# תורת הסיבוכיות — תרגול 2
# PSPACE־שלמות ומשחקים

## TQBF **היא** PSPACE**־שלמה**

בחלק הראשון של התרגול נוכיח ש־ TQBF היא PSPACE־שלמה.

### תזכורת

- $\mathsf{PSPACE} = \bigcup_{c>0} \mathsf{DSPACE}(n^c)$
- $\mathrm{TQBF} = \left\{ \psi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; \begin{array}{c} Q_i \in \{\exists, \forall\}, \varphi \text{ Boolean formula,} \\ \psi \text{ is TRUE} \end{array} \right\}$
  - לדוגמה: $\forall x_1 \exists x_2 \, (x_1 \wedge x_2) \notin \mathrm{TQBF}$, ולעומת זאת $\exists x_1 \forall x_2 \, (x_1 \vee x_2) \in \mathrm{TQBF}$.
- ראינו בהרצאה ש־$\mathrm{TQBF} \in \mathsf{PSPACE}$.

### הגדרות

- נאמר ששפה $L$ היא PSPACE**־שלמה** אם:
  - $L \in \mathsf{PSPACE}$.
  - $L$ היא PSPACE**־קשה**: לכל $L' \in \mathsf{PSPACE}$, מתקיים $L' \leq_p L$, כלומר קיימת רדוקצית זמן פולינומי מ־ $L'$ ל־ $L$.
- תהי $M$ מכונת טיורינג $k$־סרטית עם חסם זיכרון $s(n)$. **גרף הקונפיגורציות** $G_{M,x}$ של $M$ בריצתה על קלט $x$: (גרף מכוון)
  - מכיל צומת לכל קונפיגורציה: מצב המכונה $q \in Q$, תוכן סרטי הזיכרון $\Gamma^{s(n)}$, ומיקום הראשים הקוראים $[n+2] \times [s(n)]^k$.
  - מכיל קשת מקונפיגורציה $C$ לקונפיגורציה $C'$ אם ניתן לעבור מ־ $C$ ל־ $C'$ בצעד חישוב יחיד.
  - נסמן ב־ $C_0$ את הקונפיגורציה ההתחלתית. בלי הגבלת הכלליות, ניתן להניח שקיימת קונפיגורציה סופית מקבלת יחידה $C_{\mathrm{f}}$.
  - ניתן לייצג כל קונפיגורציה באמצעות $\mathcal{O}(s(n))$ ביטים, ומספר הקונפיגורציות חסום על ידי $2^{\mathcal{O}(s(n))}$.
- הערה: גרף הקונפיגורציות זכור לנו מהקורס בתורת החישוביות, שם ראינו כיצד ניתן להשתמש בגרף בשביל להוכיח את משפט Savitch, וכזכור, גרף הקונפיגורציות במקרה זה נבנה עבור מכונת טיורינג אי דטרמיניסטית. נשים לב שבמקרה הדטרמיניסטי אנו מקבלים "שרוך" קונפיגורציות.

## TQBF **היא** PSPACE**־קשה**

תהא $L \in \mathsf{PSPACE}$. נרצה להראות $L \leq_p \mathrm{TQBF}$, כלומר למצוא רדוקציית זמן פולינומית $x \mapsto \psi_x$ המקיימת $\psi_x \in \mathrm{TQBF} \iff x \in L$.

תהא $M$ מכונת טיורינג המכריעה את $L$ בזיכרון פולינומי $p(n)$. אם ננסה לבנות פסוק המייצג את ריצת $M$ על $x$ באופן דומה לנעשה בהוכחת משפט Cook, נקבל נוסחה מגודל אקספוננציאלי מפאת זמן הריצה האפשרי של $M$, ולכן ננסה לבנות את הנוסחה באופן אחר; נעשה זאת תוך שימוש בכמתים והסתמכות על גרף הקונפיגורציות של $M$ על $x$.

