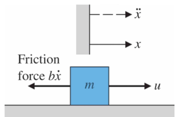
Inhaltsverzeichnis

2 Modellierung von dynamischen Systemen

KOCHREZEPT: Freischneiden

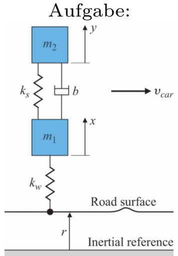
Massen $\{m_1, \dots, m_n\}$ mit $\{x_1, \dots, x_m\}$
Anfangsbedingung: $x_1 = \dots = x_m = 0$



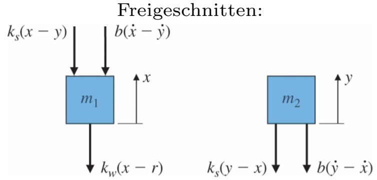
1. Freischneiden: $\forall x_i \forall x_j : x_j \neq x_i$: x_j „festhalten", x_i „erhöhen" und Pfeile entgegengesetzt ausrichten, so dass
   - $\forall k : k(x_i - x_j)$
   - $\forall b : b(\dot{x}_i - \dot{x}_j)$
2. Gleichungssystem: $\sum F = 0 = m_i \ddot{x}_i$
   Vorzeichen aller entgegengesetzten Kräfte sind negativ.
3. Stabilität: System ist stabil, sobald mindestens eine m_i unabhängig gedämpft oder das System nur einseitig beschränkt ist.

Beispiel

Aufgabe:



Freigeschnitten:



Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x} &= -k_w(x-r) - k_s(x-y) - b(\dot{x}-\dot{y}) \\ m_2 \cdot \ddot{y} &= -k_s(y-x) - b(\dot{y}-\dot{x}) \end{aligned}$$

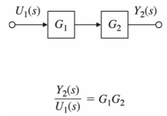
$$\begin{aligned} \frac{k_w}{m_1} r &= \ddot{x} + \frac{b}{m_1}\dot{x} + \frac{k_w+k_s}{m_1}x - \frac{b}{m_1}\dot{y} - \frac{k_s}{m_1}y \\ 0 &= \ddot{y} + \frac{b}{m_2}\dot{y} + \frac{k_s}{m_2}y - \frac{b}{m_2}\dot{x} - \frac{k_s}{m_2}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{k_w}{m_1} R(s) &= \left(s^2 + s\frac{b}{m_1} + \frac{k_w+k_s}{m_1}\right)X(s) - \left(s\frac{b}{m_1} + \frac{k_s}{m_1}\right)Y(s) \\ 0 &= \left(s^2 + s\frac{b}{m_2} + \frac{k_s}{m_2}\right)Y(s) - \left(s\frac{b}{m_2} + \frac{k_s}{m_2}\right)X(s) \end{aligned}$$

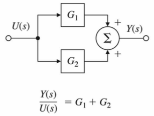
3 Das dynamische Verhalten von Systemen

3.1 Blockdiagramme

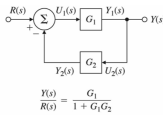
Regeln



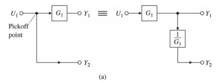
(a) Kettenschaltung



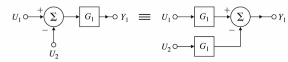
(b) Parallelschaltung



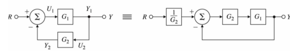
(c) Rückführung



(a) Pickoff-Verschiebung

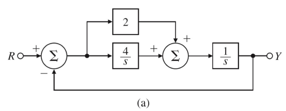


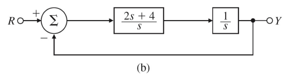
(b) Summationspunkt-Verschiebung



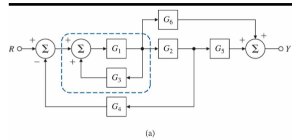
(a)

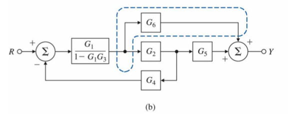
Beispiele

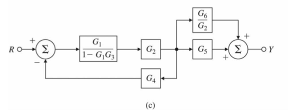




$$T(s) = \frac{\frac{2s+4}{s^2}}{1 + \frac{2s+4}{s^2}}$$







$$T(s) = \frac{\frac{G_1G_2}{1-G_1G_3}}{1 + \frac{G_1G_2G_4}{1-G_1G_3}} \cdot \left(G_5 + \frac{G_6}{G_2}\right) = \frac{G_1G_2G_5 + G_1G_6}{1 - G_1G_3 + G_1G_2G_4}$$

3.2 Laplace-Transformation

Wenn nichts anderes gegeben gilt für Anfangsbedingungen $y(0) = \dot{y}(0) = \ldots = 0$.

