<u>אלגברה של קבוצות</u>:

- $A \setminus B = A \cap B^C$
- כללי דה מורגן

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

- דיסטרבטיביות (= חוקי פילוג) של איחוד וחיתוך

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- חוקי בליעה (עקרון הדואליות מתקיים בהם).

$$A \cup \varnothing = A \ , \ A \cap \varnothing = \varnothing \ , \ A \cup A = A \ , \ A \cap A = A$$

- המשלים של המשלים

$$(A^C)^C = A$$

תרגיל כמו 2 ו 3 ממן 11

תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו שמתקיים

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

נוכיח באמצעות אלגברה של קבוצות :

$$(A \setminus B) \setminus C \overset{1}{=} (A \cap B^c) \setminus C \overset{1}{=} (A \cap B^c) \cap C^c \overset{2}{=}$$

$$= A \cap (B^c \cap C^c) \overset{3}{=} A \cap (B \cup C)^c \overset{1}{=} A \setminus (B \cup C)$$

∎

מקראה

1. $A \setminus B = A \cap B^c$
2. קיבוציות של $\cap$
3. דה מורגן

תרגיל כמו 2 ו 3 ממן 11

תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו שמתקיים

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

ההוכחה ברמת הפירוט (מכוונים) להוכחה

ע"י הכלה דו כיוונית (

$\subseteq$: צ"ל $(A\setminus B)\setminus C \subseteq A\setminus(B\cup C)$

נניח $x\in(A\setminus B)\setminus C$ ונוכיח $x\in A\setminus(B\cup C)$

. . .

$\supseteq$: צ"ל $A\setminus(B\cup C)\subseteq(A\setminus B)\setminus C$

נניח $x\in A\setminus(B\cup C)$ ונוכיח $x\in(A\setminus B$

תרגיל כמו 2 ו 3 ממן 11

תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו שמתקיים

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

הוכחה בעזרת הגדר:

$$x \in (A \setminus B) \setminus C \underset{\text{הפרש}}{\overset{\text{הגד'}}{\iff}} x \in A \setminus B,\ x \notin C \underset{\text{הפרש}}{\overset{\text{הגד'}}{\iff}} x \in A,\ x \notin B,\ x \notin C$$

$$\underset{\text{איחוד}}{\overset{\text{הגד'}}{\iff}} x \in A,\ x \notin B \cup C \underset{\text{הפרש}}{\overset{\text{הגד'}}{\iff}} x \in A \setminus (B \cup C)$$

הראינו ש $x \in (A \setminus B) \setminus C$ אמ"מ $x \in A \setminus (B \cup C)$ $\Leftarrow$ קיימת

הכלה דו כיוונית ולכן הקבוצות שוות.

הערה: $x \notin B \cup C \iff \neg(x \in B \lor x \in C) \equiv (x \notin B \land x \notin C)$

הכלה

תרגיל כמו 2 ו 3 ממן 11

תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו שמתקיים

$$(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$$

$$(A\setminus B)\setminus C \subseteq A\setminus(B\cup C)$$

הוכחה בכיוון הראשון:

$$x\in(A\setminus B)\setminus C \xRightarrow[\text{הפרש}]{\text{הגד'}} x\in A\setminus B,\ x\notin C \xRightarrow[\text{הפרש}]{\text{הגד'}} x\in A,\ x\notin B,\ x\notin C$$

$$\xRightarrow[\text{איחוד}]{\text{הגד'}} x\in A,\ x\notin B\cup C \xRightarrow[\text{הפרש}]{\text{הגד'}} x\in A\setminus(B\cup C)$$

הראינו ש $x\in(A\setminus B)\setminus C$ אזי $x\in A\setminus(B\cup C) \Leftarrow$ קיימת

הכלה דו כיוונית ולכן הקבוצות שוות.

