מטלת מנחה 11 - אינפי 2

שאלה 1

א. נרצה להוכיח:

$$\int_0^{10} \frac{x}{x^3+16}dx \le \frac{5}{6}$$

נסמן בf את פונקציית האינטגרד.

טענה: f מקבלת מקסימום ב$[0, 10]$ בנקודה $x = 2$

הוכחה: f היא פונקציית פולינום והמכנה שלה $x^3 + 16$ לא מתאפס ב$[0, 10]$. לכן, לפי אינפי 1, הפונקציה רציפה וגזירה בכל התחום $[0, 10]$.
לכל $x \in [0, 10]$, נקבל:

$$f'(x) = [\frac{x}{x^3+16}]' = \frac{[x]'(x^3+16)-x[x^3+16]'}{(x^3+16)^2} = \frac{1\cdot(x^3+16)-x\cdot 3x^2}{(x^3+16)^2} = \frac{16-2x^3}{(x^3+16)^2}$$

כעת, נחלק לתחומים:

בתחום $[0, 2)$: לכל x בתחום נקבל $x < 2 \Leftarrow x^3 < 8 \Leftarrow -2x^3 > -16 \Leftarrow 16 - 2x^3 > 0$.
ברור כי המכנה $(x^3 + 16)^2$ חיובי כמכפלת מספר חיובי בעצמו,
ולכן המנה $f'(x) = \frac{16-2x^3}{(x^3+16)^2}$ חיובית.
מכאן, לפי אינפי 1, f עולה ב $[0, 2]$, ובפרט לכל $x \in [0, 2)$ נקבל $f(x) < f(2)$.

באופן דומה, בתחום $(2, 10]$ נקבל $x > 2 \Leftarrow x^3 > 8 \Leftarrow -2x^3 < -16 \Leftarrow 16 - 2x^3 < 0$.
שוב, מכנה הנזגרת חיובי, ולכן $f'(x) = \frac{16-2x^3}{(x^3+16)^2} < 0 \Leftarrow f$ יורדת ב $[2, 10]$,
ובפרט לכל $x \in (2, 10]$ נקבל $f(x) < f(2)$.

כעת, נשתמש באי השוויון משאלה 51 שביחידה 1. ערך המקסימום ב$[0, 10]$:

$$M = f(2) = \frac{2}{2^3+16} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

ולפי אי-שוויון זה:

$$\int_0^{10} f(x)dx \le \frac{1}{12}(10 - 0) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

וסיימנו.

ב. נרצה להוכיח:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^2}dx \le \frac{2}{\pi}$$

נשים לב כי לכל x ממשי מתקיים $\sin x \le 1$, ובפרט בקטע $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. כמו כן, $x^2 > 0$ בקטע (הביטוי אינו מתאפס), ולכן $\frac{\sin x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ בקטע. נשים לב: $-\frac{1}{x}$ קדומה של $\frac{1}{x^2}$ כי $[-\frac{1}{x}]' = -(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}$, והפונקציה $\frac{1}{x^2}$ זו רציפה בקטע כפונקציה רציונלית ולכן אינטגרבילית לפי 1.18.

לכן, לפי משפט 1.26 והנוסחה היסודית של החשבון האינפינטסימלי (1.13):

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^2}dx \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{x^2} = (-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}) - (-\frac{1}{\frac{\pi}{4}}) = -\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

ג. נרצה להוכיח:

$$\frac{1}{201} < \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx < \frac{1}{100}$$

לכל $x \in [0, 100]$, מתקיים $0 \le x \le 100 \Leftarrow 0 < 100 \le x + 100 \le 200$,

ולכן $\frac{e^{-x}}{200} \le \frac{e^{-x}}{x+100} \le \frac{e^{-x}}{100}$. נפעיל פעמיים את משפט 1.26: ברור כי כל הפונקציות רציפות בקטע ולכן אינטגרביליות, ומכאן נסיק, לפי הלינאריות של האינטגרל המסוים,

$$\frac{1}{200}\int_0^{100} e^{-x}dx = \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{200}dx \le \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx \le \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{100}dx = \frac{1}{100}\int_0^{100} e^{-x}dx$$

טענה: $\frac{200}{201} < \int_0^{100} e^{-x}dx < 1$

הוכחה: נשים לב כי $-e^{-x}$ קדומה של e^{-x}, כי $[e^{-x}]' = -e^{-x}$.

לכן, לפי הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסימלי (1.13),

$$\int_0^{100} e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^{100} = -e^{-100} - (-e^0) = 1 - e^{-100} = 1 - \frac{1}{e^{100}}$$

כמו כן, ברור כי $\frac{1}{e^{100}} > 0$ כמנה של מספרים חיוביים, לכן $\int_0^{100} e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e^{100}} < 1$, וכן:

$$0 < 201 < 256 = 2^8 < e^8 < e^{100} \Rightarrow \frac{1}{201} > \frac{1}{e^{100}} \Rightarrow$$

$$\int_0^{100} e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e^{100}} > 1 - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$$

כעת, נקבל $\frac{1}{201} = \frac{1}{200} \cdot \frac{200}{201} < \frac{1}{200}\int_0^{100} e^{-x}dx \le \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx$,

וכן $\frac{1}{100} = \frac{1}{100} \cdot 1 > \frac{1}{100}\int_0^{100} e^{-x}dx \ge \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx$ וסיימנו.

