מטלת מנחה 14 - לוגיקה למדמ"ח 20466

שאלה 1

א. הטענה נכונה.
יהא M מודל, s השמה ו ϕ נוסחה, ונניח כי $\forall x$ϕ מסופק ע"י M, כלומר לכל משתנה x בתחום המודל, הנוסחה נכונה תחת ההשמה s.
בפרט, יהא x_0 הערך המותאם ל x בהשמה s, אז הנוסחה ϕ נכונה ע"פ הנחתנו, ולכן מתקיים $M\vDash_s$ϕ.

ב. הטענה נכונה.
יהא M מודל, s השמה ו ϕ נוסחה, ונניח כי ϕ נכונה ב M תחת ההנחה s. בפרט, קיים ערך כלשהו שניתן להציב ב x, נניח הערך הניתן לו תחת ההשמה s, כך ש ϕ נכון, ולכן הפסוק $\exists x$ϕ נכון במודל M תחת ההשמה s.

ג. הטענה נכונה.
כיוון ראשון: נניח כי $\forall x$ϕ מסופק ע"י המודל, קרי לכל השמה s ולכל ערך של x בתחום המודל, הנוסחה ϕ נכונה. בפרט, לכל השמה s הנוסחה ϕ אמיתית במודל, ומתקיים $M\vDash$ϕ.
כיוון שני: נניח כי עבור כל השמה s, הנוסחה ϕ אמיתית במודל. בפרט הנוסחה נכונה עבור כל ערך של המשתנה x, ומכאן $\forall x$ϕ אמיתית במודל.

ד. הטענה לא נכונה.
רעיון הדוגמה הנגדית: בניגוד לפסוקים, ישנן נוסחאות הנכונות עבור השמות מסוימות ואינן נכונות עבור השמות אחרות.
דוגמה נגדית: יהא M מודל שתחומו המספרים הטבעיים ועם היחס $R(x, y)$ שפירושו $x < y$.
נתבונן בנוסחה $\phi = R(x, 32)$.
אכן מתקיים $M\nvDash$ϕ, שכן קיימת השמה, למשל $x \leftarrow 43$, עבורה הנוסחה לא אמיתית בM.
אולם גם שלילת הנוסחה, קרי $\neg(x < 32)$, לא אמיתית ב M, כ היא אינה אמיתית למשל עבור ההשמה $x \leftarrow 8$.

ה. הטענה לא נכונה.
רעיון הדוגמה הנגדית: על פי ההנחה, קיים מודל בו ϕ לא נכונה. נמצא מודל אחר בו ϕ¬ שקרית.
דוגמה נגדית: יהא M המודל לעיל, וכן ϕ הנוסחה לעיל, והראינו כי ϕ שקרית במודל, בפרט ϕ לא טאוטולוגיה, קרי ϕ⊭.
מצאנו כי מודל זה אינו מספק גם את ϕ¬, קרי גם ϕ¬ אינה טאוטולוגיה.

שאלה 2

א. הפסוק אמיתי לוגית. נראה כי $\exists yP(y)$ יכיח מתוך $\{\forall xP(x)\}$, ונשתמש בכלל הדדוקציה.
סדרת ההוכחה:

1. $\forall xP(x)$ הנחה.
2. $(\forall xP(x) \rightarrow P(t))$ אקסיומת ההצבה הכללית
3. $P(t)$ ניתוק 1,2
4. $\exists yP(y)$ כלל ההכללה הישיר

כעת, לפי כלל הדדוקציה, נקבל $\vdash \forall xP(x) \rightarrow \exists yP(y)$.

ב. הפסוק אמיתי לוגית. נראה כי $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ יכיח מתוך $\{\exists xP(x),\ \exists xQ(x)\}$, ונשתמש בכלל הדדוקציה פעמיים. סדרת ההוכחה:

1. $\exists xQ(x)$ הנחה.
2. $(\exists xQ(x) \rightarrow Q(c))$ אקסיומת ההצבה הישירה
3. $Q(c)$ ניתוק 1, 2
4. $(Q(c) \rightarrow (P(c) \rightarrow Q(c)))$ אקסיומת הילברט הראשונה
5. $(P(c) \rightarrow Q(c))$ ניתוק 3,4
6. $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ כלל ההכללה הישיר

כעת, לפי כלל הדדוקציה פעמיים, נקבל את התוצאה הנדרשת.

ג. הפסוק אמיתי לוגית. נראה כי $\forall yP(y)$ יכיח מתוך $\{\forall xP(x)\}$ ונשתמש בכלל הדדוקציה. סדרת ההוכחה:

1. $\forall xP(x)$ הנחה
2. $(\forall xP(x) \rightarrow P(t))$ אקסיומת ההצבה הכללית
3. $P(t)$ ניתוק 1,2
4. $\forall yP(y)$ כלל ההכללה הכללי

ד. הפסוק לא אמיתי לוגית.
דוגמה נגדית: יהא M מודל שתחומו המספרים הממשיים החיוביים, והיחס $R(x,y)$ פירושו $x < y$.
החלק השמאלי של הפסוק אמיתי לוגית. לכל משתנה y, עקב תכונת הצפיפות של המספרים הממשיים, קיים x המקיים $x \in (0,y)$.
באותו האופן, חלקו הימני של הפסוק שקרי, כי שלילתו, $\forall x\exists y\neg R(x,y)$ אמיתית לוגית. לכל משתנה x, ניתן למשל לקחת $y = x$, ועקב תכונת האנטי-רפלקסיביות של היחס R, מתקיים $\neg R(x,x)$.

ה. הפסוק לא אמיתי לוגית.
דוגמה נגדית: יהא M מודל שתחומו הוא המספרים הטבעיים, והיחס $R(x,y)$ פירושו $x < y$.
יהא A הפסוק $A(x) = R(x,3)$, ויהא B הפסוק $B(x) = R(8,x)$.
שני הפסוקים $\exists xA(x),\ \exists xB(x)$ אמיתיים במודל: למשל, A אמיתי עבור ההצבה $x \leftarrow 2$, ואילו B אמיתי עבור ההצבה $x \leftarrow 9$. לכן, תוצאת ה and של שני הפסוקים היא אמיתית גם היא.
אולם החלק הימני של הפסוק אינו אמיתי לוגית, כי שלילתו $\forall x(\neg A(x) \vee \neg B(x))$ אמיתית לוגית.
לכל ערך של x, אם לא מתקיים החלק השמאלי של נוסחת ה or, כלומר מתקיים $A(x)$ שמשמעותו $R(x,3)$, אז בוודאי מטרנזיטיביות מתקיים $R(x,8)$, ומאנטי-סימטריות היחס מתקיים $\neg R(8,x)$, קרי $\neg B(x)$.
קיבלנו שלכל ערך של x מתקיים $(\neg A(x) \vee \neg B(x))$, ומכאן הפסוק הניתן בשאלה אינו אמיתי לוגית.