מטלה 2- איתמר קרייטמן ת.ז 208925578

שאלה 1

1. סדר הגודל במקרה הטוב ביותר הוא: $O(log\ n)$. במקרה בו האיבר החציוני (חצי מהאבירים קטנים ממנו וחצי גדולים) ימוקם בתחילת המערך (מקום 0). לאחר איטרציה ראשונה ימוקם באמצע המערך, והרקורסיה תתבצע עבור המקום של החציון פחות 1, תחלק ב2, וחוזר חלילה עד שתסיים במערך בגודל 1. אותו הדבר יקרה עבור הצד הימני. לכן, בסך הכל: $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) \times T\left(\frac{n}{4}\right) ... = T\left(\frac{n}{2^k}\right)$. תנאי העצירה הוא $n = 1$.

ולכן:
$$\frac{n}{2^k} = 1$$
$$n = 2^k$$
$$log\ n\ =\ k$$

לכן עומק הרקורסיה הוא $O(log\ n)$.

סדר גדל במקרה הגרוע ביותר הוא: $O(n)$. במקרה בו המערך ממויין, הקריאה הרקורסיבית תתבצע בכל פעם על תת מערך בגודל קטן ב- 1 מהקריאה הקודמת, עד מערך בגודל 1 עבורו תנאי הלולאה אינו מתקיים, ובסך הכל n פעמים.לדוגמא, עבור מערך בגודל, הרקורסיה תתבצע עבור $n = 5$, $n = 4$, $n = 3$ ... $n = 1$. לכן בסך הכל מדובר על עומק רקורסיה של $O(n)$.

2. עומק הרקורסיה המתקבל במקרה הגרוע הוא $O(log\ n)$.

נשים לב, שהתנאי במימוש המוצע בודק האם $p < \frac{low + high}{2}$. לכן המקרה הגרוע ביותר יהיה בו **תמיד** $p = \frac{low + high}{2}$, מכיוון שהתנאי תמיד יכשל ויתבצעו הפקודות ב-else. לכן, מכיוון שp נמצא כל פעם באמצע המערך בכל קריאה המערך יצטמצם פי 2 ובסך הכל: $\frac{low\ +\ high}{2^k}$ ובסך הכל: O(log n).

שאלה 2

1. $\frac{n + 1}{2}$.

נשים לב, שלפי הקוד של ענת, במקרה הגרוע ביותר יהיו n חילופים, כאשר n במקום length -1. נשים לב, כי ישנן $(n-1)!$ פרמוטציות אפשריות לסידור המערך בצורה כזאת, וכן, עבור כל איבר מ1 ועד n-1 יהיו גם $(n-1)!$ פרמוטציות אפשריות לסידור המערך עבור כל איבר במערך. בכל איטרציה יתבצעו n-1 חילופים ובנוסף, בסוף כל איטרציה יתבצע חילוף נוסף ללא קשר ללואה ובסך הכל עוד n! חילופים. לכן, על מנת לחשב את ממוצע החילופים נחבר בין כל הפרמוטציות האפשריות ונחלק במספר כל האפשרויות ונקבל-

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i \cdot (n-1)! +\ n!}{n!} = \frac{(n-1)!\ \cdot \sum_{i=1}^{n} i + n!}{n!} = \frac{(n-1)! \cdot \sum_{i=1}^{n} i}{(n-1)! \cdot n} + \frac{n!}{n!} =$$

$$= \frac{(n-1)(1+n-1)}{n \cdot 2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

2. נחשב את ממוצע החילופים עבור האלגוריתם של יוסי. נשים לב כי במקרה הגרוע, i מתחיל כ-low-1 וj מתחיל כ+1 high (מאפיין שמשותף לכל המקרים, לא רק למקרה הגרוע) ואז, בכל קריאה לרקורסיה, i יעלה ב1 בלבד, ו -- j ירד ב1 בלבד, ואז המרחק ביניהם יהיה n-1 ויתבצע חילוף, עד אשר i יעקוף את j לאחר $\frac{n-1}{2}$ חילופים, ובנוסף עוד חילוף לאחר היציאה מהלולאה. ולכן בסך הכל $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n-1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{n-1+2}{2} = \frac{n+1}{2}$ חילופים לכן ניתן להסיק, שסך החילופים המקסימלי במקרה הגרוע הוא $\frac{n+1}{2}$. קיבלנו כי מספר החילופים עבור יוסי במקרה **הגרוע** ביותר הוא $\frac{n+1}{2}$ לכן בבירור ממוצע החילופים הכללי הוא קטן מכך, ולכן בבירור ממוצע החילופים הכללי של יוסי קטן מממוצע החילופים הכללי של ענת שהוא כידוע מסעיף 1 $\frac{n+1}{2}$.

3. ראשית נסתכל על האלגוריתם של ענת:

בהינתן מערך שכולו אפסים, התנאי $pivot \ => \ arr[j]$ תמיד יתקיים, לכן תמיד בסוף כל קריאה i יהיה שווה לגודל המערך, עד אשר תת המערך יהיה בגודל 1, ולכן בסך הכל: $i = length$.

$$\sum_{i=1}^{n} n-i = n+n-1+n-2+ \ldots \ +1 = \frac{n \cdot 1}{2} = \frac{n}{2} = O\left(\frac{n}{2}\right) = O(n)$$

מכיוון שעבור מיון מהיר, במקרה הגרוע יתבצעו $O(n)$ קריאות רקורסיביות, ולכן בסך הכל $O(n) \cdot O(n) = O\left(n^2\right)$.

כעת נסתכל על האלגוריתם של יוסי, נשים לב שהתנאי עבור i תמיד יתקיים עד שi יהיה שווה לגודל המערך, ולכן בכל קריאה לרקורסיה סדר הגודל יהיה O(n). נשים לב שכאמור זמן הריצה של מיון מהיר הוא במקרה הגרוע O(n), ולכן בסך הכל: $O(n) \cdot O(n) = O\left(n^2\right)$.