שיעור 13

אלגוריתמים 1

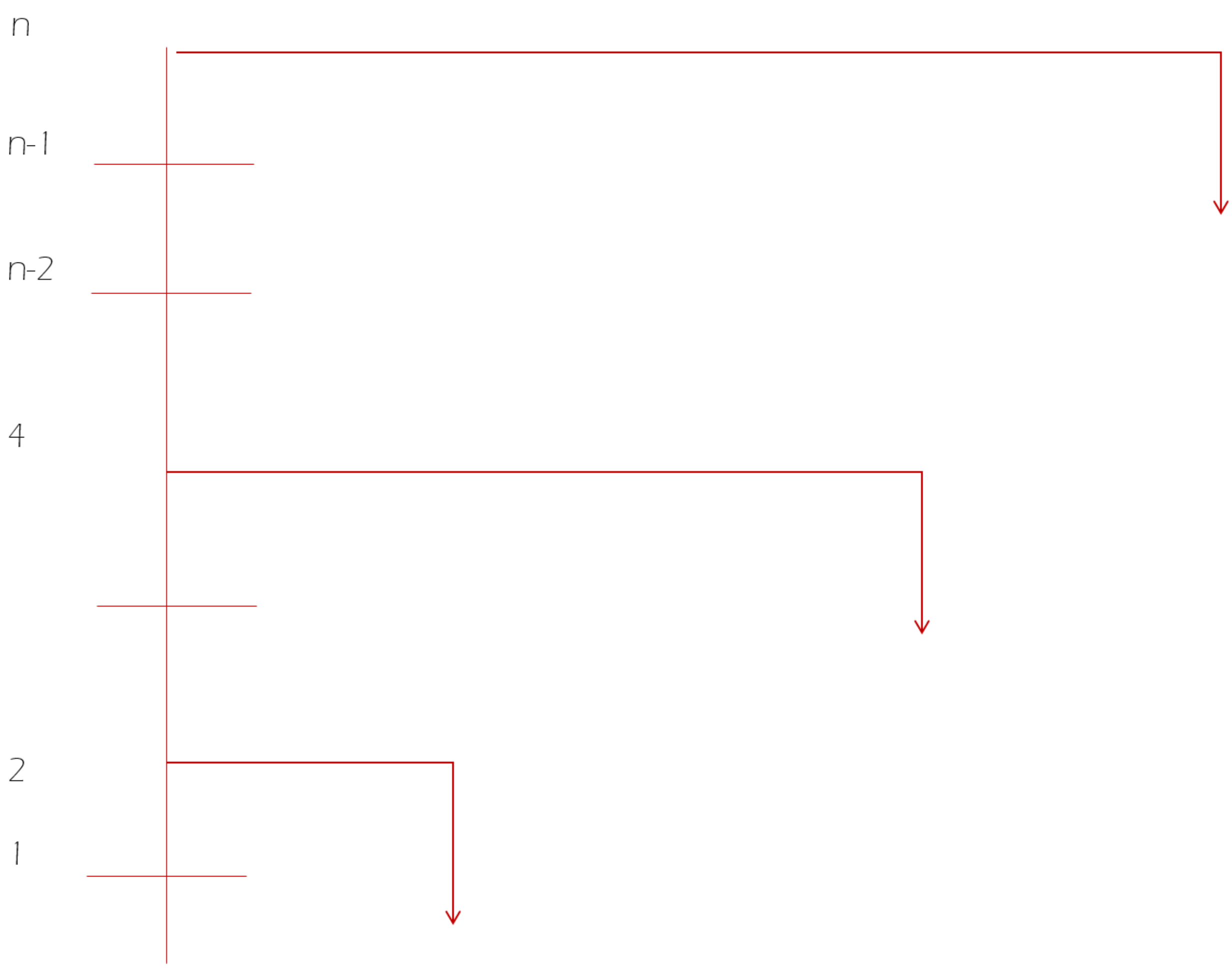
○ <u>בעיית כדורי הזכוכית</u>

ברשותנו בניין בעל n קומות ויש לנו k כדורי זכוכית, אנו נרצה לדעת מה המצב של הכדור אחרי הזריקה.

