# 模糊层次分析法与 DEA 模型的算法研究

## 1 模糊层次综合评判

### 1.1 层次分析法

**（1）基本原理**

层次分析法是一种解决多目标的复杂问题的定性与定量相结合的决策分析方法。该方法将定量分析与定性分析结合起来，用决策者的经验判断各衡量目标能否实现的标准之间的相对重要程度，并合理地给出每个决策方案的每个标准的权重，利用权重求出各方案的优劣次序，比较有效地应用于那些难以用定量方法解决的课题。

层次分析法根据问题的性质和要达到的总目标，将问题分解为不同的组成因素，并按照因素间的相互关联影响以及隶属关系将因素按不同层次聚集组合，形成一个多层次的分析结构模型，从而最终使问题归结为最低层(供决策的方案、措施等)相对于最高层(总目标)的相对重要权值的确定或相对优劣次序的排定。

**（2）基本步骤**

运用层次分析法构造系统模型时，大体可以分为以下五个步骤：

在对国内外指标权重进行综合分析研究的基础上，本次研究以层次分析-专家打分法来确定各评价指标的权重。一般而言，层次分析法都要经历构建递阶层次结构、建立判断矩阵、对判断矩阵进行一致性检验、层次排序以及对分析结果做出相应的决策等 5 个环节。

（1）分析问题，确定目标和因素

通过对评价系统的整体认识，确定评价系统的总目标，弄清楚哪些因素影响着总目标，并分析各因素自己的相互影响关系。

（2）建立层次结构

按目标的差异，实现功能的不同，将总目标分为几个等级层次，如目标层、准则层以及方案层，用框图的形式来说明各等级层次的关系（如递阶层次和从属关系），如图 4-1 所示。一般问题的层次关系分目标层、准则层及方案层三层，最高层为总目标层，为整个系统的决策目标，只有一个因素。中间层为准则层，包括实现总目标过程所涉及的各个因素环节。最底层为方案层，即实现总目标的具体方案或具体影响指标。各层次因素间有可能相关，也有可能不相关。

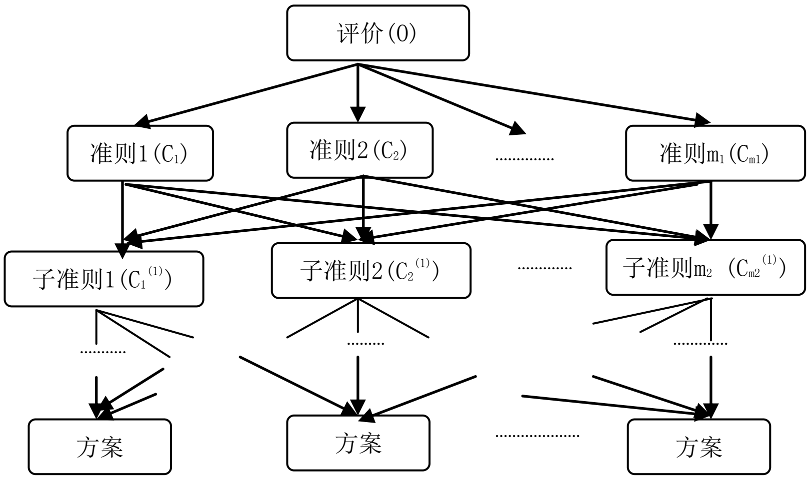


**图 4-1　层次结构图**

（3）两两比较，建立判断矩阵，求解权向量

构造比较矩阵主要是通过比较同一层次上的各因素对上一层相关因素的影响作用.而不是把所有因素放在一起比较,即将同一层的各因素进行两两对比.比较时采用相对尺度标准度量，尽可能地避免不同性质的因素之间相互比较的困难. 同时，要尽量依据实际问题具体情况，减少由于决策人主观因素对结果造成的影响。

（4）层次单排序及其一致性检验

对于成对比矩阵 $\mathbf{A}$ 有 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{W}=\lambda_{\max}\mathbf{W}$， $\lambda_{\max}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根， $\mathbf{W}$ 为 $\lambda_{\max}$ 所对应的特征向量。W 经同一层次相应因素所对应上一层次相应因素的值，这一过程叫做层次单排序。

