תורת הסיבוכיות (236313)
חורף תשע"א
מועד ב'
14.3.2011

מרצה: פרופ' איל קושילביץ
מתרגל: גדי אלכסנדרוביץ'

הנחיות:

1. המבחן הוא עם חומר סגור.
2. חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי ברשות הנבחן בעת הבחינה.
3. נמקו את כל תשובותיכם.
4. בכל סעיף ניתן לקבל 20% מהניקוד אם במקום תשובה כותבים "לא יודע/ת".
5. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק.
6. השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסויים, כדי לצבור מקסימום נקודות בזמן העומד לרשותכם.
7. משך הבחינה שלוש שעות.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

נגדיר $\mathrm{BP}\cdot\mathrm{NP}=\{L|L\leq_r \mathrm{SAT}\}$.

כאן $L_1\leq_r L_2$ משמעותו שקיימת מכונת טיורינג פולינומית הסתברותית M כך שלכל x-
$\Pr\left[x\in L_1 \iff M(x)\in L_2\right]\geq 1-2^{-(|x|+1)}$ (ההסתברות נלקחת על פני הריצות השונות של M).

1. הוכיחו כי $\mathrm{BP}\cdot\mathrm{NP}\subseteq \mathrm{AM}$ (5 נקודות).
2. הוכיחו כי $\mathrm{BP}\cdot\mathrm{NP}\supseteq \mathrm{AM}$ (10 נקודות).
3. הוכיחו כי $\mathrm{BP}\cdot\mathrm{NP}\subseteq\mathrm{NP/poly}$ (10 נקודות).

שאלה 2 (20 נקודות)

בשאלה זו, תוכנית מתפצלת על המשתנים $x_1,\ldots,x_n$ היא גרף מכוון וחסר מעגלים בו כל קשת מסומנת על ידי קבוע או ליטרל, ושני צמתים המסומנים ב-s,t. כל השמה למשתנים מגדירה תת-גרף שבו נותרות רק הקשתות שתחת ההשמה מקבלות ערך 1. פלט התוכנית על השמה הוא 1 אם בתת הגרף שמושרה מהשמה זו יש מסלול מ-s אל t, ו-0 אם לא קיים מסלול כזה. תוכנית מתפצלת היא דטרמיניסטית אם לכל השמה, דרגת היציאה של כל צומת היא לכל היותר 1.

שפה L מתקבלת על ידי משפחת תוכניות מתפצלות $P_1,P_2,\ldots$ אם מתקיים ש-$x\in L$ אם ורק אם $P_{|x|}(x)=1$. בשאלה זו לא נדרוש כי המשפחה תהיה יוניפורמית.

תזכורת: $\mathrm{DL/poly}$ היא מחלקת כל השפות המתקבלות על ידי מכונת טיורינג דטרמיניסטית הפועלת בזכרון עבודה לוגריתמי עם "עצה" בגודל פולינומי (כלומר קיימת סדרה $a_1,a_2,\ldots$ כך ש-$a_n=O(\mathrm{poly}(n))$) והמכונה עונה נכון על כל זוג $\left(x,a_{|x|}\right)$.

1. הוכיחו כי כל שפה ב-$\mathrm{DL/poly}$ ניתנת לקבלה על ידי משפחת תוכניות מתפצלות דטרמיניסטיות מגודל פולינומי (10 נקודות).
2. הוכיחו כי כל שפה המתקבלת על ידי משפחת תוכניות מתפצלות דטרמיניסטיות מגודל פולינומי שייכת ל-$\mathrm{DL/poly}$ (10 נקודות).

שאלה 3 (15 נקודות)

נגריל אוב A באופן הבא: לכל $x\in\Sigma^*$, $x\in A$ בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן בלתי תלוי במילים האחרות.

הראו כי לכל $\varepsilon>0$, בהסתברות $1-\varepsilon$ (על פני כל הגרלות ה-A האפשריות) מתקיים $\mathrm{BPP}\subseteq\mathrm{P}^A$.

שאלה 4 (20 נקודות)

לכל n טבעי נגדיר את $\alpha(n)$ להיות ה-s המינימלי עבורו כל פונקציה $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ ניתנת לחישוב על ידי מעגל בגודל לכל היותר s.

1. הוכיחו כי לכל $0\leq g(n)<\alpha(n)$ קיימת פונקציה $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ שלא ניתן לחשב אותה בסיבוכיות מעגלים $g(n)$ אבל ניתן לחשב אותה בסיבוכיות מעגלים $g(n)+O(n)$. רמז: התבוננו בזוגות של פונקציות הנבדלות זו מזו בערכן על השמה בודדת (10 נקודות).
2. הוכיחו כי לכל $c>0$ קיימת ב-PH שפה עם סיבוכיות מעגלים של לפחות n^c. רמז: השתמשו בתוצאת הסעיף הקודם (10 נקודות).

שאלה 5 (20 נקודות)

ההירכייה הפולינומית עם אוב לשפה A מוגדרת באופן הבא: $\Sigma_0^{pA} = \mathrm{P}^A$ ו-$\Sigma_{n+1}^{pA} = \mathrm{NP}^{\Sigma_n^{pA}}$.
נאמר ששפה $L \in \mathrm{NP}$ היא n-נמוכה אם $\Sigma_n^{pL} = \Sigma_n^p$. נסמן ב-$L_n$ את מחלקת השפות ב-NP שהן n-נמוכות וכן $\mathrm{LH} = \bigcup_{n \geq 0} L_n$.

1. הוכיחו כי אם $\mathrm{LH} = \mathrm{NP}$ אז ההירכייה הפולינומית קורסת (5 נקודות).
2. לאיזו מחלקה מוכרת שווה L_0? הוכיחו תשובתכם (5 נקודות).
3. הוכיחו כי $L_1 = \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$ (10 נקודות).