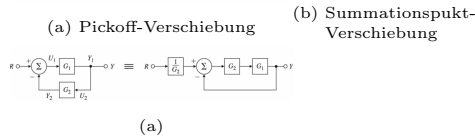
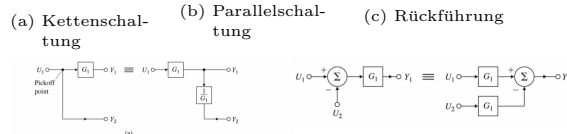
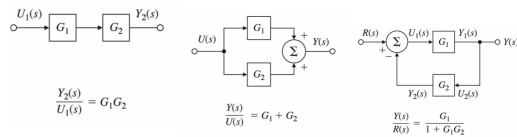
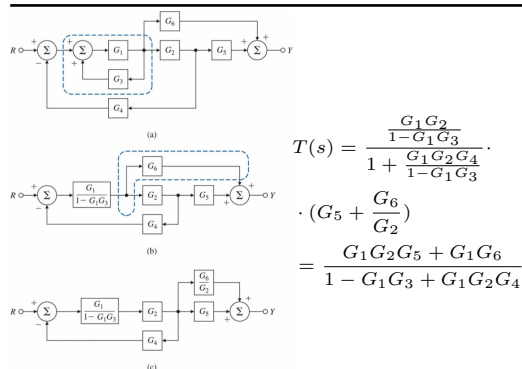
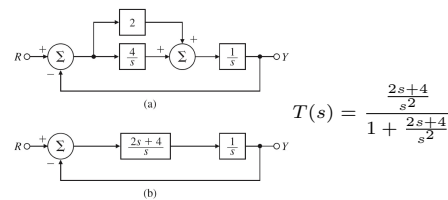


## 1 Blockdiagramme

### Regeln



### Beispiele



## 2 Wurzelortskurve

### Konstruktionsregeln

$n$  - Anzahl der Pole ( $p_i$ )       $m$  - Anzahl der NST ( $z_i$ )

**Regel 1:**  
 $n - m$  Zweige gehen zu den Asymptoten  
 $m$  Zweige enden in den NSTs

**Regel 2:**  
Ein Punkt ist auf WOK, wenn die Summe der Pole und NST rechts vom Punkt ungerade ist (0 ist ungerade) (Nur Pole und NST auf der reellen Achse)

**Regel 3:**  
Asymptoten schneiden sich im Schwerpunkt  $\alpha$  und haben Winkel  $\Phi_l$ ,  $l = 1, \dots, n - m$

$$\Phi_l = \frac{180^\circ}{n - m} + \frac{360^\circ(l - 1)}{n - m}$$

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

**Regel 4:**  
Beachte Laufindex:  $l = 1, \dots, q$   
Austrittswinkel der Zweige  $q$ -Facher Pol.  $\Phi_i$  - Winkel aus der Sicht der Polstelle.  $\Psi_i$  - Winkel aus der Sicht der Nullstelle.

$$\Phi_{l, \text{Beginn}} = \frac{1}{q} \left( \sum \Psi_i - \sum_{i \neq l} \Phi_i - 180^\circ - 360^\circ(l - 1) \right)$$

Eintrittswinkel in die  $q$ -fachen Nullstellen:

$$\Psi_{l, \text{End}} = \frac{1}{q} \left( \sum \Phi_i - \sum_{i \neq l} \Psi_i + 180^\circ + 360^\circ(l - 1) \right)$$

**Regel 5:**  
Austrittswinkel aus einem Verzweigungspunkt ( $q$ -facher Pol):

$$\Psi_l = \frac{180^\circ}{q} + 360^\circ \frac{l - 1}{q}$$

**Regel 6:**  
Verzweigungspunkte Pole (Nullstellen):

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = 0$$

**Charakteristische Gleichung:**

$$1 + K * L(s) = 0$$

**Berechnung von  $K$ :**  
Das gesuchte  $s$  in die Gleichung einsetzen und die Gleichung lösen

$$K = - \frac{\prod_i (s - p_i)}{\prod_i (s - z_i)}$$

## 3 Bodediagramm

### Konstruktionsregeln

#### Amplitudengang:

$$G(s) = c \cdot s^r \cdot \underbrace{G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_k(s)}_{G^*(s)} \cdot e^{-T_t s}$$

