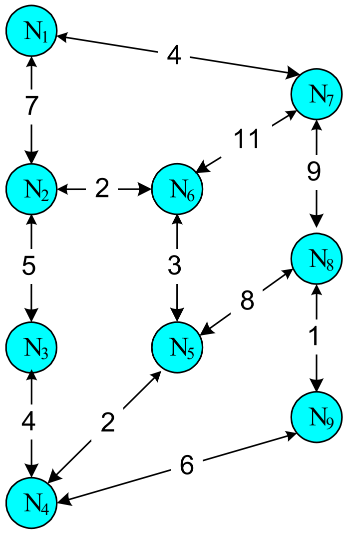
Δίνεται το δίκτυο δρομολογητών του παρακάτω σχήματος. Με χρήση των αλγορίθμων δρομολόγησης Dijkstra και Bellman Ford να εντοπιστεί στο δίκτυο αυτό το μονοπάτι ελάχιστου κόστους (D_i) από και προς τον κόμβο **N_1**, αντίστοιχα. Ο κόμβος **N_1** χαρακτηρίζεται ως «ρίζα» και στις δύο περιπτώσεις. Σε όλα τα βήματα εκτέλεσης του αλγορίθμου: α) να δοθούν σε μορφή Πίνακα τα τρέχοντα αποτελέσματα και β) να σχεδιαστεί το τρέχον δένδρου επικάλυψης του Τομέα.



Απάντηση

Ο Τομέας του σχήματος είναι ένας γράφος G=(V,E) που αποτελείται από εννέα (9) κόμβους N_i ϵ V (i=1 έως 9) και από ακμές e_{ij} ϵ E. Η κατευθυντικότητα (σχεδιαστικά αποτυπώνεται με βέλη) και τα κόστη των ακμών δείχνονται στο σχήμα. Κάθε ακμή e_{ij} είναι κατευθυντική με αφετηρία τον κόμβο N_i και απόληξη τον κόμβο N_j. Κάθε ακμή e_{ij} χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα κόστους d_{ij}, όπου εξ' ορισμού: $d_{i,i}$=0. Το μέτρο του κόστος είναι πάντοτε θετικός αριθμός.

Α) <u>Ανεύρεση δένδρου επικάλυψης με χρήση του αλγορίθμου Dijkstra</u>

Με βάση τον αλγόριθμο δρομολόγησης Dijkstra, το μονοπάτι ελάχιστου κόστος (D_i):

1. έχει πάντα αρχή τη ρίζα N_1, και δομείται από διαδοχικές ακμές και κόμβους.
2. αποτελείται από ένα υποσύνολο κόμβων V΄ του V. Ο κάθε κόμβος του V΄ πρέπει να παρουσιάζεται μόνο μία φορά μέσα στο διάνυσμα απόστασης D_i.
3. αποτελείται από ένα υποσύνολο ακμών Ε΄ του Ε.
4. εάν περιλαμβάνει k-κόμβους τότε θα περιλαμβάνει k-1 ακμές.

Ο αλγόριθμος του Dijkstra χρησιμοποιεί τις παρακάτω πρόσθετες παραμέτρους:

- **N΄**: ένα υποσύνολο από διατετεγμένους κόμβους των οποίων τα διανύσματα απόστασης από τη ρίζα (N_1) είναι τελειωτικά γνωστά. Οι κόμβοι διατάσσονται σύμφωνα με τη χρονική σειρά που επιλέγηκαν.
- **Q**: μια ουρά προτεραιότητας των κόμβων που δεν ανήκουν στο Ν΄. Οι κόμβοι είναι διατεταγμένη κατά αύξουσα σειρά με βάση τα αναγνωριστικά τους.
- **V**: το σύνολο των κόμβων του γράφου (δικτύου), όπου: V = N΄ + Q.

