מטלת מנחה 14 - אינפי 2

328197462

23/12/2022

שאלה 1

הפונקציה לפיתוח: $f(x)=\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{1/2}$
נקודת הפיתוח: $a=0$, וצריך למצוא $f(0.1)$.
סדר הפיתוח: $n\in\mathbb{N}$, כך ש $|R_n(x)|\leq 0.5\cdot 10^{-4}$.

הפונקציה גזירה בקטע. נחשב נגזרות עד סדר 4:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}\cdot 2x=\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\\
f^{(2)}(x) &= \frac{1\cdot(1+x^2)^{1/2}-x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}}{(1+x^2)}=\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}}=(1+x^2)^{-3/2}\\
f^{(3)}(x) &= -\frac{3}{2}(1+x^2)^{-5/2}\cdot 2x=-3\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}\\
f^{(4)}(x) &= -3\cdot\frac{1\cdot(1+x^2)^{5/2}-x\cdot\frac{5}{2}(1+x^2)^{3/2}\cdot 2x}{(1+x^2)^5}\\
&= -3(1+x^2)^{3/2}\cdot\frac{(1+x^2)^1-5x^2}{(1+x^2)^5}=\frac{-3(1-4x^2)}{(1+x^2)^{7/2}}
\end{aligned}$$

לפי לגראנז', קיים $c\in(0,0.1)$ כך ש $R_3(0.1)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\cdot 0.1^4$. לכן,

$$\begin{aligned}
|R_3(0.1)| &= \left|\frac{-3(1-4c^2)}{(1+c^2)^{7/2}\cdot 24}\cdot 0.1^4\right|=\frac{3(1-4c^2)}{24(1+c^2)^{7/2}}\cdot 10^{-4}\\
&\leq \frac{3}{24}\cdot 10^-4=\frac{1}{8}\cdot 10^{-4}\leq 0.5\cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

ערכי הנגזרת בנקודה $a=0$ יהיו:

$$f(0)=1\quad f'(0)=0\quad f^{(2)}(0)=1\quad f^{(3)}(0)=0$$

ולכן פיתוח מקלורן מסדר $n=3$ יהיה:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1+\frac{0}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+R_3(x)\\
&= 1+\frac{1}{2}x^2+R_3(x)
\end{aligned}$$

ונקבל

$$\sqrt{1.01}=f(0.1)=1.005\pm 0.5\cdot 10^{-4}$$

בדיקה: מחישוב נקבל $\sqrt{1.01}=1.00498756211$, והשארית תהיה $0.00005>0.00001243788$

שאלה 2

יהיו f,g פונקציות כנדרש. ננסה להוכיח באופן דומה לשאלה 2א בעמוד 93 בכרך ב.
נסמן $P(x)=\sum_{k=0}^{n}(\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j})x^k$ ועלינו להוכיח

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-P(x)}{x^n}=0$$

לפי הנתון מתקיים $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+R_n(x), g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+\rho_n(x)$,
כאשר לפי משפט 4.7:

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{x^n}=0 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\rho_n(x)}{x^n}=0$$

כפל הפולינומים ייתן לנו פולינום ממעלה $2n$:

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\cdot\sum_{k=0}^{n}b_kx^k=P(x)+\sum_{k=n+1}^{2n}c_kx^k$$

כאשר ניתן לחשב את הערכים c_k, אך אין בכך צורך. מכאן נסיק:

$$f(x)g(x)=(\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+R_n(x))(\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+\rho_n(x))=$$

$$P(x)+\sum_{k=n+1}^{2n}c_kx^k+R_n(x)(\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+\rho_n(x))+\rho_n(x)\cdot\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

ולכן

$$\frac{f(x)g(x)-P(x)}{x_n}=\sum_{k=n+1}^{2n}c_kx^{k-n}+\frac{R_n(x)}{x^n}\cdot(\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+\rho_n(x))+\frac{\rho_n(x)}{x^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

נראה כי שלושת הביטויים הנ"ל שואפים לאפס כאשר $x\to 0$.
הביטוי הראשון, $\sum_{k=n+1}^{2n}c_kx^{k-n}=\sum_{k=1}^{n}c_{k+n}x^k$, הוא פולינום ומכאן רציף ב-0 והגבול שלו באפס הוא 0 (אין לו מקדם חופשי).
באופן דומה, גם הפולינומים $\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ $\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$ שואפים ל a_0,b_0 בהתאמה ב0.
לכן מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\rho_n(x)}{x^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=\lim_{x\to 0}\frac{\rho_n(x)}{x^n}\cdot\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=0\cdot a_0=0$$

לבסוף, הפונקציה $\rho_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$ רציפה באפס כהפרש של פונקציות רציפות (הרציפות של f נובעת מגזירותה).
לכן $\rho_n(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\rho_n(0)=0$ ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{x^n}\cdot(\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+\rho_n(x))=\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{x^n}\cdot\lim_{x\to 0}(\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+\rho_n(x))=0(b_0+0)=0$$

לסיכום, נקבל

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-P(x)}{x_n}=0$$

ולכן לפי משפט 4.8 הפולינום $P(x)$ הוא פולינום מקלורן של $f(x)g(x)$.

