Introduction to control systems
TI0118

Homework I

Nome: Italo Aguiar do Nascimento Paulino
Matrícula: 404125
Curso: Engenharia de Computação

Exercício 1

1. Dado o seguinte sistema de dois tanques:

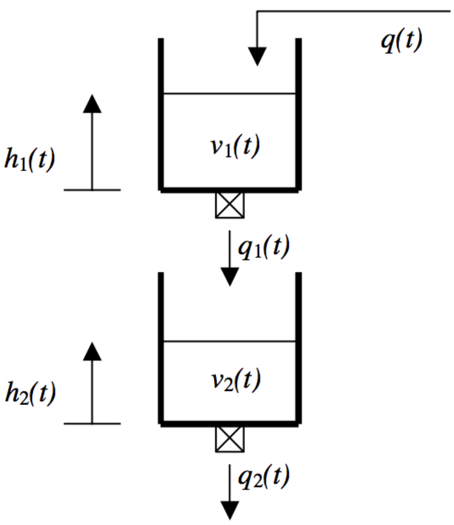

Figura 1: Two-tank system for Exercise 1.

Tomando em consideração que os líquidos são incompressíveis e que só um líquido adentra o sistema (não ocorre reação), podemos afirmar que a dinâmica do sistema está nas variações de volume que ocorrem. Desse modo, podemos modelar o sistema do seguinte modo:

Tanque 1 $\dfrac{dv_1(t)}{dt} = q(t) - q_1(t) = q(t) - k_1 h_1(t)$

Assim, como: $\dfrac{dv_1(t)}{dt} = S_1 \dfrac{dh_1(t)}{dt} = S_1 \dot{x}_1(t)$ e $x_1(t) = h_1(t)$, teremos:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{q(t) - k_1 x_1(t)}{S_1}$$

Tanque 2 $\frac{dv_2(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t) = k_1 h_1(t) - k_2 h_2(t)$

Assim, como: $\frac{dv_2(t)}{dt} = S_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = S_2 \dot{x}_2(t)$ e $x_2(t) = h_2(t)$, teremos:

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)}{S_2}$$

Desse modo, podemos definir o modelo de estados no espaço do sistema, sabendo que a saída é a altura do tanque 2 (h_2):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{S_1} & 0 \\ \frac{k_1}{S_2} & -\frac{k_2}{S_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} q(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. Primeiramente, é necessário atribuir os valores dados às variáveis e criar as matrizes para poder criar o sistema descrito na equação de estados no espaço.

```
%Definicão dos valores das variáveis e das matrizes (A,B,C,D):
k1=0.02;
s1=0.5;
k2=0.5;
s2=2;
A=[-k1/s1 0 ; k1/s2 -k2/s2];
B=[1/s1; 0];
C=[1 0];
D=[0];
twotank=ss(A,B,C,D);
```

Posteriormente, podemos simular o que é pedido no item (a) e ver o resultado na figura 2.

```
t=linspace(0,500,5000); %cria um vetor de 0 à 500 com 5000 elementos espacados igualmente
q = [ones(1,5000) * 2]; %criacão do vetor referente ao degrau com ganho 2
y = lsim(twotank, q, t); %simulacão do sistema a partir da ferramenta lsim
plot(t, y);
axis([0 500 0 120]);
```

Em seguida, podemos simular o que é pedido no item (b) e ver o resultado na figura 3.

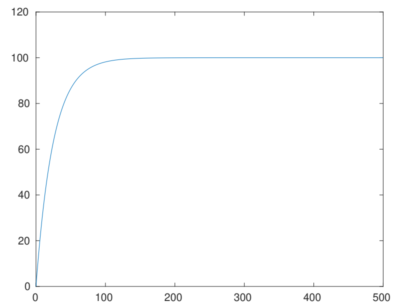

Figura 2: Resposta do sistema 1 à um degrau com ganho 2

```
[q,t]=gensig('square',15,150,0.1); %funcão que gera um sinal do tipo
    passado com as características exigidas
y = lsim(twotank, q, t); %simulacão do sistema
plot(t, y);
```

