Biomatemáticas

por

Ítalo I. Machuca Flores
9 de septiembre de 2024

Facultad de Medicina
Universidad Católica de la Santísima Concepción

Tabla de contenidos

Índice de cuadros

Índice de figuras

Introducción

Para poder entender cierto tópicos en el área de la salud y la biología en general se necesita crear un pensamiento a través de las matemáticas. En el presente libro se presentan los temas esenciales que necesita un estudiante o cualquier persona que quiera empezar a entender las matemáticas y la biología. Sin duda que en los tiempos actuales el profesional o docente no necesita calcular a diario, pero lo que si necesita es entender el funcionamiento de aparatos o procesos que la matemática explica.

El libro comienza con lógica matemática, que sin calcular nada, nos muestra como se confecciona las estructuras matemáticas. Sigue algo importantísimo como teoría de conjuntos, donde se profundiza en las operaciones que puedo hacer con ellos y técnicas de conteo para llevarlo a cabo en aplicaciones cuando se quiera clasificar y encontrar intersecciones de grupos. El calcular comienza con el tercer capítulo, el de los números reales. Se parte desde lo más sencillo y las implicancias que tienen sus propiedades. Más adelante viene el capítulo de desigualdades, que ayuda a entender de buena manera los intervalos de números. El siguiente capítulo es el central y el que forja el pensamiento que se debe tener siempre presente en esta y casi cualquier área. Es el capítulo de las funciones matemáticas y aquí aparecen los gráficos y sus variantes, que muestran sus traslaciones, deformaciones, crecimiento, decrecimiento y finalmente modelos que se pueden hacer con algunas de ellas. Luego, viene un capítulo un poco diferente, pero no menos importante. El cálculo vectorial nos muestra como nos podemos ubicar y contextualizar en ciertos problemas con matemática que viene desde la antigua Grecia, como la trigonometría. Finalmente, está el capítulo de cálculo infinitesimal con los límites, derivadas e integrales. Quizás la idea exacta no es tan familiar para todos, ya que las definiciones matemáticas no son del todo amigables, pero el trasfondo que tiene es de suma importancia. Los límites nos muestra como nos podemos acercar a cierto punto y conocer la función sin nunca llegar a el, las derivadas tienen una amplia aplicabilidad con el calculo de razones de cambio, aceleraciones que se utilizan en aparatos tecnológicos (modelar componentes electrónicos) hoy en día y las integrales con la idea que son el área bajo la curva nos permite tener un resultado para problemas que esta matemática sería casi imposible calcular.

Como idea final quiero dejar que el libro es una guía simplificada de tópicos en matemáticas y que se vuelva una herramienta accesible.

Capítulo 1

Lógica matemática

El estudio de la lógica proporciona las herramientas necesarias para evaluar la validez de un argumento. Este marco es aplicable principalmente en las matemáticas pero se puede extrapolar a otras areas del conocimiento, permitiendo un razonamiento preciso y un uso adecuado del lenguaje matemático. Así, se facilita el empleo de simbolismos que nos permitan razonar de manera válida mediante reglas establecidas. En esta disciplina, se trabaja con elementos fundamentales llamados proposiciones..

Definición 1.0.1 ***Proposición***. *Es una expresión con sentido en un lenguaje, que afirma o niega algo y proporciona una información. Usaremos el término proposición para designar una expresión de la cual tenga sentido inequívoco decir verdadera o falsa en un cierto contexto. Se simbolizan con las letras minúsculas p, q, r, s, etc.*

Las proposiciones tienen *valores de verdad* que pueden ser verdadero (V) o falso (F). Además, las proposiciones se pueden conectar entre si con un *conectivo lógico* para formar nuevas proposiciones.

1.1. Conectivos lógicos

Definición 1.1.1 ***Conectivo lógico***. *Es un elemento de la lógica matemática que permite obtener nuevas proposiciones a partir de proposiciones ya entregadas. Los conectivos son varios, como por ejemplo: no, y, o, entonces, si y solo sí, etc.*

Al momento de utilizar conectivos lógicos para unir proposiciones, estas se puede clasificar en proposiciones lógicas simples o compuestas.

Definición 1.1.2 ***Proposición simple***. *Una proposición simple o atómica es la cual no incluye conectivos lógicos.*

Ejemplo 1.1.1 *Las siguientes proposiciones lógicas son simples*

p: "El primer trimestre del 2021 se realizaron 171 626 intervenciones quirúrgicas"
q: "El primer trimestre del 2022 se realizaron 197 494 intervenciones quirúrgicas"

p: "Los partos en el primer trimestre del 2021 fueron 24 383"
q: "Los partos en el primer trimestre del 2022 fueron 27 216"

p: "Las teleconsultas en el primer trimestre del 2021 fueron 239 079"
q: "Las teleconsultas en el primer trimestre del 2022 fueron 118 216"

Todas las proposiciones anteriores están obtenidas del resumen ejecutivo trimestral 2021-2022 de la subsecretaría de redes asistenciales del Ministerio de salud de Chile.

Definición 1.1.3 ***Proposición compuesta***. *Una proposición compuesta o molecular es la que resulta al combinar proposiciones simples con conectivos lógicos.*

Ejemplo 1.1.2 *Las siguientes proposiciones lógicas son compuestas*

p: "El primer trimestre del 2022 superó en 25 868 intervenciones quirúrgicas al 2021, entonces las intervenciones aumentaron en un $15,07\,\%$ de una año a otro ".

q: "El primer trimestre del 2022 nacieron 2 833 bebés más que el mismo periodo del 2021, entonces los partos aumentaron $11,62\,\%$".

r: "Las teleconsultas del 2021 y las teleconsultas del 2022 superaron las 100 000".

Es momento de traspasar el lenguaje a simbologías. Lo primero es asignar letras (p, q, r, etc) a las preposiciones, ahora representaremos los conectivos lógicos: negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional.

1.1.1. Negación

Se llama negación de una proposición p, a la proposición *no p*. Su notación es $\sim p$, $-p$ o p'. Este conectivo lógico es el único que actúa sobre una sola proposición y cambia el valor de verdad, es decir, si la proposición p es verdadera cambia a falsa y si es falsa cambia a verdadera.

Estos valores se pueden representar en la tabla de verdad y por ser el primer caso de conectivo lógico, explicaremos el paso a paso como se construye.

Lo primero es identificar cuantas proposiciones se tienen (no se consideran proposiciones adicionales a las que están negadas), por ejemplo, si tengo tres proposiciones y alguna está negadas, solo debo escribir p, q y s. Luego debajo de las proposiciones se debe escribir todas las combinaciones posibles, como los valores de verdad son solo 2, la tabla crece de la forma 2^n, donde n es el número de preposiciones. Por lo que para el ejemplo recien dado, serian 3 columnas de 8 filas cada una. Finalmente, escribir en la primera columna todas las operaciones a realizar entre las proposiciones y aplicar las reglas de los conectores para ver el resultado final de la tabla.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Cuadro 1.1: Tabla de verdad del operador lógico negación. Se considera una sola proposición, que es p y no se toma en cuenta $\sim p$. El largo de la tabla hacia abajo es $2^1 = 2$.

Ejemplo 1.1.3 *Sea p una proposición simple y $\sim p$ su negación.*

p : "Todos los pacientes se mejoran con el tratamiento".
$\sim p$: "No todos los pacientes se mejoran con el tratamiento" o "Algunos pacientes no se mejoran con el tratamiento".

1.1.2. Conjunción

Se llama conjunción cuando dos proposiciones p y q son unidas por el conectivo lógico *y*, resultando una proposición compuesta. Se pronuncia "*p y q*" y su notación es $p \wedge q$. La tabla de verdad para dos proposiciones de la conjunción es la siguiente:

Ejemplo 1.1.4 *Sean p y q dos proposiciones simples. Escriba la conjunción entre ambas proposiciones.*

p: "El cuadrado tiene cuatro lados".
q: "El cuadrado tiene cuatro ángulos de 90^o".
$p \wedge q$: "El cuadrado tiene cuatro lados y el cuadrado tiene cuatro ángulos de 90" o "El cuadrado tiene cuatro lados y cuatro ángulos de 90^o".

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Cuadro 1.2: Tabla de verdad del operador conjunción. La proposición $p \wedge q$ es falsa si al menos una de las proposiciones simples, p ó q, es falsa y es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas. En este caso se consideran 2 proposiciones, por lo que el largo de la tabla es $2^2 = 4$.

1.1.3. Disyunción inclusiva

Es la proposición resultante al conectar dos proposiciones simples, p y q, mediante el conector lógico $\vee$. Se lee "*p o q*" y es representado por $p \vee q$. La tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cuadro 1.3: Tabla de verdad de la disyunción inclusiva. La disyunción inclusiva es falsa solo en el caso cuando ambas proposiciones son falsas, en todos los otros casos es verdadera.

Ejemplo 1.1.5 *Sean p y q dos proposiciones simples. Escriba la disyunción inclusiva entre ambas proposiciones.*

p: "Ir al Lollapalooza".
q: "Ir a ver a tus primos al campo".
$p \vee q$: *"Ir al Lollapalooza o ir a ver a tus primos al campo".*

1.1.4. Disyunción exclusiva

Es la proposición compuesta que resulta al conectar dos preposiciones simples mediante el conector lógico de disyunción exclusiva. Se denota como $p \veebar q$ y se lee "*o p o q*". La tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cuadro 1.4: Tabla de verdad de disyunción exclusiva. Para el caso de este conector lógico es verdadero solo cuando las proposiciones simples tienen valor de verdad contrario.

Ejemplo 1.1.6 *Sean p y q dos proposiciones simples. Escriba la disyunción exclusiva entre ambas proposiciones.*

p: "El vaso está feo".
q: "La leche está adulterada".
$p \veebar q$: *"O el vaso está feo o la leche está adulterada".*

$p \veebar q$: Esta tarde iré al cine o me quedaré en casa estudiando. Disyunción exclusiva.

La diferencia entre las disyunciones, es que la inclusiva necesita solamente una proposición verdadera, por eso el nombre. Mientras que la exclusiva solamente es verdadera en el caso de que una proposición lógica es verdadera. Esta ultima se puede presentar en casos donde hay incompatibilidad de las proposiciones, por ejemplo: yo apruebo el ramo o lo repruebo. En el ejemplo no pueden ocurrir ambas cosas, pero para la primera disyunción si puede pasar que ambas proposiciones sean compatibles.

1.1.5. Condicional

Se llama condicional de la proposicion p y q a la proposición "Si p, entonces q". La primera proposición se llama antecedente y la segunda se llama consecuente. Se denota $p \rightarrow q$ y la tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cuadro 1.5: Tabla de verdad del operador lógico condicional. Para el condicional se da un solo caso falso y es cuando la primera proposición (antecedente) es verdadera y la segunda (consecuente) es falsa.

Ejemplo 1.1.7 *Sean p y q dos proposiciones simples. Escriba el condicional entre ambas proposiciones.*

p: "El núcleo atómico está conformado solo por partículas".
q: "El protón[1] es una partícula".
$p \to q$: "El núcleo atómico está formado solo por partículas, entonces el protón es una partícula."

1.1.6. Bicondicional

Se llama bicondicional de las proposiciones p y q a la proposición "p si y solo si q". Su notación es $p \longleftrightarrow q$ y su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Cuadro 1.6: Tabla de verdad del operador lógico bicondicional. Para el caso del conector bicondicional es verdadero solo cuando las dos proposiciones tienen el mismo valor, es decir, o ambas son verdaderas o ambas son falsas.

Ejemplo 1.1.8 *Sean p y q dos proposiciones simples. Escriba el bicondicional entre ambas proposiciones.*

p: "El alumno aprueba el ramo."
q: "El alumno promedia nota sobre $3,95$."
$p \longleftrightarrow q$: "El alumno aprueba el ramo si y solo si promedia nota sobre $3,95$."

Entonces, para el caso de dos proposiciones unidas por los conectores lógicos se puede resumir en la siguiente tabla:

[1] Partícula subatómica (que tiene dimensiones menores a las de un átomo) de carga positiva. Es más liviano que neutrón (Sin carga) y más pesado que un electrón (Carga negativa).

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \to q$	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

Cuadro 1.7: Tabla de verdad resumen de todos los operadores lógicos para dos proposiciones. Son los 5 operadores que forman proposiciones compuestas y en la tabla no se consideran las proposiciones negadas.

1.1.7. Resultados de la tabla de verdad

Se a visto en las secciones anteriores el resultado de la tabla de verdad con todas las combinaciones posibles, pero falta ver el caso más 'real' y es cuando se utilizan varios conectivos lógicos. En estos casos, existe la posibilidad que el resultado de la tabla sean todos verdaderos, todos falsos o una mezcla de ellos.

Definición 1.1.4 ***Tautología:*** *Es siempre verdadera cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones que la componen.*

Definición 1.1.5 ***Contradicción:*** *Siempre es falsa, independiente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen.*

Definición 1.1.6 ***Contingencia:*** *No es tautología ni contradicción, es decir, hay resultados verdaderos y falsos en la tabla.*

Ejemplo 1.1.9 *Hacer la tabla de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:*

1) $p \vee \sim p$.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

La proposición anterior es una tautología.

2) $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

La proposición anterior es una contradicción.

3) $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
F	F	V	V
F	V	V	V
V	F	F	F
V	V	F	V

La proposición anterior es una contingencia.

Definición 1.1.7 ***Lógicamente equivalentes***. *Dos proposiciones, p y q, se consideran lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas o si su bicondicional es una tautología. Su notación es* $p \Leftrightarrow q$

Ejemplo 1.1.10 *Sean p y q dos proposiciones. Muestre que la tabla de verdad de* $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ *es una tautología*

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$	$(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

1.1.8. Propiedades de las proposiciones

Nuevamente mencionar que aquí, tanto a la izquierda como a la derecha de la fecha las tablas de verdad son idénticas. Esto permite que en una expresión lógica se pueda reemplazar una por otra.

- Doble negación

  $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$

- Conmutatividad

  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

  $(p \longleftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \longleftrightarrow p)$

- Asociatividad

  $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$

  $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

  $[(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r)]$

- Distributividad

  $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

  $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

- Leyes de Morgan

  $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

  $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

- Idempotencia

  $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

  $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

- $\sim (p \longrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

Se dice que p implica lógicamente una proposición q, si $p \longrightarrow q$ es una tautología. Se denota con $p \Rightarrow q$ y se lee p implica q.

Capítulo 2

Teoría de conjuntos

2.1. Cuantificadores lógicos

Hasta el momento en la sección (1) se han revisado proposiciones, las cuales son verdaderas o falsas y no cambia esta condición a menos que se aplique el operador lógico de la negación. Hay un tipo de proposiciones, como por ejemplo las inecuaciones, que para algunos valores de la variable la proposición es verdadera y para otros es falsa.

$$x > \pi \tag{2.1}$$

De la ecuación anterior (2.1) se puede ver que cuando la variable x toma valores mayores que π[1] esta proposición es verdadera, pero para cualquier otro caso (x menores que π) es una proposición falsa. Ahora estas proposiciones pueden tener n variables, entonces la proposición pasa a ser una *función proposicional*.

Definición 2.1.1 ***Función proposicional***. *Es una expresión que se representa con una latra p y tiene como argumentos n proposciones x_1, x_2, ..., x_n.*

$$p(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \tag{2.2}$$

$$p(x) : \underbrace{x}_{\text{preposición}} \underbrace{\textit{tiene la propiedad p}}_{\text{caracteristica de p}} \tag{2.3}$$

Para el conjunto de valores que hace verdadera las funciones proposicionales (2.2) y (2.3) se llama *conjunto de validez* y lo denotamos como V_p.

Definición 2.1.2 ***Conjunto de validez***. *Se llama conjunto de validez (V_p) de una función proposicional al conjunto de todos los valores de las variables $x_1, x_2, ..., x_n$ que la convierten en una proposición verdadera*

[1] π es un número con infinitos decimales e irracional, es decir, no se puede representar como una fracción. $\pi = 3,141592653...$

Ejemplo 2.1.1 *Encontrar el conjunto de validez (V_p) de las siguientes proposiciones:*

i)

$$\begin{aligned} p(x) &: \quad x - 3 = 5 \\ p(x) &: \quad x = 5 + 3 \\ p(x) &: \quad x = 8 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Conjunto de validez es 8, o dicho de otra manera $x \in \{8\}$.

ii)

$$\begin{aligned} p(x) &: \quad x^2 = 4 \\ p(x) &: \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \\ p(x) &: \quad x = \pm 2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

El conjunto de validez son los números 2 y -2, o dicho de otra manera $x \in \{-2, 2\}$.

Notar que $p(x)$ no es una proposición como tal, pero cuando $x = a$ y pasa a ser $p(a)$, ahí si lo es. Ahora, otra forma de aludir a un conjunto de validez es usando los cuantificadores.

Definición 2.1.3 ***Cuantificador universal***. *Dado un enunciado abierto $p(x)$ con una variable x, el enunciado $\forall x, p(x)$ se lee "para todo x tal que $p(x)$" y es verdadero cuando el conjunto de verdad es el universo completo, es decir, todos los elementos. Se simboliza con $\forall$ y se llama* ***cuantificador universal****.*

Definición 2.1.4 ***Cuantificador existencial***. *Se llama* ***cuantificador existencial*** *al símbolo $\exists$ y se lee "existe x tal que $p(x)$" y es verdadero cuando el conjunto de verdad para la proposición $p(x)$ no es vacío.*

Ejemplo 2.1.2 *Considere la expresión $x^2 \geq 0$, y escriba la inecuación con cuantificadores*

Sol: Para todo x perteneciente a los números reales, x siempre es mayor o igual que cero.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$$

Ejemplo 2.1.3 *Considere la expresión $x + 3 > 0$, y escriba la inecuación con cuantificadores*

Sol: Existe un número real tal que $x + 3 > 0$.

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \textit{tal que} \ x + 3 > 0$$

Algunas observaciones sobre los cuantificadores:

- Sea el conjunto universo denotado por $\mathcal{U}$ y considera la colección de todos los elementos que se desea estudiar.
- Si el conjunto de validez tiene un solo elemento, el cuantificador $\exists$ pasa a $\exists!$. Se escribe "$\exists! x, x \in \mathcal{U}, p(x)$" y se lee "existe un único $x \in \mathcal{U}$ tal que $p(x)$ es verdadero".
- La negación de la proposición "Para todo x en $\mathcal{U}$, $p(x)$ es verdadera" es "No es verdad que para todo x en $\mathcal{U}$, $p(x)$ es verdadera" o también "Existe un x en $\mathcal{U}$ tal que la proposición $\sim p(x)$ es verdadera". En términos de cuantificadores se escribe:

$$\sim (\forall x, x \in \mathcal{U}, p(x)) \Leftrightarrow (\exists x, x \in \mathcal{U}, \sim p(x)) \tag{2.6}$$

- La negación de la proposición "Existe un x en $\mathcal{U}$ tal que $p(x)$ es verdadera" es "No es verdad que existe un x en $\mathcal{U}$ tal que la proposición $p(x)$ es verdadera" o "Para todo x en $\mathcal{U}$, la proposición $p(x)$ es falsa". En términos de cuantificadores se escribe:

$$\sim (\exists x, x \in \mathcal{U}, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x, x \in \mathcal{U}, \sim p(x)) \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.1.4 *Encontrar el conjunto de validez y escribir la proposición con cuantificadores*

Si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, entonces $p(x) : x + 2 = 9$ es verdadera sólo para $x = 7$, esto significa que el conjunto de validez es $V_p = \{7\}$ y con cuantificadores se escribe:

$$\exists! x, x \in \mathbb{N} \; \textit{tal que} \; x + 2 = 9 \tag{2.8}$$

Ejemplo 2.1.5 *Negar la proposición* $(\forall x, x \in \mathbb{Z}, x + 5 \leq 10)$*:*

La negación de $(\forall x, x \in \mathbb{Z}, x + 5 \leq 10)$ *es* $(\exists x, x \in \mathbb{Z}, x + 5 > 10)$.[2]

Ejemplo 2.1.6 *Negar la proposición* $(\exists x,\ x \in \mathbb{R}, x = 20)$*:*

La negación de $(\exists x,\ x \in \mathbb{R}, x = 20)$ *es* $(\forall x,\ x \in \mathbb{R}, x \neq 20)$.[3]

[2] $\mathbb{Z}$ son todos los números enteros. $\mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

[3] $\mathbb{R}$ es la notación para los números reales.

2.2. Conjuntos y elementos

Es natural querer agrupar ciertos números u objetos bajo una misma característica o condición para obtener algún tipo de información. Bajo esta premisa nacen los *conjuntos* y quienes los conforman se llaman *elementos* del conjunto. Cuando se dice que un elemento pertenece a un conjunto se denota con el símbolo ya utilizado $\in$ que se lee "pertenece a" y para el caso contrario, en que no pertenezca se usa el $\notin$ que se lee "no pertenece a".

Definición 2.2.1 ***Conjunto***. *Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados sus elementos. Los conjuntos se simbolizan con letras mayúsculas* A, B, $C, \ldots$. *Los objetos que componen el conjunto se denominan elementos o miembros y se denotan con letras minúsculas a, b, c,...*

Un conjunto es una entidad con naturaleza diferente a los elementos que lo componen. Entonces, se debe aclarar que siendo A un conjunto, se cumple que $A = \{a\} \neq a$ y $\{a\}$ no es un elemento de A.

Algunas observaciones y definiciones de los conjuntos:

- El conjunto que no contiene elementos se llama *conjunto vacío* y se denota por $\emptyset$ o $A = \{\}$.
- El conjunto de un solo elemento se llama conjunto unitario.
- Si x es un elemento del conjunto A se escribe $x \in A$ y se lee "x pertenece a A". La negación de la proposición anterior es $x \notin A$ y se lee "x no pertenece a A".
- Un conjunto es bien definido cuando dado un objeto cualquiera, se puede definir si pertenece o no al conjunto A.
- Un conjunto se puede ser definido de dos maneras:

  - Nombrando sus elementos. Este tipo de conjuntos se definen por *extensión.*

  - Nombrando una propiedad que caracteriza a sus elementos. Este tipo de conjuntos se definen por *comprensión.*

Definición 2.2.2 ***Conjunto de extensión y comprensión***. *Para escribir un conjunto por extensión, se enumeran todos sus elementos separándolos con comas y luego se encierran entre llaves* $\{...\}$.
Para escribir un conjunto por comprensión se elige un elemento arbitrario x y se señala que cumple la propiedad p(x). Finalmente, se encierra toda la expresión entre llaves:

$$A = \{x | x \; p(x)\}$$

que se lee "A es el conjunto de todos los elementos x tales que los x cumplen la propiedad p(x)". El símbolo | se lee "tal que".

Ejemplo 2.2.1 *Algunos conjuntos de números importantes.*

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ *Conjunto de los números naturales.*
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ *Conjunto de los números enteros.*
$\mathbb{R} = \{x, x \text{ es un número decimal}\}$ *Conjunto de los números reales.*
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ *Conjunto de los números racionales*
$\mathbb{I} = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Q}\}$ *Conjunto de los números irracionales.*

Notar que los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ están definidos por extensión, mientras que los conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$ por comprensión. Además, los tres puntos suspensivos muestran que el conjunto seguirá el mismo patrón para todos los elementos restantes.

Definición 2.2.3 ***Conjuntos iguales***. *Sea A y B dos conjuntos, si ambos conjuntos contienen los mismos elementos, estos conjuntos se llaman* ***conjuntos iguales*** *y se escriben de la siguiente manera:*

$$A = B$$

Con la definición (2.2.3) se desprende que conjuntos $\{a, b, c, d\}$, $\{b, c, a, d\}$ y $\{a, a, b, c, c, d\}$ son iguales, es decir, no importa el orden ni la repetición de los elementos. Lo que interesa es cuantos tipos de elementos diferentes hay dentro del conjunto.

Definición 2.2.4 ***Conjuntos finitos***. *Si un conjunto contiene elementos igual a un número natural, se llama un conjunto finito.*

Definición 2.2.5 ***Conjuntos infinitos***. *Si un conjunto contiene un número ilimitado de elementos se llaman conjuntos infinitos.*

Ejemplo 2.2.2 *Defina si los siguientes conjuntos son finitos o infinitos.*

Sea $A = \{5, 6, 3, 9\}$ un conjunto. A se define como un conjunto finito.

Sea $B = \{x | x \text{ es un número entero positivo}\}$ un conjunto. B se define como un conjunto infinito.

Hasta el momento solo se menciona número de elementos de un conjunto, pero desde ahora en adelante se hablará *cardinalidad* de un conjunto dado.

Definición 2.2.6 ***Cardinalidad***. *El número de elementos de un conjunto finito se llama cardinalidad. La cardinalidad de un conjunto finito A se denota por:*

$$Card(A) \text{ o } |A| \text{ o } \#A$$

Ejemplo 2.2.3 *Escriba la cardinalidad de los siguientes conjuntos:*

Sea $A = \{h, i, j, k, l, n\}$ *un conjunto. La cardinalidad de* A *es* 6*, o escrito de otra manera es* $Card(A) = 6$

Sea $A = \{a, b, a, a, b\}$ *un conjunto. La cardinalidad de* A *es* 2*, o escrito de otra manera* $Card(A) = 2$*.*

Sea $A = \{-5, 0, 5\}$ *y* $B = \{1, 3, 7\}$ *dos conjuntos ¿Cuál es la suma de las cardinalidades?. La respuesta es* $|A| + |B| = 6$*.*

Cuando dos conjuntos tienen la misma cardinalidad ($|A| = |B|$) se dice que son equipotentes

Definición 2.2.7 ***Conjuntos equipotentes***. *Dos conjuntos* X *e* Y *se dicen ser equipotentes si tienen exactamente el mismo número de elementos.*

Definición 2.2.8 ***Conjunto universal.*** *En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos pertenecen usualmente a un gran conjunto fijo llamado conjunto universal. Este se denota por* $\mathcal{U}$

Definición 2.2.9 ***Subconjunto***. *Si cada elemento de un conjunto de* A *es también un elemento de un conjunto* B*, entonces se dice que* A *es un subconjunto de* B*. Se dice también que* A *está contenido en* B *o que* B *contiene a* A*. La relación de subconjunto viene dada por:*

$$A \subset B \text{ o } B \supset A$$

En términos de cuantificadores se escribe $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$*.*

Ejemplo 2.2.4 *Muestra de conjuntos equipotentes, conjunto universo y subconjunto.*

Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$ *y* $B = \{lunes,\ martes,\ miércoles,\ jueves,\ viernes\}$ *dos conjuntos finitos.* A *y* B *son conjuntos equipotentes, ya que* $|A| = |B| = 5$*.*

Si se hace una consulta a comunidades humanas, entonces un ejemplo de un conjunto universal sería los habitantes de algún país en específico.

Sea $A = \{1, 2, a, b\}$ *y* $B = \{1, b\}$ *don conjuntos finitos. Como todos los elementos de* B *están contenidos en el conjunto* A*, entonces se puede decir que* $B \subset A$*.*

Definición 2.2.10 ***Conjunto potencia***. *El Conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado* A*, se llama conjunto de partes o conjunto potencia y se denota como* $\mathcal{P}(A)$*. Se escribe de la siguiente manera:*

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$$

El conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$ nunca es vacío, puesto que el conjunto vacío y el mismo conjunto A son elementos de $\mathcal{P}(A)$. Además, si A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ contiene 2^n elementos.

Ejemplo 2.2.5 *Sea $A = \{0, 1, 2\}$ un conjunto finito, entonces el conjunto potencia de A es:*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}$$

Ejemplo 2.2.6 *Sea $A = \{0, 1\}$ un conjunto finito. Calcule el conjunto potencia de A.*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{0\}, \{1\}\}$$

Debe notar que $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$, es decir es un elemento del conjunto y $\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(A)$ es un un subconjunto.

Algunas propiedades de los conjuntos arbitrarios A, B y C.

- $\emptyset \subset A$
- $A \subset A$
- $[(A \subset B) \wedge (B \subset C)] \Rightarrow A \subset C$
- $[(A \subset B) \wedge (B \subset A)] \Leftrightarrow A = B$

2.3. Operaciones con conjuntos

Aquí es donde se relaciona los conceptos antes vistos de cuantificadores lógicos (sección 2.1) y la teoría de conjuntos (sección 2.2). Además, se debe recordar la definición (2.2.8) de conjunto universal, que en palabras simples es el conjunto que contiene todos los elementos de interés para el estudio.

Al momento de plasmar explícitamente los conjuntos vimos que están los cuantificadores que ayudan, pero otra herramienta que se ocupa es el diagrama de Venn[4] que sirve para mostrar gráficamente los conjuntos, sus intersecciones y uniones.

El diagrama de Venn muestra, de forma gráfica, la relación que hay entre los conjuntos. Donde el caso de dos o tres conjuntos se puede representar con círculos. El diagrama muestra todas las relaciones lógicas posibles con la superposición entre los círculos que representa cada conjunto.

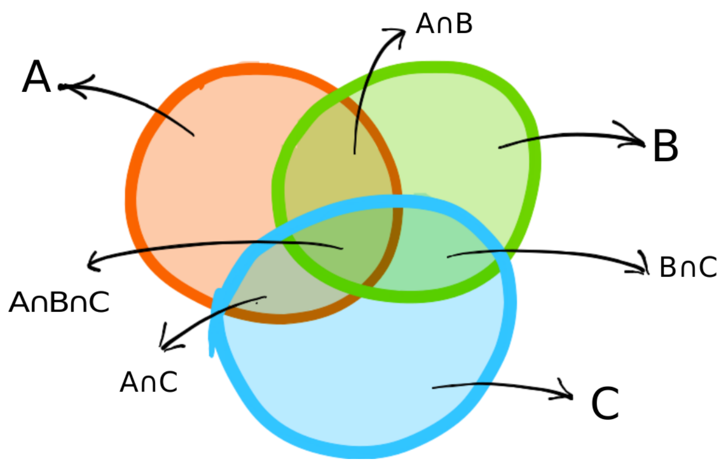

Figura 2.1: Representación del diagrama de Venn para tres conjuntos. El círculo naranjo representa el conjunto A, el círculo verde representa el conjunto B y el circulo celeste representa el conjunto C. Las secciones que se superponen dos círculos muestran la intersección de dos conjuntos y la superposición central es la intersección de los tres conjuntos.

A continuación se verán las operaciones que se pueden realizar entre los conjuntos, las expresiones simbólicas y la representación gráfica que tienen cada una de ellas.

2.3.1. Diferencia de conjuntos

La diferencia entre dos conjuntos A y B son los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. La diferencia entre A y B se denota como $A - B$ o $A|B$. Escrito con cuantificadores queda de la siguiente manera:

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \tag{2.9}$$

Ejemplo 2.3.1 *Dado dos conjuntos finitos* $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ *y* $B = \{c, d, e, f, g, h\}$ *determinar la diferencia* $A - B$

Como se vio en la definición el conjunto resultante son los elementos que están en el conjunto A pero no están en el conjunto B y es:

$$A - B = \{a, b\}$$

[4]Diagrama que recibe el nombre por el matemático y lógico británico John Venn (1834-1923).

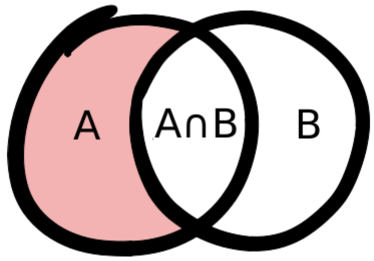

Figura 2.2: Representación de diferencia de dos conjuntos usando el diagrama de Venn. Zona oscurecida con rojo marca la operación $A - B$.

se sacan los elementos que puedan estar en la intersección de ambos conjuntos y exclusivamente en el conjunto B.

2.3.2. Complemento de un conjunto

Dado el conjunto A, $\mathcal{U} - A$ se llama complemento de A con respecto a $\mathcal{U}$ y se denota como A^c, A' o $-A$. Entonces, en términos de cuantificadores lógicos el complemento se escribe de la siguiente manera:

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\} \tag{2.10}$$

De la definición anterior se verifica que $\forall x \in \mathcal{U}$ una y solo una de la siguientes proposiciones:

$$i)\, x \in A \qquad ii)\, x \in A^c$$

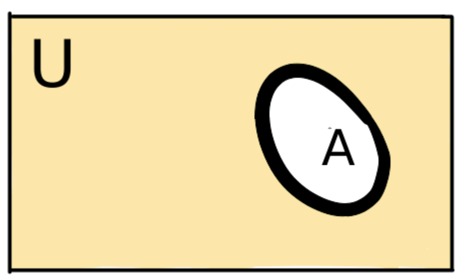

Figura 2.3: Representación del complemento del conjunto A. La zona oscurecida muestra el conjunto complemento, donde $\mathcal{U}$ es el conjunto universal.

2.3.3. Intersección de conjuntos

La intersección de A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes de los dos conjuntos. Se denota con el símbolo $A \cap B$ y se lee "A intersección B". La intersección en términos de cuantificadores se escribe de la siguiente manera:

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \in B\} = \{x | x \in A \wedge x \in B\} \tag{2.11}$$

Ejemplo 2.3.2 *Dado dos conjuntos finitos* $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ *y* $B = \{c, d, e, f, g, h\}$*, determinar la intersección* $A \cap B$

$$A \cap B = \{c, d, e, f\}$$

Ejemplo 2.3.3 *Dado dos conjuntos finitos* $A = \{1, 1, 1, 1, 1, 2\}$ *y* $B = \{1, 2\}$*, determinar la intersección* $A \cap B$

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

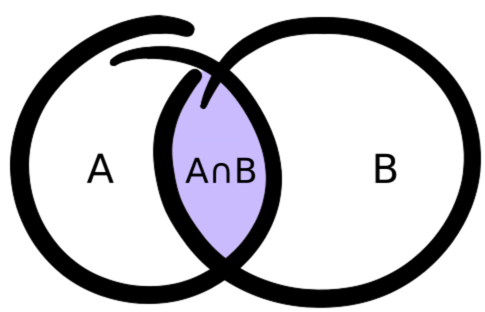

Figura 2.4: Representación de la intersección de dos conjuntos usando el diagrama de Venn. La zona oscurecida representa la intersección entre los conjuntos A y B.

Si dos conjuntos tienen intersección vacía se llaman *conjuntos disjuntos*. Se escriben de la forma $A \cap B = \{\}$ o $A \cap B = \varnothing$.

2.3.4. Unión de conjuntos

La unión de dos conjuntos A y B contiene todos los elementos que pertenecen a A y B. Esta operación es denotada por $A \cup B$ y se lee "A unido a B" o "A unión B". En términos de cuantificadores lógicos, la unión de conjuntos se representa de la siguiente manera:

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \vee x \in B\} = \{x | x \in A \vee x \in B\} \tag{2.12}$$

Ejemplo 2.3.4 *Dado dos conjuntos finitos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $B = \{c, d, e, f, g, h\}$, determinar la unión $A \cup B$*

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

Ejemplo 2.3.5 *Dado dos conjuntos finitos $A = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$, determinar la unión $A \cup B$*

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

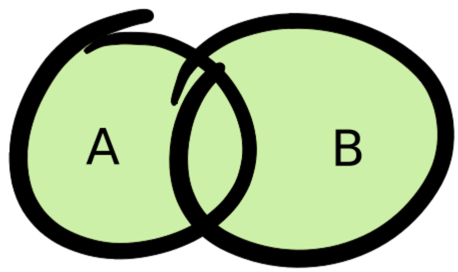

Figura 2.5: Representación de la unión de dos conjuntos usando el diagrama de Venn. La zona oscurecida muestra la unión entre los conjuntos A y B.

