2152118 史君宝 形式语言与自动机 第六次作业

1. 用 CFL 泵引理证明下面语言不是上下文无关的。

（1）$\{a^i b^j c^k \mid i<j<k\}$

证明：
泵定理：假设一个语言 L 是上下无关语言，那么由泵引理，∃ n > 0，对于语言 L 中每个满足 |w| >= n 的字符串 w，∃ u ， v, x, y, z 使得 w = uvxyz 且有 |vxy| <= n, |vy| >= 1 并且对于 ∀i >= 0, 有 $uv^ixy^iz \in L$。

我们看题目所给的：对于 $\{a^i b^j c^k \mid i<j<k\}$，我们假定存在一个满足上述语言的为 $a^n b^{n+1} c^{n+2}$ ，那么对于其有|w| >= n，将字符串 w 分为 uvxyz 五部分。
要有|vxy| <=n, |vy| >= 1 。

这个时候确定 vxy 的范围就格外重要：
如果 vxy 在 a^n 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 b 的个数大于 a 的了。
同理，如果 vxy 在 b^n 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 c 的个数大于 b 的了。
如果 vxy 在 c^n 中，那么 uxz 就不满足 c 的个数大于 b 的了。

如果 vxy 在 ab 的交界处，那么由于|vy| >= 1，我们知道 v 或者 y 必定至少有一个是 a 或者是 b。都有 uv^4xy^4z 不满足 c 的个数大于 a 或者大于 b 的个数。
如果 vxy 在 bc 的交界处，那么由于|vy| >= 1，我们知道 v 或者 y 必定至少有一个是 b 或者是 c。都有 uxz 不满足 c 的个数大于 b 或者 b 的个数大于 a。

综上所述，上述语言不是上下文无关语言。

（2）$\{a^n b^n c^i \mid i<=n\}$

证明：
泵定理：假设一个语言 L 是上下无关语言，那么由泵引理，∃ n > 0，对于语言 L 中每个满足 |w| >= n 的字符串 w，∃ u ， v, x, y, z 使得 w = uvxyz 且有 |vxy| <= n, |vy| >= 1 并且对于 ∀i >= 0, 有 $uv^ixy^iz \in L$。

我们看题目所给的：对于 $\{a^n b^n c^i \mid i<=n\}$，我们假定存在一个满足上述语言的为 $a^n b^n c^n$ ，那么对于其有|w| >= n，将字符串 w 分为 uvxyz 五部分。
要有|vxy| <=n, |vy| >= 1 。

这个时候确定 vxy 的范围就格外重要：
如果 vxy 在 a^n 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 b 的个数等于 a 的了。
同理，如果 vxy 在 b^n 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 b 的个数等于 a 的了。
如果 vxy 在 c^n 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 i<=n 了。

如果 vxy 在 ab 的交界处，那么由于$|vy| >= 1$，我们知道 v 或者 y 必定至少有一个是 a 或者是 b。都有 uxz 要么不满足 a、b 个数相等，要么不满足 $i<=n$。
如果 vxy 在 bc 的交界处，那么由于$|vy| >= 1$，我们知道 v 或者 y 必定至少有一个是 b 或者是 c。都有 uv^2xy^2z 要么不满足 a、b 个数相等，要么不满足 $i<=n$

综上所述，上述语言不是上下文无关语言。

（3）$\{0^p$ | p 是素数$\}$

证明：
泵定理：假设一个语言 L 是上下无关语言，那么由泵引理，$\exists n > 0$，对于语言 L 中每个满足 $|w| >= n$ 的字符串 w，$\exists$ u，v，x，y，z 使得 $w = uvxyz$ 且有 $|vxy| <= n$，$|vy| >= 1$ 并且对于 $\forall i >= 0$，有 $uv^ixy^iz \in L$。

我们看题目所给的：对于$\{0^p$ | p 是素数$\}$，我们假定存在一个满足上述语言的为 0^p，其中 p 是大于 n 的最小素数，那么对于其有$|w| >= n$，将字符串 w 分为 uvxyz 五部分。要有$|vxy| <=n$，$|vy| >= 1$ 。