为检验判断矩阵是否通过一致性检验，需计算一致性指标 $CI=\dfrac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$，当随机一致性比率 $CR=\dfrac{CI}{RI}<0.1$，可认为通过了一致性检验，说明判断矩阵具有较为满意的一致性。

（5）层次总排序

然后，计算各层元素对总目标的合成权重，并且进行总排序，以确定最底层的各因素对总目标的重要程度。

设第 $k-1$ 层上的 $n_{k-1}$ 个元素对总目标的权重向量为

$$\boldsymbol{W}^{(k-1)}=\left(w_1^{(k-1)},w_2^{(k-1)},\cdots,w_{n_{k-1}}^{(k-1)}\right)^T$$

第 $k$ 层上的 $n_k$ 个元素对 $k-1$ 层上的第 $j$ 个元素的权重向量为

$$\boldsymbol{P}_j^{(k-1)}=\left(p_{1j}^{(k)},p_{2j}^{(k)},\cdots,p_{n_k j}^{(k)}\right)^T,\ j=1,2,\cdots,n_{k-1}$$

则矩阵

$$P^{(k)}=\left[P_1^{(k)},P_2^{(k)},\cdots,P_{n_{k-1}}^{(k)}\right]$$

是$n_k\times n_{k-1}$阶矩阵，表示第$k$层上的元素对第$k$-1层上的元素权重排序．那么最底层对目标层总排序权向量：

$$\begin{aligned}W^{(k)}&=P^{(k)}\cdot W^{(k-1)}=\left[P_1^{(k)},P_2^{(k)},\cdots,P_{n_{k-1}}^{(k)}\right]\cdot W^{(k-1)}\\&=\left(w_1^{(k)},w_2^{(k)},\cdots,w_{n_k}^{(k)}\right)^T\end{aligned}$$

或

$$w_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{n_{k-1}}p_{ij}^{(k)}w_j^{(k-1)},i=1,2,\cdots,n_k$$

对任意的$k>2$有一般公式

$$W^{(k)}=P^{(k)}\cdot P^{(k-1)}\cdots\cdots P^{(3)}\cdot W^{(2)}(k>2)$$

其中$\mathbf{W}^{(2)}$是第二层上的各元素对最高层的总排序向量．

设第$k$层的一致性指标为$CI_1^{(k)},CI_2^{(k)},\cdots,CI_{n_{k-1}}^{(k)}$，而随机一致性指标为

$$RI_1^{(k)},RI_2^{(k)},\cdots,RI_{n_{k-1}}^{(k)}$$

则第$k$层对目标层的组合一致性指标为

$$CI^{(k)}=\left(CI_1^{(k)},CI_2^{(k)},\cdots,CI_{n_{k-1}}^{(k)}\right)\cdot W^{(k-1)}$$

随机一致性指标组合为

$$RI^{(k)}=\left(RI_1^{(k)},RI_2^{(k)},\cdots,RI_{n_{k-1}}^{(k)}\right)\cdot W^{(k-1)}$$

一致性比率指标组合为

$$CR^{(k)}=CR^{(k-1)}+\frac{CI^{(k)}}{RI^{(k)}}(k\ge 3)$$

如果$CR^{(k)}<0.10$时，则认为整个层次的判断矩阵通过了一致性检验。

## 1.2 模糊综合评判法

### （1）方法原理

设$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$为由$n$个指标形成的指标集．$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$为各指标$m$种评判所构成的评判集（如优、良、中、差），评判集的元素个数和名称可根据实际问题需要来确定。而许多问题的评判集是模糊的，因此，综合评判是$V$上的一

个模糊子集

$$B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)\in F(V)$$

其中$b_k$为第$k$种评判$v_k$对模糊子集$B$的隶属度：$\mu_B(v_k)=b_k(k=1,2,,\cdots,m)$，即反映了第$k$种评判$v_k$在评价中所起的作用。而模糊子集$B$依赖于各指标的权重，即它应是$U$上的模糊子集$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in F(U)$，且$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，其中$a_i$表示第$i$个指标的权重。当权重$A$确定以后，那么就可以给定一个综合评判$B$。