$$G_i(s) = (s + n_i) \text{ reelle Nullstelle}$$

- Eckfrequenzen aufsteigend sortieren
- niedrigste Frequenz ist die Startfrequenz  $\omega_1$
- Startamplitude:  
 $A_{dB}(\omega_{\min}) = 20 \log_{10}(|c \cdot G^*(0)| \cdot \omega_{\min}^r)$
- Asymptote links vom Startpunkt:  
 $r \cdot 20 \frac{dB}{\text{Dekade}}$
- Wenn zwischen benachbarten Eckfrequenzen 1 Dekade liegt  $\Rightarrow$  Absenkung(POL)/Erhöhung(NST) um  $n \cdot 3dB$  über dem jeweiligen Knickpunkt
- Jede Eckfrequenz verändert die Steigung folgendermaßen  

$$G_i = (s + n_i) \quad +20 \frac{dB}{\text{Dekade}}$$

$$G_i = \frac{1}{(s + p_i)} \quad -20 \frac{dB}{\text{Dekade}}$$

$$G_i = (s^2 + 2D_i m_i s + m_i^2) \quad +40 \frac{dB}{\text{Dekade}}$$

$$G_i = \frac{1}{(s^2 + 2D_i p_i s + p_i^2)} \quad -40 \frac{dB}{\text{Dekade}}$$
- Jeder Term der Form  $s^2 + 2D_i m_i s + m_i^2$  liefert einen Peak am entsprechenden  $\omega_i$ . Eine Nullstelle unterhalb der Asymptote - eine Polstelle oberhalb der Asymptote.  
( $\pm$ )  $20 \log(\frac{1}{2 * D_i})$

#### Phasengang:

- Bestimme Startfrequenz  

$$\phi(0) = \begin{cases} r \cdot 90^\circ & \text{wenn } n \equiv c \cdot G^*(0) > 0 \\ -180^\circ + r \cdot 90^\circ & \text{wenn } n \equiv c \cdot G^*(0) < 0 \end{cases}$$
- an jeder Eckfrequenz springt die Phase:  

$$G_i = (s + n_i) \quad +90^\circ \cdot \text{sign}(n_i)$$

$$G_i = \frac{1}{(s + p_i)} \quad -90^\circ \cdot \text{sign}(p_i)$$

$$G_i = (s^2 + 2D_i m_i s + m_i^2) \quad +180^\circ \cdot \text{sign}(D_i m_i)$$

$$G_i = \frac{1}{(s^2 + 2D_i p_i s + p_i^2)} \quad -180^\circ \cdot \text{sign}(D_i p_i)$$
- Wenn  $2D_i q_i s = 0 \rightarrow$  ungedämpftes Polpaar  $\rightarrow$   $\text{sign}(0) = \pm 1$  (kann gewählt werden)

### Phasenminimumsystem

**Phasenminimumsystem** ist dann gegeben, wenn die Übertragungsfunktion

- keinen Totzeitfaktor enthält
- $G(s)$  hat Pole und Nullstelle nur in LHE

## 4 Zustandsdarstellung

### Übertragungsfunktion aus Zustandsraumdarstellung

#### Matrixinversion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

#### Verallgemeinerte Systemmatrix

Rosenbrockmatrix aufstellen:

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} sI - A & B \\ \hline -C & D \end{array} \right]$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)B + D|sI - A|}{|sI - A|} \\ = \frac{|P(s)|}{|sI - A|}$$

## 5 Zustandstransformation

### Definition + Umrechnung

Allgemeine Darstellung:      Darstellung in Normalform:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + Gu \\ y &= Hx + Ju \end{aligned} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= T^{-1}FT \\ B &= T^{-1}G \end{aligned} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Fx + Gu \\ y &= Hx + Ju \end{aligned}$$

