ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20109

אלגברה לינארית 1

חוברת הקורס-סתיו 2023א

כתבה: ד״ר ענת אמיר

אוקטובר 2022 - סמסטר סתיו- תשפ״ג

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם ללומדי הקורס "אלגברה לינארית 1".

כדי להקל עליכם את לימוד הקורס, שאינו קל, השקענו מאמץ ניכר בבניית מערכת מסייעת ללימוד העצמי. תיאור המערכת כלול בחוברת זו. אנו ממליצים שתקראו את החוברת עוד בטרם תיגשו ללימוד עצמו.
בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://www.openu.ac.il/shoham.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

חשוב לדעת!

- **למפגש הראשון** יש לקרוא באופן מעמיק את **פרק 1 של כרך א'.**
- **החוברת "פרקי ההכנה בקורס"** מיועדת ללימוד עצמי. לא יהיה תרגול על החומר הזה במסגרת המפגש. **__אין צורך__** לקרוא את כל החוברת בתחילת הסמסטר. הנחיות בנושא זה יופיעו באתר הקורס בלשונית: מידע כללי על הקורס.

פניות יש לשלוח רק למרכז ההוראה נתנאל רגב באופן הבא:

- בטלפון 09-7781423, בימי א', בין השעות 00 :11-00 :12.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - netanr@openu.ac.il
- פקס: 09-7780631.
- **שאילתא** - לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת **בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.**

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודיכם.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20109 / א2023)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	28.10.2022-23.10.2022	פרק 1			
2	04.11.2022-30.10.2022	פרקים 1, 2		מומלץ להתחיל לפתור את ממ"ן 11 וגם את ממח 01	
3	11.11.2022-6.11.2022	פרקים 2, 3			ממ"ן 11 13.11.2022
4	18.11.2022-13.11.2022	פרק 3			
5	25.11.2022-20.11.2022	פרקים 3, 4			
6	02.12.2022-27.11.2022	פרקים 4, 6			ממ"ן 12 4.12.2022
7	09.12.2022-04.12.2022	פרקים 6, 7		ממ"ח 01 11.12.2022	
8	16.12.2022-11.12.2022	פרק 7			
9	23.12.2022-18.12.2022 (ב-ו חנוכה)	פרק 8			ממ"ן 13 25.12.2022
10	30.12.2022-25.12.2022 (א-ב חנוכה)	פרק 8			
11	06.01.2023-01.01.2023	פרק 9			
12	13.01.2023-08.01.2023	פרקים 10, 11		ממ"ח 02 17.1.2023	ממ"ן 14 15.1.2023
13	20.01.2023-15.01.2023	פרק 11			ממ"ן 15 22.1.2023
14	27.01.2023-22.01.2023	פרק 12		ממ"ח 03 2.2.2023	ממ"ן 16 31.1.2023

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם :

1. להגיש מטלות במשקל כולל של **16 נקודות לפחות**.
2. לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.
3. לקבל בציון הסופי של הקורס **60 נקודות לפחות**.

פירוט המטלות בקורס

בקורס אלגברה לינארית 1, 3 ממ״חים ו-6 ממ״נים.
תאריכי הגשת המטלות מופיעים בלוח זמנים ופעילויות וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא תילקחנה בחשבון בחישוב הציון הסופי. המטלות תיבדקנה על ידי המנחים כדי שהסטודנטים יוכלו לקבל משוב על עבודתם. במקרים מיוחדים של אי עמידה בלוח הזמנים, ניתן לפנות אל מרכז ההוראה.

	נושא המטלה	**משקל המטלה**
ממ״ח 01	פרקים 1 - 4	2 נקודות
ממ״ח 02	פרקים 6 - 8	2 נקודות
ממ״ח 03	פרקים 9 - 12	2 נקודות
ממ״ן 11	פרק 1	4 נקודות
ממ״ן 12	פרקים 2, 3	4 נקודות
ממ״ן 13	פרקים 4, 6, 7	4 נקודות
ממ״ן 14	פרקים 7, 8	4 נקודות
ממ״ן 15	פרקים 9, 10	4 נקודות
ממ״ן 16	פרקים 11, 12	4 נקודות

חשוב לדעת!

- **למפגש הראשון** יש לקרוא באופן מעמיק את **פרק 1 של כרך א'.**

- **החוברת "פרקי ההכנה בקורס"** מיועדת ללימוד עצמי. לא יהיה תרגול על החומר הזה במסגרת המפגש . **אין צורך** לקרוא את כל החוברת בתחילת הסמסטר.
הנחיות בנושא זה יופיעו באתר הקורס בלשונית: מידע כללי על הקורס.

- **פתרון המטלות** הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

  כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:
  בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר.
  ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
  ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

  זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

- **מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.**

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרק 1

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 13.11.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת. **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".**

שאלה 1 (15 נקודות)

א. חשבו את הביטויים הבאים ב- $\mathbf{Z}_{11}$: $\alpha = 2\cdot 4 - 3\cdot\frac{1}{2}$ ו- $\beta = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$.

