可以假设基例成立。对于归纳步骤，将除最后一个函数之外的所有函数合并为一个函数之和，然后应用通常的导数求和法则，随后应用归纳假设。

4.5.7.24. 对于归纳步骤，由两个函数的乘积法则可知

$$(f_1 f_2 f_3 \cdots f_k f_{k+1})' = (f_1 f_2 f_3 \cdots f_k)' f_{k+1} + (f_1 f_2 f_3 \cdots f_k) f'_{k+1}.$$

然后对第一个加项应用归纳假设，并进行分配。

4.5.7.25. 你可以归纳地假设，从前 个 $-$ 2 个蕴涵中可以推导出 $_1 \rightarrow$ $_{n-1}$。然后你可以使用真值表来验证这个简化的推理规则是有效的。

4.6 · 强归纳法 4.6.5 · 附加练习

4.6.5.1. 如果你有三个基例，是否总能保证还能再得到三个点?

4.6.5.2. 从一个（ $+ 1$）边形开始，并将其划分为两个更小的多边形。

4.6.5.4. 与前一个问题一样，在归纳步骤中我们希望从 中减去某个量。那里我们减去了小于 的最大的 2 的幂。那么在这里你应该减去什么?

注意，你仍然需要在这里小心，确保从归纳假设得到的和，连同你减去的那个数，一起构成的是由 *distinct* 个斐波那契数组成的和。事实上，你还可以证明，这个和中的斐波那契数彼此并不相邻!

4.6.5.6. 你将需要使用强归纳法。对于归纳步骤，尝试将 $\left(^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(+ \frac{1}{x}\right)$ 相乘，并整理哪些项组合在一起是整数。

4.6.5.8. 你将需要三个基例。实际上这是一个非常好的提示，因为它表明为了证明 ( ) 为真，你会想要利用 ($-$ 3) 为真的事实。因此，你需要以某种方式将正方形的数量增加 3。

4.7 · 本章总结

· 本章回顾

4.7.14.

(a) $(n+1)^{n+1} > (n+1) \cdot n^n$.

(b) 这应该与其他求和证明类似。最后一部分归结为分数相加。(c) 写成 $4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 4 + 3$。(d) 一张9分邮票比两张4分邮票多1分，而七张4分邮票比三张9分邮票多1分。

(e) 注意这里要真正使用数学归纳法。基础情形：$2^2 = 4$。归纳情形：假设 $(2\ )^2$ 可被 4 整除，并考虑 $(2\ \ + 2)^2 = (2\ )^2 + 4\ \ + 4$。这是可被 4 整除的，因为 $4\ \ + 4$ 显然如此，并且根据我们的归纳假设，$(2\ )^2$ 也是如此。

4.7.15. 这是一个直接的归纳证明。注意你需要化简
$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$ and get $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

4.7.16. 有两个基例 (0) 和 (1)。然后，对于归纳情形，假设对于所有 $<$ ， ( ) 都为真。这使你可以假设 $_{n-1} = 1$ 和 $_{n-2} = 1$。应用递推关系。

5 · 离散结构再探
5.1 · 集合
5.1.5 · 练习

5.1.5.7. 你应该能够将它们全部写出来。不要忘记 和 ，它们也是 的候选者。

5.1.5.14. 先思考 $_2 \cup$ 与 $_3$ 的并集是什么，可能会有所帮助。然后想一想在该并集中有哪些数是 *not*。当你还把 $_5$ 包含进去时会发生什么?

5.1.5.17. 我们正在寻找一个包含16个集合的集合。

5.1.5.18. 把这些写出来，或至少开始写并寻找规律。

5.1.5.29. 看起来你应该能够这样定义集合 。但要考虑$|\ \ |$ 的两个可能取值。

5.2 · 函数 5.2.4 · 练习

5.2.4.2. 由于定义域和陪域的大小相同，函数是否可能是单射但不是满射，或者是满射但不是单射?

5.2.4.20. 用一些例子来说明。如果 $= \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 & \\ & \end{pmatrix}$，并且 $= \begin{pmatrix} & 5\ 6\ 7 \\ & \end{pmatrix}$，会怎样?

5.2.4.25. 为了找到递推关系，考虑当第 $+ 1$ 个人进入房间时，会发生多少 *new* 次握手。

5.2.4.29. 其中一个并不总是成立。试试一些例子！

6 · 附加主题 6.1 · 生成函数
6.1.5 · 练习

6.1.5.10. 你应该将这两个序列“相乘”。

6.2 · 数论简介
6.2.6 · 练习

6.2.6.13. 首先将每个数对 9 取模，这可以通过把各数的各位数字相加来完成。

6.2.6.18. 求解丢番图方程 13 + 20 = 2（为什么？）。然后考虑解中的参数 取哪个值是最优的。

精选解决方案

1 · 逻辑与证明
1.1 · 数学陈述
1.1.5 · 练习题

1.1.5.4.

- ∃ ∀ (,)。 有些人总是会被愚弄。
- ∀ ∃ (,)。 每个人有时候都会被欺骗。
- ∀ ∃ (,)。 总是有一些人会被愚弄。
- ∃ ∀ (,)。 有时候每个人都可能被愚弄。

1.1.5.5.

A. *Correct*. B. *Incorrect*. C. *Incorrect*. D. *Incorrect*.

1.1.5.6.

A. *Correct*. B. *Incorrect*. 小心, (,) 意味着 小于 , 而不是 小于 *or equal* 到 。C. *Incorrect*. D. *Incorrect*. E. *Correct*.

1.1.5.7.

(a) (15) 为真，因为 $17 \cdot 15 + 1 = 256$ 是偶数。

(b) 由于 (15) 为真，我们知道 ∃ ( ) 为真。至少存在一个 使得 ( ) 为真。

(c) 仅仅因为某个 的取值使 ( ) 为真，并不意味着所有 的取值都使 ( ) 为真。但也有可能如此。因此，我们不能断定 ∀ ( ) 为真还是为假。

1.1.5.8.

(a) (15) 为假，因为 $18 \cdot 15 + 1 = 271$ 是奇数。 (b) 由于 (15) 为假，我们不知道 ∃ ( ) 是否为真。可能存在其他某个 的值使得 ( ) 为真。 (c) 我们知道存在某个 的值使 ( ) 为假，因此我们知道 ∀ ( ) 为假。

1.1.5.9.

A. *Incorrect*.
B. *Incorrect*.
C. *Correct*. D
. *Correct*.

1.1.6 · 附加练习

1.1.6.1.

（a） ∧ 。（b） → ¬ 。（c）杰克通过了数学，或者吉尔通过了数学（或两者都通过）。（d）如果杰克和吉尔没有同时通过数学，那么吉尔通过了。（e）i. 没有其他情况。ii. 杰克也没有通过数学。

1.1.6.2.

(a) ¬∃ (( ) ∧ ( )). (b) ∀ (( ) → (+ 1)). (c) ∃ (( ) ∧ ( ))（其中 ( ) 表示“ 是素数”）。 (d) ∀ ∀ ∃ (< < ∨ < <). (e) ∀ ¬∃ (< < + 1).

1.2 · 含义 1.2.5 · 练习题

1.2.5.1. 主要要意识到的是，我们不知道这两种形状的颜色，但我们知道我们处于以下三种情况之一：我们可能有一个紫色圆形和一个橙色五边形。我们可能有一个不是紫色的圆形和一个橙色五边形。或者我们可能有一个不是紫色的圆形和一个不是橙色的五边形。圆形是紫色但五边形不是橙色的情况无法发生，因为那会使得陈述变为假。

1.2.5.2. 一个蕴涵 → 为真而其逆命题为假的唯一情况是 为真且 为假。因此我们知道圆是紫色的，而正方形不是黄色的。

1.2.5.3. 逆命题是“如果我给你一头牛，那么你会给我魔法豆。”逆否命题是“如果我不给你一头牛，那么你也不会给我魔法豆。”所有其他陈述既不是逆命题也不是逆否命题。

1.2.6 · 额外练习

1.2.6.1.

(a) 任何偶数加 2 都是偶数。

（b）对于任意 ，存在一个 ，使得 sin( ) = 。换言之，每一个数 都在正弦函数的定义域中。

(c) 对于每个 ，都存在一个 ，使得 sin( ) = 。换句话说，每个数 都在正弦函数的值域中（这是错误的）。

(d) 对于任意数，若两个数的立方相等，则这两个数相等。

1.2.6.3.

(a) 如果你减肥了，那么你进行了锻炼。 (b) 如果你锻炼了，那么你会减肥。 (c) 如果你是美国人，那么你是爱国的。 (d) 如果你是爱国的，那么你是美国人。

(e) 如果一个数是有理数，那么它是真实数。

（f）如果一个数不是偶数，那么它是质数。（或者其逆否命题：如果一个数不是质数，那么它是偶数。） g） 如果野马队没有赢得超级碗，那么他们就没有参加超级碗。或者，如果野马队参加了超级碗，那么他们将赢得超级碗。

1.2.6.5. 确实，为了使一个函数在点 处可微，函数在 处连续是必要条件。然而，函数在 处连续并不要求它在 处可微。

确实，函数在点 处可导就足以保证它在点 处连续。然而，函数在点 处连续并不足以保证它在点 处可导。

1.3 · 逻辑规则 1.3.7 · 练习题

1.3.7.1. 如果你思考一下这个陈述所表达的内容，就会明白它是一个重言式（也就是说在所有情况下都为真）。完整的真值表是：

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

1.3.7.2. 真值表为：

P	Q	$\neg Q$	$Q \to P$	$\neg Q \vee (Q \to P))$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	T	T

如果该陈述为假，我们必定处于第三行，使得 为假而 为真。

1.3.7.3. 完整的真值表如下：

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \vee R$	$Q \to (\neg P \vee R)$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

1.3.7.4. 完整的真值表如下：

P	Q	R	$P \to (Q \vee R)$	$(P \to Q) \vee (P \to R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

由于这两列是相同的，这些陈述在逻辑上是等价的。

1.3.7.5. 完整的真值表如下：

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

只有一行中两个前提都为真（第4行）。在这一行中，结论也为真。因此，该演绎规则是有效的。

1.3.7.6. 完整的真值表如下：

P	Q	R	$P \to (Q \vee R)$	$\neg(P \to Q)$
T	T	T	T	F
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

只有一行中两个前提都为真（第3行）。在这一行中，结论也为真，因此该演绎规则是有效的。

1.3.7.7. 完整的真值表为：

P	Q	R	$(P \wedge Q) \to R$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg R$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T

在第3、第5和第7行，两个前提都为真，但结论为假。因此，推理规则无效。

1.3.7.8. 完整真值表如下：

P	Q	R	$P \to Q$	$P \wedge \neg Q$
T	T	T	T	F
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

没有一行同时满足两个前提为真（实际上，这两个前提是矛盾的；第二个是第一个的否定）。因此，在任何一行中，若两个前提都为真（即没有这样的行），结论也为真。因此，该推理规则是有效的。（这是一个如何从矛盾中得出一切的例子。）

1.3.7.9.

A. *Correct.* B
. *Incorrect.* C
. *Incorrect.* D
. *Incorrect.*

1.3.8 · 附加练习

1.3.8.3.

（a） ： 今天是你的生日； ： 会有蛋糕。（ ∨ ）→ （
b）提示：你应该得到三个 T 和一个 F。（c）只有会有蛋糕这一点。（d）这不是你的生日！

(e) 这是你的生日，但蛋糕是个谎言。

1.3.8.5. 为每一个分别制作真值表并进行比较。这些陈述在逻辑上是等价的。

1.3.8.6.

（a） ∧ 。

(b) (¬ ∨ ¬) → (∨ ¬)，或者，先将蕴涵替换为析取：(∧) ∨ (∨ ¬)。(c) (∧) ∧ (∧ ¬)。这必然为假，因此它也等价于 ∧ ¬ 。(d) 要么 Sam 是一名女性且 Chris 是一名男性，要么 Chris 是一名女性。

1.3.8.16.

(a) ∀ ∃ (( ) ∧ ¬ ( )). (b) ∃ ∀ (≥ ∨ ∀ (≥ ∧ ≥)). (c) 存在一个数 ，使得其他每一个数都严格大于 。(d) 存在一个数 ，它不位于任何其他两个数之间。

1.4 · 证明

1.4.7 · 练习题

1.4.7.1.

- 设 为任意整数，且 为偶数。
- 由于任何数与偶数的乘积是偶数，
- 7 必须是偶数。

1.4.7.2.

- 设 为任意整数，且假设 为奇数。
- 由于 7 是奇数，并且奇数与奇数的乘积仍然是奇数，
- 7 必须是奇数。

1.4.7.3.

- 设 和 为整数，并假设二者均为偶数。
- 两个偶整数的和也必然是偶数。
- 因此 + 是偶数。

1.4.7.4.

- 设 和 为整数，并假设+ 为奇数，但 和 都为偶数。
- 两个偶整数的和也必然是偶数。

- 但这样一来， + 既是偶数又是奇数，这是一个矛盾。

1.4.7.6.

- 直接证明 ◦ 假设 : → 是一个双射

- 逆否命题证明 ◦ 假设 | | ≠ | |

- 反证法 ◦ 假设 : → 是一个双射，并且 | | ≠ | |

1.4.8 · 附加练习

1.4.8.1.

(a) 断言 ∀ ( ) 的含义是：无论你在论域中考虑哪个 ， ( ) 都为真。因此，证明 ∀ ( ) 为真的唯一方法，就是检查或以其他方式论证，对于论域中的所有 ， ( ) 都为真。(b) 要证明 ∀ ( ) 为假，你只需要给出论域中一个使得 ( ) 为假的元素即可。这通常称为反例。(c) 我们只是声称在论域中存在某个元素 ，使得 ( ) 为真。如果你能找到这样一个元素，就验证了该断言。(d) 这里我们声称，我们找到的任何元素都不会使 ( ) 为真。要确信这一点，唯一的方法是验证论域中的 *every* 元素都会使 ( ) 为假。注意，证明该陈述所需的证明力度与证明 ∀ ( ) 为真是相同的。

1.4.8.2.

（a）对于所有整数 和 ，如果 或 不是偶数，那么 不是偶数。

(b) 对所有整数 和 ，如果 和 是偶数，则 是偶数。

（c）存在数 和 ，使得 + 是偶数，但 和 并非都是偶数。

(d) 错误。例如， = 3 且 = 5。 + = 8，但 和 都不是偶数。

(e) 错误，因为它等价于原始陈述。

（f）正确。设 和 为整数。假设二者都是偶数。则存在整数 和 ，使得 = 2 且 = 2 。于是 + = 2 + 2 = 2(+)，因此是偶数。

(g) 正确，因为该陈述是错误的。

1.4.8.3.

(a) 反证法证明。证明开始：为反证起见，假设存在整数 和 ，使得 是一个大于 5 的素数，并且 = 6 + 3。证明结束：……这是一个矛盾，因此不存在这样的整数 。

(b) 直接证明。证明开始：设 为一个整数。假设 是 3 的倍数。证明结束：因此 可以表示为连续整数之和。(c) 逆否命题证明。证明开始：设 和 为整数。假设 和 都是偶数。证明结束：因此 ^{2} + ^{2} 是偶数。

1.4.8.4.

(a) 直接证明。

Proof. 设 为整数。假设 是偶数。那么存在某个整数 ，使得 = 2 。因此 8 = 16 = 2(8)。因此 8 是偶数。■

(b) 逆命题是错误的。也就是说，存在一个整数 ，使得 8 是偶数，但 是奇数。例如，考虑 = 3。那么 8 = 24 是偶数，但 = 3 是奇数。

1.4.8.5.

(a) 这是鸽巢原理的一个例子。我们可以通过证明其逆否命题来证明它。

Proof 假设每个数字最多只出现6次或更少。那么最多有六个1、六个2，以此类推。总共有36个骰子，所以你不可能掷完所有40个骰子。■

(b) 我们可以有 9 个骰子而不存在任意四个相同或任意四个全都不同：三个 1、三个 2、三个 3。我们将证明，只要掷 10 个骰子，就一定会出现四个相同或四个全都不同。

Proof。假设你掷了 10 个骰子，但不存在四个点数相同的结果。这意味着任意一个点数最多只出现三个。如果我们只有三种不同的点数，那也只会对应 9 个骰子，因此必然存在 4 种不同的点数，从而得到 4 个彼此都不相同的骰子。■

1.5 · 离散结构的证明 1.5.7 · 练习题

1.5.7.1.

