2152118 史君宝 形式语言与自动机 第三次作业

4.1.2 证明下列语言都不是正则的：

（e）由 0 和 1 构成的 ww 形式的串的集合，也就是某个串重复的串集合：

解：直接的证明，不是很好证明，我们通过举出具体的例子来进行反例证明：
比如我们参照书本上对于 $0^m1^m$ 的证明：
我们找出一个满足 ww 形式的串 $0^n10^n1$ 其中 n 是与 DFA 相关的系数。
将原来的串分为 ww=xyz，因为|xy|<=n ，设|y|=k，可知 y 必定全是 0 的串，
那么我们取新串 xyyz = $0^{n+k}10^n1$
可知如果从中间划分将 xyyz 分为两个 w，那么后面的 w 含有两个 1，而前面的 w 没有 1，与题目相悖，可知上述不是正则语言。

（f）由 0 和 1 构成的 $ww^R$ 形式的串的集合，也就是某个串跟着它的翻转连接的串集合：

解：直接的证明，不是很好证明，我们通过举出具体的例子来进行反例证明：
比如我们参照书本上对于 $0^m1^m$ 的证明：
我们找出一个满足 $ww^R$ 形式的串 $0^n110^n$ 其中 n 是与 DFA 相关的系数。
将原来的串分为 $ww^R$=xyz，因为|xy|<=n ，设|y|=k，可知 y 必定全是 0 的串，
那么我们取新串 xyyz = $0^{n+k}110^n$
可知如果从中间划分将 xyyz 分为两部分，那么后面的 $w^R$ 含有两个 1，而前面的 w 没有 1，与题目相悖，可知上述不是正则语言。

（g）由 0 和 1 构成的 w~w 形式的串的集合，也就是某个串跟着它的取反连接的串集合，就是将 0 换成 1,1 换成 0：

解：直接的证明，不是很好证明，我们通过举出具体的例子来进行反例证明：
比如我们参照书本上对于 $0^m1^m$ 的证明：
我们找出一个满足 w~w 形式的串 $0^n1^n$ 其中 n 是与 DFA 相关的系数。
将原来的串分为 w~w=xyz，因为|xy|<=n ，设|y|=k，可知 y 必定全是 0 的串，
那么我们取新串 xyyz = $0^{n+k}1^n$
可知如果从中间划分将 xyyz 分为两部分，那么后面的~w 含有一些 0 和 n 个 1，而前面的 w 全是 0，后面的~w 并不全是 1，与题目相悖，可知上述不是正则语言。

（h）所有由 0 和 1 构成的 $w1^n$ 形式的串的集合，其中 w 是由 0 和 1 构成的长度为 n 的串。

解：直接的证明，不是很好证明，我们通过举出具体的例子来进行反例证明：

比如我们参照书本上对于 $0^m1^m$ 的证明：
我们找出一个满足 $w1^n$ 形式的串，其中 w 是由 0 和 1 构成的长度为 n 的串。
比如我们找到一个串 $0^m1^m$ ，其中 n 是与 DFA 相关的系数。
将原来的串分为 $0^m1^m$ =xyz，因为|xy|<=m ，设|y|=k，可知 y 必定全是 0 的串，那么我们取新串 xyyz = $0^{m+k}1^m$
可知如果从中间划分将 xyyz 分为长度相等的两部分，那么后面的一部分必定会含有一些 0，与原来的 $1^n$ 是相悖的，所以可知上述不是正则语言。

4.1.3 证明下面语言都不是正则的：
（a）：所有满足以下条件的串的集合，由 0 和 1 构成的，开头是 1，并且我们把该串看作一个整数的时候该整数是一个素数。

解：这一题我没有找到好的方法去证明，我只能去找到反例。
首先我们找素数 3，二进制是 11，如果|y|=1，那么 $xy^3z$=1111 不是素数。
如果|y|=2，那么 $xy^2z$=1111 不是素数。