ב. פתרו ב- $\mathbf{Z}_7$ את המשוואות הבאות:

1. $3x^2 = 6$
2. $6x^2 + \frac{1}{2} = 0$
3. $5x + 4y + z = 0$

שאלה 2 (25 נקודות)

א. על התת-קבוצה $A = \{(x,1) \mid x \in \mathbf{R}\}$ של $\mathbf{R}^2$ מגדירים את הפעולות הבאות:

חיבור שנסמן ב- $\oplus$: $(x,1)\oplus(y,1) = (x+y,1)$ לכל $x, y \in \mathbf{R}$

כפל שנסמן ב- $*$: $(x,1)*(y,1) = (xy,1)$ לכל $x, y \in \mathbf{R}$.

האם $(A,\oplus,*)$ הוא שדה?

ב. על $\mathbf{R}$ נגדיר את הפעולה המוגדרת ע"י:

$$a*b = a+b-2 \quad \text{לכל} \quad a,b \in \mathbf{R}$$

1. האם הפעולה $*$ חילופית? קיבוצית?
2. הוכיחו שקיים איבר נייטרלי. מהו?

ג. הוכיחו ש- $\mathbf{Z}_9$ אינו שדה. <u>הדרכה</u>: שאלה 1.2.3

שאלה 3 (20 נקודות)

פתרו את מערכת המשוואות הבאה ב-4 נעלמים x, y, z, t :

$$\begin{cases} x+2y+z+t=1 \\ x+y+2z+t=2 \\ x+y+z=2 \\ 2x+y+z+t=8 \end{cases}$$

א. מעל השדה $\mathbf{R}$ ב. מעל השדה $\mathbf{Z}_3$

בכל אחד מהמקרים ציינו מהם המשתנים הקשורים, מהם המשתנים החופשיים ומהו מספר הפתרונות (אם יש אינסוף פתרונות, מספר הפתרונות הוא אינסוף פתרונות).

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה ב- 3 נעלמים מעל $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x+2y+az=-3-a \\ x+(2-a)y-z=2-a \\ ax+ay+z=7 \end{cases}$$

עבור אילו ערכים של a למערכת :

(i) יש פתרון יחיד? (ii) יש אינסוף פתרונות? רשמו את הפתרון הכללי.

(iii) אין פתרון?

שאלה 5 (20 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה ב- 4 נעלמים מעל $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x+ay+az+(a-b)w=b+1 \\ x+(a+1)y+(a+b)z+(2a-b)w=a+b+1 \\ 3x+3ay+(3a+b)z+(3a-b)w=4b+3 \\ x+ay+az=2b \end{cases}$$

עבור אילו ערכי a , b יש למערכת פתרון יחיד? אין פתרון? יש אינסוף פתרונות? רשמו את הפתרון הכללי במקרה זה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 2, 3

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 4.12.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת. **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".**

שאלה 1 (15 נקודות)

א. האם תת- הקבוצה $A=\{(1,3,0,1),(1,0,1,0),(1,1,1,0),(1,5,0,1)\}$ של $\mathbf{R}^4$ תלויה לינארית?

ב. יהי $F=\mathbf{Z}_3$. האם התת- קבוצה $A=\{(1,1,2,2),(1,2,1,2),(1,1,1,2),(0,2,2,2)\}$ של F^4 בלתי תלויה לינארית?

שאלה 2 (15 נקודות)

יהיו F שדה אינסופי ו- $n\geq 1$ מספר טבעי. יהיו $v_1,v_2,\ldots,v_n,w\in F^n$ וקטורים שונים.

הוכיחו שאם אין פתרון למשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_nv_n=w$ אז יש אינסוף פתרונות למשוואה $x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_nv_n=0$.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהיינה A מטריצה מסדר $m\times n$ ו- B מטריצה מסדר $n\times m$ המקיימות $AB=I_m$.

א. הוכיחו כי למערכת ההומוגנית $B\underline{x}=\underline{0}$ יש פתרון יחיד.

ב. הוכיחו כי $m\leq n$.

ג. הוכיחו כי אם יש מטריצה X המקיימת $BX=I_n$, אז $X=A$ ו- $m=n$.

שאלה 4 (15 נקודות)

יהיו B,A מטריצות מסדר $n\times n$. הוכיחו , ללא שימוש בדטרמיננטות, כי אם AB^2-A הפיכה אז $BA+A$ הפיכה.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי A מטריצה ממשית אנטיסימטרית, כלומר המקיימת $A^t = -A$.

נתון שהמטריצה $I + 2A$ הפיכה.

א. הוכיחו שגם המטריצה $I - 2A$ הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצה $C = (I - 2A)(I + 2A)^{-1}$ מקיימת $C^t C = I$.

שאלה 6 (15 נקודות)

נתונות המטריצות $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbf{Z}_7$.

א. מדוע קיימת מטריצה C הפיכה כך ש- $B = CA$? חשבו אותה.

ב. רשמו את C כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20109-אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1- 4

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 11.12.2022

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה **ב** – אם רק טענה 2 נכונה

ג – אם שתי הטענות נכונות **ד** – אם שתי הטענות לא נכונות

שאלה 1

תהי הקבוצה $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$, עליה מוגדרות פעולות החיבור והכפל הרגילות.

1. $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ סגורה לגבי הכפל.
2. המבנה $(\mathbf{Z}[\sqrt{2}],+,\cdot)$ הוא שדה.

שאלה 2

נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbf{R}$:

$$(*)\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_4-x_5=-1 \\ x_3+x_4+2x_5=2 \\ 3x_1+3x_2+2x_3+5x_4+2x_5=2 \\ 3x_1+3x_2+4x_3+7x_4+6x_5=-1 \end{cases}$$

1. יש אינסוף פתרונות למערכת (*).
2. למערכת ההומוגנית המתאימה (כלומר בעלת אותה מטריצת מקדמים מצומצמת) יש שלושה משתנים קשורים.