2.3.5. Diferencia simétrica de conjuntos

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene la unión de ambos conjuntos, pero no considera la intersección de estos. La operación de diferencia simétrica se denota por $A \triangle B$ y en términos de cuantificadores se escribe de la siguiente manera:

$$A \triangle B = \{x | x \in A \veebar B\}$$

Ejemplo 2.3.6 *Sea dos conjuntos finitos $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$. Calcular la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B.*

$$A \triangle B = \{i, o, u, b, c, d\}$$

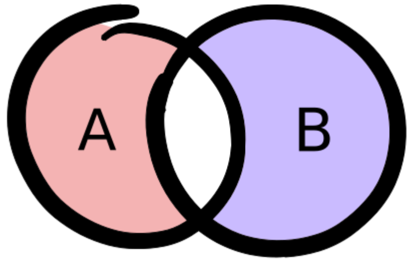

Figura 2.6: Representación de la diferencia simétrica entre el conjunto A y B usando el diagrama de Venn.

2.4. Propiedades de los conjuntos

Con las operaciones vistas en (2.3) se ven importantes propiedades y ahora ocuparlas para reducir expresiones de dos o más conjuntos.

2.4.1. Idempotencia

La idempotencia es la propiedad de realizar una acción n-veces y aun así obtener el resultado como si se hubiera aplicado solo una vez.

$$A \cup A = A \tag{2.13}$$
$$A \cap A = A \tag{2.14}$$

Ejemplo 2.4.1 *Sea el conjunto finito* $A = \{5, 2, 10\}$*. Calcular* $A \cup A$*:*

$$\begin{aligned} A \cup A &= \{5, 2, 10\} \cup \{5, 2, 10\} \\ &= \{5, 2, 10\} \\ &= A \end{aligned}$$

2.4.2. Conmutatividad

La conmutatividad es la propiedad que tienen algunas operaciones en que el resultado de operar dos elementos no depende el orden en que se tomen estos mismos.

$$A \cup B = B \cup A \tag{2.15}$$
$$A \cap B = B \cap A \tag{2.16}$$

Ejemplo 2.4.2 *Sean los conjuntos finitos* $A = \{Ibuprofeno, Naproxeno\}$ *y* $B = \{Aspirina,\ Naproxeno,\ Omeprazol\}$. *Comprobar la propiedad conmutativa.*

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{Ibuprofeno, Naproxeno\} \cap \{Aspirina, Naproxeno, Omeprazol\} \\ &= \{Naproxeno\} \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} B \cap A &= \{Aspirina, Naproxeno, Omeprazol\} \cap \{Ibuprofeno, Naproxeno\} \\ &= \{Naproxeno\} \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

2.4.3. Asociatividad

La asociatividad es la propiedad de que el orden en que se ejecuten las operaciones no altera el resultado, siempre y cuando se mantenga intacto el orden de los elementos que se le aplica la operación (operandos).

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{2.17}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{2.18}$$

2.4.4. Distributividad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{2.19}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{2.20}$$

Ejemplo 2.4.3 *Sean los conjuntos finitos* $A = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ *y* $C = \{-5, -2, -1, 3, 4\}$. *Comprobar la propiedad distributiva*

Primero se calcula el lado izquierdo de la ecuación (2.19).

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{-5, -4, -3, -2, -1\} \cup (\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \cap \{-5, -2, -1, 3, 4\}) \\ &= \{-5, -4, -3, -2, -1\} \cup \{-2, -1, 3\} \\ &= \{-5, -4, -3, -2, -1, 3\} \end{aligned} \tag{2.21}$$

ahora se desarrolla el lado derecho de la ecuación (2.19).

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) &= (\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}) \cap (\{-5, -4, -3, -2, -1, 3, 4\}) \\ &= \{-5, -4, -3, -2, -1, 3\} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Como se puede ver, por las ecuaciones (2.21) y (2.22) se comprueba la propiedad distributiva de los conjuntos.

2.4.5. Leyes de Morgan

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \qquad (2.23)\\
(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

También se puede demostrar las propiedades considerando un elemento arbitrario (x) y decir que pertenece a la operación de conjunto. Se concluye que es igual al otro lado de la equivalencia.

Ejemplo 2.4.4 *Demostrar mediante cuantificadores lógicos la expresión* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cap B\\
&\Leftrightarrow \sim ((x \in A) \wedge (x \in B))\\
&\Leftrightarrow \sim (x \in A) \vee \sim (x \in B)\\
&\Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c\\
&\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c
\end{aligned}
$$

Entonces se comprueba que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2.5. Técnicas de conteo

Para completar el conocimiento que se puede tener sobre un conjunto (o varios conjuntos) falta agregar las herramientas que nos permitan saber cuantos elementos tienen cada conjunto. Las técnicas de conteo solucionan esta problemática usando el concepto de cardinalidad (definido en 2.2.6) y para dos casos, cuando los conjuntos no tienen intersección o si la tienen.

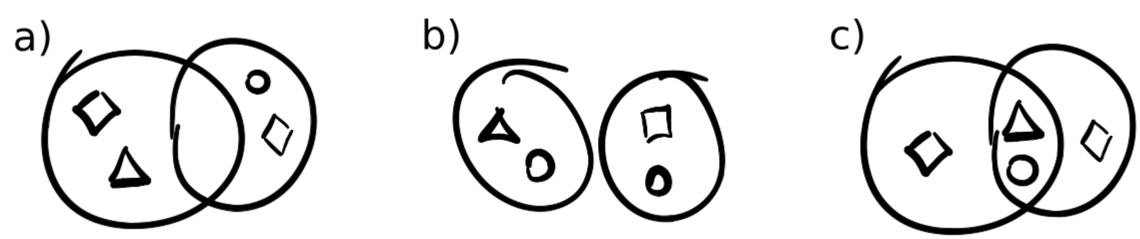

Figura 2.7: Representación de conjuntos disjuntos y no disjuntos. a) y b) muestran dos conjuntos disjuntos. c) Muestra conjuntos no disjuntos.

2.5.1. Conteo en conjuntos disjuntos

En este caso la intersección entre los conjuntos es vacía, la cardinalidad de la unión entre los conjuntos A y B está dada por:

$$|A \cup B| = |A| + |B| \tag{2.25}$$

Ejemplo 2.5.1 *Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$ dos conjuntos finitos y disjuntos. Mostrar la cardinalidad de la unión entre A y B.*

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 3 + 3 = 6$$

Notar que $A \cup B = \{1, 2, 3, a, b, c\}$ y tiene cardinalidad 6.

Ejemplo 2.5.2 *En el examen único nacional de medicina (EUNACOM) del 2017*[5] *el área de Medicina interna tuvo* 67 *preguntas, mientras que en pediatría fueron* 29*. Si consideramos ambas áreas como conjuntos, ¿Cuál es la cardinalidad de la unión de ambos conjuntos?*

Identificaremos el conjunto de medicina interna como MI y el de pediatría como P, ahora se aplica la ecuación (2.25) y resulta lo siguiente:

$$|MI \cup P| = |MI| + |P| = 67 + 29 = 96. \tag{2.26}$$

Además, mencionar que esto se puede expandir para n conjuntos donde se debe sumar la cardinalidad de cada conjunto, ya que no hay intersección entre ellos.

2.5.2. Conteo en conjuntos no disjuntos

Para el caso en que si hay intersección entre dos conjuntos se sigue la misma lógica, pero se debe quitar la cardinalidad de la intersección para no cometer el error de contar dos veces algunos elementos.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{2.27}$$

Ejemplo 2.5.3 *Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$ dos conjuntos finitos y no disjuntos. Mostrar la cardinalidad de la unión entre estos dos conjuntos.*

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 3 + 3 - 1 = 5 \end{aligned}$$

[5] Informe final EUNACOM, enero 2018. Fuente: www.eunacom.cl

2.5.3. Conteo para la unión de tres conjuntos

La ecuación para el caso de tres conjuntos se puede derivar de la ecuación para dos conjuntos no disjuntos.

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| \\
&= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap (B \cup C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|) \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |(A \cap B) \cap (A \cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

La ecuación (2.28) muestra la ecuación para contar la unión de tres conjuntos no disjuntos.

Adicionalmente, desde el diagrama de Venn se puede definir las fórmulas para el número de elementos que solo se encuentran en un solo conjunto como solo en las intersecciones.

Número de elementos en un solo conjunto

Los elementos que solo están en A:

$$E_A = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{2.29}$$

Los elementos que solo están en B:

$$E_B = |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{2.30}$$

Los elementos que solo están en C:

$$E_C = |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{2.31}$$

Número de elementos en la intersección de dos conjuntos, pero no en el tercero

El número de elementos que están en $A \cap B$, pero no en C:

$$E_{A \cap B} = |A \cap B| - |A \cap B \cap C| \tag{2.32}$$

El número de elementos que están en $A \cap C$, pero no en B:

$$E_{A \cap C} = |A \cap C| - |A \cap B \cap C| \tag{2.33}$$

El número de elementos que están en $B \cap C$, pero no en A:

$$E_{B \cap C} = |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \tag{2.34}$$

Número de elementos en la unión de dos conjuntos, pero no en el tercero

El número de elementos que está en A o en B, pero no está en C:

$$E_{A \cup B} = |A \cup B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{2.35}$$

El número de elementos que está en A o en C, pero no está en B:

$$E_{A \cup C} = |A \cup C| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{2.36}$$

El número de elementos que está en B o en C, pero no está en A:

$$E_{B \cup C} = |B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{2.37}$$

Ejemplo 2.5.4 *Se encuestó a* 100 *médicos sobre sus preferencias de especialidad y las respuestas arrojaron lo siguiente:*

- 32 Cirugía Pediátrica, $|CP| = 32$.
- 20 Genética Clínica, $|GC| = 20$.
- 45 Dermatología, $|D| = 45$.
- 15 Cirugía pediátrica y Dermatología, $|CP \cap D| = 15$.
- 7 Cirugía Pediátrica y Genética Clínica, $|CP \cap GC| = 7$.
- 10 Genética Clínica y Dermatología, $|GC \cap D| = 10$.
- 30 no prefieren ninguna de las tres especialidades.

a) Encontrar, el número de médicos que estudian las tres asignaturas.

Primero, notar que el número de médicos encuestados es el conjunto universo, entonces $\mathcal{U} = 100$. Por lo que la unión de los tres conjuntos es:

$$|CP \cup GC \cup D| = 100 - 30 = 70$$

Segundo, de la ecuación (2.28) nos faltan dos términos, $|A \cup B \cup C|$ y $|A \cap B \cap C|$. Siendo el segundo el que se busca.

$$\begin{aligned}
|CP \cup GC \cup D| &= |CP| + |GC| + |D| - |CP \cap GC| - |CP \cap D| - |GC \cap D| + |CP \cap GC \cap D| \\
70 &= 32 + 20 + 45 - 7 - 15 - 10 + |CP \cap GC \cap D| \\
|CP \cap GC \cap D| &= 70 - 32 - 20 - 45 + 7 + 15 + 10 \\
|CP \cap GC \cap D| &= 5
\end{aligned}$$

Solo 5 médicos prefieren las tres especialidades.

b) Encontrar el numero de médicos que prefieren una y solo una de las tres especialidades.

Se debe encontrar el número de médicos que prefiere una y solo una especialidad por separado.

Solo prefieren Cirugía Pediátrica:

$$|CP| - |CP \cap GC| - |CP \cap D| + |CP \cap GC \cap D| = 32 - 7 - 15 + 5 = 15$$

Solo prefieren Genética Clínica:

$$|GC| - |GC \cap CP| - |GC \cap D| + |CP \cap GC \cap D| = 20 - 7 - 10 + 5 = 8$$

Dermatología :

$$|D| - |D \cap GC| - |D \cap CP| + |CP \cap GC \cap D| = 45 - 10 - 15 + 5 = 25$$

Finalmente el total de médicos que prefieren una y solo especialidad es: $15 + 8 + 25 = 48$ médicos.

Capítulo 3

Números reales

En el capítulo (2) se vieron conjuntos de elementos que cuando tiene una característica en común y se les llama conjuntos. Más explícitamente, en el ejemplo (2.2.1) se revisó los diferentes conjuntos de números que existen (No son los únicos). En el presente capítulo nos enfocaremos en el conjunto de los números reales, denotado por la letra $\mathbb{R}$.
Para representar los números reales, recurriremos al conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$), el cual son todos aquellos números que no se pueden expresar como una fracción y el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) que si es posible expresarlos como un cociente de dos números enteros. Entonces, la unión de estos dos conjuntos forman el conjunto de los números reales.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \mathbb{I} \cup \mathbb{Q} \\ \mathbb{N} &\subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mencionar que el conjunto de los números reales no es el más grande. El conjunto de los números complejos (denotado por la letra $\mathbb{C}$) es aún más grande y no se representa con una recta como reales sino con un plano de dos ejes.

Ejemplo 3.0.1 *Representación de algunos elementos de los subconjuntos de los números reales*

$$\begin{aligned} \{1, 3, 100, 263\} &\subset \mathbb{N} \\ \{-152, -5, 0, 7, 670\} &\subset \mathbb{Z} \\ \left\{\frac{-3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{25}{5}, \frac{0}{9}\right\} &\subset \mathbb{Q} \\ \{e, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}\} &\subset \mathbb{I} \\ \left\{-10,\ 0,\ \sqrt{6},\ 2{,}333...,\ \pi,\ \frac{20}{7}\right\} &\subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

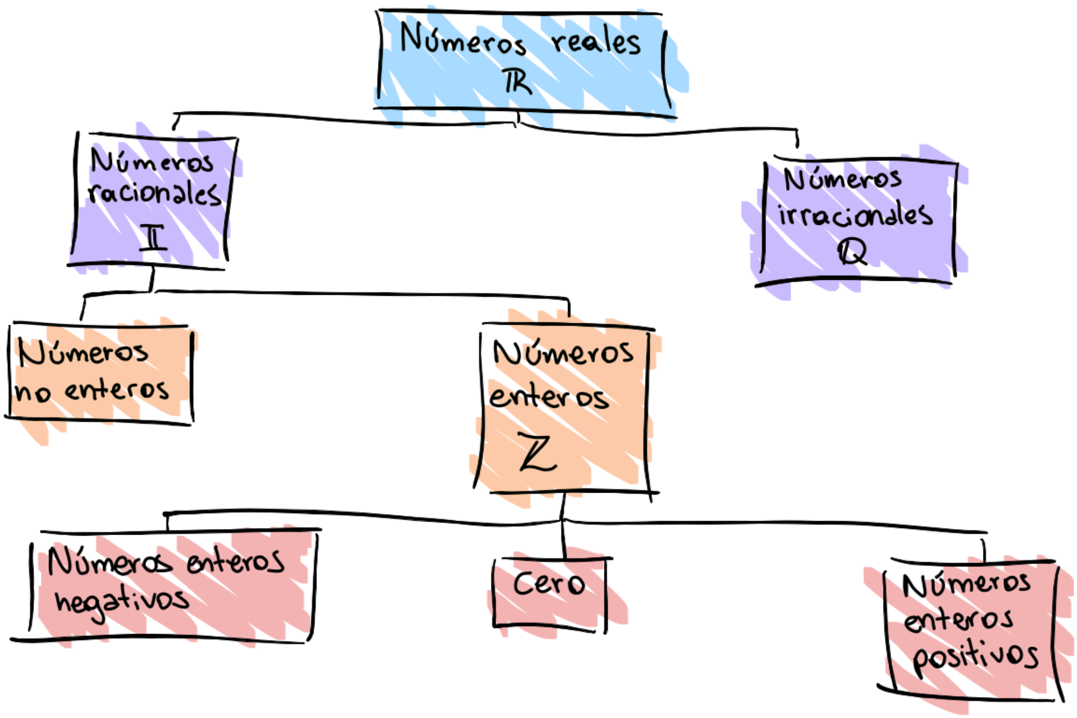

Figura 3.1: Esquema de los números reales con los subconjuntos que lo conforman.

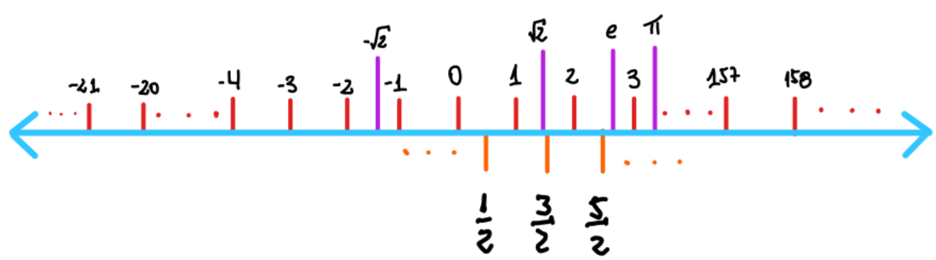

Figura 3.2: Representación de la recta de los números reales mostrando algunos de los elementos pertenecientes a los subconjuntos que lo componen.

3.1. Propiedades de los números reales

El conjunto de los números reales contiene dos operaciones, una adición y una multiplicación que satisfacen las siguientes propiedades:

3.1.1. Adición en los números reales

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

2) $a + b = b + a$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$.

3) Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

4) Para cada elemento $a \in \mathbb{R}$ existe un elemento $b \in \mathbb{R}$, tal que $a + b = 0$. El elemento b es el inverso aditivo del elemento a.

Definición 3.1.1 ***Sustracción.*** $a - b = a + (-b)$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$

Ejemplo 3.1.1 *Considere tres números reales $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$ y resuelva los tres enunciados anteriores.*

i)

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ 5 + (4 + 7) &= (5 + 4) + 7 \\ 5 + (11) &= (9) + 7 \\ 16 &= 16 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ 5 + 4 &= 4 + 5 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} a + 0 &= a \\ 5 + 0 &= 5 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} a - b &= a + (-b) \\ 5 - 4 &= 5 + (-4) \\ 5 - 4 &= 5 - 4 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

3.1.2. Multiplicación en los números reales

1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

2) $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$.

3) Existe $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tal que $a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

4) Para cada elemento $a \in \mathbb{R}$, no nulo, existe un elemento $c \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot c = 1$. El elemento c es el inverso multiplicativo de a y todos los números lo tienen excepto el cero.

Definición 3.1.2 ***División.*** $\dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Ejemplo 3.1.2 *Considere tres números reales $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$ y resuelva los tres enunciados anteriores*

i)

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \\ 5 \cdot (4 \cdot 7) &= (5 \cdot 4) \cdot 7 \\ 5 \cdot (28) &= (20) \cdot 7 \\ 140 &= 140 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b \cdot a \\ 5 \cdot 4 &= 4 \cdot 5 \\ 20 &= 20 \end{aligned}$$

iii)

$$a \cdot 1 = a$$
$$5 \cdot 1 = 5$$

iv)

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= a \cdot b^{-1} \\ \frac{5}{4} &= 5 \cdot 4^{-1} \end{aligned}$$

3.1.3. Consecuencias de la adición y sustracción

1) Unicidad del 0 y del 1. Unicidad significa que existe solo un elemento dentro del conjunto, más específicamente, hay un solo elemento que cumple la acción del cero (elemento absorbente) y el uno (elemento neutro).

2) Unicidad de los inversos. Tanto en la suma como en la multiplicación existe un solo inverso.

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$.

4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$.

5) $a \cdot 0 = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

6) $(-1) \cdot a = -a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

7) $-(-a) = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

8) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b); \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

9) Si $a \neq 0$, la ecuación $ax + b = c$ tiene solución única en $\mathbb{R}$, es decir, que la incógnita x solo puede tomar un solo valor para cumplir dicha igualdad.

10) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

11) $-(a + b) = -a - b$, $-(-a - b) = a + b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

12) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

13) Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

Ejemplo 3.1.3

$$(5^{-1})^{-1} \quad = \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{1/5} = 5$$

14) Si $a, b \neq 0$, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Ejemplo 3.1.4

$$\begin{aligned} (5 \cdot 7)^{-1} &= 5^{-1} \cdot 7^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{35} \end{aligned}$$

15) Si $b, d \neq 0$, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

Ejemplo 3.1.5

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{7}{2} \\ 2 \cdot x &= 3 \cdot 7 \\ x &= \frac{21}{2} \end{aligned}$$

16) Si $b, c \neq 0$, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot c}$.

Ejemplo 3.1.6

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{5}{3}$$

17) Si $c \neq 0$, $\dfrac{a}{c} \pm \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \pm b}{c}$.

Ejemplo 3.1.7

$$\frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{5+7}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

18) Si $b, d \neq 0$, $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Ejemplo 3.1.8

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 2} = \frac{35}{6}$$

19) Si $b, c, d \neq 0$, $\dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$.

Ejemplo 3.1.9

$$\frac{5/3}{7/2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{10}{21}$$

20) Si $b, d \neq 0$, $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$.

Ejemplo 3.1.10

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} + \frac{7}{2} &= \frac{5 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{6} \\ &= \frac{10 + 21}{6} = \frac{31}{6} \end{aligned}$$

3.2. Porcentajes

De la figura (3.2) se pueden ver algunos elementos de los números reales son fracciones, que a su vez son números decimales. Mencionar que todo número real puede ser expresado como número decimal.

$$\frac{25}{7} = 3{,}57142...$$

Para algunos casos, sirven estos decimales o fracciones para representar porcentajes de alguna cantidad. Cuando se dice "un $P_{\%}$ porcentaje de algo" se representa como

$$x_{\%} = \frac{P_{\%}}{100} \cdot Cantidad \tag{3.1}$$

Donde $P_{\%}$ es el porcentaje que busco calcular de la cantidad y $x_{\%}$ es el resultado. Además, considerar la palabra *de* como una multiplicación. En algunos casos simplemente se multiplica el número decimal por la cantidad. Esto surge desde la regla de tres simple que se puede hacer entre el porcentaje y la cantidad que busco

$$\begin{aligned} Cantidad &\rightarrow 100\,\% \\ x_{\%} &\rightarrow P_{\%} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.1 *Calcular el* $20\,\%$ *de* 120*:*

$$\begin{aligned} x_{20} &= \frac{20}{100} \cdot 120 \\ x_{20} &= \frac{1}{5} \cdot 120 \\ x_{20} &= 24 \end{aligned}$$

Una propiedad importante que se cumple en los porcentajes es ocupando la conmutativa de la multiplicación[1]. Se puede decir que el $A\,\%$ de B es igual a $B\,\%$ de A.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{A}{100}\cdot B & y & \dfrac{B}{100}\cdot A \\ \dfrac{A\cdot B}{100} & y & \dfrac{B\cdot A}{100} \\ Conmutatividad \longrightarrow A\cdot B & = & B\cdot A \\ \dfrac{A\cdot B}{100} & = & \dfrac{B\cdot A}{100} \end{array}$$

Ejemplo 3.2.2 *Calcular el* $20\,\%$ *de* 150 *y el* $150\,\%$ *de* 20*:*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{20}{100}\cdot 150 & y & \dfrac{150}{100}\cdot 20 \\ \dfrac{1\cdot 150}{5} & y & \dfrac{3\cdot 20}{2} \\ 30 & = & 30 \end{array}$$

Para otro caso que se utilizan los porcentajes, es para calcular el porcentaje de crecimiento o decrecimiento de cierta cantidad.

Porcentaje de aumento:

$$\frac{Cantidad\ de\ aumento}{Cantidad\ original} \times 100\,\% \tag{3.2}$$

$$\frac{Valor\ final\ -\ Valor\ inicial}{Valor\ inicial} \times 100\,\% = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100\,\% \tag{3.3}$$

Porcentaje de decrecimiento:

$$\frac{Cantidad\ de\ decrecimiento}{Cantidad\ original} \times 100\,\% \tag{3.4}$$

$$\frac{Valor\ inicial\ -\ Valor\ final}{Valor\ inicial} \times 100\,\% = \frac{V_i - V_f}{V_i} \times 100\,\% \tag{3.5}$$

[1]Propiedad conmutativa: Tanto en la suma como en la multiplicación si se cambia el orden de los factores, el resultado será el mismo

Porcentaje de transmición:

$$\frac{Cantidad\ después\ de\ Transmitirse}{Cantidad\ original} \times 100\,\% \tag{3.6}$$

Ejemplo 3.2.3 *Un día por un canal entraron* 150 *litros de agua, pero como estaba roto salieron solo* 100 *litros, ¿Cuál es el porcentaje de transmisión del canal?*

Sol: Primero, se identifica las cantidades que se deben reemplazar en (3.6).

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{100\, litros}{150\, litros} & \times & 100\,\% \\ \dfrac{2}{3} & \times & 100\,\% \\ & 66,7\,\% & \end{array}$$

Ejemplo 3.2.4 *El ejemplo anterior se puede resolver también con la fórmula de decreciemiento. Si definimos* $V_i = 150$ *litros y* $V_f = 100$ *litros.*

$$\begin{aligned} \frac{V_i - V_f}{V_i} \times 100\,\% &= \frac{150 - 100\, litros}{150\, litros} \times 100\,\% \\ &= \frac{50\, litros}{150\, litros} \times 100\,\% \\ &= \frac{1}{3} \times 100\,\% \\ &= 33,3\,\% \end{aligned}$$

Con las fórmulas de porcentaje se puede obtener diferente información desde un mismo problema según lo que uno necesite, pero siempre considerando que si son porcentajes complementarios deben sumar 100 %.

3.3. Desigualdades

En la figura (3.2) se muestra la recta de los números reales, donde uno puede definir el elemento cero como el *origen* y cada número, ya sea positivo o negativo, tener una distancia con respecto a ese origen. Cada número real puede representarte como un punto en esta recta que se llama *coordenada*, pero usualmente solo se dice 5 y no “el punto 5”. Esta distancia que tienen los números permite dar un orden a los números reales (Esto no se cumple en todos los conjuntos de números, por ejemplo en los números complejos). Entonces, si tomamos dos elementos a y b se puede decir las siguientes afirmaciones:

- Si a está a la izquierda de b, se dice que a es menor que b y se denota $a < b$.
- Si a está a la derecha de b, entonces se dice que a es mayor que b y se denota $a > b$.

Siguiendo esa lógica están los caso de menor o igual que se denota como $a \leq b$ y mayor igual $a \geq b$ que agrega la posibilidad que los elementos sean iguales. Estos cuatro elementos son los símbolos de las desigualdades.

Para definir las propiedades de las desigualdades se debe utilizar un subconjunto de los números reales que llamaremos $\mathbb{P}$ ($\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$) donde sus elementos son los números positivos.

1) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{P} \Rightarrow a + b \in \mathbb{P}$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{P} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{P}$

Dado $a \in \mathbb{R}$, se verifica una y solo una de las alternativas:

$$a \in \mathbb{P},\ a = 0,\ -a \in \mathbb{R}$$

Esto nos indica las tres posibilidades donde puede estar a, que es parte del conjunto $\mathbb{P}$, ser igual a cero o su negativo está en los números reales ($\mathbb{R}$) que no se considera en $\mathbb{P}$.

Definición 3.3.1 *Dado $a, b \in \mathbb{R}$ se define:*

1) $a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{P}$.
Si el número b es mayor que a, la resta de ambos elementos existe en los números positivos

2) $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$.
Se simboliza la situación que a puede ser menor o igual al número b.

3) $a > b \Leftrightarrow b < a$.

4) $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$.
La definición 3 y 4 simboliza que si se invierten los elementos a y b, para mantener la desigualdad verdadera, se debe cambiar el sentido del símbolo de la desigualdad.

3.3.1. Propiedades de las desigualdades

1) $\forall a \in \mathbb{R},\ a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{P}$
Se considera que el número a es positivo, por lo que existe en el tramo (intervalo) entre lo números inmediatamente después del cero y el infinito positivo.

2) $a \in \mathbb{R},\ a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$
Si la desigualdad dice, que para este caso el número a es menor que cero. Cuando se multiplica a ambos lados de la desigualdad por un factor con signo negativo (por ejemplo: -1), el símbolo cambia de sentido.

3) Para cada $a \neq 0,\ a^2 > 0$
Por las reglas de los signos, independiente si a es negativo o positivo el resultado siempre será positivo.

4) Para $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{l} a < b \\ \\ b < c \end{array}\right. \Rightarrow a < c$$

Si se dice que que el número a es menor que el número b y luego que el número b es menor que el número c. Entonces, el número a es menor que el número c. Se le llama relación transitiva.

5) Para $a, b, c \in \mathbb{R}\ a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
Si hay una desigualdad entre los números a y b y se le suma una número c a ambos lados, la desigualdad se mantiene en el mismo sentido.

6) Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l} a < b \\ \\ c < d \end{array}\right. \Rightarrow a + c < b + d$$

Si hay dos desigualdad y se suman los números menores de cada una (a y c para este caso) siempre serán menores que la suma de los números mayores de las desigualdades correspondientes (b y d para este caso).

7) $a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0,\ a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$
Si hay una desigualdad entre dos números (a y b para este caso) y se multiplica por un factor c mayor que cero, la desigualdad mantiene su sentido.

8) $a, b, c \in \mathbb{R}, c < 0$, $a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$
Si hay una desigualdad entre dos números (a y b para este caso) y se multiplica por un factor c menor que cero, la desigualdad cambia su sentido.

9) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0, \quad a < 0 \Leftrightarrow a^{-1} < 0$
Esta propiedad dice que independiente del signo del número a, su respectivo inverso seguirá teniendo el mismo signo, por lo tanto el símbolo de la desigualdad no cambia.

10)

$$a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \wedge b > 0 \\ \vee \\ a < 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

Si los números a y b se multiplican y el resultado es mayor que cero, solo existen los casos en que ambos números tienen el mismo signo.

11)

$$a \cdot b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \wedge b < 0 \\ \vee \\ a < 0 \wedge b > 0 \end{cases}$$

Si los números a y b se multiplican y el resultado es menor que cero, solo existe el caso en los números tengan signos distintos.

12) Para $a, b > 0$, $a < b \Leftrightarrow a^{-1} > b^{-1}$
Si hay una desigualdad entre los números a y b, donde a es menor que b. Cuando se hace la desigualdad con sus respectivos inversos, la desigualdad cambia de sentido. Lo veremos con un ejemplo.

Ejemplo 3.3.1 *Se consideran dos números bajo la condición $a < b$, entonces se selecciona $a = 2$ y $b = 4$. Ahora, mostramos la propiedad de la desigualdad.*

$$\begin{aligned} 2 < 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad 0{,}5 > 0{,}25 \end{aligned}$$

3.3.2. Intervalos con desigualdades

Es momento de juntar lo visto hasta el momento de conjuntos con los conceptos de las desigualdades. Utilizaremos el paréntesis cuadrado (en otros textos utilizan el paréntesis redondo para representar que el intervalo tiene un extremo abierto) para identificar cuando un intervalo es *cerrado* o *abierto*.

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \tag{3.7}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \tag{3.8}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \tag{3.9}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \tag{3.10}$$

El caso (3.7) se llama un intervalo abierto en ambos extremos o solamente abierto, esto significa que los elementos a y b no pertenecen al conjunto. Para el caso (3.8) es un conjunto cerrado, por lo que si considera a los elementos a y b. Los casos (3.9) y (3.10) son abiertos en un solo extremo y siguen las mismas reglas que los otros dos casos anteriores. Cuando hay un infinito en el intervalo siempre se considera abierto por ese extremo.

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \tag{3.11}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \tag{3.12}$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \tag{3.13}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \tag{3.14}$$

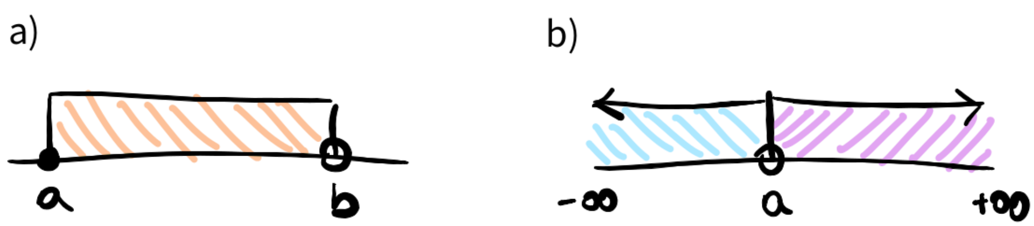

Figura 3.3: Representación de intervalos cerrados y abiertos. a) Muestra el caso de un intervalo entre los números a y b, donde en el extremo a es cerrado (circulo negro) y abierto por el extremo b (circunferencia negra). b) Muestra dos casos, el de la izquierda es un intervalo abierto desde a hasta $-\infty$ (caso 3.13) y el de la derecha es un intervalo abierto desde a hasta $+\infty$ (3.11).

3.4. Valor absoluto

Así como anteriormente se mencionó que la recta permite dar orden a los números reales, también puede representar una distancia. Esta distancia que tiene un elemento dado con respecto al origen es el *valor absoluto*. Como no hay distancias negativas, el resultado es la mismo para un elemento a como para un elemento $-a$. La notación son dos barras verticales $||$.

Definición 3.4.1 ***Valor absoluto***. *Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces el valor absoluto de un número se define como:*

$$|a| = \begin{cases} a, & si \;\; a \geq 0 \\ -a, & si \;\; a < 0 \end{cases}$$

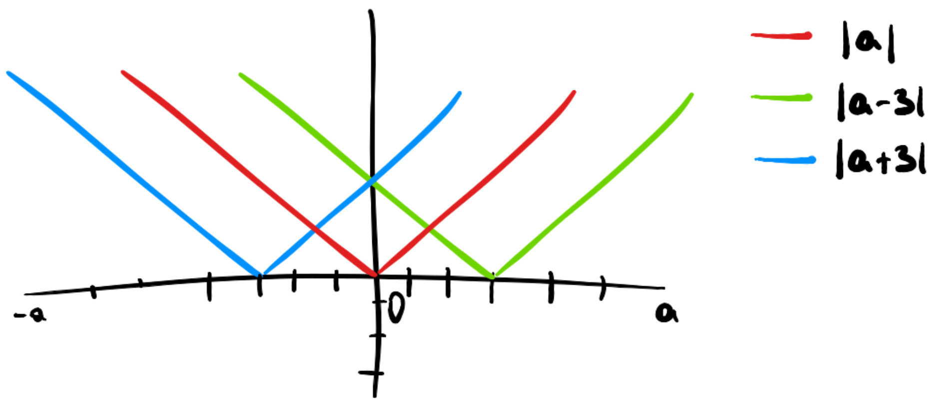

Figura 3.4: Representación del valor absoluto. La linea continua muestra el valor absoluto más común, el cual está centrado en el origen del plano. Las lineas continuas verde y azul son gráficas del absoluto común, pero trasladados en 3 unidades hacia la derecha e izquierda. Se valida que el valor absoluto siempre es positivo.

3.4.1. Propiedades del valor absoluto

1) $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$

2) $\forall a \in \mathbb{R}, \; |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \; |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Ejemplo 3.4.1

$$|5 \cdot 3| = |5| \cdot |3| = 5 \cdot 3 = 15$$

4) $\forall a \in \mathbb{R}, \; |-a| = |a|$

Ejemplo 3.4.2

$$|5| = |-5| = 5$$

5) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

Ejemplo 3.4.3

$$\left|\frac{24}{12}\right| = \frac{|24|}{|12|} = \frac{24}{12} = 2$$

6) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ |a \pm b| \leq |a| + |b|$. A esta propiedad se le llama desigualdad triangular. Se a llevado a contextos más complicados de lo que abarca este texto, pero la idea primitiva es que siempre se cumplirá que la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triangulo, es mayor o igual que la del tercer lado.

7) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ||a| - |b|| \leq |a \pm b|$

Ejemplo 3.4.4 *Sea $a = 6$ y $b = 5$. Comprobar ambos casos de la propiedad* 7.

i)

$$\begin{aligned} ||a| - |b|| &\leq |a - b| \\ ||6| - |5|| &\leq |6 - 5| \\ |6 - 5| &\leq |1| \\ 1 &\leq 1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} ||a| - |b|| &\leq |a + b| \\ ||6| - |5|| &\leq |6 + 5| \\ |6 - 5| &\leq |11| \\ 1 &\leq 11 \end{aligned}$$

Se ve que para ambos casos se cumple la regla que el lado derecho es mayor o igual.

8) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ |a| = |b| \Rightarrow a = b \vee a = -b$

9) Si $c > 0$, entonces $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

9.1) $|x| = c \Leftrightarrow x = c \vee x = -c$

9.2) $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c \Leftrightarrow -c < x \wedge x < c$

9.3) $|x| > c \Leftrightarrow x > c \vee x < -c$

Tomar en consideración que el resultado de un valor absoluto siempre es positivo, por lo que es importante que $c > 0$. Distinto es que el valor dentro del valor absoluto pueda tener valor negativo.

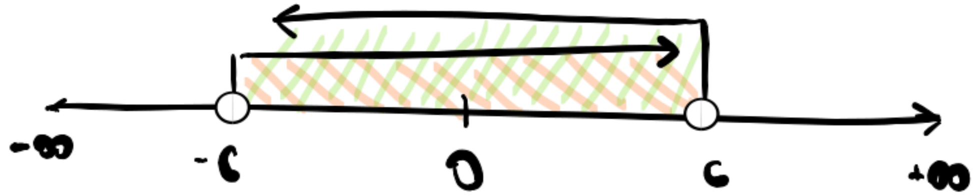

Figura 3.5: Representación de un caso de valor absoluto de la propiedad 9.2. La zona sombreada es donde se encuentre la variable x y las flechas muestran el sentido de la desigualdad particular. El resultado es la intersección de ambas condiciones.

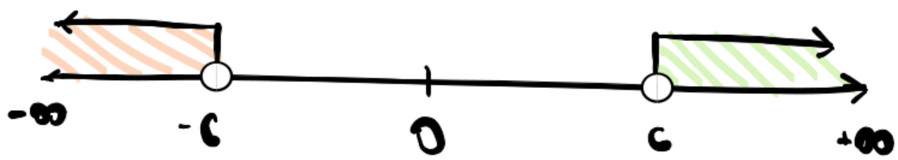

Figura 3.6: Representación de un caso de valor absoluto de la propiedad 9.3. La zona sombreada es donde se encuentre la variable x y las flechas muestran el sentido de la desigualdad particular. El resultado es la unión de ambas condiciones.

Ejemplo 3.4.5 *Ejercicios de valor absoluto.*

a) $|2| = 2$
b) $|-2| = 2$
c) $|5-7| = |-2| = 2$
d) $|-3| - |-10| = 3 - (10) = -7$
e) $|x| < 3 \longrightarrow -3 < x < 3 \longrightarrow -3 < x \wedge x < 3$
f) $|x| > 3 \longrightarrow -3 > x \vee x > 3$

Ejemplo 3.4.6 *Encontrar el signo de la expresión $|x-6|$ para los casos cuando: a) $x > 6$, b) $x = 6$ y c) $x < 6$*

a) Primero notar que la variable toma cualquier valor mayor a 6 y no considera al mismo número 6. Se puede tomar cualquier número del conjunto para ver el signo del valor absoluto, por ejemplo el número 10.

$$|x-6| = |10-6| = |4| = 4 \tag{3.15}$$

Entonces, de la ecuación (3.15) se concluye que el valor absoluto es positivo, en consecuencia $|x-6| = x-6$ para el caso cuando $x > 6$.

b) Al igual que el caso anterior, se considera un caso particular cuando $x = 6$.

$$|x-6| = |6-6| = |0| = 0 \tag{3.16}$$

c) Para este último caso tomaremos un número de ejemplo, para ver el comportamiento del valor absoluto en este conjunto.

$$|x-6| = |-10-6| = |-16| = 16 \tag{3.17}$$

En la ecuación (3.17) el resultado final es positivo por la operación del valor absoluto, pero $x-6$ es negativo por lo que se concluye que $|x-6| = -(x-6) = 6-x$ cuando $x < 6$.

3.5. Exponentes

Cuando se suma varias veces una variable, para acortar la notación se escribe el número de las veces que se repite la variable y esto se multiplica por la variable, como por ejemplo $w + w + w + s + s = 3w + 2s$. Para el caso de la multiplicación de variables están las reglas de los exponentes (ya sean números enteros o fracciones) que veremos a continuación.

$$
\begin{aligned}
x^m x^n &= x^{m+n} &(3.18)\\
\left(\frac{x}{y}\right)^n &= \frac{x^n}{y^n} &(3.19)\\
(x^m)^n &= x^{mn} &(3.20)\\
\frac{x^m}{x^n} &= x^{m-n} &(3.21)\\
(xy)^n &= x^n y^n &(3.22)
\end{aligned}
$$

3.5.1. Radicales

Como se mencionó en la presentación del capítulo de exponentes, hay casos que los exponentes son fracciones y que se traducen en raíces (cuadradas, cúbicas, etc.) de la forma $\sqrt[n]{x}$, donde lo que está dentro de la raíz se llama radicando y n es el índice de la raíz. Hay situaciones en que se llega a ecuaciones como $x^2 = 25$ o $y^3 = 64$ y las soluciones a estas ecuaciones se llaman *raíces*, es decir, para este caso las raíces serían 5 y el 4 respectivamente.

Definición 3.5.1 *Sea x un número real y $n \geq 2$ es un número entero positivo.*

i) Si $x > 0$, entonces la raíz n-ésima principal de $\sqrt[n]{x}$ es el número r positivo tal que $x = r^n$.

ii) Si $x < 0$ y n es un número entero positivo impar, entonces la raíz n-sima principal de $\sqrt[n]{x}$ es un número r negativo tal que $x = r^n$. Por ejemplo, la raíz cúbica está definida para cualquier número impar.

iii) Si $x < 0$ y n es un número entero positivo par, entonces $\sqrt[n]{x}$ no es un número real. Pertenece a los números complejos ($x \in \mathbb{C}$).

iv) Si $x = 0$, entonces $\sqrt[n]{x} = 0$.

Las leyes que sirven para simplificar en los números radicales son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad (\sqrt[n]{x})^n = x &(3.23)\\
&b) \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} &(3.24)\\
&c) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} &(3.25)\\
&d) \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} &(3.26)\\
&e) \quad \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & , \textit{si n es impar.} \\ |x| & , \textit{si n es par.} \end{cases} &(3.27)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.5.1 *Ejercicios de exponentes enteros y fracciones:*

$$
\begin{array}{rl}
i) & 77 \cdot 77 \cdot 77 \cdot 77 = 77^4 \\
ii) & 8^{-3} = \dfrac{1}{8^3} = \dfrac{1}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \dfrac{1}{512} \\
iii) & \sqrt{2} = 2^{1/2} \\
iv) & \sqrt[3]{10^2} = 10^{2/3} \\
v) & -5^2 = -(5 \cdot 5) = -25 \\
vi) & (-5)^2 = 25 \\
vii) & \sqrt{\dfrac{x^2}{25}} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{|x|}{5} \\
viii) & \sqrt[3]{-8} = -2 \\
ix) & \sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{8/2} = 2^4 = 16
\end{array}
$$

3.5.2. Racionalización

Se le llama racionalizar cuando ocupamos una operación matemática para quitar las raíces del numerador o denominador de una fracción. La técnica implica multiplicar por un *uno* camuflado, por ejemplo:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{5}$$

Cuando el término es un factor de la forma $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})$ se debe multiplicar por el mismo término pero conjugado[2], es decir, el signo central es el opuesto. $(\sqrt{x} \mp \sqrt{y})$.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) &= \sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \\
&= (x - \sqrt{xy}) + (\sqrt{yx} - y) \\
&= x - y
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.5.2 *Racionalizar la siguiente expresión fraccional*

$$\frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

Para el caso en que solo sea un término de raíz en la fracción, se debe multiplicar por el mismo termino.

$$\frac{a}{\sqrt[n]{x^k}} \cdot \frac{\sqrt[n]{x^{n-k}}}{\sqrt[n]{x^{n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{x^{n-k}}}{\sqrt[n]{x^k}\sqrt[n]{x^{n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{x^{n-k}}}{\sqrt[n]{x^k \cdot x^{n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{x^{n-k}}}{\sqrt[n]{x^{k+n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{x^{n-k}}}{\sqrt[n]{x^n}} = \frac{a\sqrt[n]{x^{n-k}}}{x} \tag{3.28}$$

[2]El conjugado de una suma de números o variables consiste en cambiar el signo central entre ambos, osea que la expresión $a+b$ cambia a $a-b$, si se da el caso de $-a+b$ cambia a $-a-b$.

Donde el número k es al que está elevado el número dentro de la raíz y n es la $n-$*ésima* raíz del número.

Ejemplo 3.5.3 *Considere la fórmula anterior para racionalizar la expresión* $\dfrac{5}{\sqrt[5]{x^3}}$

Se identifica que el $a = 5$, $k = 3$ y $n = 5$, por lo que al racionalizar se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{\sqrt[5]{x^3}} &= \frac{5}{\sqrt[5]{x^3}}\frac{\sqrt[5]{x^{5-3}}}{\sqrt[5]{x^{5-3}}} \\
&= \frac{5}{\sqrt[5]{x^3}}\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}} \\
&= \frac{5\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3x^2}} \\
&= \frac{5\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^5}} \\
&= \frac{5\sqrt[5]{x^2}}{x}
\end{aligned}$$

3.6. Factorización de polinomios

Definición 3.6.1 *Un polinomio de grado n en la variable x es cualquier expresión algebraica de la forma:*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{3.29}$$

con $a_n \neq 0$, n es un número entero no negativo y a_i, $i = 0, 1, ..., n$ son números reales.

Para los casos particulares, cuando $n = 0$ es una constante, $n = 1$ es un polinomio lineal, $n = 2$ es un polinomio cuadrático, $n = 3$ es un polinomio cúbico y para los $n \geq 4$ son polinomios de orden n.

Ejemplo 3.6.1 *Sea $5x^4 + 3x^2 + 1$ un polinomio de orden 4. Se identifican los términos desde la ecuación (3.29) con el caso de $n = 4$.*

$$\begin{aligned}
5x^4 + 3x^2 + 1 &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0x^0 \\
&= 5x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 1x^0
\end{aligned}$$

Se deduce que $a_4 = 5$, $a_3 = 0$, $a_2 = 3$, $a_1 = 0$ y $a_0 = 1$.

Puede darse el caso en que hay una expresión que permite escribir un polinomio como producto de otro polinomio, esto se llama factorización. Es utilizado para simplificar resultados o separar ciertas variables.

Ejemplo 3.6.2 *Factorizar el siguiente polinomio.*

$$\sqrt{2}x^5y^4 + 5x^4y^7 + 10y^7x^3 - 3x^2y^5 = y^4x^2(\sqrt{2}x^3 + 5x^2y^3 + 10xy^3 - 3y)$$

Lo importante en la factorización es encontrar el factor común que tienen los términos. Este factor puede ser común en todos los términos o solo en algunos.

3.6.1. Factorización de polinomios cuadráticos

En algunos casos es posible factorizar los polinomios cuadráticos de la forma ax^2+bx+c, donde los coeficientes a, b y c son números enteros, como

$$(Ax + B)(Cx + D) \tag{3.30}$$

Donde A, B, C y D son también números enteros. Para comenzar solo consideraremos el caso en que $a = 1$, entonces la ecuación queda de la forma $x^2 + bx + c$ y los factores quedan definidos de la siguiente manera

$$(x + B)(x + D) \tag{3.31}$$

Si se expande la ecuación (3.31):

$$\begin{aligned}(x + B)(x + D) &= x(x + D) + B(x + D)\\ &= x^2 + xD + Bx + BD\\ &= x^2 + x(D + B) + BD \qquad (3.32)\end{aligned}$$

ahora se puede comparar la ecuación cuadrática término por término con la ecuación (3.32). Se puede deducir las siguientes relaciones:

$$B + D = b \ \ y \ \ BD = c$$

Ejemplo 3.6.3 *Factorizar el polinomio cuadrático de la forma* $x^2 - 9x + 18$

Los coeficientes son $b = -9$ y $c = 18$, entonces $B + D = -9$ y $BD = 18$. La segunda relación se puede escribir de diferentes formas:

$$1(18),\ \ 2(9),\ \ 3(6),\ \ -1(-18),\ \ -2(-9),\ \ o\ \ -3(-6),$$

pero de todas las opciones anteriores solo sirve el caso en que $B = -3$ y $D = -6$. Entonces, los factores queda de la forma:

$$x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$$

Polinomio cuadrática en caso general

Para el caso general, donde el polinomio tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se debe aplicar la fórmula de ecuación cuadrática

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.33}$$

que se separa en dos soluciones, que son los números que componen los factores

$$x_{+} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ \ y \ \ x_{-} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.34}$$

Entonces los factores son:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= (x - x_+)(x - x_-) && (3.35) \\ &= \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) && (3.36) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.4 *Resolver la ecuación cuadrática* $5x^2 + 6x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(5)(1)}}{2(5)} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{10} \\ &= \frac{-6 \pm 4}{10} \\ x_+ = \frac{-6 + 4}{10} \quad & y \quad x_- = \frac{-6 - 4}{10} \\ x_+ = \frac{-2}{10} \quad & y \quad x_- = \frac{-10}{10} \\ x_+ = \frac{-1}{5} \quad & y \quad x_- = -1 \\ \left(x + \frac{1}{5}\right) \quad & \wedge \quad (x + 1) = 0 \end{aligned}$$

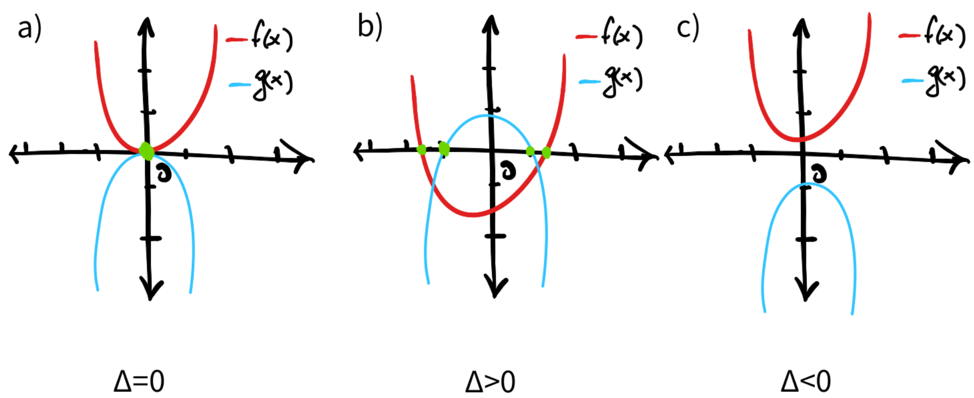

Figura 3.7: Casos de la ecuación cuadrática según su determinante. Para los tres gráficos se muestran dos casos, las parábolas con coeficiente $a > 0$ (linea continua roja y etiquetada como $f(x)$) y las parábolas con coeficiente $a < 0$ (linea continua celeste y etiquetada como $g(x)$), además los puntos verdes muestran las soluciones (intersecciones con el eje x) de cada caso. a) El determinante es cero ($\Delta = 0$), por lo que existe una solución en los números reales (Cuadrado del binomio). b) Determinante mayor que cero ($\Delta > 0$), por lo que sol soluciones reales y distintas. c) Determinante menor que cero ($\Delta < 0$), en este caso no existen soluciones en los números reales por lo que las parábolas no intersectan al eje x.

Algo importante a notar en la ecuación (3.33) es el término que está bajo la raíz cuadrada, a la cual se le llama determinante (Que se simboliza con la letra griega delta, Δ). El término es $\sqrt{b^2 - 4ac}$ y se desprenden 3 casos posibles

- Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene soluciones distintas y reales.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, tiene soluciones iguales y reales
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la solución pertenece a los números complejos $\mathbb{C}$.

3.6.2. fórmulas de factorización

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 \tag{3.37}$$
$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \tag{3.38}$$
$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) \tag{3.39}$$
$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2) \tag{3.40}$$

La ecuación (3.37) es un cuadrado perfecto, la ecuación (3.38) es una diferencia de cuadrados, la ecuación (3.39) es una diferencia de dos cubos y la ecuación (3.40) es una suma de dos cubos. Siempre estas ecuaciones pueden cambiar las variables y no altera el resultado.

Ejemplo 3.6.5 *Expandir o reducir los siguientes casos:*
i)

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= (x+3)(x+3)\\ &= x(x+3)+3(x+3)\\ &= x^2+3x+3x+9\\ &= x^2+6x+9\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(x-5)(x+5) &= x(x+5)-5(x+5)\\ &= x^2+5x-5x-25\\ &= x^2-25\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}(x+4)(x^2-4x+16) &= x(x^2-4x+16)+4(x^2-4x+16)\\ &= x^3-4x^2+16x+4x^2-16x+64\\ &= x^3+64\end{aligned}$$

3.7. Expresiones racionales

Expandiendo el universo de posibilidades, veremos el caso de polinomios en fracciones. Aquí combinaremos lo visto en la sección anterior de polinomios con las propiedades vistas en la sección (3.1.3).
Lo importante de esta sección es ver cuando se puede simplificar algunas expresiones, para ello, en algunos casos debemos dejar que los factores coincidan tanto en el denominador como en numerador de la fracción.

Ejemplo 3.7.1 *Simplificar la siguiente expresión:*

$$\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\frac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x+1}{x+1}$$

3.7.1. Mínimo común denominador (MCD)

Al igual que en los números, se busca el factor que tienen en común cada una de las fracciones. El factor se encuentra mediante la factorización de cada denominador y tomando los elementos en común que tengan.

Ejemplo 3.7.2 *Reduzca la siguiente expresión fraccional*

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{(x^2-4)}+\frac{1}{x^2+4x+4} &= \frac{x}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)^2}\\
&= \frac{x(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}\\
&= \frac{x^2+2x+x-2}{(x-2)(x+2)^2}\\
&= \frac{x^2+3x-2}{(x-2)(x+2)^2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.7.3 *Reduzca la siguiente expresión fraccional*

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} &= \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}\\
&= \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}\\
&= \frac{-h}{x(x+h)}\cdot\frac{1}{h}\\
&= \frac{-1}{x(x+h)}
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Ecuaciones y desigualdades

4.1. Ecuaciones

En las ecuaciones se plantea que ambos lados de ellas son iguales, por lo mismo es que se utiliza el símbolo =. Para tener una única solución se debe tener igual número de ecuaciones y de variables que se desean encontrar, solo para ese caso se obtienen soluciones exactas para el o las incógnitas. En el caso particular que veremos, necesitamos una ecuación para una sola variable.

$$x - 10^2 = 0 \tag{4.1}$$

Entonces, al menos uno de los lados de la expresión debe contener la variable que se busca, en la ecuación (4.1) está al lado izquierdo y la variable es la x. Cuando se encuentra la (o las) solución(es) de la ecuación(es) se le llaman raíz (raíces en el caso de tener más de una). En términos de lógica matemática, la solución o raíz de una ecuación es cualquier número que convierte la expresión en una proposición verdadera.

Definición 4.1.1 ***Ecuaciones equivalentes*** *Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.*

Definición 4.1.2 ***Operaciones que producen ecuaciones equivalentes.***

i) Sumar o restar un elemento que represente un número real a ambos lados de la ecuación.

ii) Multiplicar o dividir cada miembro de la ecuación por un mismo elemento que represente un número real.

Ejemplo 4.1.1 *Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones:*

i)

$$\begin{aligned} 3x - 18 &= 0 \\ 3x - 18 + 18 &= +18 \\ 3x &= 18 \\ x &= 18/3 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{3}{4} &= \frac{5}{8} \\ \frac{x}{2} &= \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \\ \frac{x}{2} &= -\frac{1}{8} \\ x &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

4.1.1. Ecuaciones con mas variables

Está el caso en que tendremos más variables que número de ecuaciones, por lo que debemos elegir una variable para *dejarla en función* de otras variables. Esto es muy común cuando tengo conocimiento parcial de las variables.

Ejemplo 4.1.2 *Reduzca la siguiente ecuación y deje la variable R_2 en función de R y R_1*

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{R_2} \\ \frac{R_1 - R}{RR_1} &= \frac{1}{R_2} \\ R_2 &= \frac{RR_1}{R_1 - R} \end{aligned}$$

En el ejemplo (4.1.2) se puede ver que R_2 está en función de otras dos variables R y R_1. Otra forma de escribirlo es $R_2\left(R, R_1\right)$.

Se recurre a este procedimiento cuando se tiene sistemas de ecuaciones, para despejar una variable de una ecuación y la expresión resultante se reemplaza en las ecuaciones restantes.

Ejemplo 4.1.3 *Se consideran un sistema de ecuaciones con dos expresiones.*

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 10 \\ 4x - 2y &= 6 \end{aligned}$$

$$x = \frac{6 + 2y}{4}$$

$$2\left(\frac{6 + 2y}{4}\right) + 3y = 10$$

$$\begin{aligned} 12 + 4y + 12y &= 40 \\ y &= \frac{28}{16} = \frac{7}{4} \\ x &= \frac{6 + 2(7/4)}{4} = \frac{19}{8} \end{aligned}$$

Finalmente, se encuentran que las variables son $y = 7/4$ y $x = 19/8$ respectivamente.

4.1.2. Problemas con enunciado

Un proceso es importante en la matemática es contextualizar el problema y saber llevar el enunciado a una expresión matemática. Veremos como se pasa desde un texto a una ecuación o sistema de ecuaciones. Se debe tener en cuenta que lo primero es identificar el o las variables que son parte del problema para luego saber la relación que pueden tener entre ellas.

1) Escribir el doble y el triple de un número x :

$Sol : 2x \;\; y \;\; 3x$

2) El cuadrado del triple de un número x :

$Sol : (3x)^2$

3) Escribir la cuarta parte y las 3 cuarta partes de un número x:

$Sol : \frac{x}{4} \;\; y \;\; \frac{3x}{4}$

4) Camila tiene 15 años que es la tercera parte de la edad que tiene su madre ¿Cuál es la edad de la madre de Camila?

Primero se identifica la edad de la madre de Camila como la variable que se busca, la llamaremos x

$$Sol: \frac{x}{3} = 15$$
$$x = 45$$

5) Sea x un número real el cual la suma de su mitad, su doble y su triple es 55 ¿Cuál es el número x?

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} + 2x + 3x &= 55 \\
\frac{x}{2} + 5x &= 55 \\
\frac{x + 10x}{2} &= 55 \\
\frac{11x}{2} &= 55 \\
11x &= 110 \\
x &= \frac{110}{11} = 10
\end{aligned}$$

Un médico usa habitualmente soluciones de alcohol al 20 % y otro al 70 %, pero ahora necesita 15 litros de una nueva solución de alcohol al 40 % ¿Cuantos litros de cada solución debe ocupar para lograr los 15 litros de solución al 40 %?

Sol: Primero se identifica las variables que son las dos soluciones de alcohol. A la solución del 20 % se la llamaremos S_{20} y a la otra S_{70}. Entonces se puede formar dos ecuaciones con la información que nos entrega el enunciado

$$S_{20} + S_{70} = 15 \qquad (4.2)$$
$$0,20 \cdot S_{20} + 0,70 \cdot S_{70} = 6 \qquad (4.3)$$

La ecuación (4.2) surge de que los litros de ambas soluciones deben sumar 15 litros y la ecuación (4.3) es de los litros netos de alcohol de cada solución, por lo mismo es que se saca el porcentaje neto de alcohol a los 15 litros ($40 \cdot 0,15 = 6$ o $(40 \cdot 15)/100$).
El procedimiento es despejar cualquier variable y luego reemplazar en la otra ecuación. En este caso despejamos S_{20} en función de S_{70}.

$$S_{20} = 15 - S_{70},$$

ahora se puede reemplazar la variable S_{20} en la ecuación (4.3).

$$\begin{aligned}
0{,}20 \cdot S_{20} + 0,70 \cdot S_{70} &= 6 \\
0{,}20 \cdot (15 - S_{70}) + 0,70 \cdot S_{70} &= 6 \\
\frac{20}{100} \cdot (15 - S_{70}) + \frac{70}{100} \cdot S_{70} &= 6 \\
3 - \frac{1}{5} S_{70} + \frac{70}{100} \cdot S_{70} &= 6 \\
-\frac{1}{5} S_{70} + \frac{70}{100} \cdot S_{70} &= 3 \\
\frac{-20+70}{100} \cdot S_{70} = 3 & \\
\frac{50}{100} \cdot S_{70} = 3 & \\
\frac{1}{2} \cdot S_{70} = 3 & \\
S_{70} = 6 & \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Ahora, falta reemplazar (4.4) en (4.2) y se obtiene que $S_{20} = 9$. Finalmente necesita 6 y 9 litros de cada solución.

4.2. Desigualdades

Así como la sección anterior plantea una igualdad de ambos lados de la ecuación y hay ciertos valores que convierten la proposición en verdadera (las raíces), pero en las desigualdades son intervalos los que hacen verdadera una proposición. Cualquier número del intervalo solución convierte la inecuación en verdadera.

Definición 4.2.1 ***Desigualdades equivalentes.*** *Si dos desigualdades (o inecuaciones) tienen el mismo conjunto solución, entonces se les llama desigualdades equivalentes.*

Ejemplo 4.2.1 ***Operaciones que producen desigualdades equivalentes.*** *Sea a y b dos números reales y c un número real distinto de cero. Entonces, la desigualdad $a < b$ es equivalente a*

- $a + c < b + c$
- $a \cdot c < b \cdot c$ *para* $c > 0$
- $a \cdot c > b \cdot c$ *para* $c < 0$

Para las expresiones con variables es similar el procedimiento al de las ecuaciones, por el momento solo se debe tener cuidado si se multiplica por un valor menor a cero en ambos lados.

Ejemplo 4.2.2 *Resolver y encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad.*

$$\begin{aligned} 8x+4 &< 16+5x \\ 8x-5x &< 16-4 \\ 3x &< 12 \\ x &< 12/3 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $x \in]\infty, 4[$.

Ejemplo 4.2.3 *Resolver y encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad.*

$$\begin{aligned} x+\frac{2}{5} &\leq -3x+7 \\ 4x &\leq 7-\frac{2}{5} \\ x &\leq \frac{33}{20} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $]-\infty, 33/20]$.

4.2.1. Desigualdades simultaneas

Está el caso en que la variable se encuentra entre dos desigualdades, pero el procedimiento es el mismo. Se debe seguir las reglas de las desigualdades y despejar la variable.

$$\begin{aligned} -16 &< 5x+1 < 45 \\ -16-1 &< 5x+1-1 < 45-1 \\ -17 &< 5x < 44 \\ -17/5 &< x < 44/5 \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se concluye que $x \in]-17/5, 44/5[$. Se debe notar que se extiende para los casos en que la desigualdad es con mayor o igual y menor o igual. Se llega al mismo resultado si uno separa las desigualdades y conecta ambas expresiones con un y lógico ($\wedge$).

Ejemplo 4.2.4 *Mas que resolver un expresión, las desigualdades simultaneas se pueden entender como un intervalo en el que debe existir la variable. Una muestra de esto puede ser el rango de latidos que debería tener una persona según su edad.*

Recien nacido ($0-1$ mes)	$70 < x < 190$
Infante ($1-11$ meses)	$80 < x < 160$
Niños y niñas ($1-2$ años)	$80 < x < 130$
Niños y niñas ($3-4$ años)	$80 < x < 120$
Niños y niñas ($5-6$ años)	$75 < x < 115$
Niños y niñas ($7-9$ años)	$70 < x < 110$
Niños y niñas sobre 10 años, adultos y tercera edad	$60 < x < 100$
Atletas adultos bien entrenados	$40 < x < 60$

Cuadro 4.1: Tabla de ritmos cardíacos de personas en reposo según rango etario. Donde la variable x representa la edad específica de cada persona estudiada y al tomar un valor se ubica en el rango que le corresponde.

4.3. Ecuaciones y desigualdades con valor absoluto

4.3.1. Ecuaciones

Por la definición (3.4.1) se puede que tanto a como $-a$ pueden ser $|a|$, eso quiere decir que hay dos posibles soluciones para una ecuación con valor absoluto. La siguiente definición muestra los dos casos.

Definición 4.3.1 ***Ecuación de valor absoluto.***

$$|x| = a \ \ si\ y\ solo\ si\ x = -a\ o\ x = a$$

Para obtener el conjunto solución de las ecuaciones lineales con valor absoluto se debe evaluar ambos casos.

Ejemplo 4.3.1 *Resolver la siguiente ecuación con valor absoluto*

$$\begin{array}{rcl} |5x-3| & = & 8 \\ 5x-3=-8 & \vee & 5x-3=8 \\ 5x=-5 & \vee & 5x=11 \\ x=-1 & \vee & x=11/5 \\ \{-1\} & \cup & \{11/5\} \end{array}$$

Como las ecuaciones de valores absolutos tienen más de una solución, sucede que la ecuación *puede ser de una forma u otra*. Esto hace aparecer el conector lógico $\vee$, que en teoría de conjuntos es una unión de elementos o intervalos.

4.3.2. Desigualdades

Para el caso de las desigualdades se debe tomar mayor precaución, ya que los casos son diferentes. Como se explicó en la sección (3.4.1), hay un caso de intersección y otro de unión de intervalos.

Definición 4.3.2 ***Desigualdades de valor absoluto.***

i) $|x| < a$ *si y solo si* $-a < x < a$*. Que es análogo a* $-a < x \wedge x < a$*.*
ii) $|x| > a$ *si y solo si* $x < -a$ *o* $x > a$*. Que es análogo a* $x < -a \vee x > a$ *.*

Para esta definición son igualmente válidas si se cambian los símbolos de $<$ y $>$ por $\leq$ y $\geq$.

Ejemplo 4.3.2 *Resolver las siguientes desigualdades:*

i)

$$\begin{array}{rcl} |x-1| & \leq & 3 \\ -3 \leq & x-1 & \leq 3 \\ -2 \leq & x & \leq 4 \\ & x \in [-2,4] & \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{rcl} |x+3| & \geq & 5 \\ x+3 \leq -5 & \vee & x+3 \geq 5 \\ x \leq -8 & \vee & x \geq 2 \\ x \in]-\infty,-8] & \cup & [2,+\infty[\end{array}$$

iii)

$$\begin{array}{rcl} |6x-11| & < & 5 \\ -5 < 6x-11 & \wedge & 6x-11 < 5 \\ 6 < 6x & \wedge & 6x < 16 \\ 1 < x & \wedge & x < 16/6 \\ 1 < x & \wedge & x < 8/3 \\ & x \in]1, 8/3[& \end{array}$$

4.4. Desigualdades racionales y polinomiales

Hasta el momento se ha visto ecuaciones y desigualdades lineales con valor absoluto de la forma $ax + b$, ahora se ampliará el abanico de posibilidades. Será una división de polinomios de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)},\ \ Q(x) \neq 0$$

4.4.1. Desigualdades polinomiales

Si se va reemplazando los números reales en el polinomio, está la posibilidad que en algún número c cambien de signo los factores, es decir, cuando $P(c) = 0$. A estos números se les llaman *ceros del polinomio*.
Lo que se busca en esos intervalos, es que coincida la condición de la desigualdad (mayor o menor que cero) con el intervalo, en otras palabras, solo me interesa cuando el polinomio es positivo o negativo según la condición de la desigualdad. Para encontrar estos rangos se construye *la tabla de signos* que contiene los ceros del polinomio y que signo tiene en ese determinado intervalo.

Definición 4.4.1 ***Tabla de signos:***

i) Despejar la igualdad de forma que en un lado estén las variables y del otro el cero, es decir, debe quedar de la forma $P(x)/Q(x) > 0$*. Esto es válido para las cuatro posibilidades que tiene una desigualdad* ($<$, $>$, $\leq$ *y* $\geq$)*. Importante es no multiplicar por la misma variable que se quiere buscar con tal de despejar, por ejemplo en situaciones de* $1/x$*.*

ii) Factorizar lo máximo posible los polinomios del numerador y denominador. Visto en la sección (3.6.2).

iii) Encontrar los ceros de cada polinomio ($P(x)$ *y* $Q(x)$ *por separado). Cada cero de los polinomios es una línea divisoria entre los intervalos.*

iv) Determinar el signo de la expresión total ($P(x)/Q(x)$*) con un número específico que esté en cada intervalo. Luego, hacer el producto entre los signos de cada factor de la fracción. El resultado del producto es el signo que tiene la expresión en ese intervalo.*

Ejemplo 4.4.1 *Resolver la siguiente desigualdad:*

$$\begin{aligned}
x^2 &\geq -2x+15 \\
x^2+2x-15 &\geq 0 \\
x^2+2x-15 &\geq 0 \\
(x+5)(x-3) &\geq 0 \\
Identificar\ ceros \longrightarrow (x+5)=0 &\vee (x-3)=0 \\
x=-5 &\vee x=3
\end{aligned}$$

Tabla de signos, donde los ceros son el -5 y el 3.

$-\infty$ a -5	-5 a 3	3 a $+\infty$
$x=-10$ $(-)(-)=+$	$x=0$ $(+)(-)=-$	$x=10$ $(+)(+)=+$

Cuadro 4.2: Tabla de signos. En la primera fila se ubican los intervalos donde los extremos son los infinitos y los ceros de los polinomios en orden de menor a mayor. En la segunda fila se toma un número particular que pertenece al intervalo y se reemplaza en cada paréntesis y/o elemento de la expresión. Finalmente, se hace el producto de los signos y se ve el signo del intervalo completo.

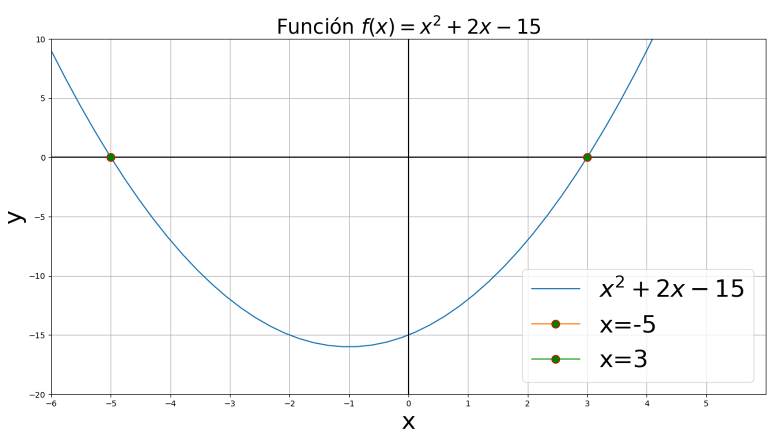

Figura 4.1: Gráfica de función cuadrática del ejemplo (4.4.1). La expresión cuadrática tiene dos puntos de intersección con el eje x, que son justamente en donde cambia de signo los intervalos.

La desigualdad solicita que sea mayor que cero, por lo que los intervalos solución son $]-\infty,-5] \cup [3,+\infty[$. Los infinitos siempre son intervalos abiertos, en los otros casos lo determina el símbolo de la desigualdad (en este caso es un intervalo cerrado por el símbolo de la igualad).

Para las expresiones fraccionales con polinomios el procedimiento es análogo, pero hay que considerar que el denominador debe ser $\neq 0$.

Ejemplo 4.4.2 *Resolver la siguiente desigualdad fraccional:*

$$\frac{x+1}{x+3}+1 \leq 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{x+1+x+3}{x+3} \leq 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{2x+4}{x+3} \leq 0 \tag{4.7}$$

Los ceros son $x \neq -3$ y $x=-2$. Ahora se hace la tabla de signos con los ceros encontrados.

$-\infty$ a -3	-3 a -2	-2 a $+\infty$
$x=-10$	$x=-2,5=-5/2$	0
$\frac{(-)}{(-)}=+$	$\frac{(-)}{(+)}=-$	$\frac{(+)}{(+)}=+$

Cuadro 4.3: Tabla de signos de una inecuación fraccional.

El intervalo que cumple con la condición de la desigualdad es $]-3,-2]$. Notar que el intervalo debe ser abierto en -3 y cerrado -2, o si no la desigualdad queda indefinida.