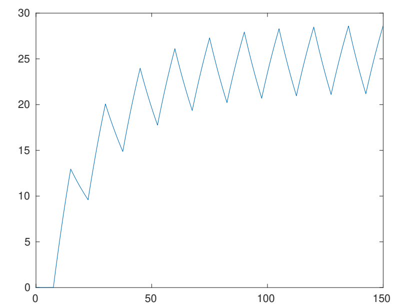

Figura 3: Resposta do sistema 1 a um sinal quadrado

3. Referente ao sistema em geral, podemos calcular a função de transferência:

```
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)

num =          0    2.0000    0.5000
den =     1.0000    0.2900    0.0100
```

Logo, $G(s) = \dfrac{2s + 0.5}{s^2 + 0.29s + 0.01}$. Assim, os polos são $-\dfrac{1}{25}$ e $-\dfrac{1}{4}$, que são números reais e negativos. Dessa análise, podemos afirmar que o sistema é estável e é superamortecido.

Partindo dessas saberes anteiores é fácil ver que o sistema, dado um input, evoluirá para o estacionário de forma crítica:

Pela figura 2, vemos a resposta ao degrau unitário e a evolução crítica para o estacionário. Fisicamente, o gráfico é referente à altura do tanque 2, o que nos dá a entender que dada uma entrada constante, a altura e volume do tanque permanecem constantes a partir de um determinado tempo.

Pela figura 3, vemos a resposta ao degrau unitário e a evolução crítica para o estacionário, mas com varições, o que é fruto do comportamento do sinal de input. Fisicamente, vemos que o gráfico faz completo sentido, pois uma vez que o sistema se estabiliza, temos as oscilações fruto da "ligada"e "desligada"de input, que referem-se a momentos que o tanque não recebe água ou recebe menos água e continua tendo vazamento $q_2(t)$.

Exercício 2

1. Aplicando a transformada de Laplace à descrição entrada-saída 1, considerando estado inicial relaxado:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 5u(t) \tag{1}$$

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 5Y(s) = sU(s) + 5U(s)$$

Assim, obtemos:

$$(s^2 + 4s + 5)Y(s) = (s + 5)U(s)$$

Desse modo, obtemos o polinômio característico de nossa sistema: $s^2 + 4s + 5$ cujas raízes são: $x_1 = -2+i$ e $x_2 = -2-i$. Assim, podemos definir os modos do sistemas, que são a base que gera o espaço de soluções do sistema:

$$e^{x_1 t} = e^{(-2+i)t} = e^{-2t} * e^{it} = e^{-2t} * (cos(t) + isen(t))$$

$$e^{x_2 t} = e^{(-2-i)t} = e^{-2t} * e^{-it} = e^{-2t} * (cos(t) - isen(t))$$

Logo, toda resposta do sistema é fruto da combinação linear dessas funções. Note que já que a função não tem polos repetidos não precisamos utilizar o Wronskiano para provar ou encontrar ortogonalidades e evitar a repetição das funções.

2. Sabemos que quando aplicamos a transformada de laplace em uma derivada, temos:

$$\mathscr{L}\{\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n}\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - ... - s^0y^{(n-1)}(0) \tag{2}$$

Logo, aplicando 2 a nossa equação teremos:

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 4sY(s) - 8 + 5Y(s) = sU(s) + 5U(s)$$

$$(s^2 + 4s + 5)Y(s) = 2s + 9 + (s + 5)U(s)$$

$$Y(s) = \frac{2s + 9}{s^2 + 4s + 5} + \frac{(s + 5)U(s)}{s^2 + 4s + 5}$$

onde a resposta livre é dada por:

$$R(s) = \frac{2s+9}{s^2+4s+5}$$

Podemos desenvolver essa expressão para a seguinte forma: $\dfrac{2s+9}{s^2+4s+5} = 2\dfrac{(s+2)+5/2*1}{(s+2)^2+1^2}$
Já que

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{A(s+a)+B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\} = Ae^{-at}cos\omega t + Be^{-at}sen\omega t \tag{3}$$

podemos obter, aplicando a Transformada Inversa de Laplace:

$$r(t) = 2 * e^{-2t} * (cost + \frac{5}{2}sent)$$

3. Sabemos que a resposta forçada é: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s+5}{s^2+4s+5}$ e que se o input é um degrau unitário, então: $U(s) = \dfrac{1}{s}$. Desse modo, teremos:

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s^2+4s+5)}$$

Agora, é necessário aplicar o teorema das frações parciais:

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s^2+4s+5)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2+4s+5}$$