A. *Incorrect.*
B. *Correct.* C
. *Incorrect.*

D. *Incorrect*. 这将是反证法或逆否命题证明的一个良好开端，而不是直接证明。

1.5.7.2.

A. *Incorrect*. B. *Correct*. C. *Incorrect*. D. *Incorrect*. 这是直接证明的一个良好开端，而不是反证法的证明。

1.5.7.3.

- 假设 $\subseteq$ $\cap$ ，并令 为 的一个元素。
- 那么 是 $\cap$ 的一个元素，因为 $\subseteq$ $\cap$ 。
- 由于 $\cap$ 包含了所有同时属于 和 的元素，因此 是 的一个元素。
- 因此 $\subseteq$ 。

1.5.7.4.

- 首先我们将证明 $(\cap) \cup \subseteq$ 。
- 设 是($\cap$) $\cup$ 的一个元素。
- 那么 属于 $\cap$ ，或者 属于 。
- 因此，特别地， 是 的一个元素。
- 因此 $(\cap) \cup \subseteq$ 。
- 其次，我们将证明 $\subseteq (\cap) \cup$ 。
- 让 是 的一个元素。
- 那么 是 $(\cap) \cup$ 的一个元素，因为 在 中或在另一个集合中。
- 因此 $\subseteq (\cap) \cup$ 。
- 由于（ $\cap$ ）$\cup$ $\subseteq$ 且 $\subseteq (\cap) \cup$ ，我们有（ $\cap$ ）$\cup$ = 。

1.5.7.5.

- 假设 $_1 \subseteq$ $_2$。
- 设 是$^{-1}$($_1$)中的一个元素。
- 这意味着 ( ) 属于 $_1$。

- 由于 $\ _1 \subseteq \ _2$， $(\ )$ 是 $\ _2$ 的一个元素。
- 这就意味着 是 $^{-1}(\ _2)$ 的一个元素。
- 因此 $^{-1}(\ _1) \subseteq \ ^{-1}(\ _2)$。

1.6 · 本章小结

· 本章回顾

1.6.1.

P	Q	R	$\neg P \to (Q \wedge R)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

1.6.2. 彼得不高，而罗伯特不瘦。你必须位于上面真值表的第 6 行。

1.6.3. 是的。要说明这一点，对每个陈述制作一个真值表并进行比较。

1.6.4. 制作一个真值表，包含该论证中的全部三个命题：

P	Q	R	$P \to Q$	$P \to R$	$P \to (Q \wedge R)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

注意到在每一行中，只要 $\to$ 和 $\to$ 都为真，那么 $\to (\ \wedge\ )$ 也为真。因此，只要该论证的前提为真，结论也为真。换言之，这一演绎规则是有效的。

1.6.5.

(a) 否定：停电了，食物并没有变质。

逆命题：如果食物变质了，那么停电了。逆否命题：如果食物没有变质，那么没有停电。

(b) 否定：门是关着的，灯是亮着的。

逆命题：如果灯是关的，那么门是关着的。逆否命题：如果灯是开的，那么门是开着的。（c）否定：∃ (< 1 ∧ ^{2} ≥ 1) 逆命题：∀ (^{2} < 1 → < 1) 逆否命题：∀ (^{2} ≥ 1 → ≥ 1)。

(d) 否定：存在一个自然数 ，它是质数但不是孤立数。

逆命题：对于所有自然数 ，如果 是孤立数，那么 是素数。

逆否命题：对所有自然数 ，如果 不是孤立数，则 不是素数。

(e) 否定：存在一个函数，它是可导的但不连续。逆命题：对所有函数 ，如果连续，则 可导。逆否命题：对所有函数 ，如果不连续，则 不可导。

（f）否定：存在整数 和 ，使得 · 是偶数，但 或 是奇数。逆命题：对所有整数 和 ，如果 和 都是偶数，则 是偶数。逆否命题：对所有整数 和 ，如果 或 是奇数，则 是奇数。

（g）否定：存在整数 和 ，使得对每个整数 ，> 0 且 ≤ 。

对任意整数 和 ，存在一个整数 ，使得如果 > ，则 > 0。

逆否命题：对于任意整数 和任意整数 ，存在一个整数 ，使得如果≤ ，那么 ≤ 0。

(h) 否定：存在实数 和 ，使得 = 0，但 ≠ 0 且 ≠ 0。

逆命题：对所有实数 和 ，如果= 0 或 = 0，那么 = 0

逆否命题：对于所有实数 和 ，如果≠ 0 且 ≠ 0，那么 ≠ 0。

(i) 否定：在 Math 228 中至少有一名学生不理解蕴涵，但仍然会通过考试。

逆命题：对于数学228的每一位学生，如果他们考试不及格，那么他们没有理解蕴涵。

逆否命题：对于 Math 228 的每一位学生，如果他们通过了考试，那么他们理解了蕴涵。

1.6.6. (a) 该陈述为真。如果 是一个小于或等于 7 的偶整数，那么它不为负的唯一情况是 等于 0、2、4 或 6。

(b) 存在一个整数 ，使得 是偶数并且≤ 7，但是 不是负数并且 $\notin \{0, 2, 4, 6\}$。这是错误的，因为原始陈述是真的。

(c) 对于所有整数 ，如果 非负且 $\notin \{0, 2, 4, 6\}$，那么 是奇数或 > 7。该命题为真，因为其逆否命题与原命题等价（而原命题为真）。

(d) 对所有整数 ，如果 是负数或 $\in \{0, 2, 4, 6\}$，那么 是偶数且 ≤ 7。这是错误的。 $= -3$ 是一个反例。

1.6.7.

(a) 对于任意数 ，如果对 加上任何一个数都会得到那个数本身，那么用 去乘任何一个数都会得到 0。这在（整数或实数中）是成立的。“如果”这一部分只有在 $= 0$ 时才成立，并且在这种情况下，任何数乘以 都将等于 0。(b) 其逆命题用文字表述如下：对于任意数 ，如果所有数乘以 都等于零，那么所有数加到 上都会得到它们自身。或者用符号表示为：$\forall$ ($\forall$ ($\cdot$ $= 0) \to \forall$ ($+$ $=$))。该逆命题是真的：唯一一个与任何其他数相乘都会得到 0 的数是 $= 0$。而且如果 $= 0$，那么 $+$ $=$ 。

(c) 其逆否命题用文字表述为：对任意数 ，如果存在某个数与 相乘不为零，那么就存在某个数与 相加不等于该数。用符号表示：$\forall$ ($\exists$ ($\cdot$ $\neq 0) \to \exists$ ($+$ $\neq$)).
我们知道逆否命题必定为真，因为原始蕴涵为真。

(d) 否定：存在一个数 ，使得任何数加到 上都会得到该数本身，但也存在一个数 ，可以用它去乘 而不得到0。用符号表示：$\exists$ ($\forall$ ($+$ $=$) $\wedge \exists$ ($\cdot$ $\neq 0$))。当然，由于原来的蕴含是真的，这个否定是假的。

1.6.8.

（a）(¬ ∨)∧ (¬ ∨ (∧ ¬))。

(b) ∀ ∀ ∀ (= + ∧ ∀ (− ≠)).

1.6.9.

(a) 直接证明。

Proof. 设 为整数。假设 为奇数。因此，对某个整数 ，有 $= 2 + 1$。则

$$7n = 7(2k + 1) = 14k + 7 = 2(7k + 3) + 1.$$

由于 7 + 3 是一个整数，可见 7 是奇数。 ■

(b) 逆命题是：对所有整数 ，如果7 是奇数，则 是奇数。我们将通过逆否命题来证明这一点。

Proof. 设 为整数。假设 不是奇数。则存在整数 ，使得 2 。因此 = 14 = 2(7)，也就是说7 是偶数。因此 不是奇数。■

1.6.10.

(a) 假设你每种面额只有5枚硬币。这意味着你有5枚一美分硬币、5枚五美分硬币、5枚10美分硬币和5枚25美分硬币。总共是20枚硬币。但你拥有的硬币多于20枚，因此至少有一种面额的硬币超过5枚。

(b) 假设你有22枚硬币，其中包括2 枚五分硬币、2 枚十分硬币和2 枚二十五分硬币（因此这三种硬币的数量都是偶数）。那么你拥有的一分硬币的数量将是

$$22 - 2k - 2j - 2l = 2(11 - k - j - l).$$

但这表明便士的数量也是偶数（它是某个整数的 2 倍）。因此，我们已经确立了该陈述的逆否命题：“如果你有奇数个便士，那么你至少还有另一种硬币的数量是奇数。”

(c) 你需要 10 枚硬币。你可以有 3 枚便士、3 枚五分镍币和 3 枚一角硬币。第 10 枚硬币要么是一枚 25 美分硬币，从而使你拥有 4 枚彼此都不同的硬币；要么是第 4 枚便士、五分镍币或一角硬币。为证明这一点，假设你既没有 4 枚完全相同的硬币，也没有 4 枚彼此都不同的硬币。特别地，这意味着你只有 3 种硬币类型，而且每种类型最多只有 3 枚硬币，总共 9 枚，少于 10 枚。

2 · 图论

2.1 · 问题与定义 2.1.4 · 练习题

2.1.4.1. （a）和（c）中的图与 同构。

2.1.4.2. 图（a）与（c）互相同构。图（b）与（d）亦然。

2.1.4.3. $_1$ 有 24 条边。对于 $_2$， = 为 2。 $_3$ 有 8 个顶点。

2.1.4.4. 该图必须有 29 条边。

2.1.4.5.

(a) 使得 $_n$ 是 $_5$ 的子图的最大 为 4。

（b）使得 C_n 是 K_5 的子图的最大 为 5。

(c) 使得 $_n$ 成为 $_5$ 的一个 *induced* 子图的最大 为 1。

（d）使得 $_n$ 是 $_5$ 的一个 *induced* 子图的最大 为 3。

2.1.5 · 附加练习

2.1.5.1. 这是在询问 $_{10}$ 中边的数量。每个顶点（人）的度（与之握手的）为 9（人）。因此，度数之和是 90。然而，

度数将每条边（握手）计算两次，因此图中有45条边。这就是发生的握手次数。

2.1.5.2. 每个人有恰好 2 个朋友是可能的。你可以将 5 个人排成一个圆圈，并说每个人都与左右两边的人是朋友（这样你就得到图 $_5$）。然而，每个人有 3 个朋友则是不可能的。这会导致一个具有奇数个奇度顶点的图，这是不可能的，因为度数之和必须是偶数。

2.1.5.4. 图形不相等。例如，图1有一条边{ , }，但图2没有这条边。它们是同构的。一种可能的同构映射是 : $_1 \to$ $_2$，由 ( ) = ， ( ) = ， ( ) = ， ( ) = ， ( ) = 定义。

2.1.5.9.

(a) 例如：

(b) 如果我们要求图是连通的，这就不可能。如果不要求连通性，我们可以把 $_8$ 当作一个图，另外两个 $_4$ 作为另一个图。 (c) 不可能。如果你有一个包含5个顶点且每个顶点的度数都是4的图，那么每个顶点必须与其他每个顶点相邻。这就是图 $_5$。 (d) 这是不可能的。事实上，没有任何一个图具有这个属性（这样的图将有 $5 \cdot 3/2 = 7.5$ 条边）。

2.1.5.10.

(a) 错误。 (b) 正确。 (c) 正确。 (d) 错误。

2.2 · 树

2.2.6 · 练习题

2.2.6.3. 每个生成树仍然必须包含22个顶点。由于它是一个树，它将有22个 $- 1 = 21$ 条边。

因此，我们必须移除8条边以得到一个生成树。 e.

2.2.6.5. 设 为叶子节点的数量。那么度数的总和将是 $+8+6+5+3 =$ $+ 22$。这是边数的两倍。由于边数比顶点数少一，即 $+ 4$，我们还知道边数是 $+ 3$。

因此，我们有 $2(+ 3) =$ $+ 22$。解出 得到 $= 16$。

2.2.7 · 额外练习

2.2.7.1.

(a) 这不是一棵树，因为它包含一个循环。还要注意，存在太多

边构成一棵树，因为我们知道所有具有 个顶点的树都有 – 1 条边。

(b) 这是一个树，因为它是连通的且不包含任何环（通过画出该图可以看出来）。所有路径都是树。 (c) 这是一个树，因为它是连通的且不包含任何环（画出该图）。所有星形图都是树。 (d) 这不是一棵树，因为它不是连通的。注意，边的数量不足以构成一棵树。

2.2.7.2.

(a) 这一定是某棵树的度序列。因为度为 4 的顶点必须与四个度为 1 的顶点相邻（没有其他顶点可与之相邻），因此我们得到一棵星形图。 (b) 这不可能是一棵树。每个度为 3 的顶点都与图中除一个顶点之外的所有顶点相邻。因此，每个这样的顶点都必须与其中一个度为 1 的顶点相邻（而不是另一个）。这意味着两个度为 3 的顶点都与度为 2 的顶点相邻并且彼此相邻，因此这就意味着存在一个环。

或者，数一数有多少条边！

(c) 这可能是也可能不是一棵树。长度为 4 的路径具有这样的度序列（这是一棵树），但一个 3-环与一条长度为 1 的路径的并集也具有相同的度序列（它不是连通的，因此不是一棵树）。

(d) 这不可能是一棵树。度数之和为28，所以有14条边。但也有14个顶点，因此我们没有 = + 1，这意味着这不可能是一棵树。

2.2.7.6. 是的。我们将证明其逆否命题。假设 不包含一个环。那么 是一棵树，因此这将有 = + 1，与规定相矛盾。

2.2.7.12.

(a) 不，尽管存在一些图使得这一点成立。例如， $_4$ 有一棵生成树是一条路径（由三条边组成），也有一棵生成树是一颗星（其中心顶点的度为 3）。(b) 是的。对于一个固定的图，其顶点数 是固定的。该图的任意一棵生成树也将有 个顶点，并且由于它是一棵树，必须有 – 1 条边。(c) 不，尽管存在一些图使得这一点成立（注意，如果所有生成树都是同构的，那么所有生成树将具有相同数量的叶子）。同样， $_4$ 是一个反例。一棵生成树是一条路径，只有两个叶子，而另一棵生成树是一颗星，有 3 个叶子。

2.3 · 平面图

2.3.7 · 附加练习

2.3.7.1. 不。一个（连通的）平面图必须满足欧拉公式： − + = 2。这里 − + = 6 − 10 + 5 = 1。

2.3.7.2. 有 10 条边，因为 $10 = \frac{2+2+3+4+4+5}{2}$。它可能是平面的，那么根据欧拉公式它将有 6 个面：6 − 10 + = 2 意味着 = 6。要确保它实际上是平面的，我们需要画出一个具有这些顶点度数且边不相交的图。这可以通过反复试验来完成（而且是可能的）。

2.3.7.6. 设最后一个多面体有 条边并且也有 个顶点。则该多面体的边总数为 (7 · 3 + 4 · 4 +)/2 = (37 +)/2。特别地，我们知道最后一个面必须有奇数条边。我们还有 = 11。由欧拉公式，有 11 − (37 +)/2 + 12 = 2，解得 = 5，因此最后一个面是一个五边形。

2.3.7.8.

Proof. 假设存在一张边数最少且不满足欧拉公式的图 。

注意到 不可能是一棵树，因为对于任意一棵树，都有 = + 1 且 = 1，因此 − + = 2。因此， 必须包含一个环。选取 中任意一条属于某个环的边 $_0$，并考虑通过仅从 中移除这条边 $_0$ 所得到的图 ′ = − $_0$。

由于 ′ 的边数少于 ，因此它必须满足欧拉公式。也就是说，′ − ′ + ′ = 2，其中 ′、′ 和 ′ 分别表示 ′ 的顶点数、边数和面数。由于 ′ 是通过从 的一个环中移除一条边得到的，我们有 ′ = ，′ = − 1，以及 ′ = − 1。因此， − (− 1) + (− 1) = 2，所以 − + = 2 也成立。这就产生了矛盾，因此不存在这样的图 。■

2.3.7.12.