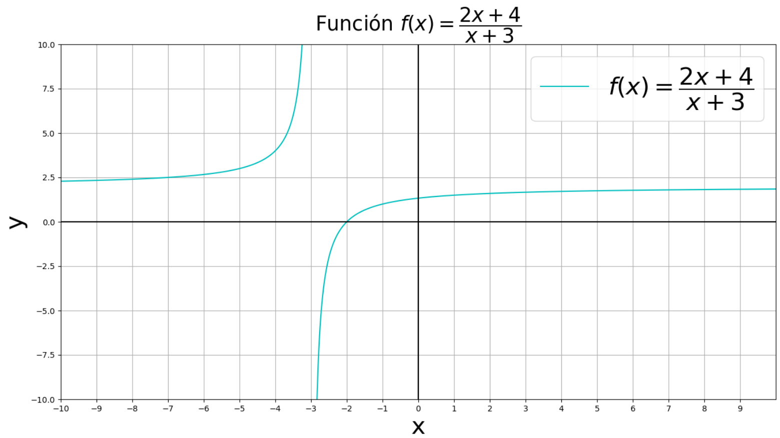

Figura 4.2: Gráfico del ejemplo (4.4.2). Se Muestra (nuevamente) el intervalo en que la función cumple con la condición de la desigualdad (menor que cero, ≤ 0).

4.4.2. Desigualdades polinomiales con valor absoluto

Para finalizar el análisis de las desigualdades racionales, veremos el caso cuando tienen un valor absoluto. El procedimiento es el mismo solo que ahora se debe tener en consideración que habrán dos tablas con su (o sus) respectivo(s) conjunto(s) solución (o soluciones), que se deben unir. Luego, los conjuntos de las tablas se deberán intersectar o unir según el caso de valor absoluto. Ver el segundo ejercicio del ejemplo (4.3.2).

Ejemplo 4.4.3 *Resolver las siguientes expresiones polinomiales de fracciones con valor absoluto.*

i)

$$\begin{array}{rcl} \left|\frac{1}{x}+3\right| & \leq & 3 \\ -3 \leq & \frac{1}{x}+3 & \leq 3 \\ -3 \leq \frac{1}{x}+3 & \wedge & \frac{1}{x}+1 \leq 1 \\ 0 \leq \frac{1}{x}+6 & \wedge & \frac{1}{x} \leq 0 \\ \underbrace{0 \leq \frac{1+6x}{x}}_{x \neq 0,\ x=-1/6} & \wedge & \underbrace{\frac{1}{x} \leq 0}_{x \neq 0} \end{array}$$

$-\infty$ a $-1/6$	$-1/6$ a 0	0 a $+\infty$
$x=-10$ $\frac{(-)}{(-)}=+$	$x-1/12$ $\frac{(+)}{(-)}=-$	$x=10$ $\frac{(+)}{(+)}=+$

$-\infty$ a 0	0 a ∞
$x=-1$ $\frac{(1)}{(-)}=-$	$x=1$ $\frac{(1)}{(+)}=+$

Ahora se debe hacer la intersección de ambas tablas, resultando como conjunto solución: $x \in (]-\infty, -1/6] \cup]0, +\infty[) \cap]-\infty, 0[=]-\infty, -1/6]$.

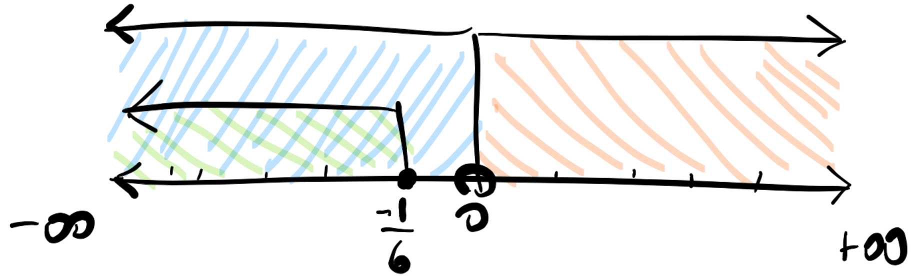

Figura 4.3: Gráfica de los intervalos en la recta de los números reales. Siempre se dibujan todos los intervalos que cumplen la condición de la desigualdad (mayor o menor que 0).

ii)

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{3x-1}{x}\right| &\geq 4 \\
\frac{3x-1}{x} \geq 4 \quad &\vee \quad \frac{3x-1}{x} \leq -4 \\
\frac{3x-1}{x} - 4 \geq 0 \quad &\vee \quad \frac{3x-1}{x} + 4 \leq 0 \\
\frac{3x-1-4x}{x} \geq 0 \quad &\vee \quad \frac{3x-1+4x}{x} \leq 0 \\
\underbrace{\frac{-1-x}{x} \geq 0}_{x\neq 0, x=-1} \quad &\vee \quad \underbrace{\frac{7x-1}{x} \leq 0}_{x\neq 0, x=1/7}
\end{aligned}
$$

$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a $+\infty$
$x=-10$ $\frac{(+)}{(-)} = -$	$x=-1/2$ $\frac{(-)}{(-)} = +$	$x=10$ $\frac{(-)}{(+)} = -$

$-\infty$ a 0	0 a $1/7$	$1/7$ a $+\infty$
$x=-1$ $\frac{(-)}{(-)} = +$	$x=1/14$ $\frac{(-)}{(+)} = -$	$x=10$ $\frac{(+)}{(+)} = +$

En este caso debemos unir todos los resultados. De ambas tablas solo sirve un intervalo de cada una, entonces el conjunto solución es: $x \in [-1, 0[\cup]0, 1/7] = [-1, 1/7] - \{0\}$.

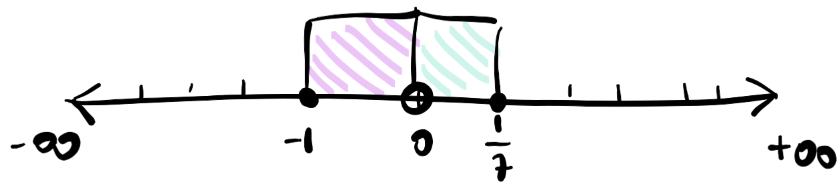

Figura 4.4: Gráfica de los intervalos en la recta de los números reales. Procedimiento similar al ejemplo anterior, solo que en este caso se debe unir los intervalos en vez de intersectarlos.

Capítulo 5

Funciones matemáticas

Usualmente, se necesita agrupar elementos bajo ciertas condiciones como lo vimos en la sección (2). Ahora, hay ciertos grupos que tienen una correspondencia que asocia estos conjuntos, entonces se genera una dependencia del valor de un conjunto con respecto a otro, a esto se le llama *función matemática*.

Definición 5.0.1 ***Función matemática.*** *Una función de un conjunto X a un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x de X exactamente un elemento y de Y.*

A las funciones se le acostumbra asignar letras como f, g o h, pero puede ser cualquier letra o símbolo. La primera notación que usualmente se utiliza es $f : X \longrightarrow Y$ que nos dice desde donde y hasta donde va la función. En este caso va desde el conjunto X que se llama *dominio* hasta el conjunto Y que se llama *imagen* o *recorrido*. La segunda forma de representar la función es $y = f(x)$, donde y es un elemento de la imagen y x es una elemento del dominio que se le aplicó la función $f()$.
La aplicación de una función se puede asemejar a un proceso que tiene entradas (los elementos x del conjunto X), una función y salidas (los elementos y del conjunto Y) con la función aplicada. Las entradas x no dependen de nada previo, por lo que se les llama variables independientes y como las salidas y dependen de las entradas se les llama variables dependientes.

La variable que aparece dentro del paréntesis en $f()$ es la que se reemplaza cada vez que aparezca la variable, es decir, si la función es $f() = () + 3$ y uno desea saber la expresión de $f(j^3) = j^3 + 3$.

Ejemplo 5.0.1 *Evaluar una función con un elemento del dominio.*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 3x^2 + x + 56 \\ f(7) &= (7)^4 + 3 \cdot (7)^2 + (7) + 56 = 2611 \end{aligned}$$

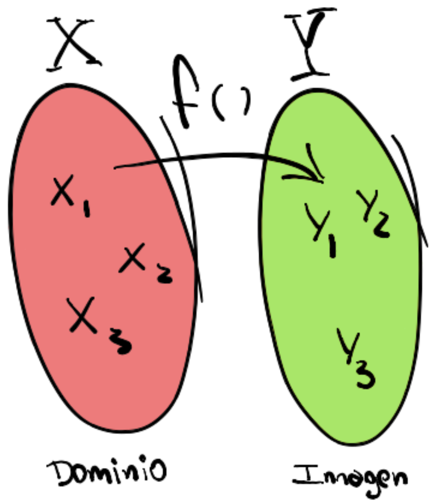

Figura 5.1: Esquema de una función matemática. El óvalo rojo representa el dominio de la función que es un conjunto X con los elementos x_1, x_2 y x_3. La flecha muestra la dirección de la función y la operación que se aplicará. El óvalo verde representa la imagen de la función de un conjunto Y con elementos y_1, y_2 y y_3.

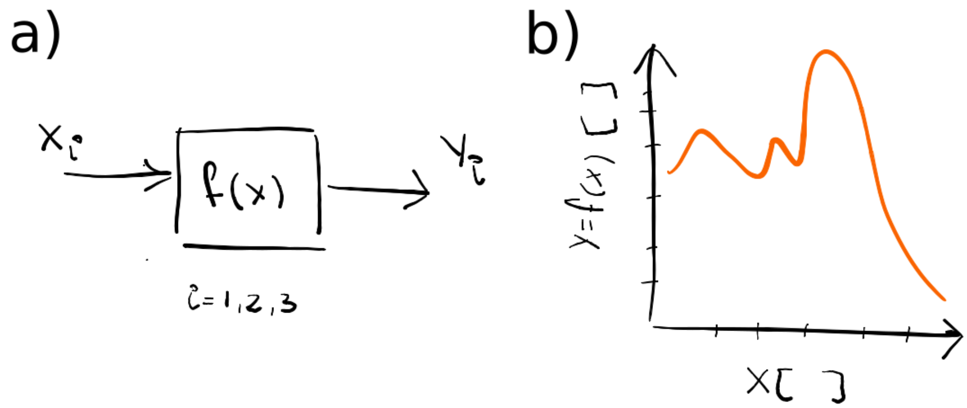

Figura 5.2: Esquema de una función y gráfico de una variable dependiente e independiente. a) Las variables x_i representan las entradas de la función. Luego, la caja es donde se aplica la función $f(x)$ y finalmente se tiene una salida que son las variables y_i. b) Gráfica de una variable independiente, x, y una variable dependiente, y, que va cambiando su valor cuando se evalúa cada elemento del dominio (los x_i).

5.1. Dominio e imagen de una función

Definición 5.1.1 ***Dominio de una función.*** *El dominio de una función f es el mayor subconjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real. Se denota $Dom(f(x))$.*

$$Dom(f(x)) = \{x \in X | \exists y \in Y, f(x) = y\} \tag{5.1}$$

Entonces, el dominio de una función es el conjunto más grande donde está definida, por ejemplo $1/x$ está definido en para cualquier número real menos para el cero, por lo que el dominio de la función son todos los números reales menos el cero ($\mathbb{R} - \{0\}$). La imagen de la función son todos los valores que puede tomar $f(x)$.

Definición 5.1.2 ***Imagen de una función.*** *Es el conjunto Y que tiene como elementos todos los posibles valores que puede tomar la función. Se denota como $Im(f(x))$.*

$$Im(f(x)) = \{y \in Y | \exists x \in X, f(x) = y\} \tag{5.2}$$

Ejemplo 5.1.1 *Encontrar el dominio de las siguientes funciones:*

i)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+7} \\ Dom(f(x)) &= x + 7 \geq 0 \\ Dom(f(x)) &= x \geq -7 \\ Dom(f(x)) &= [-7, +\infty[\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 - 4} \\ Dom(f(x)) &= x^2 - 4 \neq 0 \\ Dom(f(x)) &= x^2 \neq 4 \\ Dom(f(x)) &= \sqrt{x^2} \neq \sqrt{4} \\ Dom(f(x)) &= |x| \neq 2 \\ Dom(f(x)) &= x \neq \pm 2 \\ Dom(f(x)) &= \mathbb{R} - \{-2, +2\} \end{aligned}$$

Para calcular el dominio de una función no hay un procedimiento único, por lo que se debe analizar el tipo de función que tenemos y que no se anule para que tome siempre valores reales. Por ejemplo, en el caso de las raíces cuadradas se debe cumplir que el radicando debe ser mayor que cero o para el caso de las expresiones fraccionales, el denominador debe ser distinto de cero. A continuación cual es el dominio de cierto tipo de funciones.

- Funciones polinomiales: El dominio son todos los números reales.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^7 + 50x^{25} + 2 \\ Dom(f(x)) &: \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Función racional (fracciones): Son todos los números reales, menos los valores que hace cero al denominador.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+2} \\ Dom(f(x)) &: \mathbb{R} - \{-2\} \end{aligned}$$

- Funciones radicales con índice par: El dominio son todos los valores que hacen que el radicando sea mayor que cero.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3x+7} \\ Dom(f(x)) &: \left[\frac{-7}{3}, +\infty\right[\end{aligned}$$

- Funciones radicales con índice impar: Es el dominio del radicando, no está sujeta a una desigualdad.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{7x+3} \\ Dom(f(x)) &: \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Función logarítmica: El dominio está formado por todos los valores que hacen que el argumento del logaritmo sea mayor que cero.

$$\begin{aligned} f(x) &= log\left(2x^2 + 3x + 1\right) \\ Dom(f(x)) &:]-\infty, -1[\cup \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[\end{aligned}$$

- Función exponencial: El dominio son todos los reales, excepto los valores que anulan a la función que está en el exponente.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ Dom(f(x)) &: \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{1/x} \\ Dom(f(x)) &: \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

5.2. Gráficas de una función

Al momento de plasmar una función cualquiera debemos juntar las definiciones de dominio (5.1.1), imagen (5.1.2) y la figura (5.2), con estos tres elementos podemos graficar una función. Cada punto de la gráfica tiene la forma (x_i, y_i) o $(x_i, f(x_i))$, por lo que el eje x representa el dominio de la función y el eje y la imagen.
La función para un valor y puede tener más de un valor en x, por ejemplo en x^2. No se puede dar el caso inverso, es decir, que por un valor de x la función tenga dos o más valores en el y, es por ello que si uno traza una línea vertical en las gráficas, esta línea debe tocar solo un punto del gráfico, si no, no es una función.

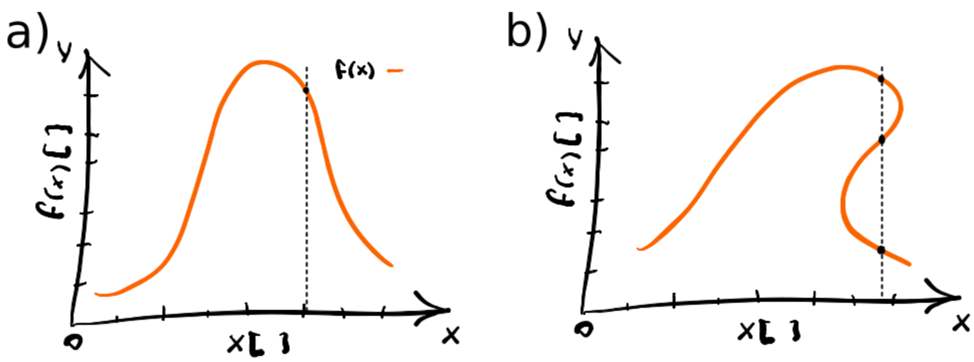

Figura 5.3: Gráfica para diferenciar una función. a) Es una gráfica que muestra una línea vertical que toca en un solo punto a la gráfica, por lo tanto, es una función. b) La gráfica no es una función, ya que la línea toca a la función en tres puntos.

Si la línea solo debe tocar en un punto, entonces ¿Qué ocurre cuando se grafica un círculo? En casos de círculos o elipses son dos funciones que al momento de graficarlas al mismo tiempo forman la figura. Por ejemplo, las gráficas que forman un círculo de radio 3 son $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$.

5.2.1. Intersecciones con los ejes

Una de las formas más rápidas de obtener información de la gráfica de la función es ver en que puntos pasa por los ejes, se debe ver que para las intersecciones en el eje y son de la forma $(0, f(0))$ mientras que para los del eje x son $(x, 0)$. De esto se desprende que hay ciertos valores de x que hacen que $y = 0$, entonces el objetivo es encontrar esos x que hace que $f(x) = 0$.
Cuando se encuentran esos números se le llaman *raíces* o *soluciones* de la función que satisfacen la ecuación $f(c) = 0$, siendo c los números reales que son solución de la función.

Como se puede notar no siempre las funciones pasan por los ejes, hay casos en que la función toca en un solo punto, pero no cruza, a esto se llama una gráfica *tangente* al eje. La función solo puede pasar o tocar al eje y en un solo punto, siempre y cuando el 0 esté en el dominio de la función.

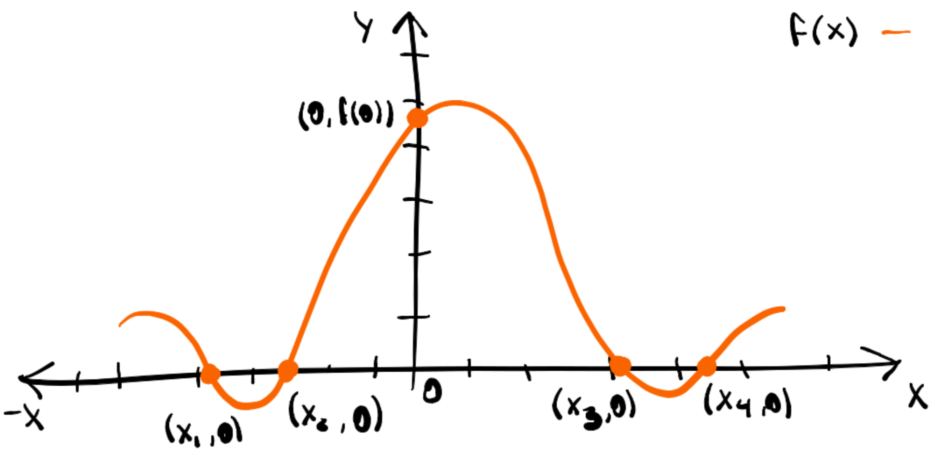

Figura 5.4: Función que intersecta los ejes. La función intersecta en 5 puntos y a los que pasan por el eje x se les denomina ceros de la función.

5.2.2. Simetrías y transformaciones

El primer paso fue encontrar los puntos de intersección con los ejes, lo siguiente es identificar ciertos tipos de funciones para ver de forma rápida su gráfica en el plano. Hay ciertas funciones que tienen una invarianza[1] que la llamaremos *simetrías*. Todo esto al momento de ver la gráfica se ve que la función tiene un eje de simetría con respecto a un eje o recta.

Por la figura (5.2) se ve que la función solo puede tener simetría con respecto al eje y (o una traslación del mismo), porque en caso contrario no sería una función. Esta simetría se puede clasificar en dos tipos, funciones *pares* e *impares*.

Definición 5.2.1 ***Funciones pares e impares.*** *Sea x y $-x$ elementos perteneciente al dominio de la función $f(x)$. Se dice que:*
i) Una función f es par si $f(-x) = f(x)$.
ii) Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$.

[1]Es algo que no cambia al aplicarle una transformación.

Ejemplo 5.2.1 *Funciones pares e impares:*

i) Función par:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f(-2) &= (-2)^2 = 4 \\ f(2) &= (2)^2 = 4 \\ f(x) &= f(-x) \end{aligned}$$

ii) Función impar:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ f(-2) &= (-2)^3 = -8 \\ f(2) &= (2)^3 = 8 \\ f(x) &= -f(x) \end{aligned}$$

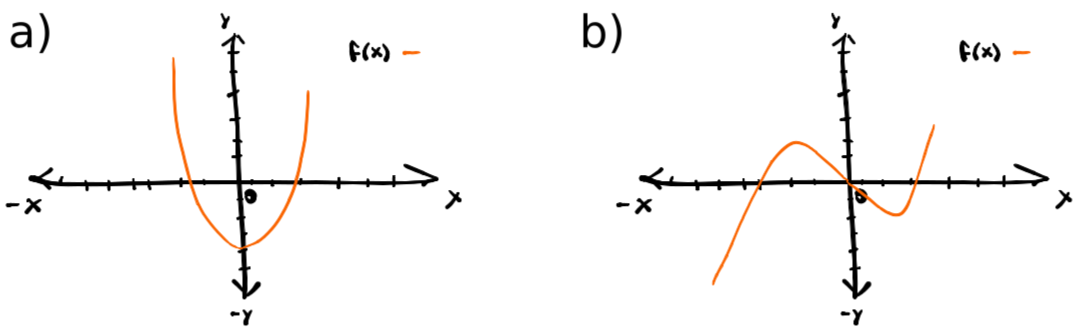

Figura 5.5: Función par e impar. a) Muestra una parábola que es una función par, es decir, los puntos (x, y) y (-x, y) son parte de la gráfica. b) Muestra una función impar, es decir, que los puntos (x, y) y $(-x, -y)$ son parte de la gráfica.

Definición 5.2.2 ***Simetría.***

i) Una función f es par si y sólo si su gráfica es simétrica respecto al y.
ii) Una función f es impar si y sólo si su gráfica es simétrica respecto al origen.

5.2.3. Transformaciones rígidas

Este tipo de transformaciones es cualquiera que mueve la gráfica por el plano, pero no cambia la forma, es decir, son todo tipo de traslaciones de la función.

Definición 5.2.3 ***Transformaciones rígidas: Desplazamientos verticales y horizontales.*** *Sea $f(x)$ una función definida en los números reales y c una constante real mayor que cero ($c > 0$), entonces, las gráficas se someten a las siguientes traslaciones:*

i) $y = f(x) + c$ es la gráfica desplazada verticalmente en c hacia arriba.

ii) $y = f(x) - c$ es la gráfica desplazada verticalmente en c hacia abajo.

iii) $y = f(x + c)$ es la gráfica desplazada horizontalmente en c unidades hacia la izquierda.

iv) $y = f(x - c)$ es la gráfica desplazada horizontalmente en c unidades hacia la derecha.

Se puede combinar estas traslaciones, que en el gráfico sería trasladar en *diagonal* a la función y con las fórmulas de la definición anterior es $y = f(x \pm c) \pm c$.

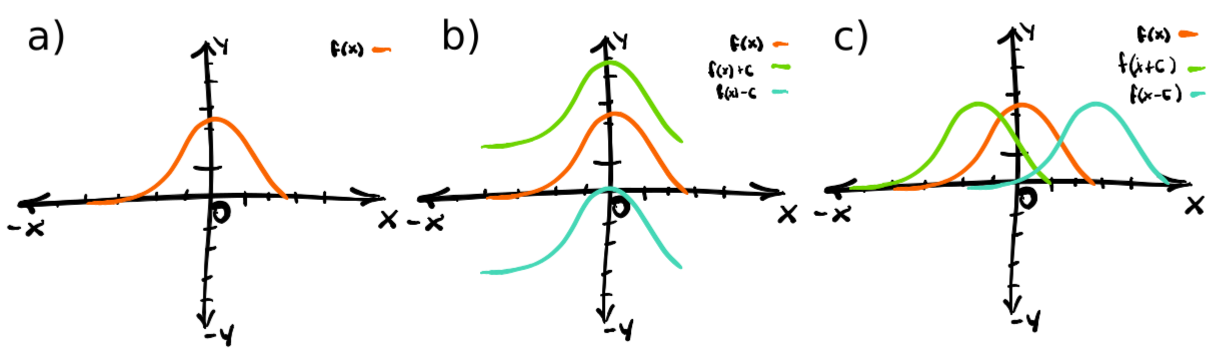

Figura 5.6: Transformaciones rígidas. a) Es la función original. b) Muestra la función original (linea naranja) y sus traslaciones verticales en c unidades. c) Muestra la función original y sus respectivas traslaciones horizontales en c unidades.

Definición 5.2.4 ***Reflexiones.*** *Sea $f(x)$ una función definida en los números reales, entonces:*

i) $y = -f(x)$ es la gráfica de $f(x)$ reflejada en el eje x.
ii) $y = f(-x)$ es la gráfica de $f(x)$ reflejada en el eje y.

5.2.4. Transformaciones no rígidas

A diferencia de la subsección anterior, ahora si se modificará la forma de la función original. Ahora, la función se puede achatar, estirar o en otros casos cambiar la pendiente.

Definición 5.2.5 ***Transformaciones no rígidas: Estiramientos y compresiones verticales.*** *Sea $f(x)$ una función definida en los números reales, entonces la gráfica de $y = c \cdot f(x)$ es:*

i) Estirada verticalmente por un factor de c unidades, si $c > 1$.

ii) comprimida verticalmente por un factor de c unidades, si $0 < c < 1$.

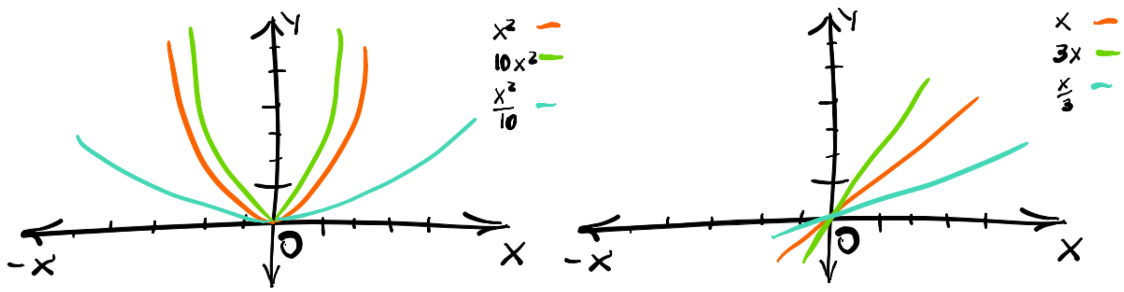

Figura 5.7: Transformaciones no rígidas. Se ven las posibilidades de deformar la función $f(x)$ cambiando su forma, para el gráfico de la izquierda es una función cuadrática con forma $y = a_2x^2$ y el de la derecha es una función lineal de la forma $y = a_1x + a_0$. La definición de coeficientes se ve en la ecuación (3.29).

5.3. Función cuadrática y lineal

Anteriormente vimos a los polinomios y su forma más general (ver la ecuación 3.29), entonces ahora veremos algunos casos particulares. Recordando la fórmula de un polinomio con un exponente n que es entero y no negativo

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{5.3}$$

De (5.3) desprenderemos tres casos. La constante es cuando $a_0 \neq 0$, el caso lineal es cuando $a_0, a_1 \neq 0$ y el caso cuadrático es cuando $a_0, a_1, a_2 \neq 0$.

Definición 5.3.1 ***Funcionales polinomiales.*** *Sea $f(x)$ una función polinomial definida en los números reales, se desprenden los siguientes casos:*

i) Si $f(x) = a$ es una función constante.
ii) Si $f(x) = ax + b$ es una función lineal.
iii) Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática.

Los coeficientes a_0, a_1 y a_2 fueron redefinidos por simplicidad, pero no se pierde generalidad.

5.3.1. Función lineal

Ya tuvimos una aproximación con este tipo de cuentas y lucen como el gráfico a la derecha de la figura (5.7). El caso más simple es cuando la recta pasa por el origen, por lo que la función luce de la forma $f(x) = ax$. El coeficiente a nos da la pendiente de la recta, es decir, si a negativo la recta cambia su sentido.

El dominio de estas funciones (y el de todas las funciones polinomiales que no son fracciones) son todos los números reales, porqué en ningún caso se indetermina la expresión.

Ejemplo 5.3.1 *Muestra de algunas ecuaciones lineales:*

i) $f(x) = x - 2$
ii) $f(x) = x$
iii) $f(x) = x + 2$
iv) $f(x) = -x$

5.3.2. Función cuadrática

Subiendo de n en las funciones polinomiales nos encontramos con el caso cuadrático, usualmente llamado parábola. El caso mas simple es $f(x) = ax^2$, pero el caso más general tiene deformaciones y traslaciones que la dejan de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si el coeficiente $a < 0$ la parábola es un reflejo de ax^2 con $a > 0$, o lo que se dice frecuentemente que *apunta hacia abajo*. El coeficiente c es el que desplaza horizontal o verticalmente la gráfica.

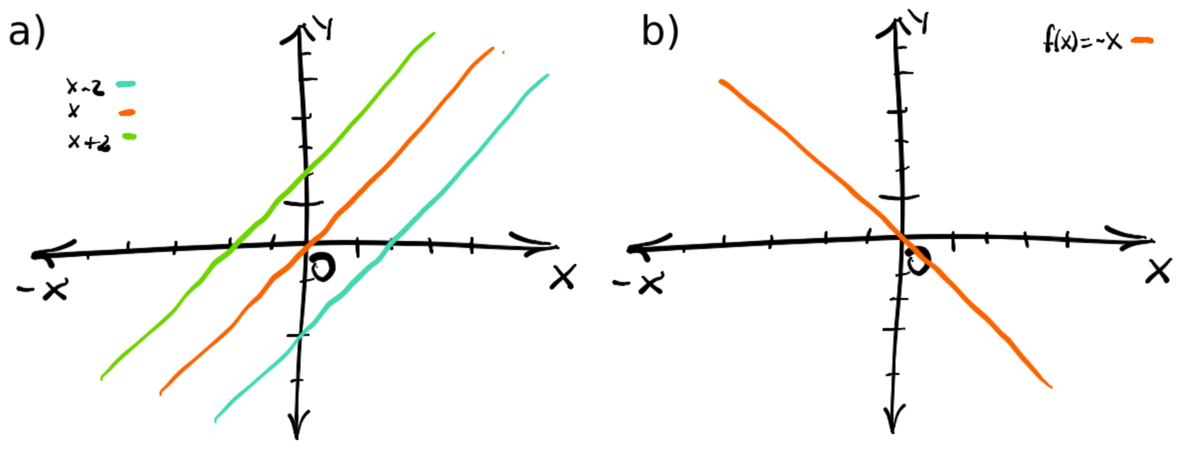

Figura 5.8: Funciones lineales. a) Ejemplo de tres funciones lineales, la recta naranja grafica la función *ii* y las otras dos rectas son la misma función pero desplazadas (caso *i* y *ii*). b) Gráfica de la recta $f(x) = -x$ que da muestra que el factor que acompaña a x es la pendiente de la recta.

Ejemplo 5.3.2 *Muestra de algunas ecuaciones cuadráticas:*

i) $f(x) = x^2 - 2$
ii) $f(x) = x^2$
iii) $f(x) = x^2 + 2$
iv) $f(x) = -x^2$

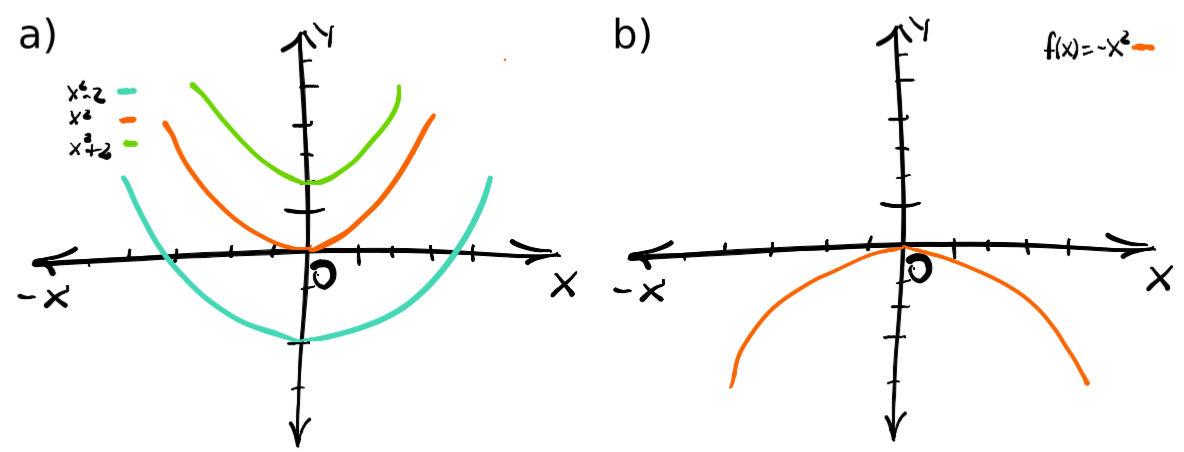

Figura 5.9: Funciones cuadráticas. a) Gráfica de funciones cuadráticas desplazadas con respecto a la función original $f(x) = x^2$. b) Gráfica de la función parabólica de $f(x) = -x^2$ que es el reflejo con respecto al eje x de x^2.

Vértice y eje

Los puntos que caracterizan a una parábola son el signo de a para ver hacia donde crece, los posibles puntos de intersección con el eje x y su vértice. La parábola puede estar apuntando hacia arriba ($a > 0$) o hacia abajo ($a < 0$), el punto más abajo ($a > 0$) o más arriba ($a < 0$) se llama vértice. Este punto marca la mitad de la parábola, que al hacer una línea en $x = h$ marca el eje de simetría. La forma matemática de obtener el vértice de una parábola cualquiera es la siguiente:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k, \tag{5.4}$$

ahora modificaremos el polinomio de segundo grado para compararlos con (5.4).

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\
f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Luego, se compara término a término entre las ecuaciones (5.4) y (5.5), por lo que el vértice y el eje quedan definidos como:

$$h = \frac{-b}{2a} \;\; y \;\; k = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

En consecuencia el vértice de la parábola (h, k). El punto del vértice es:

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \tag{5.6}$$

Notar que para llegar a la ecuación (5.5) se realizó la operación de completar cuadrado (Para ver en detalle el completar cuadrado revisar el apéndice A). Consiste en sumar y restar un mismo termino, es decir, un cero para que quede un cuadrado de binomio de la forma $(a + b)^2$ más un término.

Intersección con los ejes

Para encontrar los puntos en que la parábola pasa por los ejes utilizaremos un concepto ya visto, la soluciones de la ecuación de segundo grado. En la ecuación (5.7) se ven las dos soluciones, que son justamente los dos puntos donde la parábola toca el eje x.

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ \ y \ \ x_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5.7}$$

Los puntos x_+ y x_- son los que muestran las intersecciones con el eje x.

Ejemplo 5.3.3 *Encontrar las intersecciones y el vértice de la siguiente función:*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x - 3 \\ f(x) &= (x+1)(x-3) \\ x = -1 & \quad y \quad x = 3 \\ (-1, 0) & \quad y \quad (3, 0) \end{aligned}$$

Para el vértice se debe completar cuadrados para igualar $f(x)$ con la ecuación (5.4).

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x - 3 \\ f(x) &= x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 \\ f(x) &= (x^2 - 2x + 1) - 4 \\ f(x) &= (x-1)^2 - 4 \\ f(x) &= a(x-h)^2 + k \end{aligned}$$

Al comparar los términos se obtiene que el vértice de la parábola está en el punto $(1, -4)$.

5.4. Funciones crecientes y decrecientes

Hemos visto en las figuras (5.7), (5.8) y (5.9) un comportamiento de las funciones que aumentan y disminuyen por tramos. Cuando la función se mantiene en una tendencia de crecer o decrecer se clasifican en los siguientes casos:

Definición 5.4.1 ***Funciones crecientes y decrecientes.*** *Sea $f(x)$ una función real que está definida en un intervalo con extremos x_1 y x_2, que son dos números cualesquiera tales que $x_1 < x_2$. Entonces, se cumple lo siguiente:*

i) La función $f(x)$ es creciente en el intervalo si, $f(x_1) < f(x_2)$.
ii) La función $f(x)$ es decreciente en el intervalo si, $f(x_1) > f(x_2)$.

