

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה להנדסת חשמל ע"ש אנדרו וארנה ויטרבי
המעבדה לראייה ומדעי התמונה

דו"ח סיכום פרויקט: ב'

טומוגרפיה באמצעות פירוק לסדרי פיזור
Tomography through Successive Orders of
Scattering

מבצעים:

Asaf Gendler

אסף גנדלר

מנחה:

Prof. Yoav Schechner

פרופ' יואב שכנר

סמסטר רישום: אביב תש"פ

תאריך הגשה: אוקטובר, 2020

בשיתוף פעולה עם:

Mr. Ido Czerninski

מר עידו צ'רנינסקי

תודות

ברצוני להודות מקרב לב למנחה הפרויקט פרופ' יואב שכנר שתמך והנחה לאורך כל הדרך.
תודה למר עידו צ'רנינסקי על הליווי הצמוד לאורך כל הפרויקט ושיתוף רעיונות מתמיד.
תודה לגברת תמר לאוב על מתן הקודים הראשונים לתחילת הפרויקט.
תודה למר ואדים הולודובסקי על עזרה ראשונית בהבנת התיאוריה.

תוכן עניינים

1. רקע 1	
1.1 מוטיבציה לפרוייקט	1.....1
1.2 מטרת הפרוייקט	2.....2
1.3 טומוגרפיה	2.....2
1.4 הגדרות ומושגים	5.....5
2. סקר ספרות 7	
2.1 פתרון משוואות הקרינה	7.....7
2.2 טומוגרפיה ליניארית	10.....10
2.3 טומוגרפיה סטוכסטית	11.....11
3. פתרון נבחר 14	
3.1 מוטיבציה, בעיות בשיטה הנוכחית	14.....14
3.2 אינטגרל על מסלולים	15.....15
3.3 דגימה מפילוג כלשהו	16.....16
3.4 פונקציית הצפיפות של מסלול הפוטון	17.....17
18	
3.5 חלוקה לסדרי פיזור	19.....19
3.6 בחירת הכמות הנדגמת מכל סדר	21.....21
3.7 דגימה אחידה בחד מימד ותוצאות	23.....23
3.8 בעיות בדגימה אחידה בדו מימד	27.....27
3.9 דגימת מסלול איטרטיבית קלה	28.....28
3.10 מפתחים של המצלמות	31.....31
3.11 פתרון הבעייה ההופכית	33.....33
3.12 פתרון הבעייה ההופכית עם חלוקה לסדרי פיזור	35.....35
3.13 פתרון הבעייה ההופכית עם מספר מצלמות	35.....35

4.	תוצאות.....	36
4.1.	תוצאות מודל קדמי דו מימד.....	36
4.2.	תוצאות שחזור דו מימד.....	40
		43
5.	סיכום ומסקנות.....	49
6.	Bibliography.....	50

רשימת איורים

1	איור 1 - פרוייקט החלל
2	איור 2 - חלוקת האובייקט לווקסלים, מקדם הניחות אחיד בכל ווקסל
3	איור 3 - תנועת פוטונים בליסטיים
4	איור 4 - תנועה דיפוזיבית בעקבות פיזור
4	איור 5 - פוטונים נבלעים בחומר
6	איור 6 - דוגמא לשתי פונקציות פאזה מוכרות, מיי וריילי
7	איור 7 - תרומת הרכיב הישיר
8	איור 8 - תרומת נקודה כלשהי על הקרן אשר רואה המצלמה לרכיב אשר עבר פיזור
9	איור 9 - משוואת הקרינה הכוללת, קרדיט ל [2]
10	איור 10 - טומוגרפיה ליניארית קרדיט ל [6]
18	איור 11 - צפיפות של הסגמנט הראשון במסלול
18	איור 12 - צפיפות של המקטע השני במסלול
19	איור 13 - צפיפות של המקטע האחרון במסלול
23	איור 14 - תרחיש חד ממדי
24	איור 15 - דגימה אחידה בחד מימד
24	איור 16 - תרחיש חד ממדי תווך אחיד
25	איור 17 - תרחיש חד ממדי תווך אחיד תוצאות
25	איור 18 - תרחיש חד ממדי מורכב
26	איור 19 - תרחיש חד ממדי מודל מורכב, תוצאות
27	איור 20 - תרחיש דו ממדי
31	איור 21 - מפתחים של מצלמות
32	איור 22 - מצלמת חריר עם פוטון שנקלט בפיקסל 4
36	איור 23 - מודל קדמי, תווך דו ממדי אחיד
37	איור 24 - תוצאות מודל קדמי תווך דו ממדי אחיד
38	איור 25 - תרחיש דו ממדי מורכב
39	איור 26 - תוצאות תרחיש דו ממדי מורכב
40	איור 27 - תרחיש שחזור תווך אחיד, המפתחים של כל המצלמות זהים
41	איור 28 - אתחול האלגוריתם לעומת הערכים האמיתיים
42	איור 29 - תוצאות האלגוריתם תווך אחיד
42	איור 30 - סכום השגיאות הריבועיות על מקדמי הניחות

43.....	איור 31 - השגיאה הריבועית של כל מקדם ניחות בנפרד
43.....	איור 32 - התקדמות הערכים של מקדמי הניחות
44.....	איור 33 - תרחיש שחזור דו ממדי מורכב
45.....	איור 34 - אתחול תרחיש שחזור דו ממדי מורכב
46.....	איור 35 - תוצאת שחזור תרחיש דו ממדי מורכב
46.....	איור 36 - סכום השגיאות הריבועיות על מקדמי הניחות תרחיש מורכב
47.....	איור 37 - השגיאה הריבועית של כל מקדם ניחות בנפרד, תרחיש מורכב
47.....	איור 38 - התקדמות הערכים של מקדמי הניחות תרחיש מורכב
48.....	איור 39 - ערך פונקציית המחיר עם התקדמות האיטרציות

רשימת קיצורים

CDF - Cumulative distribution function

CT – Computed Tomography

DC – Direct Component

SC – Scattered Component

SGD – Stochastic Gradient Decent

$1D$ – One dimensional.

$2D$ – Two dimensional.

רשימת סימונים

β - extinction coefficient

$\vec{\beta}$ - Column-stack vector representation of all extinction coefficients in the medium.

$\vec{\beta}_j$ - the j -th extinction coefficient in the medium.

$\vec{\beta}^*$ - Column-stack vector of extinction coefficients that minimizes the loss function.

$\beta(x)$ - extinction coefficient at position x.

β_k - extinction coefficient at k -th scattering point.

λ - Lagrange multiplier.

σ - extinction cross section

σ_k - standard deviation of estimator for k-th scattering order component.

$\hat{\sigma}_k$ - estimation of the standard deviation of estimator for k-th scattering order component.

τ - optical distance

ω_{in} - direction vector before scattering

ω_{out} - direction vector after scattering.

ω_0 - initial direction of photon.

$\bar{\omega}$ - single scattering albedo

$\bar{\omega}_k$ – single scattering albedo at k -th scattering point.

Ω – a random variable that represent the scattering angle.

A – a matrix that represent a linear operator.

c – camera index.

D_τ – random variable that represents optical depth until interaction.

D_B – random variable that represents the distance sampled on the line to border.

D_L - random variable that represents length until interaction.

$E[X]$ – Expected value of X .

$Exp(\lambda)$ – Exponential distribution with parameter λ .

$F(X)$ - Cumulative distribution function (CDF) of random variable X .

$F_D(\tau)$ – CDF of optical depth.

$F_L(\ell)$ - true CDF of photon paths

$f_L(\ell)$ - true pdf of photon paths.

$I(X, \omega)$ – radiance field.

$I(\vec{\beta})$ – the forward model image given a vector of extinction coefficients.

I_0 – Initial photon-packet intensity.

I_c – the image captured by camera c.

\hat{I}_c – estimated image captured by camera c as a result of the forward model.

\hat{I}_{ck} – estimated component captured by the camera that was created from photons that scattered k times.

I_p – energy of photon.

$J(X, \omega)$ – In-scattering field.

k – scattering order index.

L – a random variable that represents a path a photon has performed.

L_{β_j} – the distance a photon propagated in the j -th voxel.

L_B – distance between current photon position to the boundary, on the line of movement.

L_{B_l} – distance to border at l -th scattering point.

\mathcal{L} – Space of all possible photons paths.

\mathcal{L}_d – Space of all possible photons paths that finish at the camera.

\mathcal{L}_{dk} – Space of all possible photons paths that have k scattering events and finish at camera.

\mathcal{L}_k – Space of all possible photons paths that have k scattering events.

m – index of photon from k -th scattering order.

N_c – Number of cameras.

N_p – Number of generated photons.

N_{p_k} – Number of photons generated with k scattering events.

N_s – maximum allowed number of scattering events at the simulation.

n – Aerosol particle density.

P_i – pixel number i at camera.

$P(\omega_{in}, \omega_{out})$ - General phase function.

$P(x_{i-1} \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1})$ – Phase function between the two vectors defined the three points.

$P(X)$ – Probability of event X to happen.

p – index of photon at simulations.

$q_L(\ell)$ - some probability distribution function to sample paths.

$q_L(\ell|k)$ - some probability distribution function to sample paths with exactly k scattering events.

T – Transmittance.

$T(x_1 \rightarrow x_2)$ – Transmittance between x_1 and x_2

$Var(X)$ – Variance of random variable X.

W – a random variable that represents absorption or scattering.

X_{BL} - Bottom left bound at 2D scenario.

X_{BR} - Bottom Right bound at 2D scenario

X_H – Upper bound at 1D scenario.

X_L – Lower bound at 1D scenario.

X_{TL} - Top left bound at 2D scenario.

X_{TR} - Top Right bound at 2D scenario

x_f – Final position of photon

x_i – Initial position of photon

x_k – The photon position after k steps.

$1\{X\}$ – Indicator function of event X.

תקציר

טומוגרפיה היא בעיית שחזור אשר מטרתה למצוא את התפלגות צפיפות החומרים באובייקט מסוים מתוך סט מדידות של קרניים אשר עברו דרכו. במשך השנים, טומוגרפיה הייתה בעיה שהתקשרה לאפליקציות רפואיות, אולם מחקרים חדשים מנסים לאמץ את השיטה גם לתחומים אחרים כמו חקר מזג האוויר. מסורתית, טומוגרפיה רפואית כמו זה שממומשת בסריקות CT, משתמשת במודל קדמי ליניארי אשר משתמש אך ורק בפוטונים בליסטיים על מנת לפתור את בעיית השחזור. מודל כזה מתאר בצורה מעוותת את התופעות הפיזיקליות אשר קורות במציאות, ולכן מעשי רק בסביבות מבוקרות היטב ובנוסף מכריח שימוש ברשתות חוסמות פיזור. כאשר מבצעים את המעבר לסביבה טבעית ולא מבוקרת שיטות טומוגרפיה חדשות הופיעו, כאשר טומוגרפיה סטוכסטית צוברת עניין רב לאחרונה. בפרויקט הנוכחי, אנו נרחיב את הרעיונות של טומוגרפיה סטוכסטית במטרה לשפר את יעילותה החישובית. נראה שאפשר לממש אותה תוך דגימה מאיזה פונקציית צפיפות שנרצה, ובנוסף נציע שיטה חדשה אשר מסתמכת על הפרדה של המודל הקדמי לסדרי פיזור שונים. אנו נראה פיתוח תיאורטי מלא של המודל הקדמי ושל בעיית השחזור עבור השיטות החדשות שאנו מציעים ונראה את הביצועים שלהם לעומת השיטה שבה משתמשים כיום.

Abstract

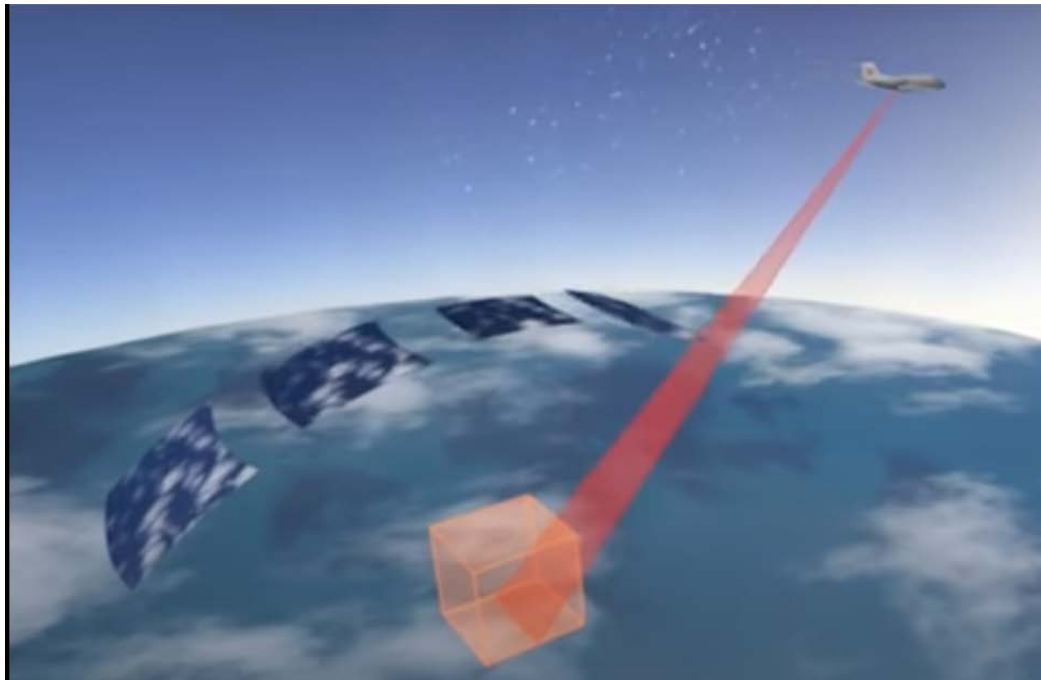
Tomography is an inverse problem that seeks to retrieve a density distribution of an object from a set of measured projections. Over the years, tomography was a problem related to medical applications, however new studies try to adapt it to other fields, such as weather forecasting. Traditionally, medical tomography such as the one implemented in CT scans, uses a linear forward model that counts only ballistic photons in order to solve the inverse problem. Such a model is very uncoherent with the actual physical phenomena and thus is only applicable in controlled environments and forces the use of anti-scattering grids. When moving to uncontrolled natural environments, new tomography methods were suggested, with stochastic tomography gaining high popularity. In this project we expand the idea of stochastic tomography with the aim of improving its computational efficiency. We show that it can be implemented while using any sampling method we want, and also suggest a new method which relies on separating the forward model to different orders of scattering. We develop a full theoretical framework to both the forward model and the inverse problem of our suggested methods and show its performance compared to today's method.

1. רקע

1.1. מוטיבציה לפרוייקט

לאורך השנים, מרבית השיטות בהם השתמשו על מנת לבצע טומוגרפיה, תהליך עליו נרחיב בפרק 1.3, הסתמכו על מודלים מופשטים, אשר יכלו להתבצע בעיקר בסביבות מבוקרות, כמו למשל שימוש בקרינה ישירה בלבד בבדיקות CT. פיתוחים אחרונים במעבדת המחקר של פרופסור יואב שכנר, הראו שניתן לפתור את בעיית הטומוגרפיה גם בסביבות מורכבות ולא מבוקרות, תוך שימוש במודל סטוכסטי המשתמש בכל סדרי הפיזור של הקרינה, למשל כדי לשחזר מבנה של עננים על ידי קליטת קרני השמש שהתפזרו דרכם. כתוצאה מפיתוחים אלה, קיבלה המעבדה מימון בינלאומי לפרוייקט חלל, בו מתוכננים להיפרס לוויינים אשר יצלמו את ענני השמיים, ובאמצעות תהליך דומה של טומוגרפיה, יבוצע שחזור להרכבי העננים בקנה מידה עולמי, דבר בעל משמעויות רבות בתחומי חקר מזג האוויר, דוגמא לאיך הולך להתבצע פרויקט החלל ניתן לראות ב איור 1.

בשל ההשקעה במעבדה, נעשים כעת ניסיונות לשפר את תהליך הטומוגרפיה בשיטות שונות, על מנת לשפר את יעילותו ואת דיוקו. פרויקט הסטודנטים הנ"ל הינו חלק ממאמץ זה והוא בא להרחיב את שיטת הטומוגרפיה הסטוכסטית, תוך הצעת שיטה חדשה אשר מסתמכת על פירוק השחזור לסדרי פיזור שונים.



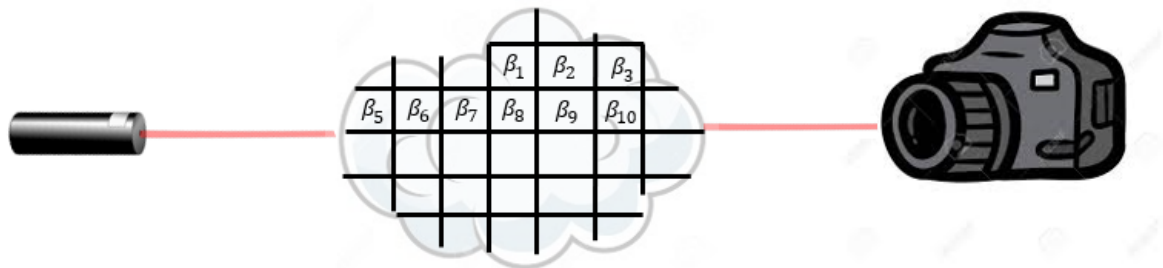
איור 1 - פרויקט החלל

1.2. מטרת הפרויקט

מטרת הפרויקט הינה להרחיב את שיטת הטומוגרפיה הסטוכסטית המבוצעת כיום, להציע שיטה חדשה אשר מסתמכת על פירוק לסדרי פיזור שתהיה יעילה יותר חישובית, פשוטה וניתנת למקבול בצורה טובה על גבי מאיצים גרפים.

1.3. טומוגרפיה

טומוגרפיה בהגדרה, היא בעיית שחזור, אשר מחפשת לשחזר תכונות של חומר, על סמך קליטה של קרינה אשר עברה דרכו. הקרינה יכולה להיות כל סוג של קרינה החל מאור שמש פשוט המתפזר בעננים, ועד לקרני X אשר בהם נעשה שימוש בבדיקות CT. הקרינה פוגעת בחומר, מבצעת תהליכים של פיזור ובליעה עליהם נרחיב בהמשך, ולבסוף יוצאת מהחומר ונקלטת במצלמה או במספר מצלמות. כדי להגדיר את הבעיה בצורה טובה, נהוג לבצע לה דיסקריטיזציה, ולחלק את האובייקט המוקרן לוווקסלים (פיקסל תלת ממדי). כל ווקסל מתאפיין באיזשהי תכונה מקומית של החומר אשר משפיעה על התמונה המתקבלת, ואותה אנו מחפשים. לאורך הפרויקט, התכונה שאנו מחפשים היא מקדם הניחות (extinction coefficient) אשר נסמנו ב β ונרחיב עליו בפרק 0. בכל ווקסל נגדיר מקדם β אחיד בכל הוווקסל, וההנחה היא כי ערכים אלה מגדירים באופן יחיד את תמונת המוצא המתקבלת, אותה נסמן ב I_C . המחשה של התרחיש ניתן לראות ב איור 2.



איור 2 – חלוקת האובייקט לוווקסלים, מקדם הניחות אחיד בכל ווקסל

כעת הגדרת הבעיה היא פשוטה, בהינתן תמונת מוצא, אנו רוצים לשחזר את ערכי β אשר מתאימים לכל ווקסל וווקסל, אשר היו מביאים לתמונת מוצא קרובה ביותר לזו אשר התקבלה, או בצורה מתמטית אנו מחפשים את הווקטור:

$$\vec{\beta}^* = \arg \min_{\vec{\beta}} \|I(\vec{\beta}) - I_c\|^2$$

לכאורה הבעיה נראית בעיה פשוטה, אמנם הקושי העיקרי בבעיה נובע מהתהליכים הפיסיקליים שהקרינה הפוגעת מבצעת בתוך החומר טרם יציאה לכיוון המצלמה.

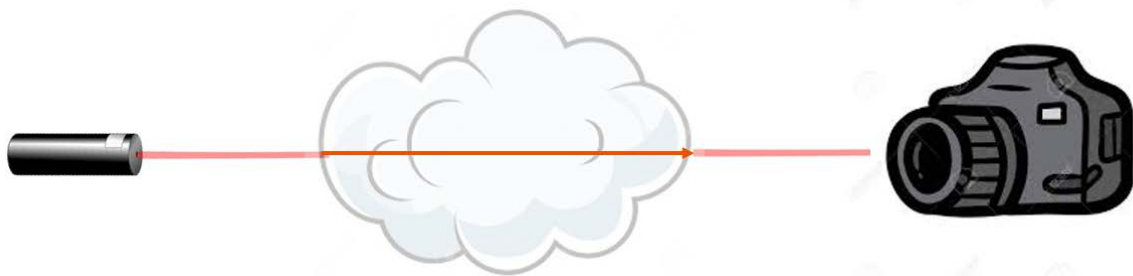
אילו הקרינה הייתה נכנסת, ונעה בקו ישר עד אשר הייתה מגיעה למצלמה, הבעיה הייתה פשוטה לפתרון, משום שהיינו יודעים בדיוק באילו ווקסלים הקרינה עברה ומה ההנחתה שקרתה בדרך. פוטונים אשר מבצעים תנועה מסוג זה נקראים פוטונים בליסטיים. אולם בפועל רוב הפוטונים הנכנסים מבצעים תנועה דיפוזיבית מסובכת בתוך, אשר נובעת מאינטראקציה בין הפוטונים לבין חלקיקי החומר שגורמת לשתי תופעות:

א. פיזור – הפוטונים מתפזרים, כלומר מבצעים אינטראקציה עם חלקיקי החומר ומשנים את כיוון תנועתם. תופעת הפיזור יכולה לקרות פעמים רבות במהלך תנועת הפוטון בתוך החומר, ולכן הקרינה שנקלטת בסוף במצלמה יכולה לנבוע מפוטונים שעשו מסלולים מורכבים אשר שונים מאוד אחד מהשני.

