איתמר קרמן
208925578

שאלה 1

1) נראה שהטענה נכונה.

לפי התנאי - הפונקציות והיחס ביניהן שואף לקבוע או לאינסוף.
לכן נוכיח כי הטענה נכונה בכל המקרים:

מקרה א: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ולכן לפי הגדרה $f(x) = O(g(x))$

מקרה ב: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ כאשר c הוא קבוע בין 0 ל-∞ אזי $f(x) = \Theta(g(x))$
לפי הגדרה. Θ הוא חסם הדוק ולכן הוא גם O.

מקרה ג: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ ולכן $f(x) \neq O(g(x))$.
במקרה זה, נראה כי $f(x)$ גדלה ממש בסדר גודל מ- $g(x)$ ולכן הגבול ~~שואף~~ שואף לאינסוף.
אך אם נהפוך נקבל-
$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ בגלל התנאי הנ"ל ואז- $g(x) = O(f(x))$

אם כן הראינו שבכל המקרים $f(x) = O(g(x))$ או $g(x) = O(f(x))$ עבור פונקציות מוגדרות לפי התנאי.

מש"ל

איתמר קרמין
208925478

ג) נטען שהטענה נכונה.

נניח בש' השלילה ש- $f(x)<g(x)$.
נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה ולכן מתקיים. $f(x)+g(x) \ngeq c\cdot(f(x)\cdot g(x))$

$$f(x) < c\cdot(f(x)\cdot g(x)) - g(x)$$

$$f(x) < g(x)\cdot(c\cdot f(x) - 1)$$

אך כי התנאי, $f(x) \geq 1$ ולכן עבור $c>0$ נקבל $c\cdot f(x)-1 \geq 1$.
נגדיר את c' להיות $c\cdot f(x)-1$ ואז נקבל $f(x) < g(x)\cdot c'$.
וזוהי סתירה להנחה ש- $f(x)<g(x)$, ולכן הטענה נכונה.

מ.ש.ל.

ד) נטען שהטענה נכונה.
נטען שקיימת פונקציה עבורה לכל קבוע k מתקיים $f(x-k) \neq O(f(x))$.
נסתכל על הפונקציה $f(x)=4^{x^2}$ אז הפונקציה $f(x-k)=4^{(x-k)^2}$.
נשים לב עבור $f(x-k)$ שמתקיים:

$$f(x-k)=4^{(x-k)^2}=4^{x^2-2xk+k^2}=4^{x^2}\underbrace{\cdot}_{\text{חוק חזקות}}4^{-2xk+k^2}=f(x)\cdot 4^{-2xk+k^2}>f(x)$$

ומכאן לכל k ש- $f(x-k)$ גדולה מ- $f(x)$ ולכן מתקיים ש- $f(x-k)\neq O(f(x))$.

מ.ש.ל.

בס"ד

אמאר חריש
208925577

שאלה 2

א)

נטען כי
$f_6 \in O(f_3)$
$f_3 \in O(f_4)$
$f_4 \in O(f_5)$
$f_5 \in O(f_1)$
$f_1 \in O(f_2)$

לכן סדר הפונקציות יהיה $f_6, f_3, f_4, f_5, f_1, f_2$
קטנה ... גדולה

* שלב: $f_6 \in O(f_3)$
עבור $f_6 = 2021$ ו- $f_3 = 2^{\log_3 n}$, נראה כי קיימים c, n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $|f_6| \le c\cdot(f_2)$.

~~נשים לב כי~~ ~~$2^{\log_3 x} = 2^{\frac{\log_2 x}{\log_2 3}} = (2^{\log_2 x})^{\frac{1}{\log_2 3}} = x^{\frac{1}{1.584}}$~~

$$f_6 = 2021 < 2048 = 2^{11} = 2^{\log_3 177147}$$

אם, עבור $n_0 = 177147$ ו- $c = 1$ נקבל כי $f_6 \in O(f_3)$.
מש"ל

* שלב: $f_3 = O(f_4)$
עבור $f_3 = 2^{\log_3 n}$ ו- $f_4 = n^2 + n\log(n^{10}) + n + 5$, נראה כי קיימים c, n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $|f_3| \le c\cdot|f_4|$.

תחילה נשים לב כי-
$$2^{\log_3 n} = 2^{\frac{\log_2 n}{\log_2 3}} = (2^{\log_2 n})^{\frac{1}{\log_2 3}} = n^{\frac{1}{\log_2 3}}$$

שנית לפי זה כי:
$f_3 = O(n^2)$ מכיוון ש- לכל n שקיים $n^{0.6309} < n^2$ לכן עבור $c = 1$.

כעת נראה ש $n^2 = O(f_4)$.

ניתן לראות זאת מכיוון שכל האיברים ב- f_4 חיוביים מתקיים - $n^2 < n^2 + n\log(n^{10}) + n + 5$
לכן עבור $n_0 = 1$ ו- $c = 1$ יתקיים האי שוויון.

מכאן ניתן להסיק כי $f_3 = O(n^2) = O(f_4)$

מש"ל.