שאלה 3

סעיף א

נחשב את הגבול בעזרת פיתוחי מקלורן ידועים. נתחיל מפיתוח המכנה. לפי שאלה 19ג ביחידה 4, $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + R_3(x)$.
אי לכך,

$$x(\tan x - x) = x(x + \frac{x^3}{3} + R_3(x) - x) = \frac{x^4}{3} + x \cdot R_3(x)$$

מאחר ובמכנה נתקלנו בביטוי ממעלה 4, נפתח את המונה בסדר $n = 4$.
לפי פיתוחים ידועים:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + S_4(t) \quad \underset{\text{שאלה 2א בעמוד 93}}{\Rightarrow} \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{4} + S_4(x)$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + V_3(x) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + M_3(x)$$

נקבל, ע"פ שאלה 2 בממ"ן זה, כי פיתוח מקלורן של הביטוי $x(1+e^{x^2})\tan x$ יהיה:

$$x(2 + x^2 + \frac{x^4}{4} + \cdots)(x + \frac{x^3}{3} + \cdots) = (2x + x^3 + \cdots)(x + \frac{x^3}{3} + \cdots) = 2x^2 + \frac{5x^4}{3} + T_4(x)$$

וכן,

$$\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x = (x - \frac{x^3}{6} + \cdots)(x - \frac{x^3}{6} + \cdots) = x^2 - \frac{x^4}{3} + Q_4(x)$$

נציב בגבול הנתון את הביטויים שקיבלנו:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+e^{x^2})\tan x - 2\sin^2 x}{x(\tan x - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \frac{5}{3}x^4 + T_4(x) - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - 2Q_4(x)}{\frac{x^4}{3} + x \cdot R_3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{3}x^4 + T_4(x) - 2Q_4(x)}{\frac{x^4}{3} + x \cdot R_3(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{3} + \frac{T_4(x)}{x^4} - 2\frac{Q_4(x)}{x^4}}{\frac{1}{3} + \frac{R_3(x)}{x^3}} \underset{4.7}{=} \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = 7$$

סעיף ב

נגדיר פונקציה f כלהלן:

$$f(x) = \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\ln(1-x^2)}$$

ונניח (נוכיח את הדבר בהמשך) כי קיים לf גבול ב-0, סופי או אינסופי.
אז לפי הגדרת היינה מאינפי 1,עבור כל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ובפרט עבור הסדרה $x_n = \frac{1}{n}$, נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

נחשב:

$$f(x_n) = f(\frac{1}{n}) = \frac{e^{1/n} - \sin\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n}}{\ln(1 - \frac{1}{n^2})} \underset{*}{=} \frac{e^{1/n} - \sin\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n}}{\ln(n^2-1) - 2\ln n}$$

* כי $\ln(1-\frac{1}{n^2}) = \ln(\frac{n^2-1}{n^2}) = \ln(n^2-1) - 2\ln n$.
אי לכך,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} - \sin\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n}}{\ln(n^2-1) - 2\ln n} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\ln(1-x^2)}$$

על מנת לחשב את גבול הפונקציה ננסה לפתח את המונה והמכנה לפי $n = 2$.
ניעזר בפיתוחים הידועים:

$$\ln(1+t) = t + R_1(t) \quad \underset{\text{שאלה 2א בעמוד 93}}{\Rightarrow} \quad \ln(1-x^2) = -x^2 + R_2(x)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + S_2(x) \qquad \sin x = x - Q_1(x) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + T_2(x)$$

לכן המונה יהיה:

$$e^x - \sin x - \cos x = (1 + x + \frac{x^2}{2} + S_2(x)) - (x + Q_1(x)) - (1 - \frac{x^2}{2} + T_2(x)) =$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + S_2(x) - x - Q_1(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - T_2(x) = x^2 + S_2(x) - Q_1(x) - T_2(x)$$