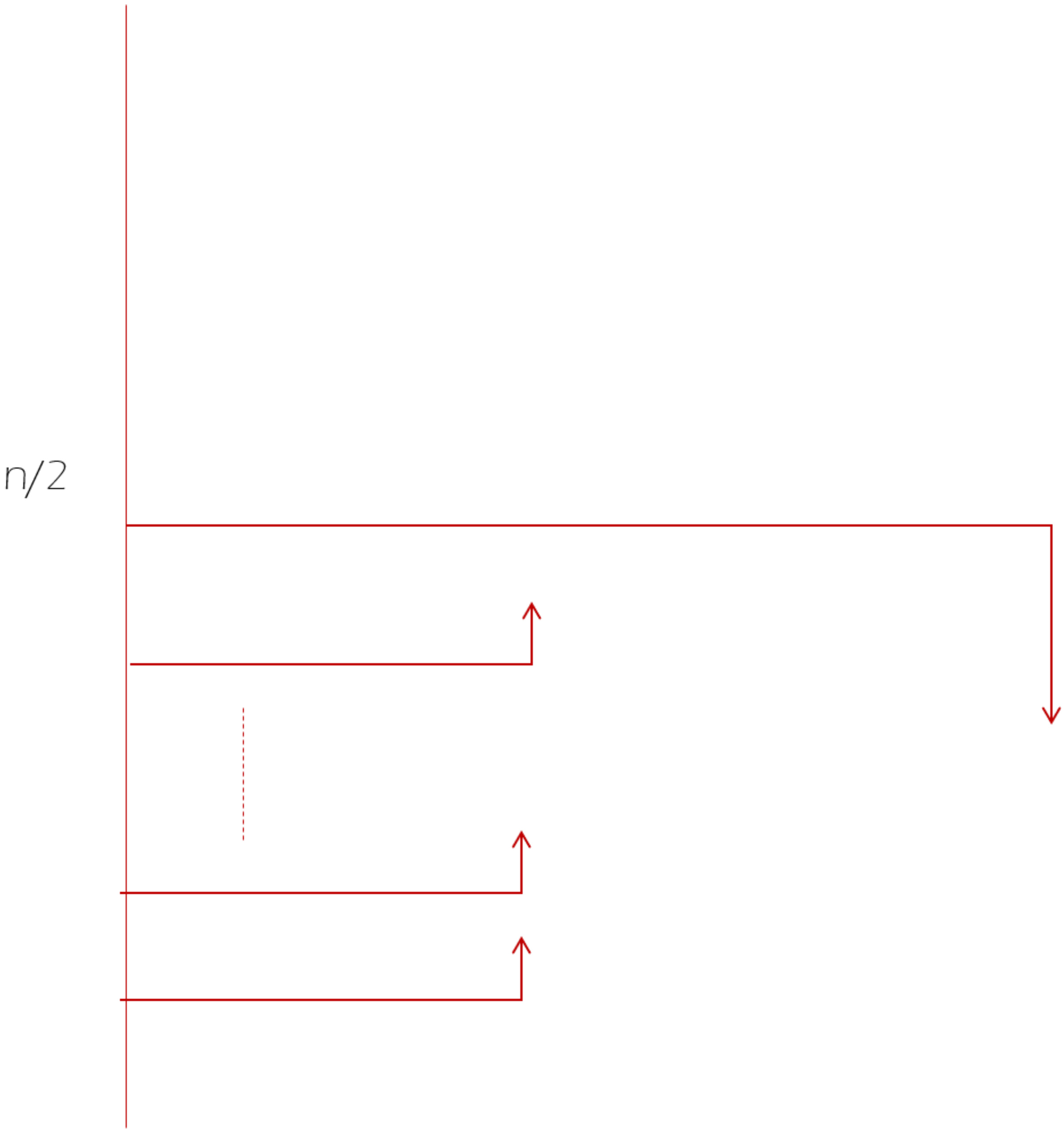
נבחין בכך שהיה וזרקנו את הכדור והוא נשבר לנו באמצע אז אנו נמצאים במצב של אוי ואבוי, על כן יש לנו בעיה, פירושו שנניח עבור קומה 1 אנו יכולים לפתור את הבעיה אבל עבור קומה 10 למשל אנו עשויים להיתקל בבעיה.

על כן אנו ננסה לפתור את הבעיה בדרך אחרת, אנו נזכור שיש שני כללים שאנו עובדים לפיהם והם מוחלטים, הכוח כשד הכדור בזמן הזריקה נשאר אותו הדבר, הכדור לא מתעייף, עד כמה שהקומה היא גבוהה יותר ככה הכדור עשוי להישבר.

נפתור את השאלה במקרה הגבוה:



וננסה גם לפתור במקרה המופיעה מטה:

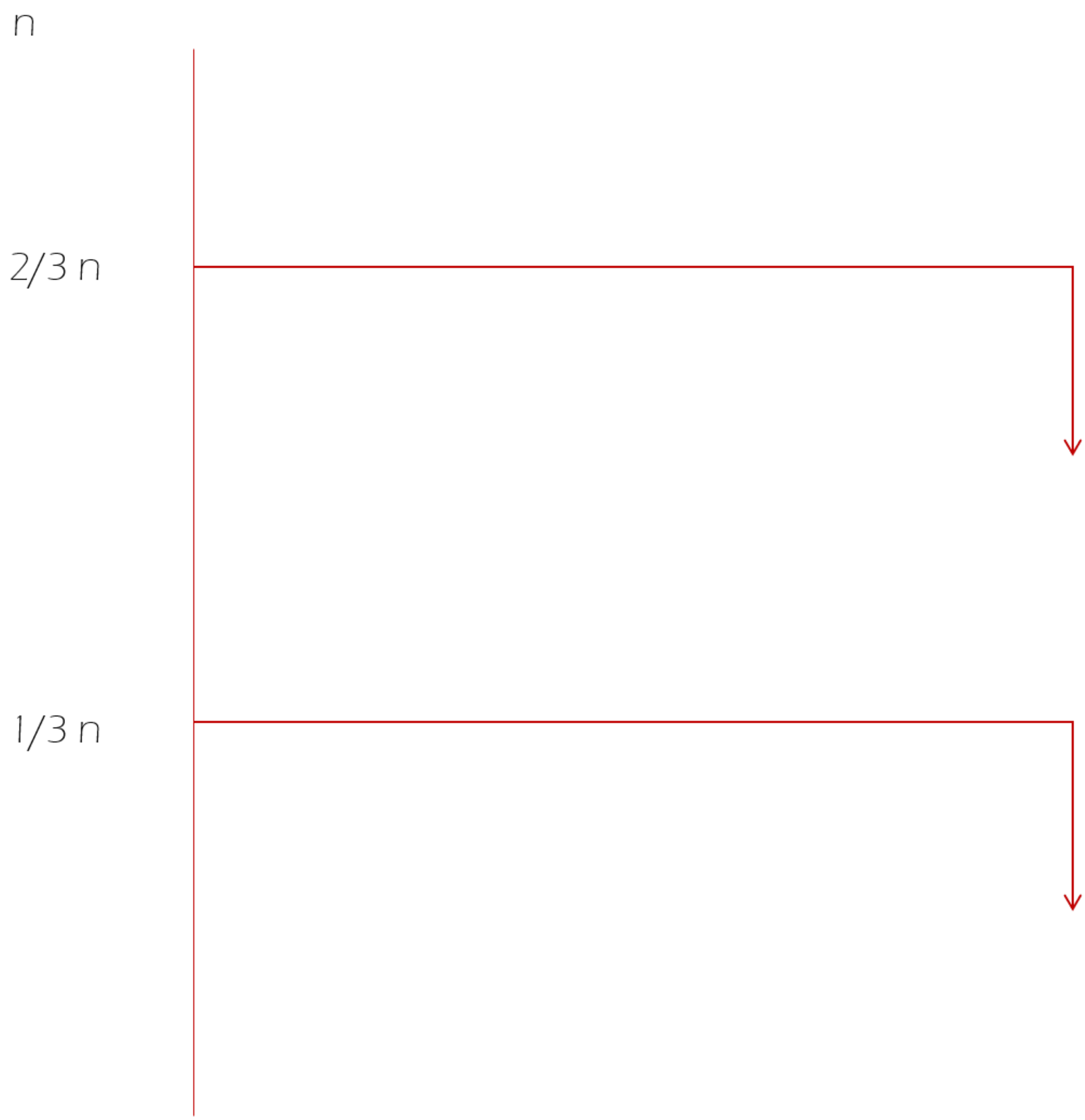


אנו לא יכולים לעשות חיפוש בינארי, כי אחרי שהכדור שלנו נשבר אנו לא יכולים להמשיך את החיפוש הבינארי, אנו חייבים לחזור לחישוב הקודם שלנו ולהמשיך.

אנו רואים שפר הפתרון שנתנו נכון לכרגע יש לנו את הסיבוכיות הבאה:

K=1 o(n) n
k=2 o(n) n/2

נראה כעת את האלגוריתם הבא:



היתרון באלגוריתם הזה של הבדיקה מחצי הוא שאנו יכולים לעשות שלב, שלב, כלומר מה שקרה הוא שאנו ניקח ונבדוק מ- n/3 והלאה לא נשבר לנו.

נעלה ל-2/3n נזרוק ונראה שהוא לא נשבר, ועל כן אנו עולים קומה ל-n , כיוון במקרה הכי גרוע אנו עושים פר שליש, כיוון יש לנו עדיין 2 כדורים והמקרה הכי גרוע יהיה לנו o(1/3n).

כלומר לפי הנוסחה זה יהיה:

(n/3)+2

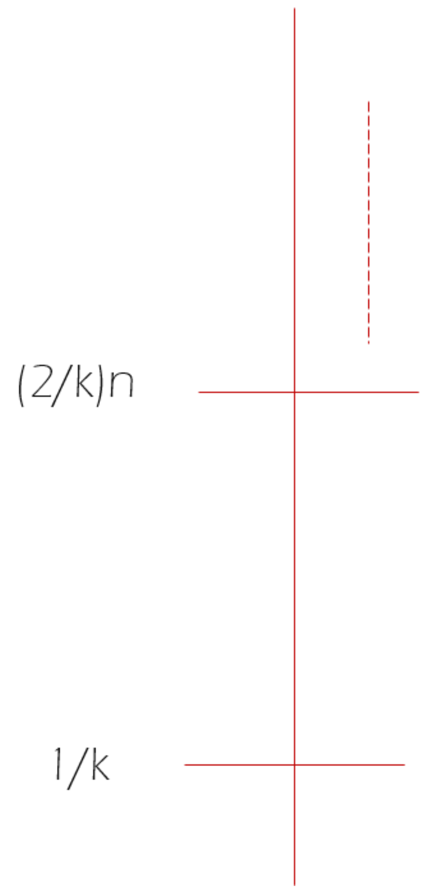
נמשיך ונחלק את הגרף שלנו ל-n כדורים, מה שיתן לנו במקרה של 2 כדורים את הדבר הבא:

2   O(1)   (1/n)n=1

בסופו של דבר נקבל:

K	O	חלוקה
1	O(n)	N
2	O(n)	1/2n
2	O(n)	1/2n
2	O(n)	1/3n
.	.	.
.	.	.
2	O(1)	(1/n)*n=1

נראה כעת את המקרה הבא:



$(n/k) + k = f(n,k)$

אלא אז יש לנו אלגוריתם שבו אנו לא מפרקים את זה, אז יש לנו אלגוריתם שבו אנו מחלקים את זה ל-k חלקים, כאשר k (במקרה הזה זה לא מספר הכדורים) אלא מספר מלאכותי מסוים שבו אנו מחלקים את הקומות שלנו.

וככה זה מסביר לנו למה אי אפשר לרוץ ישירות, ולמרות שכל פעם יש שיפור, משמעות השיפור היא ש-k הוא קבוע ו-n רץ עד אינסוף, אבל היה ואין k אלא אי אפשר לחלק ל-n חלקים.

הפונקציה שלנו היא :

$\min f(n,k)$

$1 \leq k \leq n$
$k \in N$

אנו רואים שיש לנו בפונקציה שלנו סוג של סתירה מסוימת, כי היה והמינימום שלנו הוא לא מספר שלם אלא יש לנו בעיה, האינטואיציה הבסיסית שלנו לפתרון הבעיה זה עיגול כלפי מעלה של המספר הלא שלם, אבל זה לא בהכרח יעבוד וייתן לנו את הפתרון הרצוי לנו.

על כן ניזכר בשיטת השיכור, במקרה שלנו ניגש ונכיר את שיטת השיכור השניה, זה מתחיל מסיפור מאוד מפורסם אדם איבד את המפתחות שלו לבית והוא מחפש אותם, הוא שיכור ואנשים שואלים אותו מה קרה, והוא אומר איבדתי את המפתחות, שואלו אותו איפה והוא מצביע למקום אחר והם שואלים למה פה? והוא עונה כי פה יש פנס.

המדע והמתמטיקה משתמשים בשיטת השיכור, הם פותרים את מה שהם יכולים תחת פנס, בתקווה שבאמצעות השיטה הזו הם יוכלו להתקרב לדבר שהם רוצים בפועל.

באופן מפתיע השיטה הזו די מועילה.

