

技术经济权重与评价算法报告

报告人：包 灵

2015 年 11 月 6 日

目 录

第 1 章 技术经济评价指标权重确定.....	1
1.1 概述.....	1
1.2 客观赋权法.....	1
1.2.1 熵值法(Entropy Weight).....	1
1.2.2 灰色关联度法(Grey Correlation Degree).....	3
1.2.3 主成分分析(PCA)	5
1.2.4 变异系数法.....	7
1.2.5 多目标优化赋权法(Multi-objective Optimization Method).....	8
1.2.6 复相关系数法(Multiple Correlation Coefficient)	9
1.2.7 组合赋权法(Combination assigning method)	10
1.2.8 CRITIC 法.....	12
1.2.9 改进熵权法(Improved Entropy Weight)	12
1.3 主观赋权法.....	15
1.3.1 层次分析法(AHP)	15
1.3.2 专家打分法(Expert Scoring Method).....	19
1.3.3 对比排序法(Contrast Compositor Method)	22
1.3.4 优序图法(Precedence Chart)	23
第 2 章 技术经济综合评价方法.....	23
2.1 概述.....	23
2.2 主成分分析(PFA).....	23
2.3 综合指数法(Comprehensive Index Method).....	26
2.4 层次分析法(APH)	28
2.5 模糊综合评判法(Fuzzy Comprehensive Evaluation)	29
2.6 灰色关联综合评判法.....	38
2.7 灰色局势决策分析法的评价法.....	41
2.8 BP 神经网络综合评价法	42
2.9 灰色-逼近理想解法 (TOPSIS)	46
2.10 数据包络分析法(DEA).....	48
2.11 密切值法.....	48
2.12 模糊积分综合评价法.....	55
2.13 蒙特卡洛模拟分析.....	57
2.14 层次模糊综合评价法.....	58
2.15 因子分析法 (FA)	59

第 1 章 技术经济评价指标权重确定

1.1 概述

气田排水采气技术经济综合评价过程是一个多指标综合评价的过程,而多指标综合评价中各评价指标权数分配不同会直接导致评价对象优劣顺序的改变,因而权数的合理性、准确性直接回影响综合评价结果的可靠性。一般来说评价者在分配权数时要考虑三个因素:(1) 指标变异程度大小,即指标能够分辨出被评价对象之间差异能力的大小;(2) 指标独立性的的大小,即与其他指标重复的信息多少;;(3) 评价者的主观偏好。概括起来权数的分配有主观赋权、客观赋权和组合赋权三类方法。本小节在综述各种赋权方法的基本原理和步骤的基础上,分析每种方法的优缺点,并讨论了每种方法的应用及其效果。

1.2 客观赋权法

1.2.1 熵值法(Entropy Weight)

(1) 熵值法的基本思想

熵的概念源于热力学,是对系统状态不确定性的一种度量。在信息论中,信息是系统有序程度的一种度量,而熵是系统无序程度的一种度量,两者绝对值相等,但符号相反,根据此性质,可以利用多目标决策评价中各方案的固有信息,通过熵值法得到各个指标的信息熵,信息熵越小,信息的无序度越低,其信息的效用值越大,指标权重越大。反之,信息熵越大,信息无序度越高,其信息的效用值越小,指标权重越小。熵权法的基本思想是:人们在决策中获得信息的多少和质量是精度和可靠性大小的决定因素之一。

(2) 具体步骤

熵值法是一种根据各指标传输给决策者的信息量大小来确定各指标权数的方法。通过计算偏差度(差异性系数) $G_j = 1 - E_j (1 \leq j \leq n)$ 从而有 G_j 越大,则指标越重要。

设:有 m 个方案, n 项评价指标, x_{ij} 为第 i 种方案、第 j 项指标的原始数据,对于给定的 j , x_{ij} 的差异越大,则该项指标对方案比较作用就越大:亦即该项指标包含和传输的信息就越多。信息的增加意味着熵的减少,熵可以用来度量这种信息量大小。

设：评价对象的决策矩阵(original data)为 $X = (x_{ij})_{m \times n}$ ，用熵值法确定指标权重步骤如下。

- ① 计算第 j 项指标下，第 i 种方案指标值比重 p_{ij} ：

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}} (i=1, \dots, m, j=1, \dots, n)$$

(x_{ij} 为经过规范化和无量纲化的数据)

- ② 计算第 j 项指标熵 E_j ：

$$E_j = -k \sum_{i=1}^m p_{ij} \ln p_{ij} \quad 0 \leq E_j \leq 1 (j=1, \dots, n) \quad k = 1 / \ln n$$

(若 $p_{ij} = 0$ ，则规定 $p_{ij} \ln p_{ij} = 0$)

- ③ 计算第 j 项指标的偏差度(差异性系数) G_j ：

$$G_j = 1 - E_j (1 \leq j \leq n) \quad (G_j \text{ 越大, 则指标越重要})$$

- ④ 计算指标 j 的客观权重 w_j ：

$$w_j = \frac{G_j}{\sum_{j=1}^n G_j} (1 \leq j \leq n) \quad \text{得: 指标的权向量 } W = (w_1, w_2, \dots, w_n)。$$

如果决策者对于指标 f_j 有偏好 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ，则可利用 w_j 来修正 λ_j ，得到较合理的权向量 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$ ，作为后面步骤中使用的权向量。

$$\text{其中 } \lambda^* = \frac{\lambda_j^* w_j}{\sum_{j=1}^n \lambda_j^* w_j} (1 \leq j \leq n)$$

(3) 熵权法评价

熵权法确定权重，其值是根据各指标所提供信息量的大小和波动情况确定的，并没有考虑评价指标的重要程度。单纯用熵权值解决综合评价问题显然不妥。同样，只用主观赋权值所得权值解决问题，也会因所定权值可能因主观人为因素太强而使结果失之偏颇。

在《矿山地质和环境评价中权值确定方法的探讨》中,提出了“综合权值”的概念,将主观赋权法的权值与客观赋权法的权值有机结合起来,弱化二者的不足。已知有 n 个评价指标,按客观 (objective) 权值法求出第 j 个评价指标的熵权 W_{sj} , 按照主观 (subjective) 权值法得到这个指标的权值为 W_{zj} , 二者综合, 即可按下式求得这个评价指标的综合 (synthesis) 权值 W_{oj} :

$$W_{oj} = W_{zj} W_{sj} / \sum_{j=1}^m W_{zj} W_{sj}$$

陈伟, 吴群 (2010) 就将熵权法和层次分析法结合起来确定权重。

1.2.2 灰色关联度法(Grey Correlation Degree)

(1) 方法原理

灰色关联分析作为一种系统分析技术,是分析系统中各因素关联程度的一种方法。将其用于确定评价指标的权重,实际上是对各位专家经验判断权重与某一专家的经验判断权重的最大值(设定)进行量化比较,根据其彼此差异性的大小以分析确定专家群体经验判断权重的关联程度,即关联度。关联度越大,说明专家经验判断趋于一致,该指标在整个指标体系中的重要程度就越大,权重也就越大。据此对各个指标进行规一化处理,从而确定其相应的权重。

(2) 具体步骤

① 聘请专家进行权重的经验判断, 确定参考序列。

设: 有 n 个评价指标, m 个专家同时对各个指标权重做出经验判断, 得到组成各个指标权重的经验判断数据列, 可分别表示为:

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(m)) \\ X_2 &= (x_2(1), x_2(2), \dots, x_2(m)) \\ &\vdots \\ X_n &= (x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(m)) \end{aligned}$$

从指标权重值的经验判断数据列 X_1, X_2, \dots, X_n 中挑选一个最大的权值作为“公共”参考权值, 各个专家的参考权重值均赋予此值, 从而组成权重参考数据列 X_0 : $X_0 = (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(m))$

② 对原始序列均值化处理

$$X_i = (x_{ij} / \bar{x}_i)_{n \times m}$$

③ 求差序列

$$\Delta_i = |x_0(k) - x_i(k)|, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m;$$

④ 计算关联系数及关联度

根据权重参考数据列 X_0 和指标权重经验判断数据列 X_1, X_2, \dots, X_n ，利用下式求出各个专家对各个评价指标所做出的经验判断权值与“公共”参考权值之间的关联系数 $\xi_{0i}(k)$ 和关联度 γ_{0i} 。

$$\xi_{0i}(k) = \frac{\min_i \min_k |x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|}{|x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|}$$

$$\gamma_{0i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{0i}(k) \quad (\text{以 } \gamma_{0i} \text{ 作为各个决策指标的权重值。即 } w_i = \gamma_{0i}) \quad (\text{注：行相加})$$

相加)

(ρ 为分辨系数, $\rho \in (0, 1)$, 一般取 $\rho = 0.5$)

⑤ 权重向量归一化处理

各个指标权重数据列的关联度大小, 直接反映了各个评价指标相对于“公共”参考权值数据列的相对重要程度(即权重大小)。

(3) 灰色关联度法的评价

对上述确定指标权重的灰色关联度法, 进行综合微观分析, 我们发现其存在以下缺陷:

① 指标权重取值具有不确定性。

由于影响 γ 的因素很多(如参考序列 X_0)、比较序列 X_i 数据变换的方式、分辨系数 ρ 等。尤其当 ρ 取不同值时, 关联度大小就不同; 从而 γ 不唯一, 因此求得的权重值具有不确定性。

② 一般取 $\rho = 0.5$, 则恒有关联度 $\gamma_i > 0.333$, 即求得的指标权重均在 0.333 以上(即: 权重区分度较弱), 难以区分指标之间重要程度及不能满足实际决策的需求。因此, 为了克服分辨系数 ρ 取值的影响, 有人提出了一种基于灰色关联度来求解指标权重的改进方法(如下所述)。

以专家组经验判断的权值数据列为原始输入数据来进行纯数值计算, 无需涉

及算法（如灰色关联度）中易受决策者影响的一类主观设定参数（如分辨系数），计算过程不受决策者主观因素干扰，充分利用专家经验判断的权值数据列的信息，同时利用简明的数学模型进行指标权重的客观计算，因此得到的权重在反映主观程度的同时，能够充分地反映客观程度。

第一步与上述方法相同（聘请专家进行权重的经验判断，确定参考序列），

第二步、对原始序列均值化处理

$$X = (x_i / \bar{x}_i)_{1 \times n}$$

第三步求各个指标序列 X_1, X_2, \dots, X_n 与“公共”参考权值数据列 X_0 之间的距离：

$$D_{0i} = \sum_{k=1}^n (x_0(k) - x_i(k))^2 \quad (\text{行相加})$$

第四步、求各个指标的权重

$$w_i = \frac{1}{1 + D_{0i}}$$

最后，求各个指标的归一化权重

$$w_i^* = \frac{w_i}{\sum_{k=1}^n w_k}$$

灰色关联度法确定的权重具有较强的客观性，但是，这种方法忽视了在权重确定之中各指标之间的相互影响及决策对各指标的重视程度。

1.2.3 主成分分析(PCA)

（一）主成分分析赋权法（principal component analysis）

在计算评价体系的发展水平时，权重方法的确定对评价决策结果产生直接影响。若方法过于主观，会使评价结果产生误差，尤其当评价体系中指标数目较多时，评价结果可能与实际情况出现巨大偏差。主成分分析法基本上消除了主观性，因此在实践中得到广泛使用。

（1）基本原理

主成分分析是把多项指标转化为少数几个综合指标的一种统计分析方法。基本思想是从众多的观测变量中综合出携带原始数据信息最多且相互独立的几个

因素解释原有数据变量，目的是降维，简化数据结构，给研究和分析问题带来方便。

(2) 具体步骤

① 建立指标体系的原始数据矩阵。

每个对象均观察 P 项指标，记为 X_1, X_2, \dots, X_p ，建立数据矩阵 X 。

② 评价指标的标准化处理。

为了避免变量的量纲不同所带来的影响，对原始数据（指标） $X_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{nj})$ 进行标准化处理，使得每个变量的平均值为 0、方差为 1，

$$\text{即 } Z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_{0j}}{\sqrt{s_{jj}}} \quad \left(\text{其中 } \bar{x}_{0j} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n}, s_{jj} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{0j})^2}{n-1}, j=1, 2, \dots, p \right), \text{ 得到}$$

$$Z_j = (Z_{1j}, Z_{2j}, \dots, Z_{nj})。$$

③ 由标准化数据计算相关矩阵 R 。

计算已作标准化处理的评价指标的相关系数矩阵 R ，元素 r_{ij} 表示原始变量 X_i 和 X_j 的相关系数。

$$\gamma_{ij} = \frac{s_{jk}}{\sqrt{s_{jj}} \sqrt{s_{kk}}} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^p (x_{ij} - \bar{x}_{0j})(x_{ik} - \bar{x}_{0k})}{\sqrt{s_{jj}} \sqrt{s_{kk}}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n Z_{ij} Z_{ik}$$

(其中 $s_{kk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_{0k})^2$, $\bar{x}_{0k} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_{ik}$, $Z_{ik} = \frac{x_{ik} - \bar{x}_{0k}}{\sqrt{s_{kk}}}$)

$$\therefore R = (\gamma_{ij})_{p \times p} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n Z_{ij} Z_{ik} \right)_{p \times p} = \frac{1}{n-1} (Z)^T Z$$

④ 计算 R 的特征值并对特征值进行排序。

求解特征方程 $|R - \lambda E| = 0$ ，计算相关矩阵 R 的特征值 λ 。

⑤ 确定主成分个数 m ，阈值一般取 85%。

$$\text{sum} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \bigg/ \sum_{i=1}^p \lambda_i \geq \text{阈值} 85\%$$

⑥ 计算 m 个相应的单位特征向量。

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad a_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{pm} \end{bmatrix}$$

⑦写出主成分。

$$Z_k = a_{1k}X_1 + a_{2k}X_2 + \dots + a_{pk}X_p, k = 1, 2, \dots, m$$

主成分 Z_k 的应用，除了降维外，还可以通过 Z_i 与 Z_j 的对应取值变化，了解综合指标变量之间的关系和变化趋势；通过 Z_i 对 X_1, X_2, \dots, X_p 的贡献率

$$v_i = \sum_{k=1}^m r^2(Z_k, X_i), \text{ 然后找出 } v_i \text{ 最大的指标变量 } X_i, \text{ 视 } X_i \text{ 为 } Z_i \text{ 影响较大的指标,}$$

其中 v_i 定义如下。

$$r^2(Z_k, X_i) = \frac{\sum_{m=1}^p z_{km}x_{jm}}{\sqrt{\sum_{m=1}^p z_{km}^2} \sqrt{\sum_{m=1}^p x_{jm}^2}}$$

(3) 赋权方法评判

主成分分析方法能够在损失少量信息的基础上减少变量，减少了运算的工作量，但是这种方法确定的新变量的意义通常不易确定。主成分分析赋权一方面体现了指标区分评价对象能力的大小，另一方面删除了一些重复信息，使得综合评价指标相互独立，主要用于评价指标数目较多并且指标之间有复杂关系的评价系统中。

1.2.4 变异系数法

(1) 基本原理

变异系数法是基于方差分析的思想,从大量指标中分析得到少数几个主要指标，且这些指标能最大程度地反应原始数据的信息，从而达到简化数据和突出主要指标的目的，是一种有效的降维方。用较少的主要指标对评价对象的影响因素进行综合分类，大大简化了数据结构，从而使得分类结果更具科学性、客观性和公正性。

(2) 具体步骤

利用变异系数法对原始数据指标进行处理筛选得到少数几个主要指标的具体实现步骤如下：

① 建立分类指标体系。

设有 n 个分类对象，每个分类对象都有 m 项分类指标，则原始数据就组

成了一个数据矩阵为：

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

② 依据各个分类对象的指标实际值计算各指标的均值和标准差。

第 j 项指标的均值和标准差分别为：

$$\bar{x}_{0j} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n} \quad s_{0j} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{0j})^2}{n-1}} \quad (j=1,2,\dots,m)$$

③ 计算各指标的变异系数。

变异系数的计算公式为 $V_j = \frac{s_{0j}}{\bar{x}_{0j}}$ ， $(j=1,2,\dots,m)$ 。变异系数 V_j 越大，说明对

应指标越重要。

④ 确定各指标的权重。

先对指标变异系数进行归一化处理得到 $w_j = V_j / \sum_{j=1}^m V_j$ ($j=1,2,\dots,m$)，然后得

到指标的权重集为 $W_j = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ ，其中 $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ ，权重 w_i 越近 1，说明对

应指标越重要。

⑤ 确定主要指标。

依据变异系数值 V 和权重数值 W 筛选和确定影响评价对象严重程度的主要指标。

(3) 变异系数法的应用及评价

变异系数法通过指标数据信息差异反映权重的变动，从而将指标数据的实际信息反映到评价函数的综合权重中去。此评价模型的缺陷在于一方面受极端值的影响较大，另一方面无法反映不同类指标序列数据之间的信息差异。

1.2.5 多目标优化赋权法(Multi-objective Optimization Method)

(1)、多目标优化法

多目标优化法是一种基于数学规划原理的权数确定方法，该方法认为理想的权重应使所有被评价对象之间的差异达到最大。在各种研究成果中，有的研究者用绝对离差总和表示评价对象之间的差异，而有的研究者用离差平方和来表示差