שאלה 3

נתונה מערכת המשוואות הלינארית מעל $\mathbf{R}$, כאשר $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ פרמטרים :

$$\begin{cases} x-y+2z=a \\ 2x-2y+3z=b \\ x+2y-z=c \\ y+z=d \end{cases}$$

1. אם $11a+c=6b+3d$ אז יש אינסוף פתרונות.
2. קיימים סקלרים a,b,c,d עבורם יש פתרון יחיד.

בשאלות 4- 6 נתייחס למערכת משוואות הומוגנית (O) ומערכת אי הומוגנית (M). שתיהן בעלות m משוואות, n נעלמים ואותה מטריצת מקדמים מצומצמת.

שאלה 4

1. אם למערכת (O) יש אינסוף פתרונות אז $m \le n$.
2. אם $m<n$ אז למערכת (M) יש אינסוף פתרונות.

שאלה 5

1. אם $\underline{c}, \underline{d}$ פתרונות של (M) וגם $\lambda\underline{c}+\mu\underline{d}$ פתרון של (M), אז מתקיים $\lambda+\mu=1$.
2. אם $\underline{c}$ פתרון של (M) ו- $\underline{d}$ פתרון של (O), אז $\underline{c}-3\underline{d}$ פתרון של (M).

שאלה 6

1. אם ל- (M) אין פתרון אז יתכן שקיים פתרון יחיד ל- (O).
2. אם ל- (O) יש אינסוף פתרונות אז ל- (M) יש אינסוף פתרונות.

שאלה 7

1. קבוצת הפתרונות של המערכת $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$ מעל השדה $\mathbf{Z}_3$ היא :
$S=\{(2a+2,a,2) \mid a \in \mathbf{Z}_3\}$.
2. למערכת $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+z=0 \end{cases}$ מעל השדה $\mathbf{Z}_2$ יש 4 פתרונות.

שאלה 8

נגדיר $A=\{(1,4,1),(2,1,3),(1,2,2)\}$ תת-קבוצה של F^3, כאשר $F=\mathbf{Z}_5$ או $F=\mathbf{R}$.

1. אם $F=\mathbf{R}$, הקבוצה A בלתי תלויה לינארית.
2. אם $F=\mathbf{Z}_5$, הקבוצה A בלתי תלויה לינארית.

שאלה 9

תהי $\{u,v,w\}$ תת- קבוצה של $\mathbf{R}^n$ בלתי תלויה לינארית. אז:

1. הקבוצה $\{u-v-w\,,\,2u+w\,,\,3u+v+3w\}$ תלויה לינארית.
2. אם $n=3$ אז הקבוצה $\{u-v\,,\,v-w\,,\,w-u\}$ היא בסיס ל- $\mathbf{R}^3$.

בשאלות 10- 11 נתייחס לקבוצת וקטורים $A=\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\}$ ב- F^n, F שדה.

שאלה 10

1. אם $k>n$ אז A פורשת את F^n.
2. אם A תלויה לינארית ופורשת את F^n, אז $k>n$.

שאלה 11

1. אם A תלויה לינארית אז $\underline{a}_k$ הוא צרוף לינארי של הווקטורים $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_{k-1}$.
2. אם A בלתי תלויה לינארית ו- $\underline{b}\in F^n$ אינו צרוף לינארי של וקטורי A אז $A\cup\{\underline{b}\}$ בלתי תלויה לינארית.

שאלה 12

1. הקבוצה $\{(1,6,4),(1,14,-5),(2,4,-1),(-1,2,5)\}$ פורשת את $\mathbf{R}^3$.
2. קיימים $a,b\in\mathbf{R}$ כך שהווקטור $v=(a,b,2b-a,-2a+3b)$ ב- $\mathbf{R}^4$ <u>אינו</u> צרוף לינארי של הווקטורים $u_2=(1,2,3,4)$, $u_1=(4,3,2,1)$.

שאלה 13

תהי A המטריצה המצומצמת של המערכת הלינארית בשאלה 2.

1. וקטורי העמודות של A מהווים קבוצה בלתי תלויה לינארית ב- $\mathbf{R}^4$.
2. וקטורי העמודות של A פורשים את $\mathbf{R}^4$.

בשאלות 14- 20 A, B, C הן מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$, אלא אם צוין אחרת.

שאלה 14

1. אם $AB = 0$ וגם A הפיכה אז $BA = 0$.
2. אם $AB = 0$ ו- $B \neq 0$ אז $A = 0$.

שאלה 15

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n, $n \geq 2$.

1. אם A סינגולרית אז יש ב- A שורת אפסים.
2. אם A סינגולרית אז יש ב- A שתי שורות פרופורציונליות (כלומר שורה אחת כפולה של השנייה).

שאלה 16

1. אם $\left|A^3\right| = -\left|A\right|$ אז A סינגולרית.
2. אם $AB = -BA$ ו- n אי-זוגי אז A או B סינגולרית.

שאלה 17

יהי x מספר ממשי. אז:

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5x + 2$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$$

שאלה 18

תהי A מטריצה מסדר 3×3 כך ש- $\det A = -2$. אז:

1. $\det(-2A^2) = -2^5$.
2. $\det(-2A)^3 = -64$.