**（2）评价步骤**

①确定因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$。

②确定评判集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$。

③建立模糊关系矩阵$R$。

首先，对每一个指标$u_i$做评判$f(u_i)(i=1,2,\cdots,n)$，那么可以得$U$到$V$的模糊映射$f$，即

$$\begin{aligned}&f:U\rightarrow F(U)\\&u_i\mapsto f(u_i)=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})\in F(V)\end{aligned}$$

然后，对计算得到的$S_1,S_2,S_3,S_4$，组合形成以及指标的模糊综合评价矩阵

$R=(S_1,S_2,S_3,S_4)$

最后，将权重向量$W$和模糊综合评价矩阵$R$合成为模糊综合评价结果$S$。

$$S=W*R(\Leftrightarrow u_j=\bigvee_{i=1}^{n}(w_i\wedge r_{ij}),j=1,2,\cdots,m)$$

然后，由映射$f$诱导出模糊关系$R_f\in F(U\times V)$，即

$$R_f(u_i,v_j)=f(u_i)(v_j)=r_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$$

因此，可确定出模糊评判矩阵$R=(r_{ij})_{n\times m}$. 那么称$(U,V,R)$为模糊综合评价模型。

④模糊综合合成

首先，对二级指标进行模糊合成，根据不同的模糊合成算子，可以演变出不同模糊评价模型，在这里，选择加权平均算子。

$S_1 = W_1 * \mathrm{R}_1 \quad S_2 = W_2 * \mathrm{R}_2 \quad S_3 = W_3 * \mathrm{R}_3 \quad S_4 = W_4 * \mathrm{R}_4$

然后，对计算得到的 $S_1, S_2, S_3, S_4$，组合形成以及指标的模糊综合评价矩阵

$R = (S_1, S_2, S_3, S_4)$

最后，将权重向量 $W$ 和模糊综合评价矩阵 $R$ 合成为模糊综合评价结果 $S$ 。

$$S = W * R(\Leftrightarrow u_j = \bigvee_{i=1}^{n} (w_i \wedge r_{ij}), j = 1,2,\cdots,m)$$

## 1.3 模糊层次综合评判法

模糊层次综合评价模型是将模糊综合评价法和层次分析法有机结合的一种方法，首先通过层次分析法确定各指标的权重，然后运用多层次模糊综合评价法对煤矿产资源开发效率进行评价。模糊综合评价法结合层次分析法提高了评价的有效性与可靠性。模糊层次综合评价模型的技术路线如图 4-2 所示：

