מטלת מנחה 11 - אינפי 1

שאלה 1

א. טענה: לכל $k, m \in \mathbb{N}$, המספר $a = k + m\sqrt{2}$ אינו רציונלי

הוכחה: נניח בשלילה כי קיימים $k, m \in \mathbb{N}$ כך שהמספר $a = k + m\sqrt{2}$ הינו רציונלי.
המספרים הטבעיים k, m הם רציונליים (קבוצת המספרים הטבעיים מוכלת בקבוצת המספרים הרציונליים).

לפי ההנחה, $a = k + m\sqrt{2} \Leftarrow a - k = m\sqrt{2}$
המספר הטבעי m בהכרח מקיים $m \neq 0$ כי $0 \notin \mathbb{N}$, ועל תוצאת החילוק בm מוגדרת היטב ומתקבל $\sqrt{2} = \frac{a-k}{m}$.

לפי סגירות חיסור מספרים רציונליים עבור a, k, $a - k \in \mathbb{Q}$
לפי סגירות חילוק מספרים רציונליים עבור $(a - k)$ ועבור $m \neq 0$ מתקיים $\sqrt{2} = \frac{a-k}{m} \in \mathbb{Q}$.

סתירה! המספר $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי!

ב. טענה: לכל $n \in \mathbb{N}$, $(1 + \sqrt{2})^n \notin \mathbb{Q}$

טענת עזר: לכל $n \in \mathbb{N}$, קיימים $m, k \in \mathbb{N}$ כך ש $(1 + \sqrt{2})^n = k + m\sqrt{2}$
נוכיח טענה זו באינדוקציה.

הוכחת בסיס האינדוקציה: עבור n=1, הטענה נכונה עבור $m = k = 1 \in \mathbb{N}$,
משום שבהצבה זו $(1 + \sqrt{2})^1 = 1 + 1 \cdot \sqrt{2}$
הוכחת צעד האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה עבור n ונוכיח עבור n+1:
לפי חוקי חזקות מתקיים $(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})^n * (1 + \sqrt{2})$
לפי הנחת האינדוקציה קיימים $k, m \in \mathbb{N}$ כך ש $(1 + \sqrt{2})^n = k + m\sqrt{2}$
ולכן:

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{2})^{n+1} &= (k + m\sqrt{2}) * (1 + \sqrt{2}) = \\ &= k * 1 + k * \sqrt{2} + m\sqrt{2} * 1 + m\sqrt{2} * \sqrt{2} = \\ &= k + k\sqrt{2} + m\sqrt{2} + 2m = \\ &= (k + 2m) + (k + m)\sqrt{2}\end{aligned}$$

לפי סגירות פעולות החיבור והכפל של מספרים טבעיים, מתקיים $k + 2m, k + m \in \mathbb{N}$ ולכן קיימים שני מספרים טבעיים המקיימים את הטענה עבור n+1.

הוכחת הטענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ כלשהו.
לפי טענת העזר קיימים $m, k \in \mathbb{N}$ כך ש $(1 + \sqrt{2})^n = k + m\sqrt{2}$
ולכן לפי סעיף א $(1 + \sqrt{2})^n = k + m\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

שאלה 2

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$.

א. טענה: $\left|\sqrt{|a| + 1} - \sqrt{|b| + 1}\right| \leq \frac{|a-b|}{2}$

טענת עזר: עבור $x, y > 0$ מתקיים $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

הוכחת טענת העזר: יהיו $x, y > 0$. לכן המספרים הממשיים $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ מוגדרים היטב וחיוביים.
נחבר את שני אי-השוויונות ונקבל כי $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0 + 0 = 0$ ובפרט $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq 0$.
לכן החילוק במחלק זה מוגדר היטב ונקבל $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 1$
נכפול את השוויון ב $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ ונקבל כי $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
לפי נוסחאות הכפר המקוצר מתקיים $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2 = x - y$
לכן $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ וסיימנו.

הוכחת הטענה: המספרים $|a|, |b| \geq 0$ לפי הגדרת הערך המוחלט.
נוסיף 1 לאי-השוויון ונקבל $|a| + 1, |b| + 1 \geq 1$
כמו כן מאחר ו $1 > 0$ נקבל לפי טרנזיטיביות כי $|a| + 1, |b| + 1 > 0$

$$|\sqrt{|a| + 1} - \sqrt{|b| + 1}| =_{(1)} \left|\frac{(|a|+1)-(|b|+1)}{\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}}\right| =_{(2)}$$
$$= \left|\frac{|a|-|b|}{\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}}\right| =_{(3)} \frac{||a|-|b||}{|\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}|}$$

(1) לפי טענת לפי טענת העזר עבור $|a| + 1, |b| + 1$
(2) פיתוח אלגברי
(3) מתכונות הערך המוחלט, שאלה 1.39 סעיף ד.