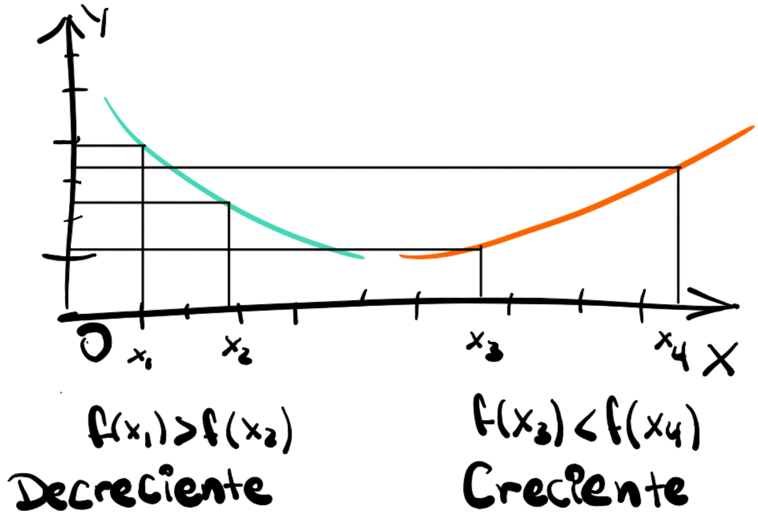

Figura 5.10: Funciones crecientes y decrecientes. .

Esta clasificación es una primera herramienta para saber como se comporta la función y consiste en seleccionar dos elementos del dominio para ver la respectiva imagen. Se debe considerar que una herramienta más poderosa se verán más adelante en el capítulo de calculo infinitesimal.

Ejemplo 5.4.1 *Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$ definida en los números reales. Seleccione dos elementos del dominio y mencione si es creciente o decreciente.*

i) $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_1 = 3) = f(3) = 3^2 = 9 \\ f(x_2) &= f(x_2 = 4) = f(4) = 4^2 = 16 \end{aligned}$$

$x_2 > x_1$, *por lo que* $f(x)$ *es una función creciente en este intervalo.*

i) $g(x) = -x^2$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_1 = 3) = f(3) = -3^2 = -9 \\ f(x_2) &= f(x_2 = 4) = f(4) = -4^2 = -16 \end{aligned}$$

$x_2 < x_1$, *por lo que* $g(x)$ *es una función decreciente en este intervalo.*

Si los valores coinciden para ambos x, entonces es una función constante.

5.5. Funciones por partes

Como el nombre lo dice, es una función que según el tramo del dominio que uno seleccione va a tener una función diferente. El primer acercamiento es el valor absoluto, que en su versión mas simple son dos rectas con pendientes opuestas (ver la definición 3.4.1).

Ejemplo 5.5.1 ***Función por tramos***. *Cantidades de medicina (mg) contra la alergia según la edad del paciente (años):*

$$f(x) = \begin{cases} \textit{Preguntar al doctor} & , \textit{si } \ 0 \leq x < 6 \\ \dfrac{6x}{12,5} + 19,24 & , \textit{si } \ 6 \leq x < 12 \\ \dfrac{87x}{25} - 16,76 & , \textit{si } \ x \geq 12 \end{cases}$$

El dominio de la función es rango etario que se considere (el x), mientras que la imagen son los miligramos de medicamentos.

Ejemplo 5.5.2 *Se da un modelo simple[4] para ver si hay o no presencia de un tumor. Sea M_1, M_2, ..., M_n denota la alteración genética de interés. Esta alteración puede ser un punto de mutación, ganancia o perdida de una región cromosómica u otro evento genético. N independientes especímenes ("tumores") son obtenidos y la presencia o ausencia de la alteración de interés es guardad como un vector binario[2] $x_j = \{x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jn}\}$, donde:*

$$x_{jl} = \begin{cases} 0 & , \textit{si en el } j - \textit{esimo hay ausencia de alteración } M_l \\ 1 & , \textit{si en el } j - \textit{esimo hay presencia de alteración } M_l \end{cases}$$

Si tenemos por ejemplo el vector $x_1 = \{x_{11}, x_{12}, .., x_{1n}\}$, ahora se debe calcular cada elemento del vector con la función por partes, por ejemplo si tomamos el primer elemento x_{11}.

$$x_{11} = \begin{cases} 0 & , \textit{si en el } j - \textit{esimo hay ausencia de alteración } M_1 \\ 1 & , \textit{si en el } j - \textit{esimo hay presencia de alteración } M_1 \end{cases}$$

El dato de 0 o 1 estará dado por los datos recolectados de la muestra M_1, entonces una ejemplo del vector binario es $x_j = \{x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jn}\} = \{0, 1, 0, ..., 0\}$.

Ejemplo 5.5.3 *Graficar la siguiente función por tramos:*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x + 1 & , x > 0 \end{cases}$$

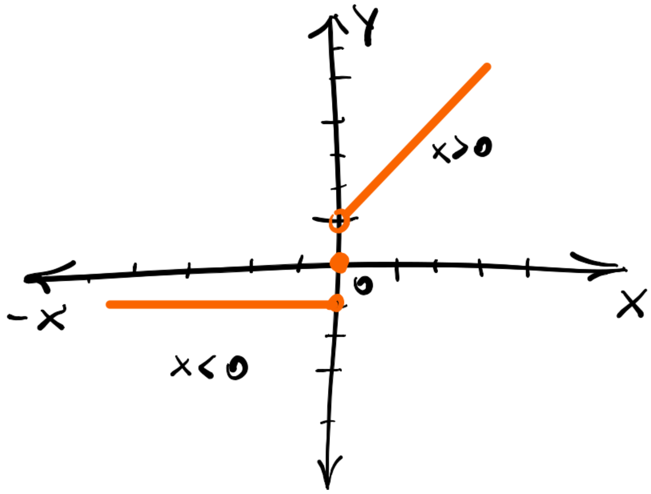

Figura 5.11: Función por partes. Son tres funciones, la primera es una función constante, la segunda un punto y la tercera es una recta. Notar que los extremos de la primera y tercera función consideran los extremos (por eso los círculos sin pintar).

La lógica de las funciones por partes es igual, pero veremos un caso particular por su uso cotidiano. La función es una unión de funciones constantes, con dominio continuo si se unen los dominios de las partes, usualmente se llama *función máximo entero.*

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -2 & , -2 \leq x < -1 \\ -1 & , -1 \leq x < 0 \\ 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x < 2 \\ \vdots & \end{cases}$$

La imagen de la función es discreta, es decir, tomar ciertos valores y no es un *continuo* de valores.

[2]Solo tiene dos resultados, en este caso es 0 o 1.

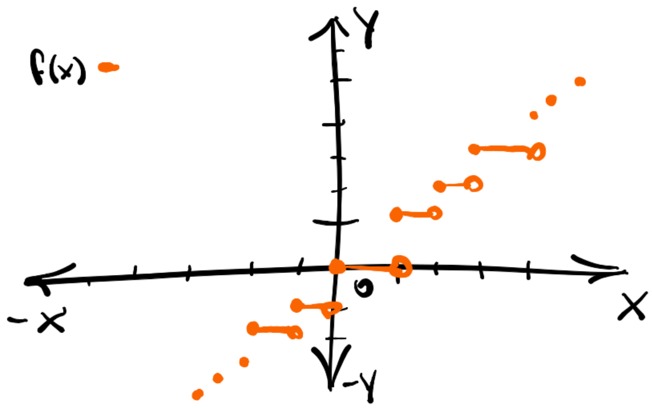

Figura 5.12: Función máximo entero.

5.5.1. Dominio de una función por partes

Al momento de analizar el dominio completo de la función por partes, se debe ver la definición de la misma. Si se ve el lado derecho, se encuentran las expresiones de las funciones y al lado izquierdo los intervalos en los cuales se defines las funciones, justamente son el dominio de cada función. Entonces, el dominio de la función por partes es la unión de cada uno de los dominios de la funciones que lo conforman.

Ejemplo 5.5.4 *Encontrar el dominio de siguiente función por partes:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ,x < 0 \\ f_2(x) & ,x = 0 \\ f_3(x) & ,x > 0 \end{cases}$$

$$Dom(f(x)) = Dom(f_1(x)) \cup Dom(f_2(x)) \cup Dom(f_3(x)) = \mathbb{R}$$

En el ejemplo anterior se ve que el dominio son todos los números reales, ya que entre los tres dominios completan el intervalo $]-\infty, \infty[$. En el caso en que algún punto o intervalo no sea considerado aparecen los tramos en que la función no está definida.

Ejemplo 5.5.5 *Encontrar el dominio de siguiente función por partes:*

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & ,-5 < x < 1 \\ g_2(x) & ,1 \leq x \leq 10 \\ g_3(x) & ,15 < x < 20 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Dom(g(x)) &= Dom(g_1(x)) \cup Dom(g_2(x)) \cup Dom(g_3(x)) \\ &=]-5, 1[\cup[1, 10]\cup]15, 20[\\ &=]-5, 10]\cup]15, 20[\end{aligned}$$

Para este caso se ve, en la definición y en el resultado del dominio, que la función tiene tramos no definidos. Específicamente, los intervalos $]-\infty,-5]$, $]10,15]$ y $[20,\infty[$ no son parte del dominio.

5.6. Combinación de funciones

Luego de ver las funciones por partes, sigue la opción de combinar funciones, que en estricto rigor ya lo hemos visto cuando sumamos, restamos o dividimos polinomios. Las operaciones formales que se pueden hacer al momento de combinar funciones son:

Definición 5.6.1 ***Combinación de funciones.*** *Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en los números reales, entonces las operaciones de suma $(+)$, resta $(-)$, división $(/)$ y la multiplicación $(\cdot)$ se define de la siguiente manera:*

i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
iii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *siempre que* $g(x) \neq 0$.

Ejemplo 5.6.1 *Escribir la función resultante de las cuatro operaciones con las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x + 1$:*

i)$f(x) + g(x) = x^2 + x$.
ii) $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2$.
iii) $f(x) \cdot g(x) = (x^2-1)(x+1) = x^2(x+1) - (x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$.
iv) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1$.

5.6.1. Dominio de una función combinada

Es importante que por más combinaciones que se hagan entre dos o más funciones sigan estando definidas en los números reales, suena obvio, pero hay verificarlo. El dominio que tiene una función combinada es el conjunto más grande que tiene en común todas las funciones, entonces es la intersección del dominio de las funciones. Para el caso de la división se suma la condición que la expresión del denominador debe ser diferente de cero.
Supongamos el ejemplo que tenemos dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con su conjunto dominio X_1 y X_2 respectivamente. Entonces, el dominio de la función combinada es:

i) El dominio para las operaciones de suma, resta y y multiplicación es $X_1 \cap X_2$.

ii) El dominio para las operacion de división es $\{x|x \in X_1 \cap X_2, g(x) \neq 0\}$.

Ejemplo 5.6.2 *Sea $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = \sqrt{x+4}$ dos funciones definidas en los números reales, calcule el dominio de la función combinada $f(x)/g(x)$.*

Sol: Primero sabemos que las funciones de raíz cuadrada estén definidas en los números reales y deben ser mayor o igual que cero (≥ 0). Además, la función del denominador debe cumplir que $g(x) \neq 0$.

$$
\begin{array}{rcl}
h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} & = & \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+4}} \\
Dom(f(x)) & \cap & Dom(g(x)), g(x) \neq 0 \\
x - 3 \geq 0 & \cap & x + 4 > 0 \\
x \geq +3 & \cap & x > -4 \\
[3, +\infty] & \cap &]-4, +\infty[\\
Dom\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) & = & [3, +\infty]
\end{array}
$$

Notar que la condición del denominador sea diferente de cero se cumplió al pasar de $\geq$ a $>$.

5.7. Composición de funciones

Al principio de esta sección se mencionó que dentro del paréntesis de la función ($f()$) va la incógnita, por ende lo que se reemplaza en este caso es la función $f()$. En esta sección veremos que ocurre cuando dentro de la función hay otra función, como por ejemplo $f(g(x))$.

Definición 5.7.1 ***Composición de funciones.*** *Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en los números reales. La composición de ambas funciones se escribe de la siguiente manera:*

$$
\begin{array}{rcl}
(f \circ g)(x) & = & f(g(x)) \\
(g \circ f)(x) & = & g(f(x))
\end{array}
$$

Ejemplo 5.7.1 *Sea $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = x + 5$ dos funciones definidas en los números reales, calcular las funciones compuestas $f(g(x))$ y $g(f(x))$.*

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x+5) = (g(x))^2 + (g(x)) = (x+5)^2 + (x+5) \\ &= x^2 + 10x + 25 + x + 5 \\ &= x^2 + 11x + 30. \end{aligned}$$

$$g(f(x)) = g(x^2 + x) = g(x) + 5 = x^2 + x + 5$$

5.7.1. Dominio de una función compuesta

El dominio de la función compuesta es el conjunto formado por los números que están en el dominio de $g(x)$, tales que $g(x)$ esté en el dominio de $f(x)$. En otras palabras, son los números que están en g(x) y que además no indeterminan $f(x)$. La definición del dominio de una función compuesta por $f(x)$ y $g(x)$ es:

$$Dom\,(f(g(x))) = \{x \in Dom(g(x)) \wedge g(x) \in Dom(f(x))\} \tag{5.8}$$

$$Dom\,(g(f(x))) = \{x \in Dom(f(x)) \wedge f(x) \in Dom(g(x))\} \tag{5.9}$$

Ejemplo 5.7.2 *Sea $f(x) = x/(x+2)$ y $g(x) = 1/(x-1)$ dos funciones definidas en los números reales. Calcular el dominio de la función compuesta $f(g(x))$.*

$$\begin{aligned} Dom(f(g(x))) &= x \in Dom(g(x)) \wedge g(x) \in Dom(f(x)) \\ &= x \neq 1 \wedge \frac{1}{x-1} \neq -2 \\ &= x \neq 1 \wedge x \neq \frac{1}{2} \\ &= \mathbb{R} - \{1\} \cap \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ &= \mathbb{R} - \left\{1, \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.7.3 *Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x - 2$. Calcular el dominio de $f(g(x))$:*

$$\begin{aligned} Dom(f(g(x))) &= Dom(f(x-2)) \\ &= Dom(\sqrt{x-2}) \\ &= \sqrt{x-2} \\ &= x - 2 \geq 0 \\ &= x \geq 2 \\ Dom(f(g(x))) &= [2, +\infty[\end{aligned}$$

5.8. Cociente de diferencias

Ahora, veremos una aplicación de la composición de funciones. Suponga que tomamos dos puntos del gráfico de una función ¿Cuán cerca están estos puntos? Tanto como uno quiera. Definiremos la distancia entre los dos puntos con la variable h, que repito, es muy pero muy pequeña.
Al conocer dos puntos de una función se abre el abanico de opciones para calcular. Una de ellas es trazar una recta entre los puntos y calcular la pendiente de dicha recta. Recordando la fórmula de la pendiente de una recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{5.10}$$

Donde x_i y y_i son los valores de dos puntos (x_1, y_2) y (x_2, y_2) en un plano cartesiano. Si hacemos lo mismo pero ahora los puntos son $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$, la pendiente es:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \\ m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned} \tag{5.11}$$

La ecuación (5.11) es el primer acercamiento al cálculo infinitesimal, donde la variable h además de ser pequeño representa el *cambio* que sufre la función.

Ejemplo 5.8.1 *Calcular el cociente de diferencias de $f(x) = x^2 + 2$.*

Sol: Primero se debe calcular la función compuesta $f(x+h)$.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^2 + 2 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + 2 \end{aligned}$$

Ahora, reemplazamos en la ecuación (5.11):

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2 - (x^2 + 2)}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= 2x + h, \qquad h \approx 0 \\ &= 2x \end{aligned}$$

*Entonces el cocientes de diferencias de $f(x)$ es $2x$, más adelante veremos que este cociente es la **derivada** de $f(x)$ y se puede denotar como $f'(x)$.*

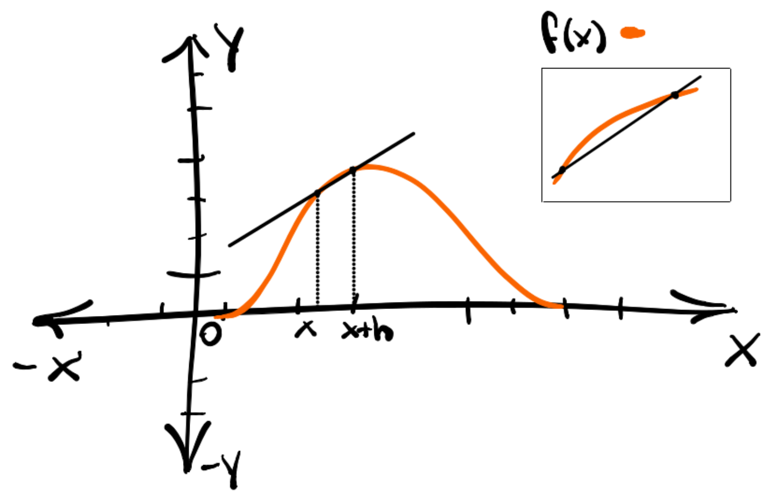

Figura 5.13: Cociente de diferencia. La línea naranja continua representa la función, la línea negra continua representa la recta de los puntos y las líneas punteadas muestran la diferencia entre los puntos (la distancia es representada por h). El gráfico insertado amplía la función y la recta, donde para los dos puntos hay una distancia h.

5.9. Funciones inversas

En un principio, vimos en (5.1) que las funciones son una correspondencia entre un dominio X y una imagen Y. Siempre a un elemento x_i del dominio se le asocia un elemento y_i de la imagen y por más que haya casos en que hay más de un elemento del dominio para un mismo y_i (por ejemplo las funciones del tipo x^2), las funciones que por cada elemento del dominio tienen un solo elemento de la imagen se llaman funciones uno a uno.

Definición 5.9.1 ***Función uno a uno.*** *Sea una función $f(x)$ definida en los números reales, es uno a uno o biunívoca si cada número en el rango de $f(x)$ está asociado con exactamente con **un** número en su dominio X.*

La forma *gráfica* de ver si una función es uno a uno es trazar una línea horizontalmente, si la línea toca dos puntos, entonces no es una función biunívoca, en caso contrario si lo es. Al momento definir este tipo de funciones, se puede hacer en función de los elementos de dominio.

Definición 5.9.2 ***Función uno a uno.*** *Una función es uno a uno si y solo si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$ para toda x_1 y x_2 en el dominio de f.*

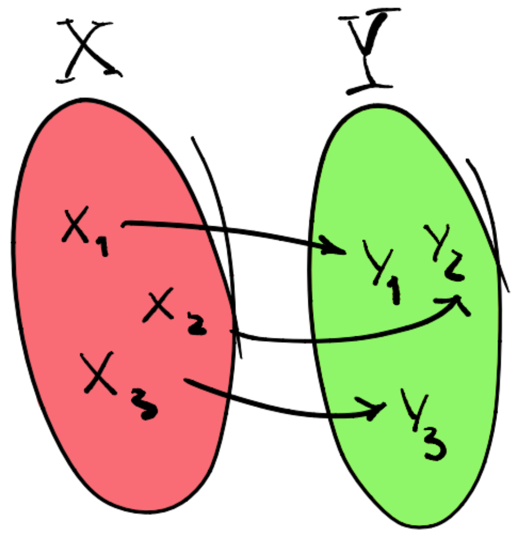

Figura 5.14: Función uno a uno. Los óvalos rojos y verde representan el dominio e imagen de la función $f(x)$. Las flechas muestran que cada elemento x_i $(i = 1, 2, 3)$ del dominio tiene un elemento y_i $(i = 1, 2, 3)$ de la imagen.

Ejemplo 5.9.1 *Sea $f(x) = x + 1$, comprobar si es una función uno a uno.*

$$\begin{aligned} x_1 + 1 &= x_2 + 1 \quad / - 1 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Como $x_1 = x_2$ implica que $f(x_1) = f(x_2)$, por lo tanto $f(x)$ es una función uno a uno.

Ejemplo 5.9.2 *Sea $f(x) = x^2 + 1$, comprobar si es una función uno a uno.*

$$\begin{aligned} x_1^2 + 1 &= x_2^2 + 1 \quad / - 1 \\ x_1^2 &= x_2^2 \quad / \sqrt{} \\ \sqrt{x_1^2} &= \sqrt{x_2^2} \\ |x_1| &= |x_2| \end{aligned}$$

Como ambos x_i están con valor absoluto, puede dar el caso de que $x_1 = -x_2$ o $-x_1 = x_2$, por lo tanto no se cumplen las condiciones de una función biunívoca. Entonces, como $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$ y $f(x)$ no es una función uno a uno.

Si imaginamos que el tomar un elemento x_1 del dominio X de la función $f(x)$ es un *camino de ida* y que además esta función es uno a uno, podemos hacer el *camino de vuelta* para pasar de un elemento de la imagen y_i al elemento del dominio x_i. Esto implica aplicar una función (desconocida hasta el momento) que pase los elementos de la imagen al dominio de la función, esa función se llama función inversa.

Definición 5.9.3 ***Función inversa.*** *Sea f(x) una función uno a uno, con dominio X e Imagen Y. La inversa de f(x) es la función denotada por f^{-1}, cuyo dominio es Y e imagen X.*

i) $f(f^{-1}(x)) = x$ *para toda* x *en* Y.
ii) $f^{-1}(f(x)) = y$ *para toda* y *en* X.

Definición 5.9.4 ***Propiedades de las funciones inversas.*** *Sea $f(x)$ una función en los números reales.*

i) $Dom(f^{-1}(x)) = Img(f(x))$.

ii) $Dom(f(x)) = Img(f^{-1}(x))$.

iii) $y = f(x)$ *equivale a* $x = f^{-1}(y)$.

iv) La función inversa f^{-1} es uno a uno.

v) La función inversa de $f(x)$ es $f^{-1}(x)$, entonces $f^{-1}(f^{-1}(x)) = f(x)$.

vi) La inversa de $f(x)$ es única.

Ejemplo 5.9.3 *Sea $f(x) =$, determinar la función inversa de $f(x)$.*

Sol: En términos generales, se cambian los $'x'$ de la expresión por $f^{-1}(x)$ o por $'y'$ y luego se despeja dicha variable cambiada.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+3} \\ y = \sqrt{x+3} &\longrightarrow x = \sqrt{y+3} \\ x &= \sqrt{y+3} \\ x^2 &= y+3 \\ x^2 - 3 &= y \quad \longleftarrow inversa \end{aligned}$$

El $Dom(f^{-1}(x))$ son todos los números reales, que a su vez es la imagen de $f(x)$.

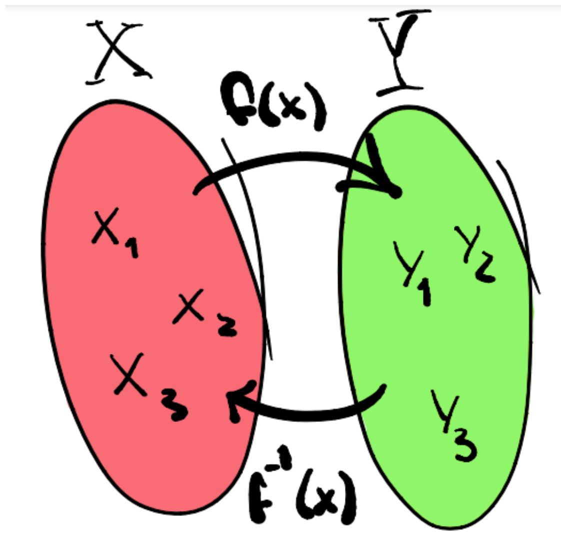

Figura 5.15: Función inversa. Las flechas negras muestran que la función $f(x)$ va desde el dominio a la imagen y f^{-1} va desde la imagen al dominio.

5.9.1. Gráficas de la función inversa

En las propiedades vistas en las definiciones (5.9.4) y en la figura (5.15) se ve que la función y su inversa son *opuestas*. En términos gráficos, si los puntos (x_i, y_i) del plano pertenecen a la función $f(x)$, los puntos de la inversa $f^{-1}(x)$ son (y_i, x_i). Esto es que la representación de la función inversa es una reflexión de la función original.

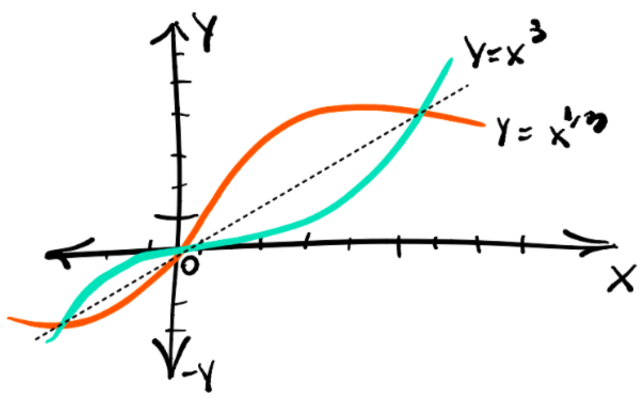

Figura 5.16: Grafico de una función inversa. La función inversa es la reflexión con respecto al eje de simetría (representado por la linea negra punteada).

5.10. Funciones polinomiales

En la sección (5.3) se vio desde la función constante (ax^0) hasta la función cuadrática (ax^2), pero este tipo de funciones son parte de un conjunto más grande, las polinomiales. Ahora entraremos en detalles de como graficar este tipo de funciones. Recordar la ecuación (5.3), donde el exponente es un número entero no negativo y en caso de que n no cumpla estas condiciones, la función no es polinomial (Ejemplo: x^{-1} o $x^{1/2}$).

Cuando hablamos de la función cuadrática tenemos en mente el x^2, de la misma manera pasa con el cúbico y su representación x^3. Cuando el exponente es mayor se le llama $n-$ésimo considerando el exponente mayor como nombre del polinomio (Ejemplo: $x^8 + 4$ polinomio de octavo orden).

Definición 5.10.1 ***Funciones polinomiales.*** *Sea $f(x)$ una función polinomial definida en los números reales, se desprenden los siguientes casos:*

i) Si $f(x) = a_0$ es una función polinomial constante.
ii) Si $f(x) = a_1x + a_0$ es una función polinomial lineal.
iii) Si $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ es una función polinomial cuadrática.
iv) Si $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ es una función polinomial cúbica.
v) Si $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0x^0$ es una función polinomial $n-$ésima.

En (5.8) y (5.9) se muestra la gráfica de las funciones lineales y cuadrática respectivamente, pero es más difícil a simple vista dilucidar las gráficas de órdenes mayores. Por lo mismo, hay que tener en consideración conceptos anteriores como traslaciones, deformaciones, simetrías o intersecciones con los ejes.

Lo más simple es partir por el caso en que la función es un solo término de la forma x^n, aquí se puede tener el caso en que n es par o impar.

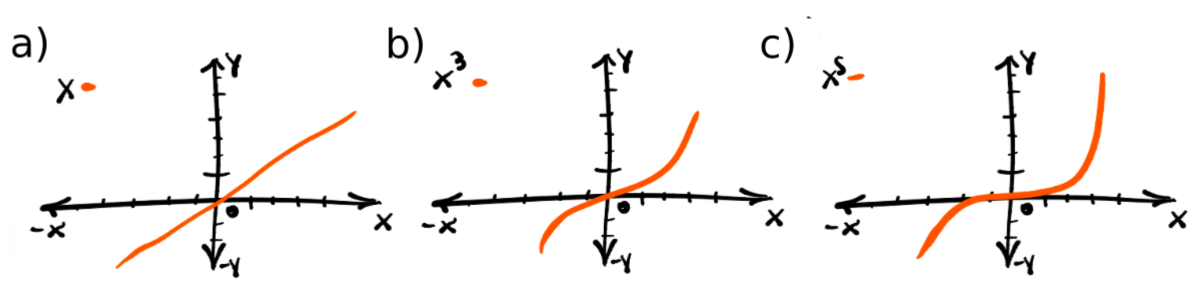

Figura 5.17: Ejemplo funciones impares. a) Es la función lineal y en los casos b) y c) se ve como se va aplanando la región que pasa por el origen del plano a medida que aumenta el n de x^n.

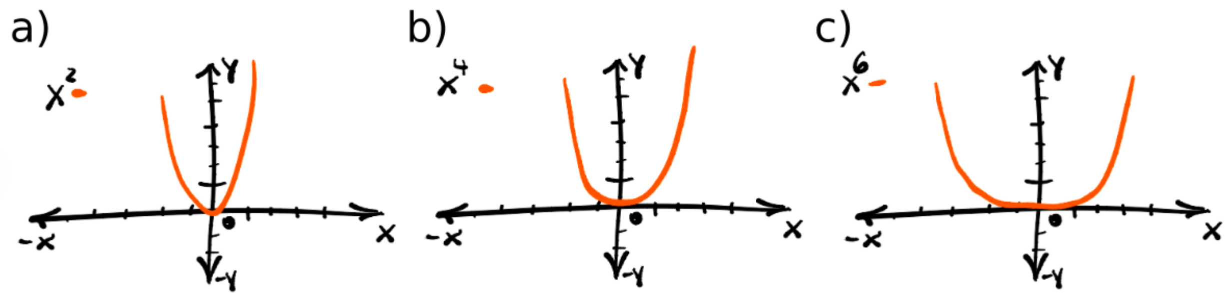

Figura 5.18: Ejemplo funciones pares. a) Es la función cuadrática y en los casos b) y c) se ve como se va aplanando la región que pasa por el origen del plano, al igual que en el caso de los exponentes impares.

A estas funciones se debe sumar las variantes de las traslaciones, si se suma o resta una constante dentro o fuera del término principal, $x^n \pm c$ o $(x \pm c)^n + d$.
Por el momento, entraremos solo en el caso x^n y debemos descifrar su comportamiento. En las figuras (5.17) y (5.18) se muestran todas las funciones cuando pasan por el origen, es decir, que los valores que toman los x_i son muy bajos, pero ¿Qué ocurre cuando x es muy grande? Lo que nos dirá esta respuesta es como se comporta la función muy lejos del origen.
El tomar valores altos del dominio de la función, es decir, que $x \longrightarrow +\infty$ o $x \longrightarrow -\infty$ hace ver como se comporta la función en **los extremos**.

Definición 5.10.2 ***Comportamiento de los extremos.*** *Cuando $x \longrightarrow \pm\infty$ la gráfica de una función polinomial*[3]

$$f(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

se asemeja a la gráfica $f(x) = a_n x^n$. Esto se debe a que los términos que le siguen aportan muy poco a la gráfica, en consecuencia la alteran muy poco.

Ejemplo 5.10.1 *Sea $f(x) = 7x^3 + 5x - 20$, mostrar a que gráfica se asemeja esta función.*

$$\begin{aligned}
f(x) &= 7x^3 + 5x - 20\\
f(x) &= x^3\left(7 + \frac{5x}{x^3} - \frac{20}{x^3}\right)\\
f(x) &= x^3\left(7 + \frac{5}{x^2} - \frac{20}{x^3}\right) \quad x \longrightarrow \pm\infty\\
f(x) &= 7x^3
\end{aligned}$$

[3]El símbolo $\to$ significa 'tiende'. Es ponerse en caso en que la variable toma valores muy grandes.

Visto el ejemplo anterior, se puede tener cuatro posibilidades en los extremos y dependen si el exponente es par o impar. Si consideramos el polinomio de la forma definida en (5.10.2) y usando la aproximación del coeficiente principal obtenemos la siguiente información de la función polinomial.

	$a_n < 0$	$a_n > 0$
Exponente par	$f(x<0) \longrightarrow -\infty$, $f(x>0) \longrightarrow -\infty$	$f(x<0) \longrightarrow \infty$, $f(x>0) \longrightarrow \infty$
Exponente impar	$f(x<0) \longrightarrow \infty$, $f(x>0) \longrightarrow -\infty$	$f(x<0) \longrightarrow -\infty$, $f(x>0) \longrightarrow \infty$

Cuadro 5.1: Tabla de los extremos de una función polinomial.

5.11. Funciones racionales

Al igual que los números, los polinomios tienen sus operaciones y forman nuevas funciones, para el caso de la división son las funciones racionales.

Definición 5.11.1 ***Función racional.*** *Una función racional $y = f(x)$ es una función que tiene la forma:*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{5.12}$$

en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales. Además, el denominador debe seer distinto de cero, $Q(x) \neq 0$.

Al momento de graficar las funciones racionales no es tan trivial, por lo que hay que sumar herramientas a las ya conocidas (Simetrías, intersecciones con los ejes, desplazamiento, etc.) para modelar las funciones, es por ellos que entraremos en detalle con las *asíntotas*.

Una asíntota es una función lineal (una recta) que se aproxima de forma continua a la gráfica de una función $f(x)$, en otras palabras, la función $f(x)$ tiende al valor de la asíntota. La notación que introduciremos cuando x se aproxima a un número a o tiende a $\pm\infty$ es la siguiente:

- $x \to a^-$, la variable x tiende a a desde la izquierda, es decir, a través de números más pequeños que a.

- $x \to a^+$, la variable x tiende a a desde la derecha, es decir, a través de números más grandes que a.

- $x \to a$, la variable x tiende a a desde la derecha y la izquierda.

- $x \to -\infty$, la variable x tiende a $-\infty$, es decir, se vuelve no acotado en dirección negativa.

- $x \to \infty$, la variable x tiende a ∞, es decir, se vuelve no acotado en dirección positiva.

5.11.1. Asíntotas verticales

Ocuparemos la notación introducida para definir los casos de asíntotas. Aquí veremos dos casos, horizontales y verticales. Como su nombre lo dice, las asíntotas verticales es una línea vertical que cruza por el eje x y que nunca toca a la gráfica.

Definición 5.11.2 ***Asíntotas verticales.*** *Se dice que una recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función $f(x)$, si se cumple al menos una de estas seis condiciones:*

- $f(x) \to -\infty$ *cuando* $x \to a^-$

- $f(x) \to -\infty$ *cuando* $x \to a^+$

- $f(x) \to -\infty$ *cuando* $x \to a$

- $f(x) \to +\infty$ *cuando* $x \to a^-$

- $f(x) \to +\infty$ *cuando* $x \to a^+$

- $f(x) \to +\infty$ *cuando* $x \to a$

La definición (5.11.2) explica que cuando uno se acerca a las asíntotas, se puede hacer por la izquierda o por la derecha. Luego de acercarse por ambos lados puede darse el caso en que coincidan, entonces nace el concepto de una *función continua* en el punto que uno se acerca. Si la función tiene una asíntota es una función discontinua, en palabras simples, es una función continua si puedo dibujar la gráfica sin levantar el lápiz.

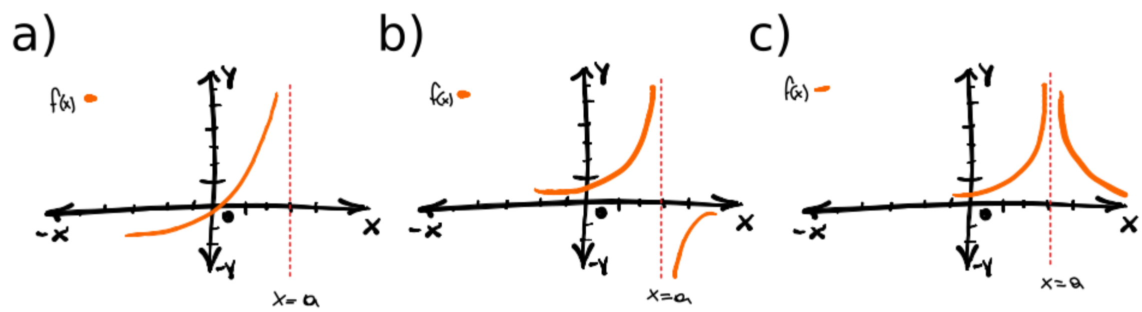

Figura 5.19: Asíntotas verticales. a) Se ve en la gráfica que cuando me acerco por la izquierda la función tiende a $+\infty$, es decir, que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to a^-$. b) $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to a^-$ y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$. c) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$.