שאלה 19

1. אם A ו- B שקולות שורות אז $|A| = \pm|B|$.
2. אם $|A+C| = |B+C|$ אז $|A| = |B|$.

שאלה 20

נתון כי המטריצה $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ רגולרית. אז :

1. המטריצה $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 1 & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 3 & \alpha_{23} & \alpha_{33} \\ -\alpha_{12} & 4 & -\alpha_{22} & -\alpha_{32} \end{bmatrix}$ רגולרית.
2. המטריצה $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{11}+\alpha_{21} & -\alpha_{12}-\alpha_{22} & \alpha_{13}+\alpha_{23} \\ -\alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{33} \end{bmatrix}$ סינגולרית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4, 6, 7

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 25.12.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (10 נקודות)

יהיו a,b,c,d,e,f,g איברים בשדה F. ללא חישוב של שלוש הדטרמיננטות הוכיחו כי:

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{vmatrix} = 0 .$$

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו את הדטרמיננטות הבאות, מסדר n, $n>1$, המוגדרות מעל $\mathbf{R}$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

ו-

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ n-2 & n-1 & n & \dots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה D_1 מוגדרת כך:

$$d_{ij} = \begin{cases} a & if \quad i=j \\ b & if \quad j=i+1 \ and \ i \le n-1 \\ b & if \quad i=n \ and \ j=1 \end{cases}$$

הדטרמיננטה D_2 מוגדרת כך: לכל i, $1 \le i \le n$,

$$d_{ij} = \begin{cases} i+j-1 & if \ i+j-1 \le n \\ n & if \ i+j-1 > n \end{cases} .$$

שאלה 3 (20 נקודות)

אין קשר בין הסעיפים.

א. נתונים $t=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$ ו- $w=1-i$. פתרו ב- $\mathbf{C}$ את המשוואה $z^3=\frac{w}{\overline{t}}$.

ב. יהיו $z_1,z_2,...,z_n$ כל הפתרונות ב- $\mathbf{C}$ של המשוואה $z^n=1$.

הוכיחו שעבור n אי-זוגי מכפלתם שווה ל-1, כלומר $z_1z_2...z_n=1$.

שאלה 4 (10 נקודות)

על הקבוצה $V=\{(\alpha,\beta)\,|\,\alpha,\beta\in\mathbf{R}\}$ מגדירים את הפעולות הבאות :

חיבור : $(\alpha,\beta)+(\alpha',\beta')=(\alpha+\alpha',\beta+\beta')$

כפל בסקלר : $\lambda(\alpha,\beta)=(\alpha,\lambda\beta)$, כאשר $\lambda\in\mathbf{R}$.

האם הקבוצה V היא מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$ עבור הפעולות האלה?

שאלה 5 (25 נקודות)

א. בדקו אלו מהקבוצות הבאות הן מרחבים לינאריים מעל F , ביחס לפעולות הרגילות :

$W=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,|\,f(x+1)=f(x)+1 \quad \text{לכל } x\in\mathbf{R}\}$, כאשר $F=\mathbf{R}$.

$M=\{p(x)\in\mathbf{R}_4[x]\,|\,p(x)=p(x-1) \quad \text{לכל } x\in\mathbf{R}\}$, כאשר $F=\mathbf{R}$.

$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})\,|\,ad=0\right\}$, כאשר $F=\mathbf{R}$.

$L=\left\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbf{C}^3\,|\,z_2=\overline{z_1}\right\}$, כאשר $F=\mathbf{R}$.

אם התשובה חיובית, הוכיחו אותה על-ידי שימוש באחד המשפטים 7.3.2 או 7.3.2' **בלבד**.

ב. עבור כל אחד מהמרחבים שמצאתם, הציגו קבוצה פורשת סופית.

שאלה 6 (15 נקודות)

א. יהיו u,v,w וקטורים במרחב לינארי V מעל שדה $\mathbf{R}$. האם מתקיים

$Sp\{u-v+2w,-2u+v-w,-u+2v+w\}=Sp\{u,v,w\}$? <u>רמז</u> : שאלה 7.5.11.

ב. יהיו $U=Sp\{(1,2,5),(1,1,3)\}$ ו- $W=Sp\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ תת- מרחבים של $\mathbf{R}^3$.

האם $U=W$?

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: **20109 - אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7, 8

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: **2023א** **מועד אחרון להגשה:** 15.1.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת. **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".**

שאלה 1 (15 נקודות)

יהיו U,W_1,W_2 תת-מרחבים של מרחב לינארי V.

א. הוכיחו ש- $(U\cap W_1)+(U\cap W_2)\subseteq U\cap(W_1+W_2)$ (*).

ב. תנו דוגמה של שלושה תת-מרחבים <u>שונים</u> של $\mathbf{R}^2$ עבורם מתקיים הכלה ממש ב-(*) (כלומר אין שוויון).

שאלה 2 (15 נקודות)

יהיו U,W תת-מרחבים **שונים** של מרחב לינארי V. נתון ש- $\{u_1,u_2\}$ בסיס ל- U וש- $\{w_1,w_2\}$ בסיס

ל- W . נניח שהקבוצה $\{u_1,u_2,w_1\}$ תלויה לינארית.

א. הוכיחו ש- $w_1\in U\cap W$.