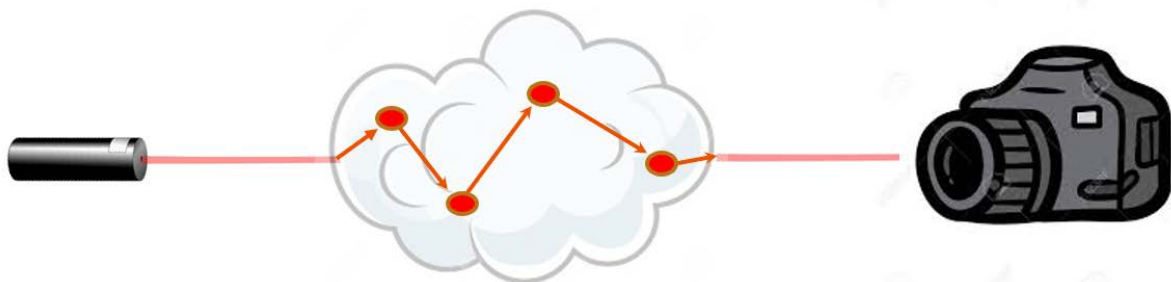
ב. בליעה – לא כל הפוטונים אשר נכנסים לחומר גם יוצאים ממנו, פוטונים אשר מבצעים אינטראקציה עם חלקיקי החומר עשויים להיבלע על ידו ולסיים את תנועתם.

דוגמא לסוגי התנועות שפוטון שנכנס לחומר יכול לעשות ניתן לראות ב איור 3 איור 4 ואיור 5

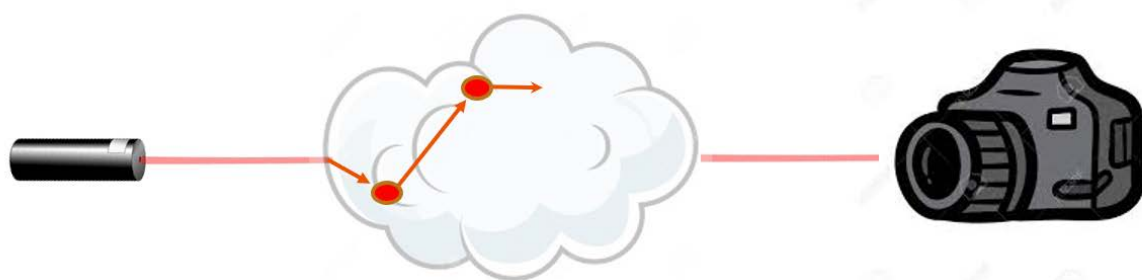
תופעות פיסיקליות אלה הופכות את תהליך בניית המודל הקדמי למסובך ומורכב מאוד, כלומר, אפילו כאשר אנו יודעים את מקדמי הניחות בכל ווקסל וווקסל, קשה מאוד למדל את התמונה אשר צריכה להתקבל. עיקר המחקר בנושא של טומוגרפיה מתעסק בדרכים שונות למדל את המודל הקדמי (forward mode) בצורה טובה ופשוטה, שלב הכרחי על מנת שנוכל לפתור את בעיית השחזור. לאחר שיהיה בידינו מודל קדמי מוכן, נוכל לפתור את בעיית השחזור על ידי גזירת פונקציית המחיר, ושימוש באלגוריתמים איטרטיביים דוגמת gradient decent.



איור 3 - תנועת פוטונים בליסטיים



איור 4 - תנועה דיפוזיבית בעקבות פיזור



איור 5 - פוטונים נבלעים בחומר

1.4. הגדרות ומושגים

על מנת ליצור שפה משותפת להמשך הדו"ח, חשוב להציג מספר הגדרות ומושגים חשובים אשר יעשה בהם שימוש לאורך כל הפרויקט, הבנת מושגים אלו הכרחית להבנת המחקר. המושגים המוצגים בפרק זה מסתמכים על הכתוב ב [1].

כפי שהצגנו בפרק הקודם, פוטונים אשר נכנסים לחומר, מבצעים אינטראקציה עם חלקיקי החומר, כדי למדל את תהליכי האינטראקציה חשוב להכיר מספר מושגים:

- א. Extinction cross section – יסומן באות σ והוא נמדד ביחידות של $[m^2]$, כלומר יחידות של שטח. גודל זה מתאר את השטח האפקטיבי של החלקיק, שפגיעה בו תגרום לפוטון לבצע אינטראקציה עם החלקיק.
- ב. צפיפות החלקיקים בחומר – יסומן באות n והוא נמדד ביחידות של $[m^{-3}]$.
- ג. מקדם הניחות (extinction coefficient) – יסומן באות β , מכפלה של שטח האינטראקציה האפקטיבי בצפיפות החלקיקים בחומר כלומר:

$$\beta = \sigma n$$

ומכאן היחידות שלו הם $[m^{-1}]$. גודל זה מתאר כמה קשה לקרן כלשהי לחדור דרך החומר, או כמה מכשול עומד בנקודה אל מול קרן שמנסה לחדור. כפי שהוסבר ב 1.3, גדלים אלו יהוו את הנעלמים אותם אנו מנסים למצוא באמצעות הטומוגרפיה.

- ד. דרך אופטית (optical depth) – יסומן באות τ , זהו גודל חסר יחידות אשר משלב בין אורך של מקטע מסוים שקרן צריכה לעבור לבין מקדמי הניחות לאורך הקטע הזה, כלומר סוג של אורך אפקטיבי של מקטע שקרן צריכה לעבוד, הוא מוגדר באופן הבא:

$$\tau = \int_{x_i}^{x_f} \beta(x) dx$$

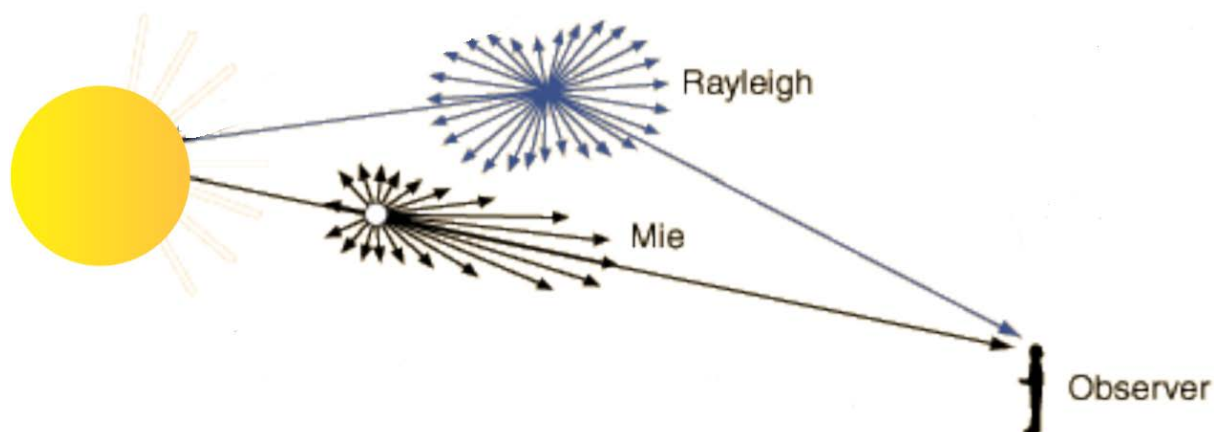
- ה. העברה (Transmittance) – יסומן באות T , זהו גודל חסר יחידות אשר מתאר את החלק היחסי של הקרינה אשר תעבור דרך אופטית מסוימת מבלי לבצע אינטראקציה כלשהי עם החלקיקים בתווך. יש יחס מונוטוני יורד בין הדרך האופטית לבין ההעברה, שכן ככל שהדרך האופטית ארוכה יותר, פחות קרינה תעבור, ההעברה מוגדרת באופן הבא:

$$T = e^{-\tau} = e^{-\int_{x_i}^{x_f} \beta(x) dx}$$

בפרק 0 נראה שניתן לייחס להעברה גם משמעות הסתברותית.

- ו. אלבדו הפיזור (single scattering albedo) – יסומן באות $\bar{\omega}$, זהו גודל חסר יחידות אשר מתאר את הכמות היחסית של פוטונים שיתפזרו בעת אינטראקציה עם חלקיקים בתווך (משלים לחלק היחסי של חלקיקים אשר יבלעו). כל חומר בטבע מתאפיין באלבדו פיזור כלשהו.
- ז. פונקציית פאזה (phase function) – פונקציית צפיפות הסתברות שתסומן $P(\omega_{in}, \omega_{out})$. פונקציה זו מתארת את ההסתברות של פוטון שהגיע מכיוון מסוים להתפזר אל כל אחד מהכיוונים האפשריים. על פי

ההגדרה זוהי פונקציה של כיוון הכניסה של הפוטון ושל כיוון היציאה של הפוטון, לפעמים מגדירים אותה פשוט כפונקציה של קוסינוס הזווית ביניהם. כמו אלבדו הפיזור גם פונקציית הפאזה היא תכונה של חומרים שונים בטבע, וקיימות פונקציות פאזה שונות ומגוונות החל מפונקציות פאזה אחידות שמפזרות לכל כיוון בהסתברות שווה ועד לפונקציות דלתא שמפזרות רק בכיוון ספציפי. דוגמא לשתי פונקציות פאזה מוכרות בספרות ניתן לראות ב איור 6 .



איור 6 - דוגמא לשתי פונקציות פאזה מוכרות, מיי וריילי

2. סקר ספרות

כפי שהסברנו בפרק 1.3, ניתן לסכם את בעיית הטומוגרפיה כפתרון של הבעיה:

$$\vec{\beta}^* = \arg \min_{\vec{\beta}} \|I(\vec{\beta}) - I_c\|^2$$

והקושי העיקרי הוא בבניית המודל קדמי $I(\vec{\beta})$, שבעזרתו נוכל לחשב את התמונה שהייתה צריכה להתקבל עבור ערכים נתונים של מקדמי הניחות. לאחר שבידינו המודל הקדמי, נוכל לפתור את בעיית השחזור באמצעות אלגוריתם איטרטיבי כמו gradient decent. בפרק זה נתאר את השיטות העיקריות הקיימות כיום בספרות לבניית המודל הקדמי, כהכנה לשיטה המוצעת בפרויקט זה.

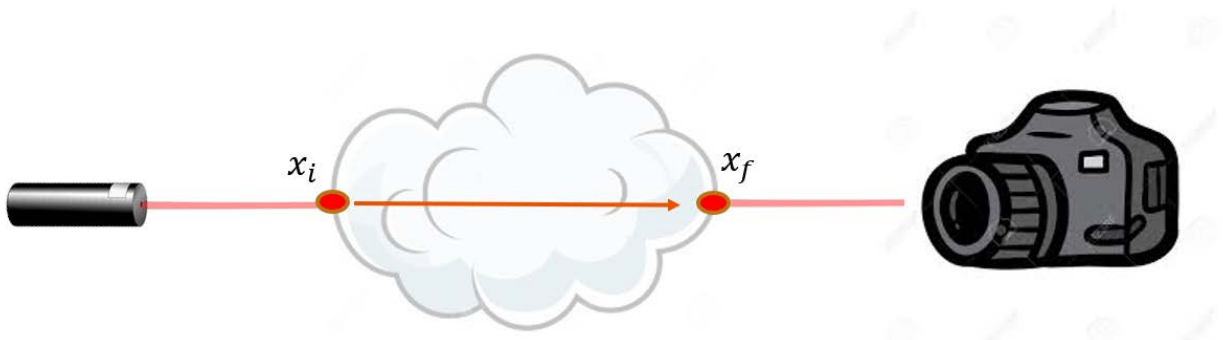
2.1. פתרון משוואות הקרינה

ניתן למדל בצורה אנליטית את הערך אשר קולטת המצלמה באמצעות פתרון של משוואות הקרינה (RTE – Radiative Transfer Equation). נתאר כעת את תהליך זה כפי שמוסבר ב [2].

נניח מודל פשטני בו המצלמה יכולה לקלוט רק פוטונים אשר מגיעים אליה בזווית אחת ספציפית, כלומר למצלמה אין מפתח. את הערך הנקלט במצלמה ניתן לחלק לשתי תרומות:

- א. רכיב ישיר – פוטונים אשר נכנסו לתווך, לא ביצעו אינטראקציה עם החומר, והמשיכו בקו ישר עד אשר יצאו מהתווך ונקלטו במצלמה. נסמן את נקודת הכניסה לתווך ב x_i ואת נקודת היציאה ב x_f . נסמן את עוצמת הקרינה הנכנסת ב I_i (radiance). החלק היחסי של הקרינה אשר תעבור את התווך ללא אינטראקציה ניתן על ידי ה transmittance כפי שהוסבר בפרק 0. לכן התרומה של הרכיב הישיר הינה:

$$DC = I_i T = I_i e^{-\int_{x_i}^{x_f} \beta(x) dx}$$



איור 7 - תרומת הרכיב הישיר

ב. רכיב שעבר פיזור – רכיב זה משקלל בתוכו את כל הפוטונים אשר נכנסו לתווך, ביצעו תהליכי פיזור ולבסוף יצאו מהתווך בדיוק באותה הזווית היחידה שהמצלמה רואה. כדי למדל את רכיב זה, נסתכל על נקודה כלשהי x^* על גבי הקרן שהמצלמה רואה. פוטונים אשר מגיעים לנקודה זו מכיוונים שונים, מתפזרים בה לכיוון שהמצלמה רואה, וממשיכים עד למצלמה ללא ביצוע של אינטראקציה נוספת עם החומר, הם התרומה של נקודה זו לערך הנקלט במצלמה.

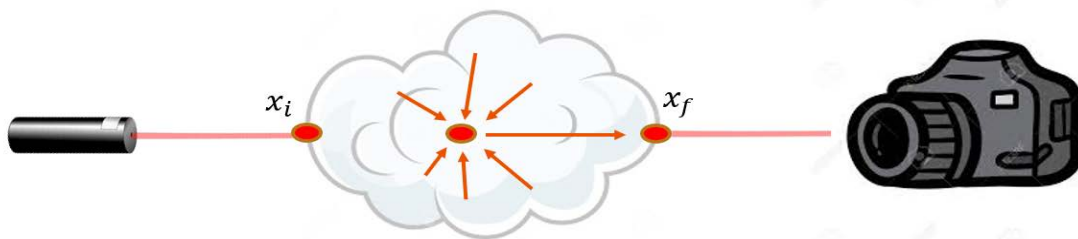
נסמן את האנרגיה של כלל הפוטונים אשר נכנסים לנקודה ומתפזרים לכיוון המצלמה ב

$$J(x^*, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\omega} P(x, \omega \cdot \omega') I(x, \omega') d\omega'$$

כאשר ω הוא ווקטור הכיוון אל המצלמה. כלומר זהו אינטגרל על כל כיווני הכניסה האפשריים, מוכפלים בפונקציית הפאזה בין כיוון זה לכיוון המצלמה (אשר מתארת את ההסתברות לפיזור בכיוון הזה). בנוסף גודל זה נכפל ב אלבדו הפיזור כדי לתאר את ההסתברות שהתרחש פיזור ולא התרחשה בליעה. ההדרה הרשומה למעלה היא לתרחיש דו ממדי. בתרחיש תלת ממדי האינטגרל צריך להיות מ 0 ועד 4π כאשר הזוויות יהיו ביחידות של סטרידיאן.

ההסתברות שכל הפוטונים הנכנסים הללו ביצעו פיזור בנקודה ולאחר מכן המשיכו ישירות עד למצלמה ללא אינטראקציה נוספת עם חלקיקי החומר הינה:

$$J(x^*, \omega) \beta(x) e^{-\int_{x^*}^{x_f} \beta(x') dx'}$$



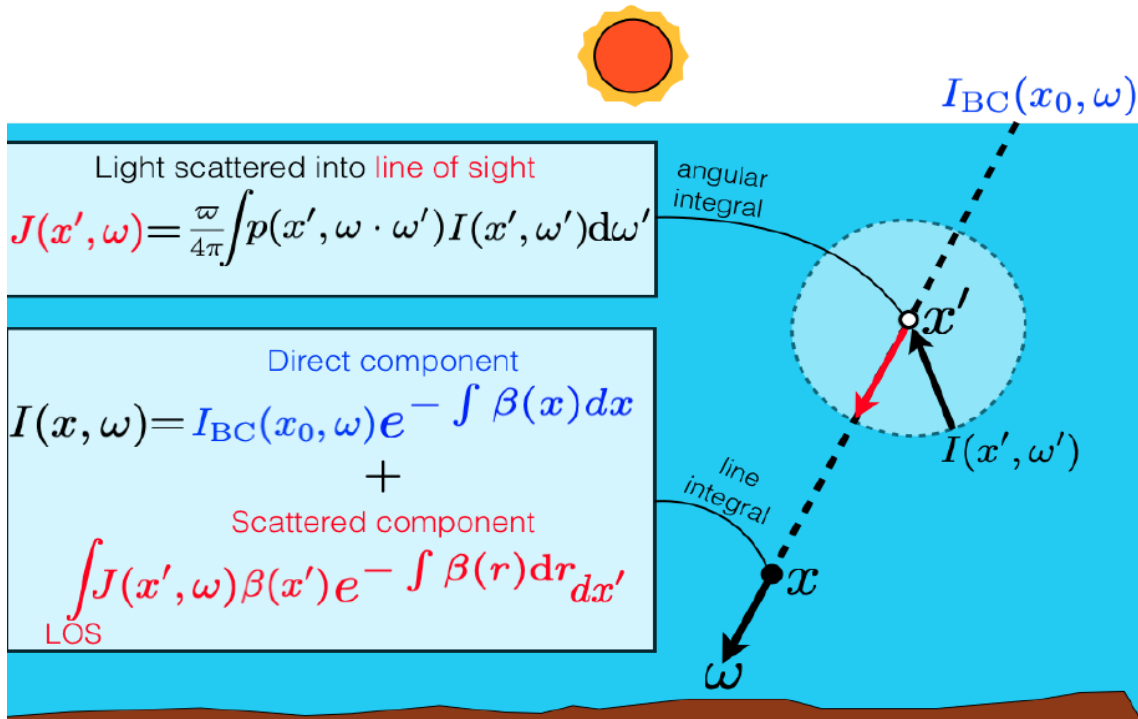
איור 8 - תרומת נקודה כלשהי על הקרן אשר רואה המצלמה לרכיב אשר עבר פיזור

כל אחת מהנקודות על גבי הקרן תורמת תרומה דומה לערך הנקלט במצלמה, לכן סך הכל ניתן לרשום את הרכיב שעבר פיזור בתור:

$$SC = \int_{x_i}^{x_f} J(x, \omega) \beta(x) e^{-\int_x^{x_f} \beta(x') dx'} dx$$

משוואת הקרינה הכוללת הינה:

$$I(\vec{\beta}) = DC + SC = I_i e^{-\int_{x_i}^{x_f} \beta(x) dx} + \int_{x_i}^{x_f} J(x, \omega) \beta(x) e^{-\int_x^{x_f} \beta(x') dx'} dx$$



איור 9 - משוואת הקרינה הכוללת, קרדיט ל [2]

היתרון המרכזי של מודל קדמי המבוסס על משוואות הקרינה, הוא שזהו המודל האמיתי והמדויק ביותר, שמתאר את התופעות הפיזיקליות שאכן יוצרות את התמונה. החיסרון המרכזי הוא, שכפי שניתן לראות מדובר במשוואה אינטגרלית שפתרונה איננו פשוט. קיימים פתרונות איטרטיביים שונים על מנת לפתור את המשוואה, למשל על ידי שימוש בהרמוניות ספיריות. שיטות אלו איטיות מאוד מבחינה חישובית, ופרקטיות רק בתרחישים מאוד מאוד קטנים ומבוקרים.

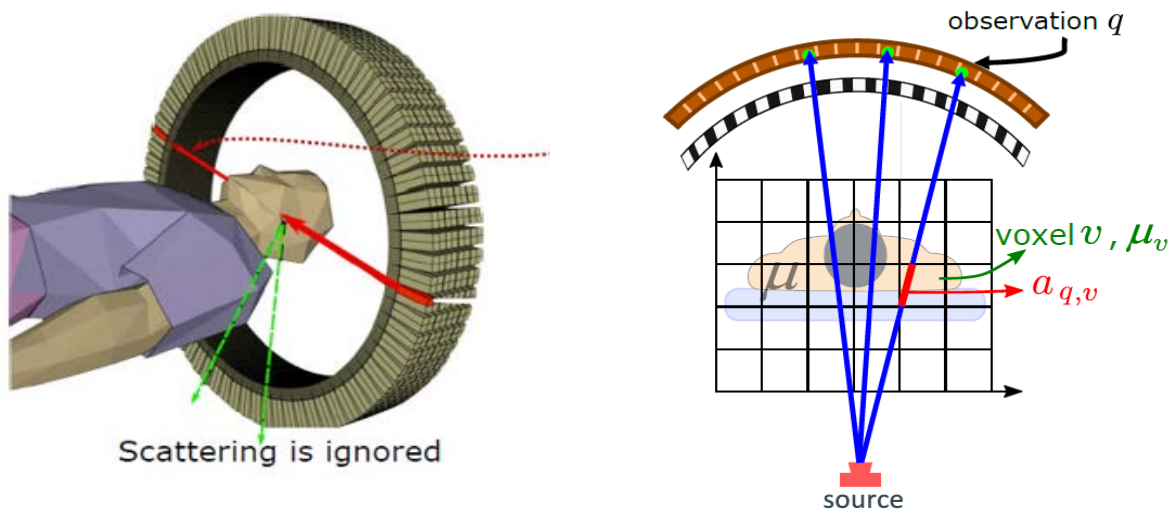
2.2. טומוגרפיה ליניארית

טומוגרפיה ליניארית מתארת מודל קדמי המסתמך רק על קרינה שהגיע באופן ישיר למצלמה ללא פיזורים, כלומר רק על פוטונים בליסטים. כאשר מניחים שהתמונה התקבלה רק על ידי קרינה ישירה, ניתן לקרב את הערך אשר מתקבל במצלמה כאופרטור ליניארי הפועל על וקטור מקדמי הניחות כלומר:

$$I(\vec{\beta}) = A \cdot \vec{\beta}$$

מכאן גם שם השיטה טומוגרפיה ליניארית. כאשר מדובר במודל ליניארי פשוט כמו זה, ניתן לפתור את בעיית השחזור על ידי שיטות פשוטות כמו *Least Squares*.