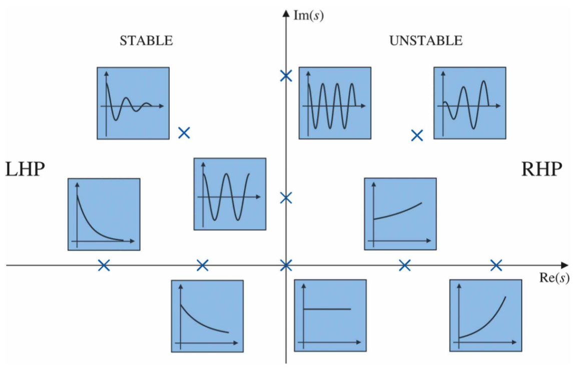
3.3 Partialbruchzerlegung

Regeln

$\frac{A}{x-x_1}$	Einfache Nullstelle
$\frac{A_1}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_m}{(x-x_1)^m}$	m-fache Nullstelle
$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$	quadratisch (komplex) Nst
$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}+\ldots+\frac{A_m x+B_m}{x^2+ax+b}$	m-fach quadratisch Nst

4 Frequenzgang und Polstellenlage

Auswirkung der NST und Polstellenlage



Polstelle (reell + komplexes Polpaar)

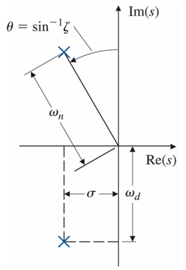
Re	Im	Auswirkung
<0	$=0$	stabil - keine Schwingung
>0	$=0$	instabil - keine Schwingung
$=0$	$=0$	instabil - keine Schwingung
<0	$\neq$	stabil - Schwingung
>0	$\neq$	instabil - Schwingung
$=0$	$\neq$	Dauerschwingung

Nullstelle:

$<=0$	minimalphasiges System (evtl. Überschwung)
$>=0$	nichtminimalphasiges System (Systemantwort erst entgegen der Sprunganregung)
$=0$	$lim_{t\to\infty} y(t) \to 0$

4.1 PT$_2$ - Glied

PT$_2$ - Glied



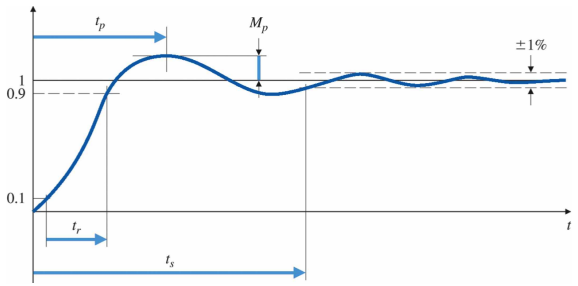
Instabilität beginnt in der rechten Halbebene.
Für die **Dämpfung** gilt, je kleiner der Winkel θ, desto kleiner ist die Dämpfung:

$\theta = \arcsin \zeta$

Charakteristische Gleichung:
$a(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s+\sigma)^2 + \omega_d^2$

4.2 Kenngrößen im Zeitbereich

Kenngrößen



Steigzeit $[0.1, 0.9]$:
$t_r \approx \frac{1{,}8}{\omega_n}$

±1%-Einschwingzeit:
$t_s = \frac{\ln 0.01}{\zeta\omega_n} = \frac{4{,}6}{\sigma}$

Überschwingweite:
$M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
$0 \le \zeta \le 1$

Anstiegszeit:
$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$

Gedämpfte Kreisfrequenz:
$\omega_d = \omega_n * \sqrt{1-\zeta^2}$

Dämpfung $\zeta = \sqrt{\frac{\ln(M_p)^2}{\pi^2 + \ln(M_p)^2}}$

Ungedämpft zu gedämpft
$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega_d^2$

6 Stabilität von linearen Systemen

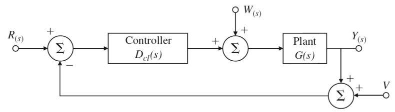
Stationäres Verhalten

Stationärwert: $y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$

$$D(s) = \begin{cases} K & \text{P-Regler} \\ K\left(1+\frac{1}{T_t}\right) & \text{PI-Regler} \\ K\left(1+\frac{1}{T_t}+T_D s\right) & \text{PID-Regler} \end{cases}$$

Stabilität

Alle Pole der Übertragungsfunktion müssen in der LHE sein. **Steuerung** stabilisiert nicht. **Regelung:**



$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ $\quad D_{OL} = \frac{c(s)}{d(s)}$ $\quad 1 + GD_{CL} = 0$

$1 + \frac{bc}{ad} = 0$ $\quad a(s)d(s) + b(s)c(s) = 0$

Die Regelung reduziert die Auswirkung von Störung um $1 + AK$.