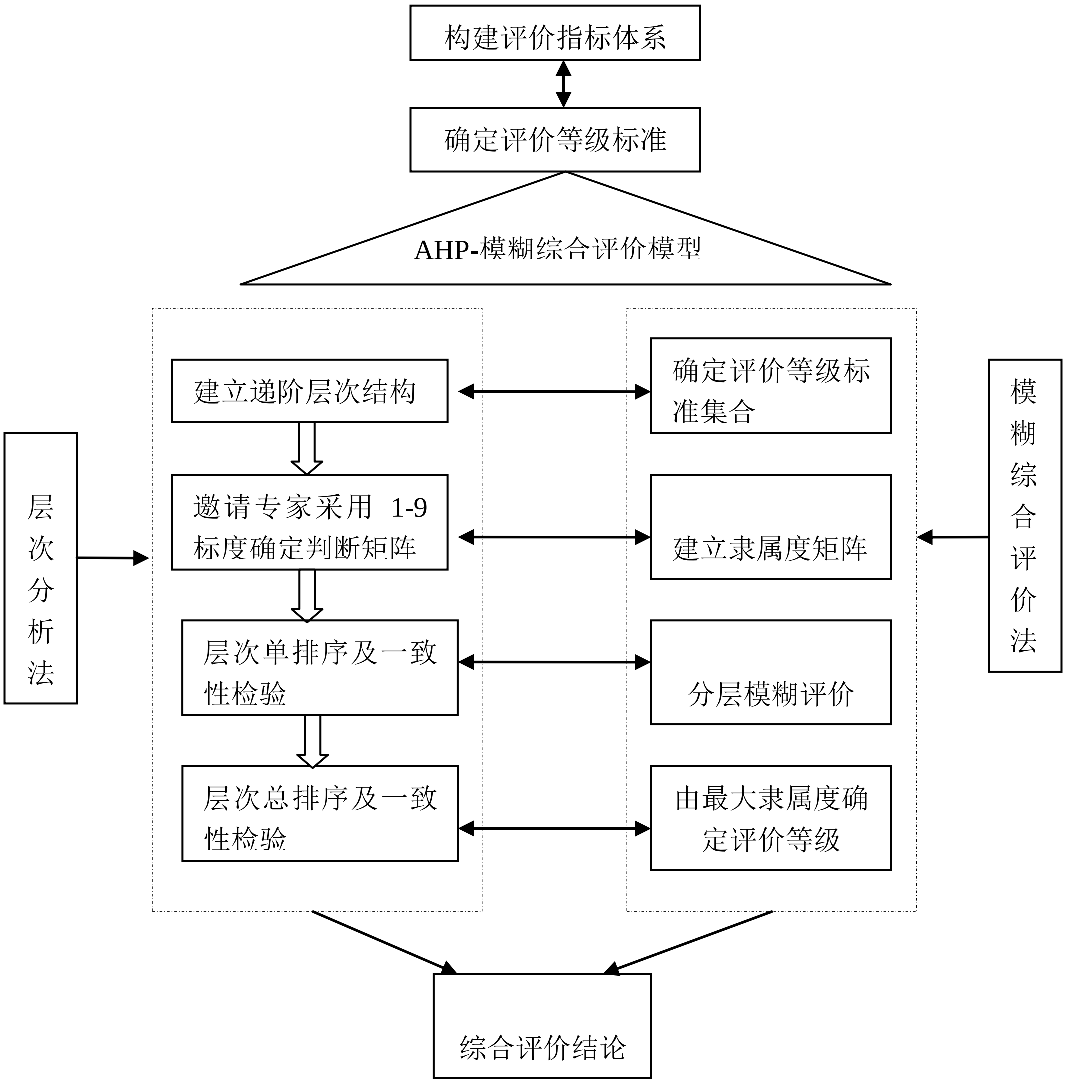


**图 4-2 AHP-模糊综合评价模型**

### 1.4 层次模糊综合评判法局限性

模糊综合评判方法是必须在确定权重的基础上来进行评价的，然而很多具有较强模糊性的因素权重确定非常的困难。而且，模糊综合评判方法只从被评价决策单元自身的角度进行评价，然而很多评价单元是相互联系的，并且根据同类单元的信息可以发现被评价单元的有效性和弱点。

## 2 DEA 模型

### 2.1 DEA 方法概述

数据包络分析是以“相对效率”概念为基础，根据多投入和多产出对同类型

单位进行效益评价的一种系统分析方法。常用于处理多目标决策问题。它应用数学中的分形规划模型来计算各决策单元之间的相对效率,从而对评价对象做出综合评价。

通常对一组给定的目标决策单元，确定输入、输出指标，然后求出特定决策单元的有效性系数，以评价出各决策单元的优劣。通过对输入输出指标的综合分析，DEA 模型可以得出各决策单元 DMU 效率指标。据此对各决策单元进行排序，以确定比较有效的决策单元，并同事给出其它决策单元非有效的原因。不仅可以同一类型有效决策单元进行排序，而且还可以分析那些非有效决策单元的原因，进而为决策者提供有用的信息。

这是一个多输入-多输出的有效性综合评价问题。多输入/多输出正是 DEA 重要而引入注意的地方，这是它自身突出的优点之一。可以说，在处理多输入-多输出的有效性评价方面，DEA 具有绝对优势。DEA 特别适用于具有多输入多输出的复杂系统。

DEA 最突出的优点是无须任何权重假设，每一输入输出的权重不是根据评价者的主观认定，而是由决策单元的实际数据求得的最优权重。因此，DEA 方法排除了很多主观因素，具有很强的客观性。