הבעיה המרכזית בשיטה זו היא, כאמור, שהיא מניחה שהתמונה המתקבלת במצלמה נוצרה רק על ידי קרינה ישירה. מכאן כל תרומה של הרכיב אשר עבר פיזור לתמונה מהווה רעש למודל. כדי להתגבר על בעיה זו יש צורך בהתקנים חיצוניים (ASG – Anti Scattering Grid) אשר יחסמו כל קרינה אשר עברה פיזור וימנעו ממנה להגיע למצלמה. כתוצאה מכך שימוש בשיטה זאת אפשרית רק בתרחישים מבוקרים, למשל כמו בבדיקות CT בהם יש שליטה מלאה על כיוון הקרינה הנכנסת ועל הסביבה. חסרון נוסף של שיטה זו הוא שהיא מנצלת רק חלק קטן מהקרינה על מנת לבצע את השחזור, ועל כן נדרשת כמות גבוהה של קרינה על מנת לבצע שחזור איכותי, דבר בעייתי כאשר מדובר בקרינה מסוכנת כמו קרני X בבדיקות CT. היתרון של שיטה זו הוא שהיא פשוטה ומהירה לחישוב, גם בסדרי גודל גדולים.



איור 10 - טומוגרפיה ליניארית קרדיט ל [6]

2.3. טומוגרפיה סטוכסטית

טומוגרפיה סטוכסטית, בונה מודל הסתברותי לערך אשר מתקבל במצלמה ומכאן שמה. ההסבר של המודל מסתמך על אשר מוצג ב [3].

ניתן להסתכל על מסלול כלשהו שפוטון עושה מרגע שהוא נכנס לתווך בתור משתנה אקראי. אם נניח ששוגרו N_p פוטונים זהים, ואנרגיית הפוטון הינה I_p , ניתן למדל את הערך אשר נקלט במצלמה בתור:

$$I(\vec{\beta}) = N_p \cdot I_p \cdot P(\text{photon reached camera})$$

כלומר הערך הנקלט הוא למעשה כמות הפוטונים שהגיעו למצלמה מתוך אלה שנכנסו מוכפל באנרגיה של הפוטון, והערך הזה תלוי בהסתברות שפוטון אשר נכנס לתווך יגיע למצלמה, תוצאה מאוד אינטואיטיבית. מכיוון שאמרנו שהמסלול שפוטון עושה הינו משתנה אקראי, אז קיימת לו פונקציית התפלגות כלשהי. אם היינו יכולים לדגום את המסלול שפוטון יעשה, מתוך פונקציית ההתפלגות הזו, היינו יכולים לשערך את הערך הנקלט במצלמה על ידי דגימות מרובות ושימוש במשעריך הפשוט:

$$\hat{I}_c = I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\}$$

כאשר בתוך הסכום מופיעה פונקציית האינדיקטור. במילים פשוטות, היינו מגרילים הרבה מסלולים מהפילוג, וסופרים את כמות המסלולים מתוכם אשר מגיעים למצלמה. משעריך זה הינו משעריך לא מוטה לערך האמיתי הנקלט במצלמה שכן:

$$E[\hat{I}_c] = I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} E[1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\}] = N_p \cdot I_p \cdot P(\text{photon reached camera})$$

השאלה המתבקשת היא האם אנחנו יודעים למדל את פונקציית ההתפלגות של מסלול שפוטון יעשה, והאם אנו יודעים לדגום ממנה. התשובה לכך היא שלמרות שלא ניתן לכתוב ביטוי אנליטי לפונקציית ההתפלגות של המסלולים, עדיין ניתן לדגום ממנה על ידי ביצוע סימולציה איטרטיבית. מטרת הסימולציה היא לדגום את מסלול הפוטון על ידי דגימה הדרגתית של כל שלב במסלול כפי שנציג כעת: פוטון נכנס לתווך בנקודה כלשהי x_i ובזווית כלשהי ω_0 .

א. השאלה הראשונה שיש לשאול היא מה הדרך האופטית שהפוטון הצליח לעבור לפני שהוא ביצע אינטראקציה עם חלקיקי החומר. כדי לענות על שאלה זו, ניתן משמעות הסתברותית לדרך האופטית שפוטון עובר ול - *transmittance*. נזכיר כי הדרך האופטית מוגדרת על ידי:

$$\tau = \int_{x_i}^{x_f} \beta(x) dx$$

והעברה מוגדרת על ידי:

$$T = e^{-\tau} = e^{-\int_{x_i}^{x_f} \beta(x) dx}$$

ההעברה מתארת את החלק היחסי של הפוטונים אשר עברו דרך אופטית מסוימת τ , ללא ביצוע אינטראקציה עם חלקיקי החומר, או בקונטציה הסתברותית, מה ההסתברות שלא קרתה אינטראקציה עם חלקיקי החומר לפחות לאורך דרך אופטית של τ . כעת אם נסתכל על הדרך האופטית שפוטון עשה בלי אינטראקציה בתור משתנה אקראי D , אז לפי ההסבר הקודם:

$$P(D \geq \tau) = T = e^{-\tau}$$

ולכן:

$$F_D(\tau) = P(D \leq \tau) = 1 - e^{-\tau}$$

כלומר:

$$D \sim \text{Exp}(1)$$

הדרך האופטית שהפוטון עבר מבלי לבצע אינטראקציה עם חלקיקי החומר, מפולגת אקספוננציאלית, ולכן ניתן לדגום אותה בקלות.

לאחר שדגמנו את הדרך האופטית שהפוטון עבר עד לאינטראקציה, נוכל למצוא את הנקודה אליה הגיע הפוטון, x_{k+1} , על פי ההגדרה של הדרך האופטית:

$$D = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \beta(x) dx$$

כלומר, נצטרך לסכום את האינטגרל, עד שנגיע לנקודה שבו הוא מסתכם לדרך האופטית שהגרלנו D , כך למעשה הגרלנו את הנקודה הבאה שבה הפוטון ביצע אינטראקציה.

- ב. לאחר שהגרלנו את נקודת האינטראקציה, יש להגריל האם התבצע פיזור או התבצעה בליעה, אלבדו הפיזור $\bar{\omega}$ מתאר את החלק היחסי של פיזור לעומת בליעה, ולכן יש להגריל פשוט משתנה אקראי מפולג אחיד בין 0 ל 1, ולראות האם הוא גדול או קטן מאלבדו הפיזור. במידה והגרלנו שהייתה בליעה הסימולציה תסתיים, והמסלול כמובן לא הגיע למצלמה.
- ג. במידה והגרלנו שהתרחש פיזור, יש להגריל את הכיוון אליו התבצע הפיזור. הגרלה מתוך פונקציית הפאזה של החומר היא בדיוק הגרלה של הכיוון החדש אותו אנו מחפשים.
- ד. נחזור על שלבים א', ב' ו - ג', באופן איטרטיבי. נעצור את הסימולציה כאשר הפוטון יוצא המתווך, ונסתכל האם הוא יצא לכיוון המצלמה או לא.

ביצוע של הסימולציה הנ"ל, מהווה למעשה דגימה מפונקציית ההתפלגות של מסלולי הפוטון. נציין שתי בעיות עיקריות של הסימולציה. בעיה אחת היא שתיאורטית, הפוטון יכול להמשיך ולבצע אינסוף פיזורים (למרות שבהסתברות נמוכה מאוד), לכן מקובל לעצור את הסימולציה אחרי כמות מקסימלית של פיזורים, ולהכריז כי פוטון זה לא הגיע למצלמה. בעיה שנייה היא שההסתברות שפוטון יגיע בדיוק למצלמה לאחר כל ההגרלות הנ"ל היא נמוכה מאוד עד לא קיימת, על כן בפועל הסימולציה יותר מתוחכמת ומשתמשת בשיטה של *local estimation*, עליה לא נרחיב כעת, אך היא מסתמכת על עקרונות הדגימה שנציג בפרק 3.

היתרון המשמעותי של שיטת הטומוגרפיה הסטוכסטית היא שהיא מהירה בצורה משמעותית מאשר השיטה האנליטית של פתרון משוואת הקרינה, אך היא איננה מניחה מודל מקל ומשתמשת בכל סדרי הפיזור. החיסרון העיקרי שלה הוא שנדרש להגריל כמות גדולה מאוד של פוטונים כדי להקטין את שונות המשערך, דבר שמפריע כאשר נפתור את בעיית ה-*inverse*, שכן נצטרך לעשות הגרלה של כמות כזאת בכל צעד גרדיאנט. בנוסף עצם הסתמכות על מודל סטוכסטי הופכת את אלגוריתם ה-*gradient decent* ל-*SGD*, דבר שהוא חיסרון אך לא מהותי.

3. פתרון נבחר

לאחר שהצגנו את השיטות האפשריות לביצוע טומוגרפיה, והסברנו לעומק כיצד מבוצעת הטומוגרפיה הסטוכסטית, נציג בפרק זה את השיטה החדשה המוצעת בפרויקט, אשר מבוססת על דגימה מפונקציית התפלגות פשוטה ומפרקת את השחזור לסדרי פיזור שונים.

3.1. מוטיבציה, בעיות בשיטה הנוכחית

הרעיון המרכזי בטומוגרפיה סטוכסטית, היה לנסות לבצע דגימות מפונקציית ההתפלגות האמיתית של מסלולי הפוטונים מרגע כניסתם לתווך. כפי שהראנו ב 0 תהליך הדגימה הזה ארוך ומצריך ביצוע של סימולציה איטרטיבית שיכולה לקחת מספר איטרציות גדול. מה שהופך את הסימולציה הזו לקשה במיוחד, היא הצורה שבה אנו מגרילים את המרחק שהפוטון עבר בכל צעד עד לאינטראקציה. ניזכר בתהליך, תחילה מוגרלת הדרך האופטית כמשתנה אקראי מפילוג אקספוננציאלי:

$$\tau \sim \text{Exp}(1)$$

ולאחר מכן מחושבת הנקודה x_{k+1} שאליה צריך להגיע כדי שהאינטגרל יהיה שווה לדרך האופטית שהגרלנו:

$$\tau = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \beta(x) dx$$

מציאת הנקודה x_{k+1} היא קשה, שכן הדרך היחידה לעשות זאת היא לעבור ווקסל ווקסל, לסכום את המרחק שעברנו בווקסל הזה מוכפל במקדם הניחות של אותו ווקסל ולראות אם עברנו את הדרך האופטית הנדרשת. לכן נשאלת השאלה, האם ניתן לבצע תהליך הגרלה אחר, פשוט יותר, לא מהפילוג האמיתי של המסלולים, אך עדיין לחשב באמצעות הגרלה כזו את הערך אשר שנקלט במצלמה. התשובה היא שכן והיא מסתמכת על עקרונות של important sampling, אבל תחילה, נציג פורמולציה אחרת לערך הנקלט במצלמה, באמצעות אינטגרל על מסלולי הפיזור.

3.2. אינטגרל על מסלולים

ב [4] מוסבר כיצד ניתן להסתכל על הערך הנקלט במצלמה בתור אינטגרל על מסלולי פיזור של פוטונים. ההסתכלות הזאת בעצם מרחיבה את ההסתכלות שראינו כבר בפרק של טומוגרפיה סטוכסטית. ב 0 אמרנו כי ניתן למדל את הערך הנקלט במצלמה בתור:

$$I(\vec{\beta}) = N_p \cdot I_p \cdot P(\text{photon reached camera})$$

מכיוון שאמרנו שהמסלול שפוטון עושה הינו משתנה אקראי, אז קיימת לו פונקציית התפלגות כלשהי שהסימולציה בטומוגרפיה סטוכסטית מנסה לדגום ממנה. נסמן פונקציה זו ב $f_L(\ell)$, ואת פונקציית הצפיפות המתאימה להתפלגות זו בתור $f_L(\ell)$. אם כך את ההסתברות שפוטון יגיע למצלמה נוכל לרשום בתור:

$$P(\text{photon reached camera}) = \int_{\mathcal{L}_d} f_L(\ell) d\ell$$

כאשר \mathcal{L}_d הינו מרחב כל המסלולים האפשריים אשר מסתיימים במצלמה, ולכן הערך אשר נקלט במצלמה הינו:

$$I(\vec{\beta}) = N_p \cdot I_p \int_{\mathcal{L}_d} f_L(\ell) d\ell$$

המשעך של טומוגרפיה סטוכסטית מקבל משנה תוקף בפורמולציה הזאת שכן:

$$\begin{aligned} E[\hat{I}_c] &= E \left[I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \right] \\ &= I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} E[1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\}] \\ &= I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\mathcal{L}} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot f_L(\ell) d\ell \\ &= I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\mathcal{L}_d} f_L(\ell) d\ell = N_p \cdot I_p \int_{\mathcal{L}_d} f_L(\ell) d\ell \end{aligned}$$

כלומר המשעך של טומוגרפיה סטוכסטית אשר סופר כמה מסלולים הגיעו למצלמה הוא אכן משעך לא מוטה כפי שראינו קודם. כעת המטרה שלנו בהמשך תהיה לנסות לדגום מפילוגים אחרים ועדיין למצוא משעך בלתי מוטה לביטוי הנ"ל.

3.3. דגימה מפילוג כלשהו

נניח שבמקום לדגום מסלולים מהפילוג האמיתי $f_L(\ell)$, כפי שקורה בסימולציה של טומוגרפיה סטוכסטית, נדגום מסלולים מהתפלגות אחרת כלשהי בעלת פונקציית צפיפות $q_L(\ell)$. במקום המשערך שסופר האם המסלול מגיע למצלמה או לא נציע את המשערך הבא:

$$\hat{I}_c = I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell_k)}{q_L(\ell_k)}$$

נחשב את התוחלת של ביטוי זה:

$$\begin{aligned} E[\hat{I}_c] &= E \left[I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell_k)}{q_L(\ell_k)} \right] \\ &= I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} E \left[1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell_k)}{q_L(\ell_k)} \right] \\ &= I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\mathcal{L}} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell)} \cdot q_L(\ell) d\ell \\ &= I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\mathcal{L}} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot f_L(\ell) d\ell \\ &= I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} \int_{\mathcal{L}_d} f_L(\ell) d\ell = N_p \cdot I_p \int_{\mathcal{L}_d} f_L(\ell) d\ell \end{aligned}$$

כלומר המשערך הינו משערך לא מוטה לערך אשר נקלט במצלמה. מה שראינו פה הוא שלמעשה במקום לדגום מהפילוג האמיתי של מסלולי הפוטון, ניתן לדגום מכל פילוג אחר, ועל ידי תיקון מתאים עדיין לשערך את אותו הערך האמיתי שאנו רוצים לשערך. ה"טריק" שביצענו כאן הינו טריק מוכר בתחום של important sampling. כמו כן ניתן לראות שאם היינו דוגמים מהפילוג האמיתי, כפי שקורה היום בטומוגרפיה סטוכסטית, המשערך שלנו היה קורס למשערך המקורי ולכן הוא הכללה שלו:

$$\begin{aligned} \hat{I}_c &= I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell)} \\ &= I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{f_L(\ell)} \end{aligned}$$

$$= I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\}$$

אמנם יש עוד קושי אחד שלא התייחסנו אליו, כדי לחשב את המשערך המוצא צריך לדעת מהי $f_L(\ell)$. בפרק הבא נסביר כיצד ניתן לרשום ביטוי אנליטי לפונקציית הצפיפות הזאת.

3.4. פונקציית הצפיפות של מסלול הפוטון

ב [4] מתואר גם כיצד ניתן ליחס פונקציית צפיפות הסתברות, למסלולים אשר הפוטון מבצע מרגע כניסתו לתווך. פונקציית הצפיפות הזאת מסתכלת על המסלול שפוטון עשה כעל אוסף של משתנים אקראיים בלתי תלויים, כל אחד מאופיין על ידי פונקציית צפיפות משלו, ומכיוון שהם בלתי תלויים, פונקציית הצפיפות הכוללת של המסלול היא מכפלה של כל פונקציות הצפיפות.

ראשית, המסלול מחולק למקטעים בלתי תלויים, כל מקטע מורכב למעשה משלוש נקודות, נקודת התחלה x_{k-1} , נקודת פיצור x_k , ונקודה שלישית שתפקידה להגיד מה היה הכיוון של הפיצור x_{k+1} . לכל מקטע כזה אנו נייחס פונקציית צפיפות, ופונקציית הצפיפות הכוללת תהיה מכפלה של פונקציות הצפיפות של כל המקטעים.

פונקציית הצפיפות של המקטע מורכבת גם כן משלושה חלקים בלתי תלויים:

א. משתנה אקראי אשר מגדיר את המרחק שהפוטון עבר מרגע יציאתו מהנקודה x_{k-1} ועד לביצוע אינטראקציה עם חלקיק של החומר. נסמן משתנה אקראי זה ב L . מתוך הסתכלות האקראית על ההעברה שראינו ב 0 אנו יודעים כי:

$$T = P(L \geq l) = e^{-\int_0^l \beta(x) dx}$$

$$F_L(l) = P(L \leq l) = 1 - e^{-\int_0^l \beta(x) dx}$$

אם נגזור כדי לקבל את פונקציית הצפיפות ותוך שימוש במשפט היסודי של החדו"א נקבל כי:

$$f_L(l) = \beta(l) \cdot e^{-\int_0^l \beta(x) dx} = \beta(l) \cdot T$$

כלומר פונקציית הצפיפות של המשתנה הזה, שווה פשוט למקדם הניחות בנקודה שבה מתבצע הפיצור

(מרחק / מנקודת ההתחלה x_{k-1}) כפול ההעברה בין הנקודות x_{k-1} ל x_k .

פונקציית הצפיפות הזו דוגמת מרחק ולכן היא ביחידות של $[m^{-1}]$.

ב. משתנה אקראי מסוג אינדיקטור אשר מגדיר האם האינטראקציה שהפוטון ביצע בנקודה x_k הייתה מסוג

פיזור או מסוג בליעה. נסמן משתנה אקראי זה ב W . אנו יודעים שההסתברות הזאת ניתנת לנו על ידי

אלבדו הפיזור, כלומר:

$$P_W(w) = \begin{cases} \bar{w} & \text{if } w = 1 \\ 1 - \bar{w} & \text{if } w = 0 \end{cases}$$

זהו משתנה אקראי בדיד, ופונקציית ההסתברות שלו חסרת יחידות.

ג. משתנה אקראי אשר מגדיר את הזווית שהפוטון התפזר לעברה מהנקודה x_k . נסמן משתנה זה ב Ω , פונקציית הצפיפות שלו היא בדיוק פונקציית הפאזה של החומר P . זהו משתנה אקראי רציף, פונקציית הצפיפות שלו היא ביחידות של $[rad^{-1}]$.

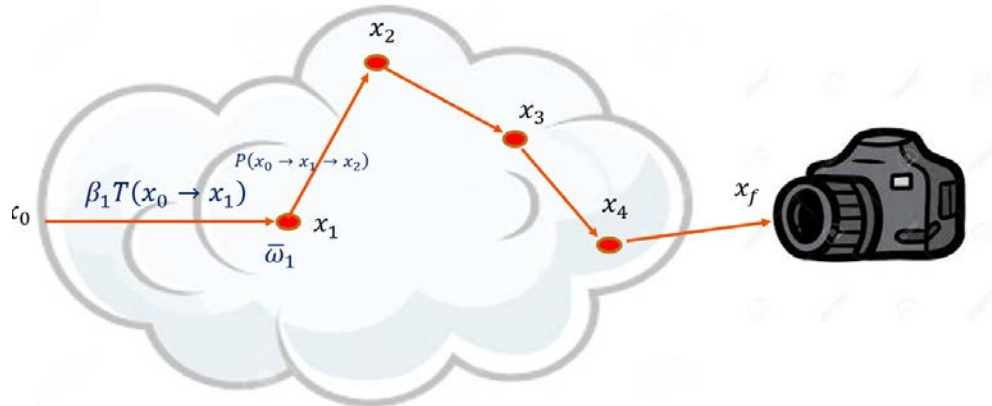
כעת פונקציית צפיפות ההסתברות אשר מתארת את קבלת השלישה $x_{k-1} \rightarrow x_k \rightarrow x_{k+1}$ הינה מכפלה של פונקציות הצפיפות של משתנים אקראיים אלו:

$$\beta_k T(x_{k-1} \rightarrow x_k) \bar{\omega}_k P(x_{k-1} \rightarrow x_k \rightarrow x_{k+1})$$

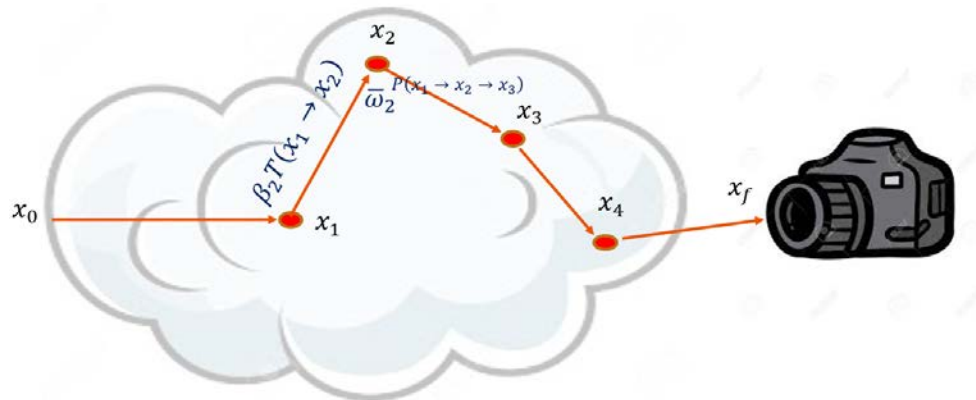
פונקציית הצפיפות הכוללת של מסלול כלשהו, תהיה מכפלה של פונקציות הצפיפות של כל המקטעים הבלתי תלויים מהם מורכב המסלול, כלומר:

$$f_L(\ell) = \prod_i \beta_i T(x_{i-1} \rightarrow x_i) \bar{\omega}_i P(x_{i-1} \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1})$$

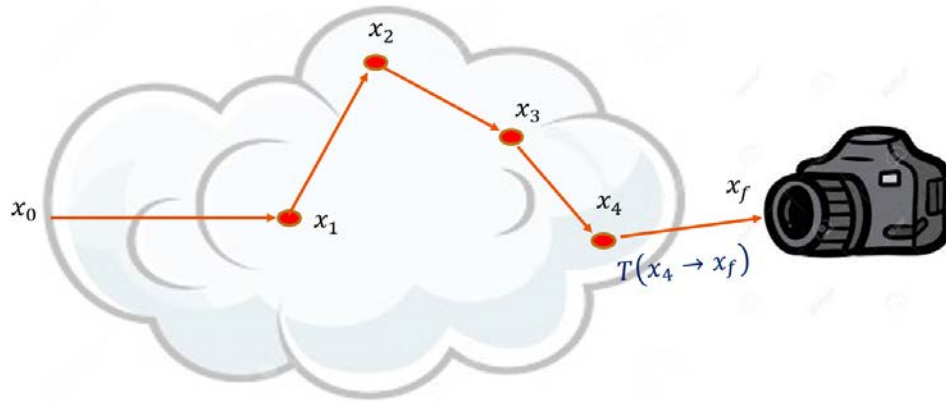
עבור המקטע האחרון במסלול, לא מתרחש פיזור בנקודה האחרונה, אלא פשוט צריך לשאול מה ההסתברות שלא תתבצע אינטראקציה עד לנקודה זו, הסתברות זו ניתנת פשוט על ידי ההעברה, ולכן בסגמנט האחרון נכפול בהעברה T בלבד. הדגמה לגבי הצפיפות של כל סגמנט ניתן למצוא ב איור 11 ואיור 13.



