

תורת הסיבוכיות (236313)

אביב תשע"ב

מועד ג'

6.1.2013

מרצה: פרופ' אייל קושלביץ

מתרגל: גדי אלכסנדרוביץ

הנחיות:

- המבחן הוא עם חומר סגור.
- חל איסור מפורש על החזקת אמצעי תקשורת נייד, דוגמת טלפון סלולרי ברשות הנבחן בעת הבחינה.
- נמקו את כל תשובותיכם.
- בכל סעיף ניתן לקבל 20% מהניקוד אם במקום תשובה כותבים "לא יודע/ת".
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בהרצאה או בתרגול, בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק.
- השתדלו לא להתעכב יתר על המידה על סעיף מסויים, כדי לצבור מקסימום נקודות בזמן העומד לרשותכם.

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

תהא $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. נגדיר את המחלקה $P/h(n)$ להיות אוסף כל השפות הניתנות לזיהוי על ידי מכונת טיורינג פולינומית בעלת "עצה" באורך $h(n)$ התלויה רק באורך הקלט n (כלומר, לקלטים באותו אורך מתאימה אותה עצה).
פורמלית, $L \in P/h(n)$ אם קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית פולינומית M וסדרה $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ כך ש- $|a_n| \leq h(n)$ וכך ש- M מקבלת את w אם ורק אם $w\$a_{|w|}$.

1. נסמן $P/\text{poly} = \bigcup_{c \geq 1} P/n^c$. הוכיחו כי $L \in P/\text{poly}$ אם ורק אם קיימת משפחת מעגלים פולינומית המזהה את L (10 נקודות).

2. הוכיחו כי אם $\text{EXPTIME} \subseteq P/1$ אז $P = \text{NP}$ (5 נקודות).

3. הוכיחו כי אם $\text{PSPACE} \subseteq P/\text{poly}$ אז $\text{PSPACE} = \Sigma_2^P$ (10 נקודות).

שאלה 2 (25 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות:

1. $\text{BPP}^{\text{BPP}} \subseteq \text{BPP}$ (10 נקודות).

2. $\text{NP}^{\text{BPP}} \subseteq \text{BPP}^{\text{NP}}$ (10 נקודות).

3. אם $\text{NP} \subseteq \text{BPP}$ אז ההיררכייה הפולינומית קורסת (5 נקודות).

שאלה 3 (25 נקודות)

ההיררכייה הפולינומית עם אוב לשפה A מוגדרת באופן הבא: $\Sigma_0^{pA} = P^A$ ו- $\Sigma_k^{pA} = \text{NP}(\Sigma_{k-1}^{pA})$.
נסמן ב- PH^A את איחוד כל הרמות ב- Σ_k^{pA} .

נאמר ששפה $L \in \text{NP}$ היא k -נמוכה אם $\Sigma_k^{pL} = \Sigma_k^P$.

נסמן ב- L_k את מחלקת השפות ב- NP שהן k -נמוכות וב- LH את איחוד כל ה- L_k , $k \geq 0$.

1. הוכיחו או הפריכו: לכל שפת אוב A , $\text{PH}^A \subseteq \text{PH}$ (5 נקודות).

2. הוכיחו כי לכל i , $L_i \subseteq L_{i+1}$ (5 נקודות).

3. הוכיחו כי אם $\text{LH} = \text{NP}$ אז ההיררכייה הפולינומית קורסת (5 נקודות).

4. הוכיחו כי $L_1 = \text{NP} \cap \text{coNP}$ (10 נקודות).

שאלה 4 (25 נקודות)

נגדיר את המחלקות PSPACE , RPSPACE בדומה למחלקות P , RP למעט הדרישה שהמכונות המתאימות יעבוד בזכרון פולינומי במקום בזמן פולינומי (וכן יעצרו בכל מסלול חישוב). לדוגמא, $L \in \text{PSPACE}$ אם קיימת מ"ט א"ד M , אשר עובדת בזכרון פולינומי, עוצרת בכל מסלול חישוב, ולכל קלט x מתקיים: $x \in L$ אם ורק אם M מספר אי זוגי של מסלולים מקבלים על x .

1. הוכיחו כי $\text{RPSPACE} = \text{PSPACE}$ (10 נקודות).

2. גרף שכבות הוא גרף מכוון אשר צמתיו מחולקים לשכבות כך שכל קשת מחברת בין שתי שכבות עוקבות. פורמלית, הצמתים של גרף שכבות הם זוגות מהצורה (v, i) והקשתות הן זוגות מהצורה $((v, i), (u, i+1))$.
הוכיחו כי בהינתן גרף שכבות G עם n צמתים וזוג צמתים s, t בגרף, ניתן בזכרון $O(\log^2 n)$ להכריע (באופן דטרמיניסטי) האם מספר המסלולים מ- s ל- t בגרף הוא זוגי (10 נקודות).

3. הוכיחו כי $\text{PSPACE} = \text{PSPACE} \oplus \text{PSPACE}$ (5 נקודות).