异。以下为用后者为例介绍该方法。

基本步骤。

第一步：根据第 i 个对象的综合评价值与其他对象的综合评价值的离差平方和达到最大的思想，构造目标优化模型。

$$\max F(w) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n w_j (x_{ij} - x_{kj})^2 \quad \text{其中} \quad \sum_{j=1}^m w_j = 1, w_j > 0$$

第二步：求出最优解。

第三步：将最优解进行归一化处理。多目标优化法得出的权数仍然体现出评价指标分辨率大小，相对于变异系数法和熵值法而言，它区分评价对象的能力达到最大，但它的计算过程相对复杂，在有些情况下还不能得到唯一的最优解。

2、模糊偏好多目标决策算法

模糊偏好下多目标决策算法（用绝对离差总和表示评价对象之间的差异）

已知 m 个方案， n 个评价指标组成的模糊决策矩阵为 $A_{m \times n}$

具体算法为：

第一步：在模糊映射关系下建立模糊偏好决策矩阵 $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ ；

第二步：将决策矩阵 $A_{m \times n}$ 变为规范化矩阵 $Z = (z_{ij})_{m \times n}$ ；

$$z_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_i a_{ij}}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

第三步：计算多目标的最优权重向量 W ；

$$w_j = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d(z_{ij} - z_{kj})}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d(z_{ij} - z_{kj})} \quad d(z_{ij} - z_{kj}) = |z_{ij} - z_{kj}|。$$

第四步：将权向量标准化。

第五步：结束。

1.2.6 复相关系数法(Multiple Correlation Coefficient)

该方法认为如果某个指标与其他指标重复的信息越多，在综合评价中所起的作用就越小，应赋予较小的权数，反之则赋予较大的权数，即根据指标独立性大

小来分配权数，同时采用指标的复相关系数来衡量与其他指标的重复信息量大小。

第一步：求出各指标的相关系数矩阵。

m 个评价指标的相关系数矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix}$$

第二步：计算各个指标与其他指标的复相关系数

如计算第 m 个指标 X_m 与其他 m-1 个指标的复相关系数，则对矩阵 R 作如下分解：

$$R = \begin{bmatrix} R_{m-1} & r_m \\ r_m' & 1 \end{bmatrix}$$

R_{m-1} 是其他 m-1 个指标 X_1 、 X_2 、 \cdots 、 X_{m-1} 的相关系数矩阵，

$r_m = (r_{1m}, r_{2m}, \cdots, r_{m-1,m})$ 是一个 m-1 阶列向量。

此时 X_m 对其他指标的复相关系数为 $\rho_m = r_m' R_{m-1}^{-1} r_m$ ；同理求出其他指标的复相关系数。

第三步：将复相关系数求倒数并进行归一化处理得到各指标权数。

$$w_j = \frac{1}{\rho_j} / \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_j}$$

该方法与前三种方法刚好相反，它以各指标的独立性大小作为权数分配的依据，而对于指标变异程度的大小以及评价者的偏好完全没有涉及，因而对于评价指标关联程度较大的项目较为适用。

1.2.7 组合赋权法(Combination assigning method)

(1) 乘法加权组合法 (The multiplicatively weighted assignment method)

该方法将各种赋权方法得出的某一指标的权数相乘，然后进行归一化处理得到组合权数。计算公式为：

$$\theta_j = \prod_{k=1}^q w_j(k) / \sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^q w_j(k)$$

乘法合成其实就是将各种方法得出的权数折中，它与简单算术平均的效果比

较接近。

(2) 线性加权组合法(The linear weighted assignment method)

将各种赋权方法得出的权数进行加权汇总得出组合权数。

计算公式为：

$$\theta_j = \sum_{i=1}^k b_i w_{ij}, \theta_j \text{ 为第 } j \text{ 个指标的组合权数, } b_i \text{ 为第 } i \text{ 种方法的权系数, } w_{ij} \text{ 为}$$

第 i 种方法得出的第 j 个指标的权数, 当 b_i 完全相等时成为简单算术平均法。

线性加权组合法中组合权数的大小又取决于每种方法的权系数分配, 所以又面临一个权系数分配的问题。在此问题上的研究成果也层出不穷, 目前研究者们大都采用优化法来确定权系数的分配问题。

(1) 该方法的基本原理在于恰当的权系数分配应当使各评价对象的综合评价价值尽可能分散, 越分散越有利于区分评价对象的优劣, 采用综合评价价值之间的离差平方和或绝对离差和来度量分散程度, 构建优化模型, 求出最优解得到权系数。该方法的原理和步骤类似与多目标优化法, 在此不再赘述。

(2) Spearman 等级相关系数组合法

基于等级相关系数组合法, 该方法是通过检测各种赋权方法所得权数之间的相关程度来确定各种赋权方法的重要程度, 再进行综合集成。它实际上是用各种赋权方法得出的权数中, 关联度最高的权数与其他赋权方法得出的权数的相关系数来作为权系数。

spearman 等级相关系数主要用来检测各种赋权方法得出的权数之间的相关程度。

第一步：计算 spearman 等级相关系数。

$$\rho_{ik} = 1 - \frac{6 \sum_{j=1}^m (w_{ij} - w_{kj})^2}{m(m^2 - 1)}, \text{ 式中 } \rho_{ik} \text{ 表示第 } i \text{ 种赋权方法和第 } k \text{ 种赋}$$

权方法之间的等级相关系数, w_{ij} 表示第 i 种方法求出的第 j 个指标的权重, w_{kj} 表示同理。

第二步：寻找关联度最高的方法。

找出等级相关系数中的最大者 $\rho_{uv} = \max(\rho_{ik})$, 然后比较两种方法与其他方

法的等级相关系数，选出较大者，认为该方法是所有赋权方法中一致性相对较高的一种赋权方法，其他方法与该方法的等级相关系数构成向量

$$\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_k)$$

第三步：将其进行归一化处理，得出权向量 $w^0 = (w_1^0, w_2^0, w_3^0 \dots w_k^0)$ 。

第四步：用权向量修正权数，得出综合权数。

$$\theta = (w_1^0, w_2^0, \dots, w_k^0) \times \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{k1} & w_{k2} & \dots & w_{kn} \end{bmatrix}$$

1.2.8 CRITIC 法

CRITIC 法确定指标的客观权重以评价指标间的对比强度和冲突性两个概念为基础。对比强度，表示同一个指标各个评价对象之间取值差距的大小，以标准差来表现，标准差越大，各评价对象之间取值差距越大。指标之间的冲突性，以指标之间的相关性为基础，如两个指标之间具有较强的正相关，说明两个指标冲突性较低。第 j 项指标与其他指标冲突性的量化指标为其中 r_{ij} 就是指标 i 和 j 之间的相关系数。各个指标之间的客观权重确定就是以对比强度和冲突性来衡量的。设 C_j 表示第 j 项指标所包含的信息量，则 C_j 可表示为：

越大，第 j 项指标所包含的信息量愈大，该指标的相对重要性也就越大，所以第 j 项指标的客观权重为 w_j 。

具体步骤：

第一步、计算相关矩阵

第二步、计算某指标与其他指标冲突性的量化指标

第三步、计算第 j 项指标所包含的信息量

第四步、客观权重确定并进行归一化处理

第五步、输出结束

1.2.9 改进熵权法(Improved Entropy Weight)

(1)、基本原理

根据熵权法所得的权重，常常会出现某个数值很大（超过 0.3，有时甚至高达 0.6）的现象，这与指标重要性程度严重不符。在多指标综合评价中，每个指

标都是从不同的角度来反映或表征被评对象。尽管各指标的重要程度不尽相同，但也不应该出现某一指标权重超大的情况，否则由这一指标即可反映被评对象的优劣，而无需考虑其他指标了。正因如此，熵权法的应用受到了一定限制，而且工程选材综合评价中也鲜见熵权法应用的报道。鉴于此，作者结合工程材料评价指标的权重特征，以 0.3 作为指标权重的上限，对熵权法确定的客观权重进行修正，建立改进熵权法模型。

以燃气涡轮叶片材料评价指标权重的确定为例，设有 m 个候选材料，每一候选材料有 n 个指标，可得到初始信息矩阵其中为第 i 个候选材料的第 j 个指标的数值。

(2)、算法步骤

(1) 指标同向化、无量纲化及计算指标比重

指标同向化也称指标正向化。如果 n 个指标中有逆指标（即数值越小越好）或适度指标（即某个值最好），则需将其同向化，转化为正指标（即数值越大越好）。此外，不同指标的物理量纲大多不同，为了在各指标间进行比较，必须对指标进行无量纲化处理。由此得到指标数据标准化矩阵,其中 x_{ij} 为第 i 个候选材料的第 j 个指标的评价值。计算第 j 项指标下，第 i 种方案指标值比重 p_{ij} ：

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}} (i=1, \dots, m, j=1, \dots, n)$$

(2) 计算指标的熵值

$$E_j = -k \sum_{i=1}^m p_{ij} \ln p_{ij} \quad 0 \leq E_j \leq 1 (j=1, \dots, n) \quad k = 1 / \ln n$$

（若 $p_{ij} = 0$ ，则规定 $p_{ij} \ln p_{ij} = 0$ ）

(3) 计算指标的差异系数

$$G_j = 1 - E_j (1 \leq j \leq n) \quad (G_j \text{ 越大, 则指标越重要})$$

(4) 计算熵权:

$$w_j = \frac{G_j}{\sum_{j=1}^n G_j} (1 \leq j \leq n) \quad \text{得: 指标的权向量 } W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

(5) 熵权修正

设计算得到的熵权的最大值为当时可将其强置为 0.3，即其修正熵权，多余部分通过下式按比例分配到其余 (n-1) 个指标中。由此得到各指标的修正熵权。若,则可将其再强置为 0.3，再将其多余的权重，根据上式分配到其余 (m-2) 个指标中去，然后再次得到 (m-2) 个指标的修正熵权。

通常而言，所得指标的熵权中，往往会出现一个指标的熵权超大，将其修正后，一般不会再出现第二个指标的熵权大于 0.3 的情况。

(3)、程序实现

第一步、读入数据 $X[m][n]$;

第二步、计算指标比重;

$$p_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sum_{i=1}^m X_{ij}} (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$$

第三步、计算指标的熵值

$$E_j = -k \sum_{i=1}^m p_{ij} \ln p_{ij} \quad 0 \leq E_j \leq 1 (j = 1, \dots, n) \quad k = 1 / \ln n$$

(若 $p_{ij} = 0$ ，则规定 $p_{ij} \ln p_{ij} = 0$)

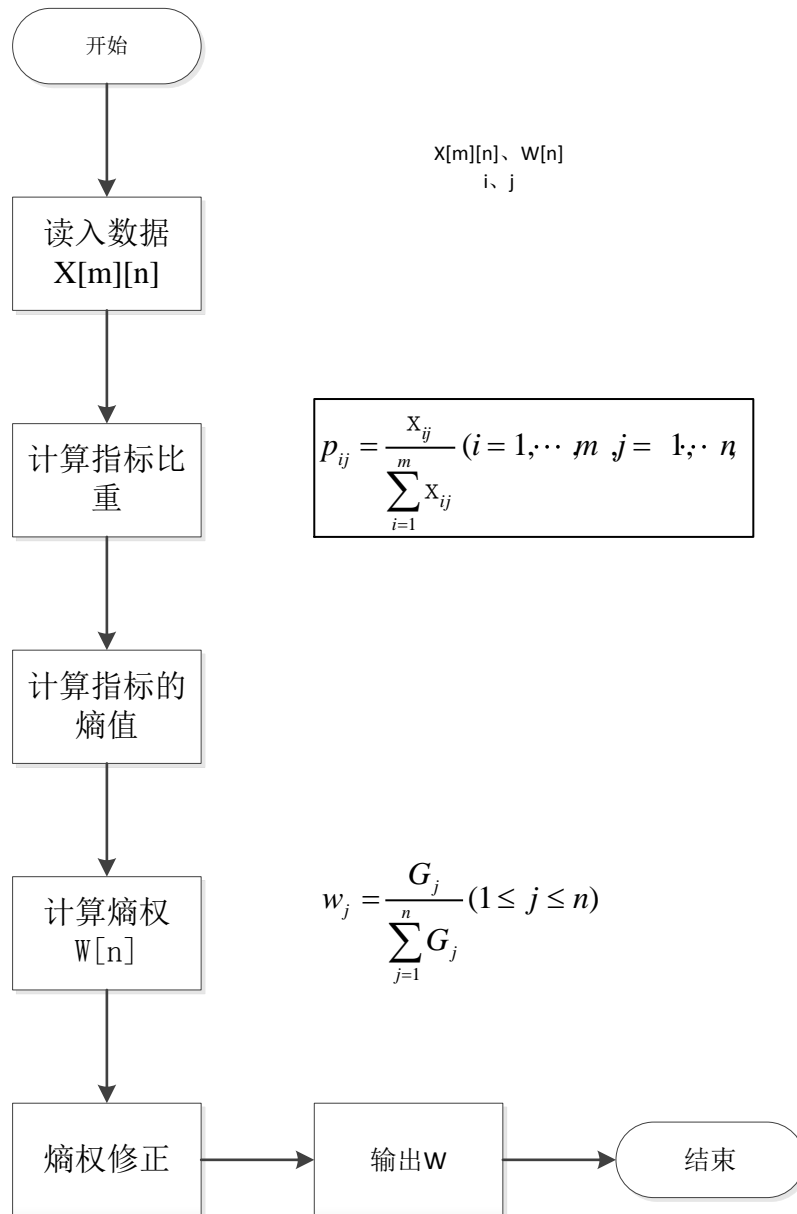
第四步、计算熵权 W :

$$w_j = \frac{G_j}{\sum_{j=1}^n G_j} (1 \leq j \leq n) \quad \text{得: 指标的权向量 } W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

第五步、熵权修正

第六步、输出

(4)、简略流程图



1.3 主观赋权法

1.3.1 层次分析法(AHP)

层次分析法是由美国运筹学家，匹兹堡大学的萨迪教授在 20 世纪 70 年代初提出的，是一种整理和综合人们主观判断的客观分析方法，适用于多目标评价问题的权重确定。

(1) 基本原理

层次分析法通过定性指标模糊量化方法,计算出层次单排序重要性权数和总排序，来确定多目标多方案优化决策中各指标的权重。

(2) 操作步骤

① 建立层次分析模型。

首先通过分析复杂问题中所含因素来划分不同层次，并画出层次结构图表示层次的递阶结构和相邻两层因素的从属关系。

② 构造判断矩阵。

对每一层的要素按一定的准则进行比较，建立判断矩阵。判断矩阵元素的值表示人们对各因素关于目标的相对重要性的认识，在相邻的两个层次中，高层次为目标，低层次为因素。

在层次分析法中，采用了一种间接的方式，将有关指标子系统或指标项在描述某一现象中所起作用程度进行两两比较，其结果用一种特殊的标度方法表示出来，这就是层次分析法中的 1-9 比例标度法，1-9 标度的含义见小表：

1-9 标度的含义

标度	含义	标度	含义
1	两者同等重要	7	前者比后者强烈重要
3	前者比后者稍微重要	9	前者比后者极端重要
5	前者比后者明显重要	2、4、6、8	表示上述相邻判断的中间值
上述数据的 倒数	若元素 i 与元素 j 的重要性之比 α_{ij} 为上述某一数值，则元素 j 与元素 i 重要性之比 $\alpha_{ji} = 1/\alpha_{ij}$		

将评价指标体系的目标层设为 A，准则层设为 B，构造 B 相对于 A 的判断矩阵，其中元素为 b_{ij} ，是[1-9]间整数或其倒数，主对角线为 1。准则层对于目标层的判断矩阵 A-B 为：

A	B ₁	B ₂	B ₃
B ₁	1	1/5	1/3
B ₂	5	1	3
B ₃	3	1/3	1

为了以后方便计算，把上述矩阵记作 A，简写为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

③计算判断矩阵最大特征值以及对应的权重向量，得出每一层各要素的权重值，进行一致性检验。

计算权重的方法有两种：

1)、判断矩阵 A 每一行元素的乘积为 M_i ，并计算 M_i 的 n 次方根 w_i ，对向量

$W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 正规化，即 $W_i = w_i / \sum_{i=1}^n w_i$ ，则 $W = [W_1, W_2, \dots, W_n]^T$ 为所求的权重向量。

2)、判断矩阵每一行元素的和为 M_i ， $W_i = M_i / \sum_{i=1}^n M_i$ ，则 $W = [W_1, W_2, \dots, W_n]^T$

为所求的权重向量。

④求判断矩阵的最大特征根 λ_{\max} 。

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n \frac{(F\omega)_i}{n\omega_i} \quad \text{式中, } (F\omega)_i \text{ 表示向量 } F\omega \text{ 的第 } i \text{ 个元素。}$$

例如：

$$\text{对于矩阵 } F \text{ 有: } (F\omega)_i = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 4 & 1/2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1/4 & 1/5 & 1 & 1/3 \\ 2 & 1/2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.1837 \\ 0.4757 \\ 0.0730 \\ 0.2675 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7680 \\ 1.9268 \\ 0.3032 \\ 1.0918 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{4} \times \left[\frac{0.7680}{0.1837} + \frac{1.9268}{0.4757} + \frac{0.3032}{0.0730} + \frac{1.0918}{0.2675} \right] = 4.1165$$