Obtemos, $k_1 = sY(s)\Big|_{s=0} = \dfrac{5}{5} = 1$.
Desse modo, podemos substituir k_1 e fazendo o m.m.c. para somar as duas frações, temos:

$$\frac{s+5}{s(s^2+4s+5)} = \frac{(k_2+1)s^2 + (k_3+4)s + 5}{s(s^2+4s+5)}$$

Assim, obtemos $k_2 = -1$ e $k_3 = -3$. Logo:

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s^2+4s+5)} = \frac{1}{s} + \frac{-s-3}{s^2+4s+5}$$

Note que podemos desenvolver a seguinte expressão:

$$\frac{-s-3}{s^2+4s+5} = -\frac{(s+2)+1}{(s+2)^2+1^2}$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace e utilizando 3, obtemos:

$$y(t) = u(t) - e^{-2t}(cost + sent)$$

4. Plotando a resposta livre, temos 4

```
%plot da resposta livre
t=linspace(0,10,50000);
r=zeros(50000,1);
for i=1: length(t)
r(i)=2*exp(-2*t(i))*(cos(t(i))+5/2*sin(t(i)));
end
plot(t,r)
```

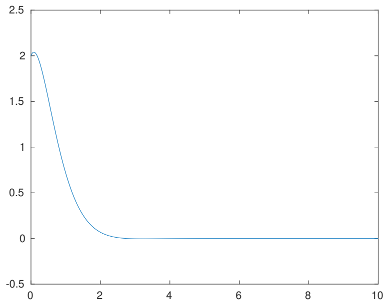

Figura 4: Resposta livre do sistema

Assim, pode-se ver a evolução natural do sistema que inicia e desenvolve-se dados seus estados iniciais e com o tempo estabiliza em zero.

Plotando a resposta forçada, temos 5

```
%plot da resposta forcada
t=linspace(0,10,50000);
yf=zeros(50000,1);
for i=1: length(t)
yf(i)=1-exp(-2*t(i))*(cos(t(i))+sin(t(i)));
end
plot(t,yf)
```

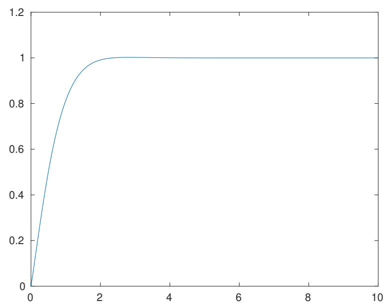

Figura 5: Resposta forçada do sistema

Assim, pode-se ver a evolução forçada do sistema que inicia em zero, pois não considera os estados iniciais, e desenvolve-se de acordo com a resposta da dinâmica do sistema e com o tempo estabiliza no estacionário.

Plotando a combinação das duas respostas, temos 6

```
%plot da resposta do sistema
t=linspace(0,10,50000);
yf=zeros(50000,1);
for i=1: length(t)
yf(i)=1-exp(-2*t(i))*(cos(t(i))+sin(t(i)));
r(i)=2*exp(-2*t(i))*(cos(t(i))+5/2*sin(t(i)));
end
y=yf+r;
plot(t,y)
```

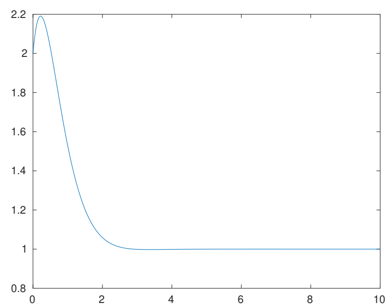

Figura 6: Resposta completa do sistema

Assim, pode-se ver o comportamento do sistema completo, que é a combinação da resposta forçada com a livre.

Exercício 3

1. Dada:

$$F_1(s) = \frac{2s+5}{s^3+6s^2+21s+26}$$

Aplicamos frações parciais:

$$F_1(s) = \frac{2s+5}{s^3+6s^2+21s+26)} = \frac{2s+5}{(s+2)(s^2+4s+13)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2+4s+13}$$

Obtemos, $k_1 = (s+2)F_1(s)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{9}$.

