210 密切值法

（1）基本原理

密切值法作为多目标决策的一种优选方法，其基本思想是：先找出方案集（决策点集）的最优点和最劣点，然后再找出最接近最优点并且远离最劣点的决策点，则此决策点就是所寻求的最优方案或满意方案。此方法与灰关联理想点逼近法类似，在最后与最优最劣点的比较上有所区别。

（2）基本步骤

步骤一：建立指标矩阵

首先确定决策目标，拟定决策方案，假设方案 A_i （i =1,2,⋯,m）在指标 S_j (j=1,2,⋯,n)下的取值为 a_{ij} ，则可得到指标矩阵如下：A = $(a_{ij})_{m\times n}$

将指标矩阵转化为规范化指标矩阵，指标矩阵中的各项指标，有的指标为“正向指标”，数值越大越好；有的指标为“逆向指标”，数值越小越好，且量纲各不相同。为了便于分析比较，通常把“逆向指标”转化为“正向指标”，将有量纲数值转化为无量纲数值，具体计算公式如下：

$$b_{ij}=\begin{cases} a_j & \text{当}S_j\text{为正向指标时；} \\ -a_j & \text{当}S_j\text{为逆向指标指；} \end{cases}$$

$$r_{ij}=b_{ij}\Big/\left[\sum_{i=1}^{n}b_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

式中：b_{ij} 为正向指标数值；r_{ij} 为无量纲指标数值。通过上式计算可得到规范化指标矩 R：R = $(r_{ij})_{m\times n}$

如果决策者对各目标的重要性给出权 W_j （j=1,2,⋯,n），且 $\sum_{j=1}^{n}W_j=1$ ，则可以得出权规范化矩阵如下：$R^{'}=RW$ 。

其中权重矩阵如下所示，如果没有给出权重则无需考虑加权矩阵。

$$\begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_n \end{bmatrix}$$

步骤二：最优点和最劣点的确定，方案集（决策点集）的最优点 A+和最劣点 A-，根据公式：

$r_j^{\ +} = \max_{1\le i\le m}(r_{ij})$ （j=1，2，…, n）

$r_j^{\ -} = \min_{1\le i\le m}(r_{ij})$ （j=1，2，…, n）

式中：$r_j^{\ +}$，$r_j^{\ -}$ 分别表示第 j 项规范化指标的最优值和最劣值。

最优点为：

$$A^+ = r_1^{\ +} + r_2^{\ +} + \cdots + r_n^{\ +}$$

最劣点为：

$$A^- = r_1^{\ -} + r_2^{\ -} + \cdots + r_n^{\ -}$$

选取最佳方案就是在比较方案集（决策点集）中寻找尽可能接近 A+点，而远离 A—点的决策点。

步骤三：计算各方案的密切值并排序

由上述公式分别计算出各种比较方案距 A+和 A-的欧式距离 d_i^+ 和 d_i^- 。计算公式如下：

$$\begin{cases} d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(r_{ij} - r_j^+\right)^2} \\ d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(r_{ij} - r_j^-\right)^2} \end{cases}$$

（i=1，2，3，…，m）

并根据公式求出 m 个最优点距的最大值 d^+，和 m 个最劣点距的最小值 d^-，计算公式如下：

$$d^+ = \max_{1\le i\le m}\{\ d^+{}_i\ \}$$

$$d^- = \min_{1\le i\le m}\{\ d^-{}_i\ \}$$

最后密切值C_i可由下式计算：$C_i=\left(d_i^{+}/d^{+}\right)-\left(d_i^{-}/d^{-}\right)$

当C_i=0 时，即$d_i^{+}=d^{+}$，$d_i^{-}=d^{-}$，此时A_i点最接近最优点。

当C_i>0 时，A_i点此时偏离最优点，C_i越大表明A_i点此时偏离最优点越远。

根据密切值原理：密切值越小，对应的备选方案越好，反之，备选方案越差，从而可以对备选方案进行排序，最终确定最佳方案。