נחזור לבעיה, אנו יודעים שאנו לא יכולים לפתור את הבעיה כי אין לנו מספר שלם, אבל מה שאנו כן יכולים לעשות זה למצוא את המינימום בין :

$$\mathrm{Min}\left(\frac{n}{x}+x\right)$$

$$1 \leq x \leq n$$

אנו נעשה את הפתרון הזה ללא שברת, ונראה:

$a^2+b^2 \geq 2ab$

$a+b \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$,$a,b \geq 0$

$\frac{n}{x} + x >= 2\sqrt{n}$

ש״ד שבה נכון כי:

$$\frac{n}{x} + x \geq 2\sqrt{\frac{n}{x} * x} = 2\sqrt{n}$$

כעת עולה השאלה מה אנו יכולים להציב במקום x0 כדי לקבל $\sqrt{n}$.

$$\frac{n}{x0} + x0 = 2\sqrt{n}$$

$$X0 = \sqrt{n}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} = \sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n}$$

על כן אנו אוכן רואים ששיטת השיכור 2 עומדת לנו.
אנו רואים כאן בצורה מוחלטת שהשערת לא תורמת לנו לעומק העניין.

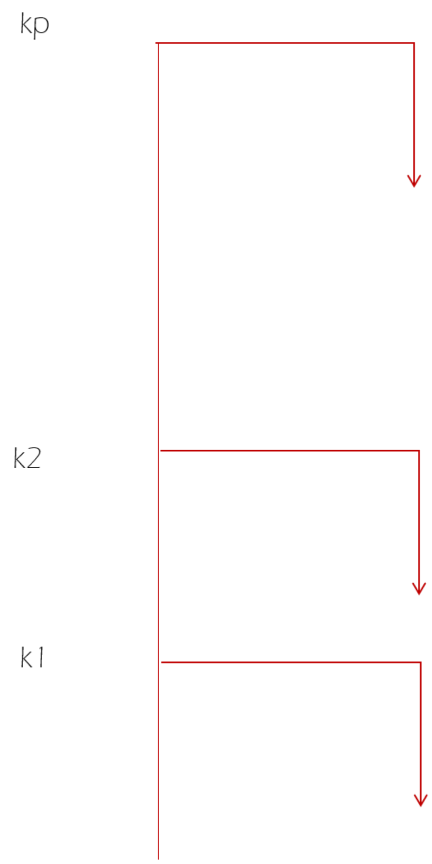
על כן אנו ניקח ונמחק כעת את הדבר הלא נכון, שבה בעצם השורה המסומנת בצבע בורדו בה״ר ונרשום במקום זה את הפתרון הנכון (מסומן בצבע ירוק בה״ר.

K	O	חלוקה
1	O(n)	N
2	O(n)	1/2n
2	O(n)	1/2n
2	O(n)	1/3n

2	$O(\sqrt{n})$	$2\sqrt{n}$
.	.	.
2	$O(1)$	$(1/n)*n=1$

~ עד כאן מספיק לדעת עבור ראיונות עבודה.
אולם העומק העיקרי של הבעיה הינו, שאין עד כה ידוע לחתוך עד k חלקים שווים, ובמקום מהי החלוקה האופטימלית שבה אין מחלקים לחלקים שווים, הבעיה כאן שאין מחלקים לחלקים שווים, אולם מה קורה אם אין רוצים חלקים לא שווים?

הרי בפועל האלגוריתם הנה ידוע אם גדול בצורה אחרת, כלומר יש לנו k1 עד kp חלקים



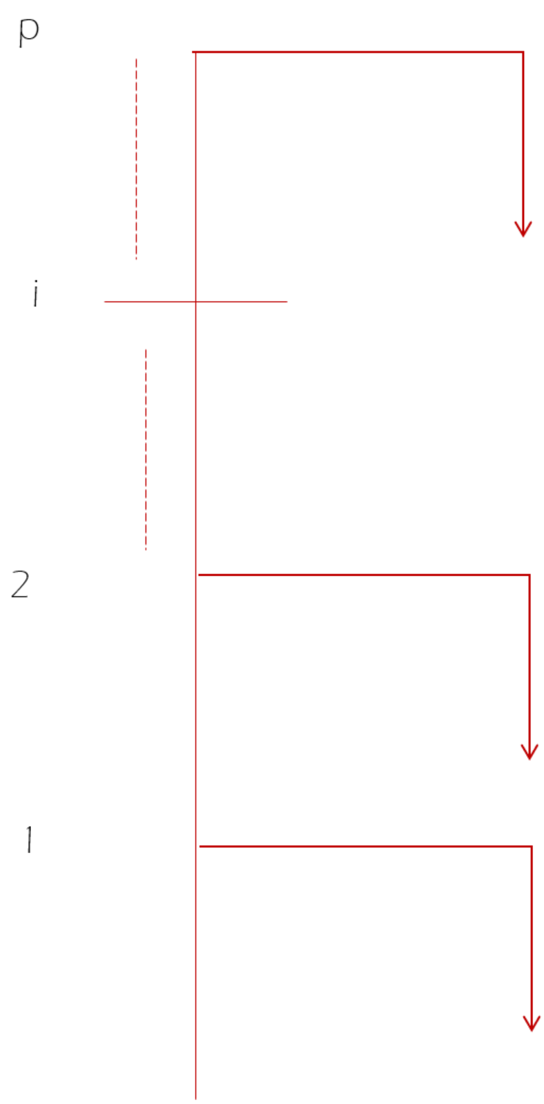
על כן אנו יכולים לומר שעבור כל אופשרות לפרק אותו :