כעת, מאחר ו $|a| + 1, |b| + 1 \geq 1$
מתקיימים בהתאמה $\sqrt{|a| + 1} \geq 1$, $\sqrt{|b| + 1} \geq 1$.
נחבר את אי-השוויונות ונקבל כי $\sqrt{|a| + 1} + \sqrt{|b| + 1} \geq 2$
ובפרט, לפי טרנזיטיביות, $\sqrt{|a| + 1} + \sqrt{|b| + 1} \geq 0$
$\Leftarrow$ $|\sqrt{|a| + 1} + \sqrt{|b| + 1}| = \sqrt{|a| + 1} + \sqrt{|b| + 1} \geq 2$
המונה אי-שלילי, על כן מתקיים $\frac{||a|-|b||}{2} \leq \frac{||a|-|b||}{|\sqrt{|a|+1}+\sqrt{|b|+1}|} = |\sqrt{|a| + 1} - \sqrt{|b| + 1}|$

כמו כן, לפי שאלה 1.39 סעיף ב: $||a| - |b|| \leq |a - b| \Rightarrow \frac{||a|-|b||}{2} \leq \frac{|a-b|}{2}$
ולכן $|\sqrt{|a| + 1} - \sqrt{|b| + 1}| \leq \frac{||a|-|b||}{2} \leq \frac{|a-b|}{2}$
ובפרט, לפי טרנזיטיביות, $|\sqrt{|a| + 1} - \sqrt{|b| + 1}| \leq \frac{|a-b|}{2}$.

ב. טענה: $a^2 = (\frac{a-|a|}{2})^2 + (\frac{a+|a|}{2})^2$

טענת עזר: לכל a מתקיים $a^2 = |a|^2$

הוכחת טענת העזר:

עבור המספרים הממשיים $a, 0$ מתקיים אחד מהמקרים הבאים לפי אקסיומת הסדר:

מקרה 1: $a \geq 0$.

אז לפי הגדרת הערך המוחלט מתקיים $a = |a|$

ולכן $a^2 = a * a = |a| * |a| = |a|^2$

מקרה 2: $a < 0$.

אז לפי הגדרת הערך המוחלט מתקיים $a = -|a|$

ולכן לפי חילופיות וקיבוציות כפל ממשיים:

$$a^2 = a * a = (-|a|) * (-|a|) = (-1) * (-1) * |a| * |a| = |a|^2$$

הוכחת הטענה: עבור המספר הממשי a מתקיים:

$$(\frac{a+|a|}{2})^2 + (\frac{a-|a|}{2})^2 =_{(1)}$$

$$\frac{(a+|a|)^2}{2^2} + \frac{(a-|a|)^2}{2^2} =_{(2)}$$

$$\frac{a^2+2a|a|+|a|^2}{4} + \frac{a^2-2a|a|+|a|^2}{4} =_{(3)}$$

$$\frac{a^2-2a|a|+|a|^2+a^2-2a|a|+|a|^2}{4} =_{(4)}$$

$$\frac{2a^2+2|a|^2}{4} =_{(5)}$$

$$\frac{2a^2+2a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} = a^2$$

(1) לפי חוקי חזקות
(2) לפי נוסחאות הכפל המקוצר
(3) לפי כלל הפילוג בכפל עבור הגורם $\frac{1}{4}$
(4) לפי חילופיות וקיבוציות החיבור
(5) לפי טענת העזר

שאלה 3

א. טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$. אם $x \le y$ אז $\lfloor x \rfloor \le \lfloor y \rfloor$.

הוכחת הטענה: לפי תכונות החלק השלם מתקיים $\lfloor x \rfloor \le x$

לכן לפי טרנזיטיביות אי-שוויון חלש מתקיים $\lfloor x \rfloor \le x \le y \Leftarrow \lfloor x \rfloor \le y$

לכן המספר השלם $\lfloor x \rfloor$ מקיים $\lfloor x \rfloor \in \{n \in Z | n \le y\}$

לפי הגדרת החלק השלם: $\lfloor y \rfloor = max\{n \in Z | n \le y\}$ ולכן עבור כל איבר בקבוצה זו,

ובפרט האיבר $\lfloor x \rfloor$, מתקיים $\lfloor x \rfloor \le \lfloor y \rfloor$.