נשים לב ש־$x \in L$ אם ורק אם יש מסלול מכוון מ־ $C_0$ ל־ $C_{\mathrm{f}}$ ב־ $G_{M,x}$. נגדיר את הפרדיקט הבא: לכל שתי קונפיגורציות $C_1, C_2$ ולכל שלם $k \geq 0$:

$$\mathrm{CON}(C_1, C_2, k) = \mathrm{TRUE} \iff C_2 \text{ is reachable from } C_1 \text{ in at most } 2^k \text{ steps}$$

לכן, נרצה לבנות נוסחת $\mathrm{QBF}$ שערכה שווה ל־ $\mathrm{CON}\left(C_0, C_{\mathrm{f}}, \lceil \log|V| \rceil\right)$, כאשר $V$ זה אוסף הצמתים של $G_{M,x}$ (או כלל הקונפיגורציות); נזכור כי מתקיים $|V| = 2^{\mathcal{O}(p(n))}$. את הבנייה נבצע באופן אינדוקטיבי.

**בסיס**: $k=0$. בהינתן זוג קונפיגורציות $C_1, C_2$, קל לראות שאפשר בזמן פולינומי לבנות פסוק בוליאני $\varphi\left(C_1, C_2\right)$ שמקבל ערך $\mathrm{TRUE}$ אם ורק אם מתקיים ש־ $C_1 = C_2$ או שניתן לעבור מ־ $C_1$ ל־ $C_2$ בצעד חישוב בודד. אם כן, $\mathrm{CON}\left(C_1, C_2, 0\right) = \varphi\left(C_1, C_2\right)$.

**צעד:** עבור $k>0$, נשים לב שמתקיים:

$$\mathrm{CON}\left(C_1, C_2, k\right) = \exists C_{\mathrm{mid}} : \mathrm{CON}\left(C_1, C_{\mathrm{mid}}, k-1\right) \wedge \mathrm{CON}\left(C_{\mathrm{mid}}, C_2, k-1\right)$$

לא ניתן לפרוס את הביטוי לעיל באופן רקורסיבי כיוון אם נעשה כך אנו עלולים לקבל ביטוי מגודל אקספוננציאלי. במקום, נעזר בטריק לוגי ונרשום את הביטוי השקול הבא:

$$\mathrm{CON}\left(C_1, C_2, k\right) = \exists C_{\mathrm{mid}}\, \forall D\, \forall D' \left[\left(D = C_1 \wedge D' = C_{\mathrm{mid}}\right) \vee \left(D = C_{\mathrm{mid}} \wedge D' = C_2\right)\right] \rightarrow \mathrm{CON}\left(D, D', k-1\right)$$

ניזכר ש־ $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$. כעת, אם נפתח את הרקורסיה ונציב $k = \lceil \log|V| \rceil$, נקבל נוסחת $\mathrm{QBF}$ שגודלה פולינומי ב־ $n$. נעיר שלאחר הפתיחה הכמתים נמצאים באמצע הנוסחה, אך הזזתם לתחילת הנוסחה (ללא שינוי סדר) לא משפיעה על ערך האמת שלה.

הראינו כי $\mathrm{TQBF}$ היא PSPACE־שלמה.

## הקושי שבמשחקים

### הקדמה

אחת מזירות הקרב הבולטות שבין מוח האדם והמחשב היא במשחקי לוח, ובפרט במשחק השחמט. מכאן עולה באופן טבעי השאלה מהי הסיבוכיות של מציאת הדרך האופטימלית לשחק. מכיוון שמשחקי הלוח הקיימים הם מטבעם סופיים בגודלם והשיטות הסטנדרטיות של תורת הסיבוכיות עוסקות בניתוחים אסימפטוטיים, המשחקים שבהם נעסוק הם גרסאות מוכללות (בדרך זו או אחרת) של משחקים סופיים קיימים. אנו נעסוק במשחק פשוט יחסית להכללה בשם Geography.

כאשר עוסקים במשחקים עולה כי מחלקה טבעית לתאר אותם היא PSPACE. יותר במדויק, מציאת פתרון אופטימלי של משחק לשני שחקנים היא בדרך כלל PSPACE־קשה, ועבור משחקים "קצרים" יחסית היא גם ב־ PSPACE. אנו נראה כי הגרסה המוכללת של Geography היא בעיה PSPACE־שלמה.

