תורת הסיבוכיות – תרגול 12
עצי החלטה

עצי החלטה – הגדרה

עצי החלטה הם מודל פשוט של חישוב, שמיועד למדל את כמות הביטים שיש לקרוא מהקלט כדי לחשב פונקציה מסויימת. פורמלית, **עץ החלטה** על n משתנים $x_1, \ldots, x_n$ הוא עץ בינארי שבו כל צומת פנימי מסומן על ידי אחד המשתנים, והקשתות היוצאות מאותו צומת מסומנות ב־ 0 או ב־ 1. בעלים מצויים ערכים כלשהם. בהינתן השמה למשתנים, היא קובעת מסלול יחיד בעץ, והפלט של העץ על השמה זו הוא הערך שנמצא בעלה שבסוף המסלול.

בהינתן עץ החלטה T נסמן ב־ $D(T)$ את עומק העץ וב־ $S(T)$ את גודלו (מספר העלים).

עבור פונקציה f נגדיר:

$$D(f) \triangleq \min_T \{D(T) \mid T \text{ עץ החלטה המחשב את } f\}$$

$$S(f) \triangleq \min_T \{S(T) \mid T \text{ עץ החלטה המחשב את } f\}$$

בבירור לכל פונקציה f מתקיים $D(f) \leq n$ ו־ $S(f) \leq 2^n$, שכן העץ הבינארי המלא יכול לשמש לחישוב כל פונקציה אפשרית.

כמו כן, לכל עץ החלטה T מתקיים $D(T) \geq \log_2 S(T)$, שכן בעץ בינארי מלא מעומק k יש לכל היותר 2^k עלים.

השאלה המרכזית בנוגע לעץ החלטה עבור פונקציה f היא האם $D(f) = n$ או שהוא קטן יותר. כלומר, האם ניתן לחשב את הפונקציה מבלי לקרוא את כל הביטים שבקלט?

דוגמה 1 – זוגיות

פונקציית הזוגיות ידועה לשמצה ככזו המאפשרת הוכחת חסמים תחתונים ונשתמש בה גם כאן. נגדיר $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$. נוכיח כי $S(f) = 2^n$, ולכן $D(f) = n$ (שימו לב ש־ $S(f) = 2^n$ היא תוצאה חזקה יותר מאשר $D(f) = n$).

נניח בשלילה כי $S(f) < 2^n$. מכאן נובע כי בהכרח קיים בעץ עלה בעומק קטן מ־ n, שאם לא כן אז העץ היה עץ בינארי מלא מעומק n לפחות, ולכן בעל לפחות 2^n צמתים. נסמן עלה זה ב־ l.

מכיוון שעומק l הוא פחות מ־ n קיים משתנה x_i שאינו מופיע במסלול אל l. ניקח השמה $\bar{x}$ שעבורה מגיעים בחישוב על T לעלה l. ניקח שתי השמות $\bar{x}, \bar{y}$ הנבדלות זו מזו רק בערך שהן נותנות ל־ x_i. בבירור $T(\bar{x}) = T(\bar{y})$, אבל $f(\bar{x}) \neq f(\bar{y})$, וזה בסתירה להנחה ש־ T מחשב את f.

דוגמה 2 – מטריצה

נגדיר פונקציה $f\left(x_{(1,1)}, x_{(1,2)}, \ldots, x_{(k,k)}\right) = \bigwedge_{i=1}^k \left(\bigvee_{j=1}^k x_{(i,j)}\right)$.

אפשר לחשוב על המשתנים כאילו הם מייצגים כניסות במטריצה בינארית, ו־ f מחזירה 1 אם ורק אם אין במטריצה שורת אפסים.

נסמן $n = k^2$ – מספר המשתנים הכולל.

בניגוד לדוגמה הקודמת, כאן $S(f) < 2^n$ בבירור – למשל, עץ החלטה שבודק את השורה הראשונה ומסתיים בעלה 0 אם כל המשתנים של השורה הם 0, הוא דוגמה לעץ החלטה לא מלא שעומקו לכל היותר n (כי כבר ראינו שעומק עץ החלטה לא נדרש אף פעם להיות יותר מ־ n), ולכן מספר הצמתים הכולל בעץ קטן מ־ 2^n.

עם זאת, עדיין מתקיים $D(f) = n$. נוכיח זאת באמצעות "טיעון יריב": בהינתן עץ החלטה T כלשהו, נבדוק איך העץ מתמודד עם קלט שנבנה באופן דינמי על ידי יריב שמנסה להכשיל את העץ.

היריב יפעל כך: לכל שורה במטריצה, כל עוד נותר לפחות משתנה אחד עליו העץ T לא שאל, היריב יחזיר 0 לכל המשתנים; רק עבור המשתנה האחרון היריב יחזיר 1.

נניח כי עומק העץ קטן מ־ n. אזי, בסיום ריצת העץ על הקלט שבנה היריב קיים בהכרח משתנה $x_{(i,j)}$ שעליו העץ לא שאל. על פי הגדרת היריב, לכל j' שעליו הוא נשאל הוא ענה $x_{(i,j')}=0$. בנוסף, כל שורה אחרת במטריצה או נקבעה על פי שאלות העץ להיות שורה שמכילה 1, או שקיימים בה משתנים שהעץ טרם שאל עליהם.

אם העץ החזיר 0, היריב יכול להשלים את הקלט החלקי שלו לקלט שמחזיר 1 – הוא יבחר $x_{(i,j)}=1$, וכן יעשה לכל שורה אחרת שטרם נשאל עליה בשלמותה.