6.1 Routh-Stabilitätskriterium

Routh Kriterium

Gibt Aussage darüber, ob alle Pole des charakteristischen Polynoms $P(s)$ in der LHE liegen:

$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$

Es muss gelten $a_i > 0$ für $\forall i \in N$

n	s^n	1	a_2	a_4	$\ldots$
$n-1$	s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	$\ldots$
$n-2$	s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\ldots$
$n-3$	s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
2	s^2	$*$	$*$		
1	s^1	$*$			
0	s^0	$\ldots$			

Die Koeffizienten werden folgendermaßen errechnet:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_2 - a_3}{a_1} \qquad c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_4 - a_5}{a_1} \qquad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

$$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_6 - a_7}{a_1} \qquad c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$$

- Alle Elemente der ersten Spalte positiv $\Rightarrow$ Wurzeln in der offenen LHE
- #-Wurzeln in der geschlossenen RHE = #-Vorzeichenwechsel
- Wenn das erste Element einer Zeile null ist, setze $\epsilon > 0$. Stabilitätskriterium für $\epsilon \to 0_+$

Sensitivität

Sensitivität beschreibt die Reaktion des Systems auf Änderung im Parameter

$$S_A^{T_{CL}} = \frac{A}{T_{CL}} \frac{dT_{CL}}{dA} \qquad |S_G^{T_{CL}}| = \frac{1}{1 + G(i\omega_0)D(i\omega_0)}$$

T_{CL} – Closed-Loop Übertragungsfunktion $\quad A$ – Parameter

6.2 CLM-Stabilitätskriterium

CLM-Kriterium

Annahme: m-Wurzeln in RHE und $n - m$-Wurzeln ($n \le m$) Charakteristische Gleichung:

$$P(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n = 0$$

Einsetzen $s = j\omega$. Das System ist dann asymptotisch stabil, wenn

1. die Ortskurve $P(j\omega)$ für $0 \le \omega \le \infty$ die Quadranten abwechselnd durchläuft (sich die Nullstellen des Real- und Imaginärteils von $P(j\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$ abwechseln).
2. Real- und Imaginärteil zusammen n (Grad der Gleichung) reelle Nullstellen im Bereich $0 \le \omega \le \infty$ besitzen.

Beispiel:

$$P(s) = 2 + 5s + 7s^2 + 8s^3 + 4s^4 + s^5$$
$$P(j\omega) = 2 + 5j\omega + 7(j\omega)^2 + 8(j\omega)^3 + 4(j\omega)^4 + (j\omega)^5$$
$$2 - 7\omega^2 + 4\omega^4 + j(5\omega - 8\omega^3 + \omega^5)$$
$$U(\omega) + jV(\omega)$$

Realteil hat die Nullstellen:

$$2 - 7\omega^2 + 4\omega^4 = 0$$

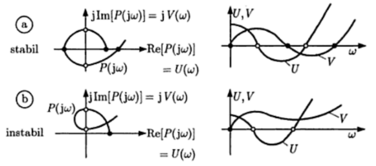
$\omega_1^2 = 0,36 \qquad \omega_2^2 = 1,39$

Imaginärteil hat die Nullstellen:

$$5\omega - 8\omega^3 + \omega^5 = 0$$

$\omega_3 = 0 \qquad \omega_4^2 = 0,68 \qquad \omega_5^2 = 7,32$

Insgesamt sind $n = 5$ reelle Nullstellen mit $\omega_i >= 0$ vorhanden. Diese wechseln sich jeweils ab, damit ist das System asymptotisch stabil. $\omega_3 < \omega_1 < \omega_4 < \omega_2 < \omega_5$ Siehe Grafik:



8 Wurzelortskurve

Konstruktionsregeln

n - Anzahl der Pole (p_i) $\qquad m$ - Anzahl der NST (z_i)

Regel 1:
$n - m$ Zweige gehen zu den Asymptoten
m Zweige enden in den NSTs

Regel 2:
Ein Punkt ist auf WOK, wenn die Summe der Pole und NST rechts vom Punkt ungerade ist (0 ist ungerade) (Nur Pole und NST auf der reellen Achse)

Regel 3:
Asymptoten schneiden sich im Schwerpunkt α und haben Winkel Φ_l, $l = 1, \ldots, n - m$

$$\Phi_l = \frac{180°}{n - m} + \frac{360°(l - 1)}{n - m}$$
$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

Regel 4:
Beachte Laufindex: $l = 1, \ldots, q$
Austrittswinkel der Zweige q-Facher Pol. Φ_i- Winkel aus der Sicht der Polstelle. Ψ_i - Winkel aus der Sicht der Nullstelle.

$$\Phi_{l,Beginn} = \frac{1}{q}\left(\sum \Psi_i - \sum_{i \ne l} \Phi_i - 180° - 360°(l - 1)\right)$$

Eintrittswinkel in die q-fachen Nullstellen:

$$\Psi_{l,End} = \frac{1}{q}\left(\sum \Phi_i - \sum_{i \ne l} \Psi_i + 180° + 360°(l - 1)\right)$$