### KOCHREZEPT: Regelungsnormalform

**Definition:**

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s) \quad (1)$$

$$= \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} U(s) \quad (2)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

$$y = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1] x \quad (4)$$

Bilde die Inverse  $C^{-1}$  von:

$$C = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$$

Nehme letzte Zeile  $t_1^T$  von  $C^{-1}$

$$[0 \ 0 \ \dots \ 1] C^{-1}$$

Stelle inverse der Transformationsmatrix  $T$  auf:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_1^T F \\ t_1^T F^2 \\ \vdots \\ t_1^T F^{n-1} \end{bmatrix}$$

### Umrechnungsvorschrift Zustandsform

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = T^{-1}FT \quad C = HT$$

### Steuerbarkeit

Das System heißt **steuerbar**, wenn  $C$  **nicht singulär** ist. (Es existiert eine Inverse von  $C$ )

### KOCHREZEPT: Beobachtungsnormalform

**Definition:** Aus der Funktion 2 stellt man die Matrizen auf:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ \dots \ 0 \ 1] x$$

### Umrechnungsregeln

$$\begin{aligned} A_O &= A_C^T & B_O &= C_C^T \\ C_O &= B_C^T & D_O &= D_C \end{aligned}$$

Bilde die Inverse  $O^{-1}$  und nehme letzte **Spalte**  $t_1$  von  $O^{-1}$

$$O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow O^{-1} \quad t_1 = O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Transformationsmatrix bilden  $T$  nach Vorschrift:

$$T = [t_1 \ Ft_1 \ \dots \ F^{n-1}t_1]$$

### Umrechnungsvorschrift in Beobachtungsnormalform

$$\begin{aligned} C &= [0 \ 0 \ \dots \ 1] \\ A &= T^{-1}FT \\ B &= T^{-1}G \end{aligned}$$

### Beobachtbarkeit

Das System heißt **beobachtbar**, wenn  $O$  **nicht singulär** ist. (Es existiert eine Inverse von  $O$ )

## KOCHREZEPT: Modalform

Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion  $\Rightarrow$  Modus

1. Alle Pole sind reell und einfach:

$$G(s) = \frac{b_1}{s - p_1} + \dots + \frac{b_n}{s - p_n}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] \mathbf{x}$$

**Jordanform** - wenn die Nullstellen nicht reell sind:

2. Komplexes Polpaar  $\Rightarrow$  Partialbruch der Art. Blockmatrizen für das Polpaar werden an entsprechender Stelle eingefügt

$$\frac{b_{i+1}s + b_i}{s^2 + a_i s + a_{i+1}}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{i+1} & -a_i \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [b_i \ b_{i+1}] \mathbf{x}$$

3. Ein  $m$ -facher Pol  $\frac{b}{(s-p)^m}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} p & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [b \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$

Zum erstellen der Modalform:

Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $\mathbf{F}$  berechnen (5)

Eigenvektoren von  $\mathbf{F}$  bilden  $\mathbf{T}$  (6)

### Umrechnungsvorschrift in Modalform

$$\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \\ \mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{G} \quad \mathbf{C} = \mathbf{H} \mathbf{T}$$

### Aussagen

Für  $\mathbf{B}$  - wenn  $b_i = 0 \Rightarrow x_i$  **nicht steuerbar**  
Für  $\mathbf{C}$  - wenn  $c_i = 0 \Rightarrow x_i$  **nicht beobachtbar**

**Aufgabe:** Stellen Sie folgende Übertragungsfunktion in Jordannormalform dar:

$$G(s) = \frac{2s + 4}{s^2(s^2 + 2s + 4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 2s + 4}$$

**Lösung:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \ 0 \ -1 \ 0] \mathbf{x}$$

## 6 Diskrete Systeme

### Zusammenhang $s$ und $z$

**Abbildung:**

Linke komplexe  $s$ -Halbebene  $\Rightarrow$  Einheitskreis  $|z| = 1$   
 $z = e^{sT}$  ist die Abbildungsvorschrift

### $z$ -Übertragungsfunktion

$$\mathcal{Z}\{f(k-n)\} = z^{-n} F(z)$$

Allgemeine DGL (2. Ordnung):

