2152118 史君宝 形式语言与自动机 第四次作业

1.利用 Myhill-Nerode 定理证明下列语言是否正则语言，如果是正则语言，请构造其 FA、RE 及 RG。

在证明之前，我们先阐述一下我对于 Myhill-Nerode 定理的理解。首先它给出了一个等价关系 R_L ，如果对于 x、y 来说，有 z，使得 xz 和 yz 都到达了可接受状态，那么 x R_L y，也就是说 x 和 y 是满足我们定义的 R_L 等价关系的。
首先一个正则语言能够找到与之对应的 DFA，对应的其内部的状态也是有穷的，如果一个语言是正则语言，那么那些不满足 R_L 等价关系的串，其接受结果应该对应 DFA 中的不同的状态。
也就是说，如果我们发现满足我们所说的语言的前缀的这些串，彼此之间都是属于不同的等价类，也就是说等价类的数目是无穷的，那么上述的语言就不是正则语言。

总结下来，应该分为以下几步：
找到符合语言的前缀的串。
证明上面的串都是不同的等价类。
证明等价类的数目是无穷的。
证明上述语言不是正则语言。

（1） $\{x|x=x^R，x\in\{0,1\}^+\}$

解：定义 L = $\{x|x=x^R，x\in\{0,1\}^+\}$，同时我们定义上述语言的等价关系 R_L ，
我们找到两个串 x,y， $x,y\in\{0,1\}^+$
其中 y=x(01,10)，在 x 后面随机加上 01 或者 10 是 y
对 x 有，$xx^R \in L$ ，对于 y 来说，$yx^R \notin L$ ，也就是 $x01x^R \notin L$ 或 $x10x^R \notin L$
可知，对于任意的串来说，后面加上 01 或者 10 所形成的新串都不是等价类。
而串的个数是无穷的，对应的 R_L 的指数也是无穷的。
所以上述语言 L 不是正则语言。

（2） $\{x|x$ 中 0 的个数不少于 1 的个数，$x\in\{0,1\}\}$

解：定义 L = $\{x|x$ 中 0 的个数不少于 1 的个数，$x\in\{0,1\}\}$，
同时我们定义上述语言的等价关系 R_L ，
我们找到两个串 x,y， $x,y\in\{0,1\}^+$
其中 x 是全为 0 的串，y=x00，即在 x 后面加上 00 就是 y
对 x 有，$x1^{|x|+1} \notin L$ ，对于 y 来说，$y1^{|x|+1} \in L$ ，也就是 $x001^{|x|+1} \in L$ 。
可知，对于任意的串来说，后面加上 00 所形成的新串都不是等价类。
而串的个数是无穷的，对应的 R_L 的指数也是无穷的。
所以上述语言 L 不是正则语言。

（3） $\{xx^Rw|x,w\in\{0,1\}^+\}$

解：定义 $L = \{xx^Rw|x,w\in\{0,1\}^+\}$，同时我们定义上述语言的等价关系 R_L ，
我们找到两个串 x,y， $x,y\in\{0,1\}^+$
其中 y=x(01,10)，在 x 后面随机加上 01 或者 10 是 y
对 x 有，$xx^Rw \in L$ ，对于 y，$yx^Rw \notin L$ ，也就是 $x01x^Rw \notin L$ 或 $x10x^Rw \notin L$
可知，对于任意的串来说，后面加上 01 或者 10 所形成的新串都不是等价类。
而串的个数是无穷的，对应的 R_L 的指数也是无穷的。
所以上述语言 L 不是正则语言。

2.判断下列命题，并证明你的结论。

（1）正则语言的任意子集都是正则语言。

解：这个命题是错误的。
首先对于 $L = \{x|x\in\{0,1\}^*\}$ 这个语言来说，它是正则语言。
但是我们取它的子集的时候，就会发现并不是正则语言。
比如对于 $L = \{x|x=0^n1^n，n>=1\}$ 我们之前已经多次证明了，它并不是正则语言。
所以说上述命题是错误的。

（2）正则语言的补也是正则语言。

解：这个命题是正确的。对应书上的知识点：正则语言的封闭性。
我们按照书上的证明方法，继续证明一次：
首先，对于一个正则语言，我们可以找到对应的 DFA，其文法对应的是：
L = （Q，Σ，δ，q_0，F），由于对于 DFA 每个字母对会对应一次状态转移，
那么上述语言的补语言的文法表示就是，M = （Q，Σ，δ，q_0，Q - F），
我们已经找到补语言的文法了，说明其就是正则语言，所以上述命题是正确的。

