

## 1. 第一题:

题目:

6. 令  $A$ 、 $B$  和  $C$  是任意正规式, 证明以下关系成立:

$$(A|B)^* = (A^*B^*)^* = (A^*|B^*)^*$$

解答:

(1) 先证明  $(A|B)^* = (A^*B^*)^*$

首先我们知道  $\varepsilon \in (A|B)^*$ , 并且  $\varepsilon \in (A^*B^*)^*$ . 所以两者在空语句上没有问题。

之后我们采用数学归纳的思想进行证明:

对于任意语句  $r$ , 我们假定上述两个集合它都满足。那么我们在往后面加字符的时候, 应该都满足上面两个的集合。

对于  $r \in (A|B)^{|r|}$  那么  $ra \in (A|B)^{|r|}A$   $rb \in (A|B)^{|r|}B$  所以在后面添加字符依旧满足  $(A|B)^*$

对于  $r \in (A^*B^*)^{|n|}$  那么  $ra \in (A^*B^*)^{|n|}(A^1B^0)$   $rb \in (A^*B^*)^{|n|}(A^0B^1)$  所以在后面添加字符满足  $r \in (A^*B^*)^*$

综上所述可知, 对于任意的子串  $r$ , 我们在后面添加字符, 都满足上面两个集合, 所以可证  $(A|B)^* = (A^*B^*)^*$

(2) 先证明  $(A|B)^* = (A^*|B^*)^*$

首先我们知道  $\varepsilon \in (A|B)^*$ , 并且  $\varepsilon \in (A^*|B^*)^*$ . 所以两者在空语句上没有问题。

之后我们采用数学归纳的思想进行证明:

对于任意语句  $r$ , 我们假定上述两个集合它都满足。那么我们在往后面加字符的时候, 应该都满足上面两个的集合。

对于  $r \in (A|B)^{|r|}$  那么  $ra \in (A|B)^{|r|}A$   $rb \in (A|B)^{|r|}B$  所以在后面添加字符依旧满足  $(A|B)^*$

对于  $r \in (A^*|B^*)^{|n|}$  那么  $ra \in (A^*|B^*)^{|n|}(A^1)$   $rb \in (A^*|B^*)^{|n|}(B^1)$  所以在后面添加字符满足  $r \in (A^*|B^*)^*$

综上所述可知, 对于任意的子串  $r$ , 我们在后面添加字符, 都满足上面两个集合, 所以可证  $(A|B)^* = (A^*|B^*)^*$

(3) 经过上面两个证明, 我们可知:

$$(A|B)^* = (A^*B^*)^* = (A^*|B^*)^*$$

2. 第二题:

8. 给出下面正规表达式:

(1) 以 01 结尾的二进制数串;

(2) 能被 5 整除的十进制整数;

(1) 以 01 结尾的二进制数串:

答: 可以为

$(0|1)^*(01)$

(2) 能被 5 整除的十进制整数:

$0 | 5 | (1|2|3|4|5|6|7|8|9) + (0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)^*(0|5)$

3. 第三题:

12. 将图 3.18 的(a)和(b)分别确定化和最少化。

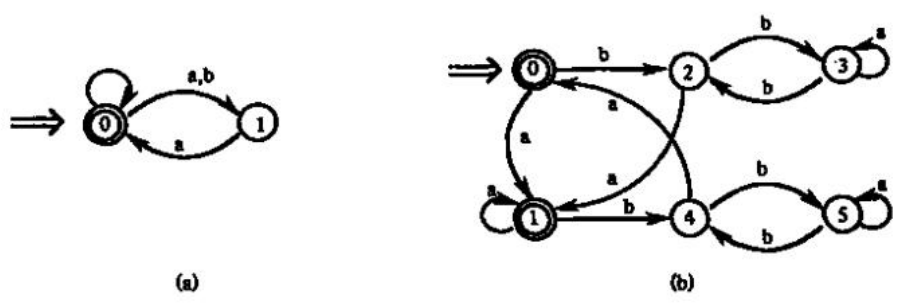
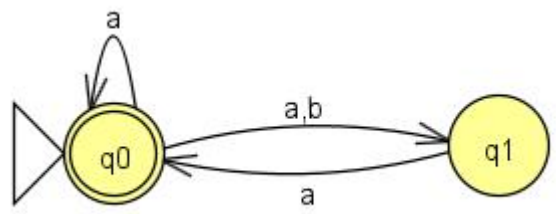


图 3.18 有限自动机

(1) 初始的自动机:



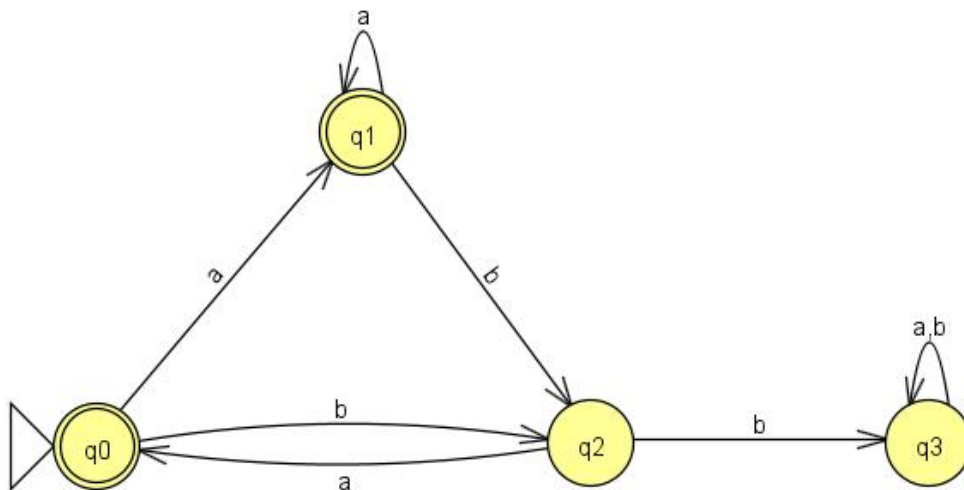
确定化:

	a	b
{0}	{0, 1}	{1}
{0, 1}	{0, 1}	{1}
{1}	{0}	$\Phi$
$\Phi$	$\Phi$	$\Phi$

对上面进行编号：

	a	b
0	1	2
1	1	2
2	0	3
3	3	3

DFA 图像：



最少化：

首先可以根据是否为终结集，分为  $\{0, 1\}$  和  $\{2, 3\}$

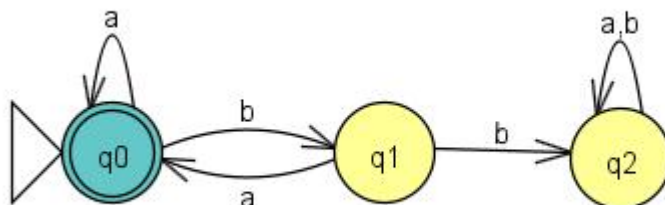
然后  $\{0, 1\}a = \{1\}$      $\{0, 1\}b = \{2\}$     所以不需要进一步的划分了

对于  $\{2, 3\}a = \{0, 3\}$      $\{2, 3\}b = \{3\}$     所以需要进一步的划分，分为  $\{2\}$   $\{3\}$

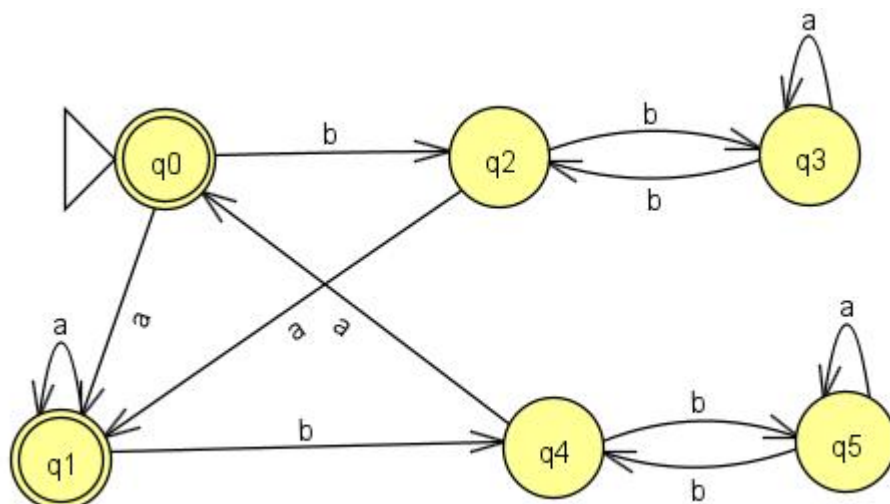
综上可知划分为  $\{0, 1\}$   $\{2\}$   $\{3\}$

分别标号为 0, 1, 2

所以最小化 DFA 应该为下面：



(2) 初始的自动机:



确定化:

我们观察到上面的自动机没有空转换, 也没有对同一字符有多种转换的结果, 所以上面的自动机并不是 NFA, 已经是确定化的 DFA 了。

最少化:

首先可以根据是否为终结集, 分为  $\{0, 1\}$  和  $\{2, 3, 4, 5\}$

然后  $\{0, 1\}a = \{1\}$   $\{0, 1\}b = \{2, 4\}$  所以不需要进一步的划分了

对于  $\{2, 3, 4, 5\}a = \{0, 1, 3, 5\}$   $\{2, 3, 4, 5\}b = \{2, 3, 4, 5\}$  所以需要进一步的划分, 首先分为  $\{2, 4\}$   $\{3, 5\}$

$\{2, 4\}a = \{0, 1\}$   $\{2, 4\}b = \{3, 5\}$

$\{3, 5\}a = \{3, 5\}$   $\{3, 5\}b = \{2, 4\}$

综上可知划分为  $\{0, 1\}$   $\{2, 4\}$   $\{3, 5\}$

分别标号为 0, 1, 2

