הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למדעי המחשב
18.3.02

פרופ/ח' איל קושלביץ
מיכל אהרון

בחינה סופית
תורת הסיבוכיות
חורף תשס"ב - מועד ב'

הנחיות:

1. הבחינה עם חומר סגור.
2. נמקו את כל תשובותיכם.
3. התחילו כל תשובה בדף חדש.
4. בפתרון כל סעיף מותר להסתמך על טענות המופיעות בסעיפים קודמים.
5. מומלץ לא "להתקע" זמן רב מדי על אף סעיף.
6. משך הבחינה – 3 שעות.

בהצלחה!

שאלה 1 (24 נקודות)

בשאלה הבאה נניח את ההנחות הבאות: $\mathrm{NP} \not\subseteq \mathrm{BPP}$, $\mathrm{BPP} \not\subseteq \mathrm{NP}$, $\mathrm{NP} \not\subseteq \mathrm{coNP}$.
תהיינה A, B, ו- C מחלקות מוכרות של שפות/מכונות. ידוע כי: $A \not\subseteq B$.
לגבי כל אחת מהטענות הבאות קבע האם הטענה אפשרית. אם כן - הבא דוגמא עבורה הטענה מתקיימת.
אם לא - הוכח.

(7%) **א.** $C^B \subseteq C^A$

(7%) **ב.** $B^C \subseteq A^C$

(10%) **ג.** $B^B \subseteq A^A$

שאלה 2 (20 נקודות)

הוכיחו כי אם $\mathrm{DL} \in s-t-CON$ אזי קיימת מ"ט דטרמיניסטית M בעלת סרט קלט לקריאה בלבד, סרט פלט לכתיבה בלבד ו- k סרטי עבודה, המשתמשת בזיכרון $O(\log n)$, כך שעל קלט גרף מכוון חסר מעגלים G ושני צמתים s ו- t, המכונה M מחזירה על סרט הפלט מסלול מכוון מ- s ל- t בגרף (אם קיים כזה). עליכם לתאר באופן מילולי אך מדויק את ריצת המכונה.

שאלה 3 (20 נקודות)

(10%) **א.** הוכיחו כי אם $\mathrm{DTIME}(n) \subseteq \mathrm{NL}$ אזי $\mathrm{P} = \mathrm{NL}$.

(10%) **ב.** הוכיחו כי $\mathrm{DTIME}(n) \neq \mathrm{NL}$ (ללא שימוש בהנחות לא מוכחות).

שאלה 4 (36 נקודות)

תזכורת (המחלקה MA):

$L \in MA$ אם קיימת $A \in P$ כך ש:

$x \in L \Rightarrow \exists Y\, Pr_r[(x,Y,r) \in A] \geq \frac{3}{4}$
$x \notin L \Rightarrow \forall Y\, Pr_r[(x,Y,r) \in A] \leq \frac{1}{4}$

ידוע כי $\mathrm{BPP} \subseteq MA \subseteq \sum_2^p$. ניתן להניח כי ההכלות הנ"ל הן הכלות "ממש", וכי ההירכיה הפולינומית איננה קורסת. בנוסף, נזכיר את משפט $Toda$ המוכיח כי $\mathrm{PH} \subseteq \mathrm{P}^{\mathrm{PP}}$.

נתאר עתה שלוש מחלקות מעגלים שונות. למעגלים בכל שלוש המחלקות ישנם שלושה סוגי כניסות:

1. כניסות קלט רגילות: $X = x_1, x_2, ...x_n$.
2. כניסות המסומנות ע"י הכמת $\exists$: $W = w_1, w_2, ...w_k$.
3. כניסות המסומנות באות M (מהמילה $majority$): $Z = z_1, z_2, ..., z_l$.

שלוש המחלקות הן $Poly - time - uniform$.
המחלקות שונות זו מזו בהגדרת הקבלה של שפה L על ידם:

המחלקה $C1$ מוגדרת כדלהלן:

$x \in L \Rightarrow \exists W\, Pr_Z[C(X,W,Z) = 1] \geq \frac{3}{4}$
$x \notin L \Rightarrow \forall W\, Pr_Z[C(X,W,Z) = 1] \leq \frac{1}{4}$

כלומר (נתאר במילים, לצרכי פשטות את השורה הראשונה בלבד) עבור קלט $X \in L$ קיימת השמה $W = w_1, w_2, ..., w_k$ עבור כניסות הכמתים $\exists$, כך שעבור לפחות $\frac{3}{4}$ ההשמות האפשריות $Z = z_1, z_2, ..., z_k$ לכניסות M מתקיים: $C(X,W,Z) = 1$.

המחלקה $C2$ מוגדרת כדלהלן:

$x \in L \Rightarrow \forall W\, Pr_Z[C(X,W,Z) = 1] \geq \frac{3}{4}$
$x \notin L \Rightarrow \forall W\, Pr_Z[C(X,W,Z) = 1] \leq \frac{1}{4}$

המחלקה $C3$ מוגדרת כדלהלן:

$x \in L \Leftrightarrow \exists W\, Pr_Z[C(X,W,Z) = 1] \geq \frac{3}{4}$

עבור כל אחת מהמחלקות $C1, C2, C3$ קבע האם היא שקולה ל- MA. הוכח קביעתך. תוכל להסתמך בתשובתך על ההנחות והעובדות המוזכרות בראש השאלה.
(12 נקודות עבור כל מחלקה).