

22.9.2003

פרופ' איל קושלביץ

מיכל אהרון

### **בחינה סופית**

### **תורת הסיבוכיות**

**אביב תשס"ג – מועד ב'.**

#### **הנחיות:**

1. הבחינה עם חומר סגור.
2. נמקו את כל תשובותיכם.
3. התחילו כל תשובה בדף חדש.
4. בפתרון כל סעיף מותר להסתמך על טענות המופיעות בסעיפים קודמים.
5. מומלץ לא "להתקע" זמן רב מדי על אף סעיף.
6. משך הבחינה – 3 שעות.

**בהצלחה !**

שאלה 1: (50 נקודות)

לפניך מספר היגדים.

1. ההיררכיה הפולינומית קורסת.
2.  $\text{Generalized Geography} \in P$ .
3.  $\text{NTIME}(n^3) \neq \text{DTIME}(n^3)$ .
4. לכל שפה ב-DL קיים מעגל בעל עומק קבוע וגודל פולינומי (fan-in אינו חסום).
5. קיים אלגוריתם פולינומי הפותר לכל  $n$  טבעי את בעיית הפרמנט במדויק על כל המטריצות מגודל  $n \times n$ , למעט על  $n^c$  מטריצות מגודל זה (עבור  $c$  קבוע כלשהו).
6.  $\text{CVAL} \in \text{DL}$ .

לכל אחד מההיגדים הנ"ל קבע האם הוא נכון או לא נכון. כמקובל בתורת הסיבוכיות, עבור רוב ההיגדים התשובה איננה ידועה. לפיכך לכל זוג מההיגדים הנותרים ציין יחסי גרירות אותן ניתן להוכיח (לדוגמא:  $(A \rightarrow \neg B, A \rightarrow B)$ ). נמק כל טענה בקצרה. שים לב כי עדיין יתכן שלא לכל זוג היגדים תוכל להראות קשר כלשהו.

שאלה 2: (30 נקודות)

מעגל בעל  $2n$  קלטים  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ , מייצג גרף מכוון בעל  $2^n$  צמתים באופן הבא: קשת מכוונת בין צומת  $X$  לצומת  $Y$  בגרף קיימת אם  $C(X, Y) = 1$ . נגדיר את השפה הבאה:  $L = \{(C, s, t) \mid C \text{ המעגל ע"י המיוצג } t \text{ בגרף המיוצג ע"י } s \text{ לצומת } t \text{ בגרף המיוצג ע"י } C\}$ .

הוכח:

- א.  $L \in \text{PSPACE}$  (15 נק').
- ב.  $L$  היא  $\text{PSPACE}$ -שלמה. (15 נק').

שאלה 3: (20 נקודות)

משפט ה-PCP מראה כי  $NP = PCP(\log n, 1)$ . בשאלה זו נשלול אפשרות אחת לחיזוק משפט זה.

הוכח: אם  $NP = PCP(f(n), 1)$  עבור  $f(n) = o(\log n)$ , אזי  $NP = P$ .

רמז: רדוקציה עצמית.

אם אינך יודע לפתור שאלה זו, תוכל לקבל חצי מהנקודות עבור הוכחה ש:  $PCP(\log \log n, 1) = P$ ,

כאשר כאן ניתן להתייחס להגדרת ה-PCP ללא order, כלומר:

$PCP(r(n), q(n))$  הוא אוסף השפות  $L$ , שקיים עבורן  $(r(n), q(n))$ -מוודא  $v$ , אשר קורא לכל  $x$  מאורך  $n$

$q(n)$  ביטים מההוכחה, ומשתמש ב- $r(n)$  ביטים אקראיים.

עבור  $x \in L$ , קיימת הוכחה  $\pi_x$  שעבורה  $v$  מקבל תמיד, ועבור  $x \notin L$ , לכל הוכחה  $\pi$ ,  $v$  דוחה בהסתברות

גדולה מ- $\frac{1}{2}$ .

תזכורות:

א. משפט Karp-Lipton: אם  $NP \subseteq P/Poly$  אזי ההיררכיה קורסת ל- $\Sigma_2^P$ .

ב. עקרון הניפוח כלפי מעלה:

יהיו  $CLASS_1, CLASS_2 \in \{DTIME, NTIME, DSPACE, NSPACE\}$  ויהיו

$f_1(n), f_2(n) \geq \log(n), g(n) \geq n$  פונק' שעון / זכרון.

אזי אם:  $CLASS_1(f_1(n)) \subseteq CLASS_2(f_2(n))$ ,

אז גם:  $CLASS_1(f_1(g(n))) \subseteq CLASS_2(f_2(g(n)))$ .

ג. CVAL הינה P-שלמה.

Generalized Geography הינה PSPACE שלמה.

Permanent הינה #P שלמה.