Proof。我们知道在任何平面图中，面的数量 满足3 ≤ 2 ，因为每个面至少由三条边界定，而每条边邻接两个面。将这一点与欧拉公式结合：

$$v - e + f = 2$$

$$v - e + \frac{2e}{3} \geq 2$$

$$3v - e \geq 6$$

$$3v - 6 \geq e.$$

■

2.4 · 欧拉迹与回路 2.4.5 · 练习题

2.4.5.2. 只有 (b) 有欧拉回路。图 (a) 不连通，因此即使每个顶点的度数都是偶数，它也没有欧拉回路。 (c) 有两个奇数度的顶点，因此它没有欧拉回路。

(b) 的一个欧拉回路是

$$(a, d, f, e, g, c, b, e, h, b, i, c, f, a).$$

2.4.5.3. 第一个图有欧拉迹，但没有欧拉回路。第二个图有欧拉回路。第三个图既没有欧拉回路也没有欧拉迹。你可以通过画出这些图来看到这一点，也可以通过求各顶点的度来判断。

2.4.6 · 附加练习

2.4.6.1. 这是一个关于寻找欧拉路径的问题。画一个图，每个州对应一个顶点，若两个州共享边界则连接相应的顶点。恰好会有两个顶点具有奇数度，即内华达州和犹他州对应的顶点。因此，你的公路旅行必须从这两个州中的一个开始，并在另一个结束。

2.4.6.2.

(a) $_4$ 没有欧拉迹或欧拉回路。(b) $_5$ 有一个欧拉回路（因此也有欧拉迹）。

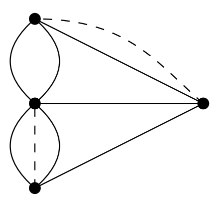
(c) $_{5,7}$ 没有欧拉路径或回路。

(d) $_{2,7}$ 有欧拉路径，但没有欧拉回路。

(e) $_7$ 有一个欧拉回路（它是一个回路图！）

(f) $_7$ 有欧拉路径，但没有欧拉回路。

2.4.6.8. 如果我们建造一座桥，就可以有一个欧拉路径。必须建造两座桥才能形成欧拉回路。



2.5 · 着色

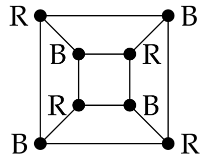
2.5.6 · 额外练习

2.5.6.1. 2，因为图是二分图。为顶集的顶点选择一种颜色，为底集的顶点选择另一种颜色。

2.5.6.2. 例如，$_6$。如果色数是 6，那么该图是非平面图；四色定理指出，所有平面图可以用 4 种或更少的颜色进行着色。

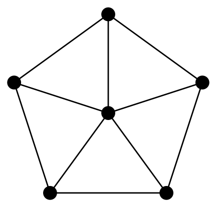
2.5.6.3. 从左到右，色数分别为 2、3、4、5 和 3。

2.5.6.5. 立方体可以表示为一个平面图，并按如下方式用两种颜色着色：



由于用单一颜色为顶点着色是不可能的，我们可以看到立方体的色数为 2（它是二分图）。

2.5.6.9. 下图所示的轮图具有这一性质。轮的外圈形成一个奇环，因此需要 3 种颜色；轮的中心必须与所有外部顶点的颜色不同。



2.5.6.12. 如果我们绘制一张图，其中每个字母代表一个顶点，每条边连接两个在字母表中相邻的字母，那么我们将得到一个包含两个度数为 1 的顶点（A 和 Z）以及其余 24 个度数为 2 的顶点的图（例如， 将与 和 相邻）。根据 Brooks 定理，这个图的色数最多为 2，因为这是图中最大度数，而且该图不是完全图或奇数圈。因此，只需要两个盒子。

2.5.6.13.

2.6 · 关系与图 2.6.7 · 练习题

2.6.7.1.

(a) 非自反的，因为例如 $0+0=0$ 不是奇数。

(b) 不是自反的，因为，例如，$(-1)+(-1)$ 不是正数。 (c) 自反的。任何数与其自身相乘结果为非负数。 (d) 不是自反的。$0 \cdot 0$ 不是正数。 (e) 自反的。因为 $-\ \ = 0$ 是 10 的倍数。

2.6.7.2. 所列出的所有关系都是对称的。

2.6.7.3.

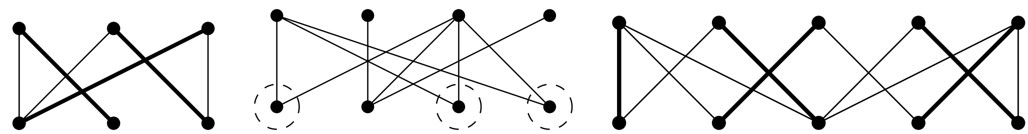
(a) 非传递的。例如，$1 \sim 2$ 且 $2 \sim 3$，但 $1 \nsim 3$。(b) 非传递的。例如，$-1 \sim 3$ 且 $3 \sim -2$，但 $-1 \nsim -2$。(c) 非传递的。例如，$-1 \sim 0$ 且 $0 \sim 1$，但 $-1 \sim 1$。

(d) 传递性。如果 ~ ，那么 和 具有相同的符号。然后如果 ~ ，与 具有相同的符号，因此 也与 具有相同的符号。于是 ~ 。(e) 传递性。这是因为 − + − = − ，所以如果 − 和 − 都是 10 的倍数，那么 − 也是。

2.7 · 二分图中的匹配

· 练习

2.7.1. 第一个和第三个图存在一个匹配（用粗体表示；当然也还有其他匹配）。中间的图不存在匹配。如果你观察三个被圈出的顶点，就会发现它们只有两个邻居，这违反了匹配条件 | ( )| ≥ | | (三个被圈出的顶点构成集合)。



2.8 · 本章小结

· 本章回顾

2.8.1. 第一个和第三个图是相同的（试着拖动顶点，使图形彼此匹配），但中间的图是不同的（例如可以注意到，中间的图只有一个度为 2 的顶点，而另外两个都有两个这样的顶点）。

2.8.2. 第一个（以及第三个）图包含一条欧拉迹。所有图都是平面的。

2.8.3。例如，$_5$。

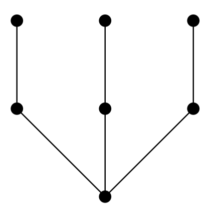
2.8.4. 例如，$_{3,3}$。

2.8.5.

(a) 是的，这些图是同构的，你可以通过把它们画出来看出这一点。一种同构是：

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ u & z & v & x & w & y & t \end{pmatrix}.$$

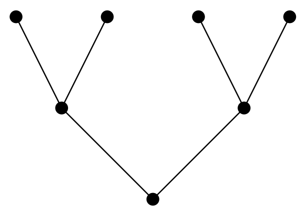
(b) 如果你画出图形，这很容易做到。这里有这样一个图：



该图的任何标号都不会与 同构。例如，我们可以取 ″ = { , , , , , , } 以及 ″ = { , , , , , }。

(c) 的度序列是 (3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)。

(d) 一般来说这应该是可能的：度序列并不能决定图的同构类。然而，在这个例子中，我几乎可以肯定这是不可能的。也就是说，直到我偶然发现了这个：



(e) 是一棵树（不存在环），因此也是二分图。

(f) 是的，所有的树都是平面的。你可以在平面上绘制它们，而不必担心边会交叉。 (g) 的色数是 2。给出一个 2 色涂色应该不难（例如，将 、 、 涂成红色，将 、 、涂成蓝色），但我们知道所有二分图的色数都是 2。 (h) 从图示中可以明显看出没有欧拉轨迹，更不用说欧拉回路了。而且，由于存在超过 2 个奇度顶点，我们可以确定没有欧拉轨迹。

2.8.6. 是的。根据欧拉公式，它将有2个面。确实如此。唯一这样的图是 $_{10}$。

2.8.7.

(a) 只有当 ≥ 6 且为偶数时。 (b) 无。 (c) 12。这样的图将有 $\frac{5n}{2}$ 条边。如果该图是平面的，那么 $-\frac{5n}{2}+ \quad = 2$，因此将有 $\frac{4+3n}{2}$ 个面。此外，由于该图是简单图，我们必须有 $3 \quad \leq 2$ 。因此我们必须有$3\left(\frac{4+3n}{2}\right) \leq 5$ 。解得 ≥ 12。

2.8.8.

(a) 有24对情侣：女孩有6种选择，男孩有4种选择。

(b) 有45对情侣：$\binom{10}{2}$ 因为我们必须从10个人中选择两个人一起跳舞。 (c) 对于(a)部分，我们在计算 $_{4,6}$ 中的边数。在(b)部分，我们计算 $_{10}$ 的边数。

2.8.9. 是的，只要 是偶数即可。如果 是奇数，那么相应的图将具有奇数个奇数度顶点，这是不可能的。

2.8.10.

(a) 不。9个三角形每个贡献3条边，6个五边形贡献5条边。这总共给出57条边，正好是边数的两倍，因为每条边恰好与2个面相邻。但是57是奇数，因此这是不可能的。

（b）现在将这16个多边形的所有边相加得到总数64，这意味着该多面体共有32条棱。然后我们可以使用欧拉公式 $-\ \ +\ \ = 2$ 推断出必定有18个顶点。

(c) 如果分别将每个多边形的所有顶点加起来，我们得到总共64个顶点。这不能被3整除，所以不可能每个顶点都属于恰好3个面。它们能否都属于4个面？那意味着有64/4 = 16个顶点，但我们知道根据欧拉公式，顶点数必须是18个。我们可以写出$64 = 3\ \ + 4\ \ $，并解出 和 （作为整数）。我们得出必须有10个度为4的顶点和8个度为3的顶点。（注意，在图论中，顶点连接的面数等于其度。）

2.8.11. 不。每个多面体都可以表示为一个平面图，而四色定理表明每个平面图的色数至多为4。

2.8.12. $_{n,n}$ 具有 ^{2} 条边。当 为偶数时，图将具有欧拉回路。仅当 < 3 时，图才是平面图。

2.8.13. 有 8 条边（因为度数之和为 16）。如果 是平面的，那么它将有 4 个面（因为 $6 - 8 + 4 = 2$）。由于存在多于 2 个奇度顶点， 不存在欧拉迹。

2.8.14. 7种颜色。因此 $_7$ 不是平面图（根据四色定理的逆命题）。

2.8.15. $_{3,4}$ 的色数为 2，因为该图是二分图。仅根据这种着色无法判断该图是否是平面的（四色定理的逆命题并不成立）。事实上，该图是 *not* 平面的，因为它包含 $_{3,3}$ 作为一个子图。

2.8.16. 我们知道 $_{3,4}$ 有 7 个顶点和 12 条边（每个在 3 组中的顶点的度数为 4）。然后根据欧拉公式，我们得到 $7 - 12 + \ \ = 2$，所以如果该图是平面的，它将有 $= 7$ 个面。然而，由于图的环长是 4（没有长度为 3 的环），我们得到 $4\ \ \leq 2\ \ $。但这意味着 $28 \leq 24$，产生了矛盾。

2.8.17. 对于所有这些问题，我们实际上是在给一个图的顶点着色。你可以通过先画出该多面体的一个平面表示，然后取其平面对偶来得到这个图：在每个面的中心（包括外部）放置一个顶点，如果两个面的共享一条边，则将对应的两个顶点连接起来。

(a) 由于十二面体的平面对偶包含一个5轮图，因此它的色数至少为4。或者，假设你可以使用3种颜色给面着色，并且没有两个相邻的面着相同的颜色。选择任意一个面，并将其涂成蓝色。与这个蓝色五边形相邻的5个五边形无法着色。

蓝色。将第一个染成红色。它的两个邻居（与蓝色五边形相邻）被染成绿色。剩下的两个不能是蓝色或绿色，但也不能都是红色，因为它们彼此相邻。因此，需要第四种颜色。

（b）十二面体的平面对偶仍然是一个平面图。因此，根据四色定理，可以只用 4 种颜色对其进行着色，并且不存在两个相邻顶点（对应于该多面体的面）被涂成相同颜色的情况。

(c) 立方体可以正确地进行三色涂色。将“顶部”和“底部”涂成红色，将“前面”和“后面”涂成蓝色，将“左侧”和“右侧”涂成绿色。

2.8.18.

(a) 错误。为证明这一点，我们可以给出一对具有相同染色数但并不同构的图的例子。例如， $_{3,3}$ 和 $_{3,4}$ 的染色数都为 2，但它们并不同构。

（b）错误。前一个例子不成立，但你可以很容易地画出两棵具有相同顶点数和边数但并不同构的树。由于所有树的染色数都是 2，这构成了一个反例。

(c) 正确。若从 $_1$ 到 $_2$ 存在一个同构，那么就存在一个双射，告诉我们如何在两个图之间匹配顶点。 $_1$ 的任何一个正确顶点着色都会告诉我们如何正确地给 $_2$ 着色，只需对每个顶点 $_i \in$ ，将 $(\ _i)$ 着成与 $_i$ 相同的颜色即可。也就是说，在 $_2$ 中对顶点的着色方式与在 $_1$ 中对对应顶点的着色方式完全相同。类似地， $_2$ 的任何一个正确顶点着色都对应于 $_1$ 的一个正确顶点着色。因此，正确着色 $_1$ 所需的最少颜色数不可能小于正确着色 $_2$ 所需的最少颜色数，反之亦然，所以它们的染色数必然相等。

2.8.19. 有 13 条边，因为我们需要 $7 - \ + 8 = 2$。

2.8.20.

(a) 该图有一条欧拉迹，但没有欧拉回路。恰好有两个奇度顶点。路径从其中一个开始，在另一个结束。(b) 该图是平面图。尽管按当前画法存在边的交叉，但很容易重新绘制而不发生边的交叉。(c) 该图既不是二分图（存在奇环），也不是完全图。

(d) 该图的色数为3。

2.8.21.

（a）错误。例如， $_{3,3}$ 不是平面图。

(b) 正确。图是二分图，因此可以将顶点划分为两组，同一组中的顶点之间没有边相连。因此，我们可以将一组的所有顶点涂成红色，另一组涂成蓝色。

(c) 错误。 $_{3,3}$ 有 6 个度为 3 的顶点，因此不包含欧拉迹。（d）错误。同样是 $_{3,3}$。（e）错误。*all* 图中所有顶点的度之和是偶数，因此该性质并不意味着该图是二分图。

2.8.22.

(a) 如果一个图具有欧拉路径，那么它是平面图。

（b）如果一个图没有欧拉迹，那么它不是平面图。

(c) 存在一个平面图，它没有欧拉迹。

(d) 是的。实际上，在这种情况下，是因为原始陈述是错误的。 (e) 错误。 $_4$ 是平面图，但没有欧拉路径。

(f) 错误。 $_5$ 有一条欧拉迹，但不是平面图。

3 · 计数

3.1 · 帕斯卡算术三角形 3.1.7 · 练习题

3.1.7.7.

a. $\binom{10}{5} = 252$ 种选择，因为你必须从 10 种配料的集合中选择一个包含 5 个元素的子集。 b. $\binom{9}{5} = 126$ 种选择，因为你必须从 9 种非青椒配料中选择 5 种。 c. $\binom{9}{4} = 1$ 26 种选择，因为除了青椒之外，你必须从剩余的 9 种非青椒配料中选择 4 种。

注意到$252 = 126 + 126$种选择，这很有道理，因为每个五种配料的披萨要么有青椒，要么没有青椒作为配料。

3.1.7.9. 要得到 ^{14}，我们必须选择16个因子中的14个来贡献一个 ，剩下的2个贡献一个3。选择这14个因子的方式有$\binom{16}{14}$种。所以包含 ^{14}的项将是$\binom{16}{14}$ $^{14}3^2$。换句话说，^{14}的系数是$\binom{16}{14}3^2 = 1080$。

3.1.7.10. 要从第一项中得到一个 ^{9}，我们必须从 17 个因子中选取 9 个来贡献一个 ，其余 8 个贡献一个 2。选择这 9 个因子的方法共有 $\binom{17}{9}$ 种，因此系数将是 $\binom{17}{9} * 2^8$。现在我们必须在第二项中选择 5 个因子来贡献一个 ，其余16 个因子贡献一个 3。由此得到该项所产生的系数为 $\binom{21}{5} * 3^{16}$。总之，包含 ^{9} 的那一项将是 $\binom{17}{9} * 2^8 + \binom{21}{5} * 3^{16} = 8.75964 \times 10^{11}$。

3.2 · 结合结果

3.2.6 · 练习题

3.2.6.1. 根据乘法原理，有 $6 \times 3 \times 15 = 270$ 种不同的服装搭配。3.2.6.2.

a. $8 + 3 = 11$ 条领带。使用加法原理。 b. $8 \cdot 3 = 2$
4 条领带。使用乘法原理 c. $2 \cdot (7 + 3) + 8 = 28$ 套
服装。

3.2.6.3.