הכלה: $x\notin B\cup C \Leftrightarrow \neg(x\in B \vee x\in C) \equiv (x\notin B\wedge x\notin C)$

תרגיל כמו 2 ו 3 ממן 11

כיוון ב:

תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו שמתקיים

$$(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$$

הוכחה בכיוון ההפוך:

$$A\setminus(B\cup C)\subseteq(A\setminus B)\setminus C$$

$$x\in(A\setminus B)\setminus C \xLeftarrow[\text{הפרש}]{\text{הגד'}} x\in A\setminus B,\ x\notin C \xLeftarrow[\text{הפרש}]{\text{הגד'}} x\in A,\ x\notin B,\ x\notin C$$

$$\xLeftarrow[\text{איחוד}]{\text{הגד'}} x\in A,\ x\notin B\cup C \xLeftarrow[\text{הפרש}]{\text{הגד'}} x\in A\setminus(B\cup C)$$

הראינו ש $x\in(A\setminus B)\setminus C$ אמ"מ $x\in A\setminus(B\cup C)$ $\Leftarrow$ קיימת
הכלה דו כיוונית ולכן הקבוצות שוות.

כיוון ב: $x\notin B\cup C \Leftrightarrow \neg(x\in B \vee x\in C) \equiv (x\notin B\wedge x\notin C)$

תרגיל כמו 3א ממן 11

הוכיחו את הטענה הבאה:

תהיינה A,B קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסילית U.

אם $A^C \cap B \neq \emptyset, B^C \cap A \neq \emptyset$ אז $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$

ומתקיים $|A \setminus B| \geq 1, |B \setminus A| \geq 1$

נתון: $A^c \cap B \neq \phi$, $B^c \cap A \neq \phi$

צ"ל:
1) $(A\setminus B) \cap (B\setminus A) = \phi$

2) $|A\setminus B| \geq 1$, $|B\setminus A| \geq 1$

1) הוכחה בדרך השלילה

נניח בשלילה $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)\neq\emptyset$ ⇐ קיים

$x\in(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$ ⇐ לפי הגדרת חיתוך $x\in B\setminus A$, $x\in A\setminus B$

⇐ לפי הגדרת הפרש $\boxed{x\notin A}, x\in B$ וגם $\boxed{x\in A}, x\notin B$ סתירה

⇐ $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$.

2) מהנתון $A\setminus B \underset{\text{כלל}}{=} A\cap B^c \underset{\text{תכונת חילוף של חיתוך}}{=} B^c\cap A\neq\emptyset$ ⇐ $A\setminus B\neq\emptyset$

$\Leftarrow$ קיים $x\in A\setminus B$ $\Leftarrow$ $|A\setminus B|\geq 1$

באופן דומה, מהנתון $A^c\cap B\neq\emptyset$ $\Leftarrow$ $x\in B\setminus A\neq\emptyset$

$\Leftarrow$ $|B\setminus A|\geq 1$.

הנימוק ל 3ג :

$$A\triangle B=\overbrace{\underbrace{(A\setminus B)}_{|A\setminus B|\geq 1}\cup\underbrace{(B\setminus A)}_{|B\setminus A|\geq 1}}^{\text{איחוד זר}}$$

$$x\neq y$$

$$(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$$

רעיון נוסף להוכחה a

$$(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\phi$$

$$(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=(A\cap B^c)\cap(B\cap A^c)=A\cap B^c\cap B\cap A^c$$

$$=(A\cap A^c)\cap(B\cap B^c)=\phi\cap\phi=\phi$$

טענה: C,D זרות

$$|C\cup D| = |C| + |D| - \underbrace{|C\cap D|}$$

אם $C\cap D=\phi$

אז $|C\cap D|=0$

תרגיל כמו 2 ו- 3 ממן 11

הוכיחו את הטענה הבאה:

תהיינה A, B ו C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסילית U.

הוכח $(A \cup B) \setminus (B \cap C) \subseteq (A \cup C^C)$

הוכחה

נניח $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$ (ניתן להניח שקיים x

אחרת $\phi \subseteq (A \cup C^c)$ מהגדרה וסיימנו).

$\Leftarrow$ לפי הג' הפרש $x \in A \cup B$, $x \notin B \cap C$

$x \in A \cup B$ נפצל למקרה 1 $x \in A$ או מקרה 2 $x \in B$.

מקרה 1: $x \in A$ $\Leftarrow$ מתכונות איחוד $x \in A \cup C^c$.

וסיימנו.