בעיות PSPACE־שלמות מאפיינות לא רק משחקים, אלא גם בעיות רבות הקשורות ללוגיקה ולתורת האוטומטים. תורות רבות מסדר ראשון הן PSPACE־שלמות (כלומר, בהינתן פסוק בתורה זו, זוהי בעיה PSPACE־שלמה לקבוע האם הוא אמיתי או שקרי). למשל, התורות מסדר ראשון של הטבעיים עם יחס העוקב, של השלמים עם יחס הסדר הרגיל ושל הקבוצות הסדורות היטב. בתורת האוטומטים ניתן לציין כדוגמאות את בעיית הריקנות והשקילות של ביטויים רגולריים, מינימיזציה של אוטומט אי דטרמיניסטי, שקילות של אוטומטים אי דטרמיניסטיים, ועוד.

### מבוא קצרצר לתורת המשחקים

**משחק** הוא סיטואציה שבה מספר גורמים שונים, הנקראים **שחקנים**, צריכים לבחור בין דרכי פעולה שונות, כאשר תוצאת המשחק נקבעת על פי דרכי פעולה אלו, וכל שחקן מנסה לפעול באופן שבו תוצאת המשחק תהיה הטובה ביותר עבורו תוך התחשבות בשיקולי השחקנים האחרים. אנו מתמקדים במחלקה פשוטה של משחקים: משחקים לשני שחקנים; עם ידיעה שלמה (כל שחקן יודע בכל רגע נתון את כל המידע על המשחק ואין ידע חבוי בדמות קלפי משחק מוסתרים או הטלות קוביה עתידיות שטרם ידוע מה יהיה ערכן); ועם שתי תוצאות אפשריות בלבד — נצחון לשחקן א' או נצחון לשחקן ב' (וכל שחקן, כמובן, מעוניין בניצחון). בנוסף אנו מניחים שהשחקנים משחקים בתורות: תחילה שחקן א' מבצע צעד כלשהו, ולאחר מכן שחקן ב', ואז שוב שחקן א' וחוזר חלילה עד אשר אחד השחקנים מנצח. משחקים כאלו מכונים **משחקים דמויי־שחמט**.

- ניתן לתאר משחק שכזה באמצעות **עץ משחק**: זהו עץ שכל צומת בו מייצג מצב במשחק — את "מצב הלוח" והשחקן שתורו לשחק כעת. מכל צומת יוצאות קשתות אל צמתים המייצגים מצבי משחק שניתן להגיע אליהם לאחר שהשחקן שתורו לשחק יבצע אחד מהמהלכים האפשריים. הרעיון דומה מאוד (ולא במקרה) לעץ החישוב של מכונת טיורינג.
- **אסטרטגיה** של שחקן היא פונקציה שמתאימה לכל מצב בעץ המשחק את דרך הפעולה שבה יבחר השחקן בצומת זה. אפשר לחשוב עליה כעל "ספר הוראות" שמנחה את השחקן כיצד לשחק בכל סיטואציה אפשרית שעשויה לצוץ במהלך המשחק. בבירור, אם האסטרטגיה של שני השחקנים במשחק ידועה, ניתן לחשב את תוצאת המשחק בלי ידע נוסף: פשוט מטיילים בעץ המשחק ובכל צעד בוחרים קשת על פי האסטרטגיה של השחקן המתאים. בשל כך ניתן לצמצם את פעולתם של השחקנים לבחירת אסטרטגיה כלשהי (עוד לפני תחילת המשחק) ומעקב אחריה.
- **אסטרטגיית ניצחון** עבור שחקן היא אסטרטגיה שמבטיחה את נצחונו במשחק ללא תלות באסטרטגיה של השחקן השני.
- **משפט צרמלו** הוא אחד מהמשפטים המוקדמים ביותר בתורת המשחקים; הוא קובע שבהינתן משחק מהסוג המתואר לעיל (שני שחקנים, ידיעה שלמה, ללא מזל, אין תוצאת תיקו), לאחד משני השחקנים יש אסטרטגיית ניצחון. ההוכחה היא באינדוקציה פשוטה על עומק עץ המשחק.