Regel 5:
Austrittswinkel aus einem Verzweigungspunkt (q-facher Pol):

$$\Psi_l = \frac{180°}{q} + 360° \frac{l - 1}{q}$$

Regel 6:
Verzweigungspunkte Pole (Nullstellen):

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - z_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - p_i} = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$1 + K * L(s) = 0$$

Berechnung von K:
Das gesuchte s in die Gleichung einsetzen und die Gleichung lösen

$$K = -\frac{\prod_i (s - p_i)}{\prod_i (s - z_i)}$$

7 Bode-Diagramm

Konstruktionsregeln Bode-Diagramm

Amplitudengang:

$$G(s) = c \cdot s^r \cdot \underbrace{G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \ldots \cdot G_k(s)}_{G^*(s)} \cdot e^{-T_t s}$$

$G_i(s) = (s + n_i)$ reelle Nullstelle

1. Eckfrequenzen aufsteigend sortieren
2. niedrigste Frequenz ist die Startfrequenz ω_1
3. Startamplitude:
   $A_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}(|c \cdot G^*(0)| \cdot \omega_{\min}^r)$
4. Asymptote links vom Startpunkt:
   $r \cdot 20 \frac{\text{dB}}{\text{Dekade}}$
5. Wenn zwischen benachbarten Eckfreuqenzen 1 Dekade liegt ⇒ Absenkung(POL)/Erhöhung(NST) um $n * 3$dB über dem jeweiligen Knickpunkt
6. Jede Eckfrequenz verändert die Steigung folgendermaßen

$G_i = (s + n_i)$	$+20\frac{\text{dB}}{\text{Dekade}}$	$\omega_i = \|n_i\|$
$G_i = \frac{1}{(s+p_i)}$	$-20\frac{\text{dB}}{\text{Dekade}}$	$\omega_i = \|p_i\|$
$G_i = (s^2 + 2D_i m_i s + m_i^2)$	$+40\frac{\text{dB}}{\text{Dekade}}$	$\omega_i = \|m_i\|$
$G_i = \frac{1}{(s^2 + 2D_i p_i s + p_i^2)}$	$-40\frac{\text{dB}}{\text{Dekade}}$	$\omega_i = \|p_i\|$

7. Jeder Term der Form $s^2 + 2D_i m_i s + m_i^2$ liefert einen Peak am entsprechenden ω_i. Eine Nullstelle unterhalb der Asymptote - eine Polstelle oberhalb der Asymptote. $(\pm)20\log(\frac{1}{2 * D_i})$

Exakter Wert: $A_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log_{10}(G(\omega))$

Phasengang:

1. Bestimme Startfrequenz
   $$\varphi(0) = \begin{cases} r \cdot 90° & \text{wenn } c \cdot G^*(0) > 0 \\ -180° + r \cdot 90° & \text{wenn } c \cdot G^*(0) < 0 \end{cases}$$
2. an jeder Eckfrequenz springt die Phase:

$G_i = (s + n_i)$	$+90° \cdot \text{sign}(n_i)$
$G_i = \frac{1}{(s+p_i)}$	$-90° \cdot \text{sign}(p_i)$
$G_i = (s^2 + 2D_i m_i s + m_i^2)$	$+180° \cdot \text{sign}(D_i m_i)$
$G_i = \frac{1}{(s^2 + 2D_i q_i s + q_i^2)}$	$-180° \cdot \text{sign}(D_i q_i)$

3. Wenn $2D_i q_i s = 0$ → ungedämpftes Polpaar → sign(0) = ±1 (kann gewählt werden)

Exakter Wert:

$$\varphi(\omega) = \sum_j \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) : \forall G_j(i\omega) \in G^* : \begin{cases} b + ai \\ \frac{1}{a+bi} \end{cases}$$

Phasenminimumsystem

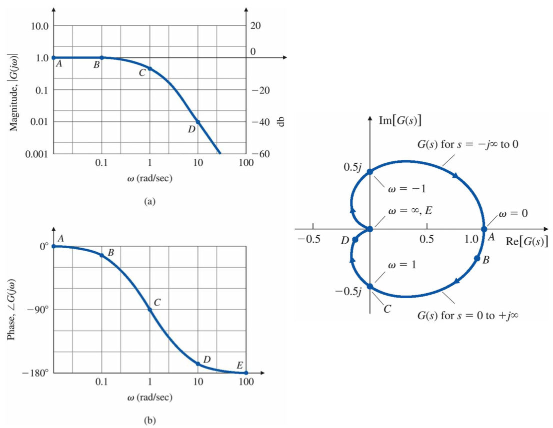
Phasenminimumsystem ist dann gegeben, wenn die Übertragungsfunktion