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z)$$

$$Y(z) = (-a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) Y(z) + (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

**Ablezen des Pols:**

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \Rightarrow z_1 = \alpha$$

**Endwertsatz der  $z$ -Transformation:**

Kontinuierliches System:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_{\text{stat}} = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$$

Diskretes System:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x_{\text{stat}} = \lim_{z \rightarrow 1} X(z)$$

$z$ -Übertragungsfunktion: Halteglied und kontinuierliches System in Reihe

Das ist eine Approximation über Reihenschaltung Halteglied und kontinuierliches System:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

## 7 Diskrete Fundamentalmatrix

### Definition

$$\mathbf{A}_d(T) = e^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{B}_d = \int_0^T \mathbf{A}_d(\tau) d\tau \cdot \mathbf{B}$$

Mit Taylorzerlegung kann man  $\mathbf{A}_d$  berechnen:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \mathbf{A}^3 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

### KOCHREZEPT: Fundamentalmatrix Berechnung

$$\mathbf{A}_d(T) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$$

$$\mathbf{B}_d(T) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s} \mathbf{A}_d(s) \cdot \mathbf{B}\right)\right\}$$

Für  $2 \times 2$ -Matrix lässt sich  $\mathbf{A}_d$  so bestimmen:

$$\mathbf{A}_d(s) = \frac{1}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

$$\mathbf{A}_d(T) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{A}_d(s)\}$$

$$\mathcal{C}_d = [\mathbf{B}_d \ \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \ \dots \ \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{B}_d]$$

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{n-1} \end{bmatrix}$$

### Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Das zeitdiskrete System  $(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d)$  ist vollständig **steuerbar** bzw. **beobachtbar**, wenn kontinuierliches System  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  es ist und wenn die Abtastzeit folgendes erfüllt:

$$T < \frac{\pi}{\omega_{j,\max}}$$

$\omega_{j,\max}$  ist betraglich größter Eigenwert von  $\mathbf{A}$

## 8 Partialbruchzerlegung

### Regeln

$$\frac{A}{x - x_1} \quad \text{Einfache Nullstelle}$$

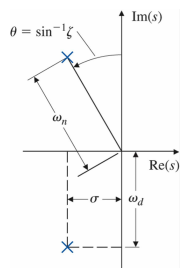
$$\frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_m}{(x - x_1)^m} \quad \text{m-fache Nullstelle}$$

$$\frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} \quad \text{quadratisch (komplex) Nst}$$

$$\frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{x^2 + ax + b} \quad \text{m-fach quadratisch Nst}$$

## 9 Pole und NST in der s-Ebene

### PT<sub>2</sub> - Glied

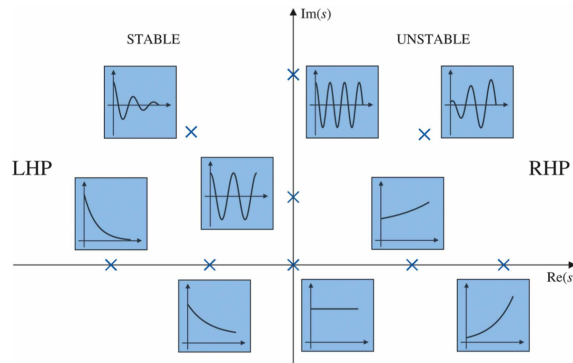


Instabilität beginnt in der rechten Halbebene.  
Für die **Dämpfung** gilt, je kleiner der Winkel  $\theta$ , desto kleiner ist die Dämpfung:

$$\theta = \arcsin \zeta$$

Charakteristische Gleichung:  $s^2 + 2 * \zeta * \omega_n * s + \omega_n^2$

### Auswirkung der NST und Polenlage



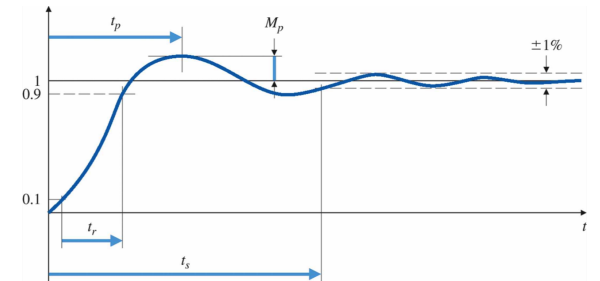
### Polstelle (reell + komplexes Polpaar)