אם העץ החזיר 1, היריב יכול להשלים את הקלט החלקי שלו לקלט שמחזיר 0 – הוא יבחר $x_{(i,j)}=0$, וכן לכל שאר המשתנים משורה i שטרם נבחרו.

בשני המקרים הגענו לסתירה, ולכן העץ חייב להיות מעומק n.

דוגמה 3 – מציאת מנצח במשחק

נתונים k שחקני טניס וכולם משחקים עם כולם. נגדיר משתנה $x_{(i,j)}$ לכל זוג $1\le i<j\le k$ כך ש־ $x_{(i,j)}$ הוא 1 אם i ניצח את j ו־ 0 אם j ניצח את i (תיקו לא ייתכן). יש בסך הכל $n=\binom{k}{2}$ משתנים.

נגדיר $f(x_{(1,2)},\ldots x_{(k-1,k)})=1$ אם ורק אם קיים "אלוף" – שחקן אשר ניצח את כל שאר השחקנים האחרים.

מן הסתם לא ניתן להניח על הקלט דבר נוסף, דוגמת טרנזיטיביות.

נראה כי בניגוד לדוגמאות הקודמות שראינו, $D(f)<n$ במקרה זה, ואפילו קטן משמעותית.

הרעיון הוא שכל משתנה נותן לנו אינפורמציה כפולה: לא רק ששחקן אחד ניצח (ולכן הוא עדיין בעל פוטנציאל להיות אלוף), אלא גם ששחקן אחר הפסיד (ולכן אין לו שום פוטנציאל להיות אלוף ואין צורך לבדוק את המשתנים שמייצגים משחקים שלו עם לוזרים אחרים).

נציג אלגוריתם שפותר את הבעיה וניתן לתרגום לעץ החלטה (דהיינו, בכל שלב מבצע החלטה על בסיס ביט אחד בלבד). האלגוריתם יכלול שלושה שלבים בלבד:

1. בשלב זה ניתן ל־ 1 לשחק נגד 2, למנצח מבין שניהם לשחק נגד 3, וכן הלאה עד למשחק נגד k. עד כה $k-1$ משחקים.
2. המנצח בסוף שלב 1 הוא המשתתף היחיד בתחרות שלא הפסיד עדיין. ניתן לו לשחק נגד כל מי שעדיין לא שיחק נגדו. עומק השלב הזה הוא לכל היותר $k-2$ משחקים.
3. אם המנצח של שלב 1 ניצח גם את כל המתמודדים בשלב 2, מחזירים 1, ואחרת מחזירים 0.

בסך הכל קיבלנו: $D(f)\le 2k-3=O\left(\sqrt{n}\right)$.

מדד קשור: רגישות

כפי שראינו בדוגמאות, סיבוכיות עץ ההחלטה עבור פונקציה f תלויה מאד בהתנהגות של f על קלטים שזהים זה לזה כמעט בכל הביטים שלהם. הסיבה לחסם התחתון ההדוק עבור PARITY (פונקציית הזוגיות) הייתה ששינוי בביט בודד של הקלט גרם לשינוי בפלט, בעוד שבדוגמת משחק הטניס, שינוי במספר רב של ביטים היה חסר חשיבות בכל הנוגע לפלט הפונקציה. הבחנות אלו הן הבסיס להגדרת ה"רגישות" של פונקציה בוליאנית:

בהינתן $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ וקלט x, ה**רגישות** של f על x, המסומנת ב־ $\mathrm{s}_x(f)$, היא מספר הביטים השונים i כך ש־ $f(x)\ne f(x^i)$, כאשר x^i זהה ל־ x פרט לביט ה־ i.

הרגישות של f מוגדרת להיות $\mathrm{s}(f)=\max_x\{\mathrm{s}_x(f)\}$.

ההכללה של מושג זה היא "רגישות בלוקים": $\mathrm{bs}_x(f)$ היא המספר b המקסימלי כך שישנם בלוקים זרים של ביטים $B_1,B_2,\ldots,B_b$ עבורם $f(x)\ne f(x^{B_i})$, כאשר x^{B_i} הוא x פרט לכך שכל הביטים בבלוק B_i הפוכים. כצפוי, $\mathrm{bs}(f)=\max_x\{\mathrm{bs}_x(f)\}$.

רגישות בלוקים היא הכללה של רגישות רגילה – רגישות רגילה זהה לרגישות בלוקים אם מגבילים כל בלוק להיות מגודל 1; לכן $\mathrm{s}(f)\le\mathrm{bs}(f)$ לכל f. השערה פתוחה היא שקיים c כך ש־ $\mathrm{bs}(f)=\mathcal{O}\left(\mathrm{s}\left(f\right)^c\right)$ (ניתן להראות כי בהכרח $c\ge 2$ אם ההשערה נכונה).

נראה כעת כי $\mathrm{bs}(f)\le D(f)$ (ולכן בפרט $\mathrm{s}(f)\le D(f)$): נסמן $\mathrm{bs}(f)=s$ ויהי x שעליו מתקבלת רגישות s, ו־ $B_1,\ldots,B_s$ הבלוקים המתאימים. היריב יבנה קלט באופן הבא: לכל שאלה ששואל העץ הוא יענה באופן שמתאים ל־ x. אם בסוף החישוב קיים בלוק שאותו העץ לא דגם (מה שמתחייב מכך שעומקו קטן מ־ s) אז היריב יבחר את יתר הביטים של הקלט כך שיתקבל x או x^{B_i}, בהתאם לתשובת העץ (מובטח שאחד משניהם יסתור את תשובת העץ).