איור 11 - צפיפות של הסגמנט הראשון במסלול



איור 12 - צפיפות של המקטע השני במסלול



איור 13 - צפיפות של המקטע האחרון במסלול

3.5. חלוקה לסדרי פיזור

לאחר שנתנו ביטוי אנליטי לפונקציית הצפיפות של המסלולים $f_L(\ell)$, אנו יכולים להשתמש בתיאוריה אשר הראנו ב 3.3 כדי לדגום מפילוגים כלשהם ולבנות עבורם משערך לא מוטה. הרעיון הראשוני היה לנסות ולבצע דגימה מהפילוג הפשוט ביותר הקיים, פילוג אחיד, כלומר לדגום את נקודות הפיזור באופן אחיד לחלוטין בתווך. כאשר חשבנו איך לממש דגימה כזאת, הבנו שיש כאן בעיה מהותית. כדי לדגום את נקודות הפיזור בצורה פשוטה כלשהי, ולא בצורה איטרטיבית כמו שקורה היום, צריך לדעת קודם כל מהו סדר הפיזור, שכן צריך לדעת כמה נקודות עלינו לדגום. מכאן עלה הרעיון של חלוקת המשערך לסדרי פיזור שונים, נציג את הרעיון. ניזכר כי הגודל אותו אנו מחפשים לשערך הינו:

$$I(\vec{\beta}) = N_p \cdot I_p \int_{\mathcal{L}_d} f_L(\ell) d\ell$$

את האינטגרל נוכל לפצל לסכום של אינסוף אינטגרלים, כל אחד מהם סוכם רק על מסלולים מסדר פיזור מסוים:

$$I(\vec{\beta}) = N_p \cdot I_p \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathcal{L}_{d_k}} f_L(\ell) d\ell$$

כאשר \mathcal{L}_{d_k} הינו מרחב כל המסלולים האפשריים אשר מגיעים למצלמה בהם התרחשו k פיזורים. כעת מה שאנחנו רואים, הוא שהערך שאנחנו רוצים לחשב, מורכב מסכום של גדלים רבים. המטרה בשיטה של חלוקה לסדרי פיזור היא לשערך את כל אחד מהמחזורים בסכום הזה בנפרד ובאופן בלתי תלוי באשר המחזורים. כלומר אנו רוצים ליצור משערך אשר הינו סכום של הרבה משערכים, כל אחד מהם בלתי מוטה, ולכן גם המשערך הכולל שלנו יהיה בלתי מוטה. איך יראה המשערך לסדר פיזור מסוים? בדיוק כמו המשערך שראינו קודם:

$$\hat{I}_{c_k} = \frac{1}{N_{p_k}} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} 1\{\text{photon } m \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell|k)}$$

כאשר N_{p_k} הינו כמות הפוטונים מתוך N_p שעבורם אנו מחליטים שהתרחשו בדיוק k פיזורים, ופונקציית הצפיפות שאנו מגרילים ממנה היא פונקציה מותנית בזה שהיו k פיזורים, כלומר היא יודעת להגריל מסלולים שבהם היו k פיזורים בלבד, לכן התוחלת של משערך זה הינה:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{I}_{c_k}] &= E\left[\frac{1}{N_{p_k}} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} 1\{\text{photon } m \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell|k)}\right] \\
 &= \frac{1}{N_{p_k}} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} E\left[1\{\text{photon } m \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell|k)}\right] \\
 &= \frac{1}{N_{p_k}} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} \int_{\mathcal{L}_k} 1\{\text{photon } m \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell|k)} \cdot q_L(\ell|k) d\ell \\
 &= \frac{1}{N_{p_k}} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} \int_{\mathcal{L}_k} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot f_L(\ell) d\ell \\
 &= \frac{1}{N_{p_k}} \cdot \sum_{m=1}^{N_{p_k}} \int_{\mathcal{L}_{dk}} f_L(\ell) d\ell = \frac{1}{N_{p_k}} \cdot N_{p_k} \int_{\mathcal{L}_{dk}} f_L(\ell) d\ell = \int_{\mathcal{L}_{dk}} f_L(\ell) d\ell
 \end{aligned}$$

כלומר מצאנו משערך לא מוטה לאחד האינטגרלים בסכום, המשערך הכולל יהיה סכום של כל המשערכים:

$$\hat{I}_c = N_p \cdot I_p \sum_{k=0}^{\infty} \hat{I}_{c_k}$$

והוא אכן משערך לא מוטה לערך שאנו רוצים למצוא:

$$E[\hat{I}_c] = E\left[N_p \cdot I_p \sum_{k=0}^{\infty} \hat{I}_{c_k}\right] = N_p \cdot I_p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} E[\hat{I}_{c_k}] = N_p \cdot I_p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathcal{L}_{dk}} f_L(\ell) d\ell = N_p \cdot I_p \int_{\mathcal{L}_d} f_L(\ell) d\ell$$

כמובן שיש פה בעיה אחת שכבר קופצת לעין, המשערך הזה בנוי למעשה מסכום של אינסוף משערכים. כמובן שבפועל לא נוכל לבנות אינסוף משערכים, אך אם נניח מראש שמעל כמות מוגדרת של פיזורים N_s , ההסתברות שמסלולים כאלה אכן קרו במציאות היא אפסית וניתנת להזנחה (מה שבפועל נכון) אז נוכל לבנות משערך שמורכב מסכום של מספר סופי N_s משערכים. אגב הנחה זו אינה שונה ממה שקורה בטומוגרפיה סטוכסטית כפי שראינו ב 0, גם שם הסימולציה נעצרת לאחר כמות מקסימלית מוגדרת של פיזורים, ולמעשה מבצעת בדיוק את אותה ההזנחה.

3.6. בחירת הכמות הנדגמת מכל סדר

בעיה נוספת שנולדת בעת השימוש בשיטה של חלוקת המשערך לסכום של משערכים לסדרי הפיזור השונים, היא שבסוף כאשר אנו נבוא לבצע סימולציה, מוקצית לנו כמות מסוימת N_p של פוטונים שעבורם אנו צריכים להגריל מסלולים. נשאלת השאלה, כיצד עלינו לחלק את בנק הפוטונים הזה בין המשערכים השונים, שכן המשערכים בלתי תלויים זה בזה. כמות הפוטונים שנקצה לכל משערך, תשפיע כמובן באופן ישיר על השונות שלו, ככל שנקצה עבורו יותר פוטונים השונות שלו תקטן ולהפך. חלוקה אחידה בין סדר הפיזור היא נאיבית, שכן בוודאי יהיו סדרים שהתרומות שלהם גדולות בהרבה מסדרים אחרים ולכן הדיוק של המשערך בהם יהיה יותר חשוך ולהפך. ניתן לנסח בעיית אופטימיזציה ולהגיע לחלוקה האופטימלית של פוטונים בין המשערכים השונים, המטרה שלנו היא למזער את השונות של המשערך הכולל:

$$\begin{aligned} & \min_{N_{p_1}, N_{p_2}, \dots, N_{p_{N_s}}} \text{Var} \left(N_p \cdot I_p \sum_{k=0}^{N_s} \hat{I}_{c_k} \right) \\ &= \min_{N_{p_1}, N_{p_2}, \dots, N_{p_{N_s}}} N_p^2 \cdot I_p^2 \text{Var} \left(\sum_{k=0}^{N_s} \hat{I}_{c_k} \right) \\ &= \min_{N_{p_1}, N_{p_2}, \dots, N_{p_{N_s}}} \sum_{k=0}^{N_s} \text{Var}(\hat{I}_{c_k}) \\ & \text{subject to: } \sum_{k=0}^{N_s} N_{p_k} = N_p \end{aligned}$$

השונות של משערך כל סדר הינה:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{I}_{c_k}) &= \text{Var} \left(\frac{1}{N_{p_k}} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} 1\{\text{photon } m \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell|k)} \right) = \\ &= \frac{1}{N_{p_k}^2} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} \text{Var} \left(1\{\text{photon } m \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell|k)} \right) = \frac{\sigma_k^2}{N_{p_k}} \end{aligned}$$

כאשר הכנסנו את הסימון σ_k^2 עבור השונות של אחד המשתנים הבלתי תלויים בתוך הסכום.

לכן בעיית האופטימיזציה הינה:

$$\begin{aligned} & \min_{N_{p_1}, N_{p_2}, \dots, N_{p_{N_s}}} \sum_{k=0}^{N_s} \frac{\sigma_k^2}{N_{p_k}} \\ & \text{subject to: } \sum_{k=0}^{N_s} N_{p_k} = N_p \end{aligned}$$

ננסח פונקציית מחיר חדשה באמצעות כופלי לגרנז':

$$L(N_{p_1}, N_{p_2}, \dots, N_{p_{N_s}}, \lambda) = \sum_{k=0}^{N_s} \frac{\sigma_k^2}{N_{p_k}} + \lambda \left(\sum_{k=0}^{N_s} N_{p_k} - N_p \right)$$

נגזור לפי N_{p_j} כלשהו ונשווה ל 0:

$$\frac{\partial L(N_{p_1}, N_{p_2}, \dots, N_{p_{N_s}}, \lambda)}{\partial N_{p_j}} = -\frac{\sigma_j^2}{N_{p_j}^2} + \lambda = 0$$

$$\frac{\sigma_j^2}{N_{p_j}^2} = \lambda$$

$$N_{p_j} = \sqrt{\frac{\sigma_j^2}{\lambda}}$$

נגור לפי הכופל λ ונשווה ל 0:

$$\frac{\partial L(N_{p_1}, N_{p_2}, \dots, N_{p_{N_s}}, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{k=0}^{N_s} N_{p_k} - N_p = 0$$

נציב:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N_s} N_{p_k} &= \sum_{k=0}^{N_s} \sqrt{\frac{\sigma_k^2}{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{N_s} \sigma_k = N_p \\ \sqrt{\lambda} &= \frac{\sum_{k=0}^{N_s} \sigma_k}{N_p} \end{aligned}$$

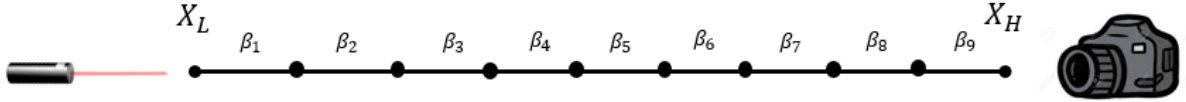
נמצא את N_{p_j} על ידי הצבה נוספת:

$$N_{p_j} = \sqrt{\frac{\sigma_j^2}{\lambda}} = \frac{\sigma_j}{\frac{\sum_{k=0}^{N_s} \sigma_k}{N_p}} = \frac{\sigma_j}{\sum_{k=0}^{N_s} \sigma_k} N_p$$

כלומר קיבלנו כי החלוקה האופטימלית של הפוטונים לפי סדרי הפיזור, נקבעת באופן יחסי לסטיות התקן של משערך הסדר. סדרים בעלי סטיות תקן גדולה יקבלו יותר פוטונים וסדרים בעלי סטיית תקן נמוכה יקבלו פחות. כמובן שאיננו יודעים לתת ביטוי אנליטי לסטיות התקן הללו, אך נוכל לשערך אותן. בתחילת הסימולציה נקצה כמות מסוימת של פוטונים שאותם נחלק שווה בשווה בין סדרי הפיזור השונים ונחשב את המשערכים לכל סדר פיזור. נחשב את סטיית התקן האמפירית של כל אחד מהמשערכים שקיבלנו, ועל סמך סטיות תקן אלו, נחשב את הכמות היחסית שיש לתת לכל משערך מתוך שאר הפוטונים שנשארו בסימולציה על פי החלוקה שפיתחנו.

3.7. דגימה אחידה בחד מימד ותוצאות

לאחר שהבנו כיצד לשערך את הערך הנקלט במצלמה באמצעות חלוקה לסכום של משערכים, כל אחד לסדר פיזור שונה, ולאחר שהבנו כיצד לחלק את הפוטונים בין המשערכים השונים, נשארת השאלה כיצד לדגום את המסלולים עבור כל משערך, כלומר מהי הפונקציה $q_L(\ell|k)$. נתחיל תחילה מתרחיש חד ממדי, כלומר תרחיש בו התווך הוא קו ישר בין שתי נקודות כלשהם X_L ו X_H . כפי שמתואר ב איור 14.



איור 14 - תרחיש חד ממדי

בתרחיש מסוג זה נציע את פונקציית הדגימה הפשוטה ביותר האפשרית, דגימה אחידה של k נקודות הפיזור בתוך התווך. בנוסף, נקודה שחשוב להבהיר, שכן היא תהיה נכונה גם בהמשך, אנחנו דוגמים אך ורק מסלולים אשר מסתיימים במצלמה, כלומר אנו מאלצים את המסלול ללכת מהנקודה האחרונה שאנו מגרילים אל המצלמה ואנו מאלצים שלא התרחשו בליעות לאורך המסלול. דבר זה הולך ליתר את פונקציית האינדיקטור במשערך שלנו, אבל כמובן שהדבר חוקי שכן מותר לנו לדגום מאיזה פונקציית צפיפות שאני רוצים. פונקציית צפיפות אשר דוגמת k נקודות באופן אחיד ובאופן בלתי תלוי אחת בשנייה הינה:

$$q_L(\ell|k) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{X_H - X_L} = \frac{1}{(X_H - X_L)^k}$$

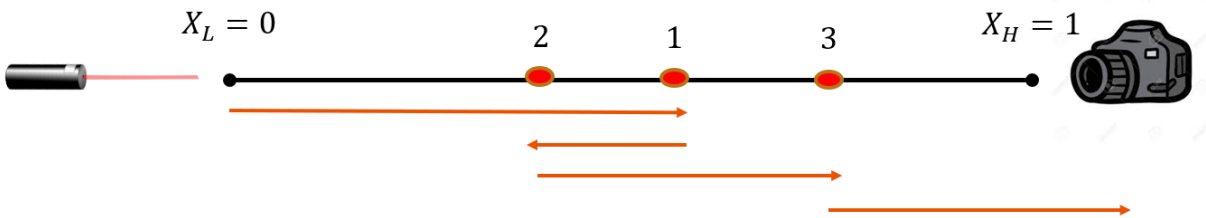
ולכן המשערך שלנו במקרה זה הינו:

$$\hat{I}_c = N_p \cdot I_p \sum_{k=0}^{N_s} \frac{1}{N_{p_k}} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} 1\{\text{photon } m \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell|k)}$$

כפי שאמרנו קודם אין צורך בפונקציית האינדיקטור שכן הפונקציה שלנו דוגמת אך ורק מסלולים שנגמרים במצלמה ולכן המשערך הינו:

$$\hat{I}_c = N_p \cdot I_p \sum_{k=0}^{N_s} \frac{(X_H - X_L)^k}{N_{p_k}} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} f_L(\ell)$$

דוגמא לדגימה אחידה בחד ממד ניתן לראות ב איור 15.

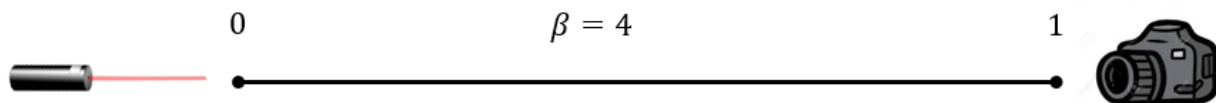


איור 15 - דגימה אחידה בחד ממד

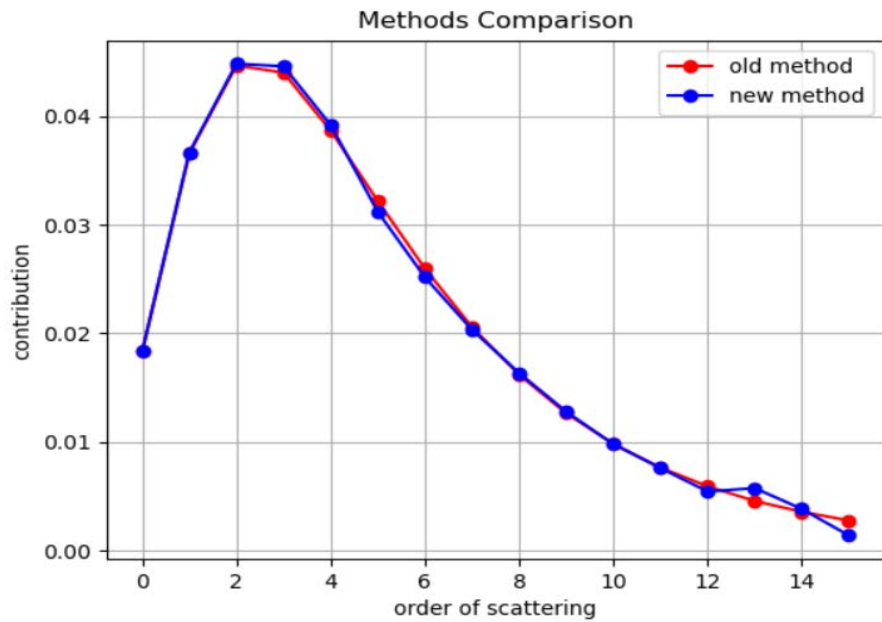
נראה קצת תוצאות של המשערך הנ"ל בתרחיש החד ממדי. מכיוון שהמשערך שלו הינו סכום של N_s משערים, הדרך הטובה ביותר להראות את נכונותו, היא להראות את הערך שהתקבל עבור כל משערך לכל סדר פיזור. את הערכים אנו משווים עם הערכים אשר התקבלו בטומוגרפיה סטוכסטית רגילה (על ידי סכימה של הערכים שהתקבלו בכל סדר פיזור). בשני התוצאות המוצגות, הפוטונים נכנסים לתווך מצד שמאל בנקודה $X_L = 0$. והמצלמה נמצאת בקצה הימני בנקודה X_H .

נתחיל מתרחיש פשוט עם תווך חד ממדי אחיד, כלומר מקדם הניחות קבוע בכל התווך ושווה ל $\beta = 4$ כפי שניתן לראות ב איור 16.

אלבדו הפיזור הוא $\bar{\omega} = 1$, כלומר לא מתרחשת בליעה. פונקציית הפאזה אחידה $P = \frac{1}{2}$. סדר הפיזור המקסימלי הוא $N_s = 15$. התווך הוא בעל אורך צלע של 1. לטובת הסימולציה הוגרלו $N_p = 5 \cdot 10^5$ פוטונים. את התוצאות ניתן לראות ב איור 17.



איור 16 - תרחיש חד ממדי תווך אחיד

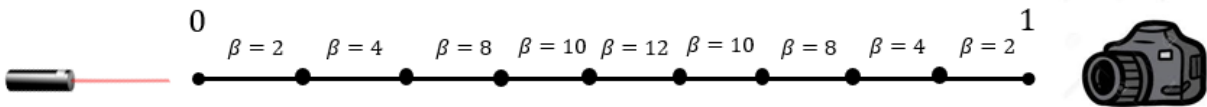


איור 17 - תרחיש חד ממדי תווך אחיד תוצאות

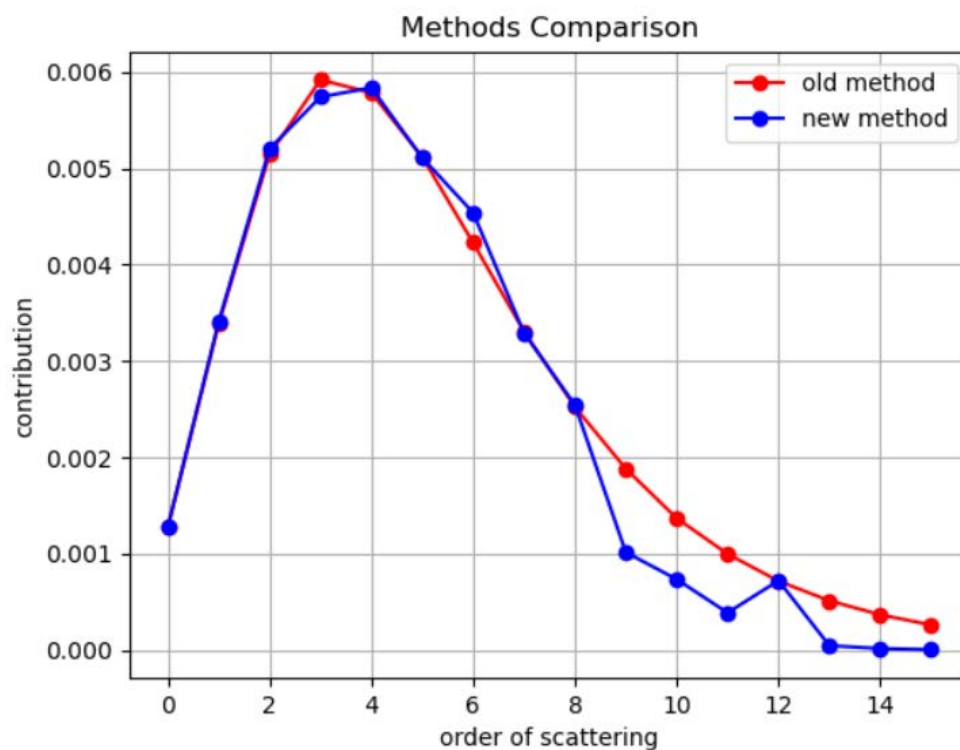
ניתן לראות שבתרחיש פשוט זה התוצאות של המודל החדש שלנו זהות כמעט לחלוטין לתוצאות של המודל המקורי. זמן הריצה של המודל שלנו היה 125 שניות בעוד הזמן הריצה של המודל המקורי היה 144 שניות, שיפור משמעותי.

