Р. Г. Гордеев, Б. А. Каган, Е. В. Поляков, Численное интегрирование уравнений динамики приливов в Мировом океане при учете эффектов нагрузки и самопритяжения, *Докл. АН СССР*, 1976, том 228, номер 4, 817–820

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 228, № 4

УДК 551.465.7

ГЕОФИЗИКА

Р. Г. ГОРДЕЕВ, Б. А. КАГАН, Е. В. ПОЛЯКОВ

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ПРИЛИВОВ В МИРОВОМ ОКЕАНЕ ПРИ УЧЕТЕ ЭФФЕКТОВ НАГРУЗКИ И САМОПРИТЯЖЕНИЯ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 10 XII 1975)

Во всех существующих расчетах приливов в Мировом океане (их анализ можно найти в ([1])) не учитывали эффекты гравитации жидкой оболочки Земли и нагрузки. Естественно задаться вопросом: насколько оправдано такое допущение? Ответом на него и может служить настоящее сообщение.

Определим деформации ζ_b дна и изменения $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ гравитационного поля Земли, вызванные приливами в океане и земной коре (см. ([2])), как

$$\zeta_b = h_L\zeta^+ + \sum_n h_n'\alpha_n\zeta_n, \tag{1}$$

$$G^{(1)} = g\cdot\nabla\sum_n(1+k_n')\alpha_n\zeta_n, \qquad G^{(2)} = k_L\cdot\nabla\Omega_2, \tag{2}$$

где h_L и k_L — числа Лява, представляющие собой отношение высоты статического земного прилива к высоте ζ^+ статического прилива в океане и отношение дополнительного потенциала, обусловленного деформациями земной коры, к приливному потенциалу Ω_2, h_n' и k_n' — числа Лява n-го порядка, $\alpha_n=[3/(2n+1)]\rho_0/\rho_\oplus$, $\rho_0/\rho_\oplus$ — отношение средней плотности морской воды к средней плотности Земли.

Тогда с учетом предположения о гармоническом характере колебаний линеаризованные уравнения динамики приливов могут быть записаны в виде ([1], [3])

$$(r-i\sigma)w - Aw - k_l\Delta w = -gD\cdot\nabla(\zeta-\zeta^\oplus)+f; \tag{3}$$

$$-i\sigma\zeta + \operatorname{div} w = 0; \tag{4}$$

здесь члены $f=\gamma_L gD\cdot\nabla\zeta^+$, $\zeta^\oplus=\int\zeta(\theta',\ \varphi')G(\theta',\ \varphi',\ \theta,\ \varphi)\,dS'$ описывают соответственно непосредственное влияние приливообразующих сил, исправленное на статический эффект земных приливов, и комбинированный эффект нагрузки и самопритяжения, $\gamma_L=(1+k_L-h_L)$ — редукционный множитель Лява $dS'=\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$,

$$G(\theta',\varphi',\theta,\varphi) = \sum_n(1+k_n'-h_n')\alpha_n\cdot\sum_m N_{nm}^{-1}P_n^m(\cos\theta)\cdot P_n^m(\cos\theta')\begin{pmatrix}\cos m\varphi\ \cos m\varphi' \\ \sin m\varphi\ \sin m\varphi'\end{pmatrix},$$

P_n^m — присоединенная функция Лежандра, N_{nm} — нормировочный множитель. Система (3), (4) дополняется условием прилипания на береговой черте исследуемой области.

Сформулированная задача имеет единственное решение, если выполняется одно из неравенств

$$\min_S D - \frac{\mu}{2\delta}\max_{S_1}\Delta D > 0, \qquad 8D^2-\mu|\nabla D|>0, \tag{5}$$

где $\delta=\min_S(\sin\theta)>0$, $\mu=4\pi a^2$ — грубая оценка постоянной из неравенства

Фридрихса, a — радиус Земли, S_1 — множество точек $(\theta, \varphi)\in S$, в которых $\Delta D>0$.

Будем искать приближенное решение задачи. Для этого запишем уравнение (3) в разностной форме, затем исключим из него, воспользовавшись разностным аналогом уравнения (4), неизвестную функцию ζ и в получившемся соотношении перейдем к вещественным операторам и функциям. В результате имеем следующее матричное уравнение:

$$T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}\sin\theta, \tag{6}$$

решение которого должно удовлетворять граничному условию $v_1, v_2|_{\Gamma_h}=0$; здесь $(v_1, f_1)=\mathrm{Re}(w/D, f)$, $(v_2, f_2)=\mathrm{Im}(w/D, f)$,

$$T=B+\begin{pmatrix} 0 & iP \\ -iP & 0 \end{pmatrix}, \quad L=\begin{pmatrix} 0 & iQ \\ -iQ & 0 \end{pmatrix},$$