### דוגמאות למשחקים

דוגמה למשחק מהסוג המתואר לעיל היא Geography. במשחק זה, שחקן א' אומר שם של עיר, ועל שחקן ב' לומר שם של עיר שמתחיל באות שבה שם העיר של שחקן א' נגמרת. לאחר מכן על שחקן א' לומר שם של עיר שמתחיל באות שבה שם העיר הקודמת הסתיים, וכן הלאה. המשחק נגמר כשאחד השחקנים נתקע בלי שיאמר מאום (כמובן, המשחק מסתמך כאן בעיקר על זיכרון חלש של השחקנים). ניתן לתאר את המשחק באמצעות גרף מכוון שבו כל עיר מיוצגת על ידי צומת והקשתות מחברות ערים בהתאם לשמות שלהם, והמשחק מתנהל כך: ראשית שחקן א' בוחר צומת $v_0$, לאחר מכן שחקן ב' בוחר צומת $v_1$ כך ש־ $v_0 \to v_1$, וכן הלאה, כאשר אסור לבחור את אותו הצומת יותר מפעם אחת והשחקן ש"נתקע" מפסיד.

ההכללה של משחק זה טבעית: השפה GG מוגדרת כאוסף כל הזוגות $(G, v)$ של גרף מכוון $G = (V, E)$ וצומת $v \in V$ כך שבמשחק שמתחיל מהצומת $v$ יש לשחקן א' אסטרטגיית ניצחון.

גם על השפה TQBF ניתן לחשוב כעל משחק, ובמובן מסויים בתור הצורה הכללית ביותר של משחק.

בהינתן פסוק $\psi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, משחקים עליו משחק באופן הבא: בתור ה־ $i$ אחד השחקנים קובע את ערכו של המשתנה $x_i$, בהתאם לזהות $Q_i$: אם $Q_i = \exists$ אז שחקן א' קובע את ערכו של $x_i$, ואם $Q_i = \forall$ שחקן ב' קובע את ערכו. לאחר שנקבע ערכם של כל המשתנים מחושב $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ על הערכים שנקבעו, ושחקן א' מנצח אם ורק אם $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1$. קל לראות שיש לשחקן א' אסטרטגיית ניצחון במשחק אם ורק אם $\psi \in \text{TQBF}$ (כי זה אומר שקיימים מהלכים נכונים ששחקן א' יכול לבצע ויבטיחו לו נצחון, לכל מהלך ששחקן ב' יבצע).

נקודת מבט זו מאפשרת לנו לקבל תחושה כללית על הקושי של בדיקת קיום אסטרטגיות ניצחון במשחקים מסוג זה. בניסוח לא פורמלי: אם משחק הוא מורכב מספיק מבחינת כלליו, ואורכו הוא פולינומי בגודל ה"לוח", אז בדיקת קיום אסטרטגיית ניצחון במשחק תהיה PSPACE־שלמה. במשחקים שבהם אורך המשחק עשוי להיות אקספוננציאלי באורך הלוח (למשל שחמט מוכלל), הבדיקה תהיה קשה עוד יותר ולא תשתייך ל־ PSPACE.

## GG **היא PSPACE־שלמה [Lichtenstein–Sipser '80]**

ראשית נראה כי $\text{GG} \in \text{PSPACE}$. נשים לב שעץ המשחק של GG (שאין לבלבל אותו עם הגרף שעליו משחקים את GG) הוא מעומק פולינומי שכן במשחק לכל היותר $|V|$ תורות (לאחריהם אין עוד צמתים פנויים שניתן ללכת אליהם).

ההוכחה זהה ברעיונה לכל הוכחה דומה עבור משחק באורך פולינומי, והיא פשוט ניסוח אלגוריתמי של הוכחת משפט צרמלו: נבצע ריצת DFS על עץ המשחק ובאמצעותה נחשב לכל צומת ערך 0 או 1 באופן הבא: אם הצומת הוא עלה, אז נתאים לו ערך 1 אם שחקן א' מנצח בו, ו־ 0 אם שחקן ב' מנצח בו. לצומת פנימי שמייצג את תורו של שחקן א' נתאים ערך שהוא $\vee$ של ערכי בניו, ולצומת פנימי שמייצג את תורו של שחקן ב' נתאים ערך שהוא $\wedge$ של בניו. נקבל אם ורק אם שורש העץ מקבל 1.