⑤RI 为平均随机一致性指标，对于 1-9 阶判断矩阵，RI 的值分别列于表 2-1:

表 2-1 不同维度对应的 RI 值(15)

维度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

设 $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$ ， $CR = \frac{CI}{RI}$ ，当 $CR = \frac{CI}{RI} < 0.10$ 时，认为判断矩阵具有满意的一致性，否则需要调整判断矩阵，使之具有满意的一致性 若判断矩阵具有满意

的一致性时，所得到的 $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ 即为各指标的权重。

④ 计算要素的组合权重。即各要素对于所研究问题的组合权重。据此就可以解决评分、排序、指标综合等问题。

(3)、程序实现步骤：

第一步：读入数据 $A[n][n]$;

第二步：计算最大特征值

幂法迭代公式：

$$\begin{cases} U_k = AV_{k-1} \\ m_k = \max(U_k) \text{ (迭代出来的特征值和特征向量不对)} \\ V_k = U_k / m_k \end{cases}$$

第三步：计算最大特征值及一致性检验

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}, \quad CR = \frac{CI}{RI}, \quad \text{当 } CR = \frac{CI}{RI} < 0.10$$

第四步：计算权重向量

法 1)、几何平均法（根法）

1、每一行元素的乘积为 M_i 计算 M_i 的 n 次方根 w_i ;

2、对向量 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 正规化，即 $W_i = w_i / \sum_{i=1}^n w_i$;

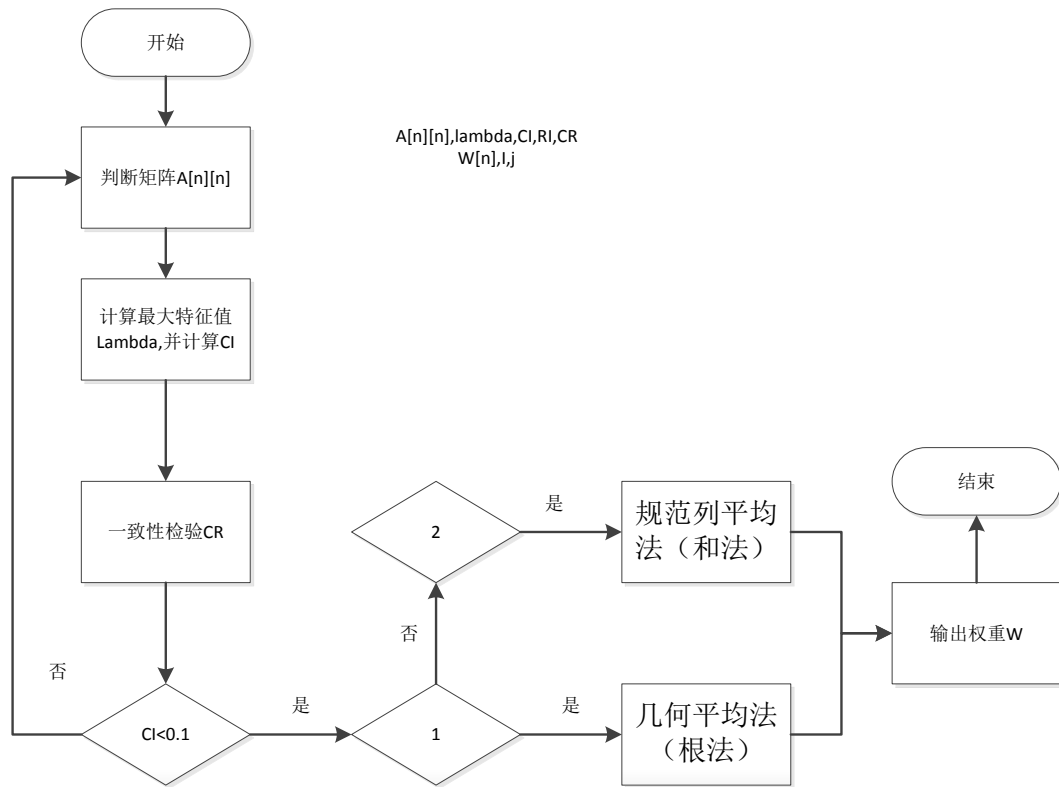
法 2)、规范列平均法（和法）

1、每一行元素的和为 M_i ;

2、 $W_i = M_i / \sum_{i=1}^n M_i$;

第五步：输出结束

(4)、简略流程图



(5)、层次分析法的实用性分析

层次分析法是把很模糊的概念量化，在缺少数据的问题里，可以使用；然而因为数据是自己生成的，主观就是它的缺点。由很多底层要素构成的评估式的模型，可以通过对目标风险的分层和分要素，得到每一个底层风险的权重，再通过对每一个底层的评估，就得到最终的分值。

1.3.2 专家打分法(Expert Scoring Method)

(1) 基本原理

专家打分赋权法是指通过匿名方式征询有关专家的意见，对专家意见进行统计、处理、分析和归纳，客观地综合多数专家经验与主观判断，对大量难以采用技术方法进行定量分析的因素做出合理估算，经过多轮意见征询、反馈和调整，对债权价值和价值可实现程度进行分析的方法。

(2) 基本步骤

专家打分赋权法的程序

- ① 选择专家；
- ② 确定影响评价对象的指标因素，设计指标重要性打分征询意见表；
- ③ 向专家提供债权背景资料，以匿名方式征询专家意见；
- ④ 对专家意见进行分析汇总，将统计结果反馈给专家；

- ⑤ 专家根据反馈结果修正自己的意见；
- ⑥ 经过多轮匿名打分征询和意见反馈，形成最终分析结论。

专家打分赋权法的具体步骤

① 邀请专家，专家根据已有的经验对各评价指标之间的权重关系进行判断，为保证各专家的独立判断不受别的专家主观的影响，由专家单独进行判断并填写表格，从而得出各专家确定的各评价指标之间的权重关系。并使： $\sum a_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$ 且 $a_j > 0$)

② 对每项指标的权系数计算平均值

$$a_{ij} = 1/k \times \sum_{i=1}^k a_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

i 表示专家号， j 表示指标类别， k 表示被调查的专家人数， a_{ij} 表示专家的填表值。

计算每个专家对各权系数的填表值 a_{ij} 与平均值 $aver(a_j)$ 的离差。

$$\Delta ij = a_{ij} - aver(a_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

③ 计算专家们意见的分歧程度

$$\text{方差 } D[a_j] = 1/(k-1) \times \sum (a_{ij} - aver(a_j))^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{标准差 } \delta_j = \sqrt{D[a_j]} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{分歧程度: } k_{aj} = \delta_{aj} / a_j \times 100\% \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

如果 $k_{aj} > 5\% \sim 10\%$ ，说明由专家们确定的权重系数值相对较为离散，缺乏统一性和可靠性，因此需要再次进行权重系数的确定。直到专家们各自的结果与最终的结果相对较为统一。当专家们的意见比较统一时，各评价指标的权重系数就可以确定了。

(3) 专家打分法的适用范围

专家打分法适用于存在诸多不确定因素、采用其他方法难以进行定量分析的赋权方法。

(4) 使用专家打分法应当注意的问题

① 选取的专家应当熟悉评价对象领域，有较高权威性和代表性，人数应当适当；

② 对影响债权价值的每项因素的权重及分值均应当向专家征询意见；

③ 多轮打分后统计方差如果不能趋于合理，应当慎重使用专家打分法结论。

(5) 专家打分法的应用及评价

在《层次分析法在矿山地质环境影响评价中的应用》中利用专家打分法来确定权重，确定每个指标在对应分值所表示含义，再由专家进行打分，最后根据专家的评分结果确定权重。

专家在分析判断各评价指标的权重时，由于未知的因素较多，因而经验判断值不能准确地反映各个指标的重要性。

(6) 程序实现步骤

第一步、读入数据 $X[m][n]$ ；

第二步、归一化 $A[m][n]$ ；

$$\sum a_j = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } a_i > 0)$$

第三步、对每项指标的权系数计算平均值

$$a_{ij} = 1/k \times \sum_{i=1}^m a_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

第四步、计算分歧程度；

$$\text{方差 } D[a_j] = 1/(k-1) \times \sum (a_{ij} - \text{aver}(a_j))^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{标准差 } \delta_j = \sqrt{D[a_j]} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

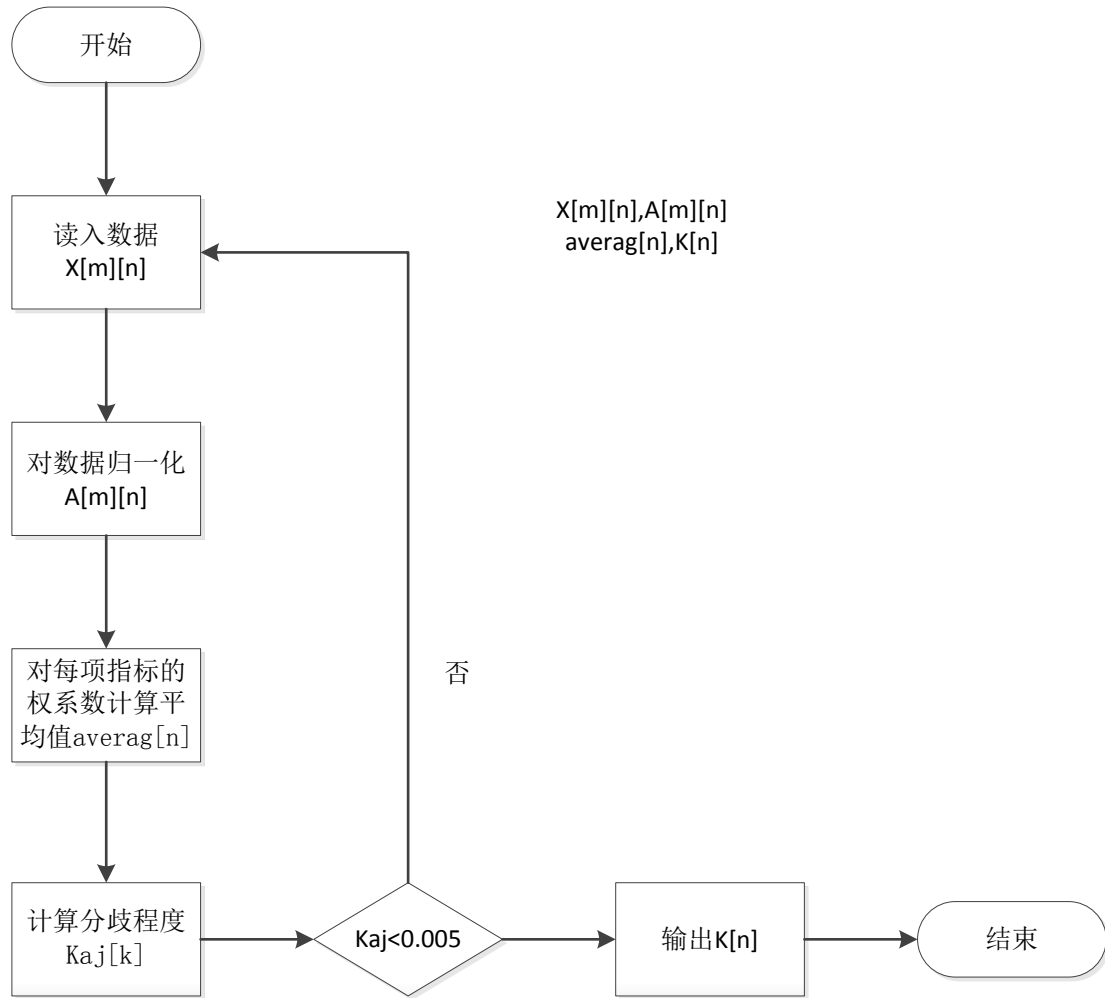
$$\text{分歧程度: } k_{aj} = \delta_{aj} / a_j \times 100\% \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

第五步、判断分歧程度；

$$k_{aj} > 5\% \sim 10\%$$

第六步、输出分歧程度 K

(7) 简略流程图



1.3.3 对比排序法(Contrast Compositor Method)

采用对比排序法，由参加评估的 m 位专家对评价指标的相对重要性进行排序，然后按照专家的顺序给指标记分，最不重要的指标记 1 分，其次记 2 分，

依此类推。然后按照如下公式计算各指标的权重： $w_j = (\sum_{i=1}^m \log_n A_{ij}) / m$

w_{ij} 是第 j 项指标的权重， m 是专家数， n 是指标数， k_i 为第 i 个专家对该指标排序的记分值。

程序实现步骤：

第一步、读入数据 $K[m][n]$;

第二步、计算各指标权重； $w_j = (\sum_{i=1}^m \log_n A_{ij}) / m$

第三步、输出 $W[n]$;

1.3.4 优序图法(Precedence Chart)

优序图法(Precedence Chart, 简称 PC) 是美国人穆蒂(P.E.Moody) 1983 年提出并应用的, 它是用矩阵图示的办法分析各因素(条件)对目标(项目成败、服务质量)的重要程度, 为管理决策提供依据。优序图法, 设 n 为比较对象(如方案、目标、指标等)数目, 它是一棋盘格的图式共有 $n \times n$ 个空格, 在进行两两比较时可选择 1, 0 两个数字来表示何者为优、为大。“1”表示两两相比中的相对“优的”、“重要的”、“大的”, 而用“0”表示相对“劣的”、“不重要的”、“小的”; 相同方案对比时表格填 0, 若两方案优劣相当, 则评分为 0.5。

以优序图中黑字方格为对角线, 把这对角线两边对称的空格数字对照一番, 如果对称的两栏数字正好一边是 1, 而另一边是 0 形成互补或者两边都为 0.5, 则表示填表数字无误, 即完成互补检验。满足互补检验的优序图的各行所填的各格数字横向相加, 分别与总数 T ($T=n(n-1)/2$) 相除就得到了各比较对象的权重。

程序实现步骤:

第一步: 读入数据 $A[n][n]$;

第二步: 互补检验;

第三步: 求 T 及各行数字之和;

第四步: 求各比较对象的权重 $W[n]$;

第五步: 输出 $W[n]$ 。

第 2 章 技术经济综合评价方法

2.1 概述

评价是现代社会各领域的一项非常重要的工作, 是科学的作出管理决策的依据。综合评价的方法很多, 但由于各种方法出发点不同, 解决问题的思路不同, 适用对象不同, 又各有优缺点, 以至人们遇到综合评价问题时不知该选择哪一种方法, 也不知评价结果是否可靠。基于这种现状, 本文根据不同方法的思路、特征、优缺点及适用范围对目前常用评价方法进行分析, 以供评价者参考。

2.2 主成分分析(PFA)

(1) 方法原理

主成分分析就是设法将原来众多具有一定相关性的指标(比如 p 个指标), 重新组合成一组新的相互无关的综合指标来代替原来指标。通常数学上的处理就

是将原来 p 个指标作线性组合，作为新的综合指标。在众多的线性组合中选取尽可能多地反映原来指标信息的线性组合作为第一个综合指标记为 F_1 。反映信息量的多少可以用变量的方差的大小来表示，方差大的反映的信息量大。因此，在所有的线性组合中所选取的 F_1 应该是方差最大的，故称为第一主成分。如果第一主成分不足以代表原来 p 个指标的信息，在考虑选取 F_2 ，即选第二个线性组合。为了有效地反映原来信息， F_1 已有的信息就不需要再出现在 F_2 中，也就是说 F_1 和 F_2 是不相关的。依次类推可以找出第三，第四，……，第 p 个主成分。这些主成分之间不仅不相关，而且它们的方差依次递减。

(2) 基本步骤

第一步，将原始数据标准化。

对于任何一个观测变量（指标）都进行标准化变换，变为标准化变量。标准化的变换公式为 $z = (x - \bar{x}) / \sigma_x$ （ \bar{x} 为 x 的均值， σ_x 为 x 的标准差），标准化变换并不改变变量之间的相关系数。

第二步，建立变量的相关系数矩阵。

标准化变量的相关系数矩阵和协差阵是相同的，因此可以通过建立变量的相关系数矩阵来计算相应的特征值和特征向量。

$$R = (r_{ij})_{p \times p}$$

$$r_{ij} = \frac{s_{jk}}{\sqrt{s_{jj}} \sqrt{s_{kk}}} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^p (x_{ij} - \bar{x}_{0j})(x_{ij} - \bar{x}_{0k})}{\sqrt{s_{jj}} \sqrt{s_{kk}}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n Z_{ij} Z_{ik}$$

$$\left(\text{其中 } s_{kk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{0k})^2, \quad \bar{x}_{0k} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_{ij}, \quad Z_{ik} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_{0k}}{\sqrt{s_{kk}}} \right)$$

$$\therefore R = (r_{ij})_{p \times p} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n Z_{ij} Z_{ik} \right)_{p \times p} = \frac{1}{n-1} (Z)^T Z$$

第三步，求 R 的特征根 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ 及相应的单位特征向量，并确定主成分：

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ x_{p1} \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ x_{p2} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad a_p = \begin{bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ x_{pp} \end{bmatrix}$$

