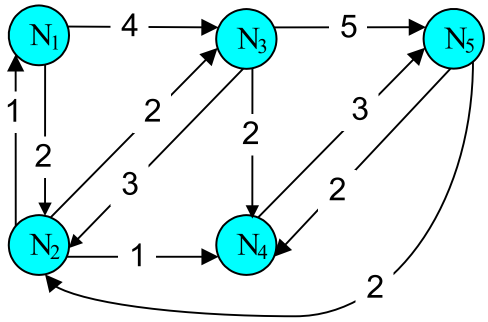
Θεωρείστε τον Τομέα (γράφος) του παρακάτω σχήματος που αποτελείται από πέντε (5) κόμβους [V={N_1, N_2, N_3, N_4, N_5}] και από δέκα (10) ζεύξεις/ακμές με συγκεκριμένη κατεύθυνση και κόστος. Με χρήση του αλγόριθμου δρομολόγησης Dijkstra να εντοπιστεί το μονοπάτι ελάχιστου κόστος (D_i) από τον κόμβο-πηγή N_1, ο οποίος χαρακτηρίζεται ως «ρίζα», προς όλους τους άλλους κόμβους-προορισμούς N_i, i≠1 του Τομέα.



Απάντηση

Με βάση τη θεωρία των γράφων, ο Τομέας παριστάνεται σαν ένας γράφος G=(V,E) αποτελούμενος από κόμβους $N_i \in V$ (i=1 έως 5), και ζεύξεις/ακμές $e_{ij} \in E$, όπου:

E = {$e_{1,2}$, $e_{1,3}$, $e_{2,1}$, $e_{2,3}$, $e_{2,4}$, $e_{3,2}$, $e_{3,4}$, $e_{3,5}$, $e_{4,5}$, $e_{5,2}$, $e_{5,4}$}

Κάθε ζεύξη e_{ij} είναι κατευθυντική (σχεδιαστικά αποτυπώνεται με ένα βέλος) με αφετηρία τον κόμβο N_i και απόληξη τον κόμβο N_j.

Κάθε ζεύξη e_{ij} χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα κόστους - d_{ij}, όπου εξ' ορισμού: $d_{i,i}$=0. Το μέτρο του κόστος είναι πάντοτε θετικός αριθμός. Με βάση το σχήμα προκύπτει:

$\mathbf{d_{i,j}}$ = {($d_{1,2}$ = 2), ($d_{1,3}$ = 4), ($d_{2,1}$ = 1), ($d_{2,3}$ = 2), ($d_{2,4}$ = 1), ($d_{3,2}$ = 3), ($d_{3,4}$ = 2), ($d_{3,5}$ = 5), ($d_{4,5}$ = 3), ($d_{5,2}$ = 2), ($d_{5,4}$ = 2)}

Με βάση τον αλγόριθμο δρομολόγησης Dijkstra, κάθε διάνυσμα απόστασης D_i :

1. έχει πάντα αρχή τη ρίζα N_1, και δομείται από διαδοχικές ακμές και κόμβους.
2. αποτελείται από ένα υποσύνολο κόμβων V΄ του V. Ο κάθε κόμβος του V΄ πρέπει να παρουσιάζεται μόνο μία φορά μέσα στο διάνυσμα απόστασης D_i.
3. αποτελείται από ένα υποσύνολο ακμών E΄ του E.
4. εάν περιλαμβάνει k-κόμβους τότε θα περιλαμβάνει k-1 ακμές.

Ο αλγόριθμος του Dijkstra χρησιμοποιεί τις παρακάτω πρόσθετες παραμέτρους:

- **N΄**: ένα υποσύνολο από διατετεγμένους κόμβους των οποίων τα διανύσματα απόστασης από τη ρίζα (N_1) είναι τελειωτικά γνωστά. Οι κόμβοι διατάσσονται σύμφωνα με τη χρονική σειρά που επιλέγηκαν.
- **Q**: μια ουρά προτεραιότητας των κόμβων που δεν ανήκουν στο N΄. Οι κόμβοι είναι διατεταγμένη κατά αύξουσα σειρά με βάση τα αναγνωριστικά τους.
- **V**: το σύνολο των κόμβων του γράφου (δικτύου), όπου: V = N΄ + Q.
- **λ**: ο δείκτης που προσδιορίζει το κάθε βήμα (επανάληψη - Loop) του αλγορίθμου.