DEA 是以相对效率概念为基础，以凸分析和线性规划为工具的一种评价方法。这种方法结构简单，使用比较方便。自从 1978 年提出第一个 DEA 模型-$C^2R$ 模型并用于评价部门间的相对有效性以来，DEA 方法不断得到完善并在实际中被广泛应用，诸如被应用到技术进步、技术创新、资源配置、金融投资等各个领域，特别是在对非单纯盈利的公共服务部门，如学校、医院、某些文化设施等的评价方面被认为是一个有效的方法。现在，有关的理论研究不断深入，应用领域日益广泛。应用 DEA 方法评价部门的相对有效性的优势地位，是其他方法所不能取代的。或者说，它对社会经济系统多投入和多产出相对有效性评价，是独具优势的。

## 2.2 $C^2R$ 模型

数据包络分析法是以相对效率概念为基础，根据多指标投入和多指标产出，对相同类型的单位进行相对有效性的一种效益评价方法。DEA 通过数学规划模型对决策单元间的相对效率进行比较。排水采气技术属于多投入和多产出的系统，其生产有效性可以运用 DEA 进行评价。在 DEA 模型中,使用较多的是同类型的 DMU,它们具有三个特征:一是具有相同的目标和任务;二是具有相同的外部环境;三是具有相同的输入和输出指标。

设有 n 个决策单元 $DMU_j$（j=1,2,,,n）,每个决策单元都有 m 种投入和 s 种产出，分别用不同的经济指标表示，这样，构成了 n 个决策单元的多指标投入

和多指标产出的评价系统，如图 4-3 所示。

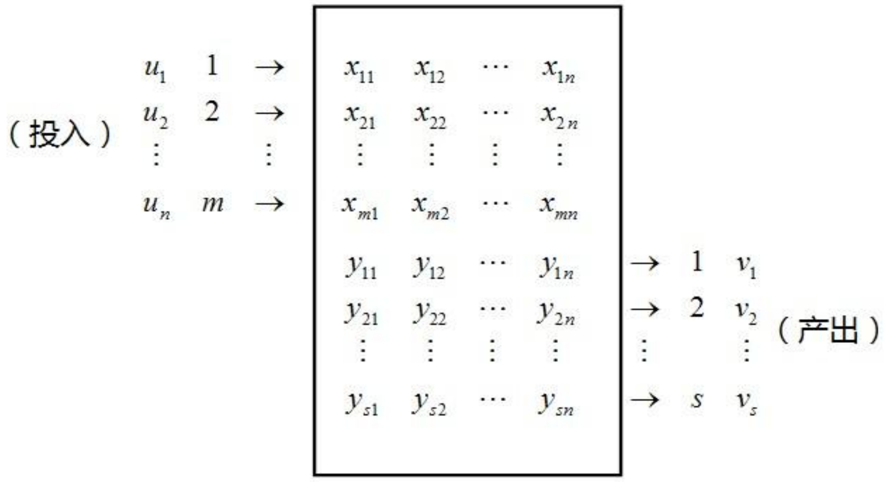


**图 4-3　DEM 决策评价系统**

$x_{ij}=DMU_j$ 对第 i 种输入的投入量，$x_{ij}$>0； $y_{ij}=DMU_j$ 对第 r 种输出的产出量，$y_{ij}$>0； $u_i=$对第 i 种输入的一种度量(或权重)； $v_r=$对第 r 种输出的一种度量(或权重)；　这里 $X_i$和$Y_j$（ $j=1,2,\cdots,n$ ）分别为 $DMU_j$ 的输入向量和输出向量均为已知数据；它可以根据历史资料或统计的数据得到;v 和 u 分别为 m 种输入和 s 种输出对应的权向量为变量。

$$h_j=\frac{\sum_{r=1}^{s}v_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m}u_i x_{ij}}$$