נעבור לתרחיש מעניין יותר, את מקדמי הניחות ניתן לראות ב איור 18 .

אלבדו הפיזור הוא $\bar{\omega} = 0.8$. פונקציית הפאזה אחידה $P = \frac{1}{2}$. סדר הפיזור המקסימלי הוא $N_s = 15$. התווך הוא בעל אורך צלע של 1. לטובת הסימולציה הוגרלו $N_p = 5 \cdot 10^5$ פוטונים. את תוצאות המודל הקדמי ניתן לראות ב איור 19 .



איור 18 - תרחיש חד ממדי מורכב

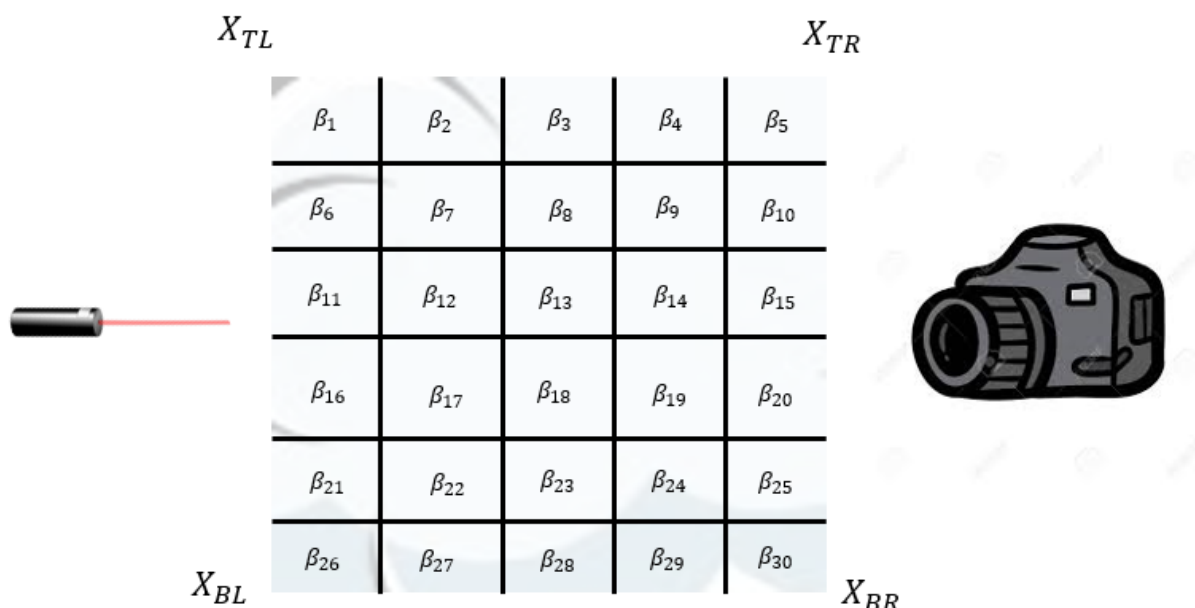


איור 19 - תרחיש חד ממדי מודל מורכב, תוצאות

ניתן לראות שכעת המודל הקדמי שהצענו הרבה יותר רועש, אך עדיין נאמן באופן לא רע בכלל למודל של טומוגרפיה סטוכסטית רגילה. זמן הריצה של המודל שלנו היה 178 שניות בעוד הזמן הריצה של המודל המקורי היה 408 שניות, שיפור משמעותי אפילו יותר מאשר בתרחיש הפשוט.

3.8. בעיות בדגימה אחידה בדרג מימד

למרות שהתוצאות בחד ממד נראות לא רעות, כאשר ניסינו לעשות את המעבר לדרג מימד, נתקלנו בבעיה שלא מאפשרת לדגום בצורה אחידה דומה גם בתרחיש דו ממדי, ובנוסף מראות שהתוצאות הטובות בתרחיש החד ממדי קרו עם הרבה מזל. תרחיש דו ממדי הוא תרחיש בו התווך הוא מלבן התחום על ידי ארבע נקודות כפי שמוצג ב איור 20.



איור 20 - תרחיש דו ממדי

הבעיה נובעת משתי פונקציות הצפיפות שאנו מחלקים זו בזו, האמיתית וזו שאנו דוגמים ממנה:

$$\frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell|k)}$$

צריך לשים לב ששתי הפונקציות האלה ידברו למעשה על אותם משתנים אקראיים עם אותם יחידות מידה. פונקציית הצפיפות האמיתית, כפי שראינו ב 3.4, נוצרה כמכפלה של פונקציות צפיפות של מקטעים שונים בלתי תלויים. ניזכר בפונקציית הצפיפות של מקטע אחד כזה:

$$\beta_k T(x_{k-1} \rightarrow x_k) \bar{\omega}_k P(x_{k-1} \rightarrow x_k \rightarrow x_{k+1})$$

זוהי פונקציה צפיפות שמורכבת ממכפלה של שלושה משתנים בלתי תלויים גם כן, המשתנה הראשון הוא מרחק על הקרן שהפוטון עובר עד לאינטראקציה, והיחידות של פונקציית הצפיפות הזו הינן $[m^{-1}]$. המשתנה השני הוא האם היה פיזור או לא, לפונקציית ההסתברות של משתנה זה אין יחידות. המשתנה השלישי הוא הכיוון אליו התבצע הפיזור, היחידות של פונקציית הצפיפות של משתנה זה הינן $[rad^{-1}]$. כלומר יחידות המידה של פונקציית הצפיפות

של מקטע הינן $[(m \cdot rad)^{-1}]$ ויחידות המידה של פונקציית צפיפות של מסלול בעל k מקטעים הינה $[(m \cdot rad)^{-k}]$. לעומת זאת, אם היינו רוצים ליישם את הדגימה האחידה בתווך דו ממדי, כפי שעשינו בחד ממד, ובהנחה שהתווך הוא ריבועי, היינו מקבלים פונקציית צפיפות מהצורה:

$$q_L(\ell|k) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{(X_H - X_L)^2} = \frac{1}{(X_H - X_L)^{2k}}$$

שיחידות המידה שלה הן $[m^{-2k}]$ מכיוון שהיא דוגמת נקודות ולא דוגמת מרחקים וזוויות, כלומר אנחנו בכלל לא מדברים על אותם משתנים אקראיים ולכן לא ניתן לבצע חלוקה הגיונית בין שתי הפונקציות האלה. למה לא ראינו את הבעיה הזאת בחד ממד? בעיקר בגלל הרבה ובגלל פונקציית הפאזה. בתרחיש חד ממדי, פונקציית הפאזה היא פונקציה של משתנה אקראי בדיד בעלת שני כיווני פיזור אפשריים ולכן היא חסרת יחידות. לכן פונקציית הצפיפות האמיתית של המסלול, היא אך ורק פונקציה שדוגמת מרחקים על גבי קרניים, ולכן יחידות המידה שלה במקרה זה יהיו $[m^{-k}]$, בדיוק כמו פונקציית הצפיפות האחידה החד ממדית שדוגמת נקודות על הקרן ולכן בעלת יחידות מידה זהות. התיקון שנובע מהדגימה האחידה על גבי כל הקטע הוא קירוב טוב לתיקון שהיינו צריכים לבצע אם היינו דוגמים כפי שנסביר ב 3.9. בתרחיש דו ממדי לעומת זאת, פונקציית הפאזה הופכת לפונקציה של משתנה אקראי רציף, מכיוון שכל זווית פיזור יכולה להתקבל, ועל כן היחידות שלה הינן $[rad^{-1}]$. כלומר בעוד בחד ממד הפילוג האמיתי של מסלול מיוצג על ידי דגימה של מרחקים על קרניים בלבד, בדו ממד הוא מיוצג על ידי דגימה של מרחקים על קרניים ושל כיווני קרניים. דבר זה מכריח את פונקציית הפילוג האחרת שאנו רוצים לדגום ממנה, "לשחק את אותו המשחק" ולדגום משתנים מאותו הסוג, ולכן הדגימה האחידה שלנו קורסת בתרחיש דו ממדי. למעשה המסקנה פה היא אפילו יותר קשה, לא ניתן לדגום את מסלולי הפיזור על ידי דגימת נקודות מראש בתרחיש דו ממדי, אלא חייבים לעשות תהליך דומה של דגימת מרחקים וזוויות. למרות הגילוי הזה לא אמרנו נואש, ובפרק הבא נראה איך למרות הבעיה הזו ניתן לעשות עדיין תהליך דגימה שהוא הרבה יותר יעיל ופשוט.

3.9. דגימת מסלול איטרטיבית קלה

לאחר שהבנו את הבעייתיות שבדגימה אחידה כאשר עוברים לתרחיש דו ממדי, ננסה להציע חלופה, שיטת דגימה פשוטה יותר, אשר תפתור לנו את בעיית היחידות. השיטה שאנחנו מציעים בעצם לוקחת את התהליך האיטרטיבי, שקורה כיום בטומוגרפיה סטוכסטית ומפשיטה אותו. הרעיון הוא פשוט, כזכור החלק הכי כבד חישובית בעת תהליך הדגימה האיטרטיבי של טומוגרפיה סטוכסטית, הוא חישוב המרחק על הקרן שהפוטון עובר עד לאינטראקציה הבאה. התהליך הזה כבד מכיוון שהוא מצריך מאיתנו לסכום בצורה איטרטיבית איברים לתוך אינטגרל עד אשר מגיעים לערך הרצוי כפי שהסברנו ב 3.1:

$$\tau = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \beta(x) dx$$

אם כך, בוא ננסה לבודד את הבעיה ולהתגבר עליה בלבד. נבצע תהליך דגימה איטרטיבי זהה, אבל כאשר נרצה להגריל את המרחק על הקרן, במקום להגריל אותו בצורה הנוכחית, פשוט נגריל אותו בצורה אחידה על הקרן מהמיקום הנוכחי אל קצה התווך כפי שמודגם באיור איך נעשה את הדגימה הזאת?

א. נחשב את נקודת החיתוך עם הגבולות של התווך בכיוון ההתקדמות הנוכחי של הפוטון.

ב. נחשב את המרחק בין המיקום הנוכחי של הפוטון לנקודת החיתוך עם הגבולות L_B .

ג. נגריל משנה אקראי מפילוג אחיד בין 0 ל L_B :

$$f_L(l) = \frac{1}{L_B}$$

ד. לפי המרחק המוגרל נמצא את המיקום החדש של הפוטון.

איך צריך להראות המשערך שלנו בתהליך דגימה כזה?

ניזכר כי הצורה הכללית של המשערך הינה:

$$\hat{I}_c = I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell)}$$

נסתכל על הביטוי שעשה לנו בעיות בדגימה האחידה ונציב בתוכו את פונקציית הצפיפות החדשה שאנו דוגמים ממנה (נזכיר גם כי אנו מניחים שלא הייתה בליעה ולכן הצפיפות החדשה לא מכילה את אלבדו הפיזור).

$$\frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell)} = \frac{\prod_i \beta_i T(x_{i-1} \rightarrow x_i) \bar{\omega}_i P(x_{i-1} \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1})}{\prod_i \frac{1}{L_{B_i}} P(x_{i-1} \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1})} = \prod_i \beta_i T(x_{i-1} \rightarrow x_i) \bar{\omega}_i L_{B_i}$$

במקרה זה יחידות המידה מסתדרות וקיבלנו משערך חדש שניתן להשתמש בו, עם תהליך דגימה הרבה יותר פשוט בצורה משמעותית.

ניתן גם לקחת את הרעיון צעד קדימה, ובמקום לבצע דגימה אחידה נאיבית, להשתמש במידע שיש לנו על מקדם הניחות במיקום הנוכחי של הפוטון β_k . במקום לדגום מפילוג אחיד נוכל לדגום מפילוג אסקפוננציאלי עם פרמטר β_k :

$$l \sim \text{Exp}(\beta_k)$$

למה הדבר הגיוני?

ראינו כי ההעברה מהווה CDF של הדרך האופטית:

$$F_D(\tau) = P(D \leq \tau) = 1 - e^{-\tau} = 1 - e^{-\int_{x_k}^{x_{k+1}} \beta(x) dx}$$

במקרה שבו התווך אחיד בין הנקודות x_k ל x_{k+1} אז נקבל כי:

$$D = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \beta(x) dx = \beta_k |x_{k+1} - x_k|$$

ולכן אם נסתכל על המרחק לנקודת הפיזור הבאה ולא על הדרך האופטית בתור המשתנה האקראי שלנו נקבל כי:

$$D = \beta_k l$$

$$P(D \leq \tau) = P(\beta_k L \leq \beta_k l) = P(L \leq l) = 1 - e^{-\tau} = 1 - e^{-\beta_k l}$$

כלומר:

$$l \sim \text{Exp}(\beta_k)$$

המסקנה היא שבמקרה של תווך אחיד, דגימה פשוטה מפילוג אקספוננציאלי, עם מקדם הניחות במיקום הפוטון הנוכחי, שקולה למעשה לדגימה מפונקציית הפילוג האמתי. במקרה שהתווך אינו אחיד אך לא משתנה מהר מדי, זה עדיין קרוב טוב לתהליך הדגימה האמתי, ומקל מאוד מבחינה חישובית. המשערך שלנו בעת השימוש בדגימה הזאת יהיה:

$$\frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell)} = \frac{\prod_i \beta_i T(x_{i-1} \rightarrow x_i) \bar{\omega}_i P(x_{i-1} \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1})}{\prod_i \beta_{i-1} e^{-\beta_{i-1} \|x_{i-1} - x_i\|} P(x_{i-1} \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1})} = \prod_i \frac{\beta_i T(x_{i-1} \rightarrow x_i) \bar{\omega}_i}{\beta_{i-1} e^{-\beta_{i-1} \|x_{i-1} - x_i\|}}$$

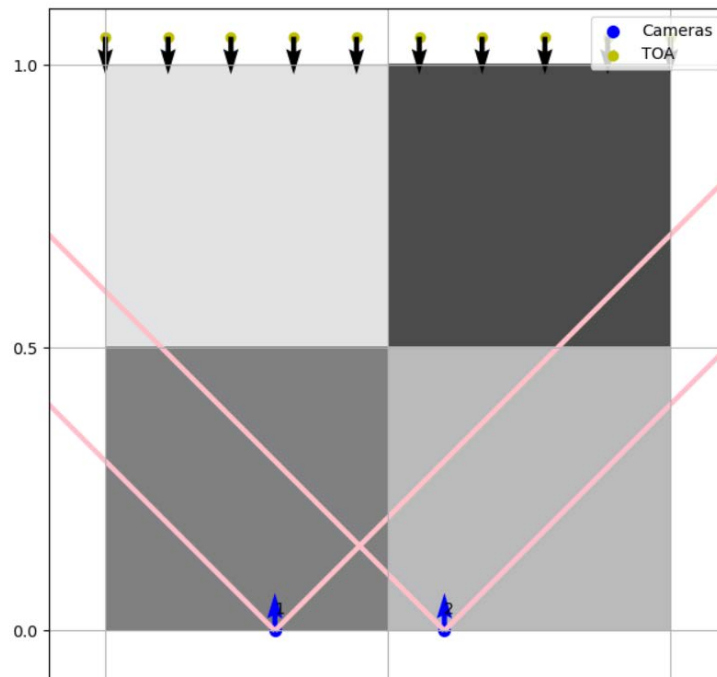
חשוב לסייג שאמנם הצגנו את זה כדגימה מפילוג אקספוננציאלי, אך לא כך בדיוק הדבר. מכיוון שאנו לא רוצים להגריל מרחק שיוציא אותנו מהתווך, הפילוג האקספוננציאלי עבר תהליך נרמול כך שלא נוכל להגריל ערכים כאלה שיוציאו אותנו מהתווך.

ומה לגבי משערך החלוקה לסדרי פיזור שהסברנו עליו לעומק ב 0. הסיבה שהיינו צריכים לפתח את התיאוריה לגביו, הייתה שרצינו לעשות דגימה אחידה מראש ולא לדגום בצורה איטרטיבית. כאשר אנו עושים את הדגימה האטרטיבית, רק בצורה שונה כמו עכשיו, לכאורה אין יותר צורך בשימוש בו, ויכולנו לחזור למשערך המקורי כפי שהצגנו. אולם, מכיוון שזהו חלק מהותי בפרויקט, וחידוש מעניין, החלטנו לנסות להמשיך ולבחון את התוצאות של משערך החלוקה לסדרי פיזור, תוך שימוש בשיטת הדגימה החדשה שאנו מציעים. איך עושים זאת? תהליך הדגימה האטרטיבי מבוצע בצורה זהה למה שהוצג, ההבדל היחיד הוא שאחרי k נקודות פיזור שהוגרלו, אנו מאלצים את הפוטון להגיע למצלמה ובכך הופכים את $q_L(\ell)$ ל $q_L(\ell|k)$. כתוצאה מכך במקטע האחרון אנו גם לא מגרילים למעשה מפונקציית הפאזה, ולכן פונקציית הצפיפות של המקטע האחרון אל עבר המצלמה תהיה:

$$P(x_{f-2} \rightarrow x_{f-1} \rightarrow x_f) T(x_{f-1} \rightarrow x_f)$$

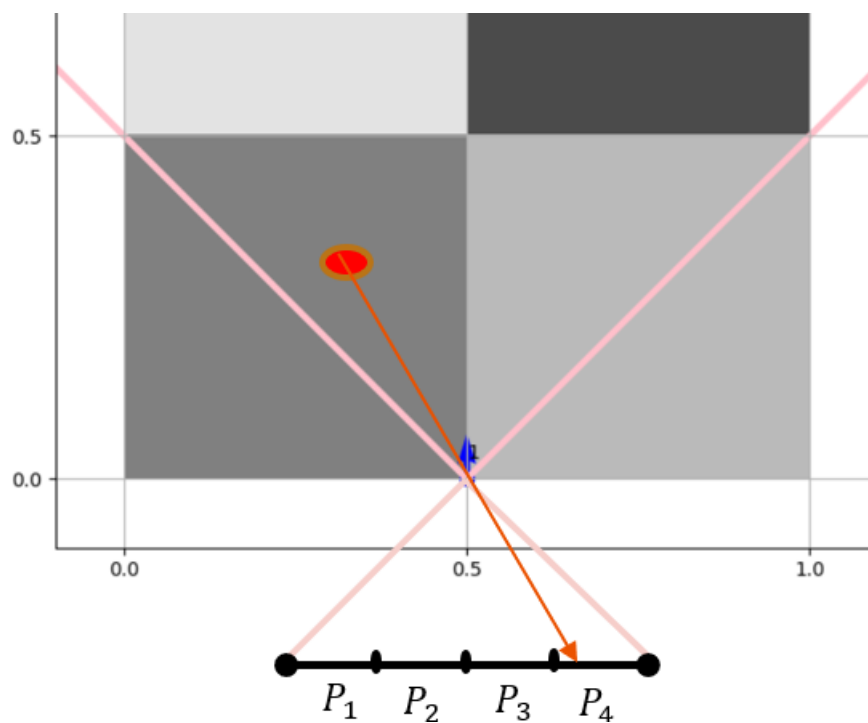
3.10. מפתחים של המצלמות

נקודה קטנה שחשוב להבהיר ולא התייחסנו אליה עד עכשיו היא שבתרחיש דו ממדי למצלמות יש מפתחים. מה הכוונה? מצלמה לא יכולה לראות את כל התווך אלא רק חלק מסוים שלו, תלוי בתכונות של המצלמה, כפי שניתן לראות ב איור 21 .



איור 21 - מפתחים של מצלמות

מבחינת הסימולציה, ההשפעה היחידה של אפקט זה הוא בפונקציית האינדיקטור, כלומר לא מספיק שפוטון יגיע למצלמה אלא צריך שהוא יגיע מזווית שהמצלמה באמת יכולה לראות אותו. בנוסף מצלמה דו ממדית אשר הינה מצלמת חריר מורכבת ממספר פיקסלים. כלומר כל קרן אור נקלטת בפיקסל מסוים לפי הזווית ממנה היא הגיעה כפי שניתן לראות ב איור 22 . אפקטיבית מה שזה אומר מבחינת הסימולציה הוא שכל מסלול אשר הגרלנו יכול להיקלט רק בפיקסל מסוים במצלמה, ולמעשה המצלמה כאילו מורכבת ממספר מצלמות כמספר הפיקסלים שלה. שתי תופעות אלו לא קריטיות מבחינת התיאוריה, אבל כן ממומשות בקוד ולכן חשוב להכיר אותן.