若 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n \geq 0$ ，则根据因子累计方差贡献率大于等于 85% 来确定主成分数目 m ，与 $\lambda_k (k=1, 2, \dots, m)$ 对应的特征向量记为 $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{km})$ ，与 λ_k 相对应的主成分称为第 k 个主成分， λ_k 是相关矩阵 R 的第 k 个特征值。

第四步，写出主成分，计算综合指标的数值。

$$F_i = a_{1i}X_1 + a_{2i}X_2 + \dots + a_{pi}X_p \quad i=1, \dots, m$$

第五步，计算综合得分

运用主成分分析得出综合指标的数值，以每个主成分的方差贡献率为权重来构造一个综合评价函数。

$$y = a_1F_1 + a_2F_2 + \dots + a_mF_m$$

也称 y 为评估指数，依据对每个系统计算出的 y 值大小进行排序比较。

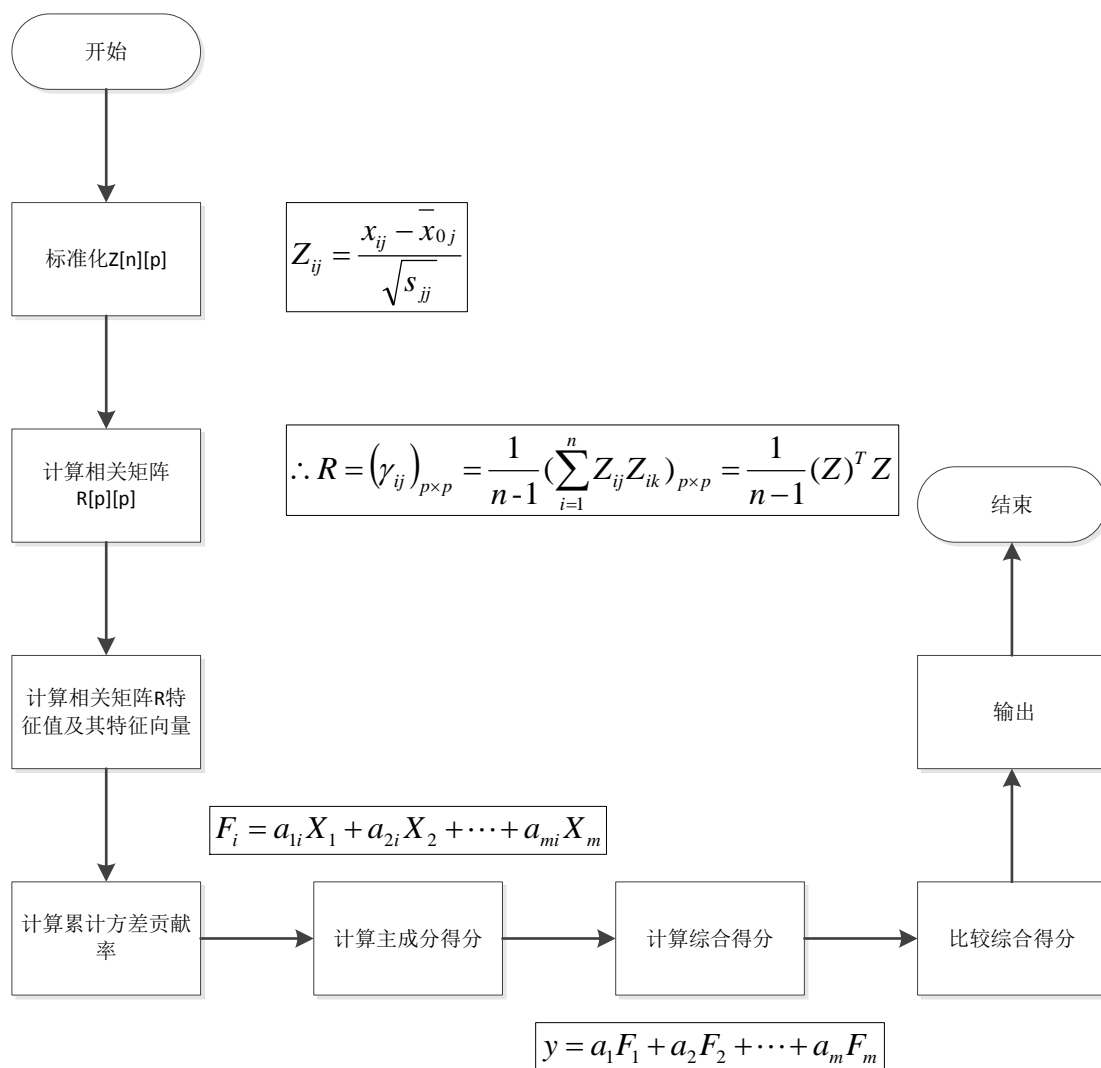
其中， a_i 为第 i 个主成分的方差贡献率

$$a_i = \lambda_i / \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

(3) 应用及效果分析

从而可以看出利用主成分分析做综合评价是从原始数据所给定的信息直接确定权重进行评价的，所取的权重直接为对应主成分的方差贡献率。某个主成分在综合评价时所能反映的信息越多，相应的权重也越大，所能反映的信息越少，相应的权重也越少，因为其所得信息都是来源于原始数据，这也是主成分分析综合评价法最主要的优点之一。

(4) 简略流程图



2.3 综合指数法(Comprehensive Index Method)

(1) 方法原理

综合指数法是指在确定一套合理的经济效益指标体系的基础上，对各项经济效益指标个体指数加权平均，计算出经济效益综合值，用以综合评价经济效益的一种方法。即将一组相同或不同数值通过统计学处理，使不同计量单位、性质的指标值标准化，最后转化成一个综合指数，以准确地评价工作综合水平。综合指数值越大，工作质量越好，指标多少不限。

综合指数法将各项经济效益指标转化为同度量的个体指数，便于将各项经济效益指标综合起来，以综合经济效益指数为企业间综合经济效益评比排序的依据。各项指标的权数是根据其重要程度决定的，体现了各项指标在经济效益综合值中作用的大小。综合指数法的基本思路则是利用层次分析法计算的权重和模糊评判法取得的数值进行累乘，然后相加，最后计算出经济效益指标的综合评价指

数。要素、指标加权分值评价法（综合指数法）

(2) 要素各指标加权评价

$$F_i = \sum_{j=1}^n A_j W_j$$

F_i 为要素加权分值, F_i 为每一要素中各指标评定分值, W_j 为各指标权值, n 为各要素指标个数。在该模型中,权重的确定可以采用 AHP 法。

综合指数法的模型如下: 综合指数 = \sum (某指标单项指数 \times 该指标权数)

(3) 应用及效果分析

表 1 甲、乙两地区 2000 年农业经济效益指标值

指 标	标准值	甲地区	乙地区
农用土地生产率 (公斤/公顷)	4 800	5 300	5 200
农业劳动生产率 (元/人)	2 300	3 500	3 800
农业资金生产率 (%)	280	265	282

表 2 农业经济效益综合指数计算表 %

	农用土地生 产率指数	农业劳动生 产率指数	农业资金生 产率指数	农业经济效 益综合指数
甲地区	110.40	152.17	95.00	110.28
乙地区	108.30	165.22	100.72	115.52
权 数	25.00	20.00	55.00	—

根据公式得计算结果可知, 2000 年两地区经济效益综合指数分别为 110.28% 和 115.52%, 均大于 100%, 说明两地区农业经济效益较好, 且乙地区农业经济效益优于甲地区农业经济效益。

程序实现步骤:

第一步、导入数据 $A[M][N]$, $W[N]$;

第二步、要素各指标加权评价;

$$F_i = \sum_{j=1}^n A_j W_j$$

第三步、输出 $F[M]$ 。

2.4 层次分析法(AHP)

(1) 基本原理

层次分析法(AHP 法) 是一种解决多目标的复杂问题的定性与定量相结合的决策分析方法。该方法将定量分析与定性分析结合起来,用决策者的经验判断各衡量目标能否实现的标准之间的相对重要程度,并合理地给出每个决策方案的每个标准的权数,利用权数求出各方案的优劣次序,比较有效地应用于那些难以用定量方法解决的课题。

层次分析法根据问题的性质和要达到的总目标,将问题分解为不同的组成因素,并按照因素间的相互关联影响以及隶属关系将因素按不同层次聚集组合,形成一个多层次的的分析结构模型,从而最终使问题归结为最低层(供决策的方案、措施等)相对于最高层(总目标)的相对重要权值的确定或相对优劣次序的排定。

(2) 基本步骤

运用层次分析法构造系统模型时, 大体可以分为以下五个步骤:

① 通过对系统的深刻认识,确定该系统的总目标,弄清决策问题所涉及的范围,所要采取的措施方案和政策,实现目标的准则,策略和各种约束条件等,广泛收集信息.

② 建立层次结构

按目标的不同,实现功能的差异,将系统分为几个等级层次,如目标层,准则层,方案层,用框图的形式说明层次的递阶结构与因素的从属关系。

③ 两两比较, 建立判断矩阵, 求解权向量

判断元素的值反映了人们对各因素的相对重要性的认识,一般采用 1~9 标度及其倒数的标度方法。为了从判断矩阵中提炼出有用的信息,需要计算每个判断矩阵的权重向量和全体判断矩阵的合成权重向量。通过两两对比按重要性等级赋值,完成从定性到定量的过渡。

④ 层次单排序及其一致性检验

判断矩阵 A 的特征根问题 $AW=\lambda_{\max}W$ 的解 W , 经归一化后即为一层次相应因素对于上一层次某因素相对重要性的排序权值,这一过程称为层次单排序。为进行判断矩阵的一致性检验, 需要计算一致性指标 $CI=(\lambda_{\max}-1)/(n-1)$,当随机一致性比率 $CR=CI/RI<0.1$ 时, 可以认为层次单排序的结构有满意一致性, 否则

需要调整判断矩阵的元素取值。

⑤ 层次总排序

计算各层元素对系统目标的合成权重,进行总排序,以确定结构图中最底层各个元素在总目标中的重要程度。这一过程是最高层到最低层逐层进行的。

(3) 应用及效果分析

气田排水采气技术经济评价方面的应用,层次分析法在气田排水采气技术经济评价方面的应用主要有以下几个方面:

① 对气田排水采气技术经济评价的各个方面,如经济指标,技术指标等进行等级评价。

② 对气田排水采气技术经济评价的经济指标,或者技术指标等进行排序。

③ 结合其他综合评价方法进行评价。层次分析法仅进行评价体系中指标权重的确定。

运用 AHP,设定气田排水采气技术经济评价多层次、多因素的指标体系,逐层、逐一指标进行比较判断,计算指标权重,可以弥补以往靠定性方法和经验决策在解决同类问题中的不足,能有效地提高决策的科学性。但该方法中的比较、判断以及结果的计算过程都是粗糙的,不适用于精度较高的问题。而且从建立层次结构模型到给出成对比较矩阵,人主观因素对整个过程的影响很大,这就使得结果难以让所有的决策者接受。当然采取专家群体判断的办法是克服这个缺点的一种途径。

2.5 模糊综合评判法(Fuzzy Comprehensive Evaluation)

(1) 基本原理

首先确定被评价对象的因素(指标)集合、评价(等级)集;再分别确定各个因素的权重及它们的隶属度向量,获得模糊评判矩阵;最后把模糊评判矩阵与因素的权向量进行模糊运算并进行归一化,得到模糊综合评价结果。

其特点在于评判逐对象进行,对被评价对象有唯一的评价值,不受被评价对象所处对象集合的影响。综合评价的目的是要从对象集中选出优胜对象,所以还需要将所有对象的综合评价结果进行排序。

模糊综合评价法中的有关术语定义如下:

① 评价因素(F):系指对招标项目评议的具体内容(例如,价格、各种指标、参数、规范、性能、状况,等等)。

为便于权重分配和评议，可按评价因素的属性将评价因素分成若干类（例如，商务、技术、价格、伴随服务，等），把每一类都视为单一评价因素，并称之为第一级评价因素（F1）。第一级评价因素可以设置下属的第二级评价因素（例如，第一级评价因素“商务”可以有下属的第二级评价因素：交货期、付款条件和付款方式，等）。第二级评价因素可以设置下属的第三级评价因素（F3）。依此类推。

② 评价因素值（Fv）：系指评价因素的具体值。例如，某投标人的某技术参数为 120，那么，该投标人的该评价因素值为 120。

③ 评价值（E）：系指评价因素的优劣程度。评价因素最优的评价值为 1（采用百分制时为 100 分）；欠优的评价因素，依据欠优的程度，其评价值大于或等于零、小于或等于 1（采用百分制时为 100 分），即 $0 \leq E \leq 1$ （采用百分制时 $0 \leq E \leq 100$ ）。

④ 平均评价值（Ep）：系指评标委员会成员对某评价因素评价的平均值。

平均评价值（Ep）= 全体评标委员会成员的评价值之和 ÷ 评委数

⑤ 权重（W）：系指评价因素的地位和重要程度。

第一级评价因素的权重之和为 1；每一个评价因素的下一级评价因素的权重之和为 1。

⑥ 加权平均评价值（E_{pw}）：系指加权后的平均评价值。

加权平均评价值（E_{pw}）= 平均评价值（Ep）× 权重（W）

⑦ 综合评价值（Ez）：系指同一级评价因素的加权平均评价值（E_{pw}）之和。综合评价值也是对应上一级评价因素的值。

（2）评价步骤

① 确定评价对象的因素域

P 个评价指标， $u = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ 。

② 确定评语等级域

$v = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ，即等级集合。每一个等级可对应一个模糊子集。

③ 建立模糊关系矩阵 R

在构造了等级模糊子集后，要逐个对被评事物从每个因素 $u_i (i=1,2,\dots,p)$ 上进行量化，即确定从单因素来看被评事物对等级模糊子集的隶属度 $(R|u_i)$ ，进

而得到模糊关系矩阵：
$$R = \begin{bmatrix} R|u_1 \\ R|u_2 \\ \dots \\ R|u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & r_{pm} \end{bmatrix}_{p,m}$$

矩阵 R 中第 i 行第 j 列元素 r_{ij} ，表示某个被评事物从因素 u_i 来看对 v_j 等级模糊子集的隶属度。一个被评事物在某个因素 u_i 方面的表现，是通过模糊向量 $(R|u_i) = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im})$ 来刻画的，而在其他评价方法中多是由一个指标实际值来刻画的，因此，从这个角度讲模糊综合评价要求更多的信息。

④ 确定评价因素的权向量

在模糊综合评价中，确定评价因素的权向量： $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ 。权向量 A 中的元素 a_i 本质上是因素 u_i 对模糊子集 {对被评事物重要的因素} 的隶属度。使用层次分析法来确定评价指标间的相对重要性次序，从而确定权系数，并且在合成之前归一化。即 $\sum_{i=1}^p a_i = 1, a_i \geq 0, i=1,2,\dots,n$

⑤ 合成模糊综合评价结果向量

利用合适的算子将 A 与各被评事物的 R 进行合成，得到各被评事物的模糊综合评价结果向量 B 。即：

$$A \circ R = (a_1, a_2, \dots, a_p) \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & r_{pm} \end{bmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_m) = B$$

对 $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ 进行归一化处理，取 $b_k = \max\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ，则模糊综合评判结果为评语 v_k 。

(3) 模糊综合评价法的应用

模糊综合评价法可对涉及模糊因素的对象系统进行综合评价。作为较常用的一种模糊数学方法，它广泛地应用于经济、社会等领域。然而，随着综合评价在经济、社会等大系统中的不断应用，由于问题层次结构的复杂性、多因素性、不确定性、信息的不充分以及人类思维的模糊性等矛盾的涌现，使得人们很难客观地做出评价和决策。

它并不能解决评价指标间相关造成的评价信息重复问题，隶属函数的确定还没有系统的方法，而且合成的算法也有待进一步探讨。其评价过程大量运用了人的主观判断，由于各因素权重的确定带有一定的主观性，因此，总的来说，模糊综合评判是一种基于主观信息的综合评价方法。所以，无论如何，都必须根据具体综合评价问题的目的、要求及其特点，从中选取合适的评价模型和算法，使所做的评价更加客观、科学和有针对性。

对于一些复杂系统，需要考虑的因素很多，这时会出现两方面的问题：一方面是因素过多，对它们的权数分配难于确定；另一方面，即使确定了权数分配，由于需要归一化条件，每个因素的权值都很小，再经过 Sade 算子综合评判，常会出现没有价值的结果。针对这种情况，我们需要采用多级（层次）模糊综合评判的方法。按照因素或指标的情况，将它们分为若干层次，先进行低层次各因素的综合评价，其评价结果再进行高一层次的综合评价。每一层次的单因素评价都是低一层次的多因素综合评价，因此从底层向高层逐层进行。另外，为了从不同的角度考虑问题，我们还可以先把参加评判的人员分类。按模糊综合评判法的步骤，给出每类评判人员对被评价对象的模糊统计矩阵，计算每类评判人员对被评价者得评判结果，通过“二次加权”来考虑不同角度评委的影响。

