מטלת מנחה 14 - קורס אלגוריתמים 20417

שאלה 1

רעיון האלגוריתם: נשתמש בשיטת תכנון דינאמי סטנדרטית עם מערך דו-מימדי OPT בגודל $n \times n$. היות ויש לנו מספר בחירות קבוע ולא תלוי בגודל בקלט בכל שלב, ניתן לשחזר בזמן לינארי את המסלול לאחרי מציאת גדלי ה OPT גם ללא מערך עזר.

הגדרת המערך: $OPT[1..n,\ 1..n]$ כך שלכל i, j $OPT(i.j)$ ייצג את מחיר המסלול הקצר ביותר מהמשבצת $(1, 1)$ למשבצת $(i.j)$. הערך הרצוי יהיה $OPT(n, n)$.

היות וניתן להתקדם אך ורק "למעלה", "ימינה" או "למעלה וימינה", עבור כל צומת נדרשים אך ורק מחירי המסלולים הקצרים ביותר אל שלוש המשבצות מתחתיה, לשמאלה ומתחתיה ולשמאלה באלכסון עבור חישוב אורך המסלול הקצר ביותר אליה.

אי-לכך, נקבל:

נוסחת הנסיגה: לכל $2 \le i, j \le n$,

$$OPT(i.j) = c(i, j) + \min\,(OPT(i-1,\ j),\ OPT(i-1,\ j-1),\ OPT(i,\ j-1))$$

אתחול המערך: עבור מסלולים בשורה הראשונה ובטור הראשון למעשה נקבל אפשרות אחת בלבד למסלול הקצר ביותר אליהן. נגדיר:

- נאתחל $OPT(1, 1) = c(1, 1)$.
- לכל $2 \le j \le n$, $OPT(1, j) = c(1, j) + OPT(1, j-1)$
- לכל $2 \le j \le n$, $OPT(j, 1) = c(j, 1) + OPT(j-1, 1)$

בסך הכל, שלב האתחול יתבצע ב $O(n)$ פעולות אלמנטריות.

עדכון המערך לפי נוסחת הנסיגה: כפי שציינתי, נדרש ערכן של 3 משבצות בדיוק על מנת לחשב את ערך ה OPT עבור כל תא במטריצה. ניתן לעבור עליה שורה-שורה, מלמטה למעלה, מ-2 עד n, ובכל שורה למלא את ערך התאים משמאל לימין (או הפוך, עמודה עמודה משמאל לימין ובתוך כל עמודה עוברים מלמטה למעלה).

שחזור: עבור כל משבצת, החל מהמשבצת האחרונה (n, n), כדי לקבוע האם המסלול הקצר ביותר העובר בה עובר באחת מבין שלוש המשבצות האפשריות, מבצעים את ההשוואה $OPT(i, j) == c(i.j) + OPT(?,?)$. סך הכל לכל היותר 3 השוואות עבור כל צומת במסלול, עבור לכל היותר $2n$ משבצות במסלול (ללא אלכסונים בכלל), ונקבל שחזור בזמן לינארי.

יעילות:

- שלב האתחול לוקח $O(n)$ פעולות אלמנטריות.
- עבור $(n-1)^2$ התאים הנוספים, עדכון ערכו של כל תא לוקח זמן קבוע, וסך כל זמן העדכון ייקח $\Theta(n^2)$ פעולות בסיסיות.
- שלב השחזור ייקח $O(n)$ פעולות בסיסיות.

אי-לכך, נקבל בסך הכל זמן ריצה ריבועי כנדרש.

שאלה 2

השאלה עוסקת בבחירת מלונות מתוך קבוצה של n מלונות אפשריים, לאורך מסלול החל מנקודת התחלה s לנקודת סיום f, ולאורך t ימים, כך שבכל לילה לנים במלון אחר. המטרה - להגיע למאמץ כולל מינימלי ככל האפשר. נתונה לנו רשימת המרחקים $p_1, p_2, \dots, p_n$ מהמלון.

נספק אלגוריתם תכנון-דינאמי לפתרון הבעיה. הפעם, היות ובכל יום אנחנו נתקלים במספר בחירות התלוי בגודל הקלט, נשמור גם מערך עזר S שישמור לכל i, τ את הבחירה שהתבצעה במידת הצורך.

הגדרת המערך: נגדיר $OPT[1..n,\ 1..t]$, כך שלכל $1 \le i \le n,\ 1 \le \tau \le t$ הערך $OPT[i, \tau]$ ייצג את המאמץ המינימלי של מסלול כלשהו מנקודת ההתחלה למלון i לאורך τ ימים. הערך הרצוי עבורנו יהיה בתא $OPT[n, t]$.

נוסחת הנסיגה: במסלול אופטימלי לאורך τ ימים המסתיים במלון i, בהכרח ניאלץ לישון במלון כלשהו k בלילה הקודם. המאמץ שבוצע ביום המעבר למלון i יהיה ריבוע המרחק בין המלונות, והוא $(p_i - p_k)^2$. מאמץ זה מצטרף למאמץ המינימלי שבוצע על מנת להגיע למלון ה k לאחר $\tau - 1$ ימים.
כמו-כן, היות ובכל יום אנחנו מוכרחים לזוז מלון, המלון ה k בהכרח יקיים $k \ge \tau - 1$.
הערך המינימלי של המאמץ הוא הערך המינימלי שיתקבל בסכום של שני ערכי המאמצים עבור k כלשהו.

