

תורת הסיבוכיות (236313)

אביב תשע"ב

מועד א'

2.7.2012

מרצה: פרופ' אייל קושלביץ

מתרגל: גדי אלכסנדרוביץ

הנחיות:

- המבחן הוא עם חומר סגור.
- חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- נמקו את כל תשובותיכם.
- בכל סעיף ניתן לקבל 20% מהניקוד אם במקום תשובה כותבים "לא יודע/ת".
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק.
- השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסויים, כדי לצבור מקסימום נקודות בזמן העומד לרשותכם.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות) (שאלת ש"ב)

הוכיחו את הטענות הבאות:

1. $BPP^{BPP} \subseteq BPP$ (10 נקודות).

2. $NP^{BPP} \subseteq BPP^{NP}$ (10 נקודות).

3. אם $NP \subseteq BPP$ אז ההיררכייה הפולינומית קורסת (רמז: הוכיחו באינדוקציה על k כי $\Sigma_k^P \subseteq BPP$ (5 נקודות).

שאלה 2 (10 נקודות) (שאלת ש"ב)

נגדיר G הוא גרף מכוון קשיר-היטב $STRONG-CON = \{G \mid G \text{ הוא גרף מכוון קשיר-היטב}\}$. הוכיחו כי שפה זו היא NL-שלמה.

שאלה 3 (15 נקודות) (שאלת ש"ב)

גרף שכבות הוא גרף מכוון שקבוצת הצמתים שלו מחולקת לסדרת קבוצות (זרות) הנקראות שכבות, כך שכל קשת בגרף יוצאת מצומת בשכבה אחת ונכנסת לצומת בשכבה העוקבת.

נגדיר שפה $COUNT-CON = \{(G, s, t, m) \mid m \text{ מספר המסלולים ב-} G \text{ מהצומת } s \text{ לצומת } t \text{ הוא בדיוק } m\}$.

כמו כן, m נתון בייצוג אונרי, ואילו בקידוד של G לכל צומת מצויין גם מספר השכבה שלו.

הוכיחו כי $COUNT-CON \in DSPACE(\log^2(n))$.

שאלה 4 (15 נקודות)

1. מצאו והוכיחו לאיזו מחלקת שפות מוכרת שווה $NP^{NP \cap coNP}$ (5 נקודות).

2. נגדיר את המחלקה $DP = \{L \mid \exists L_1 \in NP, L_2 \in coNP, L = L_1 \cap L_2\}$.

הוכיחו כי $NP^{DP} \subseteq \Sigma_3^P$ (10 נקודות).

שאלה 5 (35 נקודות)

כזכור, $NEXP = \bigcup_{c=0}^{\infty} NTIME(2^{n^c})$.

כמו כן נגדיר $coNEXP = \{L \mid \bar{L} \in NEXP\}$.

1. הוכיחו כי אם $NP = coNP$ אז $NEXP = coNEXP$ (5 נקודות).

2. הוכיחו כי $coNEXP \subseteq NEXP / (n+1)$ (מכונות בעלות סיבוכיות זמן אקספוננציאלית המקבלות עצה בגודל $n+1$).
רמז: השתמשו בעצה על מנת לקודד מספר בין 0 ל- 2^n (10 נקודות).

3. נשתמש ב- $C(x_1, \dots, x_n)$ לסימון מעגל בוליאני על n משתנים וביסמון $C(i)$ כדי לתאר את ערכו של C על הקלט i -ה' בסדר לקסיקוגרפי על הקלטים.

נגדיר את השפה הבאה:

$SUCCINT-3SAT = \{C \mid C(i) \text{ היא פסוקית } 3CNF \text{ ו-} \bigwedge_{i=0}^{2^n-1} C(i) \text{ הוא פסוק } 3CNF \text{ ספיק } C\}$

הוכיחו כי שפה זו היא NEXP-שלמה ביחס לרדוקציות פולינומיות (10 נקודות).

4. נגדיר **מערכת הוכחה מרובת מוכיחים** באופן הבא: המערכת כוללת מוודא הסתברותי פולינומי V ושני מוכיחים כל-יכולים דטרמיניסטיים P_1, P_2 .

בהינתן w ומחרוזת אקראיות r , V שולח הודעות q_1, q_2 המחושבות מתוך (w, r) ל- P_1, P_2 וכל אחד מהם עונה לו תשובה a_1, a_2 , בהתאמה. V מחליט אם לקבל או לדחות על פי (w, r, a_1, a_2) .

בין P_1 ו- P_2 **אין תקשורת** (פרט לכך שהם יכולים "לתאם מראש" את אופן פעולתם), כלומר a_i הוא פונקציה דטרמיניסטית של (w, q_i) עבור $i = 1, 2$.

אם $w \in L$ אז על V לקבל בהסתברות 1 (שלמות מלאה) בפרוטוקול מול P_1, P_2 בעוד שאם $w \notin L$ על V לדחות בהסתברות לפחות $\frac{2}{3}$ בפרוטוקול מול כל זוג מוכיחים אפשרי.

נסמן ב-MIP את מחלקת השפות שקיימת עבורן מערכת הוכחה מרובת מוכיחים. הוכיחו כי $MIP \subseteq NEXP$ (10 נקודות).