Re	Im	Auswirkung
< 0	= 0	stabil - keine Schwingung
> 0	= 0	instabil - keine Schwingung
= 0	= 0	instabil - keine Schwingung
< 0	≠	stabil - Schwingung
> 0	≠	instabil - Schwingung
= 0	≠	Dauerschwingung

### Nullstelle:

<= 0	minimalphasiges System (evtl. Überschwung)
>= 0	nichtminimalphasiges System (Systemantwort erst entgegen der Sprunganregung)
= 0	$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow 0$

### Kenngrößen



Steigzeit (0,1 - 0,9):

$$t_r \approx \frac{1,8}{\omega_n}$$

Überschwingweite:

$$M_p = e^{\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$0 \leq \zeta \leq 1$$

Gedämpfte Kreisfrequenz:

$$\omega_d = \omega_n * \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\text{Dämpfung } \zeta = \sqrt{\frac{\ln(M_p)^2}{\pi^2 + \ln(M_p)^2}}$$

Einschwingzeit (Abklang auf)  $\pm 1\%$

$$t_s = \frac{4,6}{\zeta \omega_n} = \frac{4,6}{\sigma}$$

Anstiegszeit:

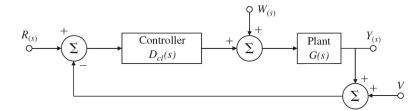
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Ungedämpft zu gedämpft

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega_d^2$$

### Stabilität

Alle Pole der Übertragungsfunktion müssen in der LHE sein.  
**Steuerung stabilisiert nicht. Regelung:**



$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad D_{OL} = \frac{c(s)}{d(s)} \quad 1 + G D_{CL} = 0$$

$$1 + \frac{bc}{ad} = 0 \quad a(s)d(s) + b(s)c(s) = 0$$

Die Regelung reduziert die Auswirkung von Störung um  $1 + AK$

### Sensitivität

Sensitivität beschreibt die Reaktion des Systems auf Änderung im Parameter

$$S_A^{T_{CL}} = \frac{A}{T_{CL}} \frac{dT_{CL}}{dA} \quad |S_G^{T_{CL}}| = \frac{1}{1 + G(i\omega_0)D(i\omega_0)}$$

$T_{CL}$  - Closed-Loop Übertragungsfunktion  $A$  - Parameter

## Routh Kriterium

Gibt Aussage darüber, ob alle Pole des charakteristischen Polynoms  $P(s)$  in der LHE liegen:

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

Es muss gelten  $a_i > 0$  für  $\forall i \in \mathbb{N}$

$n$	$s^n$	1	$a_2$	$a_4$	...
$n-1$	$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	...
$n-2$	$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...
$n-3$	$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	$s^2$	*	*		
1	$s^1$	*			
0	$s^0$	...			

Die Koeffizienten werden folgendermaßen errechnet:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} \quad c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1} \quad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1} \quad c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

- Alle Elemente der ersten Spalte positiv  $\Rightarrow$  Wurzeln in der offenen LHE
- #-Wurzeln in der geschlossenen RHE = #-Vorzeichenwechsel
- Wenn das erste Element einer Zeile null ist, setze  $\epsilon > 0$ . Stabilitätskriterium für  $\epsilon \rightarrow 0_+$

## CLM Kriterium

**Annahme:**  $m$ -Wurzeln in RHE und  $n-m$ -Wurzeln ( $n \leq m$ ) Charakteristische Gleichung:

$$P(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n = 0$$

Einsetzen  $s = j\omega$ . Das System ist dann asymptotisch stabil, wenn

1. die Ortskurve  $P(j\omega)$  für  $0 \leq \omega \leq \infty$  die Quadranten abwechselnd durchläuft (sich die Nullstellen des Real und Imaginärteils von  $P(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$  abwechseln.)
2. Real- und Imaginärteil zusammen  $n$  (Grad der Gleichung) reelle Nullstellen im Bereich  $0 \leq \omega \leq \infty$  besitzen