ב. מצאו את $\dim(U+W)$ והציגו בסיס ל- $U+W$.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהיו U ו- W התת-מרחבים הבאים של $\mathbf{R}_4[x]$:

$$U = Sp\{x^3+4x^2-x+3,\ x^3+5x^2+5,\ 3x^3+10x^2+5\}$$

$$W = Sp\{x^3+4x^2+6,\ x^3+2x^2-x+5,\ 2x^3+2x^2-3x+9\}.$$

א. מצאו בסיס ומימד עבור כל אחד מתת-המרחבים $U+W,W,U$.

ב. מהו הממד של $U\cap W$? מצאו בסיס ל- $U\cap W$.

ג. מצאו תת-מרחב T של $\mathbf{R}_4[x]$ כך שמתקיים $\mathbf{R}_4[x]=W\oplus T$.

שאלה 4 (15 נקודות)

יהיו U ו- W תת-מרחבים של $\mathbf{R}^4$ שמקיימים $\dim U > \dim W$.

נתון כי $U \cap W = Sp\{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(-1,0,1,2)\}$ ו- $(0,0,1,0) \notin U+W$.

מצאו את ממדו של $U+W$ ולאחר מכן בסיס ל- W. נמקו היטב.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר n. העקבה שלה, מסומנת $tr(A)$, היא הסכום של איברי האלכסון שלה, כלומר $tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

תהי A מטריצה ריבועית מדרגה 1.

א. הוכיחו ש- $A^2 = tr(A)A$.

ב. הסיקו שאם $tr(A)=0$ אז $A^2=0$ ושאם $tr(A)\neq 0$ אז $A^k \neq 0$ לכל k טבעי, $k \geq 1$.

ג. נניח שמתקיים $A^k=0$ עבור k טבעי מסוים. הוכיחו ש- $A^2=0$.

שאלה 6 (15 נקודות)

יהי V המרחב הנפרש על-ידי הפונקציות $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרות על- ידי

$f(x)=\sin x$ ו- $g(x)=\cos x$.

נגדיר את הפונקציות $h,k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ על- ידי $h(x)=2\sin x+\cos x$ ו- $k(x)=3\cos x$.

א. הוכיחו שהקבוצות $B=\{f,g\}$ ו- $C=\{h,k\}$ בסיסים ל- V.

ב. מצאו את מטריצת המעבר מ- B ל- C ומטריצת המעבר מ- C ל- B.

ג. השתמשו במטריצת מעבר לחישוב של $[l]_C$, כאשר $l:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $l(x)=5\sin x-2\cos x$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20109-אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: 6 - 8

מספר השאלות: 21

סמסטר: 2023א

משקל המטלה: 2 נקודות

מועד אחרון להגשה: 17.1.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה
ב – אם רק טענה 2 נכונה
ג – אם שתי הטענות נכונות
ד – אם שתי הטענות לא נכונות

שאלה 1

1. קבוצת המטריצות הממשיות האלכסוניות מסדר $n \times n$ היא שדה ביחס לפעולות החיבור והכפל של מטריצות.
2. המרחב הלינארי $\mathbf{R}^2$ הוא גם שדה ביחס לפעולת החיבור הרגילה ופעולת הכפל המוגדרת ע"י: $(a,b)(c,d) = (ac, bd)$ לכל a,b,c,d ממשיים.

שאלה 2

1. $\left|\left(3+\sqrt{2}i\right)^2\right| = 121$
2. $\left|\dfrac{\left(\sqrt{3}+2i\right)^2}{\left(1-\sqrt{2}i\right)^3}\right| = \dfrac{7}{\sqrt{27}}$

שאלה 3

1. $(2-i)^4 = (1+2i)^4$
2. $\left|\left(1+\sqrt{3}i\right)^{20}\right| = 4^{20}$

שאלה 4

1. אם $z_0 \in \mathbf{C}$ פתרון למשוואה $z^{11} - 3z^2 + 17 = 0$ אז גם $\bar{z}_0$ פתרון שלה. רמז: שאלה 6.4.7.
2. אם $z_1 \in \mathbf{C}$ פתרון למשוואה $z^2 + iz - 3 = 0$ אז גם $\bar{z}_1$ פתרון שלה.

שאלה 5

1. ההצגה הטריגונומטרית של $-1-i$ היא $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

2. ההצגה הטריגונומטרית של $-\sqrt{3}+i$ היא $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

שאלה 6

1. כל פתרונות המשוואה $z^3=-1$ הם:

-1 , $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

2. כל פתרונות המשוואה $z^2=i$ הם:

$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ ו- $\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$.

שאלה 7

1. לכל $w\in\mathbf{C}$ $\begin{vmatrix} 1 & \overline{w} & \overline{w} \\ w & 1 & \overline{w} \\ w & w & 1 \end{vmatrix}$ הוא מספר ממשי.

2. למערכת $\begin{cases} z_2+(1-i)z_3 =1 \\ iz_1+z_2+z_3 =0 \\ iz_1+iz_3=1 \end{cases}$ אין פתרון.

שאלה 8

1. $\mathbf{C}^2$ עם הפעולות הרגילות הוא מרחב לינארי מעל שדה המספרים הרציונליים $\mathbf{Q}$.

2. $\mathbf{Q}^2$ עם הפעולות הרגילות הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{Z}$.

שאלה 9

1. הקבוצה $W=\{A\in M_n(\mathbf{R}) \mid A=A^t\}\cup\{A\in M_n(\mathbf{R}) \mid A=-A^t\}$ הוא תת-מרחב של $M_n(\mathbf{R})$.