Ahora, ¿Las funciones de la figura (5.19) son continuas?. La respuesta es si y no ¿Como?, si uno analiza la función completa claro que no es continua, porque tiene una asíntota de por medio, pero si uno toma un solo tramo (por ejemplo los casos b y c) de las funciones si lo son. Entonces la conclusión es que la función $f(x)$ es continua o discontinua según el tramo que se analice.

Determinación de asíntotas verticales

Para determinar las asíntotas se debe analizar la función racional de formar general

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{x-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \tag{5.13}$$

Ahora supongamos que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de la ecuación (5.13) no tienen factores comunes (que no se pueden simplificar más). En este caso:

Si a es un número real tal que Q(a)=0, la recta x=a es una asíntota vertical de la gráfica de f(x).

Entonces las soluciones de la ecuación del polinomio $Q(x)$ son las asíntotas verticales. Como el polinomio $Q(x)$ puede tener hasta m raíces reales, entonces la gráfica puede tener hasta m asíntotas verticales

Ejemplo 5.11.1 *Sea $f(x)$ una función definida en los números reales. Encontrar las asíntotas verticales de $f(x)$.*

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{x^2+2}{x-2} \\ &= x - 2 = 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$f(x)$ tiene una asíntota en $x = 2$.

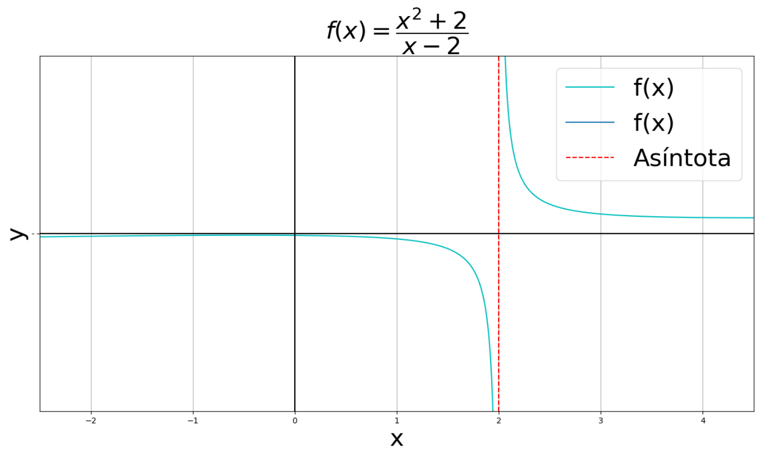

Figura 5.20: Gráfica de la función $f(x)$ con su asíntota en $x = 2$.

5.11.2. Asíntotas horizontales

Al igual que el caso vertical, existen asíntotas horizontales, pero ahora es una recta de valor constante. En este tipo de asíntotas muestran una diferencia con las verticales y es que se puede cruzar por la grafica.

Definición 5.11.3 ***Asíntotas horizontales.*** *Se dice que una recta $y = c$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función $f(x)$, si*

- $f(x) \to c$ *cuando* $x \to -\infty$ *o si* $f(x) \to c$ *cuando* $x \to +\infty$

Determinación de asíntotas horizontales

Para el cálculo de las asíntotas horizontales se debe recurrir nuevamente al polinomio (5.13) con el detalle visto en la definición (5.10.2). Recordando la definición, nos dice que a valores muy grandes de x ($x \to \pm\infty$) la gráfica tiene la forma del término con el grado más alto del polinomio. Entonces, como los grados menores no aportan en los extremos, se reduce la expresión racional al primer termino del numerador y denominador.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{x-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \\ &\approx \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \\ &\approx \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \end{aligned} \tag{5.14}$$

De la ecuación (5.14) se desprenden 3 casos:

a) Si $n = m$, $f(x) \approx \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \to \frac{a_n}{b_m}$ cuando $x \to \pm\infty$

b) Si $n < m$, $f(x) \approx \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \frac{a_n}{b_m x^{n-m}} \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$

c) Si $n > m$, $f(x) \approx \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \frac{a_n x^{n-m}}{b_m} \to \infty$ cuando $x \to \pm\infty$

En resumen, el caso a) la asíntota es una recta horizontal donde $y = a_n/b_m$, el b) la asíntota es una recta $y = 0$ y el caso c) no hay asíntota, pues diverge (se va a infinito) la función.

Ejemplo 5.11.2 *Sea $f(x)$ una función definida en los números reales. Calcule la asíntota horizontal:*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{8x}{x^2 - 2x + 1} \\
&= \frac{8x}{x^2\left(1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \frac{8x}{x^2} \\
&= \frac{8}{x}, \quad x \to \infty \\
y &= 0
\end{aligned}
$$

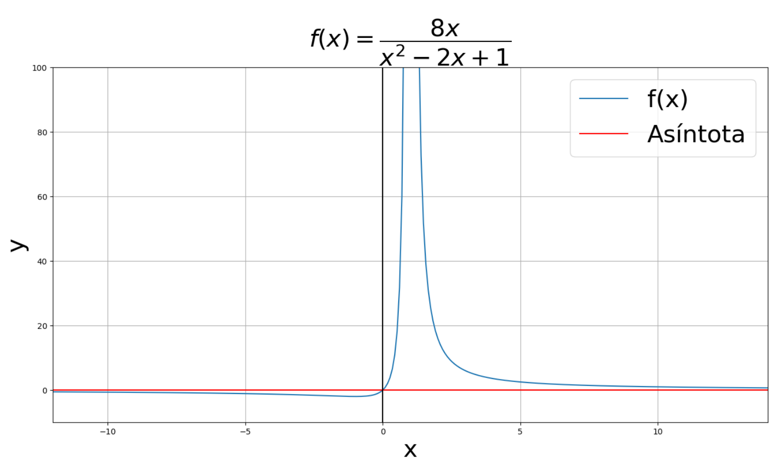

Figura 5.21: Gráfica de la función $f(x)$ con su asíntota horizontal en $y = 0$. Notar que la función tiene una asíntota vertical, pero en este caso no es calculada.

5.12. Funciones exponenciales

En las secciones anteriores la variable es elevada a un número entero o decimal, para este caso veremos cuando un número es elevado a la incógnita

Definición 5.12.1 ***Función exponencial.*** *Si $b > 0$ y $b \neq 1$, una función exponencial $y = f(x)$ tiene la forma*

$$f(x) = b^x \tag{5.15}$$

El número b se llama base y x se llama exponente.

La condición en (5.15) de que la base b sea mayor que cero es para que b^x sea un número real. Además, para el caso $x = 0$ se tiene $f(0) = b^0 = 1$.

En la sección (3.5) se revisó las leyes de los exponentes enteros y decimales. Se puede mostrar que las leyes de los exponentes rigen a todos los exponentes reales.

$$x^m x^n = x^{m+n} \tag{5.16}$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \tag{5.17}$$
$$(x^m)^n = x^{mn} \tag{5.18}$$
$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \tag{5.19}$$
$$(xy)^n = x^n y^n \tag{5.20}$$

Reformularemos las ecuaciones ubicando la incógnita en el exponente. Notar que se necesita una base igual para poder realizar las operaciones entre exponentes.

Ejemplo 5.12.1 *Manipular la siguiente función*

$$f(x) = 4^{-2x} = (4^{-2})^x = \left(\frac{1}{4^2}\right)^x = \left(\frac{1}{16}\right)^x \tag{5.21}$$

5.12.1. Gráfica de una función exponencial

Al momento de graficar las funciones exponenciales se desprenden dos casos. Esta división se hace dependiendo del valor de la base b. Un caso es para $b > 1$ y el otro cuando $0 < b < 1$, se ve que para los números decimales $'0,...'$ elevado a x tienen un comportamiento diferente a las expresiones con base más grande que uno. Además, se puede agregar que para ningún x la expresión será cero, ya que el caso con menor exponente es $a^0 = 1$ (recordando que los exponentes negativos pasan a ser el parte del denominador), entonces las gráficas no intersectan el eje x.

En términos de las reflexiones, las funciones b^x y b^{-x} muestran ser opuestas en torno al eje y. Por otro lado, se menciona que las funciones exponenciales no traspasan el eje x por lo que ese eje pasa a ser una asíntota horizontal para ambos casos ($y = 0$). Utilizado la notación se expresa de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
b &> 1 \\
f(x) &= b^x \to 0 \;\; cuando \;\; x \to -\infty \qquad (5.22) \\
0 < b &< 1 \\
f(x) &= b^x \to 0 \;\; cuando \;\; x \to \infty \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

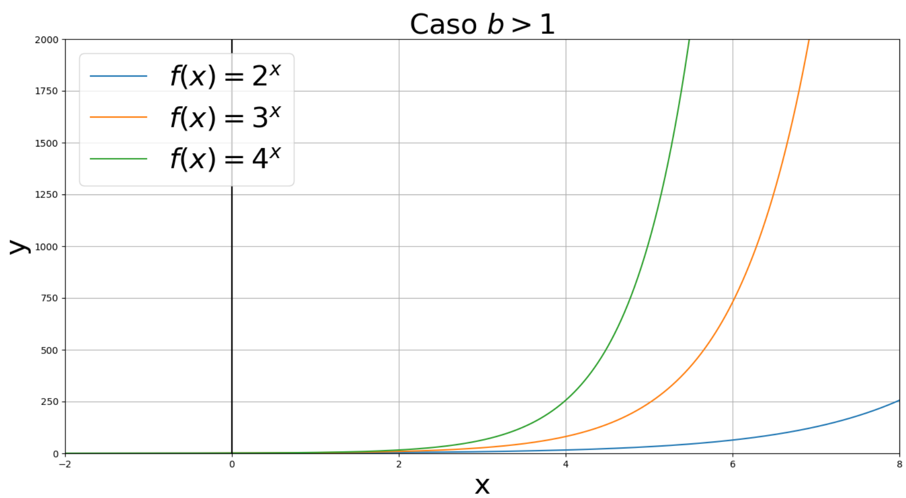

Figura 5.22: Gráfica de funciones exponenciales para el caso de la base $b > 1$. Se ve una función siempre creciente. El dominio son todos los reales y la imagen los reales positivos.

De las figuras (5.22) y (5.23) se ve que las funciones exponenciales son uno a uno, continuas y que no cruzan el eje x. Adicionalmente, se puede dar el caso en que la función se desplaza, es decir, que al exponente se le suma un número, por ejemplo 4^{x+3} es una función desplazada de 4^x. Dependiendo del caso, la función desplazada crece o decrece más rápido que la original.

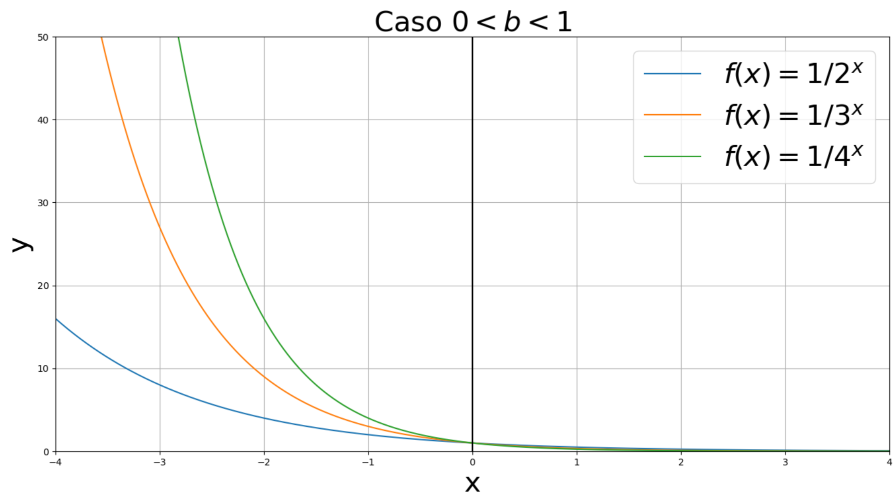

Figura 5.23: Gráfica de funciones exponenciales para el caso de la base $0 < b < 1$. Se ve una función siempre decreciente. El dominio son todos los reales y la imagen los reales positivos.

5.12.2. Número e

Un caso particular de base es el número e, que junto a π son números particulares, ya que tienen decimales no repetitivos e infinitos. Una formar de representar estos números son series. Las series son sumas infinitas (se suman infinitos términos) de términos por medio de una expresión en común.

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

La notación $n!$ se le llama factorial y es la multiplicación de todos los números que hay desde n hasta el 1, el caso particular del del cero es $0! = 1$. Para n muy muy grandes ($n \to \infty$) el número e tiende a la función

$$\begin{aligned} e &\to \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \\ e &= 2,7182818... \end{aligned}$$

Por lo visto hay más de una forma para mostrar un simple número decimal (porque no deja de ser eso, un simple número decimal), pero muestra la importancia del número e en la matemática.

Definición 5.12.2 ***Función exponencial natural.*** *Sea b la base de la función exponencial, entonces se elije $b = e$ y la función queda definida*

$$f(x) = e^x \tag{5.24}$$

Las gráficas de la función natural siguen la misma lógica de las figuras (5.22) y (5.23) cuando la base es e y $1/e$ respectivamente. Puede ser desplazada verticalmente si se agrega una constante, por ejemplo $f(x) = c \pm e^x$.

Un caso en donde es muy usado el número e es la en la función gaussiana, que en su forma más simple es e^{-x^2}. No cruza el eje x y es simétrica con respecto al eje y.

5.13. Funciones logarítmicas

Las funciones exponenciales son uno a uno, por lo que debe existir una función vaya desde la imagen al dominio, es decir, una función inversa. Se introduce el concepto de logaritmo, por lo que la función logarítmica queda de la forma

Definición 5.13.1 ***Función logarítmica.*** *Con la base $b > 0$, $b \neq 1$ se define por*

$$y = log_b(x), \quad ssi \;\; x = b^y \tag{5.25}$$

La abreviatura 'ssi' es por la frase 'si y solo si'. La función (5.25) se lee ***y es el logaritmo de la base b que da como resultado x****.*

En la función logarítmica $b > 0$ no hay exponente y que haga que la expresión b^y sea menor que cero, en consecuencia, x es mayor que cero. Entonces, el dominio de la función logarítmica son los números reales positivos.

Por el lado de las gráficas, ocurre igual que en las funciones exponenciales y se separan en dos casos según el valor de la base b. Se debe recordar que el dominio de las funciones exponenciales son todos los números reales y la imagen son los reales positivos. Entonces, como la función logarítmica es la inversa de la función exponencial, los papeles se invierten.

Del las figuras (5.24) y (5.25) se ve que el eje y es una asíntota vertical. Además, cuando el primer caso se va a $-\infty$ cuando se acerca el cero, mientras que para el segundo caso se va a $+\infty$. Entonces, algunas propiedades de la función logarítmica es que es uno a uno, es una función continua en el intervalo $]0, +\infty[$ y la intersección con el eje x está en el punto $(1, 0)$.

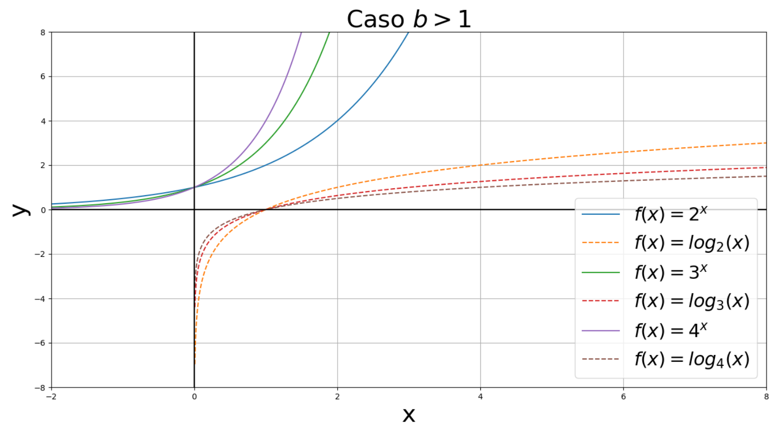

Figura 5.24: Gráfica de funciones Logarítmicas para el caso de la base $b > 1$. Notar que que se invierte el dominio con la imagen.

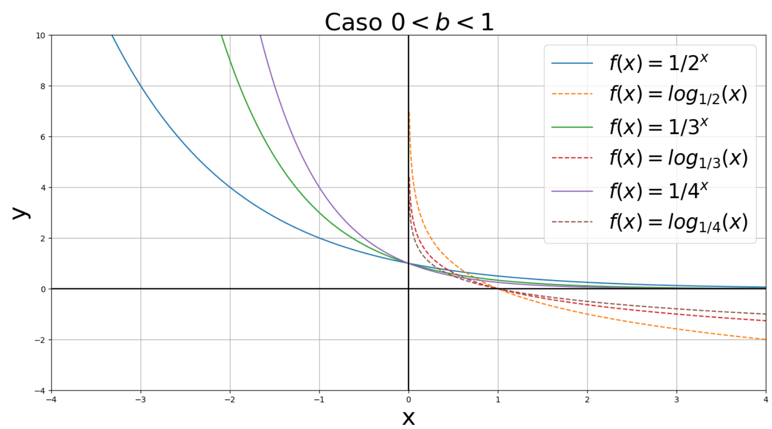

Figura 5.25: Gráfica de funciones logarítmicas para el caso de la base $0 < b < 1$. Notar que se invierte el dominio con la imagen.

Hay un caso particular dentro del caso de la base $b > 1$. Así como los logaritmos de base 10 ($b = 10$) se les llama comunes, a los logaritmos de base e se les llama logaritmos naturales y su notación es $log_e(x) = ln(x)$. Entonces, ocurre que la expresión $ln(e) = 1$ ya que $e^1 = e$. Es una muestra más de que la función exponencial y la logarítmica son funciones inversas y las identidades quedan de la forma:

$$x = e^{ln(x)} \tag{5.26}$$

$$y = ln(e^y) \tag{5.27}$$

Lo que en palabras simples se traduce en que si tengo una función logarítmicas la puede eliminar con una función exponencial y viceversa. Para finalizar, mostraremos las leyes de los logaritmos

Definición 5.13.2 ***Leyes de los logaritmos.*** *Para toda base $b > 0$, $b \neq 1$, y para todos los números positivos M y N.*

- $log_b(MN) = log_b(M) + log_b(N)$
- $log_b\left(\frac{M}{N}\right) = log_b(M) - log_b(N)$
- $log_b(M^c) = c \cdot log_b(M)$, *para cualquier número real c.*

Ejemplo 5.13.1 *Reducir el siguiente logaritmo:*
i)

$$ln(\sqrt{e}) = ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2}ln(e) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

ii)

$$\begin{aligned}
log_{10}2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} &= log_{10}2\left(2\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^{1/2} \\
&= log_{10}(2) + log_{10}\left(2\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^{1/2} \\
&= log_{10}(2) + \frac{1}{2}log_{10}\left(2\sqrt{2\sqrt{2}}\right) \\
&= log_{10}(2) + \frac{1}{2}\left[log_{10}(2) + log_{10}\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= log_{10}(2) + \frac{1}{2}log_{10}(2) + \frac{1}{2}log_{10}\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right) \\
&= log_{10}(2) + \frac{1}{2}log_{10}(2) + \frac{1}{2}log_{10}\left(2\sqrt{2}\right)^{1/2} \\
&= \frac{3}{2}log_{10}(2) + \frac{1}{4}log_{10}\left(2\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}log_{10}(2) + \frac{1}{4}log_{10}(2) + \frac{1}{4}log_{10}(2)^{1/2} \\
&= \frac{3}{2}log_{10}(2) + \frac{1}{4}log_{10}(2) + \frac{1}{8}log_{10}(2) \\
&= log_{10}(2)\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right] \\
&= \frac{15}{8}log_{10}(2)
\end{aligned}$$

iii)

$$
\begin{aligned}
log_{10}\left(\frac{x^4y(w+z)}{wz}\right) &= log_{10}\left(x^4y(w+z)\right) - log_{10}\left(wz\right) \\
&= log_{10}(x^4y) + log_{10}(w+z) - log_{10}\left(wz\right) \\
&= log_{10}(x^4) + log_{10}(y) + log_{10}(w+z) - [log_{10}(w) + log_{10}(z)] \\
&= 4log_{10}(x) + log_{10}(y) + log_{10}(w+z) - log_{10}(w) - log_{10}(z)
\end{aligned}
$$

5.14. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Vistas las gráficas y propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas, ahora toca dar un paso adelante y es trabajar con las expresiones, pero agregando incógnitas.

Ejemplo 5.14.1 *Resolver la ecuación $e^{10x} = 7$, encontrar el valor de x:*

Sol: Primero, como la incógnita está en el exponente debemos encontrar una función que elimine la función exponencial, justamente es la logarítmica.

$$
\begin{aligned}
e^{10x} &= 7 \\
10x &= ln(7) \\
x &= \frac{1}{10}ln(7)
\end{aligned}
$$

Una propiedad importante que viene de que las funciones logarítmicas y exponenciales son uno a uno es que $f(x_1) = f(x_2)$. Se puede utilizar esta herramienta para igualar términos y encontrar la incógnita.

Definición 5.14.1 ***Propiedades uno a uno de las funciones exponenciales y logarítmicas.*** *Sea b la base de la función exponencial, con $b > 0$, $b \neq 1$ y la función logarítmica $y = log_b(x)$. Se cumple que:*

$$
\begin{aligned}
Si\ b^{x_1} &= b^{x_2},\ entonces\ x_1 = x_2 && (5.28) \\
Si\ log_b(x_1) &= log_b(x_2),\ entonces\ x_1 = x_2 && (5.29)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.14.2 *Encontrar el valor de x de las siguientes ecuaciones:*

i)

$$
\begin{aligned}
7^{2(x+1)} &= 343 \\
7^{2(x+1)} &= 7^3 \\
2(x+1) &= 3 \\
2x+2 &= 3 \\
2x &= 1 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
ln(2) + ln(4x-1) &= ln(2x+5) \\
ln(2(4x-1)) &= ln(2x+5) \\
2(4x-1) &= 2x+5 \\
8x-2 &= 2x+5 \\
6x &= 7 \\
6x &= 7 \\
x &= \frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

5.15. Modelos matemáticos exponenciales y logarítmicos

El paso que corona los conceptos vistos en las secciones anteriores, son los modelos matemáticos que se usan con estas funciones. Primero, para entender lo que es un modelo en palabras simples, es una expresión que *intenta* describir matemáticamente un fenómeno. Este suceso no tiene por qué ser representando al 100 % por el modelo, porque puede estar echo para hacer cálculos futuros o tener una idea simple de lo que ocurre. Los modelos pueden ser tan simples o tan complejos como uno quiera y un factor que ayuda a los modelos son los *parámetros*. Estas variables pueden ser constantes universalmente conocidas o números que cambian en el modelo según el caso que uno considere, dando un grado de realidad al modelo.

5.15.1. Modelos matemáticos exponenciales

Si hablamos de modelos exponenciales, es porque la incógnita se encuentra en el exponente y un fenómeno descrito por estas funciones es el crecimiento de una población. Se debe agregar las constantes que condiciona la situación.

$$P(t) = P_0 e^{kt}, \quad k > 0 \tag{5.30}$$

El término $P(t)$ nos dice que la incógnita es t, es decir, el tiempo. Por lo que el modelo nos dice cuanta población habrá en un tiempo determinado. La constante $P(0)$ se llama población inicial y se condiciona a la cantidad población que hay en el tiempo cero ($t = 0$). Por último, la constante k se llama tasa de crecimiento y nos dice que tan rápido crece, notar que si $k < 0$ sería de decrecimiento.

Ejemplo 5.15.1 *La bacteria Escherichia coli (E. coli) duplica su población en 20 minutos. Usar el modelo exponencial para calcular la población de bacterias después de 6 horas.*

Sol: Lo primero en todo problema es asegurarse que todos los datos estén en la misma unidad de medida, entonces pasaremos los minutos a horas. Tiempo de duplicación de población $20min = 1/3h$*. Por otro lado, en este problema no se especifica nada sobre la población inicial, por lo que la dejaremos con el símbolo.*

Notar que en $t = 1/3$ *la bacteria duplica su población, es decir,* $P(1/3) = 2P_0$ *y reemplazando* t *en el modelo queda:*

$$\begin{aligned}
P(1/3) &= 2P_0 \\
P_0e^{k/3} &= 2P_0 \\
e^{k/3} &= 2 \\
\frac{k}{3} &= ln(2) \\
k &= 3 \cdot ln(2)
\end{aligned}$$

Ahora ya tenemos el valor de la constante k*, entonces lo reemplazamos en el modelo*

$$\begin{aligned}
P(t) &= P_0e^{3\cdot ln(2)\cdot t} \\
P(t=6) &= P_0e^{3\cdot ln(2)\cdot 6} \\
P(t=6) &= P_0e^{18\cdot ln(2)} \\
P(t=6) &= P_0 \cdot 262144
\end{aligned}$$

Ahora uno puede poner casos particulares de la población inicial (P_0) *y multiplicarlo por* 262144*, que es la población de la bacteria luego de* 6 *horas.*

Ejemplo 5.15.2 *Se necesita estudiar el crecimiento de dos tipos de bacterias,* P_1 *y* P_2*. La primera alcanza la población de* 10,000 *en* 4 *horas y la segunda comienza con el doble de la población respecto a la primera, además la segunda alcanza la población de* 10,000 *en* 3 *horas. Con el modelo exponencial encuentre la población inicial* (P_0) *de cada bacteria. Se asume el parámetro de crecimiento* k *es el mismo para ambas bacterias*

Expresiones para ambas bacterias:

$$P_1(t) = P_0e^{kt} \quad y \quad P_2 = 2P_0e^{kt} \tag{5.31}$$

Expresiones en que la población de ambas bacterias es de 10,000:

$$\begin{aligned}
P_1(t=4) = 10000 \quad & y \quad P_2(t=3) = 10000 \\
P_0e^{4k} &= 2P_0e^{3k} = 10000 \\
e^{4k} &= 2e^{3k} && / \cdot e^{-3k} \\
e^{k} &= 2 && /ln() \\
ln(e^{k}) &= ln(2) \\
k &= ln(2)
\end{aligned}$$

Encontrado el parámetro k (que es el mismo para ambas bacterias), se reemplaza en (5.31) y se obtiene:

$$P_1(t) = P_0 e^{ln(2)t} \quad y \quad P_2 = 2P_0 e^{ln(2)t}$$

y las expresiones cuando alcanzar las 10000 bacterias son:

$$\begin{array}{rcl}
10000 = P_0 e^{4 \cdot ln(2)} & y & 10000 = 2P_0 e^{3 \cdot ln(2)} \\
10000 = P_0 e^{4 \cdot ln(2)} & y & 5000 = P_0 e^{3 \cdot ln(2)} \\
10000 = P_0 e^{ln(16)} & y & 5000 = P_0 e^{ln(8)} \\
P_0 = \dfrac{10000}{e^{ln(16)}} & y & P_0 = \dfrac{5000}{e^{ln(8)}} \\
P_0 & = & 625
\end{array}$$

Como la población inicial es $P_0 = 625$ unidades. Entonces la bacteria uno, P_1, comenzó con 625 de población inicial y la bacteria dos, P_2, con 1250 unidades.

5.15.2. Modelos matemáticos logarítmicos

Una aplicación muy interesante donde aplicar los logaritmos, en base 10 en este caso, es en la escala de Ricther. Esta escala compara las energías de distintos sismos.

$$M = log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right) \tag{5.32}$$

M es la magnitud del sismo y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a la magnitud $M = 0$

Definición 5.15.1 *En el año 1960 en la ciudad de Valdivia en Chile, ocurrió un terremoto de grado $9,6$ en la escala de Richter. En el año 2010 en Concepción en Chile, hubo un terremoto de grado $8,8$. Entonces ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto del año 1960 con respecto al del 2010?*

Sol: Primero definimos las expresiones que le corresponde a cada terremoto

$$9,6 = log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1960} \; y \; 8,8 = log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)_{2010}$$

Si se aplica la función logarítmica los términos queda de la forma

$$\begin{array}{rcl}
\left(\dfrac{A}{A_0}\right)_{1960} & = & 10^{9,6} \; y \; \left(\dfrac{A}{A_0}\right)_{2010} = 10^{8,8} \\
\left(\dfrac{A}{A_0}\right)_{1960} & = & 10^{9,6} = 10^{8,8} \cdot 10^{0,8} \\
\left(\dfrac{A}{A_0}\right)_{1960} & = & 10^{0,8} \left(\dfrac{A}{A_0}\right)_{2010} \\
\left(\dfrac{A}{A_0}\right)_{1960} & \approx & 6,3 \left(\dfrac{A}{A_0}\right)_{2010}
\end{array}$$

Entonces, el terremoto del año 1960 *en Valdivia fue más de* 6 *veces más fuerte que el terremoto del año* 2010 *en Concepción.*

5.15.3. Escalas logarítmicas y lineales

Al ver las funciones logarítmicas y exponenciales se puede notar que no siempre es lo más optimo ocupar la *escala usual*. Comúnmente se una la escala lineal en los gráficos, que tiene la misma distancia entre los puntos que delimitan el gráfico (la distancia que hay entre en 1 y el 2, es la misma que hay entre el 2 y el 3 y así sucesivamente). Hay otras escalas que representan mejor algunas funciones, como por ejemplo las logarítmicas. Esta escala tiene como etiquetas los números 10^n, siendo n un número entero positivo o negativo, por lo que la etiqueta es siempre positiva.
Como resumen de estas escalas, es que son importante o son útiles usarlas cuando el rango de los datos es muy amplia.

A continuación mostramos algunos ejemplos de diferentes funciones graficadas en cuatros escalas distintas. De izquierda a derecha y de arriba a abajo es: Escala lineal, escala logarítmica en x o semilog en x (esto quiere decir que se utiliza escala logarítmica solo en el eje x), escala logarítmica en y o semilog y y escala logarítmica (escala logarítmica tanto en x como en y).

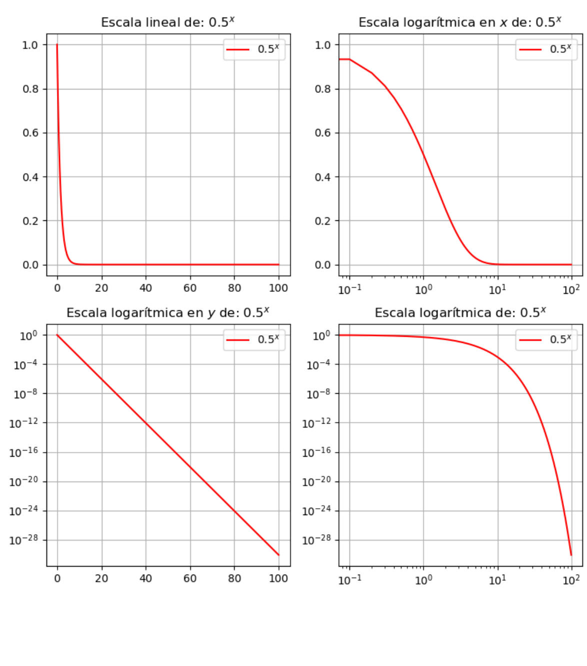

Figura 5.26: Cuatro escalas de la función $0{,}5^x$.

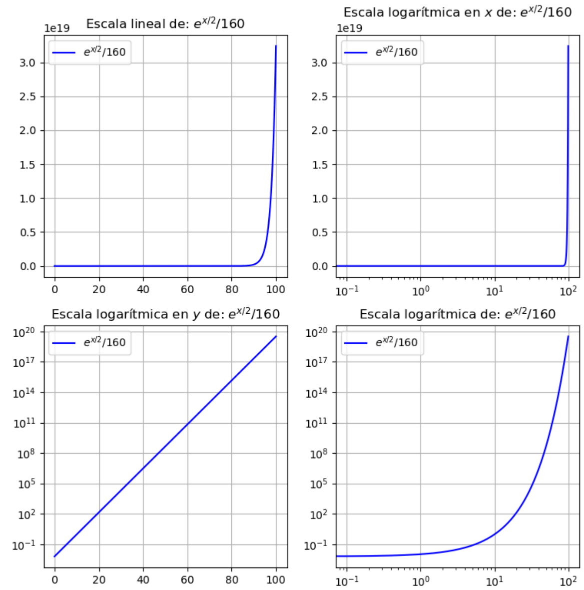

Figura 5.27: Cuatro escalas de la función $e^{x/2}/160$.

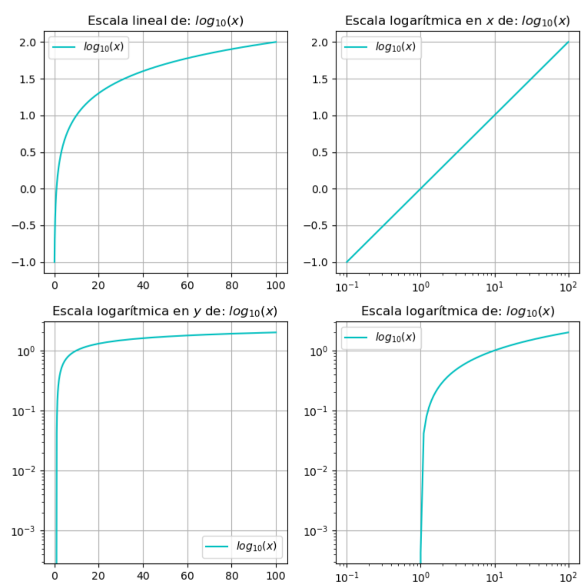

Figura 5.28: Cuatro escalas de la función $log_{10}(x)$.

Capítulo 6

Cálculo vectorial

Este capítulo tiene como objetivo comprender el cálculo vectorial, que ayuda a tener una noción mayor sobre el espacio en donde se mueven las cosas. Un vector tiene como elementos que lo describen una magnitud y una dirección. Ejemplos del uso de vectores es muy amplio sobretodo en física, por ejemplo desplazamiento, velocidad, fuerza, etc.

Antes de llegar a los vectores como tal se debe ver ciertos temas, para tener una base sólida al momento de enfrentarse a problemas vectoriales, uno de ellos son los ángulos y su sentido.

6.1. Ángulos y su orientación

El ángulo se forma con dos rectas con un punto en común que se llama *vértice*. Uno puede imaginar que una de las rectas queda fija (lado inicial) y la otra recta (lado terminal) rota con respecto al vértice para formar el ángulo entre las dos rectas.
Cuando se forma el ángulo se puede medir en grados que van desde 0 a 360 grados y se considera positivo cuando va en sentido antihorario, por consiguiente, si va en sentido horario la medida será negativa.

Así como un ángulo se puede medir en grados, igual está la opción de medirlos en radianes. Esta unidad se basa en la longitud de un arco del un circulo centrado en el origen y de radio 1.

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{6.1}$$

La convención en radianes son las mismas que en los ángulos, es decir, el sentido positivo y negativo son los mismos. Los radianes van desde 0 a 2π.

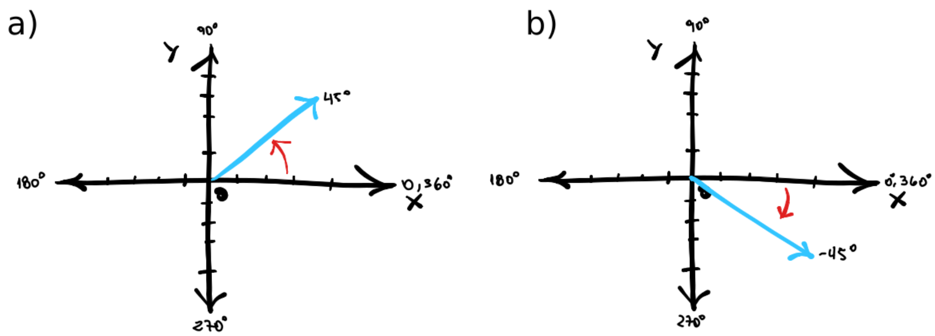

Figura 6.1: Figura de ángulos positivo y negativo. a) Muestran un plano cartesiano de x e y donde hay un vector en 45^o en sentido positivo. b) Es un vector en el mismo plano cartesiano y también es de 45^o, pero es negativo.