我们继续寻找素数 5，二进制是 101，如果|y|=1 是前面那个 1 的话，
那么 $xy^5z$=1111101 是 125 不是素数。
如果|y|=1 是 0 的话，那么 $xy^2z$=1001 是 9 不是素数。
如果|y|=1 是后面那个 1 的话，那么 $xy^5z$=1011111 是 95 不是素数。
如果|y|=2 是 10 的话，那么 $xy^2z$=10101 是 21 不是素数。
如果|y|=2 是 01 的话，那么 $xy^2z$=10101 是 21 不是素数。
如果|y|=3 是 101 的话，那么 $xy^2z$=101101 是 45 不是素数。

举了上面的这些反例，可以证明上述不是正则语言，但是我也找不到具体的方法证明。

（b）所有满足以下条件的 $0^i1^j$，其中 i 和 j 的最大公约数是 1。

我们可以找 $0^q1^p$ 作为例子，其中我们定义 n 是与 DFA 相关的系数。而 q 是大于 n 的最小质数，而 p 是在（q+1）到（2q-1）之间的数（包括两者）。
比如质数 3，在 4-5 之间的数都与其互质，17，在 18-33 之间的数都与其互质。
由上我们可知 p 和 q 是互质的，我们先将 q 确定。p 动态的确定。

可知对于上面的串，将其分为 $0^q1^p$ =xyz 时，因为|xy|<=n，设|y|=k；y 始终在 0 的那一部分。
那么 $xy^{1+m}z=0^{q+km}1^p$ ,只要让上述式子中由上可知，k 是小于 q 的，当 m 取 1 的时候 q+k 也必定落在（q+1）到（2q-1）之间的数（包括两者）。这时候我们确定 p 的值，使得 q+k = p 这样两者的最大公约数就是 p 了。可知上面的不是正则语言。
证明的不太完美，q 的值可以确定，p 的值需要根据 k 来动态选取，但是满足了

题目要求的 p 和 q 是互质的。

4.2.2

解：由题目可以知道，假定我们定义 L 语言的文法为：
M=（Q，Σ，δ，q0，F1）
那么由 L/a 的定义知，即为对于 对于 a 上的每个串或者字符，如果有存在串 xa 使得 δ（q0，xa）=F1，那么所有 x 的集合就是 L/a 所识别的串。
我们根据上面的知识，尝试定义 L/a 的文法
其文法应该为 M1=（Q，Σ，δ，q0，F2），其中对于 F2 中的每个状态 q，都有 δ（q，a）=F1，我们能够用文法描述出 L/a 所识别的语言，所以它是正则语言。

总结，L/a 对应的文法是 M1=（Q，Σ，δ，q0，F2），其中对于 F2 中的每个状态 q，都有δ（q，a）=F1，是正则语言。

4.2.7

由题目知 alt(w,x)的意思，对于任意的两个正则语言 L 和 M，在它们的内部找到等长的串，然后问 alt（L，M）是不是正则语言：

解：回顾这一题，我们可以联想到教科书上如何证明交运算的封闭性的：
对于 $L\cap M$ 的时候是按照如下的方式运算的。
对于 L 的文法是 L = （Q1，Σ1，δ1，q1，F1）
对于 M 的文法是 M = （Q2，Σ2，δ2，q2，F2）
$L\cap M$的文法是 （Q1 X Q2，Σ1+Σ2，δ，（q1，q2），F1 X F2）
其中 δ（（$q_L$，$q_M$），a）=（δ1（$q_L$，a）， δ2（$q_M$，a））
上面证明了交运算的封闭性，对于本题，也可以按照上面的方法进行求解：

对于本题仍有：
对于 L 的文法是 L = （Q1，Σ1，δ1，q1，F1）
对于 M 的文法是 M = （Q2，Σ2，δ2，q2，F2）
那么 alt（L，M）=（Q1 X Q2，Σ1*Σ2，δ，（q1,q2），F1 X F2）
解释：我们的状态采用 Q1 X Q2 构成二元状态（$q_L$，$q_M$），例如（q1，q2）
我们的字母表要进行加工，我们的基础字母应该是两个字符的，这样能够帮助我们实现等长的要求，例如 Σ1 ={1,2}，Σ2 ={3,4}，那么 Σ1*Σ2 ={13,14,23,24}
我们的δ也应该进行修改δ（（$q_L$，$q_M$），ab）=（δ1（$q_L$，a）， δ2（$q_M$，b））
我们的终止状态就应该是 F1 X F2 和上面的是一样的。