a. 有256个三位十六进制数，其首位是E（对应其余数字的每一种选择各一个）。同样地，首位是F的也有256个十六进制数。我们要取这两个不相交集合的并集，因此首位是E或F的三位十六进制数共有$256 + 256 = 2 \cdot 256 = 512$个。 b. 我们可以用6种方式选择第一位，第2–5位各有16种方式，最后一位有10种方式。因此，在这些限制下共有$6 \cdot 16^4 \cdot 10 = 3932160$个十六进制数。 c. 以字母开头的四位十六进制数的数量是$6 \cdot 16^3 = 24576$。以数字结尾的四位十六进制数的数量是$16^3 \cdot 10 = 40960$。我们需要这两个集合中的所有元素。然而，这两个集合都包含那些*both*以字母开头且以数字结尾的四位十六进制数（$6 \cdot 16^2 \cdot 10 = 15360$），因此必须将这些（减去一次）。于是，以字母开头或以数字结尾的四位十六进制数的数量为:
$24576 + 40960 - 15360 = 50176$

3.2.6.4.

a. $2^8 = 256$ 个子集。我们需要对这 8 个元素中的每一个选择是/否。 b. $2^5 = 32$ 个子集。我们需要对剩余的 5 个元素中的每一个选择是/否。 c. $2^8 - 2^4 = 240$ 个子集。我们从所有可能子集的总数中减去那些 *not* 包含任何奇数的子集数量（2^4——对每个偶数元素选择是或否）。 d. $\binom{4}{1} \cdot 2^4 = 64$ 个子集。先选择偶数。然后对每个奇数选择是或否。

3.2.6.5.

a. $\binom{6}{4} = 15$ 个子集

b. $\binom{3}{1} = 3$ 个子集。我们需要从 剩余的 3 个元素中选择 1 个放入该子集中。 c. $\binom{6}{4} = 15$ 个子集。所有基数为 4 的子集必须至少包含一个奇数。

d. $\binom{3}{1} = 3$ 个子集。从这 3 个偶数中选择 1 个。 中剩余的 3 个奇数必须全部在该集合中。

3.2.6.7.

a. 我们可以将每一行看作一个权重为 2 的 4 位字符串（因为在 4 枚硬币中，我们要求其中 2 枚是便士）。因此共有 $\binom{4}{2} =$（即 6）行的可能。每一行需要 4 枚硬币，所以如果我们想同时制作所有这些行，就需要 24 枚硬币，其中一半是五分镍币，另一半是便士。

b. 现在有 $2^4 = 16$ 行是可能的，这也等于 $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{4}{4}$，如果你把它们分成包含 0、1、2 等便士的行。因此，由于每一行有 4 枚硬币，我们总共需要 $4 \cdot 16 = 64$ 枚硬币。

3.2.6.8. 分别计算每一种允许的 1 的个数对应的字符串数量，然后将它们相加。因此共有 $\binom{11}{4} + \binom{11}{5} + \cdots \binom{11}{11} = 1816$ 个字符串。

3.2.6.9. 这与一个关于 7 位字符串的问题是相同的，因为我们可以将每个子集看作一个 7 位字符串，其中 1 表示我们在子集中包含该元素。$\binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \cdots + \binom{10}{10} = 176$ 个子集。

3.2.6.10.

a. $\binom{14}{7} = 3432$ 条路径。所有路径的长度都是 14（7 步向上、7 步向右）；我们只需从这 14 步中选择哪 7 步是向右的。 b. $\binom{7}{3}\binom{7}{4} = 1225$ 条路径。先走到 (8, 9)，然后继续走到 (12, 12)。 c. $\binom{14}{7} - \binom{7}{3}\binom{7}{4} = 2207$ 条路径。去除你在第 (b) 部分中找到的所有路径。

3.2.7 · 附加练习

3.2.7.1.

（a）例如，如果你想看一部电影，无论是喜剧片还是恐怖片，你有 16 种选择。

(b) 例如，如果你要观看两部电影，先看一部喜剧，然后看一部恐怖片，那么你有63种选择。

3.3 · 非互斥结果 3.3.6 · 练习题

3.3.6.3. 49名学生。使用维恩图或饼图：$30 + 24 + 28 - (18 + 10 + 12) + 7 = 49.$

3.3.6.4. 使用容斥原理，以所描述的至少一种方式喜欢吃土豆的学生人数是

$$54 + 39 + 51 - (18 + 28 + 29) + 11 = 80.$$

因此有$100 - 80 = 20$名不喜欢土豆的学生。你也可以用维恩图来做这道题。

3.3.6.5.

a. $2^{10} = 1024$。对于剩余的10位中的每一位，你都有2种选择。

b. $\binom{10}{6} = 210$。你需要从剩余的10个位中选择6个位设为1。

c. 2816。有2^{10}个字符串以011开头，另外有2^{11}个字符串以01结尾（我们为11位选择1或0）。然而，我们将以011开头且以01结尾的字符串计算了两次；这样的字符串有2^8个。因此，使用PIE，我们得到$2^{10} + 2^{11} - 2^8 = 2816$。

d. 484. 有 $\binom{10}{6} = 210$ 个权重为 8 且以 011 开头的字符串，另有 $\binom{11}{7} = 330$ 个以 01 结尾的。我们再次出现了重复计数：既以 011 开头又以 01 结尾的权重为 8 的字符串，实际上有 $\binom{8}{5} = 56$ 个。因此总共有 $210 + 330 - 56 = 484$ 个字符串。

3.3.6.6. n 的 429 个值。使用 PIE：$178 + 238 + 143 - (59 + 35 + 47) + 11$，或使用维恩图。例如，要找出能被 3 和 5 整除的数的个数，取 $715/(3 \cdot 5)$ 并向下取整。

3.3.6.7. 要找出小于 1400 的 4 的倍数的数量，我们可以将 1400 除以 4 并向下取整。共有 349 个这样的数字。同样，7 的倍数有 199 个，9 的倍数有 155 个，都是小于 1 400 的。

我们还需要这些组合。是4和7的倍数意味着你是28的倍数，并且有49个4和7的倍数。将有38个4和9的倍数。将有22个7和9的倍数。最后，将有5个三个数的倍数。

使用PIE，我们得到
$349 + 199 + 155 - (49 + 38 + 22) + 5 =$ 小于1400的4、7或9的倍数。

3.3.6.8.

a. $12^{13} = 1.06993 \times 10^{14}$ 个单词，因为你从12个字母中选择13次。

b. $(12) \cdot (11) \cdot (10) \ldots (12 - 13 + 1) = 0$ 字。选择一个字母后，下一次选择时可选的字母更少。

约 $12^{10} = 6.19174 \times 10^{10}$ 词：你需要选择跟在“ade”之后的字母。

d. $12^{10} + 12^{11} - 12^8 = 8.04496 \times 10^{11}$ 个单词。有 12^{10} 个以 “ade” 开头的单词，另有 12^{11} 个以 “be” 结尾的单词。然后我们需要减去同时具备这两种情况的单词，因为它们被重复计数了。e. $(12 \cdot (12 - 1) \cdot (12 - 2) \ldots (12 - 13 + 1)) - (11 \cdot (9) \cdot (9 - 1) \cdot (9 - 2) \ldots 9 - 10 + 1) = 0$ 个单词。所有不重复的可能单词减去不合格的那些。禁忌词 “bed” 可以出现在 11 个位置中的任意一个，并且对于每个位置，我们必须从字母表中剩余的 9 个字母里选择其余的 10 个字母。

3.4 · 组合与排列 3.4.6 · 练习题

3.4.6.1.

a. $\binom{8}{2} = 28$ 种披萨。我们必须从 8 种配料中选择 2 种（不考虑顺序）。 b. $2^8 = 256$ 种披萨。对每种配料选择是或否。

c. $(8, 4) = 1680$ 种方式。将左列的 4 个位置分别分配给不同的披萨配料。

3.4.6.2. 尽管名称如此，这里我们并不是在寻找组合。三个数字出现的顺序是重要的。这种“组合”共有 $(41, 3) = 41 \cdot 40 \cdot 39$种不同的可能性。这是假设你不能重复任何数字（如果可以，答案将是 41^3）。

3.4.6.3.

a. 这只是乘法原理。对于这 7 个位置中的每一个，我们都有 8 个数字可供选择，因此共有 $8^7 = 2.09715 \times 10^6$ 个这样的数。 b. 现在第一个数字有 8 种选择，第二个有 7 种，依此类推。因此共有 $8 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 2 = (8, 7) = 40320$ 个这样的数。 c. 要构造这样的一个数，我们只需选择 7 个不同的数字。完成之后，将只有一种方式把它们按递增顺序排列。因此共有 $\binom{8}{7} = 8$ 个这样的数。

3.4.6.4.

a. 我们可以把答案写成 $(30, 19) = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \cdots \cdot 12$ 这与 $\frac{30!}{11!}$ 相同。或者，如果你先选取这 19 本书，然后再对这 19 本进行排列，可以将其写成 $\binom{30}{19} \cdot 19!$。注意，由于任何顺序都是可以接受的，我们是在区分不同的顺序，因此这里使用排列是合适的。 b. 这里我们只需要选择书籍，而不需要考虑如何排列它们。因此答案就是 $\binom{30}{19}$

3.4.6.5. 由于“ambidextrously”中有14个不同的字母，第一个字母有14种选择，下一个有13种，再下一个有12种，依此类推。因此共有14! 个变位词。

3.4.6.6. 在第一个字母（即 s）之后，我们必须重新排列剩余的 5 个字母。现在只有两种字母可供选择，因此这实际上只是一个比特串问题，其中一个字母是 0，另一个字母是 1。因此，以 “s” 开头的重排共有 $\binom{5}{2} = 10$ 个。

3.4.6.7. 首先，决定把“g”放在哪里。一共有 7 个位置，我们必须从中选出 3 个来填入一个“g”。这可以用 $\binom{7}{3}$ 种方式完成。剩下的 4 个位置都放入不同的字母，因此完成该字谜排列有 4! 种方式。这样一共有 $\binom{7}{3} \cdot 4!$ 种字谜排列。奇怪的是，这等于 840，也等于 $(7, 4)$。要用这种方法得到答案，先从 7 个 *positions* 中选一个位置来填入第一个非“g”的字母，再从剩下的 7 个位置中选一个来填入下一个，

等等。然后在剩余的3个位置放入“g”。

3.4.6.8.

a. $\binom{40}{4}\cdot\binom{36}{4}\cdot\binom{32}{4}\cdot\cdots\cdot\binom{4}{4}$ 种方式。从 40 人中选出 4 人组成第一个四人组，然后从剩余的 36 人中选出 4 人组成第二个四人组，依此类推（使用乘法原理进行组合）。b. $10!\binom{30}{3}\cdot\binom{27}{3}\cdot\binom{24}{3}\cdot\cdots\cdot\binom{3}{3}$ 种方式。先确定 10 位董事会成员的开球时间，然后为第一位董事会成员从 30 位非董事会成员中选出 3 人一起打球，再为第二位从剩余的 27 人中选出 3 人，依此类推。

3.4.6.9. 13!. 有14个人围坐在桌旁，但亚瑟王坐在哪里并不重要，重要的只是他左边、左边第二个座位上的人，依此类推。

3.4.6.10.

a. 22^{13} 个函数。定义域中每个元素的像都有 22 种选择。b. (22, 13)= $22\cdot21\cdot20\cdot\cdots\cdot9$个单射函数。定义域中第一个元素的像有 22 种选择，接着第二个只有 21 种，第三个有 20 种，依此类推。

3.4.6.11.

a. $6^5 = 7776$ 个函数，因为有 6 种选择将定义域中的每个 5 个元素发送到何处。b. (6, 5) = $6\cdot5\cdot\cdots\cdot2 = 720$ 个函数，因为输出不能重复。 c. $\binom{6}{5} = 6$ 个函数。由于函数必须是单射且递增的，我们只需要从 6 个余域元素中选择 5 个不同的元素。一旦选择了这些元素，我们必须将最小的元素作为 1 的像，次小的作为 2 的像，以此类推（这样做不会增加函数的数量，因为对于这种情况，只有一种选择方式）。

3.4.7 · 额外练习

3.4.7.1. 120.

3.5 · 多重集合计数 3.5.5 · 练习题

3.5.5.1.

a. $\binom{10}{9}$ 个集合。我们必须从 10 个数字中选择 9 个放入集合中。

b. 使用木棍和石子：每个石子代表集合中的 9 个元素之一；每根木棍代表数字之间的一次切换。因此共有 9 个石子和 9 根木棍，从而得到 $\binom{18}{9}$ 个集合。

3.5.5.2.

a. 有 $\binom{6}{5}$ 个数。我们只需从 6 个数字中选择 5 个，一旦选定，就将它们按递增顺序排列。 b. 这使用木棍和石子。用一块石子表示这 5 个数字中的每一个，并利用它们相对于木棍的位置来表示该位置填入哪个数字。因此我们将有 5 块石子和 5 根木棍，从而得到 $\binom{10}{5}$ 个数。

3.5.5.3.

a. $\binom{25}{16}$ 种方法。每一种结果都可以用由 9 根木棒和 16 颗石子组成的序列来表示。
b. $\binom{15}{6}$ 种方法。首先在每个盒子里放一个球。这样就剩下 9 根木棒和 6 颗石子。

3.5.5.4.

a. $\binom{11}{9}$ 解. 每个变量免费获得 1 块石头后，我们剩下 9 块石头和 2 根棍子。 b. $\binom{14}{12}$ 解. 我们有 12 块石头和 2 根棍子。 c. $\binom{23}{2}$ 解. 这个问题等价于求解 $' + \ ' + \ ' = 21$ 的解，其中 ′、 ′和 ′是非负数。（事实上，我们只做了一个替换。令 $= \ ' - 3$， $= \ ' - 3$ 和 $= \ ' - 3$）。

3.5.5.5. 在传统的骰子游戏中，$\binom{10}{5}$ 种结果是可能的。每个骰子是一个石块；它的值由它相对于棍子的放置位置决定。

对于超级雅兹游戏，$\binom{13}{9}$ 种结果。我们有 4 块石头（4 个骰子）和 9 根棍子（1-10 之间的 9 个开关）。

3.5.5.6. 我们必须弄清楚9个硬币的不同组合有多少种可能。让一块石头代表每个硬币，一根棍子代表硬币类型的切换。例如，如果我们有7个硬币，$**|*||****$ 代表2个便士、1个镍币、没有十分之一美元硬币和4个四分之一美元硬币。对于12个总石头和棍子（其中9个是石头，3个是棍子），这样的石头和棍子图形的数量是 $\binom{12}{9} = 0.00454545$。因此，你有1/0.00454545的概率正确猜测。

3.5.5.7. $\binom{25}{22}$ 解. 首先，通过将 13 个单位分配给变量来保证变量的限制。然后，我们找到所有关于 $'_1 + \ '_2 + \ '_3 + \ '_4 = 22$ 的非负整数解。

3.5.5.8.

a. $\binom{13}{6} = 1716$. 请注意，严格递增的函数自动是单射的。所以这6个输出必须是不同的。那么我们首先选择将使用的6个输出：有$\binom{13}{6}$种方法可以做到这一点。现在，有多少种方法可以将这些输出分配给输入1到6呢？只有一种方法，因为只有一种方式可以按递增顺序排列数字。 b. $\binom{18}{6}$。实际上这是一个棒子和石头问题。石头是6个输入，

而棒子是 13 个可能输出之间的 12 个位置。可以这样想：我们将按这个顺序指定 (1)，然后 (2)，再然后 (3)，依此类推。从可能的输出 0 开始。我们可以把它用作 (1) 的输出，或者切换到 1 作为一个潜在输出。假设我们令 (1) = 1。现在我们处在 1（不能再回到 0）。 (2) = 1 吗？如果是，那么我们就再放下一颗石子。如果不是，就放下一条棒子并切换到 2。也许你会切换到 3，然后在切换到 4 作为可能输出之前，令 (2) = 3 和 (3) = 3（再放两颗石子）。依此类推。

3.5.5.9.

a. $\binom{28}{7}$ 瓶汽水（顺序不重要，且不允许重复）。 b. $(28, 7) = (28) \cdot (28 - 1) \cdot \cdots \cdot 22$ 瓶汽水（顺序重要，且不允许重复）。 c. $\binom{34}{7}$ 瓶汽水（顺序不重要，且允许重复；7 个星和 27 个隔板）。

d. 28^7 种汽水（顺序重要，且允许重复；28 个选择，进行 7 次）。

3.5.6 · 附加练习

3.5.6.1.