- keinen Totzeitfaktor enthält
- G(s) hat Pole und Nullstelle nur in LHE

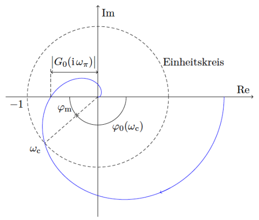
9 Nyquist-Diagramm (Stabilität)

Konstruktionsregeln Nyquist-Diagramm

1. Betrag und Phase für mehrere Punkte aus dem Amplitudengang und Phasengang des Bode-Diagramms ablesen.
2. Die Länge des Zeigers $10^{\frac{A_{dB}(\omega)}{20}}$ zum Nyquist-Plot ist der Wert im Amplitudengang.
3. Der Winkel des Zeigers ist $\varphi(\omega)$
4. Für $\omega = 0°$ bis $\omega = \infty$
5. Instabil, wenn der Nyquist-Plot die -1 umschließt.



Nyquist



Amplituden-/ Betragsreserve

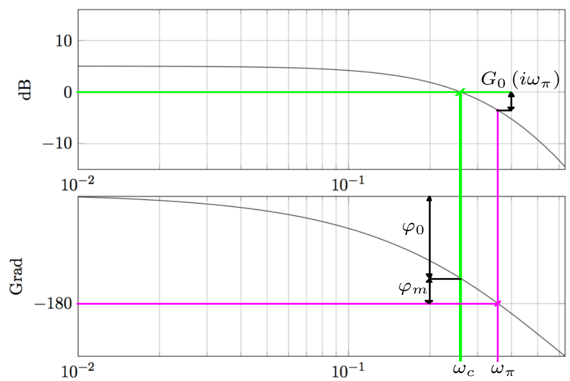
$$G_m = \frac{1}{|G_0(i\omega_\pi)|}$$

$$\omega_\pi = -180°$$

Phasenreserve (ω_c ist im Bode Diagramm, da wo Amplitudengang 0dB schneidet):

$$\phi_m = \pi + \phi(\omega_c)$$

Übliche Werte sind $G_m = 2,5\ldots10$ und $\phi_m = 30°\ldots60°$. Zur Stabilitätsanalyse kann man prüfen $|G_0(i\omega_\pi)|$ größer oder kleiner als 1 ist.



Mit $\varphi_m = \pi + \varphi_0(\omega_c)$ und $G_m = \frac{1}{|G_0(i\omega_\pi)|}$

Berechnung Betragsreserve aus G(s)

Gegeben ist eine Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 11s^2 + 11s + 10}$$

$j\omega$-Einsetzen - und auf die untere Form bringen: Umformen auf

$$G(j\omega) = \frac{10}{\mathrm{Re} + j\omega\mathrm{Im}} = $$

$$= \frac{10}{(-11\omega^2 + 10) + i\omega(11 - \omega^2)}$$

$$\tan(-\pi) = 0 = \frac{\omega_\pi(11 - \omega_\pi^2)}{\omega_\pi^2 + 10}$$

$$\omega_\pi = \sqrt{11}$$

$$G(i\omega_\pi) = \frac{10}{-111} = 20,9\text{dB}$$

10 Zustandsraumdarstellung

Übertragungsfunktion aus Zustandsraumdarstellung

Matrixinversion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + D$$

Verallgemeinerte Systemmatrix

Rosenbrockmatrix aufstellen:

$$\boldsymbol{P}(s) = \left[\begin{array}{c|c} s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline -\boldsymbol{C} & D \end{array}\right]$$

Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{\boldsymbol{C}adj(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + D|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|} = \frac{|\boldsymbol{P}(s)|}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|}$$

11 Kanonische Formen

Definition + Umrechnung

Allgemeine Darstellung:	Darstellung in Normalform:
$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}u$	$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$
$y = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + Ju$	$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + Du$
$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{T}$	$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}u$
$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{G}$	$y = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + Ju$

KOCHREZEPT: Regelungsnormalform

Definition:

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s) \quad (1)$$

$$= \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} U(s) \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad (4)$$

Bilde die Inverse $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{-1}$ von:

$\boldsymbol{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$

Nehme letzte Zeile $\boldsymbol{t}_1^T$ von $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{-1}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}^{-1}$

Stelle inverse der Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ auf:

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_1^T \\ \boldsymbol{t}_1^T \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{t}_1^T \boldsymbol{F}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{t}_1^T \boldsymbol{F}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Umrechnungsvorschrift Zustandsform

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{T}$$

Steuerbarkeit

Das System heißt **steuerbar**, wenn $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ **nicht singulär** ist. (Es existiert eine Inverse von $\boldsymbol{\mathcal{C}}$)