2. הקבוצה $U=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \mid f(2x)=f(x)\}$ היא תת-מרחב של מרחב הפונקציות מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$. (מרחב זה מוגדר בדוגמה ו' עמ' 160 כרך ב')

שאלה 10

תהי $A=\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ תת-קבוצה של מרחב לינארי V מעל $\mathbf{R}$.

1. $Sp\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{v}-3\mathbf{w}\}=Sp\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$.
2. אם A בלתי תלויה לינארית אז $\dim Sp\{2\mathbf{u}-5\mathbf{w}\ ,3\mathbf{u}+2\mathbf{v}\ ,\mathbf{u}+\mathbf{v}-8\mathbf{w}\}=2$.

<u>בשאלות 11- 14 T,K הן תת-קבוצות לא ריקות של מרחב לינארי V .</u>

שאלה 11

1. אם $\mathrm{Sp}(T)\subseteq\mathrm{Sp}(K)$ אז $T\subseteq K$.
2. אם $T\subseteq\mathrm{Sp}(K)$ ו-$K\subseteq\mathrm{Sp}(T)$ אז $\mathrm{Sp}(T)=\mathrm{Sp}(K)$.

שאלה 12

1. אם $v\in V$, $v\notin T$ ו-T בלתי תלויה, אז $T\cup\{v\}$ בלתי תלויה.
2. אם $u,v\in V$, $u\in Sp(T\cup\{v\})$ ו-$u\notin Sp(T)$ אז קיים סקלר λ כך ש-$u=\lambda v$.

שאלה 13

1. אם $K\subset T$ (חלקית ממש) ואם $Sp(K)=Sp(T)$ אז T תלויה לינארית.
2. אם $K\cap T=\varnothing$ אז $Sp(K)\cap Sp(T)=\{\underline{0}\}$.

שאלה 14

1. $Sp(K)+Sp(T)=Sp(K)\cup Sp(T)$.
2. אם $\dim Sp(K)+\dim Sp(T)=\dim V$ אז $V=Sp(K)+Sp(T)$.

שאלה 15

1. מימד התת-מרחב $Sp\{(1,-1,0,1),(2,0,1,-1),(1,1,1,2),(0,2,1,-3)\}$ של $\mathbf{R}^4$ הוא 3.
2. מימד התת-מרחב $Sp(\{-x^3+x^2+2,\ -x^2+x+1, x^3+x+1, x^2+x+1\})$ של $\mathbf{R}_4[x]$ הוא 3

שאלה 16

1. אם U,W תת-מרחבים של $\mathbf{R}^{10}$, $\dim U=8$, $\dim W=9$ אז $\dim(U\cap W)=7$.
2. אם U,W תת-מרחבים של $\mathbf{R}^5$, $\dim U=3$, $\dim W=4$ ו-$U\not\subseteq W$ אז $\dim(U\cap W)=2$.

שאלה 17

1. אם V מרחב כל המטריצות מסדר (3×3) מעל $\mathbf{R}$, אשר סכום האיברים בכל שורה ובכל עמודה הוא 0, אז $\dim V = 4$.
2. אם $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbf{R} \right\}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \middle| c,d \in \mathbf{R} \right\}$ אז $U \oplus W = M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$.

שאלה 18

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, k מספר ממשי.

1. קיים k ממשי כך ש- $\rho(A) = 2$.
2. קיים k ממשי כך ש- $\rho(A) = 1$.

שאלה 19

1. אם A ו- B מטריצות מסדר 3×3 כך ש- $\rho(A) = \rho(B) = 2$ אז $AB \neq 0$.
2. אם A מטריצה מסדר 2×3 ו- B מטריצה מסדר 3×2 אז המטריצה AB סינגולרית.

שאלה 20

נתונים שני בסיסים של $\mathbf{R}^4$:

$$B_1 = ((2,1,0,1), (1,1,0,-1), (1,0,1,1), (1,1,0,0))$$

$$B_2 = ((1,1,0,1), (2,1,0,-1), (0,0,1,1), (2,1,0,0))$$

1. $[(5,3,1,1)]_{B_1} = [(5,3,1,1)]_{B_2}$
2. $[(1,1,1,1)]_{B_1} = (5 \quad 3 \quad 1 \quad 1)^t$

שאלה 21

יהיו $B = (v_1, v_2, v_3)$, $B_1 = (v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3)$ שני בסיסים של מרחב V.

1. $[v_1 - 2v_2 + v_3]_{B_1} = (1, -3, 3)^t$.
2. מטריצת המעבר מ- B ל- B_1 היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 9, 10

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 22.1.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת. **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".**

שאלה 1 (10 נקודות)

בדקו האם ההעתקות הבאות הן לינאריות:

א. $T_1:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $T_1(x,y)=(\sin y,x)$.

ב. $T_2:\mathbf{R}[x]\to\mathbf{R}[x]$, $T_2(p(x))=(x+1)p'(x)-p(x)$.

שאלה 2 (20 נקודות) **<u>אין קשר בין שלושת הסעיפים</u>.**

א. האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ שונה מאפס כך ש-

$T(1,0,1)=T(1,2,1)=T(0,1,1)=T(2,3,3)$?

אם כן, תנו דוגמה של העתקה כזו (מספיק להגדיר אותה על בסיס). אם לא, הסבירו מדוע.