**Beispiel:**

$$P(s) = 2 + 5s + 7s^2 + 8s^3 + 4s^4 + s^5$$

$$P(j\omega) = 2 + 5j\omega + 7(j\omega)^2 + 8(j\omega)^3 + 4(j\omega)^4 + (j\omega)^5$$

$$2 - 7\omega^2 + 4\omega^4 + j(5\omega - 8\omega^3 + \omega^5)$$

$$U(\omega) + jV(\omega)$$

Realteil hat die Nullstellen:

$$2 - 7\omega^2 + 4\omega^4 = 0$$

$$\omega_1^2 = 0,36$$

$$\omega_2^2 = 1,39$$

Imaginärteil hat die Nullstellen:

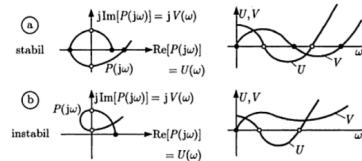
$$5\omega - 8\omega^3 + \omega^5 = 0$$

$$\omega_3 = 0$$

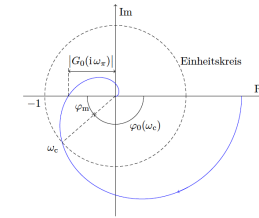
$$\omega_4^2 = 0,68$$

$$\omega_5^2 = 7,32$$

Insgesamt sind  $n = 5$  reelle Nullstellen mit  $\omega_i \geq 0$ . Diese wechseln sich jeweils ab, damit ist das System asymptotisch stabil.  $\omega_3 < \omega_1 < \omega_4 < \omega_2 < \omega_5$  Siehe Grafik:



## Nyquist



Amplituden-/ Betragsreserve

$$G_m = \frac{1}{|G_0(i\omega_\pi)|}$$

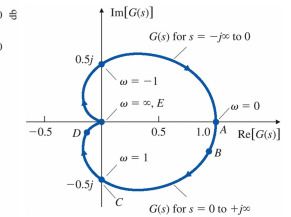
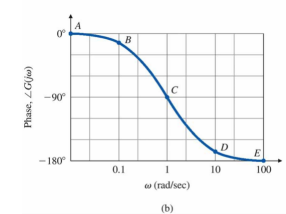
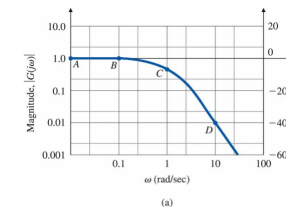
$$\omega_\pi = -180^\circ$$

Phasenreserve ( $\omega_c$  ist im Bode Diagramm, da wo Amplitudengang 0dB schneidet):

$$\phi_m = \pi + \phi(\omega_c)$$

Übliche Werte sind  $G_m = 2,5 \dots 10$  und  $\phi_m = 30^\circ \dots 60^\circ$ . Zur Stabilitätsanalyse kann man prüfen  $|G_0(i\omega_\pi)|$  größer oder kleiner als 1 ist.

1. Betrag und Phase für mehrere Punkte aus dem Amplitudengang und Phasengang des Bodediagramm ablesen.
2. Die Länge des Zeigers  $10^{\frac{\phi}{20}}$  zum Nyquist-Plot ist der Wert im Amplitudengang.
3. Der Winkel des Zeigers ist
4. Für  $\omega = 0^\circ$  bis  $\omega = \infty$
5. Instabil, wenn der Nyquist-Plot die -1 umschließt.



### Berechnung Betragsreserve aus $G(s)$

Gegeben ist eine Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 11s^2 + 11s + 10}$$

$j\omega$ -Einsetzen - und auf die untere Form bringen:  
Umformen auf

$$G(j\omega) = \frac{10}{\text{Re} + j\omega\text{Im}} = \frac{10}{(-11\omega^2 + 10) + i\omega(11 - \omega^2)}$$

$$\tan(-\pi) = 0 = \frac{\omega_\pi(11 - \omega_\pi^2)}{\omega_\pi^2 + 10}$$

$$\omega_\pi = \sqrt{11}$$

$$G(i\omega_\pi) = \frac{10}{-111} = 20,9 \text{ dB}$$

## 10 Laplace-Transformation

Wenn nichts anderes gegeben gilt für Anfangsbedingungen  $y(0) = \dot{y}(0) = \dots = 0$ .

