

208 灰色逼近理想解法 (TOPSIS)

(1) 基本原理

TOPSIS 法又称为逼近理想点排序方法 (The Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution), 是经典多属性决策最为常用的方法之一。这种决策方法的基本思想结合了模糊正负理想点的思路: 决策者总是希望方案距离正理想点越近越好, 距离负理想点越远越好。

理想点解 X^* (理想方案): 是一个方案集 X 中并不存在的虚拟的最佳方案, 它的每个特征值都是决策方案中该特征指标的最优值。

负理想解 X^0 (差理想方案): 是一个方案集 X 中并不存在的虚拟的最差方案, 它的每个特征值都是决策方案中该特征指标的最差值。

在拟采用的备选方案集 X 中, 首先通过指标属性 (效益型、成本型等) 确定理想方案和负理想方案, 运用灰色关联分析法确定方案集 X 中的各个备选方案 X_i 与理想方案 X^* 和负理想方案 X^0 的关联度, 通过相对贴近度大小进行排序比较, 相对贴近度最大的方案是方案集 X 中的最佳方案; 并可以据此排定方案集 X 中各备选方案的优先序。

(2) 算法步骤

步骤一: 用向量规范化的方法求得规范决策矩阵。为了消除量纲的影响, 我们采用式 (4-9) 和 (4-10) 对指标值原始数据进行规范化处理得到无量纲数据。

对于效益型指标, 令

$$C_{ij} = \frac{y_{ij} - y_j^{\min}}{y_j^{\max} - y_j^{\min}} \quad (1)$$

对于成本型指标, 令

$$C_{ij} = \frac{y_j^{\max} - y_{ij}}{y_j^{\max} - y_j^{\min}} \quad (2)$$

其中, $y_j^{\max} = \max\{y_{ij} | i = 1, 2, \dots, m\}$, $y_j^{\min} = \min\{y_{ij} | i = 1, 2, \dots, m\}$, y_{ij} 表示第 i 个方案的第 j 个指标值。

步骤二、确定理想方案 X^* 和负理想方案 X^0 第 j 个属性值为 x_j^*, x_j^0

由公式进行规范化后的决策矩阵, 经过指标权重的加权得出的加权决策矩阵中的各指标属性值, 均为“正向”值, 即指标值越大越优, 越小越差, 因此, 由此得出理想方案及负理想方案。

步骤三、计算各个方案与理想方案和负理想方案的灰关联度。

灰色系统分析主要是依据有具体灰色系统的行为特征数据, 充分利用数量不多的数据和信息寻求相关因素自身与各因素之间的数学关系, 即建立相应的数学模型。

根据灰色系统理论, 关联系数定义为:

$$\eta_i(k) = \frac{\min_i \min_k |x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|}{|x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|} \quad (3)$$

则关联度就是各类关联系数的平均值, 即:

$$r_i = r(x_0, x_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

即用灰关联度 r_i 可以表示因素 x_i 对行为因子 x_0 的关联(影响)程度。

在公式(4-11)中, $|x_0(k) - x_i(k)|$ 为 k 点 x_0 与 x_i 的绝对差;
 $\min_i \min_k |x_0(k) - x_i(k)|$ 为两极最小差, 其中 $\min_k |x_0(k) - x_i(k)|$ 是第一级最小差, 表示在 x_i 序列上找各点与 x_0 的最小差, $\min_i \min_k |x_0(k) - x_i(k)|$ 为第二级最小差, 表示在各序列找出的最小基础上寻求所有序列中的最小值;
 $\max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|$ 是两极最大差, 其含义与最小差相似; 其中 $\rho \in [0, 1]$, 称为分辨率系数, 显然, 当 ρ 越大时, 分辨率越大, 当 ρ 越小时, 分辨率越小, 一般情况取 $\rho = 0.5$ 。

由公式(3)、(4)可得备选方案 X_i 与理想方案 X^* 的关联度为 r_i^* 、备选方案 X_i 到负理想方案 X^0 的关联度为 r_i^0 。

步骤四、计算各方案与理想方案的相对贴近度 μ_i (即综合评价值):

$$\mu_i = r_i^* / (r_i^* + r_i^0) \quad (5)$$

由公式（5）计算可得，各方案与理想方案的相对贴近度 μ_i ，即

$$\mu_i = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k) \quad (6)$$

然后，根据（6）式得出的相对贴近度矩阵结果，按 μ_i 由大到小进行排序，根据最大原则，相对贴近度越大，表示备选方案与理想方案关联越大，说明方案越好，最终选择出最优方案。