设第 $j_0$ 个评价单元的投入向量和产出向量分别为：

$$x_0=(x_{1j_0},x_{2j_0},\cdots x_{mj_0})$$

$$y_0=(y_{1j_0},y_{2j_0},\cdots y_{nj_0})$$

$h_0$ 为第　j　个决策单元的效率指标值，由此,我们可以适当地选取　u，v,使 $h_j\le 1(j=1,2,\cdots,n)$[14]，在这个约束条件下，选择一组最优权系数 u 和 v，使得 $h_0$ 达到最大值，构造最优化模型：

$$\begin{cases} \max h_0 = \dfrac{\sum_{r=1}^{s} v_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^{m} u_i x_{ij_0}} \\ s.t. \dfrac{\sum_{r=1}^{s} v_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} u_i x_{ij}} \le 1 (j = 1, 2, \cdots, n) \\ u_i \ge 0 (i = 1, 2, \cdots, n) \\ v_r \ge 0 (r = 1, 2, \cdots, \mathrm{s}) \end{cases}$$

$$T = \left\{ (x, \mathrm{y}) \mid \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \le x, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \ge y, \lambda_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

$$\left( x_j, y_j \right) \in T, \left( j = 1, 2, \cdots, n \right)$$

此模型称为$C^2R$模型，其中，T 代表了生产可能集，它的含义是：假设有 n 个决策单元，这 n 个决策单元都具有可比性，每个决策单元都有一组投入指标值和产出指标值表示，评价单元$DMU_j$的一组投入指标值$x_j$和产出指标值$y_j$用向量表示为：

$$x_j = \left( x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj} \right)^T$$

$$y_j = \left( y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{nj} \right)^T$$

集 T={（x,y）产出 y 能用输入 x 生产出来}为所有可能的生产活动就构成了生产可能集。

用$C^2R$模型评价第$j_0$个评价单元相对有效性，是相对于其他评价单元而言的，故称为评价相对有效性的 DEA 模型。

在用$C^2R$模型评价决策单元的相对效率时，可能会出现多个决策单元同时相对有效，在此情况下，$C^2R$模型对这些决策单元无法进一步地做出评价与比较。郭均鹏等作者针对传统 DEA 模型不能对决策单元做进一步评价这一缺点，通过重新定义生产可能集，提出了一种改进的 DEA，实现了对所有决策单元效率的充分评价与排序，具体思路如下：

在$C^2R$模型的约束条件中，不包括被评价决策单元$DMU_j$，即在第 j 个决策单元时，将其与样本中其他所有决策单元的线性组合作对比，但不包含$DMU_j$本

身，结果是效率值可能大于 1，从而可以对原来同时相对有效的决策单元做出比较或排序。

## 2.3 $C^2GS^2$ 模型

如果在 $C^2R$ 模型的约束条件中，加入凸性假设，即增加约束 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$，就成了 $C^2GS^2$ 模型。其对偶规划可以表示为：

$$\begin{cases} \min\left[\theta - \varepsilon(\hat{e}^T S^- + e^T S^+)\right] \\ \sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j + S^- = \theta X_{j0} \\ \sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j - S^+ = Y_{j0} \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, n \\ \theta \ge 0, S^- \ge 0, S^+ \ge 0 \end{cases}$$

与 $C^2R$ 模型类似，设对偶规划(1)的最优解为 $\lambda^0, S^{-0}$，$S^{+0}$ 和 $\theta^0$

（1） $\theta^0 < 1$，则 $DMU_{j0}$ 不为 DEA 有效（不为纯技术有效），即该决策单元投入组合不当，可以作全面的等比压缩。

（2） $\theta^0 = 1$， 且 $\hat{e}^T S^{-0} + e^T S^{+0} > 0$，则 $DMU_{j0}$ 仅为弱 DEA 有效，意味着在这 n 个决策单元组成的系统中，有部分超量投入或亏量产出。

（3） $\theta^0 = 1$， 且 $\hat{e}^T S^{-0} + e^T S^{+0} = 0$，则 $DMU_{j0}$ 为 DEA 有效，表明该决策单元技术效率最佳。

$C^2R$ 模型用于评价 DMU 的规模效率与技术效率的总体有效性，而 $C^2GS^2$ 模型仅用于评价 DMU 的技术有效性，两者结合起来使用，便可对决策单元进行综合分析。

记 $\alpha_{ij} = \frac{s_{ij}^-}{x_{ij}}$，表示 $DMU_j$ 各分量的 $s_{ij}^-$ 与对应指标分量 $x_{ij}$ 的比值，称为投入冗余率，表示该分量指标可节省的比例。