综合评判是对多种属性的事物，或者说其总体优劣受多种因素影响的事物，做出一个能合理地综合这些属性或因素的总体评判。例如，教学质量的评估就是一个多因素、多指标的复杂的评估过程，不能单纯地用好与坏来区分。而模糊逻辑是通过使用模糊集合来工作的，是一种精确解决不精确不完全信息的方法，其最大特点就是用它可以比较自然地处理人类思维的主动性和模糊性。因此对这些诸多因素进行综合，才能做出合理的评价，在多数情况下，评判涉及模糊因素，用模糊数学的方法进行评判是一条可行的也是一条较好的途径。

(4)、算法实现

第一步、读入数据；

1)、某一待评价对象模糊关系矩阵 R

$$\text{模糊关系矩阵 } R = \begin{bmatrix} R | u_1 \\ R | u_2 \\ \dots \\ R | u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & r_{pm} \end{bmatrix}_{p,m}$$

2)、各个指标权重(并在合成前进行归一化)

$$\text{评价因素权向量 } A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$$

第二步、进行模糊运算 $B = A \circ R$;

$$A \circ R = (a_1, a_2, \dots, a_p) \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p1} & r_{p2} & \dots & r_{pm} \end{bmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_m) = B$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

$$\text{法 1、模糊变换法: } b_j = \bigvee_{i=1}^n (a_i \wedge \gamma_{ij})$$

$$\text{法 2、以乘法代替“取小”: } b_j = \bigvee_{i=1}^n (a_i \gamma_{ij})$$

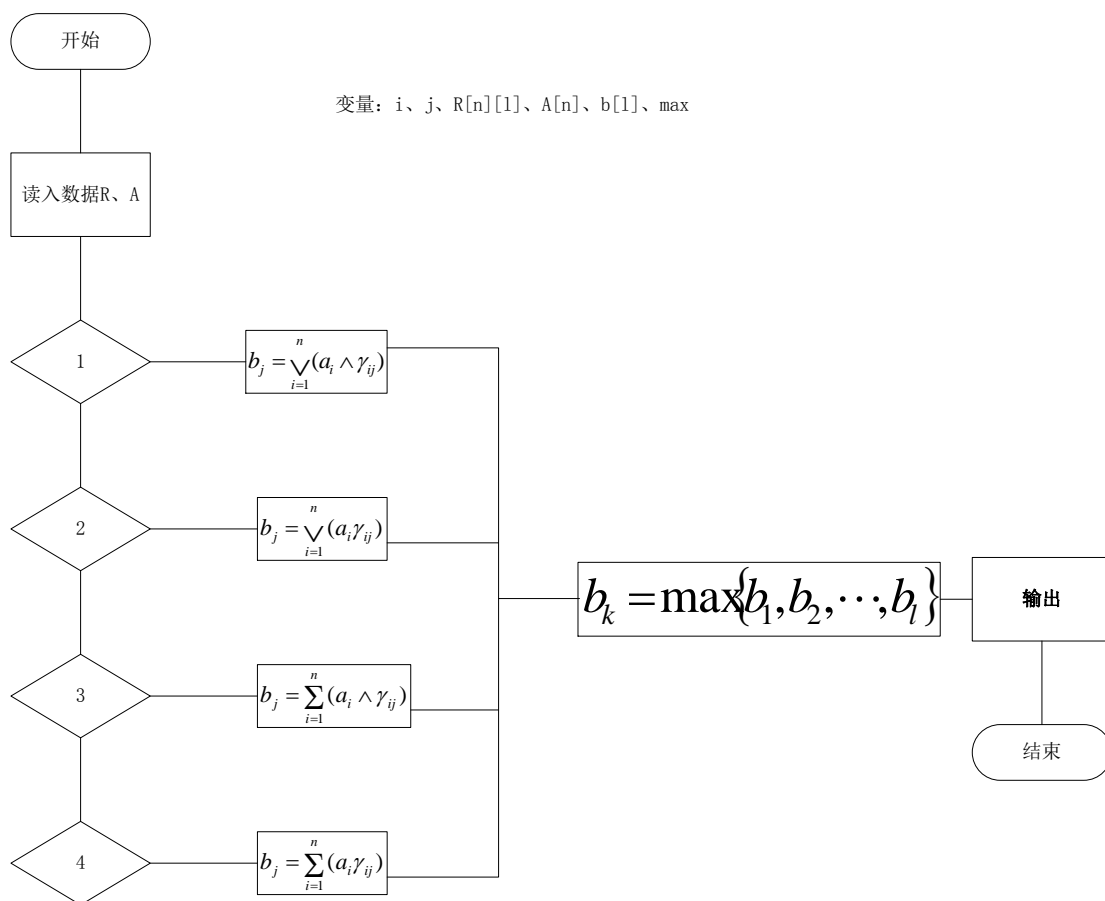
$$\text{法 3、以加法代替“取大”: } b_j = \sum_{i=1}^n (a_i \wedge \gamma_{ij})$$

$$\text{法 4、加权平均: } b_j = \sum_{i=1}^n (a_i \gamma_{ij})$$

第三步、对模糊综合评价向量 B 进行归一化并寻找其元素最大值作为该评价

$$\text{对象综合评价值。 } b_k = \max \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

(5)、流程图



(6) 模糊综合评价的优缺点

1、模糊综合评价法的优点

(1) 模糊评价通过精确的数字手段处理模糊的评价对象，能对蕴藏信息呈现模糊性的资料作出比较科学、合理、贴近实际的量化评价；

(2) 评价结果是一个向量，而不是一个点值，包含的信息比较丰富，既可以比较准确的刻画被评价对象，又可以进一步加工，得到参考信息。

2、模糊综合评价法的缺点

(1) 计算复杂，对指标权重向量的确定主观性较强；

(2) 当指标集 U 较大，即指标集个数较大时，在权向量和为 1 的条件约束下，相对隶属度权系数往往偏小，权向量与模糊矩阵 R 不匹配，结果会出现超模糊现象，分辨率很差，无法区分谁的隶属度更高，甚至造成评判失败，此时可用分层模糊评估法加以改进（详见《模糊数学与军事决策》张明智编 国防大学出版社，1997）。

补充资料（截图）

要确定单因素评价矩阵 R ，主要是建立因素集 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ 到评价集

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的模糊映射，也就是对于每个因素 c_i ($i = 1, 2, \dots, m$)，

确定隶属度与每个评价指标 v_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 的对应关系 r_{ij}

本题若选择评价集为 {很好，好，一般，较差，差}，且已选定隶属函数 f_1, f_2, \dots, f_5

下面还需确定隶属度与评价指标的对应关系（该关系的确定有一定的主观性）

例如，规定：

$f_1 \geq 0.9$ 为“很好”

$0.8 \leq f_1 < 0.9$ 为“好”

$0.7 \leq f_1 < 0.8$ 为“一般”

$0.6 \leq f_1 < 0.7$ 为“较差”

$f_1 < 0.6$ 为“差”

设有 k 个专家打分，对于因素 c_1 ，有 d_{11} 人认为“很好”，

（若某专家打分为 88，由 f_1 可求得隶属度为 0.9，则认为该专家的评价为“很好”）

有 d_{12} 人认为“好”，...有 d_{1j} 人认为“差”，而 $\sum_{j=1}^n d_{1j} = k$

c_1 的单因素评价向量为 $R_1 = \left(\frac{d_{11}}{k}, \frac{d_{12}}{k}, \dots, \frac{d_{1n}}{k} \right)$

以上可推广到其他因素，符号说明及表示如下：

若 d_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) 是评价第 i 项因素 c_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 为第 j

种等级 v_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 的票数， $\sum_{j=1}^n d_{ij} = k$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 为专家组的人数

$$\text{单因素评价矩阵 } R = \begin{bmatrix} \frac{d_{11}}{k} & \frac{d_{12}}{k} & \dots & \frac{d_{1n}}{k} \\ \frac{d_{21}}{k} & \frac{d_{22}}{k} & \dots & \frac{d_{2n}}{k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d_{m1}}{k} & \frac{d_{m2}}{k} & \dots & \frac{d_{mn}}{k} \end{bmatrix}$$

隶属函数

(1) 正态分布

1) 降半正态分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ \exp[-k(x-a)^2] & x > a \end{cases} \quad k > 0$$

2) 升半正态分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 - \exp[-k(x-a)^2] & x > a \end{cases} \quad k > 0$$

3) 正态分布

$$\mu(x) = \exp[-k(x-a)^2] \quad k > 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

(2) 梯形分布

1) 降半梯形分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

2) 升半梯形分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

3) 中间形梯形分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & c \geq x \geq b \\ \frac{d-x}{d-c} & c < x < d \\ 0 & x \geq d \end{cases}$$

(3) 岭形分布

1) 降半岭形分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b-a} (x - \frac{b+a}{2}) & a < x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

2) 升半岭形分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b-a} (x - \frac{b+a}{2}) & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

3) 中间形岭形分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b-a} (x - \frac{b+a}{2}) & a < x < b \\ 1 & c \leq x \leq b \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{d-c} (x - \frac{d+c}{2}) & c < x < d \\ 0 & x \geq d \end{cases}$$

(4) 抛物型分布

1) 降半抛物型分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ (\frac{b-x}{b-a})^k & a < x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

2) 升半抛物型分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (\frac{x-a}{b-a})^k & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

3) 中间形抛物型分布

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (\frac{x-a}{b-a})^k & a < x < b \\ 1 & c \geq x \geq b \\ (\frac{d-x}{d-c})^k & c < x < d \\ 0 & x \geq d \end{cases}$$

2.6 灰色关联综合评判法

(1) 基本原理

灰色理论应用最广泛的是关联度分析方法。关联度分析是分析系统中各元素之间关联程度或相似程度的方法，其基本思想是依据关联度的大小对评价对象进行比较。

对事物的综合评价，多数情况是研究多对象的排序问题，即在各个评价对象之间排出优选顺序。

(2) 基本步骤

灰色综合评判主要是根据以下模型： $R = E \times W$

式中： $R = [r_1, r_2, \dots, r_m]^T$ 为 m 个被评价对象的综合评判结果向量；

$W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ 为 n 个评价指标的权重分配向量，其中 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ ；

E 为各指标的评判矩阵：

$$E = \begin{bmatrix} \xi_1(1) & \xi_1(2) & \cdots & \xi_1(n) \\ \xi_2(1) & \xi_2(2) & \cdots & \xi_2(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_m(1) & \xi_m(2) & \cdots & \xi_m(n) \end{bmatrix}$$

$\xi_i(k)$ 为第 i 种方案的第 k 个指标与第 k 个最优指标的关联系数。

最后根据 R 的数值进行排序。

① 确定最优指标集 (F^*)

$$F^* = [j_1^*, j_2^*, \dots, j_n^*]$$

式中 $j_k^* (k=1, 2, \dots, n)$ 为第 k 个指标的最优值（若某一指标取大值为好，则取该指标在各方案中的最大值；若取小值为好，则取各个方案中的最小值），也可以是评估者公认的最优值。不过在定最优值时，既要考虑到先进性，又要考虑到可行性。最优指标选的过高，则不现实，不能实现，评价的结果也就不可能正确。

选取最优指标集后，可构造矩阵 D ；

$$D = \begin{bmatrix} j_1^* & j_2^* & \cdots & j_n^* \\ j_1^1 & j_2^1 & \cdots & j_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ j_1^m & j_2^m & \cdots & j_n^m \end{bmatrix}$$

式中： j_k^i 为第 i 个方案中第 k 个指标的原始数值。

② 指标值的规范化处理

由于评判指标间通常是有不同的量纲和数量级的，故不能直接进行比较，为了保证结果的可靠性，因此需要对原始指标值进行规范化处理。

设第 k 个指标的变化区间为 $[j_{k1}, j_{k2}]$ ， j_{k1} 为第 k 个指标在所有方案中的最小值， j_{k2} 为第 k 个指标在所有方案中的最大值，则可用下式将上式中原始数值转换成无量纲 $C_k^i \in (0,1)$ 。

$$C_k^i = \frac{j_k^i - j_{k1}}{j_{k2} - j_{k1}} \quad i=1, 2, \dots, m \quad k=1, 2, \dots, n$$

这样 $D \rightarrow C$ 矩阵

$$D = \begin{bmatrix} C_1^* & C_2^* & \dots & C_n^* \\ C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1^m & C_2^m & \dots & C_n^m \end{bmatrix}$$

③ 计算综合评价结果

根据灰色系统理论，将 $\{C^*\} = [C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*]$ 作为参考数列，将 $\{C\} = [C_1^i, C_2^i, \dots, C_n^i]$ 最为被比较的数列，则用关联分析法分别求得第 i 个方案与第 k 个最优指标的关联系数 $\xi_i(k)$ ，即：

$$\xi_i(k) = \frac{\min_i \min_k |C_k^* - C_k^i| + \rho \max_i \max_k |C_k^* - C_k^i|}{|C_k^* - C_k^i| + \rho \max_i \max_k |C_k^* - C_k^i|}$$

式中， $\rho \in (0,1)$ ，一般取 $\rho = 0.5$ 。

由 $\xi_i(k)$ 即得 E ，这样综合评价的结果为： $R = E \times W$ ，即

$$r_i = \sum_{k=1}^n W(k) \times \xi_i(k)$$

若关联度 r_i 最大，则说明 $\{C^i\}$ 与最优指标 $\{C^*\}$ 最接近，亦即第 i 个方案优于其他方案，据此，可以排出各方案的优劣次序。

(3) 应用及效果分析

基于灰色关联度的灰色综合评价法是利用各方案与最优方案之间关联度的大小对评价对象进行比较、排序。关联度分析方法的最大优点是它对数据没有太高的要求，即数据多与少都可以分析，它的数学方法是非统计方法，在系统数据

资料较少和条件不满足的情况下，更具有实用性。

张凤红，春兰等学者利用基于灰色关联度的灰色综合评价法对气田排水采气综合开发利用进行评价，克服了理想点法的排序不当这种不足，但是，其应用是有前提条件的，即被进行优劣排序的方案集的各方案必须是先经过技术效益评价和经济效益评价后的方案，只有在此基础上，灰色关联度线性加权法中以经济效益为重要目标的权重确定才能成立。因此,对于如何更全面合理和有效益地进行气田排水采气的技术效益和经济效益综合评价是值得进一步研究的课题。

(4)、算法步骤

第一步、开始；

第二步、读取原始数据（构造矩阵 D）及权重向量 W；

$$\text{构造矩阵 } D = \begin{bmatrix} j_1^* & j_2^* & \cdots & j_n^* \\ j_1^1 & j_2^1 & \cdots & j_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ j_1^m & j_2^m & \cdots & j_n^m \end{bmatrix}$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$$

第三步、指标值规范化处理；

$$D \rightarrow C \text{ 矩阵: } C_k^i = \frac{j_k^i - j_{k1}^i}{j_{k2}^i - j_{k1}^i} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

第四步、计算灰色关联系数；

$$\xi_i(k) = \frac{\min_i \min_k |C_k^* - C_k^i| + \rho \max_i \max_k |C_k^* - C_k^i|}{|C_k^* - C_k^i| + \rho \max_i \max_k |C_k^* - C_k^i|} \quad \rho \in (0, 1),$$

一般情况取 $\rho = 0.5$

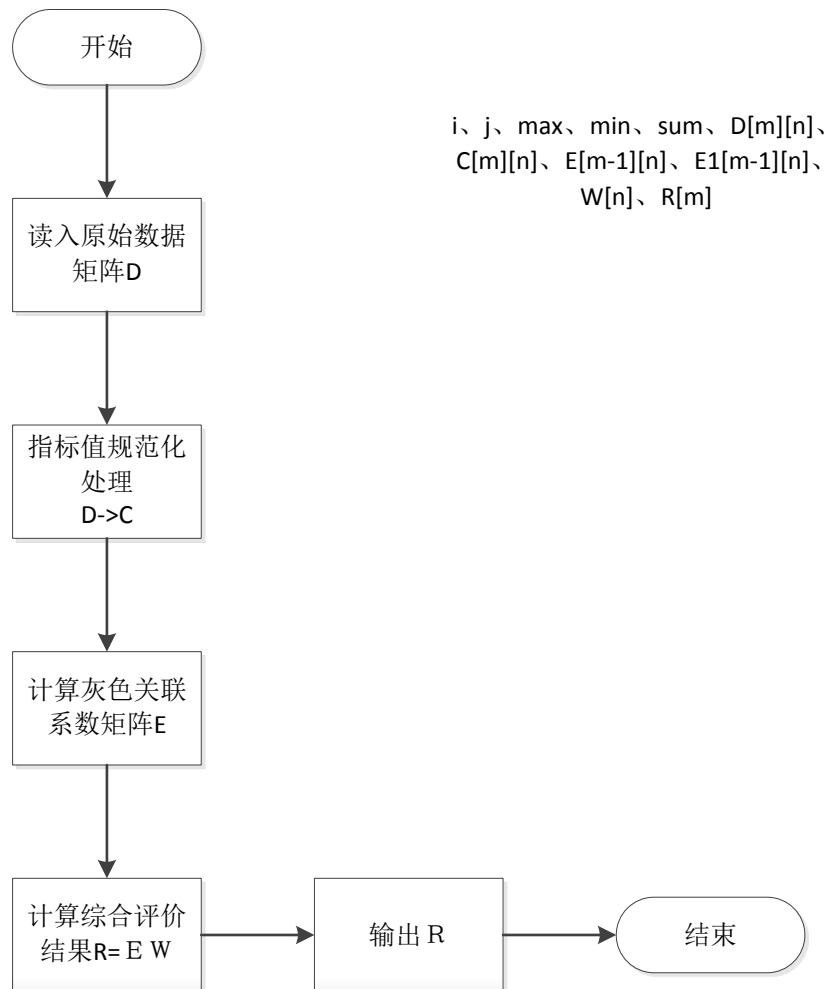
第五步、计算综合评价结果 $R = E \times W$ ；

$$r_i = \sum_{k=1}^n W(k) \times \xi_i(k)$$

第六步、输出综合评价结果 R；

第七步、结束。

(5)、流程图



2.7 灰色局势决策分析法的评价法

(1) 方法原理

灰色局势决策是指从事件、对策、效果三者统一的前提下，对明显含有灰元的系统进行决策。环境质量评价过程实际也是一个决策的过程，可以把评价的对象及系统视为灰色系统，用灰色局势决策方法进行环境质量评价。

