

## 201 层次分析法（AHP）

层次分析法是由美国运筹学家，匹兹堡大学的萨迪教授在 20 世纪 70 年代初提出的，是一种整理和综合人们主观判断的客观分析方法，适用于多目标评价问题的权重确定。

### （1）基本原理

层次分析法通过定性指标模糊量化方法,计算出层次单排序重要性权数和总排序，来确定多目标多方案优化决策中各指标的权重。

### （2）操作步骤

#### ① 建立层次分析模型。

首先通过分析复杂问题中所含因素来划分不同层次，并画出层次结构图表示层次的递阶结构和相邻两层因素的从属关系。

#### ② 构造判断矩阵。

对每一层的要素按一定的准则进行比较，建立判断矩阵。判断矩阵元素的值表示人们对各因素关于目标的相对重要性的认识，在相邻的两个层次中，高层次为目标，低层次为因素。

在层次分析法中，采用了一种间接的方式，将有关指标子系统或指标项在描述某一现象中所起作用程度进行两两比较，其结果用一种特殊的标度方法表示出来，这就是层次分析法中的 1-9 比例标度法，1-9 标度的含义见小表：

1-9 标度的含义

标度	含义	标度	含义
1	两者同等重要	7	前者比后者强烈重要
3	前者比后者稍微重要	9	前者比后者极端重要
5	前者比后者明显重要	2、4、6、8	表示上述相邻判断的中间值
上述数据的 倒数	若元素 i 与元素 j 的重要性之比 $\alpha_{ij}$ 为上述某一数值，则元素 j 与元素 i 重要性之比 $\alpha_{ji} = \frac{1}{\alpha_{ij}}$		

将评价指标体系的目标层设为 A，准则层设为 B，构造 B 相对于 A 的判断

矩阵，其中元素为  $b_{ij}$ ，是[1-9]间整数或其倒数，主对角线为 1。准则层对于目标层的判断矩阵 A-B 为：

A	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
B <sub>1</sub>	1	1/5	1/3
B <sub>2</sub>	5	1	3
B <sub>3</sub>	3	1/3	1

为了以后方便计算，把上述矩阵记作 A，简写为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

③计算判断矩阵最大特征值以及对应的权重向量，得出每一层各要素的权重值，进行一致性检验。

计算权重的方法有两种：

1)、判断矩阵 A 每一行元素的乘积为  $M_i$ ，并计算  $M_i$  的  $n$  次方根  $w_i$ ，对向量

$W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  正规化，即  $W_i = w_i / \sum_{i=1}^n w_i$ ，则  $W = [W_1, W_2, \dots, W_n]^T$  为所求的权重向量。

2)、判断矩阵每一行元素的和为  $M_i$ ， $W_i = M_i / \sum_{i=1}^n M_i$ ，则  $W = [W_1, W_2, \dots, W_n]^T$

为所求的权重向量。

④求判断矩阵的最大特征根  $\lambda_{\max}$ 。

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n \frac{(F\omega)_i}{n\omega_i} \quad \text{式中，} (F\omega)_i \text{ 表示向量 } F\omega \text{ 的第 } i \text{ 个元素。}$$

例如：

$$\text{对于矩阵 F 有：} (F\omega)_i = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 4 & 1/2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1/4 & 1/5 & 1 & 1/3 \\ 2 & 1/2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.1837 \\ 0.4757 \\ 0.0730 \\ 0.2675 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7680 \\ 1.9268 \\ 0.3032 \\ 1.0918 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{4} \times \left[ \frac{0.7680}{0.1837} + \frac{1.9268}{0.4757} + \frac{0.3032}{0.0730} + \frac{1.0918}{0.2675} \right] = 4.1165$$

⑤RI 为平均随机一致性指标, 对于 1-9 阶判断矩阵, RI 的值分别列于表 2-1:

表 2-1 不同维度对应的 RI 值(15)

维度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

设  $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$ ,  $CR = \frac{CI}{RI}$ , 当  $CR = \frac{CI}{RI} < 0.10$  时, 认为判断矩阵具有满意的一致性, 否则需要调整判断矩阵, 使之具有满意的一致性 若判断矩阵具有满意的一致性时, 所得到的  $W = [W_1, W_2, \dots, W_n]^T$  即为各指标的权重。