$n=k_1....k_p$

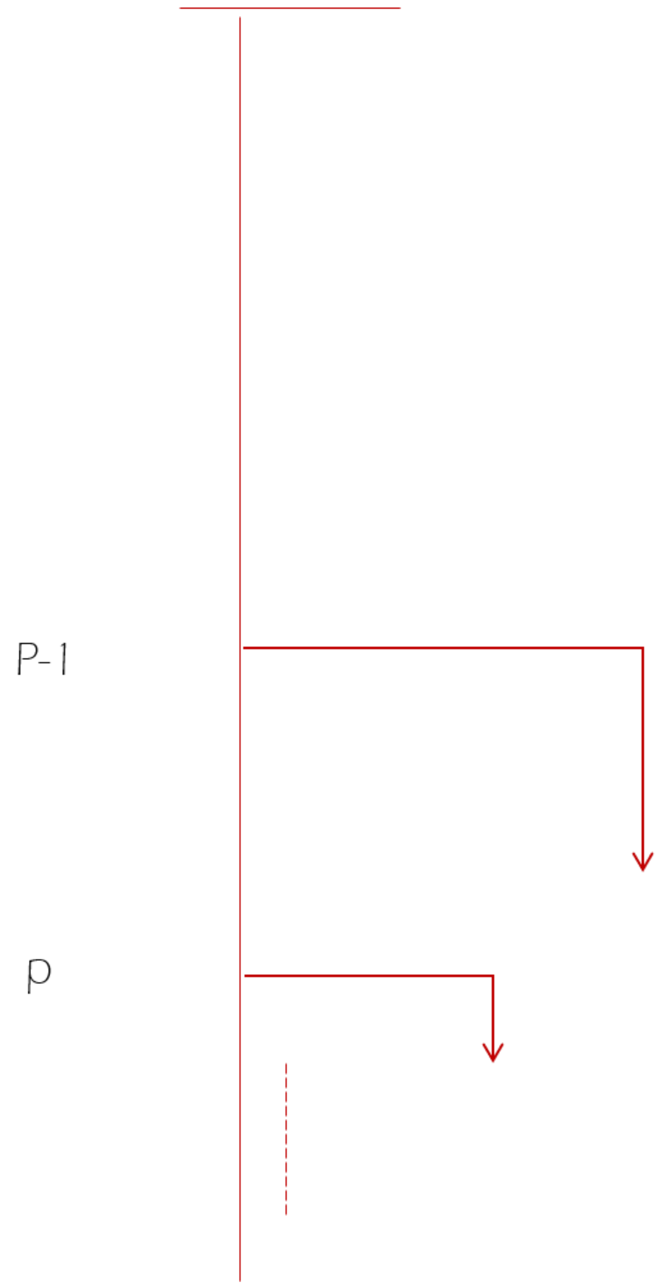
אנו נרצה למצוא את החלוקה האופטימלית, נשים לב:

$n = 1+2+3 .....+p$

לכן אנו נניח שהצלחנו לחלק את הבניין ל-p חלקים שונים, כעת כאון בניגוד למקרה שהיה לנו קודם (חלקים שווים) כיצד אנו מפרקים את הבניין, לצורך כך קיימות 2 אסטרטגיות שונות לפירוק הבניין.



אנו רואים שבמקרה הכי גרוע יש לנו p+q בדיקות



כאן אנו רואים שלא משנה איפה הכדור ישבר יהיו לנו p בדיקות

אנו רואים שהאופציה המועדפת לפירוק היא האופציה השנייה (זו שמופיעה בתמונה מעל).

כעת נרצה לדעת שבפונקציה של n כמה בדיקות עלינו לעשות?

ידוע לנו ש:

$$n = 1+2......+p = \frac{p(p+1)}{2}$$

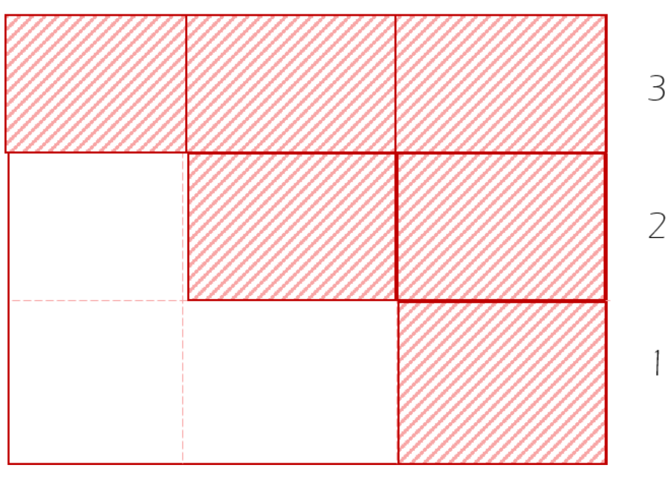
$$p+p ...+1$$

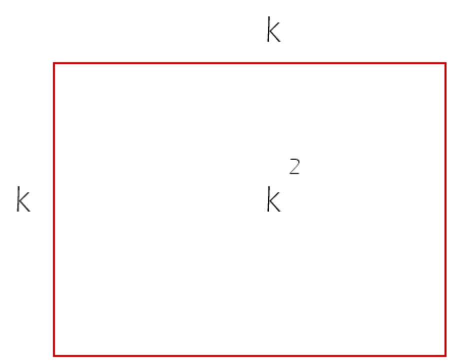
$$p$$

כתוצאה ממה שראינו מעל אנו נראה שהפתרון האופטימלי הוא:

K	O	חלוקה
1	$O(n)$	N
2	$O(n)$	$1/2n$
2	$O(n)$	$1/2n$
2	$O(n)$	$1/3n$
2	$O(\sqrt{n})$	$2(\sqrt{n})$
2	$O(\sqrt{n})$	$\sqrt{2}\sqrt{n}$

על כן אנו רואים:





היה ונרצה לפתור עבור 100, אז אנו נחפש את המספרים המשולשיים, כלומר:

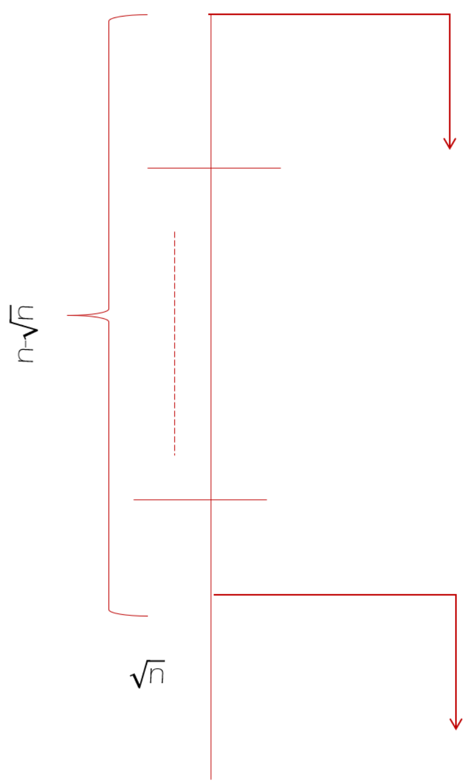
1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,105
=>105=1+2...+14

כלומר יש לנו רק 14 בדיקות.
(כיוון שיש לנו רק 14 חלקים).