- **D_i^{λ}**: η τιμή του διανύσματος απόστασης D_i του κόμβου προορισμού N_i από τη ρίζα (N_1), μετά την ολοκλήρωση του Βήματος-λ, (λ=0,1,2,…).
- **$N_{p,i}$**: ο προηγούμενος γειτονικός κόμβος του N_p (predecessor node) κατά μήκος της διαδρομής από τη ρίζα (πηγή) προς τον N_i.

Θεωρώντας ως πηγή/ρίζα τον κόμβο N_1 και κάνοντας χρήση του επαναληπτικού αλγόριθμου της σχέσης:

$$D_j^{\lambda} = \min(D_j^{\lambda-1}, D_i^{\lambda-1} + d_{i,j}) \quad \text{(Σχέση 1)}$$

επιδιώκεται η ανεύρεση όλων των διανυσμάτων απόστασης D_j^{λ} $\forall$ j≠1 από τη ρίζα (N_1) προς τους κόμβους N_2, N_3, N_4, και N_5. Για το σκοπό αυτό, δημιουργούνται τα σύνολα N΄ και Q, όπου πάντοτε ισχύει η σχέση: V = N΄ + Q. Η εκτέλεση του αλγορίθμου ολοκληρώνεται όταν στο σύνολο N΄ συμπεριληφθούν με διατεταγμένο τρόπο όλοι οι κόμβοι του συνόλου V και αδειάσει η ουρά Q, δηλαδή και Q = { Ø }. Οι τιμές των παραμέτρων D_j^{λ} και $N_{p,j}$ αποτελούν την «ικανή και αναγκαία πληροφορία δρομολόγησης» για κάθε κόμβο. Μετά την εκτέλεση του κάθε Βήματος οι προκύπτουσες τιμές των παραμέτρων καταγράφονται στον Πίνακα Δρομολόγησης σαν ένα ενιαίο σύνολο που αναφέρεται ως **$S_{1,i}$**, ήτοι:

$$S_{1,i} = \{ D_i^{\lambda} , N_{p,i} \}$$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά όλα τα εξαγόμενα αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου σε όλα τα βήματα και σε όλα τα υπό-βήματα.

<u>ΒΗΜΑ-0:</u> Επειδή ρίζα είναι ο κόμβος N_1, κατά την αρχικοποίηση τίθενται:

$$N' = \{ N_1 \} \text{ και } Q = \{ N_2, N_3, N_4, N_5 \}$$

$$D_2^0 = d_{1,2} = 2,\ D_3^0 = d_{1,3} = 4,\ D_4^0 = d_{1,4} = \infty \text{ , και } D_5^0 = d_{1,5} = \infty.$$

Με βάση την αρχικοποίηση αυτή, υπολογίζονται οι τιμές $S_{1,i}$ του Πίνακα Δρομολόγησης (Πίνακας 1).

λ	**N΄ = { }**	**Q = { }**	**$S_{1,i} = \{ D_i^{\lambda} , N_{p,i} \}$**			
			N_2	**N_3**	**N_4**	**N_5**
0	{ N_1 }	{ N_2, N_3, N_4, N_5 }	{2, N_1}	{4, N_1}	{∞, -}	{∞, -}

<u>*Πίνακας 1*</u>: Πίνακα Δρομολόγησης μετά το Βήμα-0 (λ=0)

<u>ΒΗΜΑ-1:</u> Από τα στοιχεία $S_{1,i}$ του Πίνακα 1 διαπιστώνεται ότι από όλους τους κόμβους που περιλαμβάνει η ουρά Q, αυτός που έχει το μικτότερο διάνυσμα απόστασης από τη ρίζα είναι ο κόμβος N_2 με τελική τιμή του διανύσματος απόστασης: $\boxed{D_2^1 = D_2^0 = 2}$. Ο κόμβος N_2 αφαιρείται από την ουρά Q και μεταφέρεται στο σύνολο N΄ όπου και <u>*διατάσσεται σαν τελευταίος κόμβος*</u>, οπότε προκύπτει:

$$N' = \{ N_1, N_2 \} \text{ και } Q = \{ N_3, N_4, N_5, \}$$

Στη συνέχεια θέτοντας $\boxed{\lambda=1}$ υπολογίζονται/επιλέγονται τα D_j^1 όλων των κόμβων N_j (j=3,4,5) της ουράς Q θεωρώντας τον N_2 σαν προηγούμενο κόμβο ($N_{p,j} = N_2$) μέσω της επανάληψης της Σχέσης 1, οπότε προκύπτει:

$D_3^1 = D_2^0 + d_{2,3} = 2 + 2 = 4 = D_3^0$ (καμία αλλαγή)

$D_4^1 = D_2^0 + d_{2,4} = 2 + 1 = 3 < \infty = D_4^0$ άρα προκύπτει νέα προσωρινή τιμή $\boxed{D_4^1 = 3}$

$D_5^1 = D_2^0 + d_{2,5} = 2 + \infty = \infty = D_5^0$ (καμία αλλαγή)

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, υπολογίζονται οι τιμές $S_{1,i}$ του Πίνακα Δρομολόγησης (Πίνακας 2).

λ	**N΄ = { }**	**Q = { }**	**$S_{1,i} = \{ D_i^\lambda , N_{p,i} \}$**			
			N_2	**N_3**	**N_4**	**N_5**
0	$\{ N_1 \}$	$\{ N_2, N_3, N_4, N_5 \}$	$\{2, N_1\}$	$\{4, N_1\}$	$\{\infty, -\}$	$\{\infty, -\}$
1	$\{ N_1, N_2 \}$	$\{ N_3, N_4, N_5 \}$		{4, N1}	**$\{3, N_2\}$**	$\{\infty, -\}$

<u>Πίνακας 2</u>: Πίνακα Δρομολόγησης μετά το Βήμα-1 (λ=1)

<u>ΒΗΜΑ-2:</u> Από τα στοιχεία $S_{1,i}$ του Πίνακα 2 διαπιστώνεται ότι από όλους τους κόμβους που περιλαμβάνει η ουρά Q, ο κόμβος N_5 έχει το μικτότερο διάνυσμα απόστασης ίσο με «3» και συνεπώς τίθεται τελική τιμή του διανύσματος απόστασης: $\boxed{D_4^2 = 3}$. Ο κόμβος N_4 αφαιρείται από την ουρά Q και μεταφέρεται στο σύνολο N΄ όπου και *<u>διατάσσεται σαν τελευταίος κόμβος</u>*, οπότε προκύπτει:

N΄ = $\{ N_1, N_2, N_4 \}$ και Q = $\{ N_3, N_5 \}$

Στη συνέχεια θέτοντας $\boxed{\lambda=2}$ υπολογίζονται / επιλέγονται τα D_j^2 όλων των κόμβων N_j (j=3,5) της ουράς Q θεωρώντας τον N_4 σαν προηγούμενο κόμβο ($N_{p,j} = N_4$) μέσω της επανάληψης της Σχέσης 1, οπότε προκύπτει:

$D_3^2 = D_4^1 + d_{4,3} = 3 + \infty = \infty > 4 = D_3^1$ άρα τίθεται: $D_3^2 = D_3^1 = 4$ (καμία αλλαγή)

$D_5^2 = D_4^1 + d_{4,5} = 3 + 3 = 6 < \infty = D_5^1$ άρα προκύπτει νέα προσωρινή τιμή $\boxed{D_5^2 = 6}$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, υπολογίζονται οι τιμές $S_{1,i}$ του Πίνακα Δρομολόγησης (Πίνακας 3).

λ	**N΄ = { }**	**Q = { }**	**$S_{1,i} = \{ D_i^\lambda , N_{p,i} \}$**			
			N_2	**N_3**	**N_4**	**N_5**
0	$\{ N_1 \}$	$\{ N_2, N_3, N_4, N_5 \}$	$\{2, N_1\}$	$\{4, N_1\}$	$\{\infty, -\}$	$\{\infty, -\}$
1	$\{ N_1, N_2 \}$	$\{ N_3, N_4, N_5 \}$		{4, N1}	$\{3, N_2\}$	$\{\infty, -\}$
2	$\{ N_1, N_2, N_4 \}$	$\{ N_3, N_5 \}$		{4, N1}		**$\{6, N_4\}$**

<u>Πίνακας 3</u>: Πίνακα Δρομολόγησης μετά το Βήμα-2 (λ=2)