B — линейный оператор, определяемый левой частью уравнения (3),

$$Pv=\begin{Bmatrix} -i\dfrac{gD}{\sigma}\sin\theta\cdot(\mathrm{div}_h(vD))_{\bar\theta} \\ -i\dfrac{gD}{\sigma}(\mathrm{div}_h(vD))_{\bar\varphi} \end{Bmatrix}$$

$$Qv=\begin{Bmatrix} -i\dfrac{gD}{\sigma}h^2\sin\theta\cdot\left(\sum\limits_{S_h'}\mathrm{div}_h(v'D)\cdot G(\theta',\varphi',\theta,\varphi)\sin\theta'\right)_{\bar\theta} \\ -i\dfrac{gD}{\sigma}h^2\cdot\left(\sum\limits_{S_h'}\mathrm{div}_h(v'D)\cdot G(\theta',\varphi'\ \theta,\varphi)\sin\theta'\right)_{\bar\varphi} \end{Bmatrix},$$

$$v=(v_1, v_2), \quad v'=v(\theta', \varphi'), \quad \mathrm{div}_h(v, D)=(1/a\sin\theta)[u_\varphi+(v\sin\theta)_\theta],$$

индексами φ и θ отмечены разностные отношения (без черты — вперед, с чертой — назад), h — угловой шаг сетки, Γ_h — граница сеточной области S_h.

Укажем некоторые свойства операторов T и Q.

Лемма 1. *Пусть выполняется одно из неравенств*

$$\begin{gathered} \nu_1=\min_{S_h}\frac{D}{\mu}-\frac{1}{2\delta}\max_{S_{1h}}\Delta_h D>0, \\ \nu_2=\min_{S_h}M_h(\theta,\varphi)>0, \quad (\theta,\varphi)\in S_h, \end{gathered} \tag{7}$$

$$M_h=2\frac{D}{\mu}-\frac{\sin\theta}{4\delta a^2}\left[(D^{1/2})_\theta^2+(D^{1/2})_{\bar\theta}^2+\frac{1}{\sin\theta}((D^{1/2})_\varphi^2+(D^{1/2})_{\bar\varphi}^2)\right].$$

Тогда T является положительно определенным оператором, существует обратный оператор T^{-1} и имеют место оценки

$$(Tv,v)>(r\cdot\min_{S_h}D+\nu k_l)\cdot\|v\|^2, \quad \|T^{-1}\|\leqslant(r+\nu k_l)^{-1}, \tag{8}$$

где $\nu=\min(\nu_1, \nu_2)$, символами $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ обозначены сеточное скалярное произведение и сеточная норма в пространстве $L_2(S_h)$.

Лемма 2. *Q есть самосопряженный неотрицательный оператор, причем для его нормы справедлива оценка*

$$\|Q\|\leqslant\frac{4gN^2}{\sigma(ah)^2}\max_n(1+k_n'-h_n')\alpha_n\cdot\max_{S_h}D^2, \tag{9}$$

где N — количество членов в разложении (1).