（3）无穷多个正则语言的并不一定是正则语言。

解：上述命题是正确的。
首先无穷多个正则语言的合并是可以是正则语言的，这个是无需证明的。
首先我们的视角可以关注非正则语言 $L = \{x|x=0^n1^n，n>=1\}$
上述非正则语言可以由一个个正则语言去生成：
比如 L1 = {01}，L2 = {0011} ，L3 = {000111}， L4 = {00001111}，
$Ln = \{0^n1^n\}$
那么对于 L = L1∪L2∪L3∪……∪Ln∪……
最终会使得上述 L 变成 $L = \{x|x=0^n1^n，n>=1\}$ ，即非正则语言，所以上述命题是正确的。

3．设 L 是正则语言，字母表是Σ，定义 L1/3 = {w ∈ Σ*|∃ x, y ∈ Σ*, wxy ∈ L, |w| = |x| = |y|}。试证明 L1/3 是否正则语言吗？

解：上述语言是正则语言，这一题与我们上次作业做的一题是相同的。
即 F（n）= 2n
上述的问题比较难以找到相应的 DFA 和对应的与 DFA 相关的 n 系数，难以通过泵定理去证明。
但是我们可以尝试构造相应的文法，如果我们构造成功文法，就可以证明上述语言是正则语言。

对于题目所给的 L 语言，其对应的文法是 L =（Q1，Σ1，δ1，q_1，F1）
那么对于 F（n）= 2n 语言有其文法是 M =（Q2，Σ2，δ2，q_2，F2）
其中 假设 L 中有任一语言，其长度为 len

则 Q2 为 [q,p] 其中对于 w ∈ Σ^* 以及 y ∈ $\Sigma^{|2w|}$
有 q = δ1（q1，w） δ1（p，y）= F1 p 为 Q1 其中的状态。

Σ2 = Σ1

δ2（[q,p]，m）= [δ1（q,m）,z] 其中 δ1（z，n）= p 其中 m ∈ Σ
n ∈ Σ^2

则 F2 为 [q,p] 其中对于 w ∈ $\Sigma^{|len/3|}$ 以及 y ∈ $\Sigma^{|2*len/3|}$
且 |w|=|len/3| |y|=|2*len/3|
有 q = δ1（q1，w） δ1（p，y）= F1 p 为其中的状态。

我们按照上次作业提到的方法成功证明了
L1/3 是正则语言。

4. 用正则语言的**扩充泵引理**证明语言{$0^n1^m0^m$，n, m≥1}不是正则的。

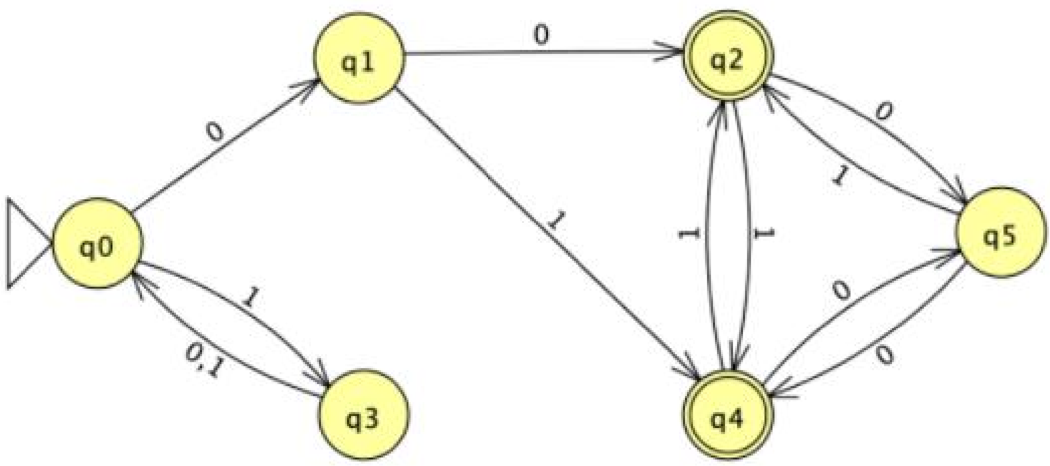
扩充泵引理阐述：
假设 L 是正则的. 那么由扩充泵引理可知，存在一常数 k>0 ，对于语言 L 中每个满足 |y| ≥ k 的字符串 s = xyz，存在一组 u, v, w 使得 y = uvw
且有 |uv| ≤ k, |v| ≥ 1，并且有 ∀i ≥ 0, xuv^iwz ∈ L 。
由上可知，上述就是对泵引理的翻版，其内核与泵引理相同，但是可以解决一些泵引理解决不了的问题。