4.2.8

解：上述的问题比较难以找到相应的 DFA 和对应的与 DFA 相关的 n 系数，难以通过泵定理去证明。
但是我们可以尝试构造相应的文法，如果我们构造成功文法，就可以证明上述语言是正则语言。

对于题目所给的 L 语言，其对应的文法是 L = （Q1，Σ1，δ1，q1，F1）
那么对于 half（L）语言有 其文法是 M = （Q2，Σ2，δ2，q2，F2）
其中 假设 L 中有任一语言，其长度为 len

则 Q2 为 [q,p] 其中对于 $w \in \Sigma^*$ 以及 $y \in \Sigma^{|w|}$
有 q = δ1（q1，w） δ1（p，y）= F1 p 为 Q1 其中的状态。

Σ2 = Σ1

δ2（[q,p]，m）= [δ1（q,m）,z] 其中 δ1（z，n）= p 其中 $m \in \Sigma$
$n \in \Sigma$

则 F2 为 [q,p] 其中对于 $w \in \Sigma^{|len/2|}$ 以及 $y \in \Sigma^{|len/2|}$
且 |w|=|len/2| |y|=|len/2|
有 q = δ1（q1，w） δ1（p，y）= F1 p 为其中的状态。

4.2.9
将 4.2.8 中的定理进一步应用，我们去计算下面几种情况：
（1）F（n）= 2n （2）F（n）= $n^2$ （3）F（n）= $2^n$

（1）
解：上述的问题比较难以找到相应的 DFA 和对应的与 DFA 相关的 n 系数，难以通过泵定理去证明。
但是我们可以尝试构造相应的文法，如果我们构造成功文法，就可以证明上述语言是正则语言。

对于题目所给的 L 语言，其对应的文法是 L = （Q1，Σ1，δ1，q1，F1）
那么对于 F（n）= 2n 语言有其文法是 M = （Q2，Σ2，δ2，q2，F2）
其中 假设 L 中有任一语言，其长度为 len

则 Q2 为 [q,p] 其中对于 $w \in \Sigma^*$ 以及 $y \in \Sigma^{|2w|}$
有 q = δ1（q1，w） δ1（p，y）= F1 p 为 Q1 其中的状态。

Σ2 = Σ1

$\delta 2$（[q,p]，m）= [$\delta 1$（q,m）,z] 其中 $\delta 1$（z，n）= p　　其中 m ∈ Σ
n ∈ $\Sigma^2$

则 F2 为 [q,p] 其中对于 w ∈ $\Sigma^{|len/3|}$ 以及 y ∈ $\Sigma^{|2*len/3|}$
且 |w|=|len/3|　|y|=|2*len/3|
有 q = $\delta 1$（q1，w）　$\delta 1$（p，y）= F1　p 为其中的状态。

（2）
解：上述的问题比较难以找到相应的 DFA 和对应的与 DFA 相关的 n 系数，难以通过泵定理去证明。
但是我们可以尝试构造相应的文法，如果我们构造成功文法，就可以证明上述语言是正则语言。

对于题目所给的 L 语言，其对应的文法是 L = （Q1，Σ1，$\delta 1$，q1，F1）
那么对于 F（n）= 2n 语言有其文法是 M = （Q2，Σ2，$\delta 2$，q2，F2）
其中 假设 L 中有任一语言，其长度为 len　找到 len = n*（n+1）

则 Q2 为 [q,p] 其中对于 w ∈ $\Sigma^*$ 以及 y ∈ $\Sigma^{|w*w|}$
有 q = $\delta 1$（q1，w）　$\delta 1$（p，y）= F1　p 为 Q1 其中的状态。