Desse modo, podemos substituir k_1 e fazendo o m.m.c. para somar as duas frações, temos:

$$\frac{2s+5}{(s+2)(s^2+4s+5)} = \frac{(\frac{1}{9}+k_2)s^2 + (2k_2+k_3+4*\frac{1}{9})s + (\frac{13}{9}+2k_3)}{(s+2)(s^2+4s+13)}$$

Assim, obtemos $k_2 = -\frac{1}{9}$ e $k_3 = \frac{13}{9}$. Logo:

$$F_1(s) = \frac{2s+5}{(s+2)(s^2+4s+13)} = \frac{\frac{1}{9}}{s+2} + \frac{-\frac{1}{9}s + \frac{16}{9}}{s^2+4s+13}$$

Note que podemos desenvolver a seguinte expressão:

$$\frac{-\frac{1}{9}s + \frac{16}{9}}{s^2+4s+13} = -\frac{1}{9}\frac{(s+2)+6*3}{(s+2)^2+3^2}$$

Assim, aplicando a Transformada Inversa de Laplace e utilizando 3:

$$f_1(t) = \frac{1}{9}[e^{-2t} - e^{-2t}(cos3t + 6sen3t)]$$

.

```
syms
f=(2*s+5)/(s^3+6*s^2+21*s+26)
ilaplace(f) %retorna a inversa de laplace
ans=exp(-2*t)/9 - (exp(-2*t)*(cos(3*t) - 6*sin(3*t)))/9
```

2. Dada:

$$F_2(s) = \frac{s^2+4s}{(s+2)^3}$$

Aplicamos frações parciais:

$$F_2(s) = \frac{s^2+4s}{(s+2)^3} = \frac{k_1}{(s+2)^3} + \frac{k_2}{(s+2)^2} + \frac{k_3}{s+2}$$

Já que para frações parciais de raízes repetidas temos que

$$k_i = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}F_1(s)}{ds^{i-1}F_1(s)}ds^{i-1}\Big|_{s=-p_i} \tag{4}$$

Temos que:

$k_1 = (s+2)^3 F_2\Big|_{s=-2} = -4$

$k_2 = \frac{d(s+3)^3 F_2}{ds}\Big|_{s=-2} = 2s+4\Big|_{s=-2} = 0$

$k_3 = \frac{1}{2} \times \frac{d^2(s+3)^3 F_2}{ds^2}\Big|_{s=-2} = 1$

Assim, teremos:

$$F_2(s) = -\frac{-4}{(s+2)^3} - \frac{0}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}$$

Aplicando a transformada inversa de laplace, teremos:

$$f_2(t) = -2t^2e^{-2t} + e^{-2t}$$

```
syms s
f=(s^2 +4*s)/(s+2)^3
ilaplce(f)
ans=exp(-2*t) - 2*t^2*exp(-2*t)
```

3. Dada:

$$F_3(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 7s + 6}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

Antes de aplicar quebrar nossa função em frações parciais, devemos remejar a parte superior da fração para que ela tenha potencial da parte superior menor que o da parte inferior:

$$2s^3 + 5s^2 + 7s + 6 = 2 * (s^3 + 5s^2 + 8s + 4) + \frac{-5s^2 - 9s - 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

Aplicamos frações parciais:

$$\frac{-5s^2 - 9s - 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \frac{k_1}{(s+2)^2} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+1}$$

Utilizando as regras aplicadas anteriormente é possível obter os valores de k:

$k_1 = (s+2)^2 F_3(s)\Big|_{s=-2} = 4$

$k_2 = \{\frac{d(s+2)^2 F_3(s)}{ds}\}\Big|_{s=-2} = \{\frac{(-10s-9)(s+1) - (-5s^2 - 9s - 2)}{(s+1)^2}\}\Big|_{s=-2} = -7$

$k_3 = (s+1) F_3(s)\Big|_{s=-1} = 2$

Assim, obtemos:

$$F_3(s) = 2 + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{-7}{s+2} + \frac{2}{s+1}$$

e aplicando a transformada inversa de Laplace, teremos:

$$f_3(t) = 2\delta(t) + 4te^{-2t} - 7e^{-2t} + 2e^{-t}$$

```
syms s
f=(2*s^3+5*s^2+7*s+6)/(s^3+5*s^2+8*s+4)
ans=2*exp(-t) - 7*exp(-2*t) + 2*dirac(t) + 4*t*exp(-2*t)
```