解：我们考虑 字符串 s = $0^n1^m0^m$ ，假定我们 s = xyz ,其中|y| ≥ k
我们可以让 x = 0^n ，让 y = 1^k ，让 z = $1^{m-k}0^m$ 。
完成了上述划分，我们就可以继续证明了。

$y = uvw$ 由 $y = 1^k$，可以知道，对于$|v| \geq 0$，可知当 $i=0$ 的时候，
$xuwz = 0^n1^{m-|v|}0^m$，由$|v| \geq 0$，$m - |v| \leq m$，所以可知上述语言不是正则语言。

答：由上述扩充泵引理的证明可知，上述语言不是正则语言。

5. 对下图给出的 DFA，求出它的极小状态 DFA，要求给出主要的求解步骤。



我们采用极小化算法。

（1） 首先我们先排除接收状态和非接受状态
接受状态：q2 ，q4
非接受状态：q0，q1，q3，q5

q1		不填	不填	不填	不填
q2	X	X	不填	不填	不填
q3			X	不填	不填
q4	X	X		X	不填
q5			X		X
	q0	q1	q2	q3	q4

（2） 接下来我们排除与接受状态密切相关的

q0 + 0 = q1（非接受） q0 + 1 = q3（非接受）
q1 + 0 = q2（接受） q1 + 1 = q4（接受）

q3 + 0 = q0（非接受） q3 + 1 = q0（非接受）
q5 + 0 = q4（接受） q5 + 1 = q2（接受）

由上知 {q1，q5} 和{q0，q3}彼此间互不相容。

q1	X	不填	不填	不填	不填
q2	X	X	不填	不填	不填
q3		X	X	不填	不填
q4	X	X		X	不填
q5	X		X	X	X
	q0	q1	q2	q3	q4

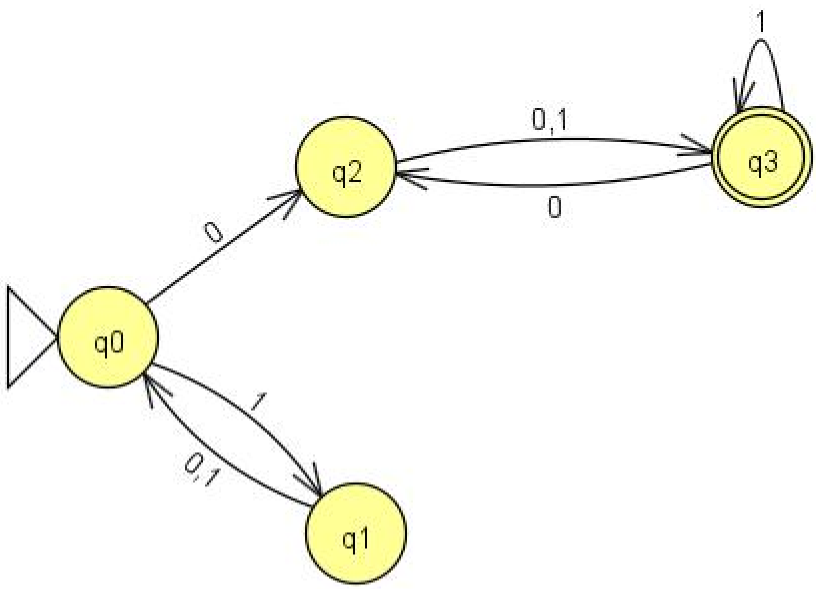
（3）剩下的只有 q2 - q4　　　q1 - q5　　　q0 - q3　这几对了。
由上
q0 + 0 = q1（非接受） q0 + 1 = q3（非接受）
q1 + 0 = q2（接受） q1 + 1 = q4（接受）
q3 + 0 = q0（非接受） q3 + 1 = q0（非接受）
q5 + 0 = q4（接受） q5 + 1 = q2（接受）

由上知 q0 + 0 = q1 ，q3 + 0 = q0 。但是 q0 和 q1 是可区别的，q0 和 q3 也是

q1	X	不填	不填	不填	不填
q2	X	X	不填	不填	不填
q3	X	X	X	不填	不填
q4	X	X		X	不填
q5	X		X	X	X
	q0	q1	q2	q3	q4

（4）综上可知，上述只有{q2 ，q4} {q1 ， q5} 是可以合并的。

所以 合并后的最小化 DFA 为：



1
0,1
q2
q3
0
0
q0
1
0,1
q1