KOCHREZEPT: Beobachtungsnormalform

Definition: Aus der Funktion 2 stellt man die Matrizen auf:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Umrechnungsregeln

$$\boldsymbol{A}_O = \boldsymbol{A}_C^T \quad \boldsymbol{B}_O = \boldsymbol{C}_C^T$$

$$\boldsymbol{C}_O = \boldsymbol{B}_C^T \quad D_O = D_C$$

Bilde die Inverse $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{-1}$ und nehme letzte **Spalte** $\boldsymbol{t}_1$ von $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{-1}$

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{O}}^{-1} \qquad \boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{\mathcal{O}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Transformationsmatrix bilden $\boldsymbol{T}$ nach Vorschrift:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \boldsymbol{F}\boldsymbol{t}_1 & \ldots & \boldsymbol{F}^{n-1}\boldsymbol{t}_1 \end{bmatrix}$$

Umrechnungsvorschrift in Beobachtungsnormalform

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{G}$$

Beobachtbarkeit

Das System heißt **beobachtbar**, wenn $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ **nicht singulär** ist. (Es existiert eine Inverse von $\boldsymbol{\mathcal{O}}$)

KOCHREZEPT: Modalform

Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion ⇒ Modus

1. Alle Pole sind reell und einfach:

$$G(s) = \frac{b_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{b_n}{s - p_n}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Jordanform - wenn die Nullstellen nicht reell sind:

2. Komplexes Polpaar ⇒ Partialbruch der Art. Blockmatrizen für das Polpaar werden an entsprechender Stelle eingefügt

$$\frac{b_{i+1}s + b_i}{s^2 + a_i s + a_{i+1}}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{i+1} & -a_i \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b_i & b_{i+1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

3. Ein m-facher Pol $\frac{b}{(s-p)^m}$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} p & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Zum erstellen der Modalform:

Eigenwerte λ_i von $\boldsymbol{F}$*berechnen* (5)

Eigenvektoren von $\boldsymbol{F}$ bilden $\boldsymbol{T}$ (6)

Umrechnungsvorschrift in Modalform

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{G} \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{T}$$

Aussagen

Für $\boldsymbol{B}$ - wenn $b_i = 0 \Rightarrow x_i$ **nicht steuerbar**
Für $\boldsymbol{C}$ - wenn $c_i = 0 \Rightarrow x_i$ **nicht beobachtbar**

Aufgabe: Stellen Sie folgende Übertragungsfunktion in Jordannormalform dar:

$$G(s) = \frac{2s+4}{s^2(s^2+2s+4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+2s+4}$$

Lösung:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -4 & -2\end{array}\right] \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} x$$

13 Regelung im Zustandsraum

13.1 Regler-Entwurf

1. Die Zustandsrückführung ist : $u = -\boldsymbol{Kx}$ einsetzen in $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Fx} + \boldsymbol{G}u$
2. $\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{GK})\boldsymbol{x}$
3. Für vorgegebene Pole s_i charakteristische Gleichung aufstellen
4. $\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F} + \boldsymbol{GK})$ ergibt die charakteristische Gleichung in Abhängigkeit von $\boldsymbol{K} = [k_1 \; \dots \; kn]$
5. Koeffizentenvergleich zwischen beiden charakteristischen Gleichungen $\Rightarrow \boldsymbol{K}$

System in Regelungsnormalform K ist besonders einfach, wenn ein System in RNF vorliegt.

$$\boldsymbol{A}_C - \boldsymbol{B}_C\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 \dots & 0\\ & & & \\ 0 & 0 & 0 \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 \dots & 1\\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & \dots & -a_1 - k_n \end{bmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung ergibt sich sofort zu:

$$s^n + (a_1 + k_n)s^{n-1} + (a_2 + k_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_n + k_1) = 0$$

Man kann direkt den Koeffizientenvergleich machen - Determinantenbildung entfällt.

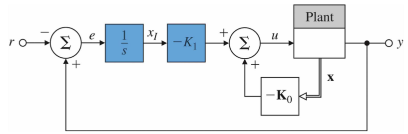
Integralregelung

Charakteristische Gleichung $0 = det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_a + \boldsymbol{B}_a * \boldsymbol{K})$ Integralregelung sorgt dafür der Fehler bei Änderung der Streckenparameter Null wird. Das System wir um einen Integralen Teil erweitert.

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_I\\ \dot{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{H}\\ 0 & \boldsymbol{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_I\\ \boldsymbol{x}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{G}\end{bmatrix} u - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} r$$

mit dem Regler:

$$u = -\begin{bmatrix}K_1 & \boldsymbol{K_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_I\\ \boldsymbol{x}\end{bmatrix} = -\boldsymbol{K}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_I\\ \boldsymbol{x}\end{bmatrix}$$



Beispiel: Übertragungsfunktion $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}$
Systembeschreibung $F = -3, G = 1, H = 1$
Gewünscht Pole bei $s = -5$ + Integralanteil
$\Rightarrow a_C(s) = s^2 + 10s + 25$
Die erweiterte Systembeschreibung ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_I\\ \dot{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_I\\ \boldsymbol{x}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} u - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} r$$

Die Rückführmatrix

$$\det\left(s\boldsymbol{I} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{K}\right) \stackrel{!}{=} s^2 + 10s + 25$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25 & 7\end{bmatrix}$$

Referenzsystem

Das ist, dass im eingeschwungenen Zustand der Ausgang $y = r$ ist. Mit $u = -\boldsymbol{Kx} + r$ als Ansatz.