מקרה 2: אם $x \in B$ ורצינו $x \notin (B \cap C)$

$\Leftarrow$ $x \notin C$ (אחרת, אם $x \in C$ אז $x \in B \cap C$. סתירה)

$\overset{\text{הג׳}}{\underset{\text{משלים}}{\Leftarrow}}$ $x \in C^c$ $\Leftarrow$ מתכונות איחוד $x \in A \cup C^c$. וסיימנו.

הראינו שבכל מקרה $x \in A \cup C^c$ ולכן השלמנו

את הוכחת ההכלה.

טענו — מהספר:

$A \triangle B = B \triangle A$ $\quad (A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A = B \setminus A \cup A \setminus B = B \triangle A)$

$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

$A \triangle A = A \setminus A \cup A \setminus A = \phi \cup \phi = \phi$

$A \triangle \phi = A \setminus \phi \cup \phi \setminus A = A$

$A \triangle U$

תרגיל כמו 3ג ממן 11

הוכיחו את הטענה הבאה:

אם $B\Delta\{3,4\} = A\Delta\{1,2,3\}$ אז $A\Delta B = \{1,2,4\}$

נתון:

$$A \Delta \{1,2,3\} = B \Delta \{3,4\} \quad / B\Delta$$

$$B \Delta A \Delta \{1,2,3\} = (B \Delta B) \Delta \{3,4\}$$

$$A \Delta B \Delta \{1,2,3\} = \phi \Delta \{3,4\}$$

$$A \Delta B \Delta \{1,2,3\} = \{3,4\} \quad / \Delta \{1,2,3\}$$

$$A \Delta B \Delta \underbrace{(\{1,2,3\} \Delta \{1,2,3\})}_{\phi} = \{3,4\} \Delta \{1,2,3\}$$

$$A \Delta B = \{1,2,3,4\} \setminus \{3\} = \{1,2,4\}$$

דוגמה

$A\cup B\cup C\cup \dots \cup X\cup Y\cup Z$

$A_1\cup A_2\cup A_3$

$\cup A_{50} = \bigcup_{i=1}^{50} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i$

$I=\{1,2,\dots,50\}$

תרגול עבור חיתוכים ואיחודים עבור קבוצה כלשהי I

$I=\{1,2,3\}$

$0 \quad 0 \in I$

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \, (i \in I \wedge x \in A_i)$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \, (i \in I \rightarrow x \in A_i)$$

$I=\mathbb{N}$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \ldots$$

תרגיל כמו שאלה 4 ממן 11

תהי $\mathbb{N}$ קבוצת המספרים הטבעיים, היא הקב' האוניברסלית.

לכל $k \in \mathbb{N}$ תהי $A_k = \{nk \mid n \in \mathbb{N}\}$ $= \{0\cdot k, 1\cdot k, 2\cdot k, 3\cdot k, \dots\}$

א. חשבון את A_0, A_1, A_2

ב. מיצאו $k \in \mathbb{N}$ כך ש הקבוצה $\underbrace{\bigcap_{k=1}^{6} A_k}_{A_1 \cap \dots \cap A_6}$ שווה ל A_k

ג. מיצאו $k \in \mathbb{N}$ כך ש הקבוצה $\{x+4 \mid x \in A_8\} \cup A_8$ שווה ל A_k

א)

$A_0 = \{n\cdot 0 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$

$A_1 = \{n\cdot 1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$

$A_2 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ כל המספרים הזוגיים

$A_3 = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$ $A_4 = \{0, 4, 8, 12, \dots\}$

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots = \{0\} \cap \mathbb{N} \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots = \{0\}$$

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{0\}$$

קודם להוכחה: $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \supseteq \{0\}$ ~ 0 כפולה של כל מספר

לכן. $0\in A_k$ לכל k.