Exercício 4

1. Dada o sistema com as matrizes A,B,C e D definidas:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0.25\end{bmatrix} q(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}13 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Sabemos que é a função de transferência é dada por:

$$G(s) = (C(sI - A)^{-1}B) + D$$

Assim, precisamos calcular $(sI - A)^{-1}$, sabendo que $(sI - A)^{-1} = \dfrac{adj(sI - A)}{det(sI - A)}$:

$$sI - A = \begin{bmatrix}s & -1\\ 4 & s+5\end{bmatrix}$$

$$Adj(sI - A) = \begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -4 & s\end{bmatrix}$$

$$det(sI - A) = s^2 + 5s + 4$$

Assim,

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -4 & s\end{bmatrix}}{s^2 + 5s + 4}$$

Logo, podemos calcular $C(sI - A)^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix}13(s+5) - 36 & 9s + 13\end{bmatrix}}{s^2 + 5s + 4}$ e, em seguida, $C(sI - A)^{-1}B = \dfrac{\frac{9}{4}s + \frac{13}{4}}{s^2 + 5s + 4}$.

Assim, obtemos $G(s) = \dfrac{\frac{9}{4}s + \frac{13}{4}}{s^2 + 5s + 4}$.

2. $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{\frac{9}{4}s + \frac{13}{4}}{s^2 + 5s + 4}$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{9}{4}s + \frac{13}{4}}{s^2 + 5s + 4} \rightarrow s^2Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = \frac{9}{4}sU(s) + \frac{13}{4}U(s)$$

Aplicando a transformada inversa de laplace, obtemos o modelo input-output:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = \frac{9}{4}\dot{u}(t) + \frac{13}{4}u(t)$$

3. **Estados**: Já que temos que $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, podemos aplicar a transformada de laplace, disso obtemos:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \rightarrow (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

Já que desejamos a evolução forçada, podemos considerar o estado inicial como nulo, assim:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = (sI - A)^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s)/U(s) \\ X_2(s)/U(s) \end{bmatrix} = (sI - A)^{-1}B = \frac{\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25s \end{bmatrix}}{s^2 + 5s + 4}$$

Desse modo, como $U(s) = \dfrac{1}{s+1}$:

$$X_1(s) = \frac{0.25}{(s+1)(s^2 + 5s + 4)} = \frac{0.25}{(s+1)^2(s+4)}$$

$$X_2(s) = \frac{0.25 * s}{(s+1)(s^2 + 5s + 4)} = \frac{0.25 * s}{(s+1)^2(s+4)}$$

Aplicando frações parciais na primeira e em seguida a transformada inversa de Laplace, teremos:

$$X_1(s) = \frac{0.25}{(s+1)^2(s+4)} = \frac{k_1}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+4}$$

Obtemos assim:

$k_1 = (s+1)^2 Y(s)\Big|_{s=-1} = \dfrac{1}{12}$

$k_2 = \{\dfrac{d(s+1)^2 Y(s)}{ds}\}\Big|_{s=-1} = \{\dfrac{-\frac{1}{4}}{(s+4)^2}\}\Big|_{s=-1} = -\dfrac{1}{36}$

$k_3 = (s+4)Y(s)\Big|_{s=-4} = \dfrac{1}{36}$

$$X_1(s) = \frac{0.25}{(s+1)^2(s+4)} = \frac{\frac{1}{12}}{(s+1)^2} + \frac{-\frac{1}{36}}{s+1} + \frac{\frac{1}{36}}{s+4}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{12}te^{-t} - \frac{1}{36}e^{-t} + \frac{1}{36}e^{-4}$$

Aplicando frações parciais na segunda e em seguida a transformada inversa de Laplace, teremos:

$$X_2(s) = \frac{0.25s}{(s+1)^2(s+4)} = \frac{k_1}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+4}$$

Obtemos assim:

$k_1 = (s+1)^2 Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{-1}{12}$

$k_2 = \{\frac{d(s+1)^2 Y(s)}{ds}\}\Big|_{s=-1} = \{\frac{\frac{1}{4}(s+4) - \frac{1}{4}}{(s+4)^2}\}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{9}$

$k_3 = (s+4)Y(s)\Big|_{s=-4} = -\frac{1}{9}$

$$X_2(s) = \frac{0.25s}{(s+1)^2(s+4)} = -\frac{\frac{1}{12}}{(s+1)^2} + \frac{\frac{1}{9}}{s+1} - \frac{\frac{1}{9}}{s+4}$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{12}te^{-t} + \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{-4}$$