## 11 Regler-Entwurf

1. Die Zustandsrückführung ist :  $u = -Kx$  einsetzen in  $\dot{x} = Fx + Gu$
2.  $\dot{x} = (F - GK)x$
3. Für vorgegebene Pole  $s_i$  charakteristische Gleichung aufstellen
4.  $\det(sI - F + GK)$  ergibt die charakteristische Gleichung in Abhängigkeit von  $K = [k_1 \dots k_n]$
5. Koeffizientenvergleich zwischen beiden charakteristischen Gleichungen  $\Rightarrow K$

**System in Regelungsnormform**  $K$  ist besonders einfach, wenn ein System in RNF vorliegt.

$$A_C - B_C K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & \dots & -a_1 - k_n & 0 \end{bmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung ergibt sich sofort zu:

$$s^n + (a_1 + k_n)s^{n-1} + (a_2 + k_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_n + k_1) = 0$$

Man kann direkt den Koeffizientenvergleich machen - Determinantenbildung entfällt.

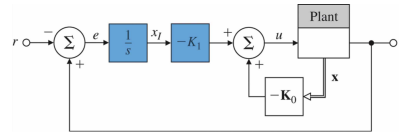
### Integralregelung

Charakteristische Gleichung  $0 = \det(sI - A_a + B_a * K)$  Integralregelung sorgt dafür der Fehler bei Änderung der Streckenparameter Null wird. Das System wird um einen Integralen Teil erweitert.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

mit dem Regler:

$$u = -[K_1 \ K_0] \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix}$$



**Beispiel:** Übertragungsfunktion  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}$

Systembeschreibung  $F = -3, G = 1, H = 1$

Gewünscht Pole bei  $s = -5 + \text{Integralanteil}$

$$\Rightarrow a_C(s) = s^2 + 10s + 25$$

Die erweiterte Systembeschreibung ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Die Rückführmatrix

$$\det \left( sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K \right) \stackrel{!}{=} s^2 + 10s + 25$$

$$K = [K_1 \ K_2] = [25 \ 7]$$

### Referenzsystem

Das ist, dass im eingeschwungenen Zustand der Ausgang  $y = r$  ist. Mit  $u = -Kx + r$  als Ansatz.

#### Vorgehensweise

1. Gleichung

$$\begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Damit ergibt sich

$$u = N_u * r - K(x - N_x r) = -Kx + \underbrace{(N_u + KN_x)}_{\tilde{N}} r$$

## 12 Beobachterentwurf

Manche Zustandsgrößen können nur geschätzt werden (Messung nicht möglich). Man nutzt einen Schätzwert (Simulation)  $\hat{x}$ . Mit dem Beobachterentwurf wird dafür gesorgt, dass der Schätzfehler auf Null abklingt. **Vorgehensweise**

1. Wunschpole zu Wunsch-Charakteristischen Gleichung umformen
2. Bilde  $\det(sI - (F - LH)) \Rightarrow$  Charakteristische Gleichung abhängig von  $L = [l_1 \dots l_n]^T$
3. Koeffizientenvergleich und Werte von  $L$  bestimmen

**System in Beobachtungsnormform** Die Charakteristische Gleichung lässt sich einfach ablesen aus

$$F - LH = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_n - l_1 \\ 1 & \dots & 0 & -a_{n-1} - l_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 - l_n \end{bmatrix}$$

$$s^n + (a_1 + l_n)s^{n-1} + (a_2 + l_{n-1} + \dots + (a_n + l_1)) = 0$$

### Kompensator

Das ist die Kombination aus einem Regler und Beobachter. Die beiden werden separat entworfen und anschließend zu einem System zusammengefasst.