<u>ΒΗΜΑ-3:</u> Από τα στοιχεία $S_{1,i}$ του Πίνακα 3 διαπιστώνεται ότι από όλους τους κόμβους που περιλαμβάνει η ουρά Q, αυτός που έχει το μικτότερο διάνυσμα απόστασης από τη ρίζα είναι ο κόμβος N_3 με τελική τιμή του διανύσματος απόστασης: $\boxed{D_3^2 = D_3^1 = 4}$. Ο κόμβος N_3 αφαιρείται από την ουρά Q και μεταφέρεται στο σύνολο N΄ όπου και *<u>διατάσσεται σαν τελευταίος κόμβος</u>*, οπότε προκύπτει:

N΄ = $\{ N_1, N_2, N_4, N_3 \}$ και Q = $\{ N_5 \}$

Στη συνέχεια θέτοντας $\boxed{\lambda=3}$ υπολογίζονται / επιλέγονται τα D_j^3 όλων των κόμβων N_j (j=3,6) της ουράς Q θεωρώντας τον N_3 σαν προηγούμενο κόμβο ($N_{p,j} = N_3$) μέσω της επανάληψης της Σχέσης 1, οπότε προκύπτει:

$$D_5^3 = D_3^2 + d_{3,5} = 4 + 5 = 9 > 6 = D_4^2 \text{ άρα τίθεται: } D_5^3 = D_5^2 = 6 \text{ (καμία αλλαγή)}$$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, υπολογίζονται οι τιμές $S_{1,i}$ του Πίνακα Δρομολόγησης (Πίνακας 4).

λ	**N΄ = { }**	**Q = { }**	**$S_{1,i} = \{ D_i^\lambda , N_{p,i} \}$**			
			N_2	**N_3**	**N_4**	**N_5**
0	{ N_1 }	{ N_2, N_3, N_4, N_5 }	{2, N_1}	{4, N_1}	{∞, -}	{∞, -}
1	{ N_1, N_2 }	{ N_3, N_4, N_5 }		{4, N1}	{3, N_2}	{∞, -}
2	{ N_1, N_2, N_4 }	{ N_3, N_5 }		{4, N1}		{6, N_4}
3	{ N_1, N_2, N_4, N_3 }	{ N_5 }				{6, N4

<u>Πίνακας 4</u>: Πίνακα Δρομολόγησης μετά το Βήμα-3 (λ=3)

<u>ΒΗΜΑ-4:</u> Από τα στοιχεία $S_{r,i}$ του Πίνακα 4 διαπιστώνεται ότι η ουρά Q περιλαμβάνει μόνο τον κόμβο N_5, άρα αυτός είναι που έχει το μικτότερο διάνυσμα απόστασης από τη ρίζα. Συνεπώς, ο κόμβος N_5 έχει τελική τιμή του διανύσματος απόστασης: $\boxed{D_5^4 = 6}$. Ο κόμβος N_5 αφαιρείται από την ουρά Q και μεταφέρεται στο σύνολο N΄ όπου και *<u>διατάσσεται σαν τελευταίος κόμβος</u>*, οπότε προκύπτει:

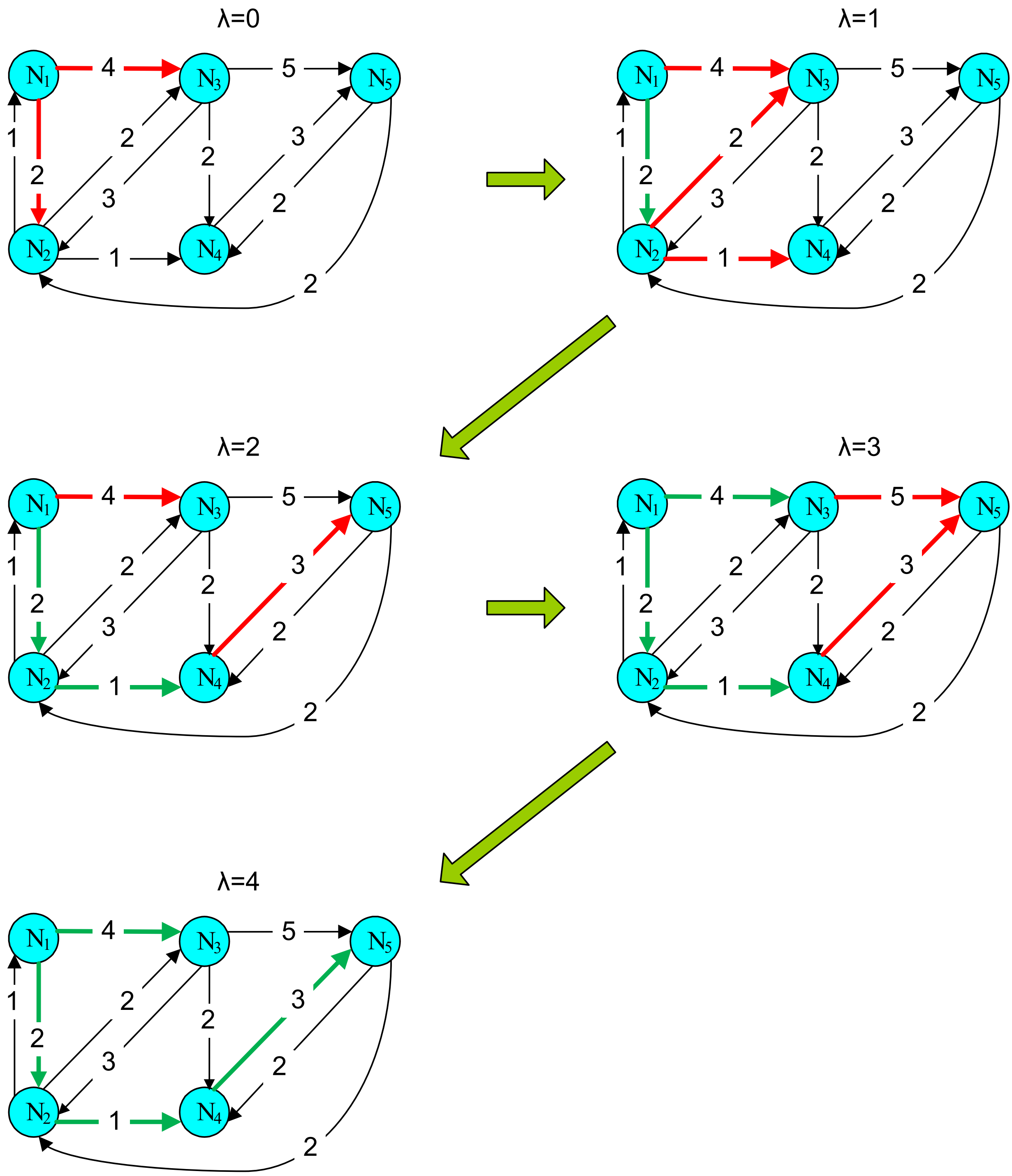
N΄ = { N_1, N_2, N_4, N_3, N_5 } και Q = { Ø }

Στο σημείο αυτό σηματοδοτείται η λήξη εκτέλεσης του αλγορίθμου, όπου όλοι οι κόμβοι του Τομέα έχουν λάβει την τελική τιμή του $S_{1,i}$ του Πίνακα Δρομολόγησης (Πίνακας 5).

λ	**N΄ = { }**	**Q = { }**	**$S_{1,i} = \{ D_i^\lambda , N_{p,i} \}$**			
			N_2	**N_3**	**N_4**	**N_5**
0	{ N_1 }	{ N_2, N_3, N_4, N_5 }	{2, N_1}	{4, N_1}	{∞, -}	{∞, -}
1	{ N_1, N_2 }	{ N_3, N_4, N_5 }		{4, N1}	{3, N_2}	{∞, -}
2	{ N_1, N_2, N_4 }	{ N_3, N_5 }		{4, N1}		{6, N_4}
3	{ N_1, N_2, N_4, N_3 }	{ N_5 }				{6, N4
4	{ N_1, N_2, N_4, N_3, N_5 }	{ - }				

<u>Πίνακας 5</u>: Πίνακα Δρομολόγησης μετά το Βήμα-4 (λ=4)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα απόστασης (προσωρινά και τελικά) όλων των μονοπατιών (κλάδων) του δένδρου επικάλυψης του Τομέα του αρχικού σχήματος μετά την εκτέλεση των Βημάτων 0-4 του αλγορίθμου Dijkstra. Τα προσωρινά διανύσματα απόστασης χρωματίζονται με κόκκινο χρώμα και τα τελικά με πράσινο.



Διανύσματα απόστασης μετά από κάθε βήμα της εκτέλεσης του αλγορίθμου Dijkstra στο δίκτυο του Τομέα.