Seltsames Programm. Sei $P(n)$ die Ausgabe des Programms P für eine positive ganze Zahl n als Eingabe. Unser Ziel ist es, $P(2018)$ zu bestimmen.

Die aus der Aufgabenstellung bekannten Eigenschaften von P können wir für alle positiven ganzen Zahlen n folgendermaßen ausdrücken:

(i) $P(n)$ ist eine positive ganze Zahl.

(ii) Größere Eingabewerte führen zu größeren Ausgabewerten: $P(n+1) > P(n)$.

(iii) Startet man P mit irgendeiner Eingabe und gibt ihm die Ausgabe in einem zweiten Durchlauf als Eingabe, dann ist die Ausgabe des zweiten Durchlaufs das Dreifache der ursprünglichen Eingabe: $P(P(n)) = 3n$.

Zuerst bestimmen wir $P(1)$ und betrachten dazu zwei Fälle.

Fall 1: $P(1) = 1$
Einsetzen liefert $P(P(1)) = P(1) = 1$ im Widerspruch zu $P(P(1)) = 3 \cdot 1 = 3$ nach Eigenschaft (iii). Dieser Fall ist daher unmöglich und es ist $P(1) \neq 1$.

Fall 2: $P(1) \geq 3$
Wir setzen $P(1) = k+3$ mit einer ganzen Zahl $k \geq 0$. Nach Eigenschaft (ii) gilt dann $P(P(1)) = P(k+3) \geq P((k-1)+3) \geq \cdots \geq P(0+3) = P(3)$. Es ist aber auch $P(P(1)) = 3$ und somit $P(3) \leq 3$. Wegen $P(1) < P(2) < P(3)$ und Eigenschaft (i) gilt zwingend $P(2) = 2$ und $P(1) = 1$, was nach Fall 1 ausgeschlossen ist.

Da weder Fall 1 noch Fall 2 eintritt, folgt $P(1) = 2$. Wegen $P(P(1)) = 3$ und $P(P(1)) = P(2)$ ergibt sich sofort $P(2) = 3$. Außerdem ist $P(P(2)) = 3 \cdot 2 = 6$ und $P(P(2)) = P(3)$, sodass $P(3) = 6$ gilt. Analog erhalten wir $P(6) = 9$, $P(9) = 18$, $P(18) = 27$ und beliebig viele weitere Werte. Dabei ist ein Muster zu erkennen. Offenbar gilt für alle positiven ganzen Zahlen n:

$$\begin{aligned} P(3^n) &= 2 \cdot 3^n \\ P(2 \cdot 3^n) &= 3^{n+1} \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Die Behauptung ($\star$) ist natürlich zu beweisen. Dazu verwenden wir das Prinzip der vollständigen Induktion und zeigen ($\star$) zunächst für $n = 1$ (Induktionsanfang). Anschließend beweisen wir: Ist ($\star$) für eine beliebige positive ganze Zahl n wahr, dann ist ($\star$) auch für $n+1$ wahr (Induktionsschritt). Daraus folgt dann die Richtigkeit von ($\star$) für alle positiven ganzen Zahlen.

Induktionsanfang: $P(3^1) = P(3) = 2 \cdot 3^1 = 6$ und $P(2 \cdot 3^1) = P(6) = 3^{1+1} = 3^2 = 9$ haben wir bereits gezeigt (siehe oben).

Induktionsschritt: Sei ($\star$) für eine beliebige positive ganze Zahl n wahr. Dann gilt nach Eigenschaft (iii): $P(P(2 \cdot 3^n)) = 3 \cdot 2 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^{n+1}$.

Es ist aber auch $P(2 \cdot 3^n) = 3^{n+1}$ und damit $P(P(2 \cdot 3^n)) = P(3^{n+1}) = 2 \cdot 3^{n+1}$, also genau der erste Teil von ($\star$) für $n+1$. Schließlich gilt $P(P(3^{n+1})) = P(2 \cdot 3^{n+1})$ sowie $P(P(3^{n+1})) = 3^{n+2}$ nach Eigenschaft (iii). Kombinieren liefert $P(P(3^{n+1})) = 2 \cdot 3^{n+2}$, den zweiten Teil von ($\star$) für $n+1$ und damit ist der Induktionsschritt vollständig.

