TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE
HAIFA 32000, ISRAEL

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למדעי המחשב
חיפה 32000

ט"ז בתמוז תשס"ד　　　　5 ביולי 2004

תורת הסיבוכיות (236313)

מבחן סיום מועד א'

סמסטר אביב תשס"ד

מרצה: פרופ' איל קושלביץ.

מתרגל: רועי אנגלברג.

הנחיות:

1. **הבחינה עם חומר סגור.**
2. **בבחינה 4 שאלות. יש לענות על כולן.**
3. **נמקו את כל תשובותיכם.**
4. **התחילו כל תשובה בדף חדש.**
5. **בפתרון כל סעיף מותר להסתמך על טענות המופיעות בסעיפים קודמים.**
6. **מומלץ לא "להתקע" זמן רב מדי על אף סעיף.**
7. **משך הבחינה – 3 שעות.**

ב ה צ ל ח ה!

<u>שאלה 1 (20 נק')</u>

לנוחותכם מצורפת בסוף השאלה תזכורת להגדרה של תוכנית מתפצלת.

נסמן ע"י log-space uniform BP את מחלקת השפות להן קיימת משפחת תוכניות מתפצלות (א"ד) log-space-אחידה. הוכיחו:

א. (10 נק') log-space uniform BP$\subseteq$NL.

ב. (10 נק') NL$\subseteq$log-space uniform BP.

הגדרה: תוכנית מתפצלת היא רביעיה $BP=(G,s,t,\phi)$, כאשר G הוא DAG, s צומת התחלה, t צומת סיום ו- ϕ פונק' סימון לקשתות המסמנת כל קשת בליטרל או בקבוע. כל השמה x למשתנים משרה תת גרף G_x המכיל רק את הקשתות שסימוניהן מסתפקים ע"י x.
BP נקראת **דטרמיניסטית** אם תחת כל השמה x, דרגת היציאה של כל צומת ב- G_x היא לכל היותר 1, אחרת BP היא א"ד. BP מקבלת את x אם בגרף G_x קיים מסלול מ- s ל- t ("מסלול מקבל").

<u>שאלה מס' 2 (15 נק')</u>

נגדיר את מחלקת הסיבוכיות PCP'(r(n),q(n)) להיות וריאנט של המחלקה PCP(r(n),q(n)) בו ההוכחה מחולקת לקטעים זרים באורך O(q(n)), והמוודא יכול לבחור קטע **אחד בלבד** אותו הוא יקרא (כרגיל, r(n) מייצג את מספר הביטים האקראיים של המוודא).

לאיזו מחלקת שפות מוכרת **שווה** המחלקה PCP'(log(n), log(n))? הוכיחו תשובתכם.

<u>שאלה מס' 3 (25 נק')</u>

נגדיר את המחלקה $\oplus$P באופן הבא:

שפה L שייכת למחלקה $\oplus$P אמ"ם קיימת מ"ט א"ד פולינומית M כך ש:

x$\in$L אמ"ם מס' המסלולים המקבלים של M על x הוא אי-זוגי.

א. (5 נק') הוכיחו כי המחלקה $\oplus$P סגורה למשלים.

ב. (10 נק') הוכיחו כי השפה הבאה היא $\oplus$P – שלמה ביחס לרדוקציות פולינומיות ("רגילות"):

$\oplus$SAT = { ϕ | ϕ הוא פסוק CNF שמספר ההשמות המספקות אותו הוא אי-זוגי }

ג. (10 נק') הוכיחו כי: NP $\subseteq$ RP$^{\oplus P}$.

<u>שאלה מס' 4 (40 נק')</u>

סדרת מעגלים $\{C_n\}$ **ניתנת לייצוג לא-מפורש** (אך יוניפורמי) אם קיימים לה שני אלגוריתמים פולי' ב- n:

- $\text{Type}(n,i)$ – מחזיר את סוג השער ה- i ב- C_n (כלומר, AND או OR). בה"כ השערים $1,\ldots,2n$ הם ליטרלי הקלט והשער ה- $2n+1$ הוא שער הפלט).
- $\text{In}(n,i,j)$ – מחזיר את האינדקס של השער שהוא הכניסה ה- j לשער ה- i ב- C_n (או $\perp$ אם אין כזה; בה"כ הכניסות לכל שער מסודרות לפי סדר עולה של האינדקסים).

א. (7 נק') הוכיחו שאם לשפה L יש סדרת מעגלים כנ"ל אזי $L\in EXP$.

ב. (7 נק') הוכיחו שאם $L\in EXP$ אזי ל- L יש סדרת מעגלים כנ"ל. בתיאור סדרת המעגלים אין צורך לפרט את האלגוריתמים Type, In אך יש להסביר את עקרון פעולתם.

כעת, נתמקד בסדרות מעגלים בעלות התכונה הנ"ל שמקיימות גם את התכונות הבאות: עומק המעגלים **קבוע**, לשערי ה- AND במעגלים דרגת כניסה פולינומית ולשערי ה- OR במעגלים דרגת כניסה אקספוננציאלית (כלומר חסומה ע"י $2^{p(n)}$ עבור פולינום כלשהו).

ג. (8 נק') הוכיחו שאם לשפה L יש סדרת מעגלים בעלת תכונות אלו אזי $L\in NP$.

ד. (8 נק') הוכיחו שאם $L\in NP$ אזי ל- L יש סדרת מעגלים בעלת תכונות אלו.

בסעיפים הבאים נשנה במעט את ההגבלות על סדרת המעגלים ונרשה **גם** לדרגת הכניסה של שערי ה- AND להיות אקספוננציאלית. בתשובתכם לסעיפים אלו ניתן לקצר בחלקים הדומים לתשובתכם בסעיפים הקודמים.

ה. (5 נק') הוכיחו שאם לשפה L יש סדרת מעגלים בעלת תכונות אלו אזי $L\in PH$.

ו. (5 נק') הוכיחו שאם $L\in PH$ אזי ל- L יש סדרת מעגלים בעלת תכונות אלו.

בהצלחה!