④ 计算要素的组合权重。即各要素对于所研究问题的组合权重。据此就可以解决评分、排序、指标综合等问题。

### (3)、程序实现步骤:

第一步: 读入数据  $A[n][n]$ ;

第二步: 计算最大特征值

幂法迭代公式:

$$\begin{cases} U_k = AV_{k-1} \\ m_k = \max(U_k) \text{ (迭代出来的特征值和特征向量不对)} \\ V_k = U_k / m_k \end{cases}$$

第三步: 计算最大特征值及一致性检验

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}, \quad CR = \frac{CI}{RI}, \quad \text{当 } CR = \frac{CI}{RI} < 0.10$$

第四步: 计算权重向量

法 1)、几何平均法 (根法)

1、每一行元素的乘积为  $M_i$  计算  $M_i$  的  $n$  次方根  $w_i$ ;

2、对向量  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  正规化, 即  $W_i = w_i / \sum_{i=1}^n w_i$ ;

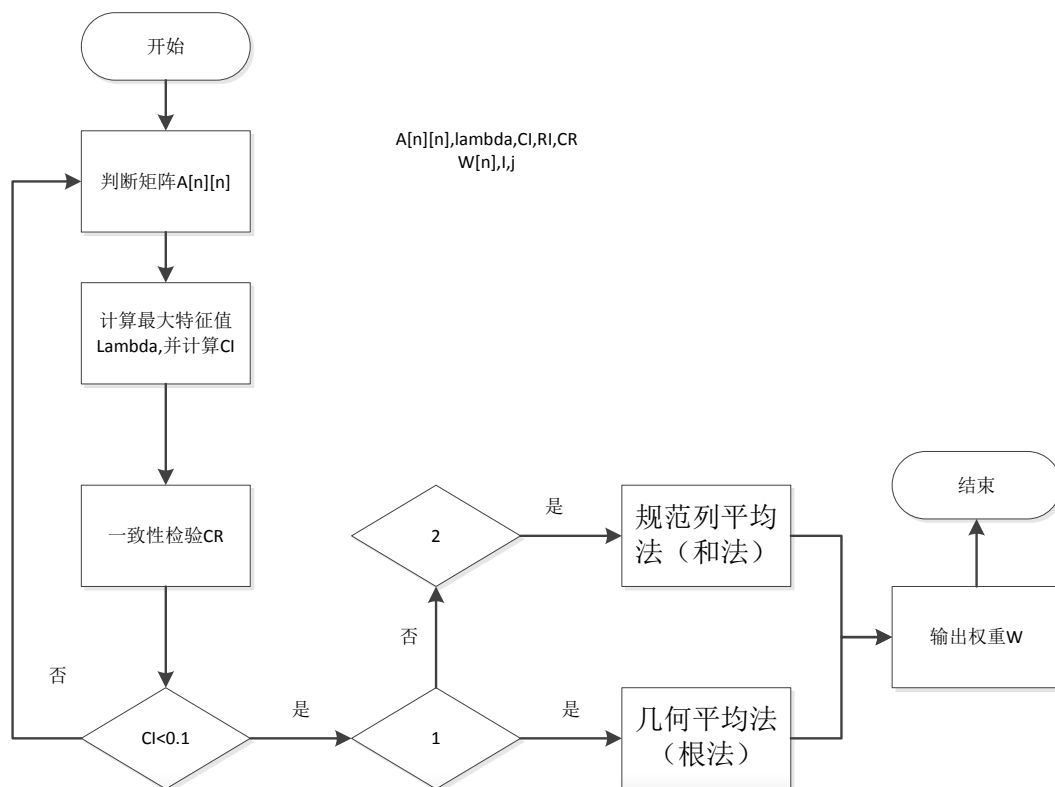
法 2)、规范列平均法 (和法)

1、每一行元素的和为  $M_i$ ;

2、  $W_i = M_i / \sum_{i=1}^n M_i$ ;

第五步: 输出结束

#### (4)、简略流程图



#### (5)、层次分析法的实用性分析

层次分析法是把很模糊的概念量化，在缺少数据的问题里，可以使用；然而因为数据是自己生成的，主观就是它的缺点。由很多底层要素构成的评估式的模型，可以通过对目标风险的分层和分要素，得到每一个底层风险的权重，再通过对每一个底层的评估，就得到最终的分值。