[illegible]
208425578

ⓐ **טענה:** $f_4 = O(f_5)$

עבור $f_4 = n^2+n\log(n^{10})+5$ ו- $f_5 = 4^n$. ~~נמצא n_0 ו- C קבועים כך שמתקיים~~ ~~$|f_4| \le C\cdot|f_5|$~~

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n\cdot\log(n^{10})+5}{4^n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}} \frac{2n+10\cdot\log n+\frac{10}{\ln 2}+1}{n\cdot 4^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}} \frac{2+\frac{10}{n\log(2)}-\frac{10}{n^2\log(2)}}{n\cdot(n-1)\cdot 4^{n-2}}$$

שואף ל-0   שואף ל-0

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+0-0}{n\cdot(n-1)\cdot 4^{n-2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

מכאן נובע כי- $f_4 = O(f_5)$

מ.ש.ל

ⓑ **טענה:** $f_5 = O(f_1)$, נמצא $C>0$ ו- $n_0>0$ כך שמתקיים

$$|f_5| \le C\cdot|f_1|$$

עבור $f_1 = n!$ ו- $f_5 = 4^n$, נראה כי עבור $n_0 = 8$ נקבל - ~~$8! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8$~~

$8! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = 40320$

וכן, $4^8 = 65536$, אך עבור $n_0 = 9$ נקבל:

וכן, $9! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 = 362880$ וכן $4^9 = 262144$, לכן ניתן לראות כי עבור $n_0 = 9$

ו- $C = 1$ נקבל כי $4^9 < 1\cdot 9!$ לכן $|f_5| \le C\cdot|f_1|$.

מ.ש.ל

ⓒ **טענה:** $f_1 = O(f_2)$

עבור $f_1 = n!$ ו $f_2 = n^n$ נמצא $n_0>0$ ו- $C>0$ כך שמתקיים

$$f_1 \le C\cdot f_2$$

שים לב כי- $n^n = \underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{n \text{ איברים}}$ וכן- $n! = \underbrace{1\cdot2\cdot3\cdots n}_{n \text{ איברים}}$

ניתן לראות שכל איבר ב- n^n גדול או שווה לאיבר המקביל לו ב- $n!$, לכן ניתן לקבוע כי עבור $C=1$, $n_0 = 1$ מתקיים- $|f_1| \le C\cdot|f_2|$.

מ.ש.ל

בס״ד

עומר קרמן
208425578

שאלה 3

⊕ נסתכל על הפונקציה foo.

נסתכל על הלולאה החיצונית, בכל איטרציה i קטן ב- $\frac{n}{2}$ כאשר הוא מתחיל ב- n. לכן לאחר איטרציה אחת ערכו יהיה $\frac{n}{2}$. לאחר מכן ערכו יהיה 0 והלולאה תסתיים. לכן הלולאה רצה **פעמיים** בלבד וסמנה הוא $T(2)$.

כעת נסתכל על הלולאה הפנימית, נשים לב כי j קטן פי 2 כל פעם $\frac{j}{2}$ כאשר $n=j$ לכן קטן פי $\frac{n}{2}$ עד אשר $j\leq 2$, לכן:

$$j=n \to \frac{n}{2} \to \frac{n}{4} \dots \to \frac{n}{2^k}$$

לכן -

$$\frac{n}{2^k}=2$$

$$\frac{n}{2}=2^k$$

$k=\log_2\frac{n}{2}$ ובסך הכל זמן ריצה הוא $T(\log n)$.

מכאן שיש לנו חוק הרקורסיבי:

$$T(n)=2\cdot\log n+T(\tfrac{n}{2})$$

$$=2\cdot\log n+[2\cdot\log\tfrac{n}{2}+T(\tfrac{n}{4})]$$

$$=2\cdot\log n+2\cdot\log\tfrac{n}{2}+[2\cdot\log\tfrac{n}{4}+T(\tfrac{n}{8})]\Rightarrow 2\cdot k\cdot\log n+T(\tfrac{n}{2^k})$$

דבר זה מתקיים עד אשר

$$\frac{n}{2^k}\leq 2$$

$$\frac{n}{2}\leq 2^k$$

$$O(\log n)=\log_2\frac{n}{2}\leq k$$

ובסך הכל -

$$T(n)=2\cdot\log n\cdot\log n+O(\log n)=\underline{O(2\log n^2)}$$

המשך שאלה 3

איתמר קרמין
208925578

⊛ נסתכל על foo2.

ראשית, שים לב שהלולאה החיצונית רצה מ $i=n$ עד $i=3$ ובסך הכל $n-3$ לכן - $O(n)$.

שנית, שים לב שהלולאה האמצעית רצה כל פעם מ- $j=1$ עד $j=\log(i)$, ובמקרה "הגרוע" $i=n$ ולכן בסך הכל $O(\log n)$.

כמו כן, שים לב שהלולאה הפנימית רצה מ- $t=0$ עד $t=0$ בקפיצות של j כאשר j, מה שאומר בכל פעם, לכן הלולאה תלויה ב- j וגם ב- n. במקרה "הגרוע" בו $j=1$ הלולאה תרוץ n פעמים. לכן ניתן לומר כי: $k\cdot j = t = n \Rightarrow k = \frac{n}{j}$, מכיוון שכל פעם t גדל ב- j, מהדבר הזה התנאי שכתוב חוסם ב- $\Theta(\log n)$. מתוך ההרצאה על סכומים.

ובסך הכל:

$$\cancel{T(n) = O(n) \cdot O(\log n) \cdot \Theta(\log n) = \Theta(n \log\log n}$$

$$T(n) = \sum_{i=3}^{n} \sum_{j=1}^{\log i} \frac{n}{j} = \sum_{i=3}^{n} \log(\log n) = n \cdot \log(\log n) = O(n \log\log n)$$