Σ2 = Σ1

$\delta 2$（[q,p]，m）= [$\delta 1$（q,m）,z] 其中 $\delta 1$（z，n）= p　　其中 m ∈ Σ
n ∈ $\Sigma^2$

则 F2 为 [q,p] 其中对于 w ∈ $\Sigma^{|len/n+1|}$ 以及 y ∈ $\Sigma^{|n*len/n+1|}$
且 |w|=|len/n+1|　|y|=|n*len/n+1|
有 q = $\delta 1$（q1，w）　$\delta 1$（p，y）= F1　p 为其中的状态。

（3）
解：上述的问题比较难以找到相应的 DFA 和对应的与 DFA 相关的 n 系数，难以通过泵定理去证明。
但是我们可以尝试构造相应的文法，如果我们构造成功文法，就可以证明上述语言是正则语言。

对于题目所给的 L 语言，其对应的文法是 L = （Q1，Σ1，$\delta 1$，q1，F1）
那么对于 F（n）= 2n 语言有其文法是 M = （Q2，Σ2，$\delta 2$，q2，F2）
其中 假设 L 中有任一语言，其长度为 len

则 Q2 为 [q,p] 其中对于 $w \in \Sigma^*$ 以及 $y \in \Sigma|2^w|$
有 q = δ1（q1，w）  δ1（p，y）= F1  p 为 Q1 其中的状态。