איור 22 - מצלמת חריר עם פוטון שנקלט בפיקסל 4

3.11. פתרון הבעיה ההופכית

עד אתה התעסקנו לאורך כל הדו"ח בבניית המודל הקדמי, אמנם בסוף המטרה שלנו היא לא לבנות מודל קדמי חדש אלא לפתור בעיית שחזור של טומוגרפיה. הסיבה שלא התייחסנו בכלל לבעיית השחזור עד עכשיו הוא שהפתרון שלה איננה מורכב מדי, ויחסית גנרי לכל שיטת דגימה שבעזרתה נרצה ליצור את המודל הקדמי שלנו. נתאר את תהליך פתרון בעיית השחזור כעת, ניזכר כי הבעיה אותה אנו רוצים לפתור הינה:

$$\vec{\beta}^* = \arg \min_{\vec{\beta}} \frac{1}{2} \|I(\vec{\beta}) - I_c\|^2$$

כאשר I_c הוא הערך אשר נקלט במצלמה ו $I(\vec{\beta})$ הוא הערך אשר היה צריך להתקבל במצלמה לפי המודל הקדמי שלנו ובהינתן מקדמי הניחות הנוכחיים. את המקדם של החצי הוספנו לשם נוחות בגזירה. את הבעיה נרצה לפתור באמצעות אלגוריתם איטרטיבי של gradient decent, לשם כך עלינו לגזור את פונקציית המחיר לפי כל אחר ממקדמי הניחות, שהם האיברים בווקטור $\vec{\beta}$. נגזור לפי אחת הקואורדינטות בווקטור:

$$\frac{\partial \frac{1}{2} \|I(\vec{\beta}) - I_c\|^2}{\partial \beta_j} = \|I(\vec{\beta}) - I_c\| \cdot \frac{\partial I(\vec{\beta})}{\partial \beta_j}$$

נגזור את המודל הקדמי:

$$\frac{\partial I(\vec{\beta})}{\partial \beta_j} = \frac{\partial I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} 1\{\text{photon } k \text{ reached camera}\} \cdot \frac{f_L(\ell)}{q_L(\ell)}}{\partial \beta_j}$$

נוכל להוריד את פונקציית האינדיקטור שכן כפי שהסברנו קודם הפונקצייה $q_L(\ell)$ שממנה אנו מגרילים את המסלולים בסופו של דבר מגרילה אך ורק מסלולים אשר מסתיימים במצלמה. לשם פשטות נבחר לגזור את המודל אשר משתמש בדגימה האחידה על הקרן שהראנו ב 3.9, אך ניתן להרחיב זאת לכל פונקצייה שממנה דוגמים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\vec{\beta})}{\partial \beta_j} &= \frac{\partial I_p \cdot \sum_{k=1}^{N_p} \frac{f_L(\ell_k)}{q_L(\ell_k)}}{\partial \beta_j} = I_p \sum_{k=1}^{N_p} \frac{\partial f_L(\ell_k)}{\partial \beta_j q_L(\ell_k)} \\ &= I_p \sum_{k=1}^{N_p} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \prod_i \beta_i T(x_{i-1} \rightarrow x_i) \bar{\omega}_i L_{B_i} \\ &= I_p \sum_{k=1}^{N_p} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \prod_i \beta_i e^{-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \beta(x) dx} \bar{\omega}_i L_{B_i} \end{aligned}$$

נשתמש בכלל לנגזרת של מכפלה:

$$I_p \sum_{k=1}^{N_p} \sum_i \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\beta_i e^{-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \beta(x) dx} \bar{\omega}_i L_{B_i} \right) \cdot \frac{\prod_m \beta_m e^{-\int_{x_{m-1}}^{x_m} \beta(x) dx} \bar{\omega}_m L_{B_m}}{\beta_i e^{-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \beta(x) dx} \bar{\omega}_i L_{B_i}}$$

כאן הנגזרת מתחלקת לשני מקרים:

אם $\beta_j \neq \beta_i$, כלומר הפיזור של המקטע הנוכחי לא היה באותו הווקסל שלפיו אנו גוזרים אזי:

$$= I_p \sum_{k=1}^{N_p} \sum_i -\beta_i \bar{\omega}_i L_{B_i} e^{-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \beta(x) dx} L_{\beta_j} \cdot \frac{\prod_m \beta_m e^{-\int_{x_{m-1}}^{x_m} \beta(x) dx} \bar{\omega}_m L_{B_m}}{\beta_i e^{-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \beta(x) dx} \bar{\omega}_i L_{B_i}}$$

כאשר L_{β_j} הוא המרחק שהפוטון עבר בווקסל שלפיו אנו גוזרים:

$$= I_p \sum_{k=1}^{N_p} \sum_i -L_{\beta_j} \cdot \prod_m \beta_m e^{-\int_{x_{m-1}}^{x_m} \beta(x) dx} \bar{\omega}_m L_{B_m}$$

$$I_p \sum_{k=1}^{N_p} \sum_i -L_{\beta_j} \cdot \frac{f_L(\ell_k)}{q_L(\ell_k)} = I_p \sum_{k=1}^{N_p} \frac{f_L(\ell_k)}{q_L(\ell_k)} \sum_i -L_{\beta_j}$$

ואם $\beta_j = \beta_i$, כלומר הפיזור של המקטע הנוכחי היה באותו הווקסל שלפיו גוזרים, אזי:

$$= I_p \sum_{k=1}^{N_p} \sum_i \bar{\omega}_i L_{B_i} \left(e^{-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \beta(x) dx} - L_{\beta_j} \beta_i e^{-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \beta(x) dx} \right) \cdot \frac{\prod_m \beta_m e^{-\int_{x_{m-1}}^{x_m} \beta(x) dx} \bar{\omega}_m L_{B_m}}{\beta_i e^{-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \beta(x) dx} \bar{\omega}_i L_{B_i}}$$

$$= I_p \sum_{k=1}^{N_p} \sum_i \left(\frac{1}{\beta_i} - L_{\beta_j} \right) \cdot \prod_m \beta_m e^{-\int_{x_{m-1}}^{x_m} \beta(x) dx} \bar{\omega}_m L_{B_m}$$

$$= I_p \sum_{k=1}^{N_p} \sum_i \left(\frac{1}{\beta_i} - L_{\beta_j} \right) \cdot \frac{f_L(\ell_k)}{q_L(\ell_k)} = I_p \sum_{k=1}^{N_p} \frac{f_L(\ell_k)}{q_L(\ell_k)} \sum_i \left(\frac{1}{\beta_i} - L_{\beta_j} \right)$$

כלומר בפועל קל מאוד לחשב את הגרדיאנט תוך כדי הסימולציה של המודל הקדמי על ידי סכימה איטרטיבית. עלינו לחשב את המרחק שהפוטון עבר במהלך המסלול בכל אחד מהווקסלים, ובנוסף בכל ווקסל שהתרחש פיזור מתווספת תרומה נוספת. אולם כאן מסתמנת אכזבה קלה. הסיבה הראשונית שבגללה הצענו את השיטה החדשה, היה כדי למנוע חישוב איטרטיבי של אינטגרל בכל דגימה, כפי שהסברנו ב 3.1. כעת אנו רואים שכדי לחשב את הגרדיאנט אנו צריכים לדעת מהו המרחק שעבר כל פוטון בכל ווקסל. בטומוגרפיה סטוכסטית רגילה, ניתן לחשב גדלים אלו תוך כדי התהליך האיטרטיבי של חישוב האינטגרל. בשיטה שלנו, נאלץ לעשות את החישוב הזה כחישוב צד בעל קושי חישובי דומה לחישוב האינטגרל. לכן, למרות שהמודלים הקדמיים החדשים שאנו מציעים, מהירים בהרבה מהמודל הנוכחי, כפי שנראה בהמשך, אנו לא צפויים לראות שיפור משמעותי בזמן שייקח לפתור את בעיית השחזור.

3.12. פתרון הבעיה ההופכית עם חלוקה לסדרי פיזור

נתבונן במודל הקדמי שלנו אשר נבנה על ידי חלוקה לסדרי פיזור:

$$I(\vec{\beta}) = N_p \cdot I_p \sum_{k=0}^{N_s} \frac{1}{N_{p_k}} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} \frac{f_L(\ell_m)}{q_L(\ell_m|k)}$$

במקרה זה מתקיים כי:

$$\frac{\partial I(\vec{\beta})}{\partial \beta_j} = N_p \cdot I_p \sum_{k=0}^{N_s} \frac{1}{N_{p_k}} \sum_{m=1}^{N_{p_k}} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \frac{f_L(\ell_m)}{q_L(\ell_m|k)}$$

הראנו כבר כיצד לחשב את הגרדיאנט של הביטוי בתוך הסכום הפנימי. לכן כאשר רוצים לחלק לסדרי פיזור, כל מה שצריך הוא לחשב גרדיאנט לכל סדר פיזור בנפרד, באופן דומה לאיך שחושב הגרדיאנט בפרק הקודם, לחלק במספר המסלולים שהוגרלו מאותו סדר פיזור ולבסוף לסכום את הגרדיאנטים של סדרי הפיזור השונים.

3.13. פתרון הבעיה ההופכית עם מספר מצלמות

כיצד נפתור את הבעיה כאשר ברשותנו מדידות ממספר מצלמות? פשוט נגדיר פונקציית מחיר שהיא סכום פונקציות המחיר של כל אחת מהמצלמות:

$$\vec{\beta}^* = \arg \min_{\vec{\beta}} \sum_{c=1}^{N_c} \frac{1}{2} \|I(\vec{\beta}) - I_c\|^2$$

כאשר N_c הינו מספר המצלמות שיש ברשותנו.

במקרה זה הגרדיאנט יהיה:

$$\frac{\partial \sum_{c=1}^{N_c} \frac{1}{2} \|I(\vec{\beta}) - I_c\|^2}{\partial \beta_j} = \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \frac{1}{2} \|I(\vec{\beta}) - I_c\|^2 = \sum_{c=1}^{N_c} \|I(\vec{\beta}) - I_c\| \cdot \frac{\partial I(\vec{\beta})}{\partial \beta_j}$$

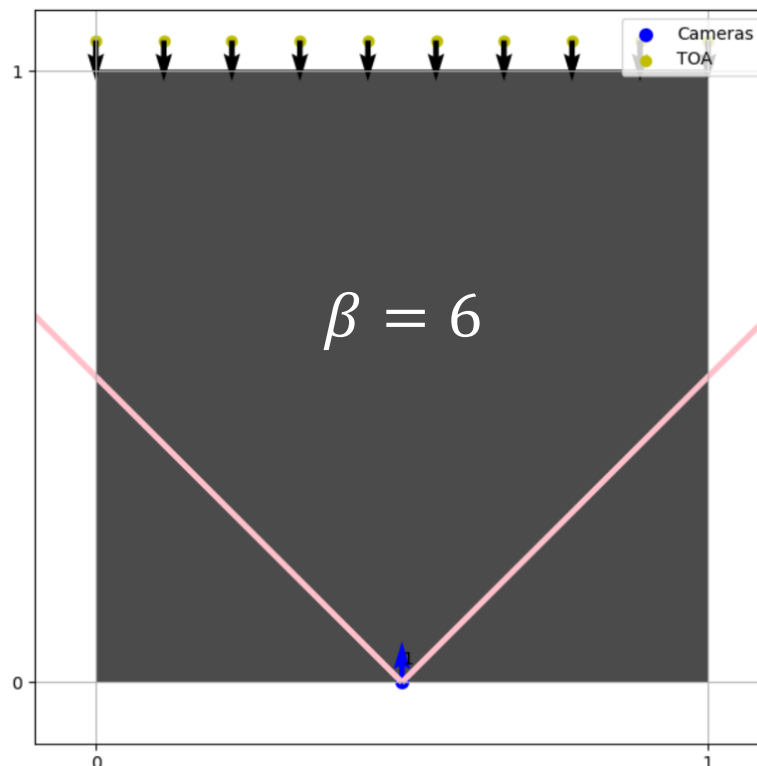
כלומר עלינו פשוט לסכום את הגרדיאנטים שחושבו עבור כל מצלמה, וזהו כיוון הגרדיאנט הכולל.

4. תוצאות

לאחר שהסברנו את כל התיאוריה מאחורי השיטות החדשות שאנו מציעים, כעת נראה קצת תוצאות של השיטה בהשוואה לטומוגרפיה סטוכסטית רגילה. בכל התוצאות השתמשנו בשיטה של חלוקה לסדרי פיזור, והגרלה איטרטיבית באמצעות דגימת מרחק אספוננציאלית כפי שמוסבר ב 3.9.

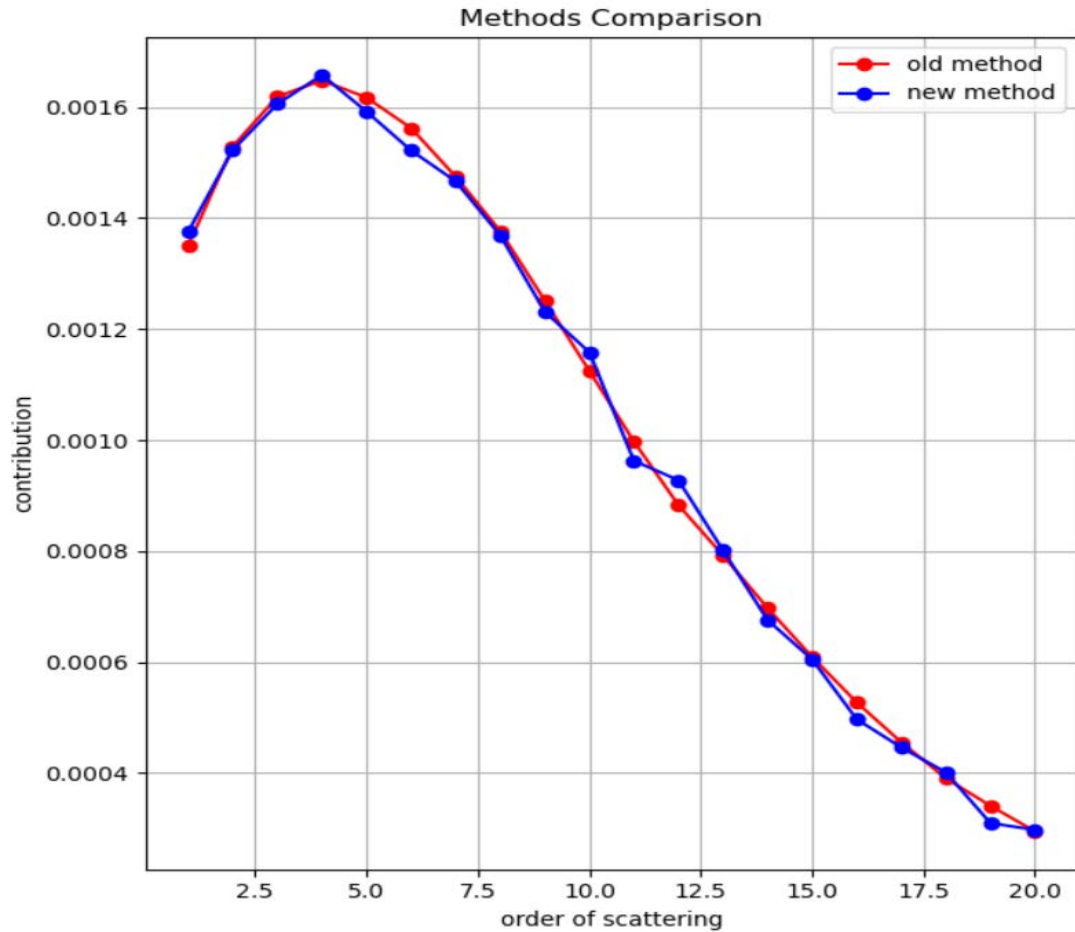
4.1. תוצאות מודל קדמי דו ממדי

נתחיל מתרחיש פשוט עם תווך דו ממדי אחיד, כלומר מקדם הניחות קבוע בכל התווך ושווה ל $\beta = 6$. אלבדו הפיזור הוא $\bar{\omega} = 1$, כלומר לא מתרחשת בליעה. פונקציית הפאזה אחידה $P = \frac{1}{2\pi}$. סדר הפיזור המקסימלי הוא $N_s = 20$. התווך הוא ריבועי בעל אורך צלע של 1. הפוטונים נכנסים מהחלק העליון של התווך בזווית של $-\frac{\pi}{2}$. לטובת הסימולציה הוגרלו $N_p = 5 \cdot 10^5$ פוטונים. כמו בתרחיש החד ממדי, אנו מציגים את השערך של כל אחד מסדרי הפיזור בנפרד. את התרחיש עם מיקום המצלמה ניתן לראות ב איור 23.



איור 23 - מודל קדמי, תווך דו ממדי אחיד

את תוצאות המודל הקדמי ניתן לראות ב. *Error! Reference source not found.*



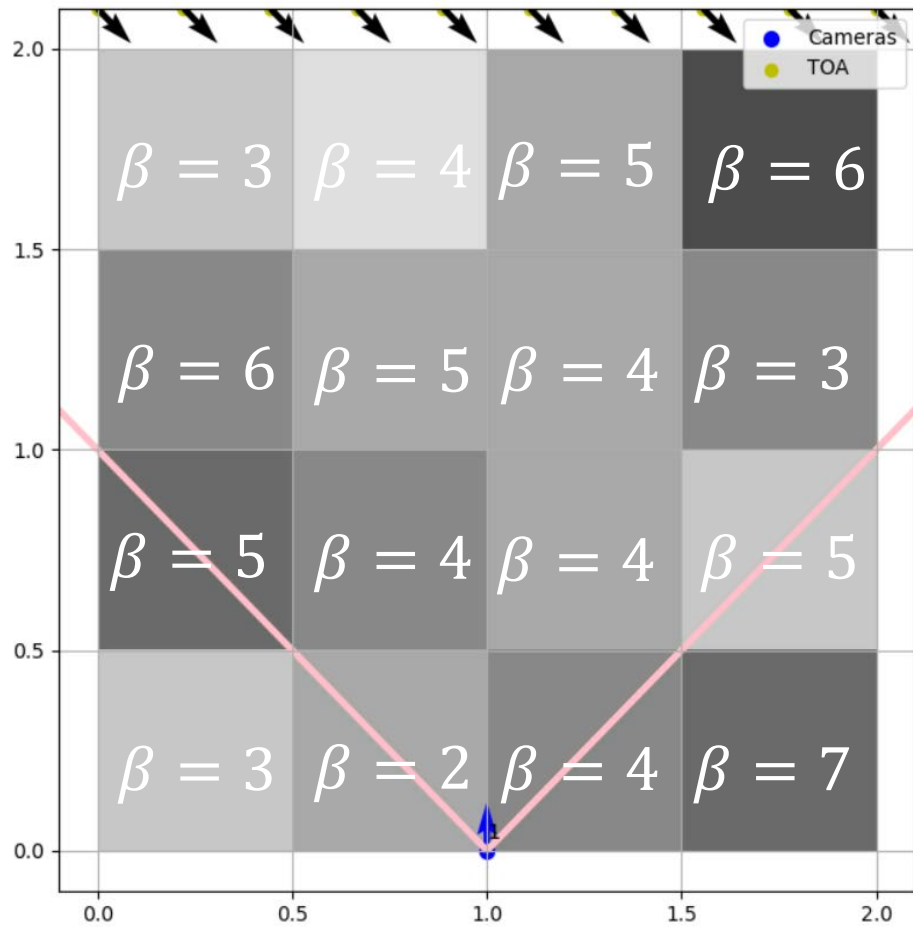
איור 24 - תוצאות מודל קדמי תוך דו ממדי אחיד

ניתן לראות שבתרחיש פשוט זה התוצאות של המודל החדש שלנו זהות כמעט לחלוטין לתוצאות של המודל המקורי. זמן הריצה של המודל שלנו היה 383 שניות בעוד הזמן הריצה של המודל המקורי היה 413 שניות, שיפור ניכר. כאשר הפעלנו גם את החישוב הנדרש על מנת לפתור את בעיית השחזור, קיבלנו תוצאה דומה.

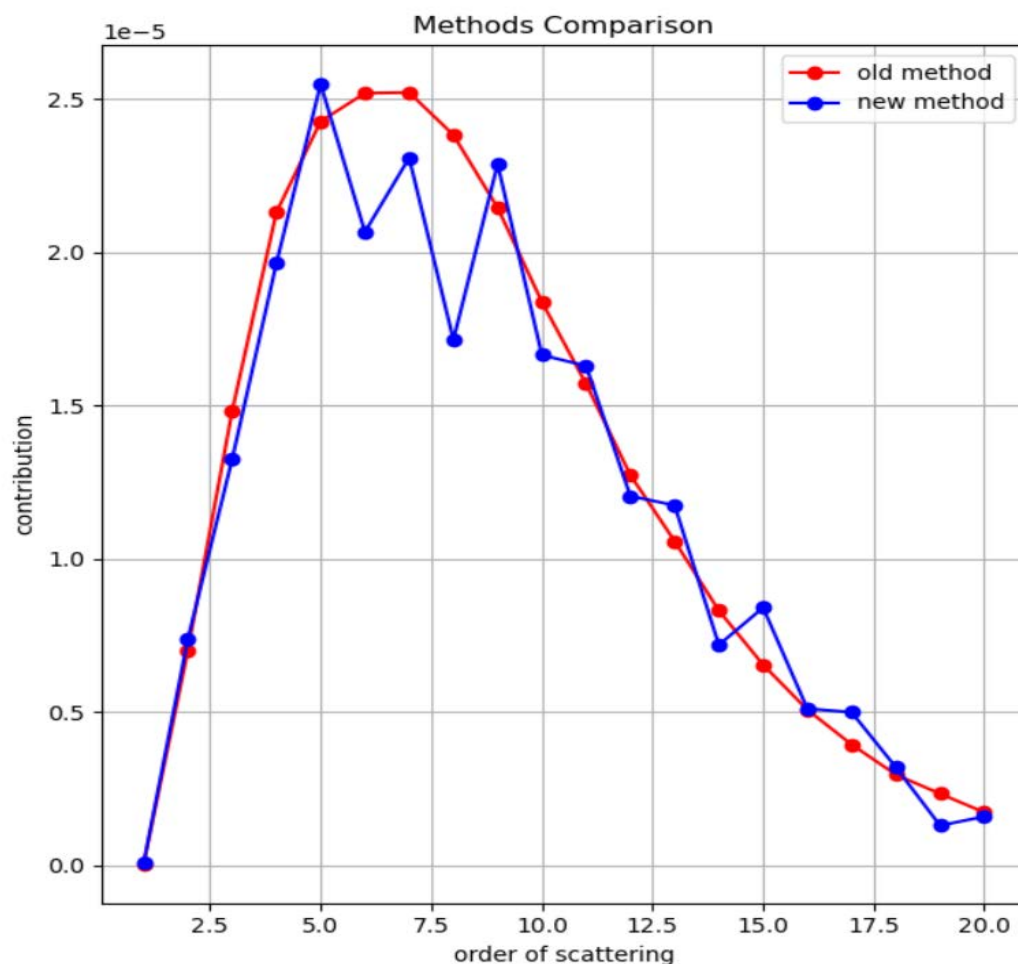
נעבור לתרחיש מעניין יותר, את מקדמי הניחות ניתן לראות ב איור 25.