(2) 评价步骤

下面是利用基于灰局势的灰色综合评价法对矿山地质环境质量的评价步骤：

① 确定事件、对策、局势、目标

事件集 a_i ：事件集为(评价一矿地质环境质量，评价二矿地质环境质量，评价三矿地质环境质量)。

定对策集 b_j ：对策即矿山地质环境质量分级， $b_j = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ ，分别代表地质环境质量属于好、较好、差、较差级别。

定局势 $S_{ji} = (a_i, b_j)$ ：(评价 i 矿地质环境质量，地质环境质量等级)。如 S_{11}

表示(评价一矿地质环境质量, 好); S_{12} 表示(评价一矿地质环境质量, 较好) 。

确定目标集: 目标集 = (指标 1, 指标 2, …指标 11) = (气田排水采气破坏与浪费, 土地压占与破坏, …空气污染) 。

② 求各个事件对不同决策的效果测度, 写出决策矩阵。

③ 计算多目标的局势综合效果测度, 写出综合决策矩阵。

④ 按决策准则进行决策

⑤ 根据综合效果测度值进行排序将各矿的综合效果测度值进行相加即可得到各矿的相对排序, 所得数值越大其地质环境质量越差。

(3) 应用及效果分析

基于灰局势的灰色综合评价法被较为常见地应用于矿山地质环境质量的评价, 如刘金涛, 冯文凯等学者在对矿山地质环境质量评价数学模型研究综述中介绍到了灰局势这种常用方法, 同时, 张旭光, 吴圣林等学者利用基于灰局势的灰色综合评价法对山西煤矿矿山地质环境进行了评价分析, 其模型原理简单、算法简捷, 具有强的使用性; 黄栋良, 万益宏也用灰局势方法对湖南常州市矿山地质环境进行评价。基于灰局势决策分析的灰色综合评价法省去了繁琐的权值计算, 大大减少了评价过程的复杂性, 但由于其不区分不同指标的重要性, 完全根据所给数值进行评价, 但对于内容复杂或不能只依靠定量数据进行评价的对象来说可能会使评价结果与实际情况有一定的偏离。

2.8 BP 神经网络综合评价法

(1) 方法原理及思想

人工神经网络是模仿生物神经网络功能的一种经验模型, 输入和输出之间的变换关系一般是非线性的。首先根据输入的信息尽力神经元, 通过学习规则或自组织等过程建立相应的非线性数学模型, 并不断进行修正, 使输出结果与实际值之间的差距不断缩小。人工神经网络通过样本的“学习和培训”, 可记忆客观事物在空间、时间方面比较复杂的关系。由于人工神经网络本身具有非线性特点, 且在应用中只需对神经网络进行专门问题的样本训练, 它能够把问题的特征反映

在神经元之间相互关系的权中，所以，把实际问题特征参数输入后，神经网络输出端就能给出解决问题的结果。

神经网络的特点是，神经网络将信息或知识分布储存在大量的神经元或整个系统中。它具有全息联想的特征，具有高速运算的能力，具有很强的适应能力，具有自学习、自组织的潜力。他能根据历史数据通过学习和训练能找出输入和输出之间的内在联系，从而能得出问题的解。另外，他有较强的容错能力，能够处理那些有噪声或不完全的数据。部分节点不参与运算，也不会对整个系统的性能造成太大的影响。

反向传播（Back Propagation, BP）神经网络是由 Rumelhart 等人于 1985 年提出的一种很有影响的神经元模型，它是一种多层次反馈性模型，使用的是由“导师”的学习算法。有广阔的应用前景。

(2) 模型介绍

人工神经网络是由大量的神经元节点构成的。设网络的输入节点数为 m ，输出节点数为 n ，网络是 $R^m \rightarrow R^n$ 的映射，对此有如下定理：令 θ 为有界单调递增连续函数， K 为 R^m 的有界闭子集， $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 K 上的实值连续函数，

则对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在整数 N 和实数 $C_i, \theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 和 $W_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, N)$ ，使

$$f'(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum C_i \Phi(\sum W_{ij} - \theta_j) (i, j = 1, 2, \dots, N) \text{ 满足}$$

$$\max |f'(x_1, x_2, \dots, x) - f'(x_1, x_2, \dots, x_n)| < \varepsilon$$

上述定理说明，对任意 ε ，存在一个 3 层网络，其隐含节点输出函数为 $\Phi(x)$ ，输入和输出节点函数为线性的，3 层网络总输入输出关系为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，使得

$$\max |f'(x_1, x_2, \dots, x) - f'(x_1, x_2, \dots, x_n)| < \varepsilon \quad (\text{其中, } x \in K)$$

多指标综合评价模型由数据预处理器和 BP 网络 2 部分组成数据预处理器将评价指标体系中各个指标的属性值，按一定规则通过相应的效用函数进行归一化处理，BP 网络的结构包括网络层数、输入输出节点和隐节点的个数、连接方式。根据映射定理可构造一个包括输入层、隐含层和输出层的 BP 网络，其中输入层节点数 m 由数据预处理器产生的向量维数决定，即评价指标的个数；输出层节点数 n 为 1，即评价结果；隐含层节点数 $L = (m \times n)^{1/2}$ 。隐含层的输出函数为

Sigmoid 变换函数,输入和输出层节点函数为线性函数。Sigmoid 变换函数如下。

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

(3) BP 人工神经网络步骤

基于人工神经网络的综合评价方法的步骤可概括如下:

1、前期分析

1) 确定评价指标集, 指标个数为 BP 网络中输入节点的个数,

2) 确定网络的层数, 一般采用具有一个输入层, 一个隐含层, 一个输出层的三层网络模型结构。

3) 明确评价结果, 输出层的节点数为 1

4) 对指标值进行标准化处理

参数说明: n 输入层神经元数目, m 隐含层神经元数目, q 输出层神经元数目, M 训练样本模式对的数目。

2、具体学习算法步骤

1) 用随机数 (一般为 $(-1, +1)$ 之间的数) 初始化网络节点的权值和网络阈值。初始化: 给各连接权 $\{w_{ij}\}, \{V_{ii}\}$ 及阈值 $\{\theta_i\}, \{r_t\}$ 赋予 $(-1, +1)$ 间的随机值。

2) 随机在样本集中选取一模式对提供给网络, 模式对如下。

$$X_k = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)), Y_k = (y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)); k = 1, 2, \dots, M$$

3) 计算 (输入层到隐含层)

$$y_i = f\left(\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j - \theta_i\right), i = 1, 2, \dots, m$$

式中: x_j 表示第 k 个模式第 i 个结点值。

4) 计算 (隐含层到输出层)

$$O_t = f\left(\sum_{i=1}^m V_{ti}Y_i - r_t\right)$$

5) 计算 (此步开始进行反向传播, 修正权值)

$$h_t(k) = (y_t(k) - O_t(k)) \cdot O_t(k) \cdot (1 - O_t(k)), t = 1, 2, \dots, q$$

式中: $y_t(k)$ 表示 k 个模式第 t 个期望输出节点值。

6) 计算 $V_{ti}(k) = V_{ti}(k-1) + \Delta V_{ti}(k)$, 具体如下所示:

$$V_{ii}(k) = V_{ii}(k-1) + \alpha_1 \cdot h_i(k) \cdot y_i; i=1,2,\dots,m; t=1,2,\dots,q; 0 < \alpha_1 < 1$$

阈值 r_i 可根据具体问题设置, 也可用下式进行动态设置调整 (可不考虑)

$$r_i(k) = r_i(k-1) + \alpha_2 \cdot h_i(k); t=1,2,\dots,q; 0 < \alpha_2 < 1$$

7) 计算

$$e_i(k) = \left(\sum_{i=1}^q h_i(k) \cdot V_{ii} \right) \cdot y_i \cdot (1 - y_i)$$

8) 计算 $w_{ij}(k) = w_{ij}(k-1) + \Delta w_{ij}(k)$ 具体如下:

$$w_{ij}(k) = w_{ij}(k-1) + \beta_1 \cdot e_i(k) \cdot x_j(k); i=1,2,\dots,q; j=1,2,\dots,n; 0 < \beta_1 < 1$$

阈值 r_i 可根据具体问题设置, 也可用下式进行动态设置调整 (可不考虑)

$$\theta_i(k) = \theta_i(k-1) + \beta_2 \cdot e_i(k); t=1,2,\dots,q; 0 < \beta_2 < 1$$

9) 计算全局误差。

$$E = \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} \sum_t^q (y_{kt} - O_{kt})^2$$

10) 随机在样本集中选取下一模式对提供给网络, 返回到 3), 直到 M 个样本训练完毕。

11) 当误差小于给定的拟合误差, 网络训练结束; 否则转向 3), 继续训练。如果随着迭代次数的增加, 网络全局误差函数 E 不减少或是减少得非常慢, 意味着 E 难以收敛, 此时应适当采用过滤样本 (剔除单误差较大的样本) 或调节参数的方法 ($\theta_i, r_i, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$), 促使 E 收敛。

(4) 应用及效果分析

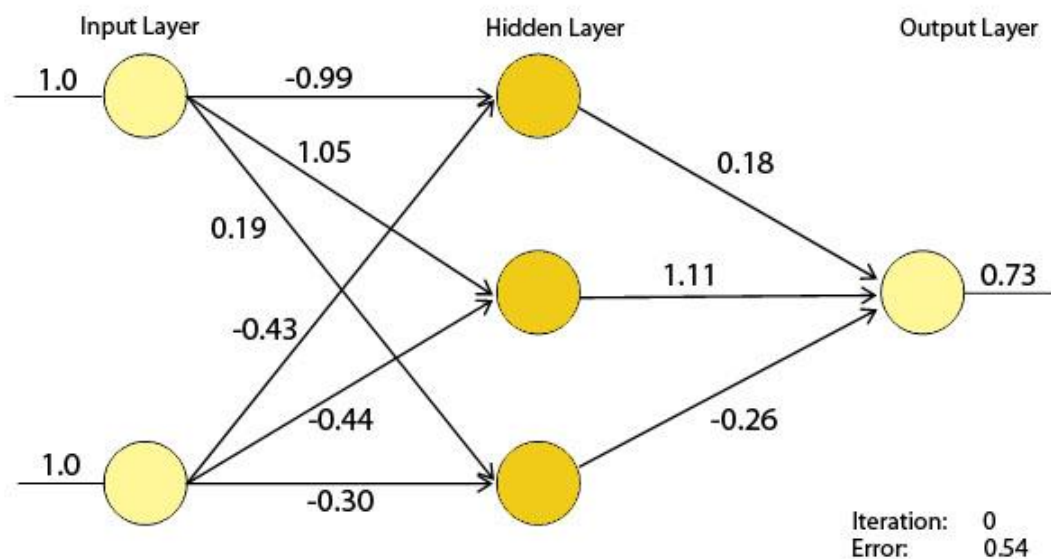
侯志东等^[8]提出的基于 Hausdauff 度量的模糊 Topsis 方法, 首先通过模糊极大集和模糊极小集来确定模糊多属性决策问题的理想解与负理想解, 再由 Hausdauff 度量获得不同备选方案到理想解与负理想解的距离及其贴近度, 根据贴近度指标对方案进行优劣排序。该方法思路清晰, 计算简单, 操作比较容易。

该法是基于归一化后的原始数据矩阵, 找出有限方案中的最优方案和最劣方案, 然后得某一方案与最优方案和最劣方案间的距离 (用差的平方和的平方根值表示), 从而得出该方案与最优方案的接近程度, 并以此作为评价各方案优劣的

依据。

指标进行同趋势的变换的方法：根据专业知识，使各指标转化为“高优”，转化方法有倒数法（多用于绝对数指标）和差值法（多用于相对数指标）。但是该法的权重受叠代法的影响，同时由于其对中性指标的转化尚无确定的方法，致使综合评价的最终结果不是很准确。

如下是一个 BP 神经网络模型。BP 神经网络模型可以借助 Matlab 神经网络工具箱或是 SPSS Clementine 数据挖掘软件进行求解。



2.9 灰色-逼近理想解法（TOPSIS）

（1）基本原理

TOPSIS 法又称为逼近理想点排序方法（The Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution），是经典多属性决策最为常用的方法之一。这种决策方法的基本思想结合了模糊正负理想点的思路：决策者总是希望方案距离正理想点越近越好，距离负理想点越远越好。

理想点解 X^* （理想方案）：是一个方案集 X 中并不存在的虚拟的最佳方案，它的每个特征值都是决策方案中该特征指标的最优值。

负理想解 X^0 （差理想方案）：是一个方案集 X 中并不存在的虚拟的最差方案，它的每个特征值都是决策方案中该特征指标的最差值。

在拟采用的备选方案集 X 中，首先通过指标属性（效益型、成本型等）确

定理想方案和负理想方案，运用灰色关联分析法确定方案集 X 中的各个备选方案 X_i 与理想方案 X^* 和负理想方案 X^0 的关联度，通过相对贴近度大小进行排序比较，相对贴近度最大的方案是方案集 X 中的最佳方案；并可以据此排定方案集 X 中各备选方案的优先序。

(2) 算法步骤

步骤一：用向量规范化的方法求得规范决策矩阵。为了消除量纲的影响，我们采用式 (4-9) 和 (4-10) 对指标值原始数据进行规范化处理得到无量纲数据。

对于效益型指标，令

$$C_{ij} = \frac{y_{ij} - y_j^{\min}}{y_j^{\max} - y_j^{\min}} \quad (4-9)$$

对于成本型指标，令

$$C_{ij} = \frac{y_j^{\max} - y_{ij}}{y_j^{\max} - y_j^{\min}} \quad (4-10)$$

其中， $y_j^{\max} = \max\{y_{ij} | i = 1, 2, \dots, m\}$ ， $y_j^{\min} = \min\{y_{ij} | i = 1, 2, \dots, m\}$ ， y_{ij} 表示第 i 个方案的第 j 个指标值。

步骤二、确定理想方案 X^* 和负理想方案 X^0 第 j 个属性值为 x_j^*, x_j^0

由公式进行规范化后的决策矩阵，经过指标权重的加权得出的加权决策矩阵中的各指标属性值，均为“正向”值，即指标值越大越优，越小越差，因此，由此得出理想方案及负理想方案。

步骤三、计算各个方案与理想方案和负理想方案的灰关联度。

灰色系统分析主要是依据有具体灰色系统的行为特征数据，充分利用数量不多的数据和信息寻求相关因素自身与各因素之间的数学关系，即建立相应的数学模型。

根据灰色系统理论，关联系数定义为：

$$\eta_i(k) = \frac{\min_i \min_k |x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|}{|x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|} \quad (4-11)$$

则关联度就是各类关联系数的平均值，即：

$$r_i = r(x_0, x_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_i \quad (i=1,2,3\dots) \quad (4-12)$$

即用灰关联度 r_i 可以表示因素 x_i 对行为因子 x_0 的关联（影响）程度。

在公式 (4-11) 中, $|x_0(k) - x_i(k)|$ 为 k 点 x_0 与 x_i 的绝对差;
 $\min_i \min_k |x_0(k) - x_i(k)|$ 为两极最小差, 其中 $\min_k |x_0(k) - x_i(k)|$ 是第一级最小差, 表示在 x_i 序列上找各点与 x_0 的最小差, $\min_i \min_k |x_0(k) - x_i(k)|$ 为第二级最小差, 表示在各序列找出的最小基础上寻求所有序列中的最小值;
 $\max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|$ 是两极最大差, 其含义与最小差相似; 其中 $\rho \in [0, 1]$, 称为分辨率系数, 显然, 当 ρ 越大时, 分辨率越大, 当 ρ 越小时, 分辨率越小, 一般情况取 $\rho = 0.5$ 。

由公式 (4-11)、(4-12) 可得备选方案 X_i 与理想方案 X^* 的关联度为 r_i^* 、
 备选方案 X_i 到负理想方案 X_0 的关联度为 r_i^0 。