记 $\beta_{ij} = \frac{s_{ij}^+}{x_{ij}}$，表示 $DMU_j$ 各分量的 $s_{ij}^+$ 与对应指标分量 $y_{ij}$ 的比值，称为产出不足率，表示该分量指标可增加的比例。

## 2.4 改进的 $C^2R$ 模型

在上述 $C^2GS^2$ 模型方程中去掉一个约束后 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$，得出改进的 $C^2R$ 模型为：

$$\begin{cases} \min\left[\theta - \varepsilon(\hat{e}^T S^- + e^T S^+)\right] \\ \sum_{j=1}^{n} X_j\lambda_j + S^- = \theta X_{j0} \\ \sum_{j=1, j\neq j0}^{n} Y_j\lambda_j + S^+ = Y_{j0} \\ \lambda_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \\ \theta \geq 0, S^- \geq 0, S^+ \geq 0 \end{cases}$$

$\theta$为决策单元$DMU_j$的有效值

$\lambda_j$为相对$DMU_j$重新构造一个有效的决策单元组合中第$j$个决策单元的组合比例

$\varepsilon$为非阿基米德无穷小量，是一个大于0而小于任何正数的数，通常取为$10^{-6}$；

$\hat{e} = (1,1,\ldots,1)^T \subset E^m, e = (1,1,\ldots,1)^T \subset E^s$；

$S^-$为输入松弛向量，$S^+$为输出剩余向量。

## 2.5 DEA 模型的局限性

在 DEA 的应用过程中，最关键的步骤是输入/输出指标体系的确定和各决策单元在相应指标体系下的输入输出数据的搜集与获得。目前已有的 DEA 模型由于所涉及的指标体系是确定的，所涉及的投入产出数据是确定已知的，所以目前的模型都是确定型的。然而许多领域的评价和决策问题都存在着大量的不确定性，对于这些领域中的决策问题，确定型的 DEA 模型就存在缺陷和不足。

# 3 D-FCA 模型

## 3.1 DEA 模型与 FCA 模型集成的必要性

模糊综合评判方法在许多领域里得到应用，但在具体应用过程中，模糊综合评判方法仅能告诉决策方案的好坏程度，却无法找出较差方案无效的原因。特别是在模糊综合评判过程中，各因素的权重分配主要靠人的主观判断，而当因素较多时，权数往往难以恰当分配。我们将模糊集合论与数据包络分析方法相结合，

提出了一种基于 DEA 模型的模糊综合评价方法，并结合其在矿产资源开发效率综合评价中的应用进行了讨论。

对于一个复杂的系统而言，由于牵涉的因素多，而且这些因素的关系也很难用经典数学语言来描述，所以往往只能用软评价方法进行评价。软评价方法就是以评委作为信息的来源，由评委对评价对象的各种因素依据评价标准做出评价。

模糊综合评判方法是典型的软评价方法之一，应用它，必须事先确定权重，而当因素较多时，给出权重的大小往往是一件困难的事。另外，模糊综合评判方法仅从被评价单元自身的角度进行评价，而事实上各评价单元是相关的。如果充分依据同类单元间的这种联系，不仅可以发现被评价单元在同类单元中的相对有效性，而且还能根据同类单元提供的信息发现被评价单元的弱点，提出较差单元进一步改进的策略和办法。DEA 方法则可以弥补上述不足。DEA 评价单元是不是有效是相对于其他所有决策单元而言的。特别是，它把决策单元中各“输入”和“输出”的权重作为变量，通过对决策单元的实际原始数据进行计算而确定，排除了人为因素，具有很强的客观性。也就是说，该方法中各个评价对象的相对有效性是在对大量实际原始数据进行定量分析的基础上得来的，从而避免了人为主观确定权重的缺点。

基于以上分析，有必要也有可能将模糊综合评价方法和 DEA 方法进行集成。在模糊综合评判过程基础上，引入 DEA 理论，通过巧妙构造 DEA 的“输入”和“输出”指标，建立新的系统综合评价模型方法。