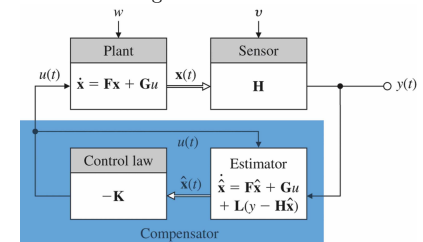


Abbildung 6

Übertragungsfunktion lässt sich berechnen durch:

$$D(s) = \frac{U(s)}{Y(s)}$$

$$U(s) = \det(P(s)) = \det \left[ \frac{sI - A}{K} \middle| \begin{matrix} L \\ 0 \end{matrix} \right]$$

$$Y(s) = \det(sI - F + LH + GK)$$

### 13 Kalman-Filter - optimaler Schätzer

Das **zeitinvariante Kalman-Filter** ist realisierbar, wenn  $(H, F)$  - detektierbar und  $(F, Q^{\frac{1}{2}})$  stabilisierbar. Die Lösung der Matrix-Ricatti Gleichung ist dann ein **positiv-semidefinite konstante** Matrix  $P$ .

$$\begin{array}{lll} (H, F) & \dot{x} = Fx & y = Hx \\ (F, Q^{\frac{1}{2}}) & \dot{x} = Fx + Q^{\frac{1}{2}}u & \end{array}$$

Für die Matrizen gilt:  $Q \succeq 0$  - semidefinit und  $R \succ 0$  - definit. (manchmal werden diagonale Matrizen angenommen.)

*Bemerkung:* Für eine einfache Lösung müssen Rauschprozesse **Prozessrauschen**  $w(t)$  und **Messrauschen**  $v(t)$  weiß und unkorreliert sein.  $E(w(t)) = E(v(t)) = 0$  und  $E(w(t), v(t)^T) = 0$  Kovarianz kann folgendermaßen ermittelt werden:

$$\begin{array}{lll} w(t) & E(w(t)w(t)^T) = Q\delta(t - \tau) & Q \succeq 0 \\ v(t) & E(v(t)v(t)^T) = R\delta(t - \tau) & R \succ 0 \end{array}$$

#### Vorgehensweise:

1. Löse die Gleichung

$$0 = FP + (FP)^T - (HP)^T R^{-1} HP + Q$$

2. Für  $2 \times 2$ -Matrizen wird ein symmetrisches  $P$  angenommen

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

3. Ein LGS mit drei Unbekannten  $p_1, p_2, p_3$  lösen
4. Nur die Lösung mit  $p_i \geq 0 \forall i$  wählen
5. Setze  $P$  in die Gleichung ein für konstante Rückführmatrix

$$L = PH^T R^{-1}$$

### 14 LQ-Regler - optimaler Regler

#### Anforderung an Tuning-Matrizen:

$$P = P^T \succeq 0 \quad Q = Q^T \succeq 0 \quad R = R^T \succ 0$$

1. Löse Gleichung

$$0 = -(PF)^T - PF - PGR^{-1}(PG)^T - Q = 0$$

2. optimaler Regeleingang

$$u(t) = -Kx(t) = -\underbrace{(R^{-1}G^T P)}_K x(t)$$

3. Eine Lösung ist gegeben, wenn alle instabilen Zustände steuerbar sind **-stabilisierbar**
4. Instabile Moden müssen durch die Kostenfunktion erfasst werden
5. Stabil, wenn das System

$$\dot{x} = Fx \quad y = Q^{\frac{1}{2}}x$$

**detektierbar** ist. Alle instabilen Zustände sind beobachtbar.

6. Wenn  $[H, F]$  detektierbar ist typischerweise  $Q = H^T H$

Stabilisierbarkeit lässt sich durch die B-Matrix, Detektierbarkeit durch die C-Matrix erkennen, wenn das System in Modalform vorliegt.

Ein Maß für die Güte eines Reglers ist die Kostenfunktion  $J$ . Die Funktion spiegelt die Kosten für einen Regler wider. Man minimiert die Kostenfunktion.  $\Rightarrow$  Ricatti-Gleichung

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$