Vorgehensweise

1. Gleichung

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{H} & J\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N_x}\\ N_u\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{N_x}\\ N_u\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{H} & J\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

2. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} u &= N_u * r - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{N_x}r)\\ &= -\boldsymbol{Kx} + \underbrace{(N_u + \boldsymbol{KN_x})}_{\bar{N}} r \end{aligned}$$

13.2 Beobachterentwurf

Manche Zustandsgrößen können nur geschätzt werden (Messung nicht möglich). Man nutzt einen Schätzwert (Simulation) $\hat{x}$. Mit dem Beobachterentwurf wird dafür gesorgt, dass der Schätzfehler auf Null abklingt. **Vorgehensweise**

1. Wunschpole zu Wunsch-Charakteristischen Gleichung umformen
2. Bilde $\det(s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{LH})) \Rightarrow$ - Charakteristische Gleichung abhängig von $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix}l_1 & \dots & l_n\end{bmatrix}^T$
3. Koeffizientenvergleich und Werte von $\boldsymbol{L}$ bestimmen

System in Beobachtungnormalform Die Charakteristische Gleichung lässt sich einfach ablesen aus

$$\boldsymbol{F} - \boldsymbol{LH} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n - l_1\\ 1 & \cdots & 0 & -a_{n-1} - l_2\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 - l_n \end{bmatrix}$$

$$s^n + (a_1 + l_n)s^(n-1) + (a_2 + l_{n-1} + \dots + (a_n + l_1)) = 0$$

Kompensator

Das ist die Kombination aus einem Regler und Beobachter. Die beiden werden separat entworfen und anschließend zu einem System zusammengefasst.

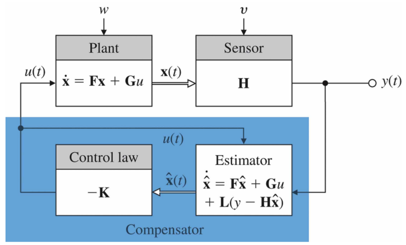


Abbildung 6

Übertragungsfunktion lässt sich berechnen durch:

$$D(s) = \frac{U(s)}{Y(s)}$$

$$U(s) = \det(P(s)) = \det\left[\begin{array}{c|c} s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} & \boldsymbol{L}\\ \hline \boldsymbol{K} & 0\end{array}\right]$$

$$Y(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F} + \boldsymbol{LH} + \boldsymbol{GK})$$

15 Optimale Regelung

Definitheit einer symmetrischen (Tuning-) Matrix

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

Matrix	a	c	$a \cdot c$
positiv definit ($\succ 0$)	> 0	-	$> b^2$
positiv semidefinit ($\succeq 0$)	≥ 0	≥ 0	$\geq b^2$
negativ definit ($\prec 0$)	< 0	-	$> b^2$
negativ semidefinit ($\preceq 0$)	≤ 0	≤ 0	$\geq b^2$
indefinit	-	-	$< b^2$

15.1 LQ-Regler - optimaler Regler

Anforderung an Tuning-Matrizen:

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T \succeq 0 \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T \succeq 0 \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^T \succ 0$

1. Löse Gleichung
   $$\boldsymbol{0} = -\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}$$
2. optimaler Regeleingang
   $$u(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) = -(\underbrace{\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{P}}_{K})\boldsymbol{x}(t)$$
3. Eine Lösung ist gegeben, wenn alle instabilen Zustände steuerbar sind **-stabilisierbar**
4. Instabile Moden müssen durch die Kostenfunktion erfasst werden
5. Stabil, wenn das System
   $$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}$$
   detektierbar ist. Alle instabilen Zustände sind beobachtbar.
6. Wenn $[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{F}]$ detektierbar ist typischerweise $Q = \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}$

Stabilisierbarkeit lässt sich durch die B-Matrix, Detektierbarkeit durch die C-Matrix erkennen, wenn das System in Modalform vorliegt.

Ein Maß für die Güte eines Reglers ist die Kostenfunktion J. Die Funktion spiegelt die Kosten für einen Regler wider. Man minimiert die Kostenfunktion. ⇒ Ricatti-Gleichung

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))dt$$

16 Kalman-Filter - optimaler Schätzer

Das zeitinvariante Kalman-Filter ist realisierbar, wenn $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{F})$ - detektierbar und $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}})$ stabilisierbar. Die Lösung der Matrix-Ricatti Gleichung ist dann ein **positiv-semidefinite konstante** Matrix $\boldsymbol{P}$.