נבחין בכך שעד כה אנו בדקנו מקרים עבור 2 כדורים (לא נכא!).

אנו נרצה לשפר את המצב ולצורך כך אנו ניקח ונעבר
באלגוריתם אופטימלי, כלומר אחרי כל שינוי מסוים שקורה אז אנו
נחשב את הכל מחדש ובוודאי ככה נשפר את האלגוריתם שיש לנו.

על כן ניקח בניין מסוים, ונחלק אותו לחלקים שווים, במקרה של
הדוגמא שלנו $\sqrt{n}$.



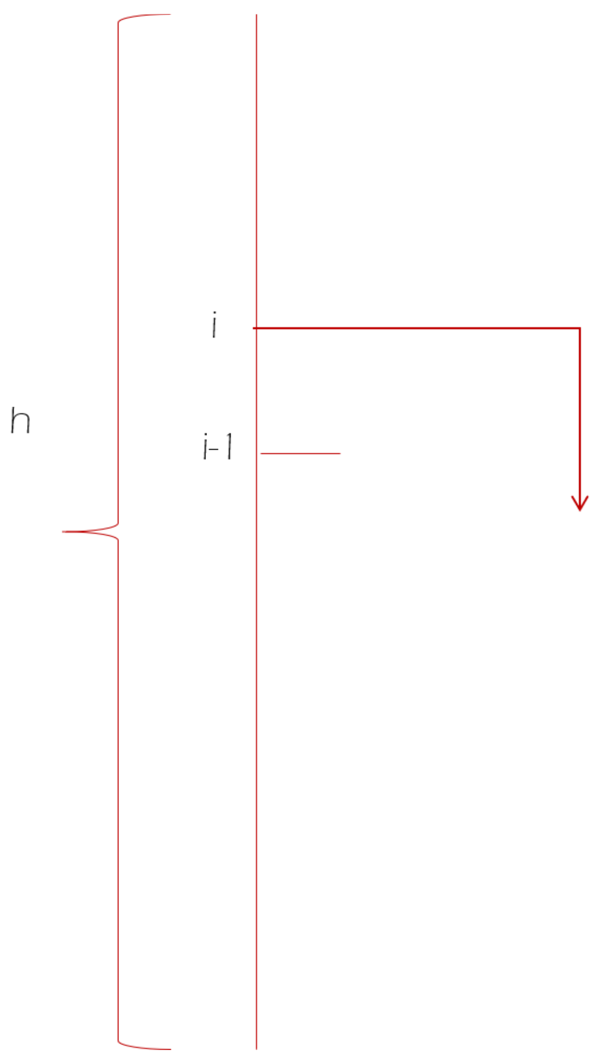
אנו רואים שמספר הבדיקות שיש לנו כה $2\sqrt{n}$.

היה ורצה לשפר אותה באמצעות פתרון אופטימלי אם אנו ניקח
ונעשה בדיוק כך, היה ובמקרה הראשון הכדור לא נשבר אז
גובה הבניין יהיה:

$n-\sqrt{n}$

שזה כבר עושה את הדברים ליותר טובים, עכשיו היה ונחב
הכדורים נשבר אז יש לנו טווח בדיקה יותר קטן.

היה ואנו נרצה לשפר את האלגוריתם הזה אופילו יותר אם אנו
ניקח ונעבר בתכנות דינמי,



יש לנו בניין בגובה n, אנו נסתכל עליו בצורה רקורסיבית, אנו נשליך את עצמנו את השאלה מאיפה אנו נזרוק את הכדור, אנו נזרוק את הכדור מהקומה i.

נרצה לדעת מהי הקומה הכי רווחית עבורנו, על כן אנו ניקח ונרשום את הנוסחה הרקורסיבית שאמורה לעזור לנו:

(נבחין שבנוסחה למטה, 2 זה מספר הכדורים)

$F(2,n)$

אם נשבר, נעשה $i-1$ בדיקות,
היה ולא נשבר אז אנו ניקח ונעשה $n-i$ בדיקות.
על כן עבור בניין בגודל n, אנו נעשה $f(n-i)$ בדיקות.
כתוצאה מכך הנוסחה שלנו תהיה:

$F(2,n)$

$f(n)=\min(f(n-i),(i-1) : +1)$

באותה מידה נוכל לומר שהנוסחה שלנו בשורה התחתונה היא:

$$F(n)=\min(f(n-i),i-1)+1$$
$$1\leq i\leq n$$

ברקורסיה הזו אנו חיברנו את הערך הבא עם הערכים הקודמים. פירושו שכל פעם שאנו מציבים i מסוים אנו מקבלים גובה יותר נמוך, כלומר קיבלנו גובה של בניין יותר גבוהה עם תוצאות שקיבלנו עבור בתים יותר נמוכים.

במקרה הכי גרוע בין שני החלופות המופיעות מטה:

$(f(n-i),i-1)$

הוא שהם ילכו למקסימום, פירושו:

Max(f(n-i),i-1)

על כן במקרה הכי גרוע הוא ניקח את המקסימום, אבל מכל ה-i-ים אנו נשתדל לבחור את ה-i הטוב ביותר, שהוא בעצם לקיחת המינימום של המקסימום, פירושו:

F(n)=min(max(f(n-i),i-1))+1

על כן הנוסחה המדויקת שלנו זו הנוסחה המופיעה מעל.