Mit ($\star$) können wir $P(n)$ für alle Dreierpotenzen und Doppelte von Dreierpotenzen berechnen. Allerdings ist die Zahl 2018 nicht von einer dieser Formen.

Uns hilft folgende Einsicht: Es ist $P(3) = 6$ und $P(6) = 9$. Welche Werte kommen für $P(4)$ und $P(5)$ infrage? Nach Eigenschaft (ii) gilt $P(3) < P(4) < P(5) < P(6)$ und daher ist zwingend $P(4) = 7$ und $P(5) = 8$. Die Zahlen werden gewissermaßen zwischen dem kleinsten und dem größten Wert „eingequetscht".

Das führt auf folgende allgemeine Aussage: Für $0 \leq k < 3^n$ ist

$$P(3^n + k) = 2 \cdot 3^n + k.$$

Für den Beweis betrachten wir zunächst folgende Abschätzung:

$$2 \cdot 3^n = P(3^n) < \underbrace{P(3^n + 1) < \cdots < P(2 \cdot 3^n - 1)}_{3^n - 1 \text{ Zahlen}} < P(2 \cdot 3^n) = 3^{n+1}$$

Da zwischen $2 \cdot 3^n$ und 3^{n+1} genau $3^n - 1$ ganze Zahlen liegen ist die Menge der infragekommenden Zahlen für $P(3^n + 1)$ bis $P(2 \cdot 3^n - 1)$ nach Eigenschaft (i) eindeutig bestimmt. Wegen Eigenschaft (ii) ist sogar deren Reihenfolge bestimmt und es gilt $P(3^n + 1) = 2 \cdot 3^n + 1$, $P(3^n + 2) = 2 \cdot 3^n + 2$, $\ldots$, $P(2 \cdot 3^n - 1) = 3^{n+1} - 1$, womit die gewünschte Aussage bewiesen ist.

Schließlich können wir $P(2018)$ folgendermaßen berechnen. Für $n = 6$ und $k = 560$ ergibt sich $P(P(3^n + k)) = P(P(3^6 + 560)) = P(2 \cdot 3^6 + 560) = P(2018)$, aber nach Eigenschaft (iii) auch $P(P(3^n + k)) = 3(3^n + k) = 3^{n+1} + 3k = 3^{6+1} + 3 \cdot 560 = 3867$. Kombinieren liefert das Ergebnis:

$$P(2018) = 3867.$$

Anmerkung 1. Das zur Berechnung von $P(2018)$ verwendete Vorgehen lässt sich verallgemeinern. Für positive ganze Zahlen n und $0 \leq k \leq 3^{n-1}$ gilt nämlich

$$P(3^n - k) = 2 \cdot 3^n - 3k.$$

Beweis: Es ist $P(P(3^{n-1} + (3^{n-1} - k))) = P(2 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1} - k) = P(3^n - k)$ sowie nach Eigenschaft (iii) $P(P(3^{n-1} + (3^{n-1} - k))) = 3(2 \cdot 3^{n-1} - k) = 2 \cdot 3^n - 3k$.

Anmerkung 2. Mit den vorgestellten Beweisen inklusive Anmerkung 1 lässt sich $P(n)$ für beliebige positive ganze Zahlen n berechnen. Tatsächlich können wir das Programm P in einer konkrete Programmiersprache implementieren. Zum Beispiel befindet sich auf der nächsten Seite eine Implementierung in C++.

```cpp
#include <iostream>

// Dreierpotenzen
int pw[20];

// Programm P
int program(int n) {
    int k = -1;
    while (pw[k + 1] <= n) ++k;

    if (n < 2 * pw[k]) {
        return pw[k] + n;
    }

    return 3 * n - pw[k + 1];
}

int main() {
    pw[0] = 1;
    for (int i = 1; i < 20; ++i) {
        pw[i] = 3 * pw[i - 1];
    }

    std::cout << program(2018) << std::endl; // 3867
    return 0;
}
```

Alternative Lösung oder Fehler gefunden?
Wir freuen uns über Verbesserungen und neue Lösungsideen.
Kontakt: **itag-goethe@protonmail.com**