(a) 你拿了 3 个草莓，1 个青柠，0 个甘草，2 个蓝莓，和 0 个泡泡糖。

(b) 这是反过来的。我们不希望用石子来代表孩子，因为孩子并不相同，而石子是相同的。相反，我们应该用 5 颗石子（代表棒棒糖），并用 5 根棍子在 6 个孩子之间切换。例如，

$$\circ\circ||\circ\circ\circ|||$$

将表示这样一种结果：第一个孩子得到2根棒棒糖，第三个孩子得到3根，其余的孩子什么也得不到。

(c) 这是单词AAAEOO。

(d) 这并不代表一个解答。每个石块应该代表加起来为6的6个单位之一，棍子应该在不同的变量之间*switch*。我们有一个多余的棍子。一个正确的示意图示例是

$$\circ|\circ\circ||\circ\circ\circ,$$

表示 $_1 = 1$，$_2 = 2$，$_3 = 0$, 和 $_4 = 3$.

3.6 · 组合证明 3.6.5 · 练习题

3.6.5.1.

- 考虑这个问题：“有多少个以 3 或 4 开头的两位数？”

- 回答这个问题的第一种方式是 $10 + 10$。
- 这是因为有10个以3开头的数字，另有10个以4开头的数字。

- 第二个答案是 $2 \cdot 10$。
- 这是因为第一位有2种选择，而第二位有10种选择。

- 由于这两个表达式回答的是同一个问题，它们必然相等。因此 $10 + 10 = 2 \cdot 10$ 。

3.6.5.2.

A. *Incorrect*.

这将不会有帮助，因为当我们从等式的一边切换到另一边时，所计数的并不是同一件事。我们需要一个问题，其中这 个事物和这 2 个事物都来自同一个由 个事物组成的集合。

B. *Correct*.

C. *Incorrect*. 如果我们想要 2 个人或 个人中的任意一种情况，我们需要将每种情况的结果数相加。D. *Correct*.

3.6.6 · 额外练习

3.6.6.1.

Proof. 问题：有多少个以a、b或c开头并以y或z结尾的两个字母的单词?

答案1：有两个以 a 开头的单词，两个以 b 开头的，两个以 c 开头的，总计为 $2 + 2 + 2$。

答案2：第一个字母有三种选择，第二个字母有两种选择，总共是 $3 \cdot 2$。

由于这两个答案都是同一问题的答案，因此它们相等。因此 $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$. ■

3.6.6.5.

(a) 她有 $\binom{15}{6}$ 种方式选择 6 位伴娘，并且对每一种方式，都有 6 种选择来确定首席伴娘。因此她共有 $\binom{15}{6}6$ 种选择。(b) 她有 15 种选择来确定谁将成为她的首席伴娘。然后她需要从剩下的 14 位朋友中选出 5 位作为伴娘，这可以用 $\binom{14}{5}$ 种方式完成。因此她共有 $15\binom{14}{5}$ 种选择。(c) 我们已经回答了这个问题（新娘可以有多少种婚礼队伍

（choose from）有两种方式。第一种方式给出恒等式的左边，第二种方式给出恒等式的右边。因此该恒等式成立。

3.6.6.7.

Proof. 问题：你有一个装满乒乓球的大容器，每个球上都有一个不同的编号。你必须选出其中的 个球，将其中两个放入一个罐子，其余的放入一个盒子。你可以有多少种做法？

解答1：首先从 个球中选出 2 个放入罐子。然后从剩余的 – 2 个球中选出 – 2 个放入盒子。第一个任务可以通过 $\binom{n}{2}$ 种不同的方式完成，第二个任务有 $\binom{n-2}{k-2}$ 种方式。因此，共有 $\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}$ 种选择球的方法。

答案2：首先从容器中的 个球中选取 个球。然后从所选的 个球中选出2个放入罐子，将剩余的 – 2个放入盒子中。第一个任务可以用$\binom{n}{k}$种方式完成，第二个任务可以用$\binom{k}{2}$种方式完成。因此共有 $($$n$

$)\,(_2)$ 选择球的方法。

由于两个答案计算的是同一事物，它们必然相等，因此恒等式得以建立。■

3.8 · 使用容斥原理的高级计数 3.8.5 · 练习题

3.8.5.1.

a. $\binom{15}{6}$ 餐数。先花 \$7 购买每种物品各一个，然后用 9 个星号在 6 根隔板之间选择物品。 b. $\binom{22}{6}$ 餐数。这里你有 16 个星号和 6 根隔板（将 7 种物品分隔开）。 a. $\binom{22}{6} - \left[\binom{7}{1}\binom{19}{6} - \binom{7}{2}\binom{16}{6} + \binom{7}{3}\binom{13}{6}\cdots\right]$ 餐数。使用 PIE 减去所有你获得某一特定物品 3 个或以上的餐数。

3.8.5.2.

a. $\binom{22}{5} = 26334$——有17颗星和5根棒。 b. $\binom{16}{5} = 4368$——购买每种物品各一个，花费\$6。这还剩下\$11分配给这6种物品，因此是11颗星和5根棒。 c. $\binom{22}{5} - \left[\binom{6}{1}\binom{17}{5} - \binom{6}{2}\binom{12}{5} + \cdots\right]$ 餐食。使用PIE减去所有你获得某一种物品5个或以上的餐食。

3.8.5.3. $\binom{18}{4} - \left[\binom{5}{1}\binom{11}{4} - \binom{5}{2}\binom{4}{4}\right]$.

3.8.5.4. 最简单的解决方法是先向每个变量分配最少数量的单位（1），然后统计满足 $_1 + \ _2 + \ _3 + \ _4 = 15$ 且 $0 \le \ _i \le 5$ 的解的个数。通过取 $_i = \ _i + 5$，这个新方程的每一个解都恰好对应原方程的一个解。

现在，所有将15个单位分配给四个 $_i$变量的方法可以通过星星与条形法找到，具体来说是15颗星星和3根条形，因此有$\binom{18}{15}$种方法。但这包括

一个或多个 $_i$变量被分配超过3个单位的方式。因此使用PIE相减，得到 $\binom{18}{3} - \left(\binom{4}{1}\binom{12}{3} - \binom{4}{2}\binom{6}{3} + \dots\right)$

$\binom{4}{1}$ 计算选择一个变量被过度分配的方式数；$\binom{12}{3}$ 是将剩余单位分配给这 4 个变量的方式数，等等。

3.8.5.5.

a. $\binom{12}{7} = 792$。这是合理的，因为如果每个学生最多只能得到一颗星，你必须从12个孩子中选出7个得到一颗星。 b. 在没有任何限制的情况下，分配星星的方式有 $\binom{18}{11}$ 种。现在我们必须使用容斥原理（PIE）来消除所有存在一个或多个学生得到多于一颗星的分配方式：

$$\binom{18}{11} - \left[\binom{12}{1}\binom{16}{11} - \binom{12}{2}\binom{14}{11} + \binom{12}{3}\binom{12}{11} - \cdots\right] = 792.$$

3.8.5.6. 首先选定 4 个元素中的一个固定。对于每一种这样的选择，使用标准的高级 PIE 公式，对剩余的 3 个进行错排。我们得到 $\binom{4}{1}\left(3! - \left[\binom{3}{1}2! - \binom{3}{2}1! + \dots \binom{3}{3}0!\right]\right)$ 个排列。

3.8.5.7. $\binom{12}{8}\left(4! - \left[\binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! \cdots + \binom{4}{4}0!\right]\right)$ = 共有 4455 种方式。我们从 12 位女士中选择 8 位戴上自己的帽子，然后乘以其余帽子可以进行错排的方式数。

3.8.5.8.

a.

$$8! - \left[\binom{8}{1}7! - \binom{8}{2}6! \dots \binom{8}{8}0!\right] = 14833$$

b.

$$\binom{8}{4}\left(4! - \left[\binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \dots \binom{4}{4}0!\right]\right) = 630$$

c. 0. 一旦有 7 个礼物拿到了它们原来的标签，就只剩下一个礼物和一个标签，因此第 8 个礼物必然会得到属于它自己的标签。

3.8.5.9. 有 $5 \cdot 6^7$ 个函数使得 $(1) \neq$ ，另有 $5 \cdot 6^7$ 个函数使得 $(2) \neq$ 。有 $5^2 \cdot 6^6$ 个函数同时满足 $(1) \neq$ 且 $(2) \neq$ 。因此，使得 $(1) \neq$ 或 $(2) \neq$ 或二者同时成立的函数总数是

$$5 \cdot 6^7 + 5 \cdot 6^7 - 5^2 \cdot 6^6 = 1.63296 \times 10^6.$$

3.8.5.10. $5^8 - \left[\binom{5}{1}4^8 - \binom{5}{2}3^8 + \binom{5}{3}2^8 - \cdots + \binom{5}{4}1^8\right]$ 函数。5^8 是从 到 的所有函数。我们减去那些不是满射的函数。选择 中的一个元素不在值域中（有 $\binom{5}{1}$ 种方法），然后计算所有这些函数（4^8）。但是这样会多算了那些有两个元素从 被排除在值域之外的函数，所以需要减去这些。依此类推，使用包含排除原理（PIE）。

3.8.5.11. 1854个函数。这是一种巧妙的方法，用于求解7个元素上的错排数。

3.8.6 · 额外练习

3.8.6.2. 9种错排是：2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321。

3.9 · 章节总结

· 本章回顾

3.9.1.

a. $\binom{14}{10}$ 种方式。给每个孩子一个礼物后，你剩下10个礼物（石头），需要将它们分配给5个孩子（给4根棍子）。 b. $\binom{19}{15} = 3876$种方式。你有15颗石头和4根棍子。 c. 5^{15}。你有5种选择将每个礼物送给谁。这就像是从礼物集合到孩子集合的一个函数。 d. $5^{15} - \left[\binom{5}{1}(5-1)^{15} - \binom{5}{2}(5-2)^{15} + \binom{5}{3}(5-3)^{15} \ldots\right]$ 种方式。现在，从礼物集合到孩子集合的函数必须是满射。

3.9.2.

(a) 都不是。$\binom{14}{4}$ 条路径。(b) $\binom{10}{4}$ 个领结。(c) (10, 4)，因为顺序很重要。

（d）都不是。假设你将在 7 天中的 4 天里各戴一条这 4 条领带，且不重复：$\binom{10}{4}$ (7, 4)。

（e） (10, 4)。（f）$\binom{10}{4}$。（g）都不是。因为你可以重复字母：10^4。如果不允许重复，那就是 (10, 4)。

(h) 都不是。实际上，“k”是字母表中的第11个字母，所以答案是0。如果“k”在前10个字母之中，那么只有1种方法——把它写下来。

(i) 都不是。要么 $\binom{9}{3}$ (如果每个孩子都得到一个苹果)，要么 $\binom{13}{3}$ (如果允许没有苹果的孩子)。

(j) 都不是。注意这不可能是$\binom{10}{4}$，因为这10样东西和4样东西来自不同的组。4^{10}，假设每个孩子吃一种麦片。

(k) $\binom{10}{4}$。不要被其中的“安排”所迷惑。你是在从10个*spots*中挑选4个来放置1。

(l) $\binom{10}{4}$ (假设顺序无关紧要)。

(m) 都不是。16^{10} (每个孩子对4种品类)选择是或否。

(n) 两者都不。0.

（o）都不是。$4^{10} - [\binom{4}{1}3^{10} - \binom{4}{2}2^{10} + \binom{4}{3}1^{10}]$.

(p) 都不是。$10 \cdot 4$。

(q) 都不是。4^{10}。

(r) $\binom{10}{4}$ (，这与 $\binom{10}{6}$) 相同。(s) 都不是。如果所有孩子都是相同的，并且你不希望有空队，那么应为 $\binom{10}{4}$。相反，这等同于从一个大小为 11 的集合到一个大小为 5 的集合的满射函数的数量。(t) $\binom{10}{4}$。(u) $\binom{10}{4}$。(v) 都不是。4!。

(w) 都不是。如果不重复任何选择，则为 $\binom{10}{4}$。如果允许重复，则变为 $_1 + \ _2 + \cdots + \ _{10} = 4$，在非负整数中有 $\binom{13}{9}$ 个解。

（x）都不是。由于允许饼干类型重复，答案是 10^4。如果不允许重复，则为 (10, 4)。

(y) $\binom{10}{4}$ 因为这等于 $\binom{9}{4} + \binom{9}{3}$。

(z) 都不是。这将是一个复杂的（可能是 PIE 的）计数问题。

3.9.3.

a. 2^{14} = 种选择，共 16384 种。对于每条领带，你有两种选择：戴或不戴。 b. 普通领带有 511 种选择（2^9 种选择减去“没有普通领带”的选项），领结有 31 种选择（2^5 总数减去“没有领结”的选项）。因此你共有 $511 \cdot 31 = 15841$ 种选择。 c. $\binom{9}{3}\binom{5}{2} = 840$ 种选择。 d. 先从 2 个领结中选择一个放在最上面。接下来一条领带有 4 种选择，再下一条有 4-1 种选择，依此类推。因此共有 $2 \cdot 4! = 48$ 种选择。

3.9.4. 你拥有8个紫色领结、3个红色领结、3个蓝色领结和5个绿色领结。你可以从每种颜色中各选一个带去旅行，一共有多少种方式？ $8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$种方式。明天你选择佩戴一个领结有多少种选择？ $8 + 3 + 3 + 5$ 种选择。

3.9.5.

a. 8^{11} 个数字。 b. $8^{10}\cdot 4$ 个数字（前 10 位可以任意选择数字，然后选择最后一位为偶数或奇数之一，使得总和为偶数）。 c. 我们需要 6 个或更多的偶数数字。6 个偶数数字：$\binom{11}{6}4^6 4^{11-6}$。6+1 个偶数数字：$\binom{11}{(6+1)}4^{6+1} * 4^{11-6-1}$，等等。将这些相加，我们就得到具有 6 个或更多偶数数字的总方案数。

3.9.6. 48 名乘客。我们要求三个不互斥集合的并集的大小。使用容斥原理，我们有 $27 + 20 + 29 - (13 + 11 + 10) + 6 = 48$。

3.9.7.

a. 2^10 字符串
。 b. $\binom{10}{5}$ 字符
串。 c. $\binom{10}{5}$ 字
符串。

3.9.8. $3^5\cdot\binom{15}{10} + 5^{14}\cdot\binom{2\ 1}{7}$.

3.9.9. 允许重复字母时，我们选择 10 个字母中的 3 个作为元音字母，然后为每个位置选择 5 个元音字母中的一个，最后为剩余的 7 个位置选择其他 21 个字母中的一个。因此，$\binom{10}{3}5321^7$ 个词。

没有重复，我们仍然选择元音的位置，但现在每次放置一个元音时，下一次的选择会减少一个。类似地，我们不能重复辅音。我们得到 $\binom{10}{3}$ (5, 3) (21, 7) 个单词。

3.9.10.

a. $\binom{3}{2}\binom{9}{4} = 378$条路径。 b. $\binom{12}{6} - \binom{10}{5}\binom{2}{1} =$
420条路径。 c.
$\binom{3}{2}\binom{9}{4} + \binom{10}{5}\binom{2}{1} - \binom{3}{2}\binom{7}{3}\binom{2}{1} = 672$条路径。

3.9.11. $\binom{31}{15}\left(\binom{31}{15} - 1\right)$ 路线。对于每一条 $\binom{31}{15}$ 路线，要使其有效，必须有恰好一条回程路线。

3.9.12. $2^8 + 2^9 - 2^6$ 字符串（使用 PIE）。

3.9.13. $\binom{12}{3} + \binom{13}{4} - \binom{10}{2}$ 字符串。

3.9.14. 有 3 个位置可以开始单词，然后剩下的三个位置有 2! 种方式排列其他字母。因此，避免连续字母“bad”作为子词的单词数为 $5! - 3\cdot 2! = 114$。

如果我们现在需要避免把“b”放在“a”之前，“a”放在“d”之前，我们必须选择这些字母的位置（按此顺序），然后排列剩下的2个字母。因此，$5! - \binom{5}{3}2! = 1$
00个单词。

3.9.15. 2^n 是长度为 的格路径的数量，因为对于每一步你都可以向上或向右。这样的路径会终止在直线 + = 上。因此你将终止于 (0,)，或 (1, − 1)，或 (2, − 2)，或 . . . 或 (, 0)。分别计算到这些点的路径数，得到 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ (，每一次都是在 步中选择哪些步向右)。这两种方法计算的是同一个量，因此它们是相等的。

3.9.16.

a. $\binom{15}{10} = 3003$ 种方式。 b. $\binom{21}{16} = 20349$ 种方式。 c. $\binom{15}{10} - \left[\binom{6}{1}\binom{8}{5} - \binom{6}{2}\binom{1}{5} \ldots\right] = 287$
7 种方式。

3.9.17.

a. $4^3 + 4^3 - 4^2 = 112$ 个函数。

b. $3 \cdot 4^3 + 4 \cdot 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 3 \cdot 4^2 = 240$ 个函数。

c. $4! - [3! + 3! - 2!] = 14$ 个函数。注意我们使用阶乘而不是幂，因为我们在寻找单射函数。

d. 注意这里的满射与单射是等价的，因此我们可以从所有 4! 个单射函数开始，减去那些具有一个或多个“固定点”的函数。我们得到 $4! - \left[\binom{4}{1}(4-1)! - \binom{4}{2}(4-2)! + \binom{4}{3}(4-3)! - \ldots \binom{4}{4}0!\right] = 9$ 个函数。

3.9.18. $4^6 - \left[\binom{4}{1}3^6 - \binom{4}{2}2^6 + \binom{4}{3}1^6\right]$.