- **λ**: ο δείκτης που προσδιορίζει το κάθε βήμα (επανάληψη - Loop) του αλγορίθμου (λ=0,1,2,…).
- **$D_i^λ$**: η τιμή του διανύσματος απόστασης D_i του κόμβου προορισμού N_i από τη ρίζα (N_1), μετά την ολοκλήρωση του Βήματος-λ.
- **$N_{p,i}$**: ο προηγούμενος γειτονικός κόμβος N_p (predecessor node) του N_i κατά μήκος της διαδρομής από τη ρίζα (N_1) προς τον N_i.

Θεωρώντας ως πηγή/ρίζα τον κόμβο **N_1** και κάνοντας χρήση του επαναληπτικού αλγόριθμου της σχέσης:

$$D_j^{\lambda} = \min (D_j^{\lambda-1}, D_i^{\lambda-1} + d_{i,j})$$

επιδιώκεται η ανεύρεση όλων των διανυσμάτων απόστασης $D_j^{\lambda}, \forall\ j\neq 1$ από τη ρίζα (N_1) προς όλους τους υπόλοιπους κόμβους του Τομέα. Για το σκοπό αυτό δημιουργούνται τα σύνολα N΄ και Q, όπου: N΄ = { N_1 } και Q = { N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8 , N_9 }, όπου πάντοτε ισχύει η σχέση: V = N΄ + Q.

Η εκτέλεση του αλγορίθμου ολοκληρώνεται όταν στο σύνολο N΄ ενταχθούν, με διατεταγμένο τρόπο, όλοι οι κόμβοι του συνόλου V και αδειάσει η ουρά Q, δηλαδή και Q = { Ø }. Οι τιμές των παραμέτρων D_j^{λ} και $N_{p,j}$ αποτελούν την «*ικανή και αναγκαία πληροφορία δρομολόγησης*» για κάθε κόμβο. Μετά την εκτέλεση του κάθε Βήματος οι προκύπτουσες τιμές των παραμέτρων καταγράφονται στον Πίνακα Δρομολόγησης σαν ένα ενιαίο σύνολο που αναφέρεται ως **$S_{1,i}$**, ήτοι:

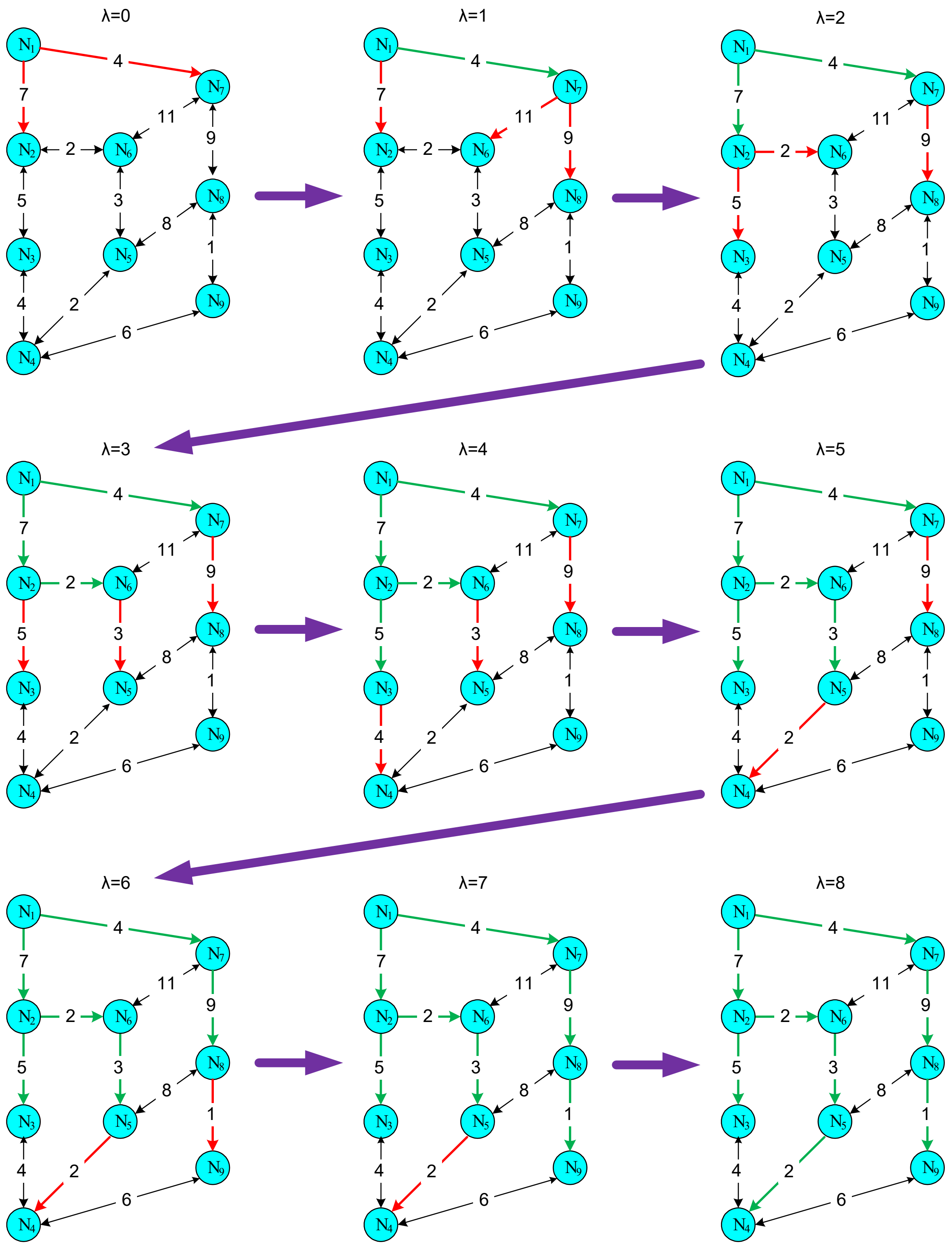
$$S_{1,i} = \{ D_i^{\lambda} , N_{p,i} \}$$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά σε Πίνακα όλα τα εξαγόμενα αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου σε όλα τα βήματα.

Πίνακας: Τελικός Πίνακας Δρομολόγησης του αλγορίθμου Dijkstra από τον κόμβο N_1 προς όλους τους άλλους κόμβους

λ	N′ = { }	Q = { }	$S_{7,i} = \{ D_i^{\lambda} , N_{p,i} \}$							
			N_2	**N_3**	**N_4**	**N_5**	**N_6**	**N_7**	**N_8**	**N_9**
0	$\{ N_1 \}$	$\{ N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9 \}$	$\{7, N_1\}$	$\{\infty, -\}$	$\{\infty, -\}$	$\{\infty, -\}$	$\{\infty, -\}$	**$\{4, N_1\}$**	$\{\infty, -\}$	$\{\infty, -\}$
1	$\{ N_1, N_7 \}$	$\{ N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_8, N_9 \}$	**$\{7, N_1\}$**	$\{\infty, -\}$	$\{\infty, -\}$	$\{\infty, -\}$	$\{15, N_7\}$		$\{13, N_7\}$	$\{\infty, -\}$
2	$\{ N_1, N_7, N_2 \}$	$\{ N_3, N_4, N_5, N_6, N_8, N_9 \}$		$\{12, N_2\}$	$\{\infty, -\}$	$\{\infty, -\}$	**$\{9, N_2\}$**		$\{13, N_7\}$	$\{\infty, -\}$
3	$\{ N_1, N_7, N_2, N_6 \}$	$\{ N_3, N_4, N_5, N_8, N_9 \}$		**$\{12, N_2\}$**	$\{\infty, -\}$	$\{12, N_6\}$			$\{13, N_7\}$	$\{\infty, -\}$
4	$\{ N_1, N_7, N_2, N_6, N_3 \}$	$\{ N_4, N_5, N_8, N_9 \}$			$\{16, N_3\}$	**$\{12, N_6\}$**			$\{13, N_7\}$	$\{\infty, -\}$
5	$\{ N_1, N_7, N_2, N_6, N_3, N_5 \}$	$\{ N_4, N_8, N_9 \}$			$\{14, N_5\}$				**$\{13, N_7\}$**	$\{\infty, -\}$
6	$\{ N_1, N_7, N_2, N_6, N_3, N_5, N_8 \}$	$\{ N_4, N_9 \}$			$\{14, N_5\}$					**$\{14, N_8\}$**
7	$\{ N_1, N_7, N_2, N_6, N_3, N_5, N_8 , N_9 \}$	$\{ N_4, \}$			**$\{14, N_5\}$**					
8	$\{ N_1, N_7, N_2, N_6, N_3, N_5, N_8 , N_9, N_4 \}$	{ - }								