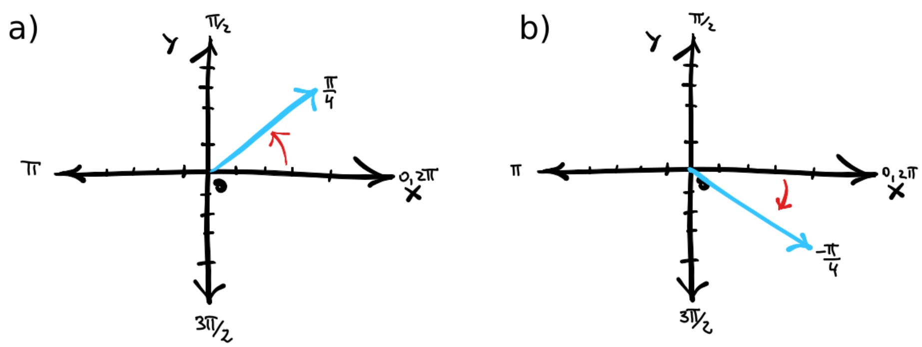

Figura 6.2: Figura de ángulos positivo y negativo. a) Muestran un plano cartesiano de x e y donde hay un vector en $\pi/4$ radianes en sentido positivo. b) Es un vector en el mismo plano cartesiano y también es de $\pi/4$ radianes, pero es negativo.

La forma para pasar de un sistema al otro es hacer una regla de tres simples, siempre teniendo en cuenta que las equivalencias son las siguientes:

$$2\pi \to 360^o$$
$$x \to 45^0$$

Por ejemplo, en esta regla de tres simples se quiere pasar de grados a radianes, entonces la incógnita es a cuantos radianes equivalen 45^o. La respuesta es $x = \pi/4$.

El resumen de los ángulos más importantes se ven en la siguiente tabla;

Grados $[^o]$	0	30	45	60	90	180	270	360
Radianes $[rad]$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Cuadro 6.1: Tabla resumen de los ángulos más comunes en grados y su equivalente en radianes.

6.2. Trigonometría

Utilizaremos los ángulos mostrados en la sección anterior en funciones trigonométricas, que se pueden calcular en base a los lados de un triángulo rectángulo.
El triángulo rectángulo consta de 3 lados etiquetados con las letras a, b y c. Además, se etiqueta un ángulo con la letra griega *theta* θ. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, el cateto que se une en un vértice con la hipotenusa y además contiene el ángulo θ se llama cateto adyacente y el cateto que no contiene al ángulo θ es el cateto opuesto.

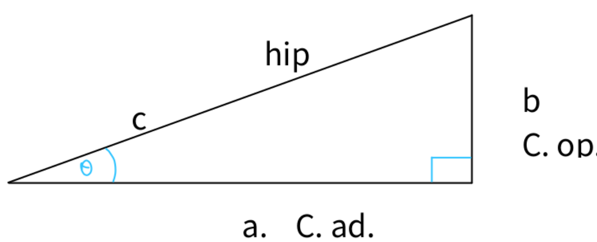

Figura 6.3: Triángulo rectángulo con las etiquetas sus catetos e hipotenusa. El lado a es el cateto adyacente, b es el cateto opuesto y c es la hipotenusa. El ángulo entre el cateto adyacente y la hipotenusa se etiqueta con θ.

Definición 6.2.1 ***Funciones trigonométricas.*** *En base al triangulo de la figura (6.3) se definen las siguientes funciones trigonométricas:*

$$sen(\theta) = \frac{C.op.}{hip} \tag{6.2}$$

$$cos(\theta) = \frac{C.ad.}{hip} \tag{6.3}$$

$$tan(\theta) = \frac{C.op}{C.ad} = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} \tag{6.4}$$

$$cot(\theta) = \frac{C.ad}{C.op} = \frac{1}{tan(\theta)} \tag{6.5}$$

$$sec(\theta) = \frac{hip}{C.ad.} = \frac{1}{cos(\theta)} \tag{6.6}$$

$$csc(\theta) = \frac{hip}{C.op} = \frac{1}{sen(\theta)} \tag{6.7}$$

Las abreviaciones son las siguientes: sen=seno, cos=coseno, tan=tangente, cot=cotangente, sec=secante y csc=cosecante.

El triángulo de la figura (6.3) al ser rectángulo cumple el teorema de Pitágoras, entonces se puede usar para formular las soguientes identidades trigonométricas.

$$a^2 + b^2 = c^c \tag{6.8}$$

Si (6.8) lo dividimos por a^2, b^2 y c^c se obtienen las siguientes ecuaciones.

a) Dividir por c^2 :

$$a^2 + b^2 = c^c \tag{6.9}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \tag{6.10}$$

a) Dividir por b^2 :

$$a^2 + b^2 = c^c \tag{6.11}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \tag{6.12}$$

a) Dividir por a^2 :

$$a^2 + b^2 = c^c \tag{6.13}$$

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \tag{6.14}$$

Si las ecuaciones anteriores lo pasamos a funciones trigonométricas se forman las siguientes identidades

Definición 6.2.2 ***Identidades trigonométricas.***

$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1 \tag{6.15}$$

$$1 + tan^2(\theta) = sec^2(\theta) \tag{6.16}$$

$$cot^2(\theta) + 1 = csc^2(\theta) \tag{6.17}$$

Ejemplo 6.2.1 *Encuentre el valor de la siguiente expresión trigonométrica:*

$$cos(30^o) \cdot tan(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

Si se junta las funciones trigonométricas con lo visto de los ángulos en grados y radianes se puede resumir en una tabla con los valores más comunes.

Grados	0^o	$30^o = \pi/6$	$45^o = \pi/4$	$60^o = \pi/3$	$90^o = \pi/2$	$270^o = 3\pi/2$
$sen(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	∞

Cuadro 6.2: Tabla resumen de los valores mas comunes de las funciones trigonométricas.

6.3. Vectores

Cuando uno se enfrenta a los problemas de mover cosas o desplazarse, se hacen mapas o planes mentales de como moverse y de forma inconsciente hacemos las direcciones para lograr el objetivo. Si se plasma ese plano mental, naturalmente lo llevaremos a *flechas* que nos direccionan a nuestro destino. Estas flechas con un largo y dirección lo llamaremos *vector*.

Gráficamente, el vector es representado por una flecha entre dos puntos, donde tiene un punto inicial y final que define su dirección. Si los puntos que son O y P, el trazo OP forma el vector denotado por $\vec{A}$ o $\vec{OP}$ y el largo del vector se llama magnitud y es denotado $|\vec{A}|$.

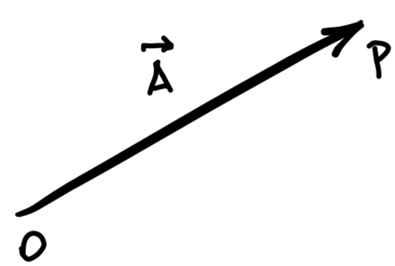

Figura 6.4: Representación de un vector. El punto inicial es el O, el punto final es el P y el largo es la magnitud.

Para formar el vector desde los puntos O y P se debe restar el punto final menos el punto inicial. Entonces, si se tiene un punto inicial O que tiene coordenadas en el plano de dos dimensiones (O_0, O_1) y un punto final P de coordenadas (P_0, P_1), donde el primer elemento del paréntesis es el valor en el eje x y el segundo valor es del eje y. Se debe restar las coordenadas del punto P menos las del punto O. Finalmente, el vector $\vec{A}$ esta dado por la siguiente expresión:

$$\vec{A} = P - O = (P_0, P_1) - (O_0, O_1) = (P_0 - O_0, P_1 - O_1) \tag{6.18}$$

Ejemplo 6.3.1 *Encuentre las coordenadas del vector $\vec{a}$, si tiene como punto inicial $O = (1, -2)$ y punto final $P = (5, 3)$.*

$$\vec{a} = P - O = (5,3) - (1,-2) = (4,5)$$

La magnitud es un número y no tiene dirección, a estas cantidades se les llama *escalares*. Ejemplos de magnitudes escalares son: La masa, largo, tiempo, temperatura y cualquier cantidad que sea un número real.

$$\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \vec{e} \tag{6.19}$$

El vector $\vec{A}$ cuenta con un número escalar que es la magnitud y un vector que le da la dirección. Un ejemplo que sirve por el momento, es decir que uno se puede mover 10 metros, pero es distinto decir que uno se moverá 10 metros al sur o al norte. El decir norte o sur da la dirección a la cual uno se desplazará.

- Sea $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores y se dicen que son iguales si tienen la misma magnitud y dirección sin importar sus puntos de inicio. Ver representación a) de la figura (6.5).

- Un vector $\vec{A}$, pero con dirección opuesta y misma magnitud se denota como $-\vec{A}$. Ver representación b) de la figura (6.5).

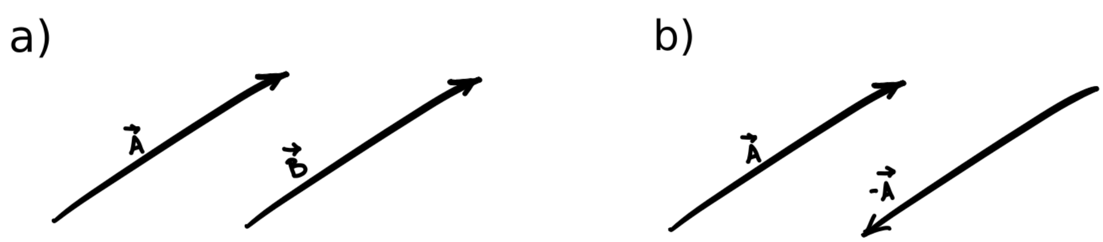

Figura 6.5: Representación de vectores iguales y opuestos. a) Se muestran dos vectores iguales que son iguales en magnitud y sentido. b) Se muestran dos vectores opuestos que son iguales en magnitud pero distintos en sentido.

Las operaciones posibles con los vectores son la suma, la resta y la multiplicación. Por parte de la suma de dos vectores se forma un vector resultante donde el inicio calza con el inicio del primer vector y termina con el punto final del segundo vector. En la resta se une ambos puntos finales de los vectores (ver figura 6.6).

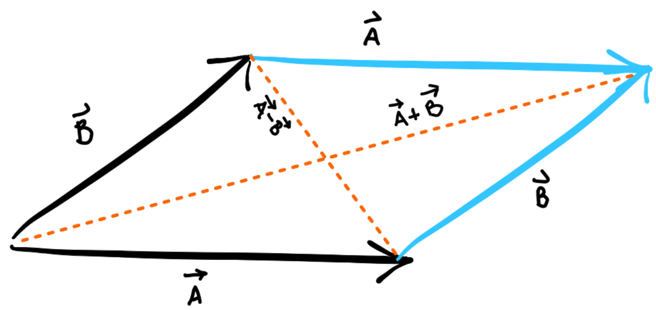

Figura 6.6: Representación de la suma y resta de dos vectores. Se muestran los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ donde son duplicados para mostrar como es el vector resultante de la suma y la resta de ellos mismo.

En términos matemáticos, cuando se aplica la operación de suma o resta se debe aplicar en cada un de los elementos. La primera forma de ver un vector en más de una dimensión es un paréntesis donde cada número representa la magnitud que tiene en cada dirección (Similar el procedimiento cuando se forma un vector con dos puntos en el plano). Entonces, considere dos vectores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ donde la suma y la resta queda definida como:

a) Suma:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \tag{6.20}$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \tag{6.21}$$

a) Resta:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) \tag{6.22}$$
$$= (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \tag{6.23}$$

Definición 6.3.1 ***Algebra de los vectores.*** *Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores y m y n son escalares, entonces se cumple las siguientes leyes:*

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{6.24}$$
$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \tag{6.25}$$
$$m\vec{A} = \vec{A}m \tag{6.26}$$
$$m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A} \tag{6.27}$$
$$(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A} \tag{6.28}$$
$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B} \tag{6.29}$$

Ejemplo 6.3.2 *Considere los vectores en tres dimensiones* $\vec{A} = (2,3,4)$, $\vec{B} = (0,0,2)$, $\vec{C} = (7,1,0)$ *y las constantes* $m = 2$, $n = 3$. *Resuelva las ecuaciones anteriores.*

i)

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= \vec{B} + \vec{A} \\ (2,3,4) + (0,0,2) &= (0,0,2) + (2,3,4) \\ (2,3,6) &= (2,3,6) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) &= (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \\ (2,3,4) + [(0,0,2) + (7,1,0)] &= [(2,3,4) + (0,0,2)] + (7,1,0) \\ (2,3,4) + [(7,1,2)] &= [(2,3,6)] + (7,1,0) \\ (9,4,6) &= (9,4,6) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} m\vec{A} &= \vec{A}m \\ 2 \cdot (2,3,4) &= (2,3,4) \cdot 2 \\ (4,6,8) &= (4,6,8) \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} m(n\vec{A}) &= (mn)\vec{A} \\ 2 \cdot (3 \cdot (2,3,4)) &= (2 \cdot 3)(2,3,4) \\ 2 \cdot (6,9,12) &= (6) \cdot (2,3,4) \\ (12,18,24) &= (12,18,24) \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} (m+n)\vec{A} &= m\vec{A} + n\vec{A} \\ (2+3) \cdot (2,3,4) &= 2(2,3,4) + 3(2,3,4) \\ (5)(2,3,4) &= (4,6,8) + (6,9,12) \\ (10,15,20) &= (10,15,20) \end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned}
m(\vec{A}+\vec{B}) &= m\vec{A}+m\vec{B} \\
2((2,3,4)+(0,0,2)) &= 2(2,3,4)+2(0,0,2) \\
2(2,3,6) &= (4,6,8)+(0,0,4) \\
(4,6,12) &= (4,6,12)
\end{aligned}$$

6.3.1. Vectores unitarios

En la ecuación (6.19) presentamos a $\vec{e}$ que nos dice la dirección del vector. Este elemento se le llama vectores unitarios, es decir, tiene largo uno.
Cuando creamos un plano en 2D o un espacio en 3D para colocar los vectores, cada eje tiene un vector unitario. A diferencia de cualquier vector, la notación de un vector unitario es $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.

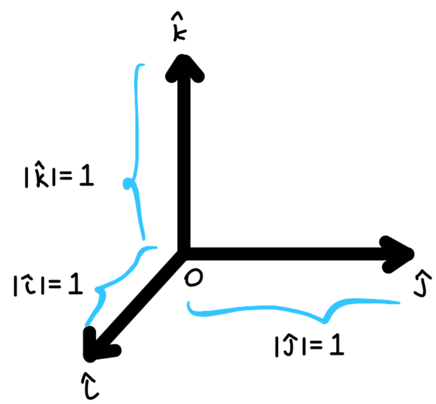

Figura 6.7: Representación de los vectores unitarios. Se muestra que el largo de cada uno de los vectores es 1 partiendo desde el origen.

Ejemplo 6.3.3 *Sea $\vec{A}=5\hat{\imath}$, calcule el doble del vector $\vec{A}$.*

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= 5\hat{\imath} \\
2\cdot\vec{A} &= 2\cdot 5\hat{\imath} \\
2\cdot\vec{A} &= 10\hat{\imath}
\end{aligned}$$

Ahora cualquier vector se puede volver un vector unitario. Si un vector $\vec{A}$ tiene una norma distinta de uno, se debe dividir por un escalar y es su propia magnitud.

$$\hat{A}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \tag{6.30}$$

6.3.2. Componentes de un vector

Así como en un principio se dijo que era importante decir la dirección del vector, si era sur o norte, pero que ocurre si la dirección es Noroeste. El vector tienen una parte hacia el norte y una parte hacia el oeste. En estos vectores se dice que tiene componentes en esas direcciones. Si generalizamos con los ejes que hemos planteado, un vector puede tener componentes en los ejes $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$. Esto se puede extender a cuantas componentes nosotros queramos, pero para este curso veremos el caso de dos y tres dimensiones.

$$\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k} \tag{6.31}$$

En (6.31) se muestra cada componente de un vector arbitrario, pero además se puede escribir cada componente en términos de las funciones trigonométricas. Se crea un triángulo rectángulo (como la figura 6.3), donde la magnitud del vector es la hipotenusa del triangulo y los catetos son las componentes del vector.
Si considero un vector $\vec{a}$ en dos dimensiones, que solo conozco su magnitud, con componentes a_x y a_y respectivamente. Se puede calcular la expresión de a_x y a_y utilizando la función $sen(\theta)$ y $cos(\theta)$.

Componente en el eje y:

$$\begin{aligned} sen(\theta) &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ a_y &= |\vec{a}| \cdot sen(\theta) \end{aligned} \tag{6.32}$$

Componente en el eje x:

$$\begin{aligned} cos(\theta) &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ a_x &= |\vec{a}| \cdot cos(\theta) \end{aligned} \tag{6.33}$$

Finalmente, el vector queda expresado de la siguiente manera:

$$\vec{a} = (a_x, a_y) \tag{6.34}$$
$$= (|\vec{a}| \cdot cos(\theta), |\vec{a}| \cdot sen(\theta)) \tag{6.35}$$
$$= |\vec{a}|(cos(\theta), sen(\theta)) \tag{6.36}$$

Si suponemos que tenemos un vector llamado $\vec{r}$ con componentes (x, y, z) y queremos calcular su magnitud debemos hacer lo siguiente

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ |\vec{r}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

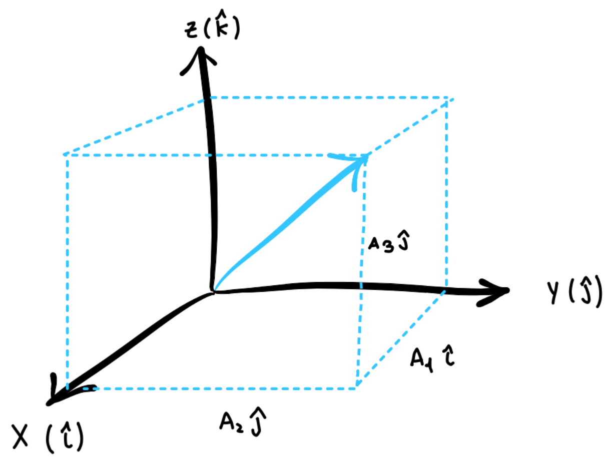

Figura 6.8: Representación de las componentes de un vector en tres dimensiones. El vector muestra componente los tres ejes etiquetados como A_1 en el eje x, A_2 en el eje y y A_3 en el eje z.

Ejemplo 6.3.4 *Sea* $\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$*. Calcule la magnitud del vector* $\vec{v}$

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} \\
|\vec{v}| &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \\
|\vec{v}| &= \sqrt{9 + 16 + 25} \\
|\vec{v}| &= \sqrt{50} \\
|\vec{v}| &= \sqrt{25 \cdot 2} \\
|\vec{v}| &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \\
|\vec{v}| &= 5\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.3.5 *Sea* $\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$*. Formalice del vector* $\vec{v}$*:*

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} \\
\hat{v} &= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\
\hat{v} &= \frac{1}{5\sqrt{2}} \left(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}\right)
\end{aligned}$$

Norma de $|\hat{v}|$

$$\begin{aligned}
|\hat{v}| &= \sqrt{\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{5\sqrt{2}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{9}{25 \cdot 2}\right) + \left(\frac{16}{25 \cdot 2}\right) + \left(\frac{25}{25 \cdot 2}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{9}{50}\right) + \left(\frac{16}{50}\right) + \left(\frac{25}{50}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{9+16+25}{50}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{50}{50}\right)} \\
&= \sqrt{(1)} \\
|\hat{v}| &= 1
\end{aligned}$$

Capítulo 7

Cálculo infinitesimal

Hay aplicaciones que piden ver cuanto cambia una cantidad o cuál es el área de cierta región. Si el intervalo de tiempo es amplio o si la región es cuadrada, el problema se puede resolver con la matemática ya vista. Ahora, si queremos tener una herramienta para calcular el área o saber el cambio instantáneo de una función cualquiera, debemos recurrir al cálculo.

En este capítulo recurriremos constantemente al dicho de Napoleón "*Divide y vencerás*", esto es porque para los tópicos de límites, derivadas e integrales ocuparemos la noción de infinitesimal (significa muy pequeño). Al trabajar con partes pequeñas permite simplificar los cálculos de las pendientes en una función (derivadas) o el área bajo la curva (integrales).

7.1. Límites

En la sección (5.11) se habló de que era lo que ocurría con la función $f(x)$ cuando me acercaba por el lado positivo o por el lado negativo. Pero ¿Qué tan cerca me puedo acercar a un punto en una función? Esta respuesta la entrega los límites, que permite ver como se comporta la función en ese punto acercándose tanto como uno quiera.

Cuando una función está bien definida puedo saber su valor exacto de su imagen con cualquier valor del dominio, pero ocurre en ciertos casos que se busca el valor de la función justo en puntos que no está definida, por ejemplo las expresiones de fracciones. Veamos el siguiente caso:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \tag{7.1}$$

Puedo saber el valor de la función en cualquier punto menos cuando $x = 1$, pero si me acerco lo suficiente puedo saber cuanto vale la función muy cerca del punto en el que se indetermina. Uno se puede acercar por dos lados, es decir, por los números positivos

x	$0,75$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	1	$1,001$	$1,01$	$1,1$	$1,25$
$f(x)$	$2,313$	$2,710$	$2,970$	$2,997$	?	$3,003$	$3,030$	$3,310$	$3,813$

Cuadro 7.1: Tabla de valores para ver el valor de un límite.

o los números negativos. Consiste en ir tomando valores del dominio cercanos al que se indetermina ($x \approx 1$) y ver la imagen que resulta.

Se ve en la tabla (7.1), que por ambos lados los números se acercan a un mismo valor. Entonces, se concluye que como tanto por la izquierda como por la derecha tiende al número 3, el límite de la función cuando x se acerca a 1 es 3. Su notación es

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) &= 3 \\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} &= 3 \end{aligned}$$

Nuevamente se debe repetir, yo me puede acercar cuanto yo quiera, es decir, puedo elegir un $x = 0,99999...$ y estar muy cerca del valor en el punto que quiero, pero no es el valor de la función en ese punto ($x = 1$).

Definición 7.1.1 ***Límite.*** *Sea $f(x)$ una función en un intervalo abierto que contiene al número x_0. El límite de la función $f(x)$ conforme x se aproxima a x_0 es L, lo que se escribe como:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \tag{7.2}$$

Si la siguiente proposición es verdadera:
Dado cualquier $\epsilon > 0$, no importa cuan pequeño sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$Si\ 0 < |x - x_0| < \delta,\ entonces\ |f(x) - L| < \epsilon$$

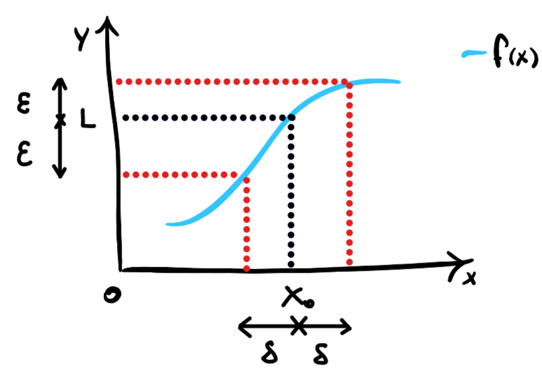

Figura 7.1: Gráfica de la definición de límite. En el eje x existe el parámetro δ y en el y el parámetro ϵ.

En la ecuación (7.2) de la definición se dice *el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a 'a' es* L. Ahora, ya entendida la idea de lo que es el límite, veremos las diferentes reglas para calcularlos.

a) Límite de una función lineal. Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a}(mx + b) = ma + b \tag{7.3}$$

b) Límite de una constante. Sea c una constante, entonces para cualquier a

$$\lim_{x \to a} c = c \tag{7.4}$$

c) Límite de un polinomio de grado 1.

$$\lim_{x \to a} x = a \tag{7.5}$$

d) Límite de una suma de límites. Si el límite de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son L y M respectivamente

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M \tag{7.6}$$

Esta propiedad es extensible para n sumas o restas, pero aquí solo se considera el caso de dos límites.

e) Límite de una $n-\acute{e}sima$ potencia de la función $f(x)$. Si la función $f(x)$ tiene como resultado del límite el número L, se cumple que

$$\lim_{x \to a} f(x)^n = L^n \tag{7.7}$$

f) Límite de una expresión fraccional. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen como límite L y M respectivamente. Además, que $M \neq 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \tag{7.8}$$

g) Límite de una raíz $n-\acute{e}sima$. Si n es un número entero positivo y el valor del límite de la función $f(x)$ es L se cumple

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \tag{7.9}$$

h) Límite de una función fraccional particular. Si a es cualquier número real distinto de cero se cumple

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \tag{7.10}$$

i) Límite de una función fraccional cuando el límite tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{7.11}$$

Ejemplo 7.1.1 *Calcular el límite de las siguientes funciones:*

i)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} f(x) &= \lim_{x\to 3}(x^2+7x-5) \\
&= lim_{x\to 3}x^2 + lim_{x\to 3}7x - lim_{x\to 3}5 \\
&= (3)^2 + 7\cdot(3) - 5 \\
&= 9+21-5 \\
&= 25
\end{aligned}$$

ii)

$$\lim_{x\to 3}(3x+5)^2 = 14^2 = 196$$

iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-2x}{x} &= \frac{\sqrt{4x^2+1}-2x}{x}\cdot\frac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{4x^2+1}+2x} \\
&= \frac{(4x^2+1)-(2x)^2}{x(\sqrt{4x^2+1}+2x)} \\
&= \frac{1}{2x} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-2x}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0
\end{aligned}$$

7.1.1. Límites laterales

Las expresiones que vimos anteriormente salvo un punto (singularidad) están definidas en todos los números reales, pero hay casos de funciones que su dominio está restringido y se quiere saber el límite. Ejemplo de esto son las raíces cuadradas.

$$\lim_{x\to 2} = \sqrt{x-2} \tag{7.12}$$

El dominio de esta función no son todos los números reales, sino que para $x > 2$. Entonces, al acercarse no lo podemos hacer por ambos lados, sino unicamente por los números positivos. Al calcular el límite se ve que es cero, pero hay que hacer la salvedad que es por la derecha, entonces se dice *el límite de $f(x)$ por la derecha es cero.*

Definición 7.1.2 ***Límite por la derecha.*** *Sea una función $f(x)$ definida en cada número del intervalo abierto $]a, c[$. Entonces, el límite de $f(x)$, conforme x tiende a $'a'$ por la derecha es L. Se denota por*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Definición 7.1.3 ***Límite por la izquierda.*** *Sea una función $f(x)$ definida en cada número del intervalo abierto $]a, d[$. Entonces, el límite de $f(x)$, conforme x tiende a $'a'$ por la izquierda es L. Se denota por*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Ejemplo 7.1.2 *La función signo (denotada sgn(x)) es la cual antes del cero es -1, en $x = 0$ es 0 y después del cero es 1, por lo que se ve notoriamente si me acerco por las laterales el resultado de un límite va a ser distinto del otro.*

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Calcule el límite de sgn(x). Primero el limite por la izquierda

$$\lim_{x \to 0^-} sgn(x) = -1$$

Análogamente se calcula el límite por la derecha

$$\lim_{x \to 0^+} sgn(x) = 1$$

Se dice que la función no tiene límite. Además, una vez más sirve para recalcar que el valor de la función no tiene por qué ser el del límite en el punto, aunque este muy cerca. El valor de la función en $x = 0$ es 0 y los límites resultaron 1 y -1 respectivamente. Si los límites laterales resultan el ser el mismo valor, entonces el límite existe.

Ejemplo 7.1.3 *Calcule el límite de la siguiente función por parte:*

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & , si \quad x \leq 1 \\ \\ 2 + x^2 & , si \quad x > 1 \end{cases}$$

Calcule el $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ *y* $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

Según el caso del límite lateral reemplazamos en $f(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}(2+x^2) &= 2+(1)^2\\ &= 3\end{aligned}$$

Análogamente para el otro caso

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}(4-x^2) &= 4-(1)^2\\ &= 3\end{aligned}$$

Como ambos límites laterales coinciden, entonces la función si tiene límite.

7.2. Derivadas

En la sección (5.8) se dio las primeras pinceladas del problema que se resuelve en este capítulo. Ahí se planteó que se puede calcular la pendiente de una curva tomando dos puntos cercanos, tan cercanos como uno desee. Esto tiene como consecuencia, que se termina calculando la pendiente de la función en dicho punto, es decir, el cambio que tiene en el eje x y en el y. La diferencia de entre los puntos parte siendo la variable h y en ese momento se escribió que h se hace cero. Lo que haremos ahora es cambiar la notación para decir explícitamente que la pendiente es la razón de cambio en los ejes con la letra griega llamada *Delta*.

Definición 7.2.1 ***Derivada de una función.*** *Si* $f(x)$ *es una función definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite*

$$\lim_{\Delta x\to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{7.13}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \tag{7.14}$$

El resultado es una recta tangente a la gráfica de $f(x)$ *en el punto (c,f(c)).*

La notación usual para la derivada de una función es $f'(x)$ o $df(x)/dx$, donde este último nos dice explícitamente con respecto a qué variable tenemos que derivar. Mencionar que si la función tiene derivadas en un punto es continua en ese punto, es decir, no tiene un salto.

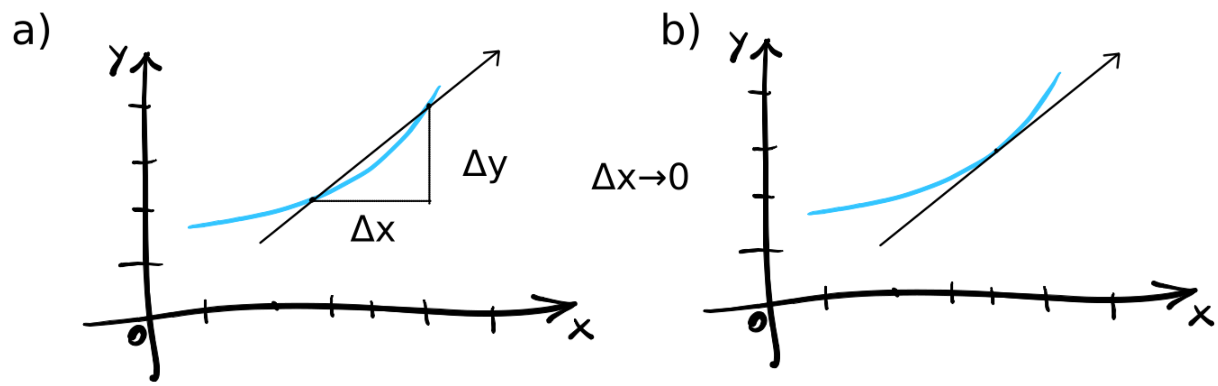

Figura 7.2: Muestra gráfica de la definición de derivada para una variable. a) Δx representa cuanto cambia la función en el eje x y Δy muestra cuanto cambia la función en el eje y. b) Cuando se acercan demasiado los puntos resulta una recta tangente a la función, mostrando la pendiente de la función en ese punto.

7.2.1. Reglas de la derivación

Resumiremos las principales reglas que tienen las funciones para derivarse. Es importante decir que no son las únicas y que aquí solo ocuparemos la regla, pero que cada una se puede comprobar con la expresión del límite de (7.14).

a) Derivada de una constante:

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \tag{7.15}$$

b) Derivada de una potencia:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1} \tag{7.16}$$

c) Derivada de una función por una constante:

$$\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x) \tag{7.17}$$

d) Derivada de una suma o resta:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x) \tag{7.18}$$

f) Derivada de una multiplicación:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \tag{7.19}$$

g) Derivada del cuociente. Con $g(x) \neq 0$.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \tag{7.20}$$

h) Regla de la cadena para una potencia. Considerar que $h(x) = f(g(x))$.

$$\frac{d}{dx}\left[h(x)\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{7.21}$$

i) Derivada de una función exponencial. Caso particular en que la base es el número e.

$$\frac{d}{dx}\left[e^{f(x)}\right] = e^{f(x)} \cdot f'(x) \tag{7.22}$$

Ejemplo 7.2.1 *Utilizando las reglas de derivación que se mencionaron anteriormente, se resolverán los siguientes ejercicios*

i)

$$\frac{d}{dx}\left[5\right] = 0$$

ii)

$$\frac{d}{dx}\left[x^5\right] = 5 \cdot x^4$$

iii)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[6 \cdot (x^2 + x^7)\right] &= 6(2x + 7x^6) \\ &= 6x(2 + 7x^5)\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[3x \cdot (x+2)\right] &= 3(x+2) + 3x \\ &= 6x + 6 \\ &= 6(x+1)\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+2}{x^3-2}\right] &= \frac{(2x)(x^3-2)-(x^2+2)(3x)}{(x^3-2)^2} \\
&= \frac{(2x^4-4x)-(3x^4+6x^2)}{(x^3-2)^2} \\
&= \frac{(2x^4-4x)-3x^4-6x^2}{(x^3-2)^2} \\
&= \frac{x(-x^3-4-6x)}{(x^3-2)^2} \\
&= -\frac{x(x^3+4+6x)}{(x^3-2)^2}
\end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[(x^3+5)^2\right] &= 2(x^3+5)3x^2 \\
&= 6x^2(x^3+5) \\
&= 6x^5+30x^2
\end{aligned}$$

vii)

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}\right] = 2xe^{x^2}$$

7.2.2. Derivada de orden superior

La derivada es un operador, como la suma, que permite que se pueda aplicar cuantas veces sea necesario (siempre y cuando la función cumple ciertas condiciones que aquí no entraremos en detalles). Uno de los ejemplos más conocidos es en física. Si yo (el observador) sé la posición (coordenadas) de un objeto que se mueve, se puede derivar esa función una vez y saber su velocidad y si la derivo nuevamente sabré su aceleración.

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2t^2 = |\vec{r}| \\
\frac{df(t)}{dt} &= 2\cdot 2t = 4t = |\vec{v}| \\
\frac{d^2f(t)}{dt^2} &= 4 = |\vec{a}|
\end{aligned}$$

Esto se puede extender hasta n casos, pero en este curso nos interesa hasta las derivadas de orden 2 (segunda derivada).

Definición 7.2.2 ***Derivadas de orden superior.*** *Sea de $f(x)$ una función derivable hasta el orden n.*

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \tag{7.23}$$

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \tag{7.24}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n} \tag{7.25}$$

7.2.3. Extremos de una función

Lo visto hasta el momento de derivadas nos permite ver aplicaciones para llegar a conclusiones de las funciones, tales como donde tiene un valor máximo, un valor mínimo, si es creciente o decreciente en cierto intervalo.

Definición 7.2.3 ***Definición de extremos.*** *Sea un intervalo cualquiera I que contiene al número c.*

- *$f(c)$ es el mínimo de $f(x)$ en I si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en I.*

- *$f(c)$ es el máximo de $f(x)$ en I si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en I.*

A los puntos extremos (o simplemente extremos) de una función se le llaman máximos y mínimos absolutos.

Si la función está definida en un intervalo cerrado (esto es importante, que sea cerrado) y es continua en ese intervalo, entonces va a tener tanto un máximo como un mínimo en ese intervalo. Es importante mencionar que hasta el momento sabemos las que se necesita y cuando existen los puntos extremos, pero no se a visto como calcularlos.

Puede pasar que uno analiza funciones y presentan máximos y mínimos, pero pueden tener otros puntos más altos o más bajos que son los absolutos. Estos puntos se llaman máximos y mínimos relativos.