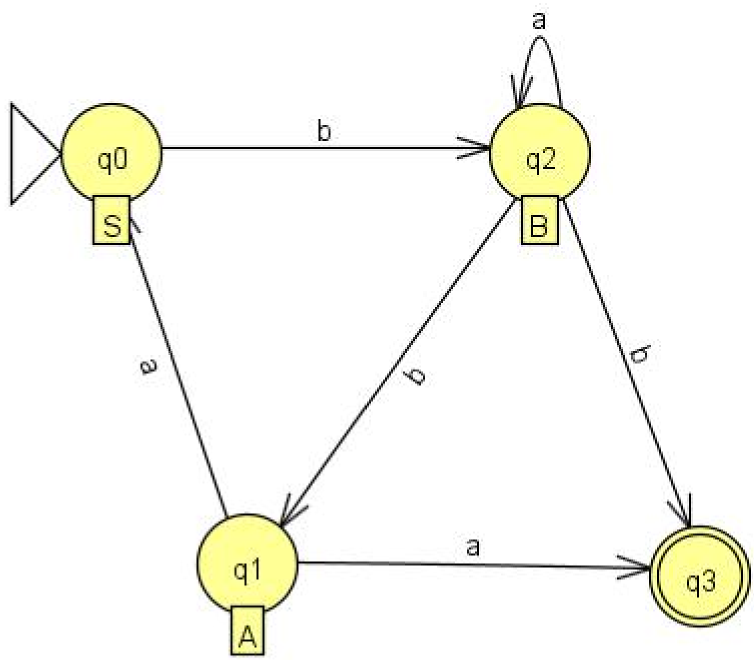
Σ2 = Σ1

δ2（[q,p]，m）= [δ1（q,m）,z] 其中 δ1（z，n）= p   其中 $m \in \Sigma$
$n \in \Sigma^2$

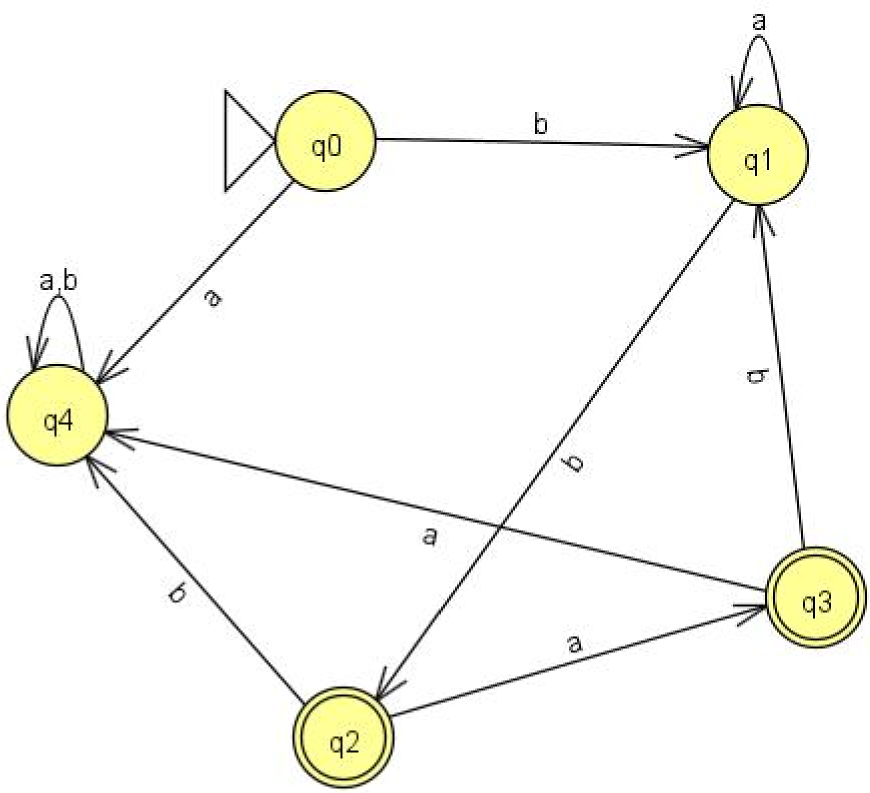
则 F2 为 [q,p] 其中对于 $w \in \Sigma^*$ 以及 $y \in \Sigma|2^w|$
即 $|y| = 2^{|w|}$
有 q = δ1（q1，w）  δ1（p，y）= F1  p 为其中的状态。

拓展题：
1.
1. 给出如下的正则文法 G，求出对应的 DFA M，使得 L(M) = L(G)。
（1） G1 =（V，T，P1，S）
P1: S→bB, B→aB | bA | b, A→a | aS