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα απόστασης (προσωρινά και τελικά) όλων των μονοπατιών (κλάδων) του δένδρου επικάλυψης του Τομέα του αρχικού σχήματος μετά την εκτέλεση των Βημάτων 0-8 του αλγορίθμου Dijkstra. Τα προσωρινά διανύσματα απόστασης χρωματίζονται με κόκκινο χρώμα και τα τελικά με πράσινο.



Διανύσματα απόστασης μετά από κάθε βήμα της εκτέλεσης του αλγορίθμου Dijkstra στο δίκτυο του Τομέα.

B) <u>Ανεύρεση δένδρου επικάλυψης με χρήση του αλγορίθμου Bellman Ford</u>

Με βάση τον αλγόριθμο δρομολόγησης Bellman Ford, το μονοπάτι ελάχιστου κόστος (D_i) έχει πάντα ως τερματισμό τη ρίζα N_1, και δομείται από διαδοχικές ακμές και κόμβους.

Ο αλγόριθμος ακολουθεί μια επαναληπτική διαδικασία σε κάθε βήμα με βάση τις σχέσεις:

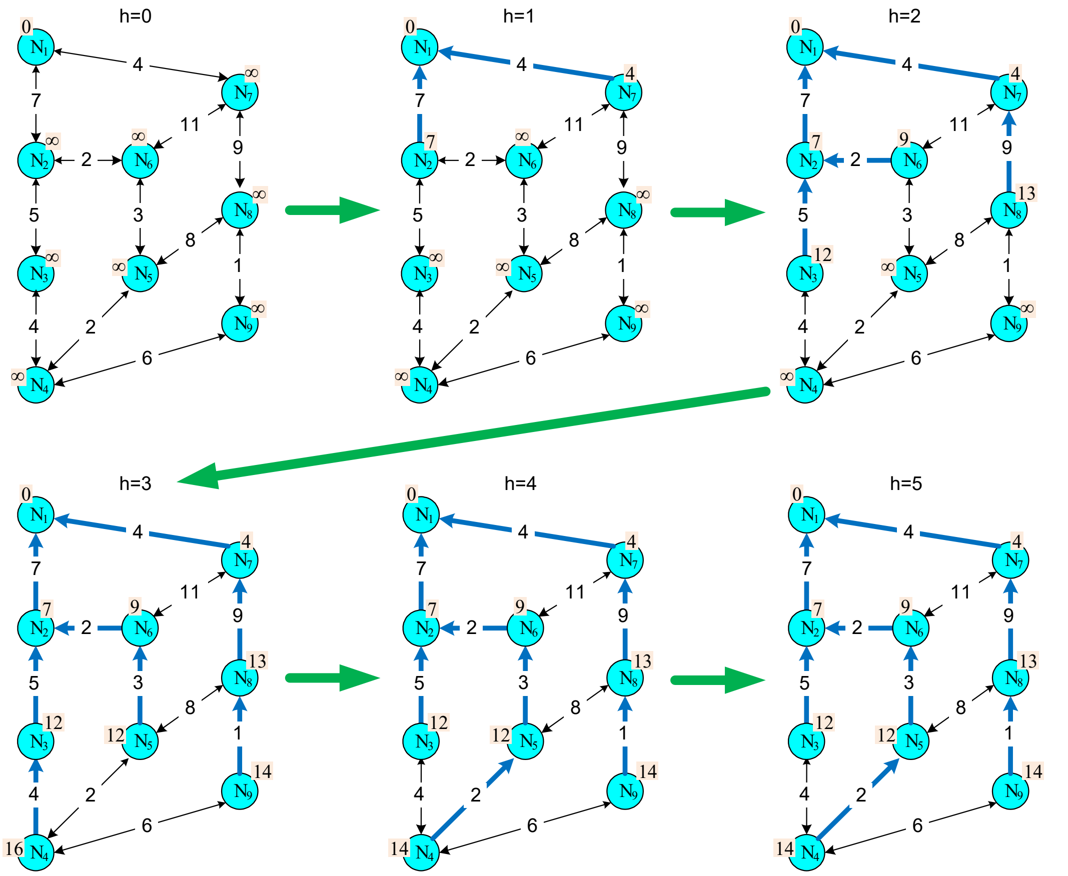
$D_i^h = \min_j [D_i^{h-1} + d_{ij}]$, h≥1 και i ≠ N_1, όπου N_1 είναι η ρίζα, $D_i^{h+1} = D_i^h$, h>h' και