3.9.19.

a. $\binom{13}{8} = 1287$ 种组合。你需要从 13 种饼干类型中选择 8 种。顺序无关。 b. $(13, 8) = 13 \cdot (13-1) \cdot (13-2) \cdot \cdots \cdot (13 - 8 + 1) = 5.18918 \times 10^7$ 种方式。你是在从 13 种饼干中选择并排列 8 种。现在顺序是重要的。 c. $\binom{35}{23} = 8.34452 \times 10^8$ 种选择。在制作 23 块饼干的过程中，你必须在饼干类型之间切换 12 次。饼干是石子；饼干类型之间的切换是棍子。 d. 13^{23} 种选择。“1”号饼干有 13 种选择，“2”号饼干也有 13 种选择，依此类推。 e. $13^{23} - \left[\binom{13}{1}(13-1)^{23} - \binom{13}{2}(13-2)^{23} + \cdots - \binom{13}{13}0^{23}\right] = 2.49879 \times 10^{24}$ 种选择。我们必须使用 PIE（容斥原理）来去除所有至少有一种饼干类型未被选择的情况。

3.9.20.

（a）你从10种不同类型的饼干中选取4种给你的教授。这并不适合用函数来解释。我们

could 假设定义域包含你要给教授的4种类型，而陪域包含你可以选择的10种类型，但这样去计数单射就太多了（不管你是先选第3种再选第2种，还是反过来，重要的只是你选了这两种类型）。

(b) 我们想考虑从集合{最多、第二多、第二少、最少}到10种饼干类型集合的单射函数。我们之所以要单射，是因为不能选择同一种饼干类型同时作为“最多”和“最少”（例如）。 (c) 这不是一个适合用函数来理解的问题。问题在于，定义域必须是你烘焙的12块饼干，但这些元素是不可区分的（不存在第一块饼干、第二块饼干等）。 (d) 定义域应当是12种形状，陪域是10种饼干类型。由于可以对不同形状使用同一种类型，我们在这里感兴趣的是计数所有函数。 (e) 这里我们要求每一种饼干类型至少被使用一次，因此现在我们是在询问上一部分所计数函数中的满射数量。

4 · 数列

4.1 · 描述数列 4.1.7 · 附加练习

4.1.7.1.

(a) 递归定义为 $_n = _{n-1} + 2$，且 $_1 = 1$。一个闭式公式为 $_n = 2 \quad - 1$。

(b) 部分和的序列是 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... 一个递归定义是（和往常一样） $_n = _{n-1} + _n$，在本例中为 $_n = _{n-1} + 2 \quad - 1$。看起来闭式公式是 $_n = {}^2$

4.1.7.2.

（a）0，1，2，4，7，12，20，……（b） $_0 + _1 + \cdots + _n = _{n+2} - 1$。

4.1.7.3. 这些序列都具有相同的递推关系： $_n = _{n-1} + _{n-2}$ (与斐波那契数)相同。唯一的区别在于初始条件。

4.1.7.4. 3, 10, 24, 52, 108, ... 10, 24, 52, . . . 的递归定义是 $_n = 2 _{n-1}+4$，其中 $_1 = 10$。

4.1.7.5. −1, −1, 1, 5, 11, 19, . . . 因此，序列 0, 2, 6, 12, 20, . . . 的闭式公式为 $_n = (\quad + 1)^2 - 3(\quad + 1) + 2$。

4.1.7.6. 该闭式公式将包含 $_{n-1}$ =、$3 \cdot 2^{n-1}$ +、$7 \cdot 5^{n-1}$ 以及 $_{n-2}$ =

$3 \cdot 2^{n-2} + 7 \cdot 5^{n-2}$。然后我们将得到

$$\begin{aligned} 7a_{n-1} - 10a_{n-2} &= 7(3 \cdot 2^{n-1} + 7 \cdot 5^{n-1}) - 10(3 \cdot 2^{n-2} + 7 \cdot 5^{n-2}) \\ &= 21 \cdot 2^{n-1} + 49 \cdot 5^{n-1} - 30 \cdot 2^{n-2} - 70 \cdot 5^{n-2}) \\ &= 21 \cdot 2^{n-1} + 49 \cdot 5^{n-1} - 15 \cdot 2^{n-1} - 14 \cdot 5^{n-1}) \\ &= 6 \cdot 2^{n-1} + 35 \cdot 5^{n-1} \\ &= 3 \cdot 2^{n} + 7 \cdot 5^{n} = a_n. \end{aligned}$$

因此，闭式公式与递推关系一致。该闭式公式的初始项为 $_0 = 10$ 和 $_1 = 41$。

4.1.7.10.

（a）$\sum_{n}^{n} 2$ 。（b）$\sum^{107}(1 + 4（\ - 1)）$。（c）$\sum_{k=1}^{50} 1$ 。
（d）$\prod_{k=1} 2$ 。（e）$\prod_{k=1}^{100}$ $+ 1$。

4.1.7.11.

(a) $\sum_{k=1}^{100}(3 + 4\ ) = 7 + 11 + 15 + \cdots + 403$。(b) $\sum_{k=0}^{n} 2 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$。(c) $\sum_{k=2}^{50} 1\ (\ ^2 - 1) = 1\ 13\ 18\ 115 + \cdots\ 1\ 2499$。(d) $\prod_{k=2}^{100}$ $n^2\ ^2 - 1 = 43 \cdot 98 \cdot 1615 \cdots 10000\ 9999$。(e) $(\prod_{k=0}^{n}(2 + 3)) = (2)(5)(8)(11)(14) \cdots (2 + 3\ )$。

4.2 · 增长率 4.2.6 · 练习题

4.2.6.8. 对于算术：$= 83.6666666666667$，$= 42.3333333333333$。对于等差数列，我们知道 $125 + \ = \ ,\ + \ = \ $，以及 $+ \ = 1$。换句话说，$125 + 3\ = 1$，因此 $= (-41.3333333333333)/3$。对于几何：$= 25$ 且 $= 5$。

同样地，我们可以通过求解 125 · ^{3} = 1 来求出等比数列的公比 。

4.2.6.9. 对于算术： = 13， = 22。我们知道 4 + = ， + = ， 以及 + = 31 。换句话说，4 + 3 = 31，因此 = (27)/3。

对于几何： = 7.91578， = 15.6649。我们可以通过求解 4 · ^{3} = 31 来求得该等比数列的公比 。

4.3 · 多项式数列 4.3.6 · 练习题

4.3.6.1.

(a) $_n$ = $_{n-1}$ + 3； $_1$ = 10。 (b) $_n$ = 7 + 3 。(c) 是的，1555 = $_{516}$。 (d) 该数列有142项。 (e) 和为31453。 (f) $_n = 3 + \frac{(10+7+3n)n}{2}$ 。

4.3.6.2.

a. 25，即 20 + 5。 b. 该数列是等差数列， $_0$ = 5，公差为 5，因此 $_n$ = 5 + 5 。c . 25250。我们要求 5 + 15 + · · ·+ 500。将其倒序相加，得到 100 个 505 的和，总计 50500，这是我们所求和的两倍。

4.3.6.3.

a. 45. b. 238 · 44 2
= 5355.

4.3.6.4.

a. − (−2) + 1 项，因为要使用公式 12 + 6 得到 −18，我们必须使用 = −2。 b. 12 − 6，比 12 + 6 少 12（或者将 − 1 代入 ）。c. $\frac{(12n-12)*(n-(-2)+1)}{2}$。倒序并相加。每个和都得到常数 12 − 12，而且有 − (−2) + 1 项。

4.3.6.5. 273310. 如果我们取 $_0$ = 2，和式的项是一个等差数列，闭式公式为 $_n$ = 2 + 6 。然后1808 = $_{301}$，和式共有 302 项。倒序并相加得到 302 个相同的 1810 项，结果是我们总和的两倍。

寻求。 $1810 \cdot 302/2 = 273310$。

4.3.6.6. $_n = \ ^2 + 8\ $ 。这里我们知道我们在寻找一个二次函数，因为二阶差分是常数。因此 $_n = \ ^2 + \ + \ $ 。由于 $_0 = 0$，我们知道 $\ = 0$。所以只需解这个方程组

$9 = \ + \ \ 20 = 4\ + 2$
，求 $\ = 1$ 和 $\ = 8$。

4.3.6.7. $_n = \ ^2 + 4\ - 1$。这里我们知道我们要找的是一个二次函数，因为二阶差分是常数。因此 $_n = \ ^2 + \ + \ $ 。由于 $_0 = -1$，我们知道 $\ = -1$。所以只需解这个方程组

$$4 = a + b + -1$$
$$11 = 4a + 2b + -1$$

to find $a = 1$ and $b = 4$.

4.3.6.8. $_n = 2\ ^3 - 2\ + 5$。这里我们知道我们在寻找一个三次多项式，因为三阶差分是常数。因此 $_n = \ ^3 + \ ^2 + \ + \ $ 。由于 $_0 = 5$，我们知道 $\ = 5$。所以只需解这个方程组

$$5 = a + b + c + 5$$
$$17 = 8a + 4b + 2c + 5$$
$$53 = 27a + 9b + 3c + 5$$

求 $\ = 2$, $\ = 0$, 和 $\ = -2$.

4.3.6.9. $_n = 2\ ^3 + 8\ ^2 - 4\ + 3$。这里我们知道我们在寻找一个三次函数，因为三阶差分是常数。因此 $_n = \ ^3 + \ ^2 + \ + \ $ 。我们可以反向推导，得到 $_0 = 3$，所以我们知道 $\ = 3$。然后解这个方程组，

$$9 = a + b + c + 3$$
$$43 = 8a + 4b + 2c + 3$$
$$117 = 27a + 9b + 3c + 3$$

to find $a = 2$, $b = 8$, and $c = -4$.

4.3.6.10. $_{n-1} = 2(\ - 1)^2 + 3(\ - 1) + 2 = 2\ ^2 - \ + 1$ 因此 $_n - \ _{n-1} = 4\ + 1$。注意这是线性的（算术的）。

4.3.6.11. $_n = 2\ ^3 + 3\ ^2 + 2\ $ 。这里我们知道要寻找的是一个三次函数，因为三阶差分是常数。因此 $_n = \ ^3 + \ ^2 + \ + \ $ 。我们可以倒推得到 $_0 = 0$，因此我们知道 $\ = 0$。然后解这个方程组，

$$7 = a + b + c$$
$$32 = 8a + 4b + 2c$$
$$87 = 27a + 9b + 3c$$

to find $a = 2$, $b = 3$, and $c = 2$.

4.3.7 · 附加练习

4.3.7.4. $_n = \ ^2 - \ + 1$.

4.3.7.5. $_n = \ ^3 + \ ^2 - \ + 1$

4.3.7.6. 我们有 $2 = 2, 7 = 2 + 5, 15 = 2 + 5 + 8, 26 = 2 + 5 + 8 + 11$，依此类推。和式中的项由等差数列 $_n = 2 + 3$ 给出。换句话说，$_n = \sum_{k=0}^{n}(2 + 3\ )$。为了找到封闭公式，我们逆向并相加。我们得到 $_n = \frac{(4+3n)(n+1)}{2}$ (我们有 $+ 1$，因为在 $_n$) 的和式中有 $+ 1$ 项。

4.3.7.9. $_{n-1} = (\ - 1)^2 + (\ - 1) + \ = {}^2 - 2 \ + \ + \ - \ +$ 。因此 $_n - {}_{n-1} = 2 \ - \ +$ ，这是算术的。请注意，这并不完全是 $_n$ 的导数，导数应该是 $2 \ +$ ，但它很接近。

4.3.7.10. 否。差分序列与原序列相同，因此不存在常数差分。

4.3.7.11. 不。该序列是几何数列，实际上具有封闭公式 $2 \cdot 3^n$。这是一个指数函数，不能等于任何次数的多项式。如果第 阶差列是常数，则原始序列的封闭公式将是一个 次多项式。

4.4 · 指数数列 4.4.5 · 练习题

4.4.5.1. $\frac{6 \cdot 5^{20} - 6}{4}$。设和为 ，并计算5 $-\ = 4$ ，这会使除6 和 $6 \cdot 5^{20}$ 之外的项相互抵消。然后求解 。

4.4.5.2. $\frac{1+(-1)^{38}\frac{7^{38}}{4^{38}}}{11/4}$. 计算 $+ \frac{7}{4}$ 。

4.4.5.3. $_n = -4 + 2^{n+1}$. 我们应该在这里使用望远镜法或迭代法。例如，望远镜法给出

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 2^1 \\ a_2 - a_1 &= 2^2 \\ a_3 - a_2 &= 2^3 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= 2^n \end{aligned}$$

其和为 $_n - {}_0 = 2^{n+1} - 2$（使用右侧几何级数的乘-移-减技术）。代入 $_0 = -2$ 并求解 $_n$ 即完成解答。

4.4.5.4. 通过特征根法。$_n = (-4)^n + 6^n$。

4.4.5.5. 两个序列的特征根都是 -1 和 2（由于这两个序列具有相同的递推关系，它们具有相同的特征根）。对每种情况求解系数即可得到闭式公式。我们有 $_n = (-1)^n + 2^n$，以及 $_n = \left(\frac{4}{3}\right)(-1)^n + \left(\frac{23}{3}\right) \cdot 2^n$。

4.4.5.6. 通过特征根法。$_n = 7 \cdot 2^n - 3(-1)^n$。

4.4.6 · 额外练习

4.4.6.1. 171 和 341。 $_n$ = $_{n-1} + 2$ $_{n-2}$，其中 $_0$ = 为 3，且 $_1$ = 为 5。闭式公式：$_n = \frac{8}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$。为求得此式，解特征方程，$^2 - \quad - 2 = 0$，得到特征根 $= 2$ 和 $= -1$。然后求解该方程组

$$3 = a + b$$
$$5 = 2a - b$$

4.4.6.3. 我们声称 $_n = 4^n$ 可行。将其代入：$4^n = 3(4^{n-1}) + 4(4^{n-2})$。这是可行的；只需化简右端。

4.4.6.6.

（a） $_n = 4$ $_{n-1} + 5$ $_{n-2}$。 （b
）4, 21, 104, 521, 2604, 13021
（c） $_n = \frac{5}{6}5^n + \frac{1}{6}(-1)^n$。

4.4.6.8. 我们有特征多项式 $^2 - 2 \quad + 1$，其唯一的重根是 $= 1$。因此，使用重根的特征根方法，通解为 $_n = \quad + \qquad$，其中和 取决于初始条件。

(a) $_n = 1 +$ 。(b) 例如，我们可以有 $_0 = 21$ 和
$_1 = 22$。 (c) 对于每个 。取 $_0 = \quad - 9$ 和 $_1 = \quad - 8$。

4.5 · 归纳法证明

4.5.6 · 练习题

4.5.6.1.

A. *Correct*. B
. *Correct*. C.
Incorrect. D.
Incorrect. E.
Incorrect.

4.5.6.2.

A. *Correct*. B
. *Incorrect*. C
. *Incorrect*. D
. *Incorrect*. E.
Incorrect.

4.5.6.3.

A. *Correct.* B. *Incorrect.* 尽管求和从 2 开始，我们仍需要考虑使得命题 ( ) 为真的最小 。C. *Incorrect.* D. *Incorrect.* E. *Incorrect.*

4.5.6.4.