所产生的 NFA 图为下面

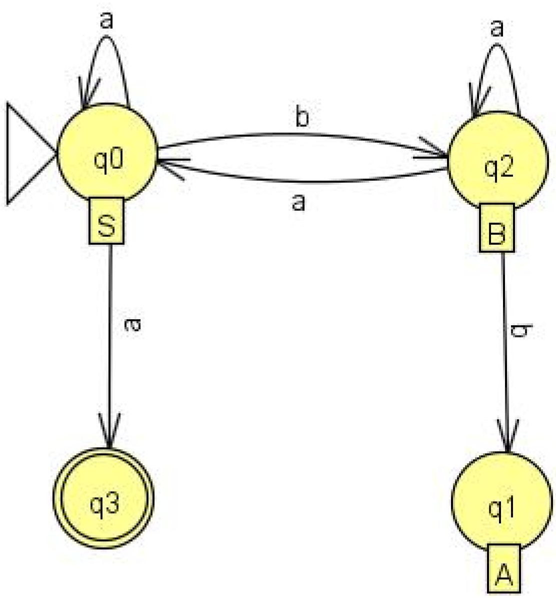



所产生的 DFA 图为下面

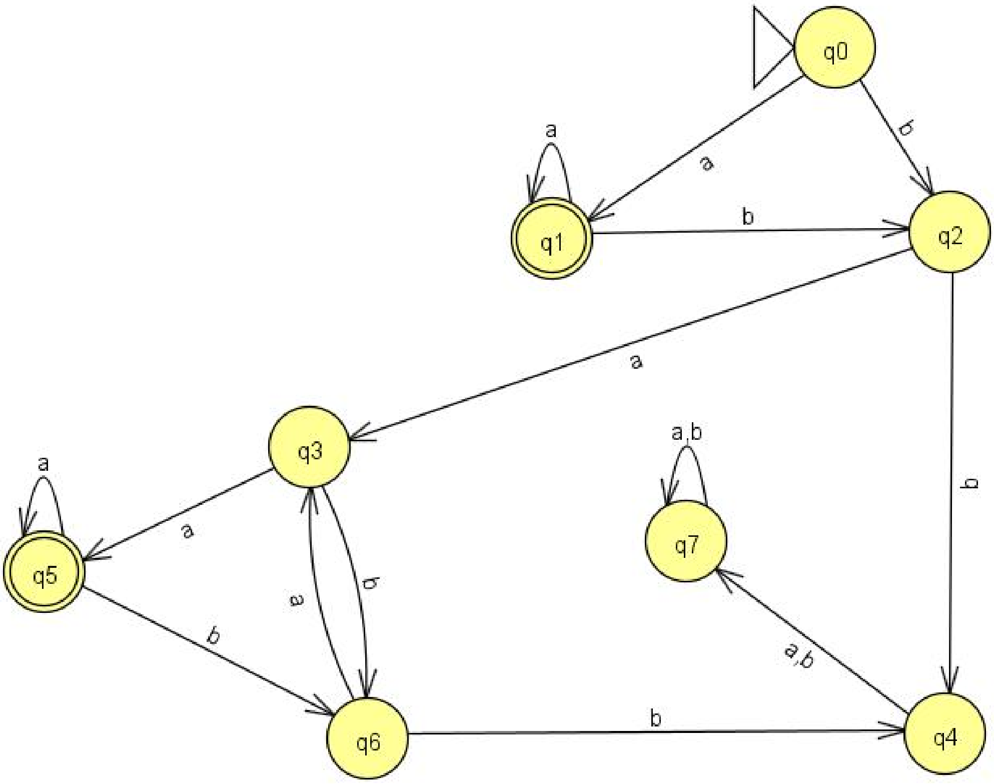



（2） G2= V，T，P2，S）
P2：S→aS ｜ bB ｜ a，B→bA ｜ aB ｜ aS

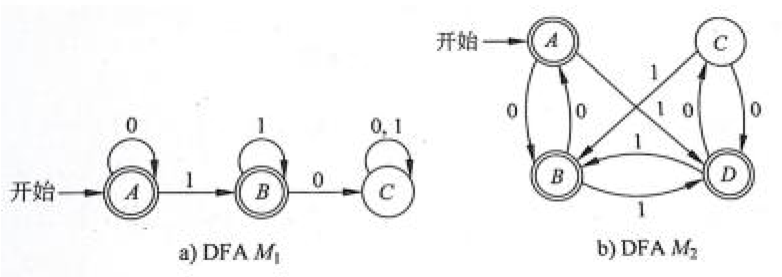
所产生的 NFA 图为下面



所产生的 DFA 图为下面




2. 给出下图描述的两个 DFA M，分别求出对应的正则文法 G，使得 L(G)=L(M)。



a) DFA $M_1$　　b) DFA $M_2$

G1 =（V，T，P1，S）

P1: A→ ε |0|1|0A|1B, B→ ε |1|1B|0C, C→0C|1C

G2= V，T，P2，S）

P2：A→ ε |0|1|0B|1D, B→ ε |0|1|0A|1D, C→0|1|0D|1B

D→ ε |1|0C|1B

3. Let L1 ⊆ {0, 1, 2}* be a regular language, we can consider L1 as a subset of integers under base 3, let L2 be the corresponding set of L1 over {0, 1}* (i.e. under base 2), for example if L1 = {11, 12, 121}, then L2 = {100, 101, 10000}. Question: is L2 a regular language?

我觉得应该是或者不是正则语言：
如果 L1 是{0, 1, 2}* 的全集，那么 L2 中出现的语言必定包含在其中，所以也就是正则语言。
但如果不是全集，我尝试了进制转换的方法，发现不能按照 2 进制转换为 8 进制和 16 进制那样，几位一个整体去转换，2 和 3 是互质的，我构造不出相关的自动机，因为可能识别了一个语言就会推翻之前识别的内容。所以我认为不是。