אלבדו הפיזור הוא $\bar{\omega} = 0.8$. פונקציית הפאזה אחידה $P = \frac{1}{2\pi}$. סדר הפיזור המקסימלי הוא $N_s = 20$. התוך הוא ריבועי בעל אורך צלע של 2. הפוטונים נכנסים מהחלק העליון של התוך בזווית של $-\frac{\pi}{4}$. לטובת הסימולציה הוגרלו

$N_p = 5 \cdot 10^5$ פוטונים. את תוצאות המודל הקדמי ניתן לראות ב. *Error! Reference source not found.*



איור 25 - תרחיש דו ממדי מורכב

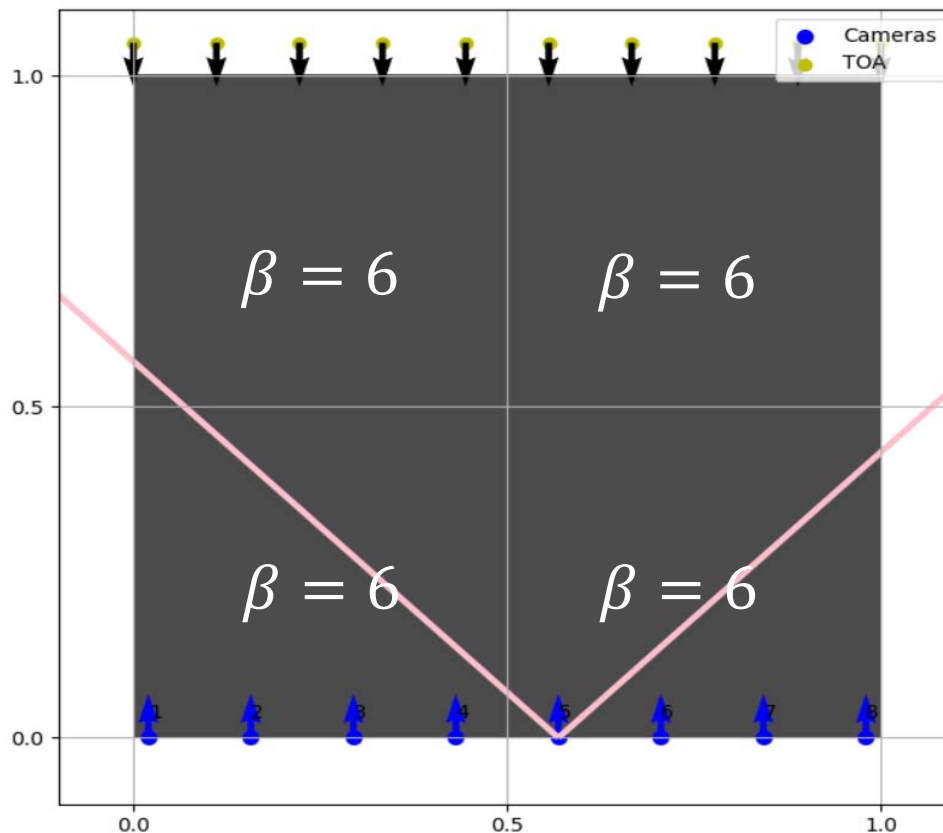


איור 26 - תוצאת תרחיש דו ממדי מורכב

ניתן לראות שכעת המודל הקדמי שהצענו הרבה יותר רועש, אך עדיין נאמן באופן לא רע בכלל למודל של טומוגרפיה סטוכסטית רגילה. רעשים קטנים אינם צריכים להדאיג אותנו יותר מדי, שכן תפקידו של המודל הקדמי הוא בסופו של דבר לאפשר לנו לחשב גרדיאנט ולבצע *gradient decent*. לכן גם אם כיוון הגרדיאנט רועש עדיין פונקציית המחיר תתקדם בכיוון הנכון. זמן הריצה של המודל שלנו היה 490 שניות בעוד הזמן הריצה של המודל המקורי היה 818 שניות, שיפור משמעותי אפילו יותר מאשר בתרחיש הפשוט. כאשר הפעלנו גם את החישוב הנדרש על מנת לפתור את בעיית השחזור, זמן הריצה של האלגוריתם שלנו היה 680 שניות, אכן ירידה משמעותית בשיפור כפי שאמרנו קודם, אך עדיין רואים שיפור.

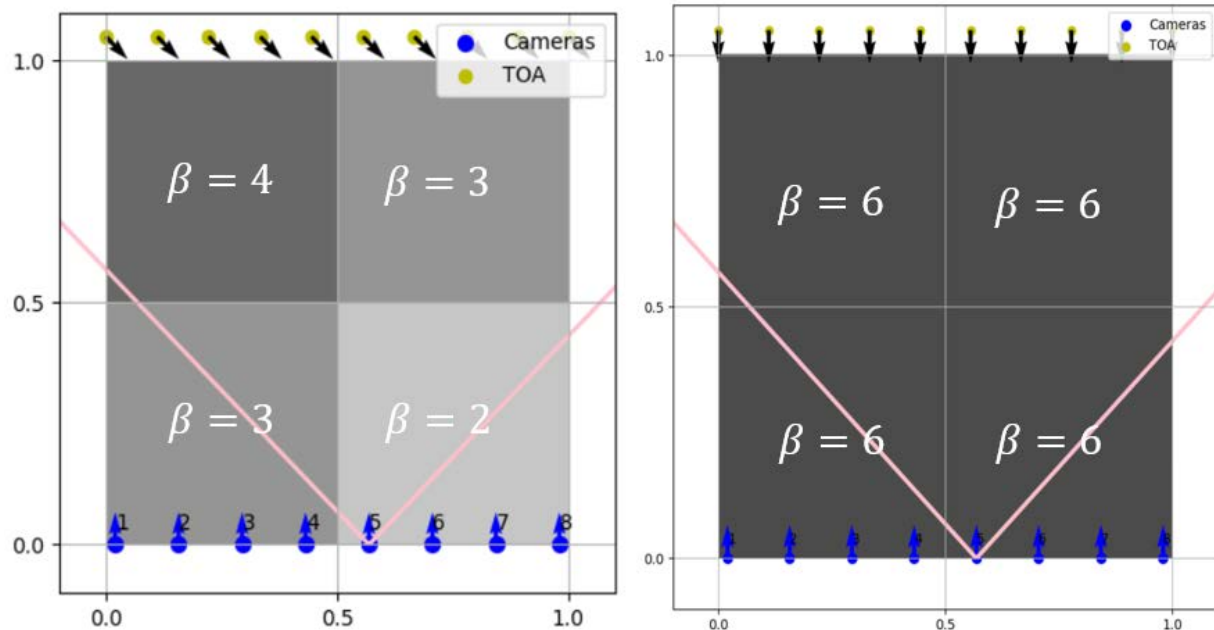
4.2. תוצאות שחזור דו מימד

לאחר שהראנו תוצאות שמוכיחות כי המודל הקדמי החדש שפיתחנו אכן נאמן למודל המקורי, נראה כמה תוצאות של פתרון בעיית השחזור. לצורך פתרון בעיית השחזור אנו צריכים לדעת מה הערך אשר נקלט במצלמה, עבור תווך מסוים, לשם כך, נשתמש בתוצאת הטומוגרפיה הסטוכסטית הרגילה בתור התוצאה אליה אנו משווים. בתור התחלה ניקח את התרחיש הפשוט אשר הצגנו ב 4.2, של תווך אחיד בעל מקדם ניחות של $\beta = 6$ אולם על מנת שהבעיה תהיה מעניינת, נחלק את התווך לארבעה ווקסלים, שבכל אחד מהם מקדם הניחות הוא 6. הסיבה שאנו עושים זאת היא כדי שיהיו ארבעה פרמטרים שעל האלגוריתם למצוא ולא אחד בלבד, משימה שעשויה להיות קלה מדי. אלבדו הפיזור הוא $\bar{\omega} = 1$. פונקציית הפאזה אחידה $P = \frac{1}{2\pi}$. סדר הפיזור המקסימלי הוא $N_s = 20$. התווך הוא ריבועי בעל אורך צלע של 1. הפוטונים נכנסים מהחלק העליון של התווך בזווית של $-\frac{\pi}{2}$. בנוסף לצורך השחזור אנו נשתמש ב 8 מצלמות אשר כל אחת מהן מורכבת מעשרה פיקסלים. תאור של התרחיש ניתן לראות ב איור 27. המפתחים של כל המצלמות זהים לזה של מצלמה 5 אשר מסומנת באיור.



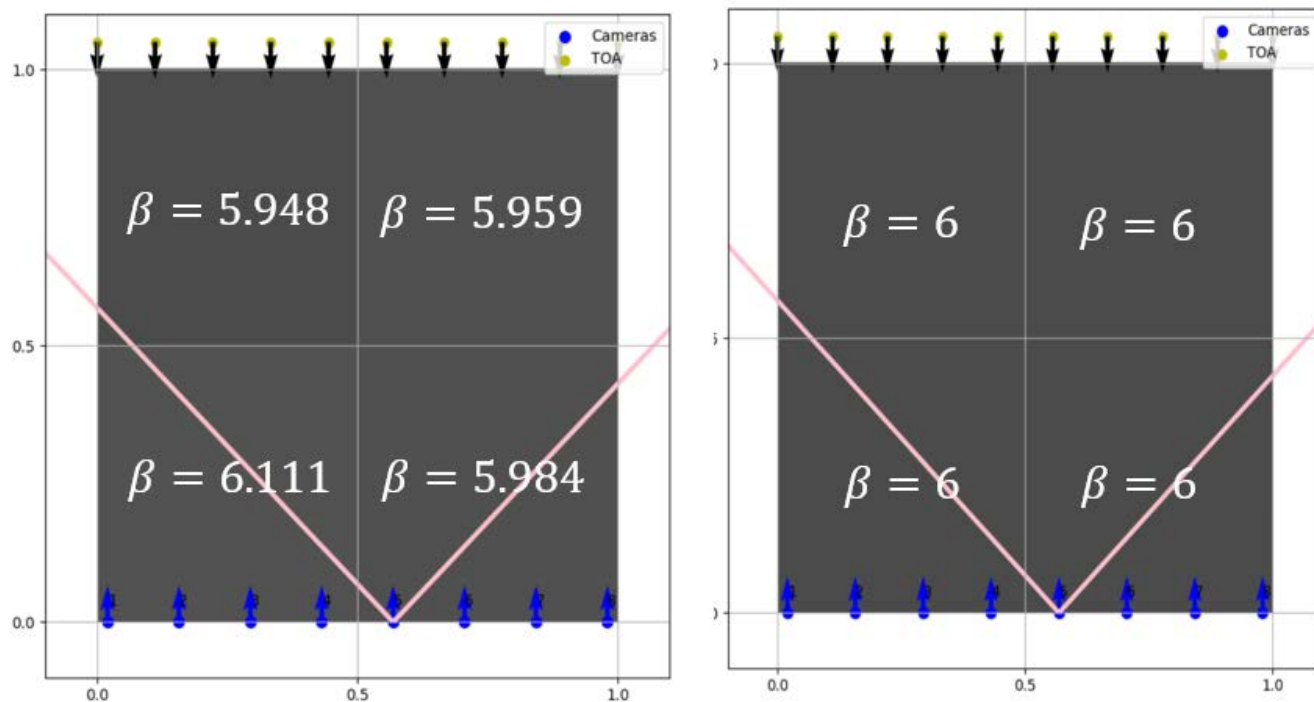
איור 27 - תרחיש שחזור תווך אחיד, המפתחים של כל המצלמות זהים

לצורך פתרון הבעיה, הפעלנו את אלגוריתם ה gradient decent במשך 800 איטרציות, אתחלנו את התווך עם מקדמי ניחות כפי שאפשר לראות ב .Error! Reference source not found.

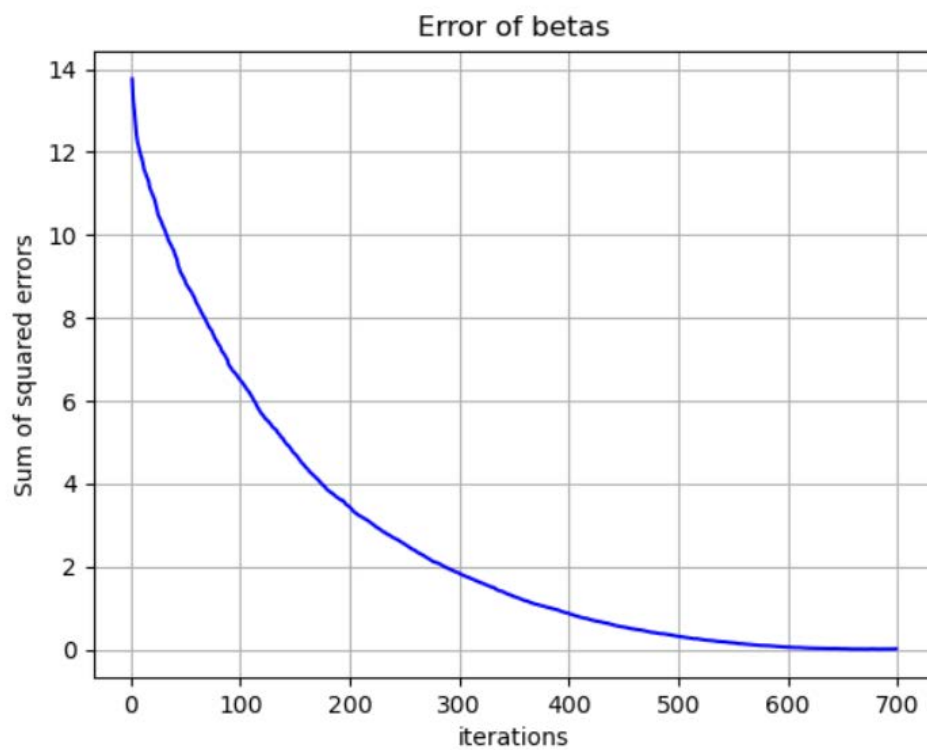


איור 28 - אתחול האלגוריתם לעומת הערכים האמיתיים

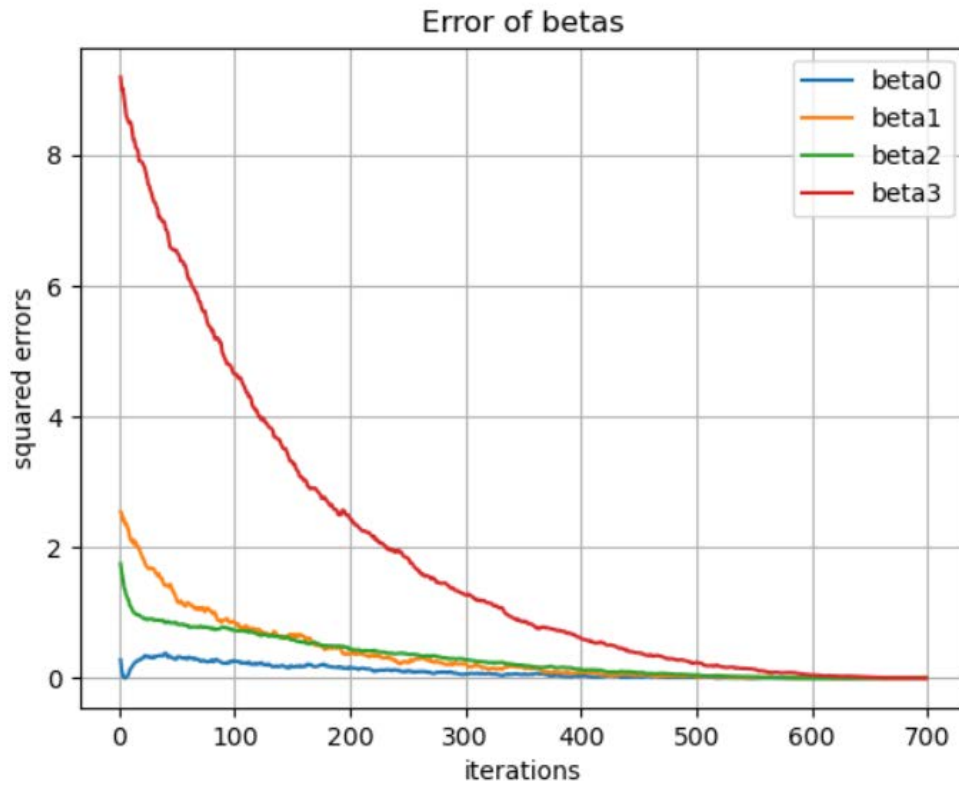
נראה את תוצאות השחזור על ידי מספר איורים. ראשית נראה את מקדמי הניחות שהתקבלו בסיום האלגוריתם לעומת אלה האמיתיים כפי שניתן לראות ב איור 29 . ניתן לראות שהשחזור שהתקבל כמעט זהה לערכים המקוריים. ב איור 30 ניתן לראות את סכום השגיאות הריבועיות של כל אחד ממקדמי הניחות, ניתן לראות את מגמת הירידה הברורה עד לכדי כמעט 0 עם התקדמות האיטרציות. ב איור 31 ניתן לראות את התקדמות השגיאה הריבועית של כל מקדם ניחות בנפרד, גם כאן מגמת ההתכנסות ברורה, עד לכדי שגיאה של כמעט 0 בכל אחד מהם. איור 32 מראה את ההתכנסות של כל אחד ממקדמי הניחות אל עבר הערך האחד של 6.



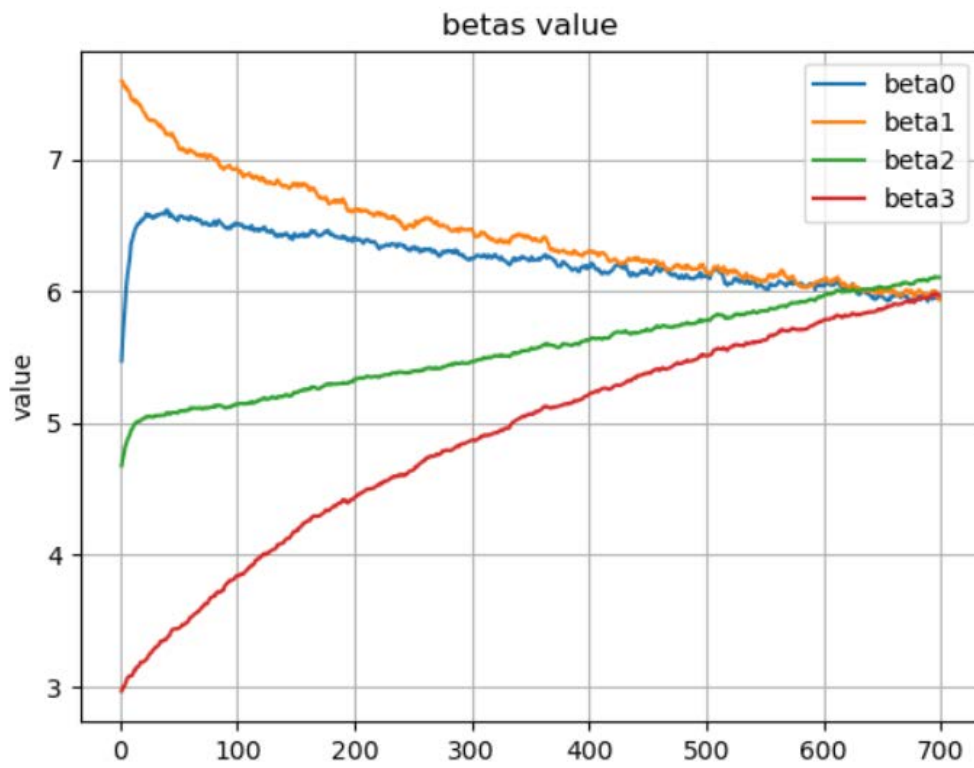
איור 29 - תוצאת האלגוריתם תוך אחיד



איור 30 - סכום השגיאות הריבועיות על מקדמי הניחות

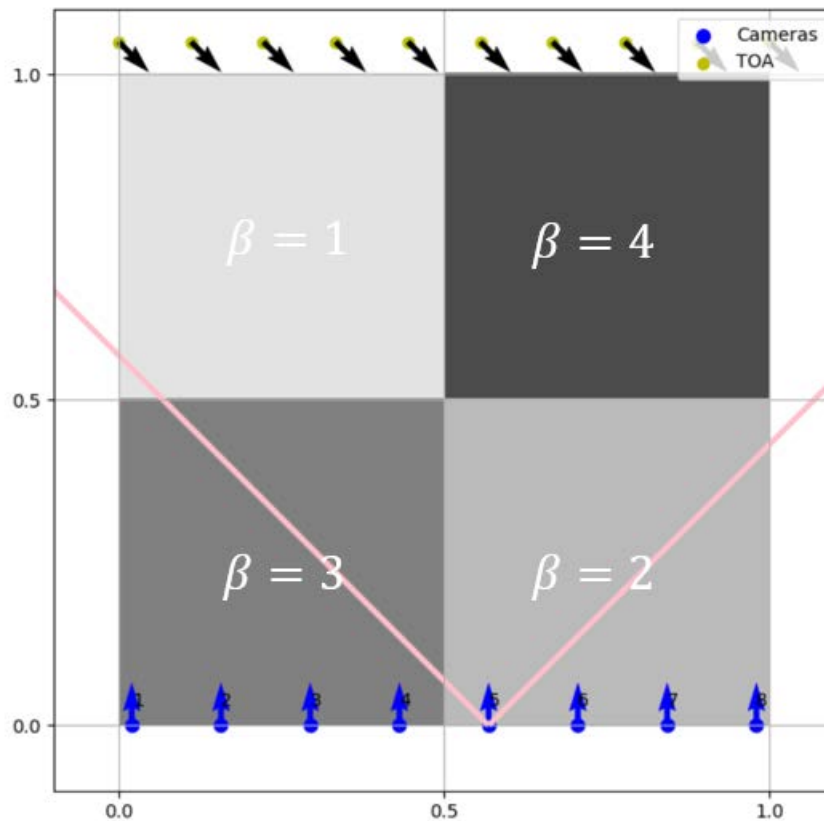


איור 31 - השגיאה הריבועית של כל מקדם ניחות בנפרד



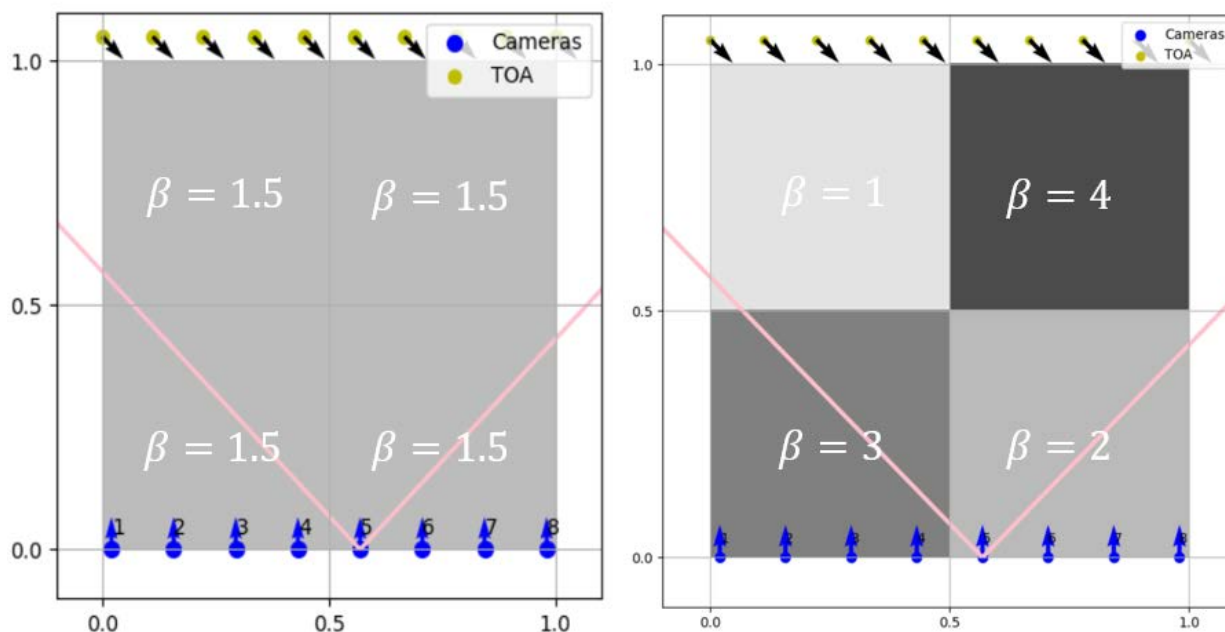
איור 32 - התקדמות הערכים של מקדמי הניחות