Definición 7.2.4 ***Maxímos y mínimos relativos.*** *Sea f(x) definida en los números reales.*

- *Si hay un intervalo abierto que contiene el punto c en el cual $f(c)$ es el máximo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de máximo relativo de $f(x)$.*

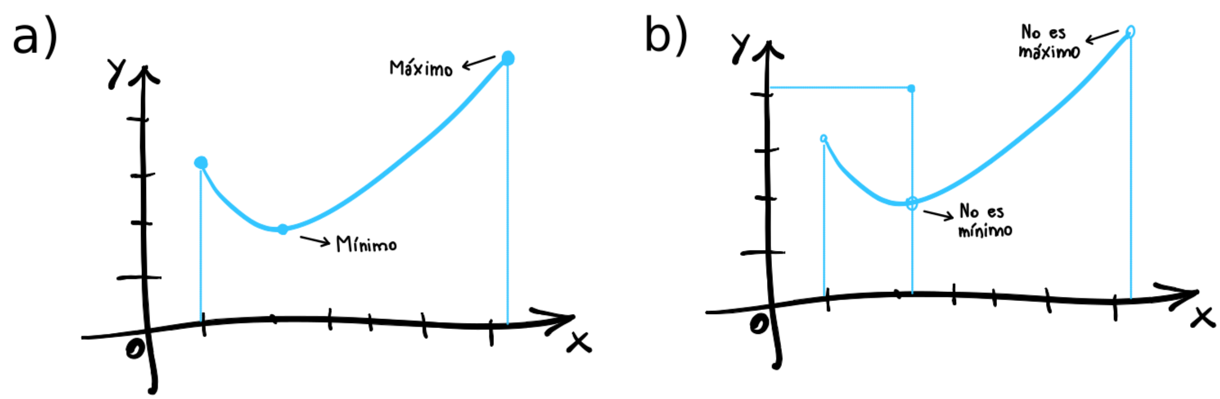

Figura 7.3: Máximos y mínimos de una función. a) Muestra una función definida en un intervalo cerrado (considera los extremos) por lo que la función tiene un máximo y un mínimo. b) La función está definida en un intervalo abierto y muestra una discontinuidad en el punto más bajo de la curva, por lo que no tiene mínimo ni máximo (No se puede derivar en ese punto).

- *Si hay un intervalo abierto que contiene el punto c en el cual $f(c)$ es el mínimo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de mínimo relativo de $f(x)$.*

Ahora se muestra el procedimiento para encontrar los máximos y mínimos de una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$.

- Se encuentran los puntos extremos de la función.

    Se calcula la derivada de primer orden.

    Se encuentran las raíces de la función derivada. $f'(x) = 0$. Estos valores se consideran puntos críticos.

- Se evalúa $f(x)$ en cada punto crítico en el intervalo $]a, b[$.
- Se evalúa $f(x)$ en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$. Reemplazar $f(x = a)$ y $f(x = b)$.
- Concluir que el valor más pequeño de los puntos encontrados es el mínimo y el más grande es el máximo de la función.

Ejemplo 7.2.2 *Sea $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ definida en el intervalo cerrado $[-1, 2]$. Calcular el o los máximos y mínimos relativos.*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^4 - 4x^3 \\
f'(x) &= 12x^3 - 12x^2
\end{aligned}
$$

Ahora se iguala la deriva a cero.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 12x^3 - 12x^2 &= 0 \\ 12x^2(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son $x = 0$, $x = 1$. Se deben evaluar estos puntos en la función $f(x)$.

$f(x = 0) = 0$.
$f(x = 1) = -1$ *Mínimo absoluto.*
$f(x = -1) = 7$
$f(x = 2) = 16$ *Máximo absoluto.*

7.2.4. Función creciente y decreciente

En la sección (5.4) se habló por primera vez de funciones crecientes y decrecientes, mostrando una leve introducción con su definición para poder clasificarlas. Ahora seguiremos hablando de ellas, pero mostraremos en que intervalo especifico muestra tal comportamiento. Estos intervalos están definidos por los puntos críticos de la función.
Con la operación de la derivada permite ahorrar camino y definir el comportamiento de la función con el resultado de la derivada en un intervalo dado. En el caso de una recta, si la derivada es positiva es una función creciente, es decir, su pendiente es positiva. Si es negativa, entonces es una función decreciente y si tiene derivada igual a cero es una función constante, este último caso es candidato a que tenga uno o más puntos críticos. Entonces, el procedimiento para encontrar el comportamiento de la función es el siguiente:

- Calcular la derivada de primer orden de la función $f(x)$.
- Igualar la derivada a cero y encontrar las raíces de esa ecuación $f(x) = 0$.
- Separar los intervalos según los puntos críticos obtenidos.
- Tomar un x del dominio según cada intervalo y reemplazarlo en la derivada de primer orden.
- Ver el valor de cada derivada y concluir si la función es creciente, decreciente o constante según resulte.

Ejemplo 7.2.3 *Sea $f(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2}$. Determinar el comportamiento de $f(x)$.*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} \\ f'(x) &= 3x(x-1) \end{aligned}$$

Las raíces de las derivadas son $x = 0$ y $x = 1$. Entonces, los intervalos son 3 y se resumen en la siguiente tabla:

Intervalos	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Signo de $f'(x)$	$x = -1$ $f'(x) = 6 > 0$	$x = 1/2$ $f'(1/2) = -3/4 < 0$	$x = 2$ $f'(2) = 6$
Criterio	Creciente	Decreciente	Creciente

Cuadro 7.2: Comportamiento de los intervalos de la función.

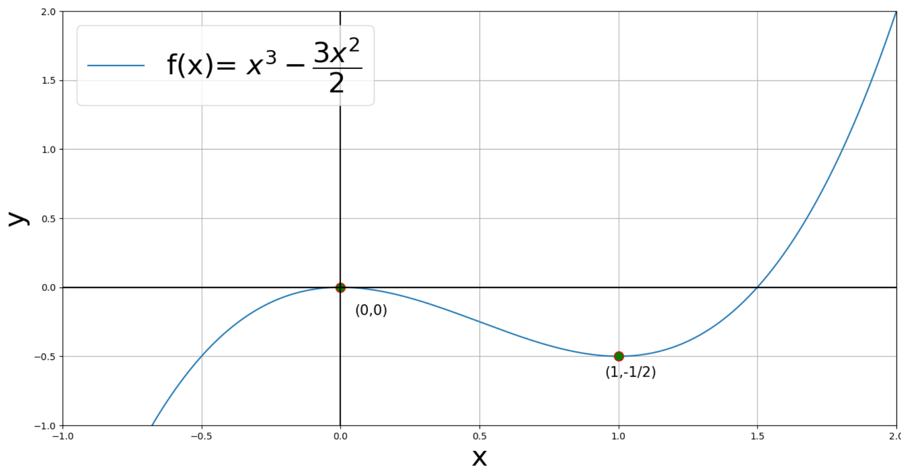

Figura 7.4: Gráfica de la función con los puntos críticos y sus cambios de comportamientos.

Por lo visto, lo que ocurre en los puntos críticos es que el signo de la derivada cambia, ya sea de positivo a negativo o viceversa. Entonces, si cambia de positivo a negativo es un máximo relativo y si cambia de negativo a positivo es un mínimo relativo o si tiene signos iguales antes y después del punto crítico no es ni máximo ni mínimo. Esto se le llama *criterio de la primera derivada*.

7.2.5. Concavidad y criterio de segunda derivada

Con el criterio de la primera derivada se puede saber si la función crece o decrece en los intervalos, pero no sabemos como crece. El criterio de la segunda derivada viene a dar respuesta a ese problema, si crecen o decrecen con una curva hacia arriba o hacia abajo.

La función es cóncava hacia arriba si la derivada $f'(x)$ es creciente en el intervalo de observación. En el caso en que la derivada es decreciente, la función es cóncava hacia abajo.

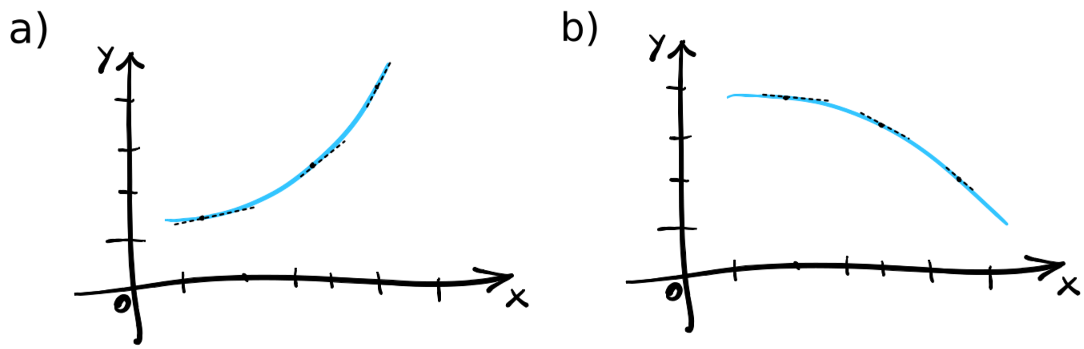

Figura 7.5: Concavidad de las funciones. a) Gráfica de una función con concavidad hacia arriba. b) Gráfica de una función con concavidad hacia abajo.

Definición 7.2.5 ***Criterio de concavidad.*** *Sea $f(x)$ una función que permite la segunda derivada definida en un intervalo I.*

- *Si $f''(x) > 0$ para todo x en el intervalo I, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba.*
- *Si $f''(x) < 0$ para todo x en el intervalo I, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo.*

Ahora visto el criterio, el procedimiento para encontrar los rangos de concavidad es el siguiente:

- Calcular la derivada de primer y segundo orden de la función $f(x)$.
- Encontrar las raíces de la expresión de la segunda derivada. Dividir los intervalos en función de las raíces encontradas.
- Evaluar con un x que se encuentre dentro de los intervalos y aplicar el criterio de concavidad.

Ejemplo 7.2.4 *Sea $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$. Encontrar la concavidad de sus intervalos.*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+1}{x^2-4} \\ f'(x) &= \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \\ f''(x) &= \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \end{aligned}$$

Los puntos críticos son $x = \pm 2$, por los que son 3 intervalos y se debe buscar tres concavidades.

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Signo de $f''(x)$	$x = -3$ $f''(x = -3) > 0$	$x = 0$ $f''(x = 0) < 0$	$x = 3$ $f''(3) > 0$
Criterio	C. hacia arriba	C. hacia abajo	C. hacia arriba

Cuadro 7.3: Comportamiento de los intervalos de la función.

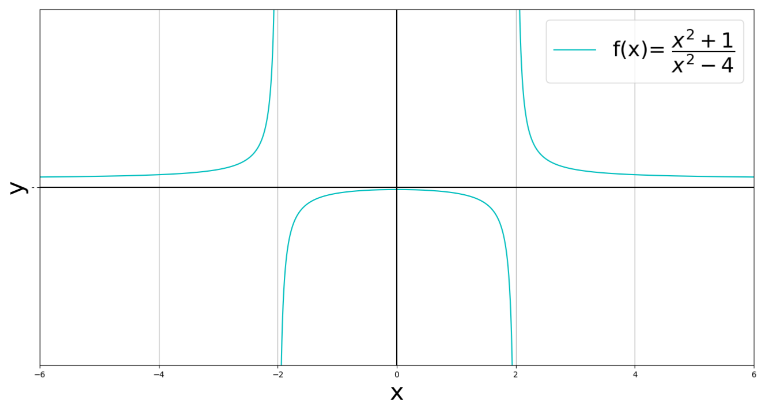

Figura 7.6: Gráfica de la función con las concavidades de cada intervalo.

Los puntos que hacen cambiar la concavidad de la función $f(x)$ se les llama puntos de inflexión, es cuando la concavidad cambia de arriba a abajo o de abajo hacia arriba. Estos puntos no necesariamente son igual a un punto de un máximo o mínimo relativo.

7.2.6. Criterio de la segunda derivada

Para finalizar esta sección seguiremos exprimiendo la segunda derivada de una función. Cuando calculamos la derivada de primer orden y obtenemos los puntos críticos, para saber si es máximo o mínimo debemos calcular y ver los cambios de concavidad. La derivada de segundo orden permite evaluar estos puntos en la expresión y determinar para ahorrar cálculos

Definición 7.2.6 ***Criterio de la segunda derivada.*** *Sea $f(x)$ una función definida en los números reales y que acepta derivadas de primer y segundo orden. Además, si $f(x)$ tiene como punto crítico al número c. Entonces, basandonos en el criterio de la segunda derivada se puede concluir lo siguiente sobre el punto c*

- *Si $f''(x) > 0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo en (c,f(c)).*
- *Si $f''(x) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo relativo en (c,f(c)).*

- *Si $f''(x) = 0$, el criterio falla y ahí hay que recurrir a la primera derivada y concavidad.*

Ejemplo 7.2.5 *Calcular los puntos críticos de $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ y decir si son máximos o mínimos.*

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^5 + 5x^3 \\ f'(x) &= -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2) \end{aligned}$$

Los puntos críticos son los valores $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. Entonces, ahora se deben evaluar en la segunda derivada de la función.

$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30x(1 - 2x^2)$$

Puntos	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
Signo de $f''(x)$	$x = -1$ $f''(x = -1) > 0$	$x = 0$ $f''(x = 0) < 0$	$x = 1$ $f''(1) < 0$
Criterio	Mínimo relativo	No entrega dato	Máximo relativo

Cuadro 7.4: Criterio de la segunda derivada.

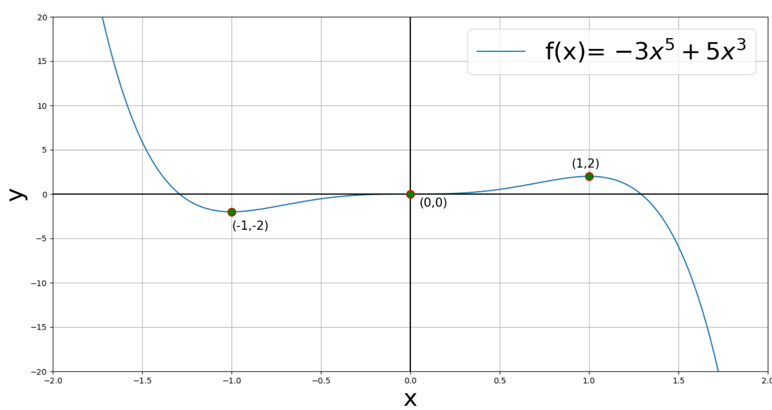

Figura 7.7: Gráfica de la función con los puntos críticos que demuestra el resultado del criterio de la segunda derivada.

Se ve que la función tiene un punto máximo y un punto mínimo, pero que además hay un punto que el criterio no entrega información.

Ejemplo 7.2.6 *Se debe elegir un fármaco en base a que su tiempo de máxima concentración sea en el menor tiempo posible (tiempo en horas) ¿Cuál de los siguientes fármacos debo elegir?*

$$C(t)_1 = t - 3t^3$$
$$C(t)_2 = 48t - t^3$$

Resp:
Derivadas del primer fármaco

$$\begin{aligned} C(t)_1 &= t - 3t^3 \\ C'(t)_1 &= 1 - 9t^2 \\ C''(t)_1 &= -18t \end{aligned}$$

De la derivada de primer orden obtenemos como punto crítico $t = \sqrt{1/9}$ de hora, se considera solo la raíz positiva ya que la unidad de medida es el tiempo. Ahora, lo evaluamos en la segunda derivada:

$$\begin{aligned} C''(t)_1 &= -18t \\ C''(1/3)_1 &= -18\left(\frac{1}{3}\right) = -6 \end{aligned}$$

Derivadas del segundo fármaco

$$\begin{aligned} C(t)_2 &= 48t - t^3 \\ C'(t)_2 &= 48 - 3t^2 \\ C''(t)_2 &= -6t \end{aligned}$$

De la primera derivada obtenemos el punto crítico $t = 4$, nuevamente solo consideramos el de signo positivo. Ahora se evalúa en la segunda derivada.

$$\begin{aligned} C''(t)_2 &= -6t \\ C''(4)_2 &= -6(4) \\ C''(4)_2 &= -24 \end{aligned}$$

Por el criterio de la segunda derivada ambos son máximos, pero el fármaco número 1 lo logra en menor tiempo y es el que se debe elegir.

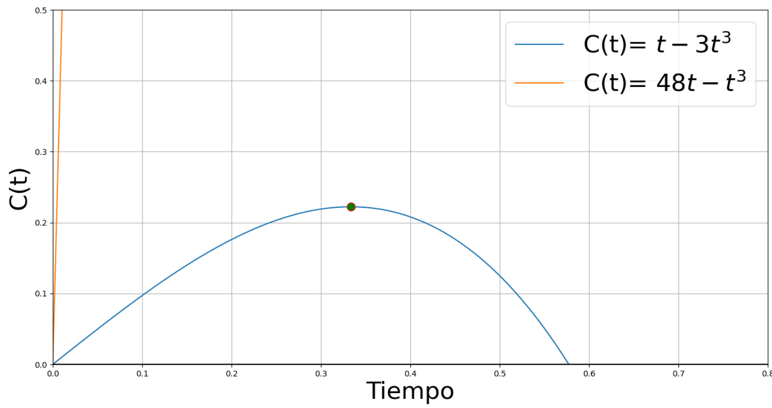

Figura 7.8: Gráfico de las funciones de concentración de los fármacos. El fármaco 1 (azul) llega mas rápido que el fármaco 2 (naranjo), aunque la concentración en el fármaco dos es mayor (no mostrada en la gráfica).

Ejemplo 7.2.7 *La presión arterial tiene un comportamiento periódico y se puede modelar (de forma muy sencilla) con un polinomio de la forma $ax^3 - bx^2 + cx$, donde a es la presión diastólica media (PD)*[1]*, b es la presión sistólica media (PS)*[2] *y c es la edad de la persona (E). Encuentre el máximo (El peak sistólico), el mínimo (El peak diastólico) y el punto de inflexión ($f''(x) = 0$) para el caso de una niña de 10 años con PD=120 y PS=80.*

Resp:
Derivadas de la función:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^3 - bx^2 + cx \\
f(x) &= 120x^3 - 80x^2 + 10x \\
f'(x) &= 360x^2 - 160x + 10 \\
f''(x) &= 720x - 160
\end{aligned}
$$

[1] Es la presión sobre las arterias cuando el corazón se relaja entre latidos, por lo tanto es el menor valor al momento de medir la presión arterial

[2] Es la presión ejercida cuando el corazón bombea la sangre, por lo tanto es el valor mas grande al momento de medir la presión

De la derivada de primer orden se obtienen de puntos críticos $x = \frac{2}{9} \pm \frac{\sqrt{7}}{18}$

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18}\right) &= 720\left(\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18}\right) - 160 \\ &= 40\sqrt{7} > 0 \end{aligned}$$

Análogamente con el otro punto

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18}\right) &= 720\left(\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18}\right) - 160 \\ &= -40\sqrt{7} < 0 \end{aligned}$$

$x = \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18}$ es un mínimo y $x = \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18}$ es máximo. Finalmente, se calcula en punto que cambia la concavidad, es decir, cuando la segunda derivada es cero.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 720x - 160 = 0 \\ x &= \frac{160}{720} \\ x &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

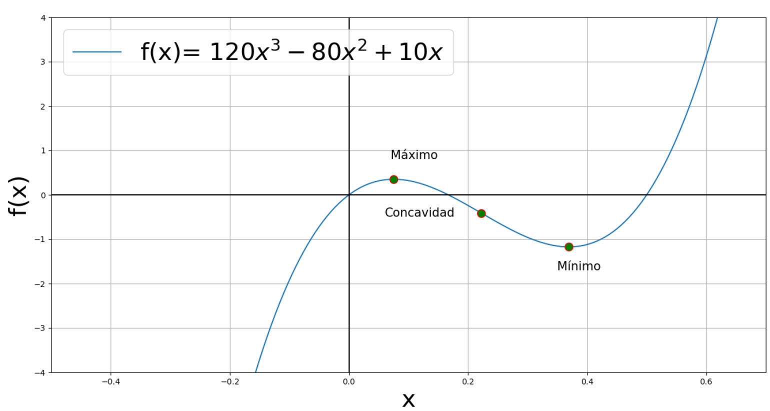

Figura 7.9: Gráfico del modelo polinómico (Bien simple) del periodo arterial. Los puntos verdes representan el máximo (Peak sistólico), el mínimo (Peak diastólico) y el cambio de concavidad.

7.3. Integrales

Con esta sección damos por finalizado el capítulo de cálculo, donde por tercera vez recurriremos a lo infinitesimal.

Hay instancias en que se busca calcular el área de alguna figura y esto no ha sido problema hasta el momento, porque las fórmulas de esas figuras las sabemos (el área de cuadrados, triángulos, trapecios, etc.), pero si se complica un poco la situación y la figura es más rara de lo que conocemos quedamos de brazos cruzados. Entonces, varios matemáticos como Isaac Newton[3] y Gottfried Leibniz[4] sementaron las bases del cálculo, entre ellos se pensó en dividir en partes pequeñas, muy pequeñas, para resolver este problema. No fue hasta Bernhard Riemann[5] que se formalizó la integración utilizando límites. La integral es el área bajo la curva que se dividió en rectángulos muy pequeños para luego sumar el área de todos ellos. Resulta que esa área se puede aproximar y queda la integral de la función. La representación de la figura (7.10) muestra como es una buena aproximación sumar los rectángulos de ancho dx y de alto $f(x)$.

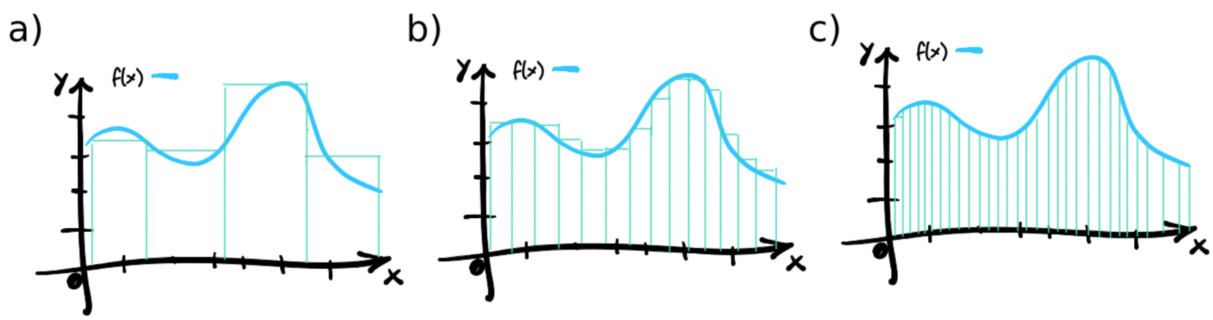

Figura 7.10: Representación gráfica de la integral. Desde la figura a) a la c) se va viendo como el rectángulo se hace más pequeño para que el área bajo la curva sea igual al área de la función.

Así como el función logarítmica y la función exponencial son funciones inversas, las derivadas y las integrales lo son. Cuando uno tiene una expresión $f(x)$ y se aplica una integración obtiene una expresión llamada la antiderivada y que si uno la deriva vuelve a la misma expresión inicial $f(x)$.

[3]Isaac Newton, Físico y matemático inglés. 1642-1727.

[4]Gottfried Wilhelm Leibniz, Matemático y teólogo alemán. 1649-1716. Introdujo el símbolo de la integral, que representa una S alargada, por la suma de las áreas.

[5]Bernhard Riemann, Matemático alemán. 1826-1866.

Definición 7.3.1 ***Antiderivada.*** *Sea F(x) y F'(x) su derivada que podemos llamar f(x), es decir, $F'(x) = f(x)$. Se dice que $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$.*

En el gráfico (c) de la figura (7.10) se ven varios rectángulos muy pequeños, entonces al momento de calcular el área se debe multiplicar la base que llamaremos dx por el alto, que es el valor de la función $f(x)$. El área de cada rectángulo es $f(x) \cdot dx$ y si los sumamos, aparece la expresión de la integral

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C \tag{7.26}$$

La ecuación (7.26) está confirmando que se suma el área de los rectángulos (símbolo de la integral). Además, como resultado entrega la antiderivada más una constante arbitraria. La constante muestra que hay varias soluciones para una misma integral, además se ve la relación que hay entre las derivadas e integrales como operaciones inversas.

Ejemplo 7.3.1 *Derivar e integrar las siguientes expresiones:*

$$\begin{array}{rcl}
f(x) = 50x^2 + x + 20 & y & g(x) = 50x^2 + x + 40 \\
f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = 100x + 1 & y & g'(x) = \dfrac{dg(x)}{dx} = 100x + 1 \\
\displaystyle\int f'(x)dx = \int (100x + 1)dx & y & \displaystyle\int g'(x)dx = \int (100x + 1)dx \\
50x^2 + x + C & y & 50x^2 + x + C
\end{array}$$

Para $f(x)$ la constante vale 20, mientras que para $g(x)$ vale 40. Entonces, de momento se obtiene una *familia de soluciones* cuando se integra, y se llama solución general.

7.3.1. Reglas de integración

a) Derivada de una integral:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x) \tag{7.27}$$

b) Integral del cero:

$$\int 0dx = C \tag{7.28}$$

c) Integral de una constante:

$$\int kdx = kx + C \tag{7.29}$$

d) Integral multiplicada por una constante:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \tag{7.30}$$

e) Integral de una suma o resta:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \tag{7.31}$$

e) Integral de una potencia:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \tag{7.32}$$

Donde n es número real.

f) Integral de una función exponencial. Caso particular donde la base es el número e y el exponente es un exponente de grado 1.

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{7.33}$$

g) Integral de una función exponencial. Caso particular en que el coeficiente n, que acompaña a la variable del exponente es $\neq 1$.

$$\int e^{nx} dx = \frac{e^{nx}}{n} + C \tag{7.34}$$

h) Integrales de las principales funciones trigonometricas

$$\int cos(x)dx = sen(x) + C; \int sen(x)dx = -cos(x) + C; \tag{7.35}$$

$$\int sec(x)^2 dx = tan(x) + C; \int sec(x)tan(x)dx = sec(x) + C \tag{7.36}$$

$$\int csc(x)^2 dx = -ctan(x) + C; \int csc(x)ctan(x)dx = -csc(x) + C \tag{7.37}$$

Ejemplo 7.3.2 *En base a las reglas mostradas anteriormente se resolverán las siguientes integrales:*

i)

$$\frac{d}{dx}\left[\int (2x^2)dx\right] = 2x^2$$

ii)

$$\int 5dx = 5x + C$$

iii)

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}}x^2dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int x^2dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^3}{3} + C\right] = \frac{x^3}{3\sqrt{2}} + C$$

Se debe notar que C es una constante y que si se multiplica por un factor, seguirá siendo una constante. Entonces, se puede seguir escribiendo como C o cambiar de letra la constante y no se pierde generalidad.
iv)

$$\begin{aligned}\int (6x^3 + 7x^2)dx = \int 6x^3dx + \int 7x^2dx &= 6\left[\frac{x^4}{4} + C\right] + 7\left[\frac{x^3}{3} + D\right] \\ &= \frac{6x^4}{4} + C + \frac{7x^3}{3} + D \\ &= \frac{6x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} + E, \qquad C + D = E\end{aligned}$$

v)

$$\int 5x^3dx = \frac{5x^4}{4} + C$$

vi)

$$\begin{aligned}\int (4x^2 + 3x)dx &= \int 4x^2dx + \int 3xdx \\ &= \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C\end{aligned}$$

vii)

$$\int e^xdx = e^x + C$$

viii)

$$\int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

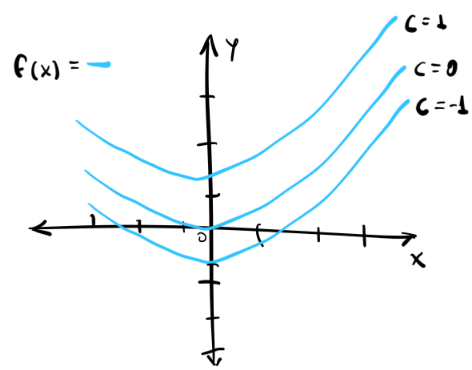

Figura 7.11: Casos de la función $f(x)$ del ejemplo (7.3.3) para tres valores distintos de la constante C.

En el ejemplo (7.27) se ve y se menciona que para funciones distintas, $f(x)$ y $g(x)$, se encuentran la misma antiderivada. La diferencia la marca la constante C, que tiene valores distintos. Entonces, se encuentran funciones que están desplazas por una cantidad C. Para encontrar el valor de esta constante se necesita información adicional, a la cual se llaman condiones iniciales. Consta de saber el valor de la función para un determinado valor de x, y luego despejar la constante C.

Ejemplo 7.3.3 *Sea $f(x) = x^2 + 5x$, encuentre la solución general de la integral de $f(x)$*

$$\int (x^2 + 5x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C$$

Ejemplo 7.3.4 *El decaimiento de un medicamento a través del tiempo (la razón de cambio) está dado por la expresión $df(x)/dx = e^{-\kappa t}$, donde la cosntante de decrecimiento está dado $\kappa = 2$. Además se sabe que el tiempo inicial ($t = 0$) hay 100ml del medicamento. Integrar la derivada y econtrar la constante C.*

$$\begin{aligned} \int \frac{df(x)}{x} &= e^{-\kappa t} + C \\ &= e^{-2t} + C \end{aligned}$$

Se agrega la condición inicial para el tiempo inicial ($t = 0$)

$$\begin{aligned} e^{-2\cdot 0} + C &= 100 \\ 1 + C &= 100 \\ C = 99 \end{aligned}$$

7.3.2. Integrales definidas y teorema fundamental del cálculo

En la sección anterior se vieron las integrales indefinidas y sus reglas de integración, pero usualmente uno necesita agregar limites para obtener un resultado con sentido en los problemas (tiempo, metros, litros, etc), lo que permite definir un rango de integración y en ese caso, la integral pasa llamarse *integral definida*. Los límites entre los cuales quiero integrar se llaman límites de integración.

Definición 7.3.2 ***Teorema fundamental del cálculo.*** *Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y F es la antiderivada de la función f(x) en el intervalo $[a,b]$, entonces se cumple lo siguiente:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad o \qquad -\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) \tag{7.38}$$

Se puede resumir en que se debe integrar la función con las reglas ya vistas para luego evaluar la función con los límites de integración. El procedimiento es evaluar el valor más grande menos el valor más pequeño.

Ejemplo 7.3.5 *Calcular las integrales definidas en el intervalo* $[1,3]$.

i)

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x^3dx &= \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 \\
&= \left[\frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right] \\
&= \left[\frac{81}{4} - \frac{1}{4}\right] \\
&= \left[\frac{80}{4}\right] \\
&= 20
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (2x^3 - e^x)dx &= 2\int_1^3 x^3dx - \int_1^3 e^xdx \\
&= 2\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 - \left.e^x\right|_1^3 \\
&= \frac{1}{2}\left[3^4 - 1^4\right] - \left[e^3 - e^1\right] \\
&= 40 - e^3 + e^1 \\
&= 40 - e^1(e^2 - 1)
\end{aligned}$$

7.3.3. Teorema de valor medio para integrales

Cuando se establecen los rectángulos de ancho dx ocurre que algunos quedan dentro de la función y otros fuera (ver figura 7.10). El teorema fundamental del valor medio para integrales establece que existe un valor del dominio c que al evaluarlo en la función $f(c)$ es igual al área bajo la curva.

Definición 7.3.3 ***Teorema de valor medio para integrales.*** *Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a,b]$, tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \tag{7.39}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \tag{7.40}$$

El término $f(c)$ que da como resultado el teorema se le llama valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.

Ejemplo 7.3.6 *Determinar el valor medio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1,4]$.*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{4-1}\int_1^4 (3x^2-2x)dx \\
&= \frac{1}{3}\left[x^3 - x^2\right]\Big|_1^4 \\
&= \frac{1}{3}[64 - 16 - (1-1)] \\
&= \frac{48}{3} \\
&= 16
\end{aligned}$$

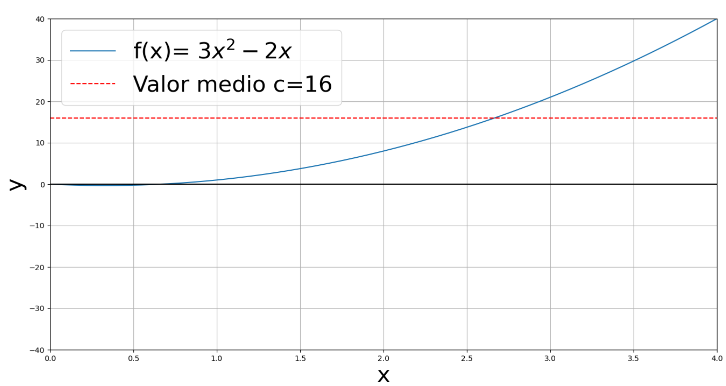

Figura 7.12: Representación gráfica del valor medio de la función.

Ejemplo 7.3.7 *A un paciente se le inyecta 2 miligramos de un medicamento a la vena. La cantidad de medicamento que se queda en la sangre después de t horas está dado por* $f(t) = f_0 e^{-0{,}32 \cdot t}$*, donde* f_0 *es la cantidad inicial del medicamento. Encuentre la cantidad promedio de medicamento en la sangre solamente de la segunda hora.*

$$
\begin{aligned}
f(c) &= \frac{1}{2-1}\int_1^2 2e^{-0{,}32\cdot t}dt \\
&= 2\left[\frac{e^{-0{,}32\cdot t}}{-0,32}\right] \\
&= \frac{2}{-0,32}\left[e^{-0{,}32\cdot t}\right]\Bigg|_1^2 \\
&= \frac{2}{-0,32}\left[e^{-0{,}32\cdot 2} - e^{-0{,}32\cdot 1}\right] \\
&= \frac{2\cdot e^{-0{,}32}}{-0,32}\left[e^{-0{,}32} - 1\right]
\end{aligned}
$$

Apéndice A

Completación del cuadrado

Hay casos en que los polinomios de grado dos se pueden escribir de la forma $(x+a)^2$, pero en los otros casos se puede forzar y quedan de la forma $(x+a)^2+b$. Para llegar al resultado se debe adicionar y restar el mismo término, el cual uno queda para formar el binomio y el otro queda fuera del paréntesis que está elevado al cuadrado.

Sea un polinomio de grado dos de la forma $f(x) = ax^2+bx+c = 0$ con $a \neq 0$, al cuál se le busca completar cuadrado.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0 && \text{(A.1)}\\
ax^2+bx &= -c, \quad / \cdot \frac{1}{a} && \text{(A.2)}\\
x^2+\frac{bx}{a} &= -\frac{c}{a} && \text{(A.3)}\\
x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 && \text{(A.4)}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} && \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

Lo primero fue despejar la constante c, por lo que las variables quedaron de un lado y los números por el otro. Luego se dividió por el termino principal de la incógnita de orden dos (x^2). Finalmente, se sumo y resto el término $(b/2a)^2$ para así forzar que se puede formar el cuadrado de binomio. A continuación veremos un ejemplo utilizando la fórmula (A.5).

Ejemplo A.0.1 *Sea* $f(x) = 3x^2 - 5x + 2 = 0$ *un polinomio de orden y se debe completar cuadrado.*

$$
\begin{aligned}
x^2 - \frac{5x}{3} + \frac{2}{3} &= 0 \\
x^2 - \frac{5x}{3} &= -\frac{2}{3} \\
x^2 - \frac{5x}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 &= \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} \\
\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{25}{36} - \frac{2}{3} \\
\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

Referencias

[1] Jacqueline M. Dewar Dennis G. Zill. *Álgebra, trogonometría y geometría analítica.* McGraw-Hill, 2012..

[2] Bruce H. Edwards Ron Larson. *Cálculo I.* McGraw-Hill, 2012.

[3] Murray R. Spiegel. *Schaum's outline of theory and problems of vector analysis and an introduction to tensor.* McGraw-Hill, 1968.

[4] Leonid Hanin Wai-Yuan. *Handbook of cancer with applications.* World Scientific Publishing, 2008.

[5] Myriam Ortega Saavedra and Miryam Vicente Parada. *Algebra y trigonometría.* Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, 2003.