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \subseteq \{0\}$$

כיוון: $\{0\}\subseteq A_k$ לכל $k\in\mathbb{N}$

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup A_2 \cup \dots = \mathbb{N}$$

נימוק: $A_k \subseteq \mathbb{N} = A_1$ לכל $k \in \mathbb{N}$

קיים להוכחה:

$\supseteq$: לכל $n \in \mathbb{N}$ $\quad n \in A_n = \{0\cdot n, 1\cdot n, 2\cdot n, \dots\}$

$\subseteq$: $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ לכל $k \in \mathbb{N}$ $\quad A_k \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$

ב)

$$\bigcap_{k=1}^{6} A_k = \overset{W}{A_1} \cap \overset{2n}{A_2} \cap \overset{3n}{A_3} \cap \overset{4n}{A_4} \cap \overset{5n}{A_5} \cap \overset{6n}{A_6} = ?$$

נחשב את המכפלה המשותפת המינימלית ל-:

$2, 3, 4, 5, 6$

פירוק	2	3	4	5	6
2	1	3	2	5	3
2	1	3	1	5	3
3	1	1	1	5	1
5	1	1	1	1	1

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$$\bigcap_{k=1}^{6} A_k = A_{60}$$

$$\boxed{k=60}$$

כיוטה לז׳.

$$A_8 = \{0, 8, 16, 24, \ldots\}$$

$$\{x+4 \mid x \in A_8\} = \{4, 12, 20, 28, \ldots\}$$

$$A_8 \cup \{x+4 \mid x \in A_8\} = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots\} = A_4$$

ג)

$$\boxed{\{x+4 \mid x\in A_8\}} = \{8n+4 \mid n\in \mathbb{N}\} =$$

$$= \{4(\underline{2n+1}) \mid n\in \mathbb{N}\}$$

כל הכפולות של 4 במקדם אי זוגי

$$\boxed{A_8} = \{8n \mid n\in \mathbb{N}\} = \{4\cdot(\underline{2n}) \mid n\in \mathbb{N}\}$$

כל הכפולות של 4 במקדם זוגי

האיחוד יהיה כל הכפולות של 4 במספר טבעי

$$\underbrace{\text{א״ז} \cup \text{זוגי}}_{\text{כל המקדמים}}$$

$$A_4 = \boxed{\{x+4 \mid x\in A_8\}} \cup \boxed{A_8} \Rightarrow \boxed{k=4}$$

∴ C,'C

$$\bigcap_{k=1}^{6} A_k \overset{?}{=} \{0\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{6} A_k = A_{60}$$

$$A_{60} = \{0, 60, 120, 180, \ldots\}$$

$$= \{60n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

תרגיל כמו 10 ממח 02

חשב את $(0,2) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{1-\frac{1}{n}}_{1^-},\underbrace{2-\frac{1}{n}}_{2^-}\right)$