סך הכל נקבל לכל $1 \le i \le n,\ 1 \le \tau \le t$ כך ש $i \ge \tau$:

$$OPT(i, \tau) = \min_{\tau-1 \le k < i} \left(OPT(k,\ \tau - 1) + (p_i - p_k)^2\right)$$

אם $i < \tau$ נגדיר $OPT(i, \tau) = \infty$.

מילוי התאים: ערך כל תא ב OPT תלוי אך ורק בערכים בעלי ערך τ קטן ב-1 בדיוק. מסיבה זו, נמלא את התאים החל מ $i \ge 1$. $\tau = 1$ ונמשיך למלא לכל ערך τ את כל תאי $OPT(i, \tau)$ עבור $i \ge \tau$.

זמן הריצה: מילוי כל תא מבין $n \cdot t$ תאים במערך ייקח $O(n)$ פעולות אלמנטריות (מספר קבוע של פעולות עבור $O(n)$ פעולות). נקבל זמן-ריצה של $\Theta(tn^2)$.
אם נהיה מעוניינים בשחזור המסלול בעזרת מערך העזר שלנו S, הדבר ייקח $O(t)$ פעולות השוואה כפי שתיארתי בשאלה הקודמת.

שאלה 4

השאלה עוסקת באלגוריתם הפועל על גרף מכוון $G = (V, E)$ עם משקלים אי-שליליים וקדקוד מקור $r \in V$.

א. טענה (ללא הוכחה): לכל $v \in V$, $A[v]$ מייצג את אורך המסלול הקצר ביותר מ r ל v.

ב. טענה: לכל $n = |V|$ נקבל $B(n) = n$.
הוכחה: תחילה נוכיח כי $B(n) \leq n$.

נניח בשלילה כי $B(n) > n$. נתבונן בצומת $v_{n-1} \in V$ כלשהי, כך שערכו של $A[v_{n-1}]$ השתנה באיטרציה ה $B(n) - 1$ **בפעם האחרונה**. צומת כזו בהכרח קיימת, שכן אחרת הלולאה החיצונית הייתה מפסיקה באיטרציה זו ולא מקבלת $B(n)$ איטרציות, או במקרה החלופי משתנה גם באיטרציה ה $B(n)$ בסתירה לתנאי היציאה.
מהנתון כי הערך השתנה, נסיק כי קיים v_{n-2} כך שבאיטרציה זו הוכנס ל $A[v_{n-1}]$ הערך $A[v_{n-2}] + c(v_{n-2}, v_{n-1})$. ערכו של $A[v_{n-2}]$ השתנה בהכרח בפעם האחרונה באיטרציה ה $B(n) - 2$:
אילו השתנה לפני איטרציה זו, אז $A[v_{n-1}]$ היה מקבל את הערך $A[v_{n-2}] + c(v_{n-2}, v_{n-1})$. אילו השתנה לאחר איטרציה זו, $A[v_{n-1}]$ היה משתנה פעם נוספת, בסתירה לעצירת הלולאה.
וכך הלאה: נמצא את הצמתים $v_{n-3}, v_{n-4}, ..., v_0$ שערכי A המתאימים להם השתנו בפעם האחרונה באיטרציות ה $B(n) - 3, B(n) - 4, ..., B(n) - n$ בהתאמה. היות ומדובר ב-n צמתים מהצורה v_{n-i}, בהכרח עבור i כלשהו נקבל $r = v_{n-i}$.
במילים אחרות, ערכו של $A[r]$ השתנה לאחר אתחולו, כלומר (לפי תנאי השינוי) מצאנו מסלול באורך שלילי מ r לעצמו במערך, בסתירה למשקלים האי-שליליים בגרף!

כעת, נגדיר סדרת גרפים G_n עבורה אכן מתקיימות n איטרציות ללולאה החיצונית. נבחר למשל לכל n טבעי את G_n להיות שרוך מכוון באורך n, שבתחילתו הצומת r ומשקל כל הקשתות הוא 1.
לא קשה להיווכח כי באיטרציה הראשונה, הערך המתאים ב A לצומת השכן ל r יקבל את הערך 1, הערך המתאים לשכנו יקבל את הערך 2 באיטרציה העוקבת, וכך הלאה עד האיטרציה ה $n - 1$, בה הצומת האחרון בשרוך יקבל את הערך $n - 1$. באיטרציה ה n דבר לא ישתנה, אחרת נקבל סתירה לטענה שהוכחנו מקודם. כך מצאנו גרף עבורו הלולאה החיצונית מקיימת n איטרציות, ו- $B(n) = n$.

ג. נבנה סדרת גרפים G'_n באופן הבא: לכל n טבעי, $n - 1$ הקשתות המכוונות בגרף יהיו כולן מהצומת r ל $n - 1$ הצמתים הנותרים בגרף, וכולן יהיו במשקל 1.
כך, באיטרציה הראשונה כלל הצמתים שאינם r בגרף יקבלו את הערך 1, ובאיטרציה השנייה לא ישתנה דבר והלולאה תיעצר.