הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למדעי המחשב
8.2.02

פרופ/ח' איל קושלביץ
מיכל אהרון

בחינה סופית
תורת הסיבוכיות
חורף תשס"ב

הנחיות:

1. הבחינה עם חומר סגור.
2. נמקו את כל תשובותיכם.
3. התחילו כל תשובה בדף חדש.
4. בפתרון כל סעיף מותר להסתמך על טענות המופיעות בסעיפים קודמים.
5. מומלץ לא "להתקע" זמן רב מדי על אף סעיף.
6. משך הבחינה – 3 שעות.

בהצלחה!

שאלה 1 (60 נקודות)

"מכונה חסרת סיכונים" הינה מכונת טיורינג (אי-דטרמיניסטית או הסתברותית) שאף פעם לא טועה, אך עשויה לאמר 'לא יודעת'. בנוסף, לכל קלט של המכונה קיים לפחות מסלול אחד עליו היא עונה את התשובה הנכונה (מקבלת או דוחה).

בכל אחד מהסעיפים א'-ד' קבע, במונחים של מחלקות מוכרות, את אוסף השפות הניתנות לזיהוי ע"י קבוצת המכונות הנתונה. הוכח את תשובתך.

א. (13%) מ"ט א"ד פולינומיות חסרות סיכונים.

ב. (13%) מ"ט א"ד פולינומית חסרות סיכונים עם אוב לשפה שיש עבורה מ"ט א"ד פולינומית חסרת סיכונים.

ג. (13%) מ"ט א"ד עם זכרון $O(\log(n))$ חסרות סיכונים.

ד. (13%) הוכחות אינטראקטיביות עם מוודא פולינומי חסר סיכונים.

מערכת כזו מוגדרת כדלהלן:

אם: $x \in L$ אז: קיים P עבורו V מקבל בהסתברות $\geq 3/4$ (ובשאר אומר 'לא יודע').

אם: $x \notin L$ אז: לכל P' המוודא V דוחה בהסתברות $\geq 3/4$ (ובשאר אומר 'לא יודע').

ה. (8%) פרופסור איפכא מסתברא טען כי התשובה לסעיף ד' הינה PSPACE, והסביר:

לכל $L \in \text{PSPACE}$ מתקיים גם: $\bar{L} \in \text{PSPACE}$, ולפי המשפט שהוכח בכיתה ($\text{PSPACE} = \text{IP}$) לשתי השפות קיימות מערכות הוכחה אינטראקטיביות עם שלמות מלאה. מערכת ההוכחה עם מוודא חסר סיכונים עבור L תהיה אם כן:

הרץ את פרוטוקול ההוכחה עבור L. אם המוודא דחה - עצור ודחה.
הרץ את פרוטוקול ההוכחה עבור $\bar{L}$. אם המוודא דחה - עצור וקבל.
אחרת - ענה 'לא יודע'.

האם ההוכחה שמצא הפרופסור נכונה? הוכח תשובתך.

שאלה 2 (40 נקודות)

שאלה זו עוסקת בהשפעתן של הנחות אחידות שונות על כוחם של מעגלים.

לאורך כל השאלה נסמן poly-time-uniform ו- poly-space-uniform כ- PTU ו- PSU בהתאמה.

(15%) **א.** תהי A מחלקת השפות הניתנות לזיהוי ע"י משפחת מעגלים PTU בגודל פולינומי.
תהי B מחלקת השפות הניתנות לזיהוי ע"י משפחת מעגלים PSU בגודל פולינומי.
בהנחה ש: $\mathrm{P} \neq \mathrm{BPP}$, הוכח: $A \subsetneq B$.

'מעגל עם כמתים' הוא מעגל עם כניסות קלט $x_1, x_2, ..., x_n$ ועם כניסות כמתים $(Q_1, y_1), (Q_2, y_2), .., (Q_m, y_m)$, כאשר: $Q_i \in \{\exists, \forall\}$.

מעגל C עם כמתים מקבל קלט x אם הפסוק

$$\psi = Q_1 y_1 Q_2 y_2 ... Q_m y_m \left(C(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 1\right)$$

ערך האמת שלו הוא T.

נסמן ב- QC את אוסף המעגלים עם כמתים, וב- $\exists C$ את אוסף המעגלים עם כמתים בהם לכל Q_i מתקיים: $Q_i = \exists$.

נגדיר משפחת מעגלים עם כמתים אחידה (PTU / PSU) כמשפחת מעגלים עם כמתים בגודל פולינומי ב- n שניתן ליצרם ע"י מכונות טיורינג מוגבלות בזיכרון או בזמן בהתאמה.

(10%) **ב.** הוכח: $\exists C = NP$ -PTU.

(15%) **ג.** הוכח: PTU - QC = PSU - QC.