A. *Correct.* B. *Incorrect.* 假设对于任意的 ，( ) 和 ( ) 都为真 ≥ 1；也就是说，假设 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2 \;=\; (\; + 1)$ 和 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2 \; + 2 \; + 2) = (\; + 1)(\; + 2)$。C. *Incorrect.* D. *Incorrect.*

4.5.6.5.

- 设 ( ) 为命题，“ $_n = 5^n - 1$”。
- 注意 $_0 = 5^0 - 1 = 0$，因此 (0) 为真。
- 现在假设对于任意整数 ≥ 0， ( ) 为真。
- 然后 $_k = 5^k - 1$。
- 根据递推关系，我们有 $_{k+1} = 5 \; _k + 4 = 5(5^k - 1) + 4$。
- 这简化为 $_{k+1} = 5^{k+1} - 5 + 4 = 5^{k+1} - 1$，因此 (+ 1) 为真。
- 因此，根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 ≥ 0 都成立。

4.5.6.6.

- 设 ( ) 为命题：“$14^n - 1$ 是 13 的倍数。”
- 注意到 $14^1 - 1 = 13$，所以这肯定是 13 的倍数。
- 现在假设对于任意整数 ，( ) 为真 ≥ 1。
- 那么 $14^k - 1 = 13 \cdot$ ，其中为某个整数。
- 由于 $14^{k+1} - 1 = 14(14^k - 1) + 14 - 1 = 14(13 \cdot \;) + 13$，我们看到 $14^{k+1} - 1$ 是 1
3 的倍数。

- 因此 (+ 1) 为真。
- 因此，根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 ≥ 1 都成立。

4.5.6.7.

- 令 ( ) 为如下陈述："$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + {}_{n} = {}_{n+2} - 1$。"
- 对于基例，注意到 (1) 和 (2) 都为真，因为 $1 = 2 - 1$ 且 $1 + 1 = 3 - 1$。
- 现在假设对于任意整数 ≥ 2， ( ) 成立。
- 也就是说，假设 $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + {}_{k} = {}_{k+2} - 1$。
- 然后在两边加上 ${}_{k+1}$，我们得到 $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \cdots + {}_{k} + {}_{k+1} = {}_{k+1} + {}_{k+2} - 1$。
- 根据斐波那契数的定义， ${}_{k+1} + {}_{k+2} = {}_{k+3}$，因此右边化简为 ${}_{k+3} - 1$。
- 因此， (+ 1) 为真，因此根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 ≥ 1 都为真。

4.5.7 · 附加练习

4.5.7.1.

(a) 如果我们有一个以 5 结尾的豆子数量，并将其加倍，我们将得到一个以 0 结尾的豆子数量（因为 $5 \cdot 2 = 10$）。然后如果我们减去 5，我们将再次得到一个以 5 结尾的豆子数量。因此，如果在任何一天我们有一个以 5 结尾的数量，那么第二天我们也将有一个以 5 结尾的数量。(b) 如果你不*start*以一个以 5 结尾的豆子数量（在第 1 天）开始，上述推理仍然正确，但并没有帮助。例如，如果你从一个以 3 结尾的数量开始，第二天你将得到一个以 1 结尾的数量。

(c) 部分 (b) 是基例，部分 (a) 是归纳步骤。若在第 1 天我们有一个以 5 结尾的数（由部分 (b)），那么在第 2 天我们也将有一个以 5 结尾的数（由部分 (a)）。接着再次由部分 (a)，在第 3 天我们将有一个以 5 结尾的数。再次由部分 (a)，这意味着在第 4 天我们也将有一个以 5 结尾的数。

> 归纳法证明会说，在*every*天我们将得到一个以5结尾的数字，这之所以成立，是因为我们可以从基础情况开始，然后不断使用归纳情况，直到我们得到所需的 。

4.5.7.2.

*Proof*我们必须证明 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ 对所有 $\in$ 都成立。因此，令 ( ) 为命题 $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$。我们将证明 ( ) 对所有 $\in$ 都成立。首先我们建立基本情况 (0)，它声明 $1 = 2^{0+1} - 1$。由于 $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$，我们可以看出 (0) 成立。现在进入归纳情况。假设

即对于任意的 $\in$ ， ( ) 为真。也就是说，$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$。我们必须证明 (+ 1) 为真（即 $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$）。为此，我们从 (+ 1) 的左边开始，并推导到右边：

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} && \text{by the inductive hypothesis.} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

因此 (+ 1) 为真，所以根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 $\in$ 都为真。■

4.5.7.3.

Proof。设 ( ) 为命题："$7^n - 1$ 是 6 的倍数。"我们将证明对于所有 $\in$ ， ( ) 都成立。首先建立基例 (0)。由于 $7^0 - 1 = 0$，且 0 是 6 的倍数，因此 (0) 成立。现在进行归纳步骤。假设对于任意的 $\in$ ， ( ) 成立。也就是说，$7^k - 1$ 是 6 的倍数，或者换言之，存在某个整数 ，使得$7^k - 1 = 6$ 。现在考虑 $^{k+1} - 1$：

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 1 &= 7^{k+1} - 7 + 6 && \text{by cleverness: } -1 = -7 + 6 \\ &= 7(7^k - 1) + 6 && \text{factor out a 7 from the first two terms} \\ &= 7(6j) + 6 && \text{by the inductive hypothesis} \\ &= 6(7j + 1) && \text{factor out a 6} \end{aligned}$$

因此 $7^{k+1} - 1$ 是 6 的倍数，换言之， (+ 1) 为真。因此根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 $\in$ 都为真。■

4.5.7.4.

Proof。设 ( ) 为命题 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2\ - 1) = \ ^2$。我们将证明对于所有 ≥ 1， ( ) 都成立。首先是基例， (1)。我们有 $1 = 1^2$，这是真的，因此 (1) 得以确立。现在是归纳步骤。假设对于某个固定但任意的 ≥ 1， ( ) 成立。也就是说，$1 + 3 + 5 + \cdots + (2\ - 1) = \ ^2$。我们现在将证明 (+ 1) 也成立（即，$1 + 3 + 5 + \cdots + (2\ + 1) = (\ + 1)^2$）。我们从 (+ 1) 的左边开始，并推导到右边：

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) && \text{by the inductive hypothesis} \\ &= (k + 1)^2 && \text{by factoring} \end{aligned}$$

因此， (+ 1)成立，所以根据数学归纳法原理， ( )对所有 ≥ 1都成立。■

4.5.7.5.

Proof。设 ( ) 为如下陈述：$_0 + {}_2 + {}_4 + \cdots + {}_{2n} = {}_{2n+1} - 1$。我们将证明对于所有 ≥ 0， ( ) 都为真。首先，基例是容易的，因为 $_0 = 0$ 且 $_1 = 1$，所以 $_0 = {}_1 - 1$。现在考虑归纳步骤。假设 ( ) 为真，即假设

$0 + \ _2 + \ _4 + \cdots + \ _{2k} = \ _{2k+1} - 1$. 为了建立 (+ 1)，我们从左到右进行：

$$\begin{aligned} F_0 + F_2 + \cdots + F_{2k} + F_{2k+2} &= F_{2k+1} - 1 + F_{2k+2} && \text{by the inductive hypothesis.} \\ &= F_{2k+1} + F_{2k+2} - 1 \\ &= F_{2k+3} - 1 && \text{by the recursive definition.} \end{aligned}$$

因此 $\ _0 + \ _2 + \ _4 + \cdots + \ _{2k+2} = \ _{2k+3} - 1$，也就是说 (+ 1) 成立。因此根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 ≥ 0 都成立。■

4.5.7.6.

Proof. 令 ( ) 为命题 $2^n <$!。我们将证明对于所有 ≥ 4， ( ) 都成立。首先，我们检查基例，确实如此，$2^4 < 4!$（因为 $16 < 24$），所以 (4) 成立。现在来看归纳情形。假设对于任意的 ≥ 4， ( ) 成立。也就是说，$2^k <$!。现在考虑 (+ 1)：$2^{k+1} <$ (+ 1)!。为了证明这一点，我们从左边开始并推到右边。

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &< 2 \cdot k! && \text{由归纳假设} \\ &< (k+1) \cdot k! && \text{由于 } \ + 1 > 2 \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

因此 $2^{k+1} <$ (+ 1)!，所以我们已经建立了 (+ 1)。因此根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 ≥ 4 都成立。■

4.5.7.12. 唯一的问题是我们从未建立基本情况。当然，当 = 0, 0 + 3 ≠ 0 + 7。

4.5.7.13.

Proof. 令 ( ) 表示如下命题： + 3 < + 7。我们将证明对所有 ∈ ， ( ) 都成立。首先，注意基例成立：0 + 3 < 0 + 7。现在作归纳假设，假定 ( ) 为真。也就是说， + 3 < + 7。我们必须证明 (+ 1) 为真。现在由于 + 3 < + 7，给两边都加 1。这得到 + 3 + 1 < + 7 + 1。重新分组得到 (+ 1) + 3 < (+ 1) + 7。但这正是 (+ 1)。因此，根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 ∈ 都为真。■

4.5.7.14. 这里的问题在于，虽然 (0) 为真，并且对于 *some* 个 的取值， ( ) → (+ 1) 成立，但至少存在一个 的取值（即 = 99）使得该蕴含不成立。对于一个有效的归纳证明，必须对所有大于或等于基例的 的取值， ( ) → (+ 1) 都为真。

4.5.7.16. 我们再次未能确立基例：当 = 0， ^{2} + = 0，这是偶数，而不是奇数。

4.5.7.22. 这里的想法是，如果我们对 ^{n} 取对数，我们可以通过再乘以一个 （在对数内）来将 增加 1。这会导致总和再加上 1 个 log( )。

*Proof*令 ( ) 为命题 log(^{n}) = log( )。基例 (2) 为真，

因为 log(^{2}) = log(·) = log( ) + log( ) = 2 log( )，根据对数的乘积法则。现在为进行数学归纳，假设 ( ) 成立。也就是说，log(^{k}) = log( )。考虑 log($^{k+1}$)。我们有

$$\log(a^{k+1}) = \log(a^k \cdot a) = \log(a^k) + \log(a) = k\log(a) + \log(a),$$

最后一个等式源于归纳假设。但这可化简为 (+ 1) log( )，从而确立 (+ 1)。因此，根据数学归纳法原理，( ) 对所有 ≥ 2 都成立。■

4.6 · 强归纳法 4.6.4 · 练习题

4.6.4.1.

A. *Correct*. B
. *Correct*. C.
Incorrect. D.
Incorrect. E.
Incorrect.

4.6.4.2.

- 设 ( ) 为如下命题：一块长度为 个方格的巧克力棒可以通过进行 − 1 次折断而被分成 块。
- (1) 为真，因为一块长为 1 格的巧克力棒已经是一整块。
- 假设对于所有 ≤ ，( ) 为真，其中 是任意的且 ≥ 1。
- 考虑一块长为 + 1 方格的巧克力棒。
- 无论你在哪里折断这根条形物，都会得到两个较小的条形物，长度分别为 和 。
- 由于 和 不超过 ，因此可以分别使用 1和 − 1次拆分，将这些较小的条形分解为单个正方形。
- 因此，休息的总次数为 − 1 + − 1 + 1 = + − 1，等于 + 1 − 1 = 。
- 因此，根据强归纳法原则，( ) 对所有 ≥ 1 都成立。

4.6.5 · 附加练习

4.6.5.3. 证明将采用强归纳法。

*Proof*令 ( ) 为命题：“ 要么是 2 的幂，要么可以表示为不同 2 的幂的和。”我们将证明 ( ) 对所有 ≥ 1 成立。

基例：$1 = 2^0$ 是 2 的幂，因此 (1) 为真。

归纳步骤：假设对所有 $<$ ，( ) 都为真。现在如果 是 2 的幂，我们就完成了。如果不是，令 2^x 为严格小于 的最大 2 的幂。考虑 -2^x，这是一个更小的数，事实上它同时小于 和 2^x。因此 -2^x 要么是 2 的幂，要么可以写成若干互不相同的 2 的幂之和，但其中没有任何一个会是 2^x，因此连同 2^x，我们就把 写成了若干互不相同的 2 的幂之和。

因此，根据（强）数学归纳法原理， ( ) 对所有 ≥ 1 都成立。 ■

4.7 · 章节总结 · 章节回顾

4.7.1. $\frac{1250 \cdot 206}{2} = 128750$.

4.7.2.

a. $n - 3$ terms.

b. $10n + (-12)$.

c. $\dfrac{(10n + 26) * (n - 3)}{2}$.

4.7.3.

a. 6, 30, 150, 750, . . . 该数列是几何数列。

b. $\dfrac{6 \cdot 5^{22} - 6}{4} = 3.57628 \times 10^{15}$.

4.7.5. $_n = {}^2 + 8 \;\; + 2$。我们知道我们正在寻找一个二次方程，因为第二差是常数。因此 $_n = {}^2 + \;\; + \;\;$。我们可以倒推得出 $_0 = 2$，因此我们知道 $= 2$。然后解这个系统，

$$11 = a + b + 2$$
$$22 = 4a + 2b + 2$$

求 $= 1$ 和 $= 8$。

4.7.6.

(a) 部分和的序列将是一个4次多项式（它的差分序列将是原始序列）。

(b) 第二次差分的序列将是一个一次多项式（等差数列）。

4.7.7.

(a) 4, 6, 10, 16, 26, 42, . . . (b) 不，取差分会得到原始序列，因此差分将会

永远不会是常数。

4.7.8. $_n = (\ \ + 3)$.

4.7.10. 该序列为 4, 9, 89, 269, 2049, ⋯⋯ 。它有闭式公式 $_n = \left(\frac{11}{9}\right)(-4)^n + \left(\frac{25}{9}\right) \cdot 5^n$ ，使用特征根方法。

4.7.11. 数列为 5, 7, 111, 459, 3375, ... 它有闭式公式 $_n = \left(\frac{23}{9}\right)(-3)^n + \left(\frac{22}{9}\right) \cdot 6^n$，使用特征根法。

4.7.12.

(a) 第一天，你的 2 只迷你兔变成 2 只大兔。第二天，你的 2 只大兔生出 4 只迷你兔。第三天，你有 4 只迷你兔（由你的 2 只大兔产生）以及 6 只大兔（最初的 2 只加上新成熟的 4 只）。第四天，你将有 12 只迷你兔（6 只大兔每只 2 只）以及 10 只大兔（之前的 6 只加上新成熟的 4 只）。兔子的总数序列是 2、2、6、10、22、42⋯⋯，从 $_0 = 2$ 和 $_1 = 2$ 开始。

(b) $_n = \ _{n-1} + 2\ _{n-2}$。这是因为兔子的数量等于你前一天拥有的兔子数量（包括小兔和大兔）加上前天你拥有的兔子数量的两倍（因为所有你前天拥有的兔子现在已经变大，每只大兔子现在都会产出2只新兔子）。

(c) 使用特征根法，我们得到 $_n = \ \ 2^n + \ \ (-1)^n$，并且我们可以求得 和 ，使得 $_n = \frac{4}{3} 2^n + \frac{2}{3}(-1)^n$。

4.7.17. 设 ( ) 为命题：“任何包含 个元素的集合都有 2^n 个不同的子集。”我们将证明 ( ) 对所有 ≥ 1 都成立。基例：任何只含有 1 个元素 { } 的集合恰好有 2 个子集：空集和该集合本身。因此子集的个数是 $2 = 2^1$。因此 (1) 成立。归纳步骤：假设对于某个任意的 ≥ 1，命题 ( ) 成立。于是，每个恰好包含 个元素的集合都有 2^k 个不同的子集。现在考虑一个包含 + 1 个元素的集合： = { $_1$，$_2$, . . . , $_k$，$_{k+1}$}。 的任意一个子集要么包含 $_{k+1}$，要么不包含。换句话说， 的一个子集就是 { $_1$，$_2$, . . . ，$_k$} 的一个子集，是否包含 $_{k+1}$。因此，包含 $_{k+1}$ 的 的子集有 2^k 个，而不包含 $_{k+1}$ 的 的子集也有 2^{k+1} 个。这样一来， 的子集总数为 $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$。但我们对 的选择是任意的，所以这对任何包含 + 1 个元素的集合都成立，因此 (+ 1) 成立。于是，根据数学归纳法原理， ( ) 对所有 ≥ 1 都成立。

5 · 离散结构再探 5.1 · 集合 5.1.5 · 习题

5.1.5.1.

a. ∪ = {2, 4, 5, 6, 7, 8}。它包含所有属于 或 或两者的元素。 b. ∩ = {2, 4, 5, 6}。它包含所有同时属于 和 的元素。 c. \ = {7}。它包含所有属于 但不包含任何也属于 的元素。

我们也可以将这个集合写为 $\cap \overline{\ }$ 。

d. $\setminus = \{8\}$。它包含 中的所有内容，但不包括任何同时也在 中的内容。另一种写法是 $\cap \overline{\ }$ 。注意 $\setminus \neq \setminus$ 。

5.1.5.2.

a. 这是集合 $\{3, 4, 5, \ldots\}$，因为我们需要每个元素都是一个自然数，并且其平方至少比 4 大 3。由于 $3^2 - 3 = 6$，但 $2^2 - 3 = 1$，我们看到第一个这样的自然数是 3。 b. 我们得到与前一部分相同的集合，并且使得 $^2 - 7$ 是自然数的最小非负数是 3。注意，如果我们没有通过说明 ≥ 0 且 $\in$ 来进行限定，那么任何小于 -3 的整数也都会在该集合中，因此就不会存在最小元素。 c. 这是集合 $\{4, 5, 8, 13, \ldots\}$，即对一个自然数进行平方并加上 4 所得到的 *result* 的集合。（$0^2 + 4 = 4$，$1^2 + 4 = 5$，$2^2 + 4 = 8$，依此类推。）因此，该集合的最小元素是 4。 d. 现在我们寻找的是等于"取某个自然数，将其平方并加上 4"所得结果的自然数。也就是说，$\{4, 5, 8, 13, \ldots\}$，与前一部分相同的集合。所以，同样地，最小元素是 4。

5.1.5.4. 同时是 和 的子集且规模最大的集合是 和 的 *intersection*，$\cap = \{8\}$。

5.1.5.7. 将会有正好 4 个这样的集合：$\{1, 4, 14\}$，$\{1, 4, 12, 14\}$，$\{1, 4, 7, 14\}$，以及 $\{1, 4, 7, 12, 14\}$。

5.1.5.8.

a. $\cap = \{4, 5, 6\}$. b. $\cup = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. c. $\setminus = \{2, 3\}$. d. $\cap \overline{(\cup)} = \{2\}$.