~ אחרי ההפסקה

זה מזכיר במידה מסוימת סוג של משחק איקס עיגול. פעם קודמת דיברנו על זה שרקורסיה ניתנת לשיפור משמעותי באמצעות מעבר לאיטרציה, על כן אנו נעשה תמעבר מסוגריים רגילות למרובעות, פירושו:

F[n]=min[max(f(n-i),i-1))+1]

באמצעות הפעולה הזאת אנו יכולים לקחת וליצור את המערך הבא:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8

התוכן שרשום בשורה הראשונה זה בעצם הפתרון שלנו עבור מספר הכדורים 1, ומתחתיו פתרון למספר הכדורים שהוא 2, על כן נוכל לסמן את זה יפה בנוסחה המופיעה מטה בצבעים.

ניקח את הרקורסיה המופיעה מעל ונדגיש את זה שיש לנו 2 כדורים, אנו ניקח וניתן פירוש ל-i-1 ונוסיף את הפלוס 1, כלומר הנוסחה שלנו החדשה תהיה:

$F(n,2) = \min\max(f(n-l,2),f(i-1,1))+1$

כלומר מה שמסומן בצבע ורוד זה פר כדור אחד
ומה שמסומן בצבע סגול זה פר שני כדורים.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K=1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K=2									

נראה מה הנוסחה שלנו תהיה פר 3 כדורים:

$F(n,3)=\min\max (f(n-i,3),f(i-1,2))+1$

ככה שנתקדם נראה שהצלחנו להשיג נוסחה עבור k כדורים:

$F(n,k)=\min\max (f(n-i,k),f(i-1,k-1)) +1$

נאמר ש: $k\leq \log n$.

נמשיך את הרקורסיה בצורה הבאה:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K=1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K=2	0	1							
K=3	0	1							
. .		1							

כעת ניקח ונותח את המערך שלנו בגרף הבאה:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10....
K=1	0	1	2	3	4	5	6	7	8		
K=2	0	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4
K=3	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4
. .		1									

החוקיות שאנו רואים לפי עצת האינדוקציה הזו היא שכל מספר מגיע אותו מספר פעמים כמו שהוא, כלומר 1 יופיע פעם אחת, 2 יופיע פעמיים, שלוש יופיע שלושה פעמים וכן הלאה..

(ובכך להבין את המילוי באמצעות הפקודה הרקורסיבית שרשמנו, כלומר הפקודה הזו:

F(n)= min max (f(n-i,i-1))+1

מה שמופיע בטבלה בעצם זה מספר הבדיקות, על כן נניח הגובה המקסימלי של שלוש בדיקות זה 6, (k=2 עמודה 6)
בפועל לפי הטבלה הזו אנו יכולים לראות שהרעיון שלנו מספרים משולשיים וסוג של קירוב שעשינו היה 100 ואנו לקחנו 105 כקירוב כי זה היה המשולשיים הבא והוא פרד מאיתנו עם 14 בדיקות, על כן אם אנו עוברים לפי הטבלה הזו אכן אנו רואים שנדרשות עוד בדיקות וזה המגמה שאנו לומדים.

לפי הטבלה אנו נראה כי:

1(1) ,2(2), 3(4), 4(7), 5(11),6(16),7(22)

זה בעצם לוקחים כל מספר וסופרים את כמות הפעמים שהוא הופיע (ב- $k=3$).

מבחינת סיבוכיות אלגוריתם, איך זה משפיע עלינו? נניח נבדוק מה' סיבוכיות האלגוריתם עבור $k=2$, אז כמה פעולות אנו עושים כדי להבין מה הולך? אנו לוקחים תמיד בחשבון את כל הקודמים שהיו, מה שגורם לנו לתחושה שמדובר ב- n^2 , בגלל משום שכל איבר שאנו מחשבים הוא משתמש ברקורסיה לחישוב איברים הקודמים.

עכשיו נראה את הדבר הזה (מבחינת השערות):

2->$\sqrt{2}\sqrt[2]{n}$

3->$\sqrt{6}\sqrt[3]{n}$

.

.

k->$\sqrt{k!}\sqrt[k]{n}$

אנו נראה שבסך כמות הכדורים ההולכת וגדלה זה מתקרב ל- $\log_2 n$.

כעת ניקח ונחשוב על אופציה ודרך שבאמצעותה השאלה הזו עשויה להופיע במבחן, היה ונרצה לתרגם בניין למדעי המחשב, אז אנו נוכל לומר שהבניין בעצם מייצג לנו מערך מסוים:

$X1<x2........x_{i-1}<xi<....<xn$

המשמעות כאן זה שלנו מדובר בגובה אותה בכוח שבירה של הקומה. כלומר מבחינת מדעי המחשב הכדור שלנו הוא משקל. (בכוח השבירה שלו כשגב כוח השבירה של הקומה). על כן פירושו של דבר שהכדור שאנו מקבלים הוא a מסוים.

על כן נאמר:

```
If (xi<a) then => brake
        Else => go on
```

אנו נרצה למצוא את האינדקס הכי קטן שעבורו ה-$x_i>a$.
בפועל זה אומר ש- x_{i-1} לא יכול לשבור אותו, מה שגורר ש:

$X_{i-1}<x_i$

$a<x_i$
$a>x_{i-1}$

היום בעצם למדנו את החיפוש הבינארי האמיתי. זאת משום שהשוויון שהצגנו ב-if מעל מתקיים רק מספר מסוים של פעמים, אותו דבר לגבי האי שיוויון ההפוך, כלומר בפועל זה אומר שיש לנו מערך ממוין, יש איבר ואנו רוצים למצוא את המיקום של איבר מסוים במערך לפי האילוצים הנתונים.