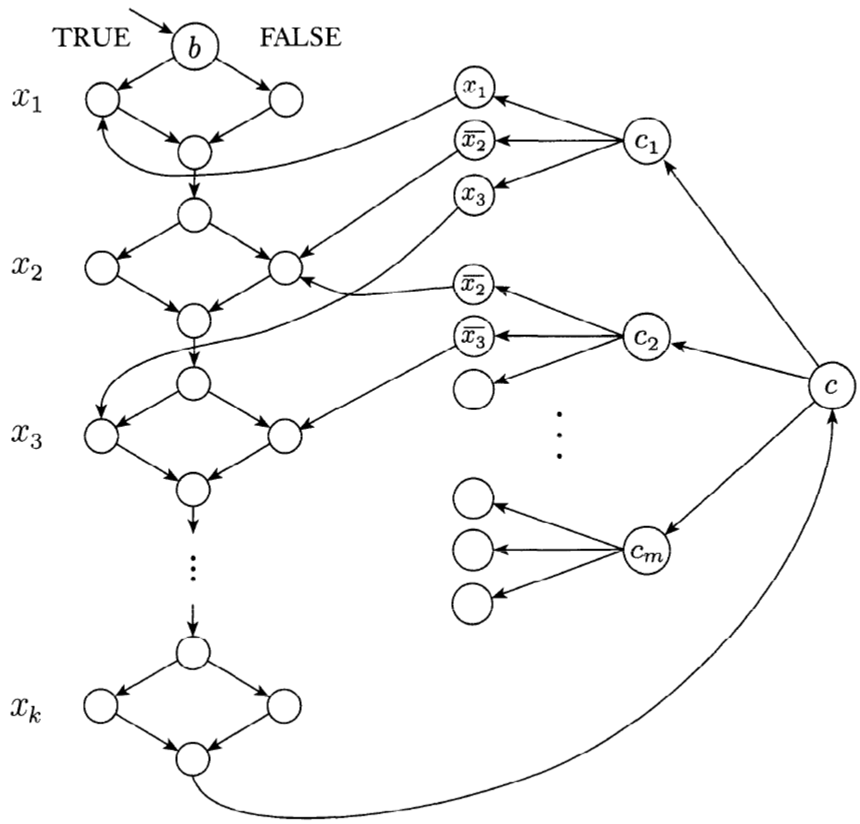
עץ הרקורסיה של האלגוריתם הוא פולינומי בעומקו והאלגוריתם צריך לשמור רק כמות פולינומית של מידע לכל צומת בעץ המשחק ויכול "למחזר" זכרון, ולכן הזכרון הכולל של האלגוריתם הוא פולינומי.

כדי להראות כי GG היא PSPACE־שלמה נראה רדוקציה $\text{TQBF}' \leq_p \text{GG}$, כאשר $\text{TQBF}'$ היא גרסה מצומצמת של TQBF שבה הפסוקים הם תמיד מהצורה $\psi = \exists x_1 \forall x_2 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ כך ש־ $\varphi$ היא נוסחת CNF, הכמתים מתחלפים בכל אחד מהמשתנים, והכמת הראשון והאחרון שניהם כמתי $\exists$. ניתן להראות ללא קושי מהותי כי גם $\text{TQBF}'$ היא PSPACE־שלמה בהתבסס על השלמות של TQBF.

בהינתן $\psi$, הרדוקציה תבנה ממנו גרף שמשחק עליו יהיה חייב להתנהל באופן הבא:

1. שחקן א' ושחקן ב' לסירוגין בוחרים בצמתים שמתאימים להשמות למשתנים ובכך "שורפים" אותם, בעוד שהצומת שמתאים להשמת הערך ההפוך נותר "בחיים".
2. שחקן ב' בוחר צומת שמותאם לאחת מהפסוקיות ב־ $\varphi$.
3. שחקן א' בוחר צומת שמותאם לאחד מהליטרלים בפסוקית ששחקן ב' בחר.
4. הליטרל ששחקן א' בחר מחובר בקשת לצומת של המשתנה המתאים מחלק 1. על כן, אם הצומת שרוף (כלומר, הליטרל המתאים נותן ערך אמת לפסוקית) שחקן ב' הפסיד; אחרת, שחקן ב' ניצח.

כתמיד ברדוקציות כאלו, תמונה אחת שווה אלף מילים:



TRUE
$b$
FALSE
$x_1$
$x_2$
$x_3$
$x_k$
$x_1$
$\overline{x_2}$
$x_3$
$\overline{x_2}$
$\overline{x_3}$
$c_1$
$c_2$
$c_m$
$c$