מטלת מנחה 12 - לוגיקה למדמ"ח 20466

שאלה 1

סעיף א

נוכיח באינדוקציה על מבני הפסוקים כי α^* ו $\neg\alpha$ שקולים לוגית:

1. אם α הוא פסוק אלמנטרי, הרי שלפי ההגדרה $\alpha^* := \neg\alpha$, ובפרט הפסוקים שקולים.
2. יהא α פסוק המקיים את התנאי $\alpha^* \equiv \neg\alpha$ ונוכיח כי גם $\neg\alpha$ מקיים גם הוא תנאי זה.
   על פי ההגדרה, הפעלת $()^*$ על $\neg\alpha$ היא שלילתה של הפעלת $()^*$ על α, שכן כל קשר $\wedge, \vee$ וכל פסוק אלמנטרי הנמצאים בפסוק $\neg\alpha$ נמצאים בהכרח ב α.
   אי-לכך, ועל פי זהות 1 מעמוד 117,
   $$\neg\alpha^* \equiv \neg\neg\alpha$$
3. נניח כי α, β פסוקים המקיימים את התנאי ונוכיח כי $(\alpha @ \beta)$ (כאשר $@ \in \{\vee, \wedge\}$) מקיים את התנאי גם הוא.
   - עבור $@ = \vee$:
     משיקולים דומים לסעיף 2 בהוכחה, ועל פי משפט ההצבה ושקילות 6 מעמוד 117:
     $$(\alpha \vee \beta)^* = (\alpha^* \wedge \beta^*) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \equiv \neg(\alpha \vee \beta)$$
   - ועבור $@ = \wedge$ משיקולים דומים ולפי שקילות 7:
     $$(\alpha \wedge \beta)^* = (\alpha^* \vee \beta^*) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \neg(\alpha \wedge \beta)$$

סעיף ב

יהיו α, β פסוקים ונניח כי $\alpha \equiv \beta$.

מהשקילות $\alpha^* \equiv \neg\alpha$ נובעת השקילות (על פי 2 מעמוד 117) $\neg\alpha^* \equiv \alpha$,

ובאופן דומה $\neg\beta^* \equiv \beta$, ומטרנזיטיביות יחס השקילות נובע כי $\neg\alpha^* \equiv \neg\beta^*$.
שוב, משקילויות 2 ו-1 נובע כי:

$$\alpha^* \equiv \neg\neg\beta^* \equiv \beta^*$$

שאלה 2

סעיף א

הטענה שגויה.
דוגמה נגדית: ניקח $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$ ונראה כי לכל $\Gamma \subset \Sigma$ קיים מודל M המספק את Γ ואינו מספק את Σ.

1. עבור $\Gamma = \{\alpha\}$ ניקח $M = \{\alpha, \neg\beta\}$, אכן M מספק את Γ אבל $M(\alpha \land \beta) = F$ כי $M(\beta) = F$.
2. באופן דומה עבור $\Gamma = \{\beta\}$ ניקח $M = \{\neg\alpha, \beta\}$ - ההסבר שקול לחלוטין.
3. עבור $\Gamma = \emptyset$ ניקח $M = \{\alpha, \neg\beta\}$. המודל מספק את Γ (מספק את פסוקיה באופן ריק) אך אינו מספק את Σ (הסבר שקול לצעד 1).

סעיף ב

הטענה נכונה
כיוון ראשון: נניח כי $\Sigma \nRightarrow \alpha$ ונראה כי קיים מודל לקבוצת הפסוקים $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$.
אכן, מההנחה $\Sigma \nRightarrow \alpha$ נובע כי קיים מודל M המספק את Σ ואינו מספק את α.
נבחר מודל M זה - אכן $M(\neg\alpha) = T$ וכן M מספק את Σ, לכן מספק את איחוד הקבוצות.

כיוון שני: נניח כי קיים מודל לקבוצת הפסוקים $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ונוכיח כי $\Sigma \nRightarrow \alpha$.
אם קיים מודל M לקבוצת הפסוקים, אז בפרט מודל זה מספק את Σ ומקיים $M(\neg\alpha) = T$, כלומר $M(\alpha) = F$, ולכן מתקיים $\Sigma \nRightarrow \alpha$.