5.1.5.11. 例如，$= \{2, 3, 5, 7, 8\}$ 和 $= \{3, 5\}$ 。

5.1.5.12. 例如，$= \{1, 2, 3\}$ 和 $= \{1, 2, 3, 4, 5, \{1, 2, 3\}\}$

5.1.5.13.

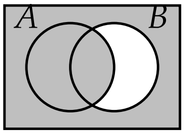
（a）否。（b）否。

(c) $2 \cap 3$ 是所有同时是 2 和 3 的倍数的整数的集合（即 6 的倍数）。因此 $2 \cap 3 = \{ \in : \exists \in (= 6)\}$。

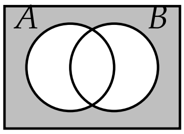
（d）$2 \cup 3$ 。

5.1.5.15.

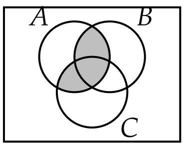
(a) $A \cup \overline{B}$:



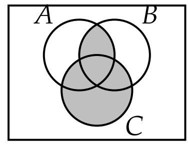
(b) $\overline{(A \cup B)}$:



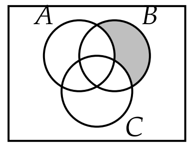
(c) $A \cap (B \cup C)$:



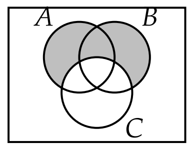
(d) $(A \cap B) \cup C$:



(e) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$:



(f) $(A \cup B) \setminus C$:



5.1.5.17.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}.$$

5.1.5.18. 9 个元素中的每一个都可以构成一个单元素集合，因此共有 9 个这样的集合。

要计算二元子集的数量，注意到包含 1 的有 8 个集合，然后包含 2 且不包含 1 的有 7 个，再然后包含 3 且不包含 1 或 2 的有 6 个，依此类推。因此，通过将 1 到 8 相加可以得到 36。

5.1.5.20. 例如， = {1, 2, 3, 4} 和 = {5, 6, 7, 8, 9} 得到 ∪ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}。

5.1.5.28. 这里我们需要稍微谨慎一些。如果 包含 3 个元素，那么 只包含数字 3（列出两次）。这样就会使 | | = 1，从而使 = {1, 3}，而它只有 2 个元素。因此 | | ≠ 3。这意味着 | | = 2，所以 至少包含元素 1 和 2。由于 | | ≠ 3，我们必须有 | | = 2，这与 的定义一致。

因此必然有 = {2, 3} 且 = {1, 2}

5.2 · 函数 5.2.4 · 练习

5.2.4.1.

a. (4) = 2，因为在两行表示法中，4 下面的数是 2。

b. 这样的 是 = 3，因为 (3) = 4。注意，在该记号中，3 位于 4 的上方。

c. = 1 具有这一性质。我们称 1 是 的一个不动点。并非所有函数都有这样的点。d. 这样的元素是 3（事实上，它是陪域中唯一不在值域里的元素）。换言之，3 不是 下任何元素的像；没有任何元素被映射到 3。

5.2.4.5. 有 16 个不同的函数。这些函数都不是单射。恰好有 14 个函数是满射（有 2 个不是：把所有元素都映射到 或把所有元素都映射到 的那两个）。没有任何函数同时具备两者（因为这里没有任何函数是单射）。

5.2.4.6. 有16个函数：对于 (1) 的输出你有四种选择，而对于每一种选择， (2) 的输出也有四种选择。在这些函数中，12个是单射，0个是满射，0个既是单射又是满射（即双射）：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & b \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & c \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ d & d \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & c \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & d \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & a \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & a \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ d & a \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & d \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ d & b \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ d & c \end{pmatrix}$$

5.2.4.7.

(a) 不是单射，因为 (2) = (5)；两个不同的输入具有相同的输出。(b) 是满射，因为陪域中的每个元素都是值域中的元素。(c) $= \Big(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 3\ 2\ 4\ 1\ 2\Big)$。

5.2.4.12.

(a) 是单射，但不是满射（例如，0 从未作为输出出现）。

(b) 是单射且满射。与前一个问题不同，每个整数都是一个输出（来自比它小 4 的那个整数）。

(c) 是单射，但不是满射（例如，10 不是某个 5 的倍数减去 8）。

(d) 不是单射，但却是满射。每个整数都是一个输出（例如，作为自身的两倍），但有些整数是由多个输入得到的输出： (5) = 3 = (6)。

5.2.4.13.

(a) 不是单射。为证明这一点，我们只需找到定义域中两个不同的元素，它们映射到陪域中的同一元素。由于 $(\{1\}) = 1$ 且 $(\{2\}) = 1$，我们可以看到 不是单射。(b) 不是满射。 的最大子集是 本身，并且 $| \ | = 10$。因此，大于 10 的任何自然数都不可能成为输出。(c) $^{-1}(1) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots \{10\}\}$（ 的所有单元素子集所组成的集合）。(d) $^{-1}(0) = \{\emptyset\}$。注意，写成 $^{-1}(0) = \emptyset$ 是错误的；那将声称不存在以 0 为输出的输入。

(e) $^{-1}(12) = \emptyset$，因为不存在基数为12的 的子集。

5.2.4.16.

(a) $| \ ^{-1}(3)| \leq 1$。换言之， $^{-1}(3)$ 要么是空集，要么是恰好包含一个元素的集合。单射函数不可能有来自定义域的两个元素同时映射到 3。 (b) $| \ ^{-1}(3)| \geq 1$。换言之， $^{-1}(3)$ 是一个至少包含一个元素（可能包含多个元素）的集合。满射函数必须有某个元素映射到 3。 (c) $| \ ^{-1}(3)| = 1$。恰好有一个来自 的元素被映射到 3，因此 $^{-1}(3)$ 是包含该唯一元素的集合。

5.2.4.17. 实际上可以是任意集合，只要对每个 $\in$ ，都有 $(\ ) = 0$ 或 $(\ ) = 1$。例如， $=$ 且 $(\ ) = 0$ 就可以。

5.2.4.21.

(a) 是单射。

Proof. 设 和 是定义域 中的元素。假设 $(\ ) = (\ )$。如果 和 都是偶数，则 $(\ ) = \ + 1$ 且 $(\ ) = \ + 1$。由于 $(\ ) = (\ )$，我们有 $+ 1 = \ + 1$，这意味着 $=$ 。类似地，如果 和 都是奇数，则 $- 3 = \ - 3$，因此同样有 $=$ 。唯一的另一种可能性是 为偶数而 为奇数（或反之亦然）。但此时 $+ 1$ 将是奇数，而 $- 3$ 将是偶数，因此不可能有 $(\ ) = (\ )$。因此，如果 $(\ ) = (\ )$，则必有 $=$ ，这证明了 是单射。■

(b) 是满射。

Proof 让 为值域 的元素。我们将证明存在一个定义域 $(\ )$ 中的元素 ，使得 $(\ ) =$ 。分为两种情况：首先，如果 是偶数，则令 $= \ +3$。由于 是偶数， 是奇数，因此 $(\ ) = \ -3 = \ +3-3 =$ ，如期望的那样。其次，如果 是奇数，则令 $= \ - 1$。由于 是奇数， 是偶数，因此 $(\ ) = \ + 1 = \ - 1 + 1 =$ ，如所需的那样。因此，是满射。■

5.2.4.22. 是的，这是一个函数，前提是你正确地选择定义域和陪域。定义域将是学生的集合，陪域将是所有可能成绩的集合。这个函数几乎肯定不是单射，因为很可能有两名学生获得相同的成绩。这个函数可能是满射——如果每一种成绩至少有一名学生获得，那么它就是满射。

5.2.4.24. 这不是一个函数。

5.2.4.25. 递推关系为 (+ 1) = ( ) + 。

5.2.4.26. 一般来说，| | ≥ | ( )|，因为你不可能得到比输入更多的输出（每个输入恰好对应一个输出），但如果函数不是单射，你可能会得到更少的输出。如果函数是单射的，那么 | | = | ( )|，尽管即使 不是单射也可能出现相等（它必须 *restricted* 到 是单射）。

5.2.4.27. 一般来说，| | 与 | $^{-1}$( )| 之间没有关系。这是因为 可能包含不在 的值域中的元素，因此我们甚至可能有 $^{-1}$( ) = ∅。另一方面，定义域中可能有许多元素都被映射到 中的少数几个元素上，使得 $^{-1}$( ) 大于 。

更具体地说，如果 是单射，那么 | ≥ | $^{-1}$( )| (，因为 中的每个元素至多来自定义域)中的一个元素。如果 是满射，那么 | ≤ | $^{-1}$( )| (，因为 中的每个元素至少来自定义域)中的一个元素。因此，如果 是双射，那么 | = | $^{-1}$( )|。

6 · 附加主题 6.1 · 生成函数

6.1.5 · 练习

6.1.5.1.

(a) 4 1 。 (b) 2 (1 −)$_2$ 。 (c) 2 ^{3}1 −)^2 。 (d) 1 1 − 5 。 (e) 1 1 + 3 。 (f) 1 1 − 5 $_2$ 。 (g) (1 − ^{3})($_2$ 。

6.1.5.2.

（a）0，4，4，4，4，4，⋯⋯
（b）1，4，16，64，256，⋯⋯
（c）0，1，−1，1，−1，1，−1，⋯⋯
（d）0，3，−6，9，−12，15，−18，⋯⋯
（e）1，3，6，9，12，15，⋯⋯

6.1.5.4. 将生成函数称为 。计算 − = 4 + + 2 ^{2} + 3 ^{3} + 4 ^{4} + · · ·。

因此 − = 4 + (1 −)2。解出 得到 4 1 − + (1 −)3。

6.1.5.5. 1 + 2 1 − 3 + 2 .

6.1.5.6. 计算 − − 2 ，然后求解 。生成函数将是 1 − − 2。

6.1.5.7. (1 −)(1 − − 2)。6.1.5.8. 2 1 − 5 + 7 1 + 3 。6.1.5.9. $_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 1$。

6.1.5.12.

（a）$\frac{1}{(1-x^2)^2}$。（b）$\frac{1}{(1+x)^2}$。（c）$\frac{3x}{(1-x)^2}$。（d）$\frac{3x}{(1-x)^3}$。（部分和）。

6.1.5.13.

(a) 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... (b) 1, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 5, 0, 8, 0, ... (c) 1, 3, 18, 81, 405, ... (d) 1, 2, 4, 7, 12, 20, ... 6.1.5.15. $\frac{x^3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$.

6.2 · 数论导论 6.2.6 · 练习

6.2.6.1.

*Proof*假设 | 。则 是 的倍数，换言之，存在某个 ，使得 = 。但于是 = ，而且由于 是整数，这说明 是 的倍数。换言之， | 。■

6.2.6.3. {. . . , −8, −4, 0, 4, 8, 12, . . .}, {. . . , −7, −3, 1, 5, 9, 13, . . .}, {. . . , −6, −2, 2, 6, 10, 14, . . .}, 和 {. . . , −5, −1, 3, 7, 11, 15, . . .}.

6.2.6.5.

*Proof*假设 ≡ (模) 且 ≡ (模)。这意味着 = + 并且

= + ，对某些整数 和 。考虑 。我们有：

$$a - c = b + kn - (d + jn) = b - d + (k - j)n.$$

换句话说， − 比某个 的倍数多 − ，因此 − ≡ − (mod ）。■

6.2.6.6.

（a）$3^{456} \equiv 1^{456} = 1$（模 2）。（b）$3^{456} = 9$
$^{228} \equiv (-1)^{228} = 1$（模 5）。（c）$3^{456} = 9^{228} \equiv$
$2^{228} = 8^{76} \equiv 1^{76} = 1$（模 7）。（d）$3^{456} = 9$
$^{228} \equiv 0^{228} = 0$（模 9）。

6.2.6.8. 对于所有这些，只需将 0 到模数之间的所有整数代入，看看哪些（如果有的话）成立。

(a) 无解。

（b） = 2， = 5， = 8。

(c) 无解。

6.2.6.10. = 5 + 22 ，对于 ∈ 。

6.2.6.12. = 6 + 15 ，其中 ∈ 。

6.2.6.14. 我们必须求解 7 + 5 ≡ 2 (mod 11)。这给出 ≡ 9 (mod 11)。一般地， = 9 + 11 ，但当你将任何这样的 除以 11 时，余数将是 9。

6.2.6.15. 两边同除以 2：3 + 5 = 16。将其转换为模 3 的同余：5 ≡ 16 (mod 3)，化简为 2 ≡ 1 (mod 3)。因此 ≡ 2 (mod 3)，或 = 2 + 3 。将其代回3 + 5 = 16，并解出 ，得到 = 2 − 5 。因此通解为 = 2 − 5 且 = 2 + 3 ，其中 ∈ 。

符号列表

符号说明页

$\therefore$	"therefore"	15
$P, Q, R, S, \ldots$	propositional (sentential) variables	19
$\wedge$	logical "and" (conjunction)	19
$\vee$	logical "or" (disjunction)	19
$\neg$	logical negation	19
K_n	the complete graph on n vertices	108
$K_{m,n}$	the complete bipartite graph of m and n vertices	109
C_n	the cycle on n vertices	109
P_n	the path on $n+1$ vertices	109
$\chi(G)$	the chromatic number of G	151
$\Delta(G)$	the maximum degree in G	156
$\chi'(G)$	the chromatic index of G	157
$N(S)$	the set of neighbors of S	182
$\mathbf{B}^n_k$	the set of length n bit strings with weight k.	198
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	the sequence $a_0, a_1, a_2, \ldots$	313
T_n	the nth triangular number	318
F_n	the nth Fibonacci number	324
Δ^k	the kth differences of a sequence	343
$\emptyset$	the empty set	392
$\mathbb{N}$	the set of natural numbers	392
$\mathbb{Z}$	the set of integers	392
$\mathbb{Q}$	the set of rational numbers	392
$\mathbb{R}$	the set of real numbers	392
$\mathcal{P}(A)$	the power set of A	392
$\{,\}$	braces, to contain set elements.	392
$:$	"such that"	392
$\in$	"is an element of"	392
$\subseteq$	"is a subset of"	392
$\subset$	"is a proper subset of"	392
$\cap$	set intersection	392
$\cup$	set union	392
$\times$	Cartesian product	392
$\setminus$	set difference	392
$\overline{A}$	the complement of A	392

(Continued on next page)

索引

书志

这本书是用PreTeXt编写的。