步骤四、计算各方案与理想方案的相对贴近度 μ_i (即综合评价值):

$$\mu_i = r_i^* / (r_i^* + r_i^0) \quad (4-13)$$

由公式 (4-13) 计算可得, 各方案与理想方案的相对贴近度 μ_i , 即

$$\mu_i = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k) \quad (4-14)$$

然后, 根据 (4-14) 式得出的相对贴近度矩阵结果, 按 μ_i 由大到小进行排序, 根据最大原则, 相对贴近度越大, 表示备选方案与理想方案关联越大, 说明方案越好, 最终选择出最优方案。

2.10 数据包络分析法(DEA)

(1) DEA 方法概述

数据包络分析是以“相对效率”概念为基础, 根据多投入和多产出对同类型单位进行效益评价的一种系统分析方法。常用于处理多目标决策问题。它应用数学中的分形规划模型来计算各决策单元之间的相对效率, 从而对评价对象做出综合评价。

通常对一组给定的目标决策单元, 确定输入、输出指标, 然后求出特定决策单元的有效性系数, 以评价出各决策单元的优劣。通过对输入输出指标的综合分

析, DEA 模型可以得出各决策单元 DMU 效率指标。据此对各决策单元进行排序, 以确定比较有效的决策单元, 并同事给出其它决策单元非有效的原因。不仅可以同一类型有效决策单元进行排序, 而且还可以分析那些非有效决策单元的原因, 进而为决策者提供有用的信息

这是一个多输入-多输出的有效性综合评价问题。多输入/多输出正是 DEA 重要而引入注意的地方, 这是它自身突出的优点之一。可以说, 在处理多输入-多输出的有效性评价方面, DEA 具有绝对优势。DEA 特别适用于具有多输入多输出的复杂系统。

DEA 最突出的优点是无须任何权重假设, 每一输入输出的权重不是根据评价者的主观认定, 而是由决策单元的实际数据求得的最优权重。因此, DEA 方法排除了很多主观因素, 具有很强的客观性。

DEA 是以相对效率概念为基础, 以凸分析和线性规划为工具的一种评价方法。这种方法结构简单, 使用比较方便。自从 1978 年提出第一个 DEA 模型-C²R 模型并用于评价部门间的相对有效性以来, DEA 方法不断得到完善并在实际中被广泛应用, 诸如被应用到技术进步、技术创新、资源配置、金融投资等各个领域, 特别是在对非单纯盈利的公共服务部门, 如学校、医院、某些文化设施等的评价方面被认为是一个有效的方法。现在, 有关的理论研究不断深入, 应用领域日益广泛。应用 DEA 方法评价部门的相对有效性的优势地位, 是其他方法所不能取代的。或者说, 它对社会经济系统多投入和多产出相对有效性评价, 是独具优势的。

(2) C²R 模型

数据包络分析法是以相对效率概念为基础, 根据多指标投入和多指标产出, 对相同类型的单位进行相对有效性的一种效益评价方法。DEA 通过数学规划模型对决策单元间的相对效率进行比较。排水采气技术属于多投入和多产出的系统, 其生产有效性可以运用 DEA 进行评价。在 DEA 模型中, 使用较多的是同类型的 DMU, 它们具有三个特征: 一是具有相同的目标和任务; 二是具有相同的外部环境; 三是具有相同的输入和输出指标。

设有 n 个决策单元 DMU_j ($j=1, 2, \dots, n$), 每个决策单元都有 m 种投入和 s 种产出, 分别用不同的经济指标表示, 这样, 构成了 n 个决策单元的多指标投入和多指标产出的评价系统, 如图 4-3 所示。

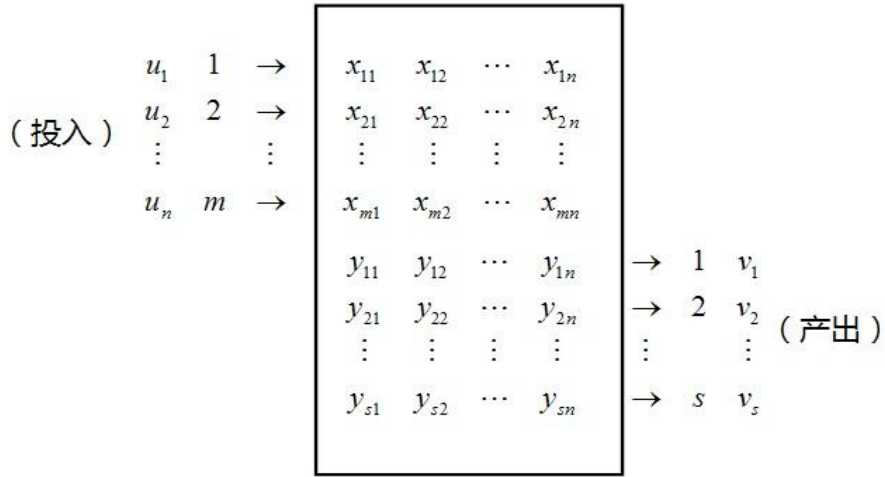


图 4-3 DEM 决策评价系统

$x_{ij} = DMU_j$ 对第 i 种输入的投入量, $x_{ij} > 0$; $y_{ij} = DMU_j$ 对第 r 种输出的产出量, $y_{ij} > 0$; u_i 是对第 i 种输入的一种度量(或权重); v_r 是对第 r 种输出的一种度量(或权重); 这里 X_i 和 Y_j ($j=1,2,\dots,n$) 分别为 DMU_j 的输入向量和输出向量均为已知数据; 它可以根据历史资料或统计的数据得到; v 和 u 分别为 m 种输入和 s 种输出对应的权向量为变量。

$$h_j = \frac{\sum_{r=1}^s v_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m u_i x_{ij}}$$

设第 j_0 个评价单元的投入向量和产出向量分别为:

$$x_0 = (x_{1j_0}, x_{2j_0}, \dots, x_{mj_0})$$

$$y_0 = (y_{1j_0}, y_{2j_0}, \dots, y_{nj_0})$$

h_0 为第 j 个决策单元的效率指标值, 由此, 我们可以适当地选取 u, v , 使 $h_j \leq 1 (j=1,2,\dots,n)^{[14]}$, 在这个约束条件下, 选择一组最优权系数 u 和 v , 使得 h_0 达到最大值, 构造最优化模型:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max h_0 = \frac{\sum_{r=1}^s v_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m u_i x_{ij_0}} \\ s.t. \frac{\sum_{r=1}^s v_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m u_i x_{ij}} \leq 1 (j=1, 2, \dots, n) \\ u_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, m) \\ v_r \geq 0 (r=1, 2, \dots, s) \end{array} \right.$$

$$T = \left\{ (x, y) \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \lambda_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n \right\}$$

$$(x_j, y_j) \in T, (j=1, 2, \dots, n)$$

此模型称为 C^2R 模型，其中， T 代表了生产可能集，它的含义是：假设有 n 个决策单元，这 n 个决策单元都具有可比性，每个决策单元都有一组投入指标值

和产出指标值表示，评价单元 DMU_j 的一组投入指标值 x_j 和产出指标值 y_j 用向量表示为：

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T$$

$$y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})^T$$

集 $T = \{ (x, y) \mid \text{产出 } y \text{ 能用输入 } x \text{ 生产出来} \}$ 为所有可能的生产活动就构成了生产可能集。

用 C^2R 模型评价第 j_0 个评价单元相对有效性，是相对于其他评价单元而言的，故称为评价相对有效性的 DEA 模型。

在用 C^2R 模型评价决策单元的相对效率时，可能会出现多个决策单元同时相对有效，在此情况下， C^2R 模型对这些决策单元无法进一步地做出评价与比较。郭均鹏等作者针对传统 DEA 模型不能对决策单元做进一步评价这一缺点，通过重新定义生产可能集，提出了一种改进的 DEA，实现了对所有决策单元效率的充分评价与排序，具体思路如下：

在 C^2R 模型的约束条件中，不包括被评价决策单元 DMU_{j_0} ，即在第 j 个决策单元时，将其与样本中其他所有决策单元的线性组合作对比，但不包含 DMU_{j_0} 本

身，结果是效率值可能大于 1，从而可以对原来同时相对有效的决策单元做出比较或排序。

(3) C2GS2 模型

如果在 C²R 模型的约束条件中，加入凸性假设，即增加约束 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ ，就成了 C²GS² 模型。其对偶规划可以表示为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left[\theta - \varepsilon (\mathbf{e}^T \mathbf{S}^- + \mathbf{e}^T \mathbf{S}^+) \right] \\ \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j + \mathbf{S}^- = \theta X_{j_0} \\ \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j - \mathbf{S}^+ = Y_{j_0} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ \theta \geq 0, \mathbf{S}^- \geq 0, \mathbf{S}^+ \geq 0 \end{array} \right.$$

与 C²R 模型类似，设对偶规划 (1) 的最优解为 $\lambda^0, \mathbf{S}^{-0}, \mathbf{S}^{+0}$ 和 θ^0

(1) $\theta^0 < 1$ ，则 DMU_{j_0} 不为 DEA 有效（不为纯技术有效），即该决策单元投入组合不当，可以作全面的等比压缩。

(2) $\theta^0 = 1$ ，且 $\mathbf{e}^T \mathbf{S}^{-0} + \mathbf{e}^T \mathbf{S}^{+0} > 0$ ，则 DMU_{j_0} 仅为弱 DEA 有效，意味着在这 n 个决策单元组成的系统中，有部分超量投入或亏量产出。

(3) $\theta^0 = 1$ ，且 $\mathbf{e}^T \mathbf{S}^{-0} + \mathbf{e}^T \mathbf{S}^{+0} = 0$ ，则 DMU_{j_0} 为 DEA 有效，表明该决策单元技术效率最佳。

C²R 模型用于评价 DMU 的规模效率与技术效率的总体有效性，而 C²GS² 模型仅用于评价 DMU 的技术有效性，两者结合起来使用，便可对决策单元进行综合分析。

记 $\alpha_{ij} = \frac{s_{ij}^-}{x_{ij}}$ ，表示 DMU_j 各分量的 s_{ij}^- 与对应指标分量 x_{ij} 的比值，称为投入冗余率，表示该分量指标可节省的比例。

记 $\beta_{ij} = \frac{s_{ij}^+}{y_{ij}}$ ，表示 DMU_j 各分量的 s_{ij}^+ 与对应指标分量 y_{ij} 的比值，称为产出不足率，表示该分量指标可增加的比例。

(4) 改进的 C2R 模型

在上述 C^2GS^2 模型方程中去掉一个约束后 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, 得出改进的 C^2R 模型为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left[\theta - \varepsilon (\hat{e}^T S^- + e^T S^+) \right] \\ \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j + S^- = \theta X_{j0} \\ \sum_{j=1, j \neq j0}^n Y_j \lambda_j + S^+ = Y_{j0} \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ \theta \geq 0, S^- \geq 0, S^+ \geq 0 \end{array} \right.$$

θ 为决策单元 DMU_j 的有效值

λ_j 为相对 DMU_j 重新构造一个有效的决策单元组合中第 j 个决策单元的组合比例

ε 为非阿基米德无穷小量, 是一个大于 0 而小于任何正数的数, 通常取为 10^{-6} ;

$\hat{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \subset E^m, e = (1, 1, \dots, 1)^T \subset E^s$;

S^- 为输入松弛向量, S^+ 为输出剩余向量。

(5) DEA 模型的局限性

在 DEA 的应用过程中, 最关键的步骤是输入/输出指标体系的确定和各决策单元在相应指标体系下的输入输出数据的搜集与获得。目前已有的 DEA 模型由于所涉及的指标体系是确定的, 所涉及的投入产出数据是确定已知的, 所以目前的模型都是确定型的。然而许多领域的评价和决策问题都存在着大量的不确定性, 对于这些领域中的决策问题, 确定型的 DEA 模型就存在缺陷和不足。

2.11 密切值法

(1) 基本原理

密切值法作为多目标决策的一种优选方法, 其基本思想是: 先找出方案集(决策点集)的最优点和最劣点, 然后再找出最接近最优点并且远离最劣点的决策点, 则此决策点就是所寻求的最优方案或满意方案。此方法与灰关联理想点逼近法类似, 在最后与最优最劣点的比较上有所区别。

(2) 基本步骤

步骤一: 建立指标矩阵

首先确定决策目标, 拟定决策方案, 假设方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 在指标 S_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 下的取值为 a_{ij} , 则可得到指标矩阵如下: $A = (a_{ij})_{m \times n}$

将指标矩阵转化为规范化指标矩阵, 指标矩阵中的各项指标, 有的指标为“正

向指标”，数值越大越好；有的指标为“逆向指标”，数值越小越好，且量纲各不相同。为了便于分析比较，通常把“逆向指标”转化为“正向指标”，将有量纲数值转化为无量纲数值，具体计算公式如下：

$$b_{ij} = \begin{cases} a_j & \text{当 } S_j \text{ 为正向指标时;} \\ -a_j & \text{当 } S_j \text{ 为逆向指标指;} \end{cases}$$

$$r_{ij} = \frac{b_{ij}}{\left[\sum_{i=1}^n b_{ij}^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

式中： b_{ij} 为正向指标数值； r_{ij} 为无量纲指标数值。通过上式计算可得到规范化指标矩 R ： $R = (r_{ij})_{m \times n}$

如果决策者对各目标的重要性给出权 w_j ($j=1, 2, \dots, n$), 且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ ，则可以得出权规范化矩阵如下： $R' = RW$ 。

其中权重矩阵如下所示，如果没有给出权重则无需考虑加权矩阵。

$$\begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_n \end{bmatrix}$$

步骤二：最优点和最劣点的确定，方案集（决策点集）的最优点 A^+ 和最劣点 A^- ，根据公式：

$$r_j^+ = \max_{1 \leq i \leq m} (r_{ij}) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$r_j^- = \min_{1 \leq i \leq m} (r_{ij}) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

式中： r_j^+ ， r_j^- 分别表示第 j 项规范化指标的最优值和最劣值。

最优点为：

$$A^+ = r_1^+ + r_2^+ + \dots + r_n^+$$

最劣点为：

$$A^- = r_1^- + r_2^- + \dots + r_n^-$$

选取最佳方案就是在比较方案集（决策点集）中寻找尽可能接近 A^+ 点，而远离 A^- 点的决策点。

步骤三：计算各方案的密切值并排序

由上述公式分别计算出各种比较方案距 A^+ 和 A^- 的欧式距离 d_i^+ 和 d_i^- 。计算公式如下：

$$\begin{cases} d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (r_{ij} - r_j^+)^2} \\ d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (r_{ij} - r_j^-)^2} \end{cases} \quad (i=1, 2, 3, \dots, m)$$

并根据公式求出 m 个最优点距的最大值 d^+ ，和 m 个最劣点距的最小值 d^- ，计算公式如下：

$$d^+ = \max_{1 \leq i \leq m} \{ d_i^+ \}$$

$$d^- = \min_{1 \leq i \leq m} \{ d_i^- \}$$

最后密切值 C_i 可由下式计算： $C_i = (d_i^+ / d^+) - (d_i^- / d^-)$

当 $C_i = 0$ 时，即 $d_i^+ = d^+$ ， $d_i^- = d^-$ ，此时 A_i 点最接近最优点。

当 $C_i > 0$ 时， A_i 点此时偏离最优点， C_i 越大表明 A_i 点此时偏离最优点越远。

根据密切值原理：密切值越小，对应的备选方案越好，反之，备选方案越差，从而可以对备选方案进行排序，最终确定最佳方案。

2.12 模糊积分综合评价法

根据各措施相对于理想方案的满意度以及由各指标重要程度求得的模糊分布函数，求方案各指标满意度与模糊分布函数的模糊积分。模糊积分值越大，方案越优。

模糊积分法，是一种模糊综合决策(实质为多目标决策)的方法。它根据方案模糊积分值的大小，对方案的优劣进行排序。

应用模糊积分进行多因素评价，模糊积分的计算公式如下：

$$u = \int h(u_j) g_j = \bigvee_{i=1}^n [h(u_i) \wedge H(U_i)]$$

其中 $H = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ ，式中模糊测度 g_i 表示对因素 u_i 的满意度，且满足

$h(u_1) \geq h(u_2) \geq h(u_3) \cdots \geq h(u_n)$, u 表示对全部因素整体的综合评价。

模糊积分的计算步骤如下：

第一步, 将隶属函数值即对因素 u_i 的满意度 $h(u_i)$ 按大小排列；

第二步, 计算模糊分布函数: $H(u_i) = g_i + H(u_{i-1}) + \lambda g_i H(u_{i-1}) \quad H(u_1) = g_1$

第三步, 求 $h(u_i) \wedge H(u_i)$ ($i=1, 2, \cdots, n$) 的最大值。

上述的 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 即为指标集, 模糊测度 g_i , 即为各指标的权重 w_j 。

要解决气田排水采气措施的决策问题, 需进行以下步骤:

首先, 计算每一方案指标 u_j 的满意度;

由决策 A 寻找最优方案 $A^* = \{a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*\}$ 。