חשוב לדעת לממש את הדבר הזה עבור 2 כדורים, שלושה כדורים, פחות יש טעם להתמקד במסקנות המתמטיות (פחות להתמקד בזמן ההכנה במבחן - ציטוט שלו) הוא אומר שהוא מצפה שנראה לו את הטבלה ונסביר למה זה ככה במסגרת הזו, הוא אומר שהקלט עשוי להיות מערך ומספר שאנו מחפשים את מיקומו של האיבר במערך, קים היבט שלישי והוא למה שווה ה-i הראשון, הגם קיימת האפשרות לחשב את ה- i הראשון של האלגוריתם האופטימלי (מאיזה קומה עושים בעצם את הזריקה הראשונה).

- <u>מבנה כללי של מבחן</u>

מטרת המבחן היא לתת לנו אפשרות ללמוד, פירוש של דבר הוא

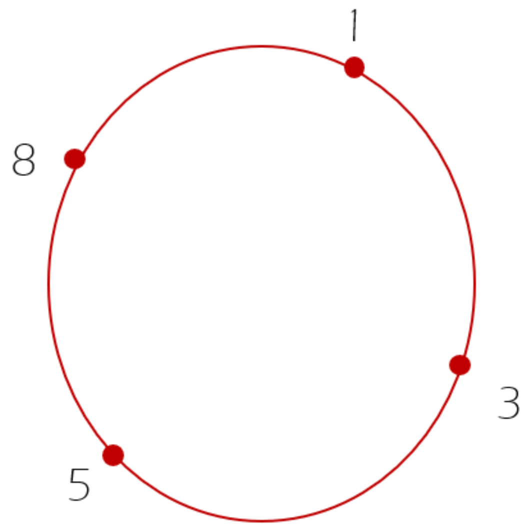
שהמבחן מורכב מכמה שאלות שהחלק המסורתי הוא החלק שמתבסס על הידע של השיעור הוא מאופשר לנו 60 נקודות (זה לפי הבנייה שלו, זה יכול באותה מידה להיות גם 55).

ה-40 נקודות הנותרות הן פר היצירתיות, כלומר צריך לפתור בעיות שאולי בצורה ישירה לא היו בקורס או שאלות חדשות שלא ראינו מעולם.

נראה כעת כמה דוגמאות שנוכל לראות את ההיררכיה המסוימת שעשויה לקרות שמה.

למשל: מה האורך של מחרוזת משותפת ארוכה ביותר מבין 2 מחרוזות, אנו צריכים לקחת לממש את האלגוריתם, להסביר למה הוא נכון (יש מה אינדוקציה וכאלה), חשוב לשים גם פסודו קוד, טענת הסיבוכיות, דוגמא והוכחות (הוכחות - עשויה להיות הוכחת הסיבוכיות, הוכחת נכונות, ברוב המקרים זו אינדוקציה או מינימלית).

השלב הבא של השאלות זה שינוי קטן של בעיה ידועה, למשל נתון מערך מעגלי, משחקים שני שחקנים אבל הפעם יש לנו בעיה כי הם משחקים במעגל אין קצוות, מה שקורה הוא שהראשון יבחר מאיפה שהוא רוצה ומשמה נמשיך לפי הכללים של המשחק שלמדנו קודם פר קטעים כי מהרגע שלוקחים איבר אבל נשאר רק קטע וגם אפשר להתקדם, עכשיו עולה השאלה איזה פתרון לאלגוריתם ניקח, חמדן לא יתאים, חיפוש שלם לא יתאים על כן אנו ניקח כל איבר ועבור כל מה שנשאר אנו נפעל לפי אלגוריתם שאומר לנו בדיוק מי אנו באלגוריתם מול המספרים הנותרים, אבל אנו נחשב את הרווח של השחקן השני מול השחקן הראשון ונדע מה הרווח שלנו לפי מה שנשאר, כלומר היה ויש לנו:



ניקח לדוגמא את 8, אז אנו נבדוק מה הרווח שנקבל מול השחקן השני מ-1,3,5, על כן יש לנו אלגוריתם שפותר את הבעיה בסיבוכיות של $O(nn^2)=O(n^3)$.

כעת ניקח ונראה דוגמא 'ציורית', בעיית האסירים 2, יש תור של אסירים, כלומר יש לנו n אסירים שעומדים אחד אחרי השני, פירוש של דבר שכל אחד רואה את הכובע ולכל אחד יש כובע, הכובע יכול להיות שחור או לבן, כל אחד מעביר את הצבע של הכובע שעל ראשו משוחרר, אחרת היה והוא תוהה הוא מקבל בונוס של עונש מאסר נוסף.

הקבוצה רוצה להציל ולעזור לכמה שיותר אנשים, כעת עולה השאלה איך אפשר לעזור לחצי מהאנשים? פירוש שכל אחד יגיד לזה שלפניו מה הכובע שלו ככובע של עצמו, כלומר נניח רועי עומד מאחורי והכובע שלי לבן, אז הוא יגיד לבן, ואז הוא מציל אותי ויש לו 50 אחוז להציל את עצמו, פירוש שיש לנו חצי שמקריבים את עצמם לטובת האחרים. במקרה הכי גרוע חצי נחלץ.

איך אנו משפרים את זה? נתחיל מהשיטה הבאה:

n=1

במקרה הזה הוא יכול רק להמר.

n=2

האחד יוצא השני מהמהר.

n=3

את האמצעי בודק יוצא, השלישי והראשון מהמרים.
על מנת לשפר את המצב הוא שהאדם הראשון רואה את כמות הכובעים השחורים זוגי או לא זוגי, היה והוא רואה כובע זוגי אז הוא אומר לבן, עכשיו זה שאחריו עושה שוב תספירה כדי לדעת האם הוא זוגי או לא הראשון יקריב בפרק כלל את עצמו.

עד כה הייתה דוגמא לבעיה יצירתית.

יהיו כ-4 שאלות במבחן.