这个时候确定 vxy 的范围就格外重要：
但是在本题中 vxy 只可能是 0。那么由于$|vy| >= 1$，假定$|vy| = k$，那么对于 $uv^{p+1}xy^{p+1}z$ 来说就有 其语言是 0^{p+kp} 可知 p+kp 并不是素数，所以不满足要求。

综上所述，上述语言不是上下文无关语言。

（4）$\{0^i1^j | j=i^2\}$

证明：
泵定理：假设一个语言 L 是上下无关语言，那么由泵引理，$\exists n > 0$，对于语言 L 中每个满足 $|w| >= n$ 的字符串 w，$\exists$ u，v，x，y，z 使得 $w = uvxyz$ 且有 $|vxy| <= n$，$|vy| >= 1$ 并且对于 $\forall i >= 0$，有 $uv^ixy^iz \in L$。

我们看题目所给的：对于$\{0^i1^j | j=i^2\}$，我们假定存在一个满足上述语言的为 0^n1^m ，其中 $m = n^2$，那么对于其有$|w| >= n$，将字符串 w 分为 uvxyz 五部分。要有$|vxy| <=n$，$|vy| >= 1$ 。

这个时候确定 vxy 的范围就格外重要：
如果 vxy 在 0^n 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 $m = n^2$ 了。
如果 vxy 在 1^m 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 $m = n^2$ 了。

如果 vxy 在 01 的交界处，那么就是 $vxy \in 0^+1^+$ 了，如果 uv^2xy^2z 满足上述语言，那么 uv^3xy^3z 就不可能满足了。因为 $(n+|v|)^2 - n^2 \neq (n+2|v|)^2 - (n+|v|)^2$

所以上述不满足要求。

综上所述，上述语言不是上下文无关语言。

（5）$\{a^n b^n c^i \mid n<=i<=2n\}$

证明：
泵定理：假设一个语言 L 是上下无关语言，那么由泵引理，∃ n > 0，对于语言 L 中每个满足 |w| >= n 的字符串 w，∃ u , v, x, y, z 使得 w = uvxyz 且有 |vxy| <= n, |vy| >= 1 并且对于 ∀i >= 0, 有 $uv^i xy^i z$ ∈ L。

我们看题目所给的：对于$\{a^n b^n c^i \mid n<=i<=2n\}$，我们假定存在一个满足上述语言的为 $a^n b^n c^n$ ，那么对于其有|w| >= n，将字符串 w 分为 uvxyz 五部分。
要有|vxy| <=n, |vy| >= 1 。

这个时候确定 vxy 的范围就格外重要：
如果 vxy 在 a^n 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 b 的个数等于 a 的了。
同理，如果 vxy 在 b^n 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 b 的个数等于 a 的了。
如果 vxy 在 c^n 中，那么 uxz 就不满足 i>=n 了。

如果 vxy 在 ab 的交界处，那么由于|vy| >= 1，我们知道 v 或者 y 必定至少有一个是 a 或者是 b。都有 uv^2xy^2z 要么不满足 a、b 个数相等，要么不满足 i>=n。
如果 vxy 在 bc 的交界处，那么由于|vy| >= 1，我们知道 v 或者 y 必定至少有一个是 b 或者是 c。都有 uxz 要么不满足 a、b 个数相等，要么不满足 i>=n

综上所述，上述语言不是上下文无关语言。

（6）$\{ww^Rw$ | w 是 0 和 1 的串$\}$

证明：
泵定理：假设一个语言 L 是上下无关语言，那么由泵引理，∃ n > 0，对于语言 L 中每个满足 |w| >= n 的字符串 w，∃ u , v, x, y, z 使得 w = uvxyz 且有 |vxy| <= n, |vy| >= 1 并且对于 ∀i >= 0, 有 $uv^i xy^i z$ ∈ L。

我们看题目所给的：对于$\{ww^Rw$ | w 是 0 和 1 的串$\}$，我们假定存在一个满足上述语言的为 $0^n 1^{2n} 0^{2n} 1^n$ ，那么对于其有|w| >= n，将字符串 w 分为 uvxyz 五部分。
要有|vxy| <=n, |vy| >= 1 。