ב. יהיו V מרחב לינארי ממימד סופי ו- U תת-מרחב שלו.

הוכיחו שקיימת העתקה לינארית $T:V\to V$ כך ש- $\ker T=U$ ו- $\ker T\cap \operatorname{Im}T=\{\underline{0}\}$.

ג. יהי V מרחב לינארי ממימד סופי ותהי $S:V\to V$ העתקה לינארית הפיכה.

האם קיימת העתקה לינארית $T:V\to V$ כך ש- $\ker TS=\{0\}$ אך $\ker T\neq\{0\}$?

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, כאשר V מרחב לינארי מעל שדה F .

א. נניח שקיים מספר טבעי k , $k\geq 2$ כך ש- $T^k=0$ ו- $T^{k-1}\neq 0$.

יהי $u\in V$ כך ש- $T^{k-1}(u)\neq 0$. הוכיחו שהקבוצה $L=\{u,T(u),T^2(u),...,T^{k-1}(u)\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שלא קיימת מטריצה $A\in M_{2\times 2}(F)$ כך ש- $A^3=0$ ו- $A^2\neq 0$.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ העתקה לינארית **שונה מהעתקת האפס** המקיימת $T^2=2T$.

נניח ש- T **לא הפיכה**.

א. מצאו את $\dim\operatorname{Ker}T$ ו- $\dim\operatorname{Im}T$.

ב. הוכיחו שקיים בסיס B של $\mathbf{R}^2$ כך שמטריצת הייצוג של T לפי B היא $[T]_B=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$.

<u>רמז</u>: השתמשו בווקטור $v\neq\underline{0}$ כלשהו השייך ל- $\operatorname{Im}T$.

שאלה 5 (25 נקודות)

תהי $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ טרנספורמציה לינארית ויהי $B=((1,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ בסיס של $\mathbf{R}^3$.

ידוע כי $[T]_B=\begin{pmatrix}a&0&b\\3&2a&1\\2c&b&a\end{pmatrix}$ וכי $(1,0,0)\in\ker T$.

א. מצאו את a,b,c.

ב. מצאו בסיס ל- $\operatorname{Im}T$ ובסיס ל- $\operatorname{Ker}T$.

ג. חשבו את $T(x,y,z)$ עבור כל $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 11, 12

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 31.1.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות: • שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה • שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת. **הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".**

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, כאשר a מספר ממשי.

א. עבור אילו ערכי a המטריצה A לכסינה?

ב. **נקבע** $a=-1$. מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש- $D=P^{-1}AP$.
השתמש במטריצה D כדי לחשב את A^{2023}.

שאלה 2 (20 נקודות)

<u>שאלה זו עוסקת בפולינום אופייני. אין קשר בין הסעיפים</u>.

א. הוכיחו שלא קיימת מטריצה מדרגה 3 עם פולינום אופייני $p(x)=x^7-x^5+x^3$.

ב. תהי $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ העתקה לינארית עם פולינום אופייני $p(x)=x^2+2x-3$.

1. הוכיחו שההעתקה הלינארית $3T+I$ היא איזומורפיזם.
2. מהו הפולינום האופייני של T^3?

ג. תהי A מטריצה סינגולרית מסדר 4×4. ידוע שמתקיים $\rho(A+2I)=2$ וגם $\det(A-2I)=0$. מהו הפולינום האופייני של A? האם A לכסינה?

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי A מטריצה **לכסינה** מסדר $n\times n$. נסמן $p(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0$ את הפולינום האופייני שלה. נגדיר $p(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I$. זו מטריצה ריבועית מסדר n.

הוכיחו ש- $p(A)=0$.

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם למטריצות A ו- B יש אותו פולינום אופייני אז יש להן אותה דרגה.

ב. המטריצות $A=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -2\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ דומות.

ג. המטריצות $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ דומות.

שאלה 5 (10 נקודות)

יהיו $\mathbf{u},\mathbf{v}$ שני וקטורים שונים מווקטור האפס ב- $\mathbf{R}^n$. נתון כי $\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|$.

מצאו את כל הערכים של המספר הממשי a כך שהווקטור $\mathbf{u}+a\mathbf{v}$ אורתוגונלי לווקטור $\mathbf{u}-a\mathbf{v}$.

שאלה 6 (15 נקודות)

יהיו U_1,U_2 תת-מרחבים של $\mathbf{R}^n$.

א. נניח כי $\mathbf{R}^n=U_1\oplus U_2$. הוכיחו כי $U_1^{\perp}\cap U_2^{\perp}=\{\underline{0}\}$ והסיקו כי $\mathbf{R}^n=U_1^{\perp}\oplus U_2^{\perp}$.

ב. נניח כי $\mathbf{R}^n=U_1+U_2$. האם נכון כי $\mathbf{R}^n=U_1^{\perp}+U_2^{\perp}$?

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20109-אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 9-12

מספר השאלות: 18 **משקל המטלה:** 2 נקודה

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 2.2.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה
ב – אם רק טענה 2 נכונה
ג – אם שתי הטענות נכונות
ד – אם שתי הטענות לא נכונות

שאלה 1

נתונה ההעתקה הלינארית $T:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ המוגדרת על ידי
$T(x,y,z,t)=(x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-3t, y+z-2t)$. אז:

1. $\operatorname{Im} T = Sp\{(1,1,1,0),(0,1,2,1)\}$
2. $\ker T = \mathrm{Sp}\{(1,-1,1,1),(0,1,1,-2)\}$.