$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)=\emptyset$

$n=1$: $(0,1)$

$n=2$: $(\frac{1}{2},1\frac{1}{2})$

$n=3$: $(\frac{2}{3},1\frac{2}{3})$

$\vdots$

n = גדול $[1,2)$

עד N

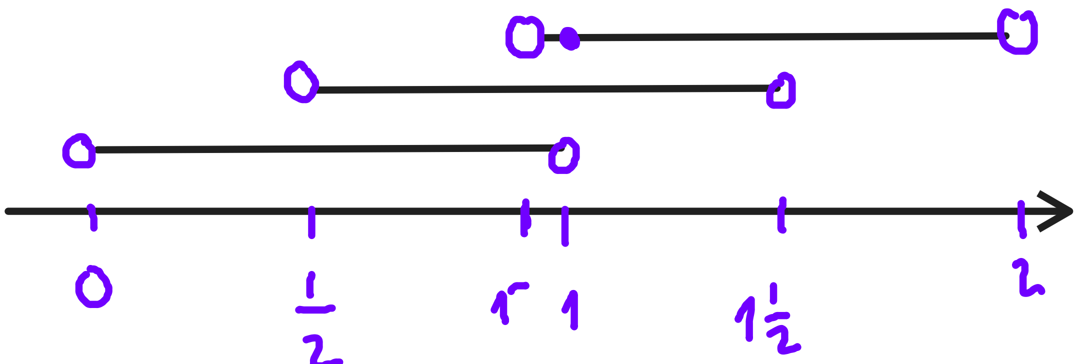
$n\to\infty$

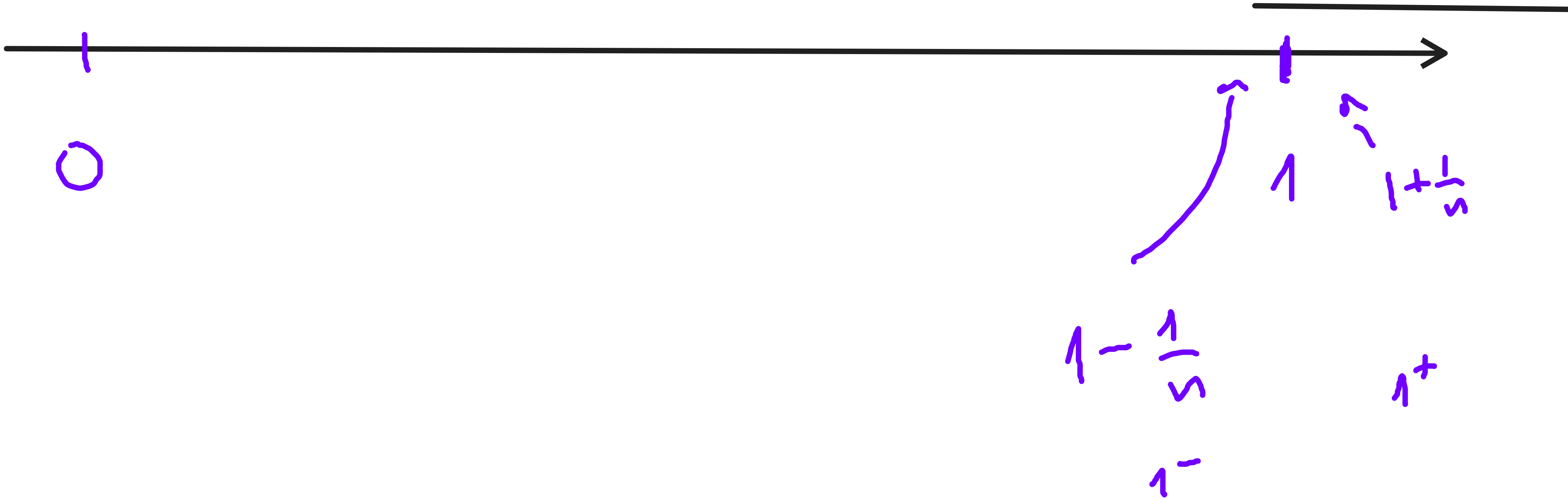
$1-\frac{1}{n}<1$

$2-\frac{1}{n}<2$

$\neq$

$1,2)$




0
1
1 - 1/n
1 + 1/n
1⁻
1⁺

प्रश्न र परीक्षा को संग्रह

סעיף משאלת החובה:

תהיינה X,Y קבוצות המוכלות בקבוצה אוניברסלית כלשהי. הוכיחו

$$(X\Delta Y)^c = (X\cap Y)\cup(X^c\cap Y^c)$$

א. תהיינה $B = \{3,4,5\}$, $A = \{1,2,3\}$, $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

קבוצה X מוגדרת כך: $X = \left\{x \in U \mid x \in A \rightarrow x \in B\right\}$.

הסימן $\rightarrow$ בתוך הנוסחה הוא הקַשָׁר הלוגי "אם... אז...". הקבוצה X היא:

[1] $\{1,2,3,4,5\}$　　**[2]** $\{3,4,5\}$　　**[3]** $\{3\}$

[4] $\{3,6,7\}$　　**[5]** $\{3,4,5,6,7\}$

א. $\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים. תהיינה $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$.

קבוצה X מוגדרת כך: $X = \{x \in \mathbf{N} \mid x \in A \leftrightarrow x \notin B\}$.

הסימן $\leftrightarrow$ שבתוך הנוסחה הוא הקשֶׁר הלוגי "אם ורק אם", שהוגדר בסעיף 5 בחוברת "מבוא מהיר ללוגיקה".

[1] $X = \varnothing$ **[2]** $X = \{1\}$ **[3]** $X = \{1,4\}$

[4] $X = \mathbf{N} - \{2,3\}$ **[5]** $X = \mathbf{N} - \{2,3,4\}$