ב. נפתור את המשוואות:

1) $\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor^2 = 25$

נוציא שורש מהמשוואה ונקבל $\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor = \pm 5$ (<u>איחוד</u> של שני מקרים)

מקרה 1: $\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor = 5$

אז לפי תכונות החלק השלם $5 \le x - 0.5 < 5 + 1$

נוסיף 0.5 לאי-השוויון ונקבל $5.5 \le x < 6.5$, כלומר $x \in [5.5, 6.5)$

מקרה 2: $\lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor = -5$

אז לפי תכונות החלק השלם $-5 \le x - 0.5 < -5 + 1$

נוסיף 0.5 לאי-השוויון ונקבל $-4.5 \le x < -3.5$, כלומר $x \in [-4.5, -3.5)$

לכן, פתרון המשוואה הוא הקבוצה $[5.5, 6.5) \cup [-4.5, -3.5)$.

2) $\lfloor x^2 \rfloor = 9$

מתכונות החלק השלם $9 \le x^2 < 10$ (<u>חיתוך</u> של שני תנאים)

תנאי 1: $x^2 \ge 9$

לכן $x \ge 3$ או $x \le -3$

תנאי 2: $x^2 < 10$

לכן $-\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$

פתרון המשוואה הוא חיתוך שני התנאים, כלומר הקבוצה:

$$\{x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10}) \mid x \ge 3 \lor x \le -3\} = (-\sqrt{10}, -3] \cup [3, \sqrt{10})$$

שאלה 4

א. טענה: הקבוצה $A = \{q\sqrt{3} \mid q \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}\}$ צפופה בקטע $[0, 1]$
הוכחה: עלינו להוכיח כי עבור כל $x, y \in [0, 1]$ כך ש $y > x$ קיים $a \in A$ המקיים $x < a < y$.
יהיו x, y כנדרש. המספר $\sqrt{3}$ הוא חיובי ולכן אי השוויון נשמר: $\frac{x}{\sqrt{3}} < \frac{y}{\sqrt{3}}$.
לפי משפט 1.66 קבוצת המספרים הרציונליים צפופה ב$\mathbb{R}$,
ולכן עבור המספרים הממשיים $\frac{y}{\sqrt{3}}$, $\frac{x}{\sqrt{3}}$ קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש $\frac{x}{\sqrt{3}} < q < \frac{y}{\sqrt{3}}$
נכפול את אי-השוויון ב$0 < \sqrt{3}$ ונקבל כי $x < q\sqrt{3} < y$.
x שייך לקטע $[0, 1]$ ולכן $x \geq 0$. לפי טרנזיטיביות מתקיים $q\sqrt{3} > 0$.
נחלק במספר החיובי $\sqrt{3}$, ונקבל כי $q > 0$ ולכן $q \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$.
לכן מתקיים $q\sqrt{3} \in A$ וקיים a כנדרש.

ב. פסוק לוגי: לכל $x, y \in I$ כך ש $y > x$ קיים $a \in A$ כך ש $x < a < y$.
שלילית הפסוק:
לא (לכל $x, y \in I$ כך ש $y > x$ קיים $a \in A$ כך ש $x < a < y$)
קיימים $x, y \in I$ כך ש $y > x$ עבורם לא (קיים $a \in A$ כך ש $x < a < y$)
קיימים $x, y \in I$ כך ש $y > x$ עבורם לכל $a \in A$ מתקיים לא $(x < a < y)$
קיימים $x, y \in I$ כך ש $y > x$ עבורם לכל $a \in A$ מתקיים $y \geq a$ או $x \leq a$.

ג. טענה: קבוצת השברים העשרוניים שלא מופיעה בהם הספרה 3 אינה צפופה בקטע $[-1, 1]$.
הוכחה: נסמן את קבוצת שברים אלה באות A.
עלינו למצוא שני מספרים $x, y \in [-1, 1]$ כך ש $y > x$ עבורם לכל $a \in A$ מתקיים $a \notin (x, y)$

נבחר: $x = 0.3$, $y = 0.4$. ברור שכל שבר עשרוני בקטע (x, y) הוא מהצורה 0.3.....,
ולכן בהכרח מופיעה בו הספרה 3.
כלומר: לא קיים $t \in (x, y)$ כך ש $t \in A$, ולכן לכל $t \in A$ מתקיים $t \notin (x, y)$ כנדרש.