$\mathbf{S_i, N_1}$ = { D_i^h, ο αμέσως επόμενος κόμβος από τον N_i προς τη ρίζα που δείχνει το D_i^h }

Μετά την εκτέλεση του κάθε Βήματος οι προκύπτουσες τιμές των παραμέτρων καταγράφονται στον Πίνακα Δρομολόγησης σαν ένα ενιαίο σύνολο που αναφέρεται ως $\mathbf{S_{i,1}}$. Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά σε Πίνακα όλα τα εξαγόμενα αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου σε όλα τα βήματα.

<u>Πίνακας</u>: Τελικός Πίνακας Δρομολόγησης του αλγορίθμου Bellman-Ford, από όλους τους κόμβους προς τον κόμβο N_1.

ΒΗΜΑ	**$S_{i,1}$ = { }**								
	N_1	**N_2**	**N_3**	**N_4**	**N_5**	**N_6**	**N_7**	**N_8**	**N_9**
h=0	{0, N_1}	{∞, N_2}	{∞, N_3}	{∞, N_4}	{∞, N_5}	{∞, N_6}	{∞, N_7}	{∞, N_8}	{∞, N_9}
h=1	{0, N_1}	{7, N_1}	{∞, N_3}	{∞, N_4}	{∞, N_5}	{∞, N_6}	{4, N_1}	{∞, N_8}	{∞, N_9}
h=2	{0, N_1}	{7, N_1}	{12, N_2}	{∞, N_4}	{∞, N_5}	{9, N_2}	{4, N_1}	{13, N_7}	{∞, N_9}
h=3	{0, N_1}	{7, N_1}	{12, N_2}	{16, N_3}	{12, N_6}	{9, N_2}	{4, N_1}	{13, N_7}	{14, N_8}
h=4	{0, N_1}	{7, N_1}	{12, N_2}	{14, N_3}	{12, N_6}	{9, N_2}	{4, N_1}	{13, N_7}	{14, N_8}
h=5	{0, N_1}	{7, N_1}	{12, N_2}	{14, N_3}	{12, N_6}	{9, N_2}	{4, N_1}	{13, N_7}	{14, N_8}



Στο παραπάνω σχήμα δίνονται τα διανύσματα απόστασης (προσωρινά και τελικά) όλων των μονοπατιών (κλάδων) του δένδρου επικάλυψης του Τομέα του αρχικού σχήματος μετά την εκτέλεση των Βημάτων 0-5 του αλγορίθμου Bellman Ford. Μετά το h=4 το δένδρο δεν παρουσιάζει καμία αλλαγή, οπότε ο αλγόριθμος έχει συγκλίνει. Το τελικό δένδρο σχεδιάζεται με έντονο μπλε χρώμα