Saída: Sabemos que $G(s) = \frac{\frac{9}{4}s + \frac{13}{4}}{s^2+5s+4}$ e tendo $u(t) = e^{-t}$, teremos $U(s) = \frac{1}{s+1}$.
Disso, teremos $Y(s) = \frac{\frac{9}{4}s + \frac{13}{4}}{(s+1)(s^2+5s+4)}$.
Aplicamos o teorema das frações parciais:

$$Y(s) = \frac{\frac{9}{4}s + \frac{13}{4}}{(s+1)^2(s+4)} = \frac{k_1}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+4}$$

Obtemos assim:

$k_1 = (s+1)^2 Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{3}$

$k_2 = \{\frac{d(s+1)^2 Y(s)}{ds}\}\Big|_{s=-1} = \{\frac{\frac{9}{4}(s+4) - (\frac{9}{4}s + \frac{13}{4})}{(s+4)^2}\}\Big|_{s=-1} = \frac{23}{36}$

$k_3 = (s+4)Y(s)\Big|_{s=-4} = -\frac{23}{36}$

Logo, $Y(s) = \frac{\frac{1}{3}}{(s+1)^2} + \frac{\frac{23}{36}}{s+1} + \frac{-\frac{23}{36}}{s+4}$

Disso, podemos obter aplicando a transformada inversa de laplace:

$$y(t) = \frac{1}{3}te^{-t} + \frac{23}{36}e^{-t} - \frac{23}{36}e^{-4t}$$

Exercício 5

1. Para $\alpha = 1$ e degrau unitário, teremos: $G(s) = \dfrac{Y(S)}{U(s)} = \dfrac{s^2+s+3}{s^2+2s+10}$ e $U(s) = \dfrac{1}{s}$.

   Assim, $Y(s) = \dfrac{s^2+s+3}{s(s^2+2s+10)}$. Em seguida, aplicamos frações parciais:

$$Y(s) = \frac{s^2+s+3}{s(s^2+2s+10)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2+2s+10}$$

   Obtemos, $k_1 = sY(s)\Big|_{s=0} = \dfrac{3}{10}$.
   Desse modo, podemos substituir k_1 e fazendo o m.m.c. para somar as duas frações, temos:

$$\frac{s^2+s+3}{s(s^2+2s+10)} = \frac{(\frac{3}{10}+k_2)s^2 + (k_3 + 2 * \frac{3}{10})s + 3}{s(s^2+2s+10)}$$

   Assim, obtemos $k_2 = \dfrac{7}{10}$ e $k_3 = \dfrac{4}{10}$. Logo:

$$F_1(s) = \frac{s^2+s+3}{s(s^2+2s+10)} = \frac{\frac{3}{10}}{s} + \frac{\frac{7}{10}s + \frac{4}{10}}{s^2+2s+10}$$

   Note que podemos desenvolver a seguinte expressão:

$$\frac{\frac{7}{10}s + \frac{4}{10}}{s^2+2s+10} = -\frac{7}{10}\frac{(s+1) + \frac{-1}{7} * 3}{(s+1)^2 + 3^2}$$

   Já que $\mathscr{L}^{-1}\{\dfrac{A(s+a)+B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\} = Ae^{-at}cos\omega t + Be^{-at}sen\omega t$, podemos obter, aplicando a Transformada Inversa de Laplace e plotar 7:

$$y(t) = \frac{3}{10} + 0.7 * e^{-t}(cos3t - \frac{sen3t}{7})$$

   .

```
t=linspace(0,10,50000);
y=zeros(50000,1);
for i=1: length(t)
y(i)=3/10-0.7*exp(-t(i))*(cos(3*t(i))-sin(3*t(i)/7));
end
plot(t,y)
```

2 e 3. Os zeros da função são deslocados quando o valor de alfa varia. Sabemos que os zeros da função determinam a natureza dos modos do sistema e suas combinações. Para efeitos de melhor de visualização, vejamos as combinações que variação nos polos geram na resposta do sistema:

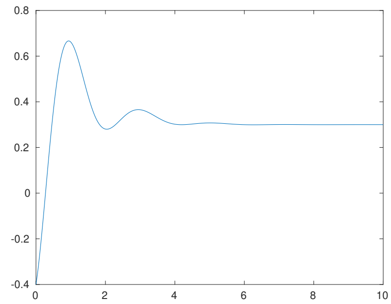

Figura 7: Resposta a um degrau unitário

```
syms s
x=[-2 -1 0 1 2];
for i=1:5
num=(x(i)*s^2+s+3)/(s*(s^2+2*s+10))
ilaplace(num)
end

num = (- 2*s^2 + s + 3)/(s*(s^2 + 2*s + 10))
ans = 3/10 - (23*exp(-t)*(cos(3*t) - (9*sin(3*t))/23))/10

num = (- s^2 + s + 3)/(s*(s^2 + 2*s + 10))
ans = 3/10 - (13*exp(-t)*(cos(3*t) - (17*sin(3*t))/39))/10

num = (s + 3)/(s*(s^2 + 2*s + 10))
ans = 3/10 - (3*exp(-t)*(cos(3*t) - (7*sin(3*t))/9))/10

num = (s^2 + s + 3)/(s*(s^2 + 2*s + 10))
ans = (7*exp(-t)*(cos(3*t) - sin(3*t)/7))/10 + 3/10

num = (2*s^2 + s + 3)/(s*(s^2 + 2*s + 10))
ans = (17*exp(-t)*(cos(3*t) - (13*sin(3*t))/51))/10 + 3/10
```

Em suma, como a forma como os modos são combinados varia, temos uma vairação na função que definira a respota do sistema, podendo ele ter as mais diversas de chegar até o estacionário a partir da combinação linear dos modos. Podemos notar isso melhor ao plotar o gráfico de cada resposta (8):

```
x=[-2 -1 0 1 2];
for i=1:5
hold on
num=[x(i) 1 3];
den=[1 2 10];
tfun=tf(num,den);
step(tfun);
end
```

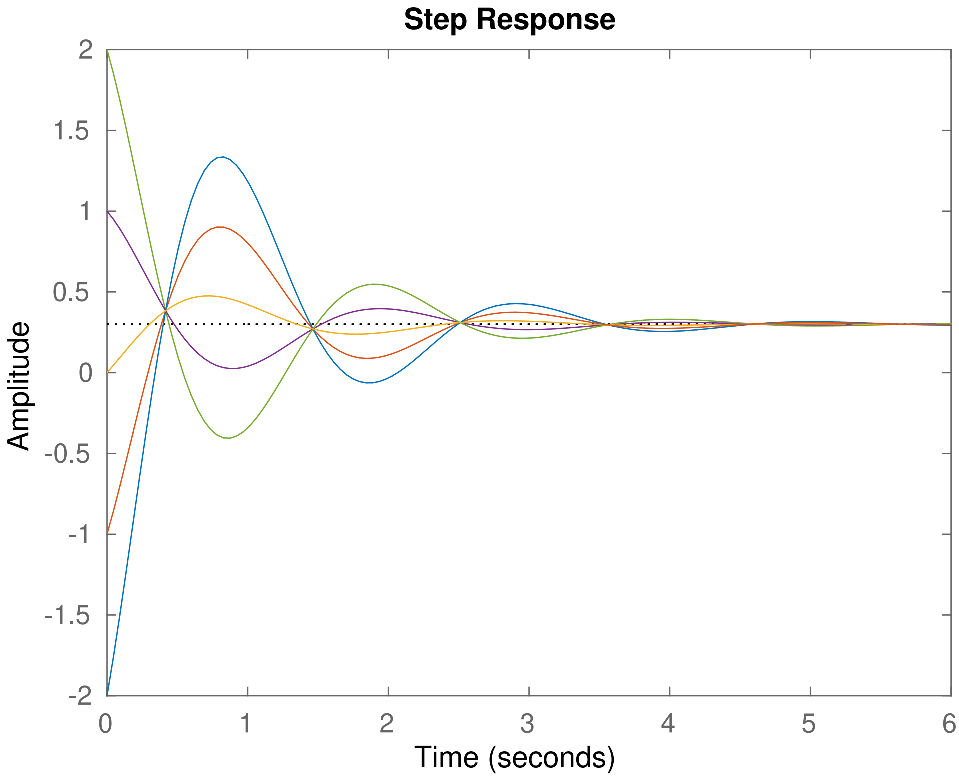

Figura 8: Respota do sistema a um degrau unitário para diversos falores de α