## 3.2 D-FCA 模型的建立

如果一个评价对象相对于各因素的评价具有一定的模糊性，那么就需要运用模糊集合论来研究。设

$W=\{w_1,w_2,w_3,\cdots,w_k\}$为评价对象集，$k$为评价对象个数；

$U=\{u_1,u_2,u_3,\cdots,u_m\}$为评价对象集，$m$为评价对象个数；

$V=\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$为评价对象集，$n$为评价对象个数；

（1） 对每一个评价对象，有模糊关系矩阵$R$，称为某一评价对象的评价矩阵。

$$R=\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

式中：$r_{ij}$为$U$中因素$u_i$对应$V$中等级$v_j$的隶属关系，即从因素$u_i$着眼被评价对象能被评为$v_j$等级的隶属度程度，可以通过二相模糊统计法来确定。

选取需要评价的对象作为决策单元，每个评价单元均需要 m 种输入，s 种输出。用 $x_{ij}$ 表示第 j 个决策单元需要的第 i 种输入的数量，$x_{ij} > 0, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$；用 $y_{rj}$ 表示第 j 个决策单元需要的第 r 种输出的数量，$y_{rj} > 0, 1 \le r \le s, 1 \le j \le n$；再用 $v_i$ 表示对第 i 种输入的一种度量，$1 \le i \le m$；用再用 $u_r$ 表示对第 r 种输出的一种度量，$1 \le r \le s$。

第 j 个决策单元的效益评价指数是：

$$E_j = U^T Y_j / \left(V^T X_j\right) \qquad 1 \le j \le n$$

其中 $V = \left(v_1, v_2, \cdots, v_m\right)$ 是度量，$X = \left(x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj}\right)$，$U = \left(u_1, u_2, \cdots, u_s\right)$ 是度量，$Y = \left(y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{sj}\right)$。为了比较，可以通过适当地选取 $V$ 和 $U$，让各决策单元的 $E_{j0}$ 为目标，以所有的决策单元，也包括第 $j_0$ 个决策单元的 $E_j \le 1, 1 \le j \le n$。

现在对第 $j_0$ 个决策单元进行效率评价，以权 $U$ 和 $V$ 为变量，以第 $j_0$ 个决策单元的 $E_{j0}$ 为目标，以所有的决策单元，也包括第 $j_0$ 个决策单元的 $E_j \le 1$，$1 \le j \le n$ 为约束条件，构成以下的最优化模型（$C^2R$ 模型）：

$$\max f\left(U, V\right) = U^T Y_0 / \left(V^T X_0\right)$$

$$s.t. U^T Y_j / \left(V^T X_j\right) \le 1 \quad 1 \le j \le n，\ U \ge 0，V \ge 0$$

式中将下标 $j_0$ 用 0 代替，$Y_0$ 就是 $Y_{j0}$，$X_0$ 就是 $X_{j0}$，等等。另外，有 $1 \le j_0 \le n$。上式是一个分式规划，将它化为等价的线性规划问题如下：

$$\max f\left(P\right) = P^T Y_0$$

$$s.t. Q^T X_j - P^T Y_{j0} \ge 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$Q^T X_0 = 1$$

$$Q \ge 0,\ P \ge 0$$

用线性规划的最优解来定义决策单元 $j_0$ 的有效性

## 3.3 使用 D-FCA 模型模型需要注意的问题

由于模糊综合评价法和数据包络分析法都有各自的使用范围,在将两者结合

后这样的限制也同样存在着,所以在使用 D—FCA 方法时需要注意以下几个方面的问题：

(1)由于 DEA 方法的输入输出指标有一定的概念上的约束,即要有一定的投入、产出概念，所以在 D—FCA 方法也要求其中的定量指标中有成本性(负向)指标和效益型(正向)指标之分，这样才符合要求,使评价工作可以合理有序进行。

(2)在对指标进行分类时,要根据指标性质概念正确进行，不能将概念域混淆,例如：不能将员工素质高低划分定量指标中，也不能将产出效益额划分到投入指标中去,因为这样会导致分类结果影响最终的评价结果。

(3)由于 DEA 方法对输入输出参数的约束，D-FCA 方法对于那些没有任何经济学意义的对象是不适用的。

(4)对于指标数量特别繁杂的评价对象或者系统不建议使用该方法，因为可能会导致评价结果达不到满意度的状况。