$(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{F}) \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$

$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}) \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}}u$

Für die Matrizen gilt: $\boldsymbol{Q} \succeq 0$ - semidefinit und $\boldsymbol{R} \succ 0$ - definit. (manchmal werden diagonale Matrizen angenommen.)

Bemerkung: Für eine einfache Lösung müssen Rauschprozesse **Prozessrauschen** $w(t)$ und **Messrauschen** $v(t)$ weiß und unkorreliert sein. $E(w(t)) = E(v(t)) = 0$ und $E(w(t), v(t)^T) = 0$ Kovarianz kann folgendermaßen ermittelt werden:

$w(t) \qquad E(w(t)w(t)^T) = \boldsymbol{Q}\delta(t-\tau) \qquad \boldsymbol{Q} \succeq 0$

$v(t) \qquad E(v(t)v(t)^T) = \boldsymbol{R}\delta(t-\tau) \qquad \boldsymbol{R} \succ 0$

Vorgehensweise:

1. Löse die Gleichung
   $$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P} + (\boldsymbol{F}\boldsymbol{P})^T - (\boldsymbol{H}\boldsymbol{P})^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$$
2. Für 2×2-Matrizen wird ein symmetrisches $\boldsymbol{P}$ angenommen
   $$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$
3. Ein LGS mit drei Unbekannten p_1, p_2, p_3 lösen
4. Nur die Lösung mit $p_i \geq 0 \; \forall i$ wählen
5. Setze $\boldsymbol{P}$ in die Gleichung ein für konstante Rückführmatrix
   $$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}^{-1}$$

17 Diskrete Systeme

Zusammenhang s und z

Abbildung:
Linke komplexe s-Halbebene $\Longrightarrow$ Einheitskreis $|z| = 1$
$z = e^{sT}$ ist die Abbildungsvorschrift

z-Übertragungsfunktion

$\mathcal{Z}\{f(k-n)\} = z^{-n}F(z)$

Allgemeine DGL (2. Ordnung):

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2(k-2) + b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2)$$

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z)$$

$$Y(z) = (-a_1z^{-1} - a_2z^{-2})Y(z) + (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

Ablesen des Pols:

$$Y(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad \Rightarrow z_1 = \alpha$$

Endwertsatz der z-Transformation:
Kontinuierliches System:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_{\text{stat}} = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Diskretes System:

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = x_{\text{stat}} = \lim_{z\to 1} X(z)$$

z-Übertragungsfunktion: Halteglied und kontinuierliches System in Reihe

Das ist eine Approximation über Reihenschaltung Halteglied und kontinuierliches System:

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Reglerentwurf - diskrete Äquivalente

Vorgehen:

1. Entwerfe kontinuierlichen Regler
2. Diskretisiere den Regler
3. Bestätige Entwurf durch diskrete Analyse

Genügt eine lineare Interpolation kann die **Trapezregel** (Substitution) zur **Diskretisierung** verwendet werden:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

18 Diskrete Fundamentalmatrix

Definition

$$\boldsymbol{A}_d(T) = e^{\boldsymbol{A}T} \qquad B_d = \int_0^T \boldsymbol{A}_d(\tau)d\tau \cdot \boldsymbol{B}$$

Mit Taylorzerlegung kann man A_d berechnen:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!} + \boldsymbol{A}^3\frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 t + \boldsymbol{A}^3\frac{t^2}{2!} + \dots$$

KOCHREZEPT: Fundamentalmatrix Berechnung

$$\boldsymbol{A}_d(T) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\}$$

$$\boldsymbol{B}_d(T) = \mathcal{L}^{-1}\{(\frac{1}{s}\boldsymbol{A}_d(s) \cdot \boldsymbol{B})\}$$

Für 2×2-Matrix lässt sich A_d so bestimmen:

$$\boldsymbol{A}_d(s) = \frac{1}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|} adj(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{A}_d(T) = \mathcal{L}^{-1}\{A_d(s)\}$$

$$\mathcal{C}_d = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_d & \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{B}_d & \dots & \boldsymbol{A}_d^{n-1}\boldsymbol{B}_d \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_d \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_d^{n-1} \end{bmatrix}$$

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Das zeitdiskrete System $(\boldsymbol{A}_d, \boldsymbol{B}_d)$ ist vollständig **steuerbar** bzw. **beobachtbar**, wenn kontinuierliches System $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ es ist und wenn die Abtastzeit folgendes erfüllt:

$$T < \frac{\pi}{\omega_{j,\max}}$$

$\omega_{j,\max}$ ist betraglich größter Eigenwert von A