והמכנה יהיה $\ln(1 - x^2) = -x^2 + R_2(x)$. נקבל אפוא:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + S_2(x) - Q_1(x) - T_2(x)}{-x^2 + R_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{S_2(x)}{x^2} - \frac{Q_1(x)}{x^2} - \frac{T_2(x)}{x^2}}{-1 + \frac{R_2(x)}{x^2}} = -1$$

כי לפי הערת השוליים בעמוד 65 נקבל $Q_1(x) = Q_2(x)$, וכן ממשפט 4.7 נסיק:

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{S_2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{Q_2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{T_2(x)}{x^2} = 0$$

לסיכום נקבל

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = -1$$

שאלה 4

יהי $x_0 \in [0,1]$ ונרצה להוכיח $|f'(x_0)| \leq \frac{A}{2}$
נרשום פיתוח טיילור של הפונקציה $f(x)$ מסדר 1 סביב הנקודה $x = x_0$, עם שגיאה בצורת לגראנז':

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \quad (c \text{ בין 0 ו} x_0)$$

נציב $x = 0, 1$:

$$\begin{cases} f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(-x_0) + \frac{f''(c_1)}{2}x_0^2 & c_1 \in (0, x_0) \\ f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{f''(c_2)}{2}(1 - x_0)^2 & c_2 \in (x_0, 1) \end{cases}$$

לפי הנתון $f(0) = f(1)$. נחסר בין המשוואות ונקבל:

$$0 = f(0) - f(1) = f'(x_0)(-x_0 - 1 + x_0) + \frac{1}{2}f''(c_1) \cdot x_0^2 - \frac{1}{2}f''(c_2) \cdot (1 - x_0)^2$$

ומכאן

$$f'(x_0) = \frac{1}{2}f''(c_1) \cdot x_0^2 - \frac{1}{2}f''(c_2) \cdot (1 - x_0)^2$$

ולפי אי-שוויון המשולש:

$$|f'(x_0)| \leq \frac{1}{2}|f''(c_1)| \cdot x_0^2 + \frac{1}{2}|f''(c_2)| \cdot (1 - x_0)^2 \underset{\text{לפי הנתון}}{\leq} \frac{1}{2}A \cdot x_0^2 + \frac{1}{2}A \cdot (1 - x_0)^2 = \frac{A}{2}(x_0^2 + (1 - x_0)^2) \underset{*}{\leq} \frac{A}{2}$$

* מאחר ו $0 \leq x_0, (1 - x_0) \leq 1$, נקבל $x_0^2 + (1 - x_0)^2 \leq x_0 + (1 - x_0) = 1$

מכאן נסיק כי לכל $x \in [0,1]$ מתקיים $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$ ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 5

לפי הנתונים, יש נקודה פנימית $x_m \in (a, b)$ כך ש $f(x_m) = m = \min f([a, b])$.
כלומר - x_m נקודת קיצון מקומית, ולכן לפי אינפי 1 מתקיים $f'(x_m) = 0$.
נרשום פיתוח טיילור של $f(x)$ מסדר 1 סביב הנקודה x_m עם השארית בצורת לגראנז':

$$f(x) = f(x_m) + f'(x_m)(x - x_m) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_m)^2 = m + \frac{f''(c)}{2}(x - x_m)^2 \quad c \text{ בין } x_m \text{ ו} x$$

לפי הנתון, יש $x_M \in [a, b]$ כך ש $f(x_M) = M$. נציב בפיתוח ונקבל כי קיים c בין x_m, x_M כך ש:

$$M = f(x_M) = m + \frac{f''(c)}{2}(x_M - x_m)^2$$

נקבל $0 \leq M - m = \frac{f''(c)}{2}(x_M - x_m)^2$.
נשים לב כי $|x_M - x_m|$, המרחק בין שני איברים בקטע $[a, b]$, בוודאות קטן או שווה לאורך הקטע $|b - a|$.
אי לכך, $(x_M - x_m)^2 \leq (b - a)^2$, ומכאן נסיק $0 \leq M - m \leq \frac{f''(c)}{2}(b - a)^2$
נכפול את אי-השוויון ב-2 ונחלק ב $(b - a)^2 \neq 0$ (ידוע כי $x_m \in (a, b)$ ולכן $|b - a| \neq 0$), ונקבל:

$$f''(c) \geq \frac{2(M - m)}{(b - a)^2} \geq 0$$

ובאופן ישיר $|f''(c)| \geq \frac{2(M-m)}{(b-a)^2}$.