נציג את תוצאות השחזור על גבי תרחיש נוסף, יותר מורכב ומעניין. את מקדמי הניחות של התרחיש ניתן לראות ב איור 33. אלבדו הפיזור הוא $\bar{\omega} = 0.8$. פונקציית הפאזה אחידה $P = \frac{1}{2\pi}$. סדר הפיזור המקסימלי הוא $N_s = 20$. התווך הוא ריבועי בעל אורך צלע של 1. הפוטונים נכנסים מהחלק העליון של התווך בזווית של $-\frac{\pi}{4}$. בנוסף לצורך השחזור אנו נשתמש ב 8 מצלמות אשר כל אחת מהן מורכבת מעשרה פיקסלים.



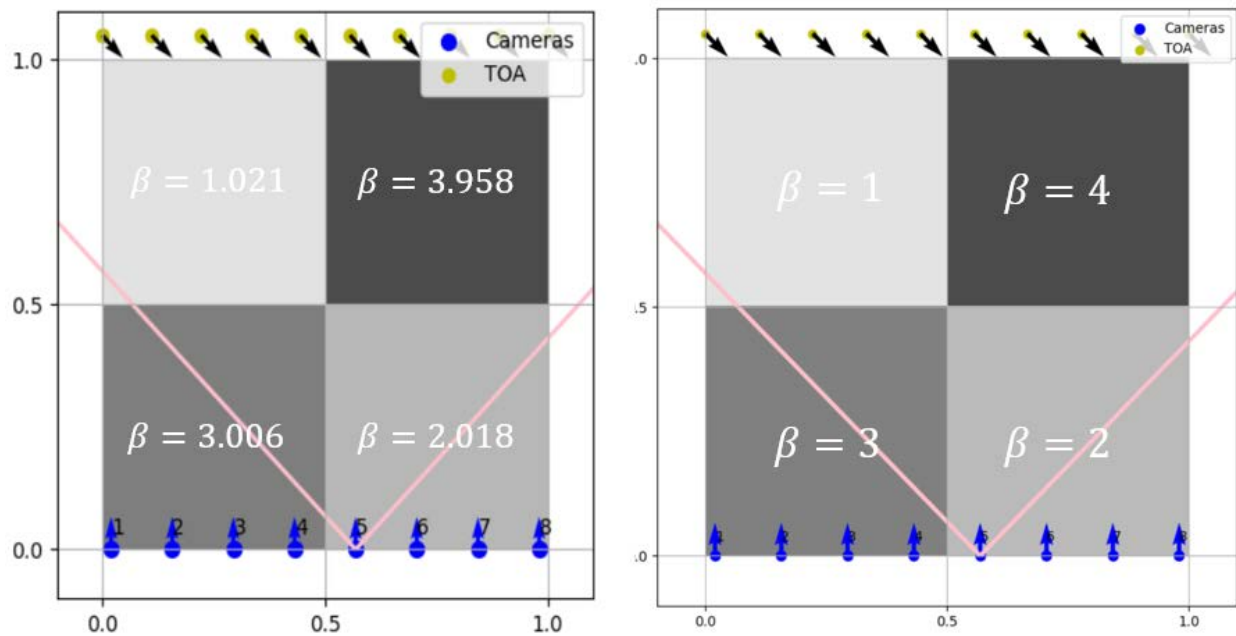
איור 33 - תרחיש שחזור דו ממדי מורכב

לצורך פתרון הבעיה, הפעלנו את אלגוריתם ה gradient decent במשך 2000 איטרציות, אתחלנו את התווך עם מקדמי ניחות כפי שאפשר לראות ב איור 34.

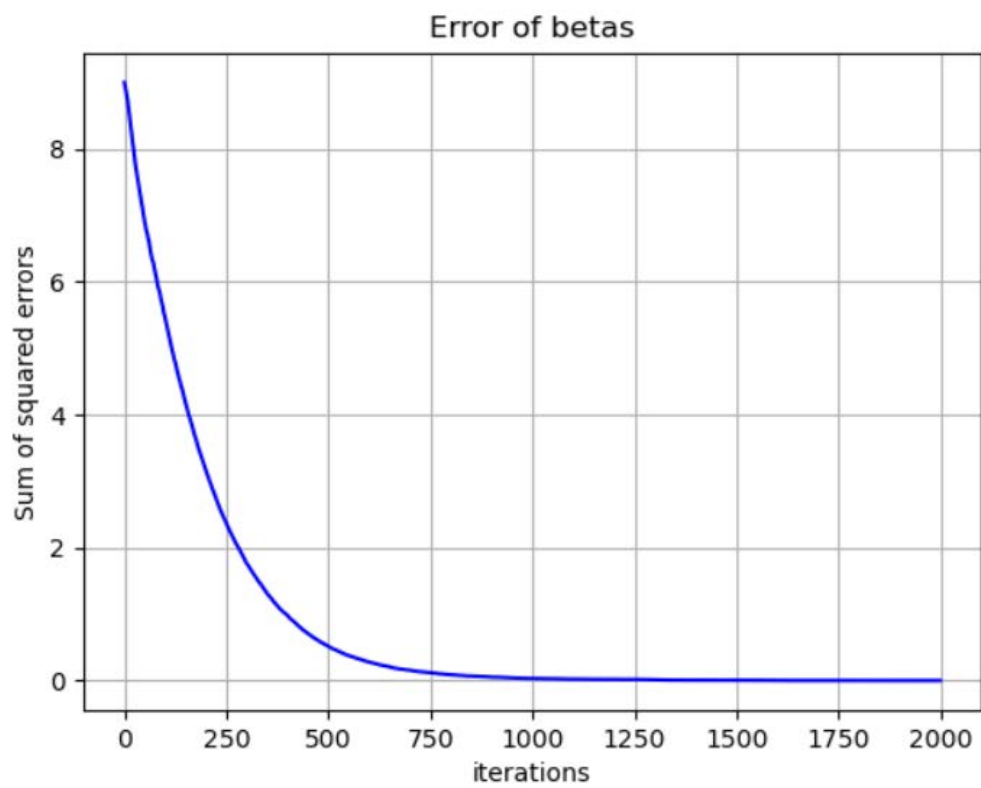


איור 34 - אתחול תרחיש שחזור דו ממדי מורכב

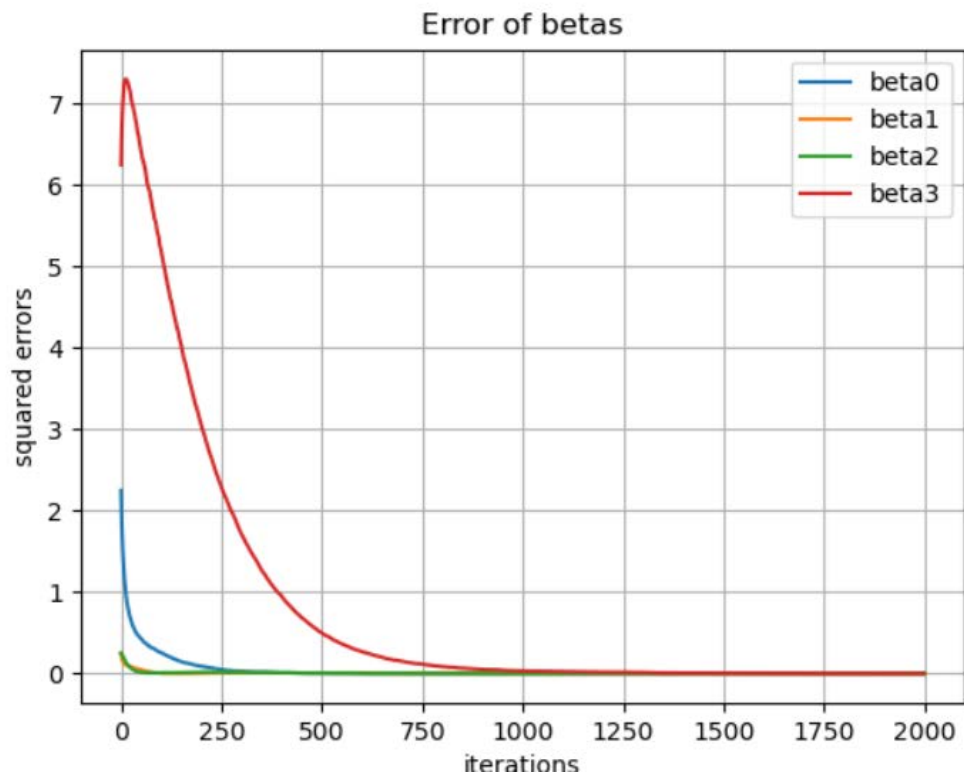
נראה את תוצאות השחזור על ידי מספר איורים. ראשית נראה את מקדמי הניחות שהתקבלו בסיום האלגוריתם לעומת אלה האמיתיים כפי שניתן לראות ב איור 35. ניתן לראות שהשחזור שהתקבל כמעט זהה לערכים המקוריים. ב איור 36 ניתן לראות את סכום השגיאות הריבועיות של כל אחד ממקדמי הניחות, ניתן לראות את מגמת הירידה הברורה עד לכדי כמעט 0 עם התקדמות האיטרציות. ב איור 37 ניתן לראות את התקדמות השגיאה הריבועית של כל מקדם ניחות בנפרד, גם כאן מגמת ההתכנסות ברורה, עד לכדי שגיאה של כמעט 0 בכל אחד מהם. איור 38 מראה את ההתכנסות של כל אחד ממקדמי הניחות אל עבר הערך הסופי שלו. בנוסף הופסנו בתרחיש זה גרף של ירידת פונקציית המחיר כתלות באיטרציות. חשוב להגיד שהירידה של פונקציית המחיר (ההפרש בין הערך אשר נקלט במצלמה לזה שהמודל הקדמי הביא) אינה שקולה לירידה בשגיאת של מקדמי הניחות שכן יכולים להיות מקדמי ניחות שונים אשר יביאו לקבלת תמונות זהות במצלמה. בתרחיש זה נראה שהירידה קוראת במקביל, אך בהחלט ייתכן שעם אתחולים אחרים, נתכנס למינימום אחר עבור מקדמי הניחות, דברים כאלה קרו לנו בחלק מההרצות אך לא הצגנו אותם כאן.



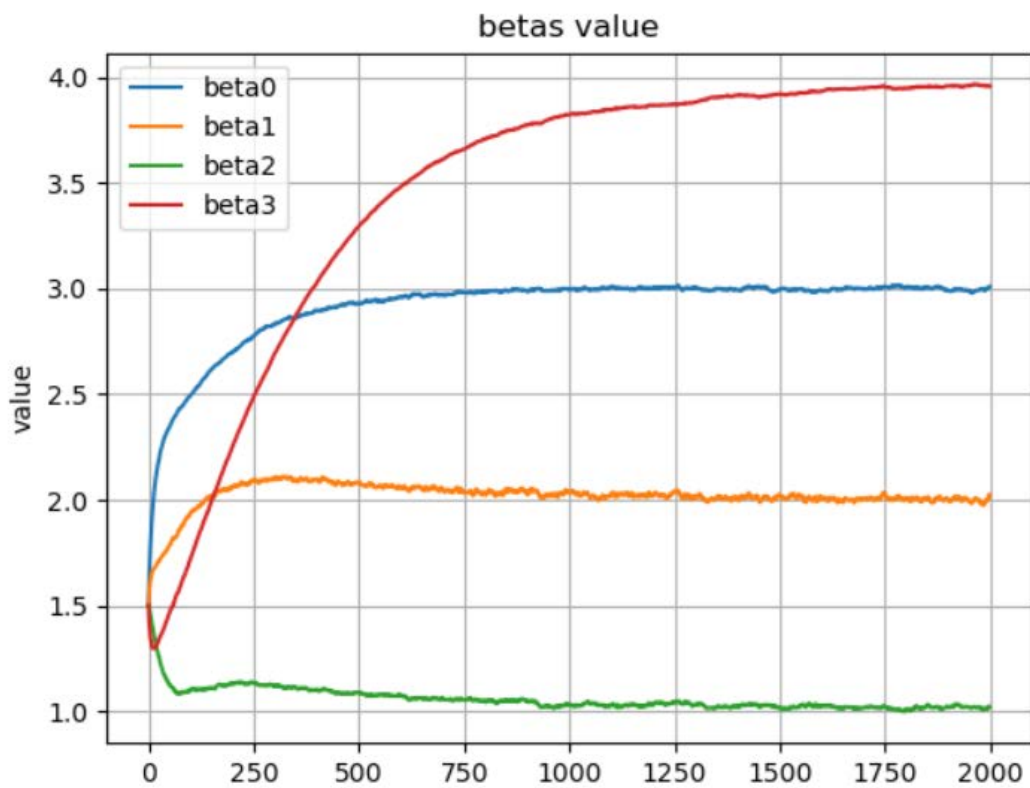
איור 35 - תוצאת שחזור תרחיש דו ממדי מורכב



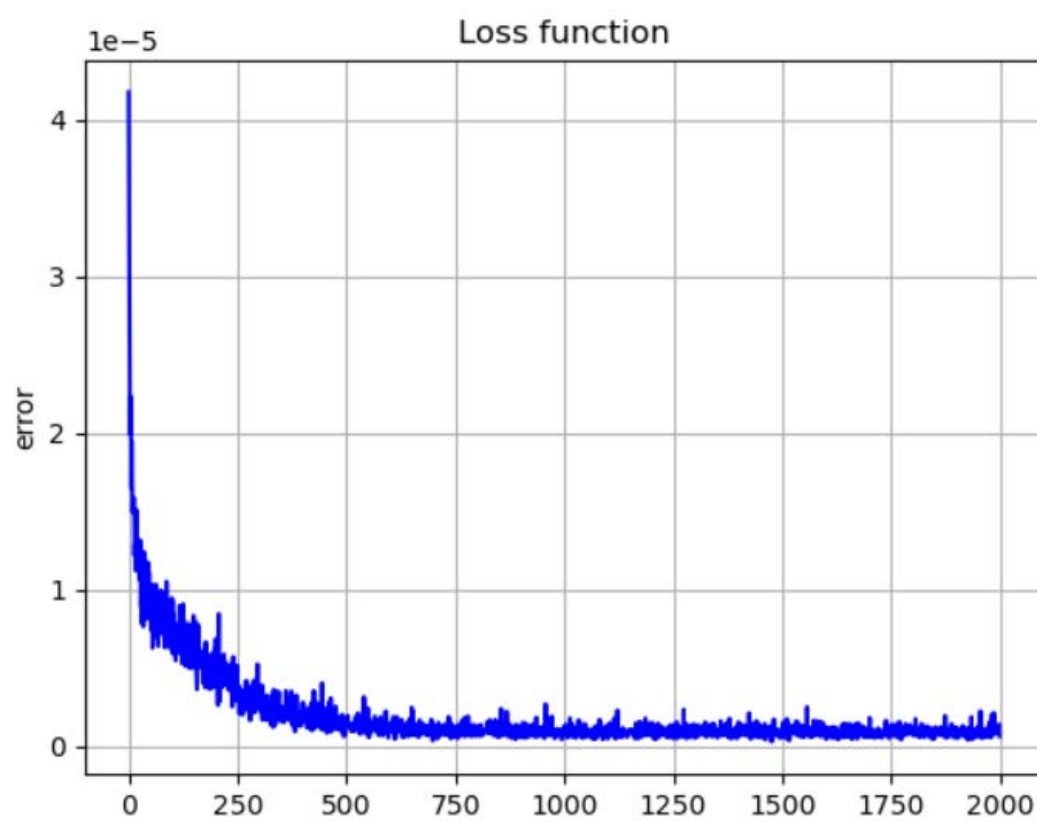
איור 36 - סכום השגיאות הריבועיות על מקדמי הניחות תרחיש מורכב



איור 37 - השגיאה הריבועית של כל מקדם ניחות בנפרד, תרחיש מורכב



איור 38 - התקדמות הערכים של מקדמי הניחות תרחיש מורכב



איור 39 - ערך פונקציית המחיר עם התקדמות האיטרציות

5. סיכום ומסקנות

התחלנו את הפרויקט במטרה לקחת את שיטת הטומוגרפיה הסטוכסטית ולשפר את היעילות שלה. בפרויקט זה, הרחבנו את שיטת הטומוגרפיה הסטוכסטית, והראנו כיצד ניתן לממש אותה עם דגימות מפונקציות צפיפות פשוטות יותר ובנוסף הראנו שיטה חדשה של חלוקה לסדרי פיזור שונים. כפי שניתן ללמוד מהדו"ח המפורט, מרבית הפרויקט היה תאורטי מחקרי ונותן בסיס תיאורטי רחב לכל הנושא שבו ניתן יהיה לעשות שימוש במחקרים נוספים שיבואו בהמשך במעבדה.

הראנו שניתן לבנות מודל קדמי שיהיה יעיל בהרבה מהמודל אשר משתמשים בו כיום, למרות שכאשר פותרים את הבעיה ההופכית, ראינו שאין הבדלים משמעותיים בין השיטות, ולכן יש אכזבה מסוימת מתוצאות הפרויקט. עם זאת, גם שיטות מודל קדמי מהירות לבדן, שאינן חלק מבעיית שחזור, יכולות להיות בעלות שימושים רבים. התרומה המשמעותית ביותר של הפרויקט, כפי שנאמר קודם, הוא ההבנה העמוקה של תהליך הטומוגרפיה הסטוכסטית, והיכולת לגוון אותו ולקחת אותו לכיוונים שונים בהתאם לצרכים. אני בטוח שהמחקר שנעשה בפרויקט זה יעזור לכל מי שיתעסק בנושא בעתיד.

כיווני מחקר עתידיים בנושא יכולים להיות:

- הרחבה למספר סוגים של חלקיקים בתווך, מוסיף עוד משתנה אקראי של סוג החלקיק שאיתו מבצעים אינטראקציה.
- בחינת שיטות דגימה פשוטות נוספות, כמו למשל שימוש במקדם ניחות ממוצע של כל הענן.
- בחינת מימוש מקבילי של האלגוריתמים על מנת לממש אותם על גבי מעבד גרפי.
- שילוב של דיסקריטיזציה על מנת לשמור חישובים קודמים ולהשתמש בהם בהמשך. במהלך הפרויקט חקרנו במעט את הנושא הזה, אך הוא לא הגיע לידי בשלות.
- בחינת שיטות אופטימיזציה מתקדמות לפתרון בעיית השחזור.
- פיתוח של priors שונים על מנת להקל על בעיית השחזור.

ובנימת סיום אישית, אני למדתי המון מן הפרויקט, והייתי ממליץ גם לסטודנטים אחרים לעשות פרויקטים בעלי אופי יותר מחקרי.

Bibliography .6

- [1] A. Aides, "Lightfield Analysis and Recovery of the Atmosphere," Haifa, Israel, 2018.
- [2] A. Levis, "Volumetric Imaging of the Natural Environment," Haifa, Israel, 2020.
- [3] V. Holodovsky, "In-Situ Multi-View Multi-Scattering Stochastic Tomography," Haifa, Israel, 2016.
- [4] I. Gkioulekas, A. Levin and T. Zickler, "An Evaluation of Computational Imaging Techniques for Heterogeneous Inverse Scattering," in *Computer Vision – ECCV 2016*, Amsterdam, 2016.
- [5] A. Geva, "X-ray Computed Tomography Through Scatter," Haifa, Israel, 2019.