שאלה 2

1. קיימת העתקה לינארית $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ כך ש:
$T(1,-3,2)=(1,0,2)$, $T(1,1,1)=(0,1,1)$, $T(3,-1,4)=(2,1,5)$
2. קיימת העתקה לינארית $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ כך ש:
$T(1,0,1)=(1,-1)$, $T(2,1,-1)=(1,2)$, $T(1,1,-2)=(0,3)$

שאלה 3

תהי $T:M_{2\times3}(\mathbf{R}) \to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ העתקה לינארית.

1. לא יתכן ש- T על.
2. לא יתכן ש- T חד-חד-ערכית.

שאלה 4

תהי $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ תת-קבוצת בת״ל במרחב לינארי V ו- $T: V \to V$ העתקה לינארית.

1. אם $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ לא פורשת את V אז קיימת העתקה לינארית $S: V \to V$ כך ש- $Sv_i = Tv_i$ לכל $1 \le i \le k$ אך $S \ne T$.
2. אם $\{Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_k\}$ בלתי תלויה אז T היא חד-חד-ערכית.

שאלה 5

תהי $T: \mathbf{R}_3[x] \to \mathbf{R}$ ההעתקה הלינארית המוגדרת על-ידי $T(p(x)) = p(1)$.

1. $\ker T = \{(x-1)(ax+b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$.
2. $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$.

בשאלות 6 - 7 V הוא מרחב לינארי נוצר סופית ו- $S, T: V \to V$ הן העתקות לינאריות.

שאלה 6

1. אם $\operatorname{Im} S = \operatorname{Im} T$ ו- $\ker S = \ker T$ אז $S = T$.
2. $\ker T + \operatorname{Im} T = V$.

שאלה 7

1. $\ker S \subseteq \ker TS$.
2. $\operatorname{Im} S \subseteq \operatorname{Im} TS$.

שאלה 8

תהי $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ העתקה הלינארית שמטריצת הייצוג שלה היא $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

ביחס לבסיס $B = ((1,1), (1,-1))$.

1. $\ker T = Sp\{(3,1)\}$.
2. $\operatorname{Im} T^2 = Sp\{(-1,3)\}$.

שאלה 9

יהי V מרחב לינארי ממימד n מעל $\mathbf{R}$ ויהיו $S,T:V\to V$ העתקות לינאריות.

1. אם λ_1 הוא ערך עצמי של S ו- λ_2 הוא ערך עצמי של T אז $\lambda_1+\lambda_2$ הוא ערך עצמי של $S+T$.
2. אם v הוא וקטור עצמי של S ושל T אז v הוא גם וקטור עצמי של $S+T$.

שאלה 10

יהיו A ו- B מטריצות מסדר $n\times n$.

1. אם A ו- B לכסינות ויש להן אותו פולינום אופייני אז A ו- B דומות.
2. אם A ו- B שקולות שורות ו- A לכסינה אז B לכסינה.

שאלה 11

המטריצות הבאות מעל $\mathbf{R}$.

1. המטריצות $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ו- $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ דומות.
2. המטריצות $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ו- $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ דומות.

שאלה 12

תהי $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

1. A לכסינה מעל $\mathbf{R}$.
2. A לכסינה מעל $\mathbf{C}$.

שאלה 13

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, כאשר V מרחב לינארי ממימד סופי.

1. אם $\lambda=0$ ערך עצמי יחיד של T ואם $T\neq 0$ אז T אינה לכסינה.
2. אם קיים $m>1$ טבעי כך ש- $T^m=0$ ואם T לכסינה אז $T=0$.

שאלה 14

תהי A מטריצה ריבועית ממשית.

1. אם $P(t)$ הפולינום האופייני של מטריצה A אז $P(0)=|A|$.
2. אם $P(t)$ הפולינום האופייני של A אז $P(t-1)$ הפולינום האופייני של $I+A$.

שאלה 15

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, כאשר V מרחב לינארי ממימד n.

1. סכום הריבויים הגיאומטריים של הערכים העצמיים של T קטן או שווה לסכום הריבויים האלגבריים שלהם.
2. סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים של T שווה ל-n.

שאלה 16

תהי $K\neq\emptyset$ קבוצת וקטורים ב-$\mathbf{R}^n$ ויהי v וקטור ב-$\mathbf{R}^n$.

1. $(K^{\perp})^{\perp}=K$
2. אם $v\notin Sp(K)$, אז $v\in(Sp(K))^{\perp}$.

שאלה 17

1. הקבוצה $B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$
   היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbf{R}^3$.
2. הקבוצה B מסעיף 1, מתקבלת על-ידי תהליך גרם-שמידט ולאחר נרמול, מ-
   $\{v_1=(1,1,1)\ ,\ v_2=(0,1,1)\ ,\ v_3=(0,0,1)\}$.

שאלה 18

יהי $W=Sp\{(1,-1,-1,1)\}$ תת-מרחב של $\mathbf{R}^4$.

1. ההיטל האורתוגונלי של $v=(1,0,1,1)$ על W הוא $(1,-1,-1,1)$.
2. ההיטל האורתוגונלי של $v=(1,0,1,1)$ על $W^{\perp}$ הוא $\frac{1}{4}(3,1,5,3)$.