这个时候确定 vxy 的范围就格外重要：
如果 vxy 在 0^n 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 ww^Rw 的形式了。

同理，如果 vxy 在 1^n 中，那么 uv^2xy^2z 就不满足 ww^Rw 的形式了。

如果 vxy ∈ 0^+1^+，那么对于 uv^2xy^2z 都不可能满足 $0^n1^{2n}0^{2n}1^n$ 的形式了。
如果 vxy ∈ 1^+0^+，那么对于 uv^2xy^2z 都不可能满足 $0^n1^{2n}0^{2n}1^n$ 的形式了。

综上所述，上述语言不是上下文无关语言。

2. 使用奥格登引理证明下列语言不是 CFL

（1）$\{0^i1^j0^k \mid j = \max(i,k)\}$

证明：
奥格登引理在这里我就不赘述了。

我们看语言 $0^n1^{n+1}0^{n+1}$ 我们为前面的 0^n 上标记，可以知道将字符串 w 分为五个部分时，w = uvxyz 时，vxy 必定包含至少一个标记，至多包含 n 个，因此我们确定 v 必定在 0^n 中，如果 v、y 都是包含 01 的串，那么对于 uv^2xy^2z 就会出现 01 串交替出现，不成立。
那么我们确定，v 是 0^+ y 是 0^+ 或者是 1^+ 或者什么都不是
当 y ∈ 0^+ 或者什么都不是，那么对于 uv^3xy^3z 都不可能满足中间 1 的个数是最大值即：$j = \max(i,k)$。
如果 y ∈ 1^+ ，uv^2xy^2z 时 0 的个数的最大值就是前面一个的，如果此时满足上述语言，就是 $n+|v| = n+1 +|y|$ 即 $|v| = |y| + 1$
那么此时 uv^3xy^3z 就不满足了，因为 $n+2|v|$ 与 $n+1 +2|y|$ 不可能相等。

综上所述，上述语言不是上下文无关语言。

（2）$\{a^nb^nc^i \mid i\neq n\}$

证明：
奥格登引理在这里我就不赘述了。

我们看语言 $a^nb^nc^{n+n!}$ 我们为前面的 a^n 上标记，可以知道将字符串 w 分为五个部分时，w = uvxyz 时，vxy 必定包含至少一个标记，至多包含 n 个，因此我们确定 v 必定在 a^n 中，如果 v、y 都是包含 ab 的串，那么对于 uv^2xy^2z 就会出现 ab 串交替出现，不成立。
那么我们确定，v 是 a^+ y 是 a^+ 或者是 b^+ 或者什么都不是
当 y ∈ a^+ 或者什么都不是，那么 uv^2xy^2z a、b 的个数就不相等了。
如果 y ∈ 1^+ ，可以知道 $|v| = |y|$，由 $|vxy| <=n$ 可知 $|v|$ 是小于 n 的，那么它必定是 n!因式中的一个，那么 $uv^{1+n!/|v|}xy^{1+n!/|v|}z$ 即我们能够造出 $(1+n!/|v|)|v|$

再加上原来的部分等于 n+n! ，此时就不再满足上述 i≠n 了。

综上所述，上述语言不是上下文无关语言。

3. 构造与下列文法等价的 CNF。

S -> ABB | bAA
B ->aBa|aa| ε
A ->bbA| ε

解：
（1） 消除 ε 产生式后结果为：
S -> ε | b |A | B | AB | BB | ABB| bA | bAA
B -> aBa | aa
A -> bbA |bb

（2） 消除单一产生式后有：
S → ε | bbA | bb | aBa | aa | AB | BB | ABB | b | bA | bAA
B → aBa | aa
A → bbA | bb

（3） 引人新变量 C1, C2, C3, C4, C5, C6
S → ε | b| C3A| C2C2| C1C6|C1C1| AB | BB | AC5 | C2A | C2C4
B → C1C6 | C1C1
A → C3A | C2C2
C1 → a
C2 → b
C3 → C2C2
C4 → AA
C5 → BB
C6 → BC1

综上，我就构建完成文法对应的 CNF 了。