其中: 当指标值越大越好时: $a_j^* = \max_i a_{ij}$; 当指标越小越好时: $a_j^* = \min_i a_{ij}$ 。

则第 i 个方案 A_i 的第 j 个指标相对于理想方案的满意程度为:

$$h_i(u_j) = 1 - \frac{|a_{ij} - a_j^*|}{\max_i \{a_{ij}\} - \min_i \{a_{ij}\}}$$

$$(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$$

其次, 将第 i 个方案 A_i 各个指标的满意程度按大小排列;

$$h_i(u_1) \geq h_i(u_2) \geq h_i(u_3) \cdots \geq h_i(u_n)$$

再次, 求第 i 个方案 A_i 的指标 u_j 的模糊分布函数 $H_i(u_j)$;

由公式

$$H_i(u_j) = g_j + H_i(u_{j-1}) + \lambda g_j H_i(u_{j-1}) \quad (H(u_1) = g_1)$$

$$\text{令: } \lambda = 0, H_i(u_j) = g_j + H_i(u_{j-1})$$

又有 $g_j = \omega_j$ 则:

$$H_i(u_j) = \omega_j + H_i(u_{j-1})$$

$$(H_i(u_1) = \omega_1)$$

第四步, 求 方案 A_i 的模糊积分;

$$u = \int h(u_j)g_j = \bigvee_{i=1}^n [h(u_i) \wedge H(U_i)]$$

第五步，根据各方案从大到小对方案排序，模糊积分值越大，方案越优。

模糊积分综合评价法，通过建立恰当的隶属函数，把待优选的若干方案在每一个因素下的优劣一定程度上定量地描述出来，但在进行实际综合评判时，隶属函数的建立往往十分困难，并且不可避免的会融入较强的主观色彩。

2.13 蒙特卡洛模拟分析

(1) 基本原理

蒙特卡洛模拟 (Monte Carlo Simulation)，也可称为随机模拟 (Random Simulation)、统计模拟 (Statistical simulation)，它是一种与一般数值方法有着本质区别的计算方法，它利用随机数进行统计试验，以求得待解决问题的数值解的统计特征，其本质就是从概率分布中重复抽样以建立输出变量的分布。由于借助计算机高效、便捷的计算功能，蒙特卡洛模拟在实践中较为普遍应用，国际大石油公司普遍采用蒙特卡洛法对油气项目经济评价进行风险分析。如埃克森美孚石油公司，采取经济评价与风险分析相结合，对每个项目从勘探到开发的每个决策进行经济风险分析，对上层提供全面的分析结果，以便上层作出最有把握的决策。

(2) 基本步骤

1. 通过敏感性分析，确定风险因子；
2. 确定风险随机变量的概率分布；
3. 确定模拟次数；
4. 通过随机数表或计算机求出随机变量的随机数，并作为以后指标计算的输入变量；
5. 选取经济评价指标，如净现值、内部收益率等；
6. 根据基础数据和产生的随机变量输入变量值计算评价指标值；
7. 整理模拟结果所得评价指标的期望值、方差、标准差和它的概率分布及累计概率，绘制累计概率图，计算项目可行或不可行的概率。

在可靠性分析和设计中，用蒙特卡洛模拟法可以确定复杂随机变量的概率分布和数字特征，可以通过随机模拟估算系统和零件的可靠度；也可以模拟随机过程、寻求系统最优参数等，一般蒙特卡洛模拟求解可以通过 Matlab 软件编程语

言来实现求解

(3) 优势

1. 模拟的方法能更准确地反映不确定性因素(风险因素)的影响,无需将不确定性问题转化为确定性问题,而是直接从不确定性问题的出发,通过建立模型或观察实验直接模拟原问题的过程,从而得到原问题的答案。

2. 蒙特卡洛模拟法可预测项目财务评价指标概率等统计信息,改变了常规方法只能求得经济评价指标单一估值的片面性,从而获得评价指标更为详细、全面的统计信息,更符合项目的实际情况,更具有科学性。

2.14 层次模糊综合评价法

(1)、确定因素集与评判集

设有 n 个待决策的创新方案组成的对象集: $B = \{B_1, B_2, B_3 \dots, B_n\}$, 每个决策优化对象有 m 个评价指标组成的因素集: $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 诸因素的 m 种评价所构成的评价集: $V = \{v_1, v_2 \dots, v_m\}$ 。

(2)、权重系数的确定

由于对 U 中各因素有不同的侧重,因此需要对每个因素赋予不同的权重。权重集 W 中权重分量具体如何分配可以采用 Saaty 等人提出的层次分析方法计算得出特征向量作为权向量(此步骤方法如上述层次分析法),也可采用一般的专家意见法对各级子因素的权重进行分配。若根据后者,则对几个因素进行权重分配时,根据实际需要,确定当前评估权重,最终确定综合评判依赖于各因素的权重集形式为 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in F(V)$, 且 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, 其中 w_i 表示第 i 种因素的权重,

最后从备选方案中选择模糊综合评判相对较高的方案。

(3)、模型的建立及其算法

在对象集 B 中,可以建立对象集 B 中的相对优决策作为相对优比较的标准,以 $r_{ij} = f(u_i, v_j)$ 表示因素 u_i 到评判 v_j 的模糊映射,于是得到模糊评价矩阵为

$$R = (r_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

称 (U, V, R) 为模糊综合评价模型。利用隶属度概念一般情况下它具有两种类型:

1) “越大越优”型,其隶属度计算式为:

$$\varphi_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{\max}} \quad (1)$$

(1) 式中 r_{\max} 为 r_{ij} 中的最大值。

2) “越小越优”型，其隶属度计算式为：

$$\varphi_{ij} = \frac{r_{\min}}{r_{ij}} \quad (2)$$

(2) 式中 r_{\min} 为 r_{ij} 中的最小值。于是得到指标隶属度矩阵为

$$\varphi = (\varphi_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m1} & \varphi_{m2} & \cdots & \varphi_{mn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

上述提到的最优决策的相对性，可由矩阵(3)建立标准优等方案的模糊集，作为优选比较的相对标准，根据最大隶属度原理，可按下式建立优等方案 G 的模糊集：

$$G = (g_1, g_2, \dots, g_m)^T = (r_{11} \vee r_{12} \vee \cdots \vee r_{1n}, r_{21} \vee r_{22} \vee \cdots \vee r_{2n}, \dots, r_{m1} \vee r_{m2} \vee \cdots \vee r_{mn})^T \quad (4)$$

$$S = (s_1, s_2, \dots, s_m)^T = (r_{11} \wedge r_{12} \wedge \cdots \wedge r_{1n}, r_{21} \wedge r_{22} \wedge \cdots \wedge r_{2n}, \dots, r_{m1} \wedge r_{m2} \wedge \cdots \wedge r_{mn})^T \quad (5)$$

式中 \vee 为取大运算， \wedge 为取小运算。通过最小二乘法准则构造目标函数，并且令其导数等于零，求得系统的模糊优化理论模型为：

$$Y_j = \frac{1}{1 + \left[\frac{\sum_{i=1}^m (w_i \times |r_{ij} - g_i|)^p}{\sum_{i=1}^m (w_i \times |r_{ij} - s_i|)^p} \right]^{\frac{2}{p}}}, j=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

式中 w_i 为评价指标的权重； p 为距离系数，若当 $p=1$ 时，为海明距离；当 $p=2$ 时，为欧氏距离。两种距离计算所得的结论通常是一致的。根据模糊优化理论模型⑤计算出 n 个备选对象的隶属度，根据最大隶属度原理，把计算得到的隶属度由大到小排序，即得到对应备选方案 $B = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ 的综合优劣排序。隶属度最大者对应的备选方案即为综合评价相对较高的决策方案。以上的讨论是取优方案 B 作为相对标准，在具体的运用过程中也可根据实际需要选取最劣方案作为相对标准，隶属度最小者对应的备选方案即为综合评价相对较高的方案。

2.15 因子分析法 (FA)

(1)、因子分析概述

因子分析(factor analysis)是一种数据简化的技术。它通过研究众多变量之间的内部依赖关系,探求观测数据中的基本结构,并用少数几个假想变量来表示其基本的数据结构。这几个假想变量能够反映原来众多变量的主要信息。原始的变量是可观测的显在变量,而假想变量是不可观测的潜在变量,称为因子。

因子分析特征: 1) 因子分析与回归分析不同,因子分析中的因子是一个比较抽象的概念,而回归因子有非常明确的实际意义; 2) 主成分分析与因子分析也有不同,主成分分析仅仅是变量变换,而因子分析需要构造因子模型。主成分分析利用原始变量的线性组合表示新的综合变量,即主成分; 3) 因子分析: 潜在的假想变量和随机影响变量的线性组合表示原始变量。

(2)、因子分析模型

设 $X_i(i=1,2,\dots,p)$ 为变量, 如果表示为

$$X_i = \mu_i + a_{i1}F_1 + \dots + a_{im}F_m + \varepsilon_i$$

$$\text{or} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{bmatrix}$$

称为 F_1, F_2, \dots, F_m 公共因子, 是不可观测的变量, 他们的系数称为因子载荷。

是特殊因子, ε_i 是不能被前 m 个公共因子包含的部分。并且满足:

$$\text{cov}(F, \varepsilon) = 0$$

即 F, ε 不相关并且 F_1, F_2, \dots, F_m 互不相关, 方差为 1, 而 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ 。

(3)、因子载荷阵估计方法

要建立实际问题的因子模型, 关键是要根据样本数据矩阵估计因子载荷矩阵 A , 对 A 的估计方法很多, 主要有主成分法、主因子法及最大似然估计法。这里采用较为普遍的主成分方法。

设样本的协差阵的特征值和对应的标准正交化特征向量分别为:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0 \quad e_1, e_2, \dots, e_p$$

则协差阵可分解为:

$$\Sigma = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix} \mathbf{U}' = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i'$$

当最后 $p-m$ 个特征值较小时，协差阵可以近似的分解为

$$\begin{aligned} \Sigma &\approx (\sqrt{\lambda_1} \mathbf{e}_1, \cdots, \sqrt{\lambda_m} \mathbf{e}_m) \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \mathbf{e}_1' \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_m} \mathbf{e}_m' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{A}' + \Sigma_\epsilon \\ \text{or } \mathbf{S} &\approx \mathbf{A} \mathbf{A}' + \mathbf{D} \end{aligned}$$

\mathbf{A} 即为因子协方差阵；当 \mathbf{X} 的协方差阵未知，可以用样本协方差阵 \mathbf{S} 去代替。

(4)、因子旋转

不管用何种方法确定因子载荷矩阵 \mathbf{A} ，它们都不是唯一的，我们可以由任意一组初始公共因子做线性组合，得到新的一组公共因子，使得新的公共因子彼此之间相互独立，同时也能很好的解释原始变量之间的相关关系。这样的线性组合可以找到无数组，这样就引出了因子旋转。因子旋转的目的是为了找到意义更为明确，实际意义更明显的公因子。因子旋转不改变变量共同度，只改变公因子的方差贡献。

(1) 因子旋转分为两种：正交旋转和斜交旋转

特点：1) 正交旋转。由因子载荷矩阵 \mathbf{A} 左乘一正交阵而得到，经过旋转后的新的公因子仍然保持彼此独立的性质。正交变化主要包括方差最大旋转法、四次最大正交旋转、平均正交旋转。2) 斜交旋转。放弃了因子之间彼此独立这个限制，可达到更简洁的形式，实际意义也更容易解释。

不论是正交旋转还是斜交旋转，都应该在因子旋转后，使每个因子上的载荷尽可能拉开距离，一部分趋近 1，一部分趋近 0，使各个因子的实际意义能更清楚地表现出来。

(2) 接下来接收方差最大化正交旋转：

假设前提：公因子的解释能力能够以其因子载荷平方的方差来度量。先考虑两个因子的平面正交旋转：对 \mathbf{A} 按行计算共同度，考虑到各个变量的共同度之间的差异所造成的不平衡，需对 \mathbf{A} 中的元素进行规格化处理，即每行的元素用每行

的共同度除之。规格化后的矩阵，为方便仍记为 A，施行方差最大正交旋转（C 为正交阵）：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$B = AC = \begin{bmatrix} a_{11} \cos \phi + a_{12} \sin \phi & -a_{11} \sin \phi + a_{12} \cos \phi \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1} \cos \phi + a_{p2} \sin \phi & -a_{p1} \sin \phi + a_{p2} \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} \end{bmatrix}$$

目的：希望所得结果能使载荷矩阵的每一列元素的绝对值尽可能向 1 和 0 两极分化，即原始变量中一部分主要与第一因子有关，另一部分主要与第二因子有关，也就是要求 $(b_{11}^2, \dots, b_{p1}^2)$, $(b_{12}^2, \dots, b_{p2}^2)$ 这两组的方差尽量大。为此，正交旋转的角度必须满足使旋转后得到因子载荷阵的总方差 $V_1+V_2=G$ 达最大。即：

$$V_\alpha = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left(\frac{b_{i\alpha}^2}{h_i^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{b_{i\alpha}^2}{h_i^2} \right)^2 \quad \alpha=1,2$$

$$G = V_1 + V_2 = \max$$

$$\frac{\partial G}{\partial \phi} = 0$$

经过计算，其旋转角度可按下面公式求得：

$$\tan 4\phi = \frac{D - 2AB/p}{C - (A^2 - B^2)/p}$$

$$A = \sum_{j=1}^p \mu_j \quad B = \sum_{j=1}^p v_j$$

$$C = \sum_{j=1}^p (\mu_j^2 - v_j^2) \quad D = 2 \sum_{j=1}^p \mu_j v_j$$

$$\mu_j = \left(\frac{a_{j1}}{h_j} \right)^2 - \left(\frac{a_{j2}}{h_j} \right)^2 \quad v_j = 2 \frac{a_{j1} a_{j2}}{h_j^2}$$

如果公共因子多于两个，我们可以逐次对每两个进行上述的旋转，设公共因子数 $m > 2$ 。1) 第一轮旋转，每次取两个，全部配对旋转，变换共需进行 $m(m-1)/2$

次；2) 对第一轮旋转所得结果用上述方法继续进行旋转，得到第二轮旋转结果。每一次旋转后，矩阵各列平方的相对方差之和总会比上一次有所增加；3) 当总方差的改变不大时，就可以停止旋转。

(5)、因子得分函数

因子分析的数学模型是将变量表示为公共因子的线性组合。由于公共因子能反映原始变量的相关关系，用公共因子代表原始变量时，有时更有利于描述研究对象的特征，因而往往需要反过来将公共因子表示成为变量的线性组合，即：

$$F_j = b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \cdots + b_{jp}x_p, j = 1, 2, \cdots, m$$

并称上式为因子得分函数。

(6)、估计因子得分函数的方法

估计因子得分的方法很多，如加权最小二乘方法、回归法等，这里采用回归法估计因子得分函数。回归法是 1939 年由 Thomson 提出来的，所以又称为汤姆森回归法。

我们现在仅知道由样本值可得因子载荷阵 A, 由因子载荷的意义知：

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \gamma_{x_i F_j} = E(X_i F_j) \\ &= E[X_i (b_{j1}X_1 + \cdots + b_{jp}X_p)] \\ &= b_{j1}\gamma_{i1} + \cdots + b_{jp}\gamma_{ip} \\ &= \begin{bmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \vdots \\ b_{jp} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

则，我们有如下的方程组：

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \cdots & \gamma_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \vdots \\ b_{jp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{bmatrix} \quad j=1, 2, \cdots, m$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \cdots & \gamma_{pp} \end{bmatrix} \text{ 为原始变量的相关系数矩阵。}$$

其中：

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{bmatrix} \text{为载荷矩阵的第 } j \text{ 列；} \begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \vdots \\ b_{jp} \end{bmatrix} \text{为第 } j \text{ 个因子得分函数的系数，记为 } B.$$

于是 $F = B \bullet X, B = A^T \bullet R^{-1}$ 就是估计因子得分的计算公式。

在估计出公因子得分后，可以利用因子得分进行进一步的分析，如样本点之间的比较分析，对样本点的聚类分析等，当因子数 m 较少时，还可以方便地把各样本点在图上表示出来，直观地描述样本的分布情况，从而便于把研究工作引向深入。

(7)、因子分析的步骤

1) 选择分析的变量。用定性分析和定量分析的方法选择变量，因子分析的前提条件是观测变量间有较强的相关性，因为如果变量之间无相关性或相关性较小的话，他们不会有共享因子，所以原始变量间应该有较强的相关性。

2) 计算所选原始变量的相关系数矩阵。相关系数矩阵描述了原始变量之间的相关关系。可以帮助判断原始变量之间是否存在相关关系，这对因子分析是非常重要的，因为如果所选变量之间无关系，做因子分析是不恰当的。并且相关系数矩阵是估计因子结构的基础。

3) 提取公共因子。这一步要确定因子求解的方法和因子的个数。需要根据研究者的设计方案或有关的经验或知识事先确定。因子个数的确定可以根据因子方差的大小。只取方差大于 1 (或特征值大于 1) 的那些因子，因为方差小于 1 的因子其贡献可能很小；按照因子的累计方差贡献率来确定，一般认为要达到 60% 才能符合要求。

4) 因子旋转。通过坐标变换使每个原始变量在尽可能少的因子之间有密切的关系，这样因子解的实际意义更容易解释，并为每个潜在因子赋予有实际意义的名字。

5) 计算因子得分。求出各样本的因子得分，有了因子得分值，则可以在许多分析中使用这些因子，例如以因子的得分做聚类分析的变量，做回归分析中的回归因子。