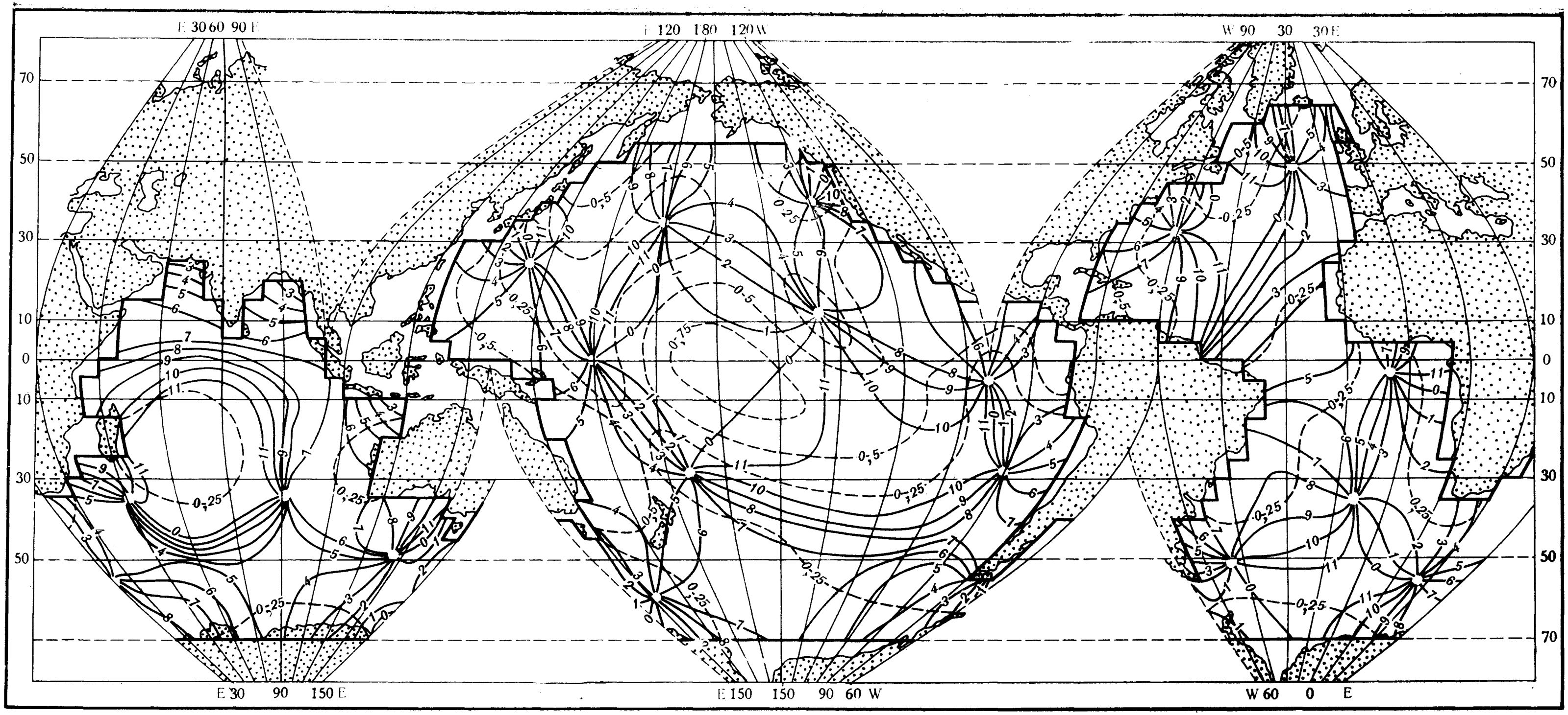

Рис. 1. Приливная карта волны M_2 в Мировом океане, полученная с учетом эффектов нагрузки и самопритяжения. Сплошными линиями показано время наступления полной воды в средних лунных часах относительно кульминации Луны на меридиане Гринвича, штриховыми линиями – амплитуда прилива в метрах

На основании лемм 1 и 2 доказывается однозначная разрешимость системы (6) при любых $F=(f_1, f_2)\sin\theta$. Решение этой системы получено с помощью итерационного процесса

$$v^{k+1}=T^{-1}Lv^k+T^{-1}F, \tag{10}$$

в котором все члены, содержащие суммирование по S_h, снесены на предыдущий слой k. Оценивая норму оператора $T^{-1}L$ при помощи оценок для $\|T^{-1}\|$ и $\|Q\|$ из (8), (9), находим достаточное условие сходимости итерационного процесса:

$$\frac{4gN^2 \max\limits_{S_h} D^2 \cdot \max\limits_{n} (1+k_n'-h_n')\alpha_n}{\sigma (ah)^2 (r \min\limits_{S_h} D + \nu k_l)} < 1.$$

Результаты расчета* полусуточных приливов (волна M_2) с учетом нагрузки и самопритяжения представлены на рис. 1. Сравнение приливных карт, рассчитанных с учетом и без учета этих эффектов, показывает, что последние не приводят к общей перестройке пространственной структуры изучаемого явления. Однако в отдельных районах Мирового океана изменения приливных характеристик оказываются весьма заметными. В частности, при учете названных эффектов наблюдается почти повсеместное увеличение (на 10—20%) амплитуд прилива в умеренных и низких широтах Тихого океана и такое же их уменьшение в Индийском океане и северной части Атлантики. Кроме того в этом случае происходит смещение некоторых амфидромий и сопутствующее ему резкое локальное изменение фаз прилива. Все это говорит о целесообразности отказа от традиционных представлений об океанских приливах как изолированном явлении, возбуждаемом только приливообразующими силами Луны и Солнца.

Ленинградское отделение
Института океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР

Поступило
10 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. И. Марчук, Б. А. Каган,* Океанские приливы (математические модели и численные эксперименты). Гидрометеоиздат, Л., 1976. [2] *У. Манк, Г. Макдональд,* Вращение Земли, М., «Мир», 1964. [3] *M. Hendershott,* Geophys. J. Roy. Astron. Soc., v. 29, 3891 (1972). [4] *C. Pekeris, J. Accad,* Phil. Trans. Roy. Soc., London, v. A265, 413 (1969). [5] *I. M. Longman,* J. Geophys. Res., v. 68, 485 (1963).

* Они получены интегрированием на широтно-долготной сетке с шагом 5° в каждом из направлений. Поле глубин и значения чисел Лява заимствованы из ([4], [5]), предельные значения n и m принимали соответственно равными 40 и 36, значения r и k_l—10^{-8} сек$^{-1}$ и 10^{11} см^2/сек. При таком выборе параметров задачи для достижения сходимости решения понадобилось 7 приближений при допустимом пределе относительного приращения средней по области кинетический энергии 10^{-5}.