שאלה 2

יהיו f, g, h פונקציות החסומות ב $[a, b]$, כך שלכל $x \in [a, b]$ מתקיים $f(x) \le g(x) \le h(x)$.

נניח כי f, h אינטגרביליות ב$[a, b]$ וכי $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx$,

ונרצה להוכיח כי גם g אינטגרבילית ב$[a, b]$.

טענת עזר: יהיו A, B שתי קבוצות חסומות לא ריקות של מספרים ממשיים,
כך שלכל $a \in A$ קיים $b \in B$, והפוך, כך ש $a \le b$. אז מתקיים $\sup A \le \sup B$.

הוכחה: ראשית, לפי אינפי 1, ברור כי העובדה ששתי הקבוצות חסומות גוררת קיום סופרימום.
נניח בשלילה כי $\sup B < \sup A$.
אז לפי אפיון הסופרימום (טענה 3.9 באינפי 1), עבור $\epsilon = \sup A - \sup B > 0$, יש $a_0 \in A$ כך ש $a_0 > \sup A - \epsilon = \sup A - (\sup A - \sup B) = \sup B$.
לפי הנתון, קיים $b_0 \in B$: $b_0 \ge a_0$, אבל לפי הגדרת הסופרימום $b_0 \le \sup B < a_0$, וזו סתירה! לפי אקסיומת הסדר, לא ייתכן $b_0 \ge a_0$, $b_0 < a_0$ בעת ובעונה אחת.

ניתן להוכיח טענה דומה עבור $\inf A, \inf B$, זאת מאחר שלפי הנתון לכל $b \in B$ יש $a \in A$: $a \le b$.

טענת עזר: יהיו j, k שתי פונקציות החסומות בקטע כלשהו $[p, q]$, כך שלכל $x \in [p, q]$ מתקיים $j(x) \le k(x)$. אז מתקיים $\overline{\int_p^q} j(x)dx \le \overline{\int_p^q} k(x)dx$.

הוכחה: לשם ההוכחה, נסמן ב$\boldsymbol{\mathcal{P}}$ את קבוצת החלוקות האפשריות של $[p, q]$. כמו כן, נסמן את הסכום העליון של חלוקה כלשהי עבור j ב $S_j(P)$ ועבור k ב$S_k(P)$.
נוכיח כי לכל חלוקה $P = \{x_0, x_1, ... x_n\}$ של $[p, q]$, הסכום העליון של P עבור j קטן מהסכום העליון של P עבור k.

תהא חלוקה P כזו.
לכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ בחלוקה, לכל $x \in [x_{i-1}, x_i]$ מתקיים $j(x) \le k(x)$, ומכאן נסיק, לפי הטענה הקודמת, כי $\sup j([x_{i-1}, x_i]) \le \sup k([x_{i-1}, x_i])$. כמו כן, אורך הקטע Δx_i זהה, ולכן נקבל $\sup j([x_{i-1}, x_i]) \cdot \Delta x_i \le \sup k([x_{i-1}, x_i]) \cdot \Delta x_i$.
אי לכך, מאחר ואי-שוויון זה מתקיים <u>לכל</u> קטע, אז

$$S_j(P) = \sum_{i=1}^{n} \sup j([x_{i-1}, x_i]) \cdot \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \sup k([x_{i-1}, x_i]) \cdot \Delta x_i = S_k(P)$$

כעת, נתבונן בקבוצות $\{S_k(P): P \in \boldsymbol{\mathcal{P}}\}$, $\{S_j(P): P \in \boldsymbol{\mathcal{P}}\}$. קבוצות אלו מקיימות את התנאי בטענה הקודמת, כי לכל חלוקה $P \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ הוכחנו $S_j(P) \le S_k(P)$. לכן,

$$\overline{\int_p^q} j(x)dx = \inf\{S_j(P): P \in \boldsymbol{\mathcal{P}}\} \le \inf\{S_k(P): P \in \boldsymbol{\mathcal{P}}\} = \overline{\int_p^q} k(x)dx$$

כמו כן, ניתן להוכיח טענה דומה עבור האינטגרל התחתון.

כעת,

$$\overline{\int_a^b} g(x)dx \le_{(1)} \overline{\int_a^b} h(x)dx \;=_{(2)} \int_a^b h(x)dx \;=_{(3)} \int_a^b f(x)dx =_{(4)} \underline{\int_a^b} f(x) \le_{(5)} \underline{\int_a^b} g(x)$$

כאשר:

(1) לפי טענת העזר עבור g, h, מאחר ולפי הנתון לכל $x \in [a,b]$ נקבל $g(x) \le h(x)$

(2) לפי הגדרת דארבו לאינטגרביליות h.

(3) לפי הנתון

(4) לפי הגדרת דארבו לאינטגרביליות f.

(5) לפי טענה שקולה לטענת העזר עבור f, g מאחר ולפי הנתון לכל $x \in [a,b]$: $f(x) \le g(x)$

כמו כן, לפי שאלה 14 ביחידה 1, $\overline{\int_a^b} g(x)dx \le \underline{\int_a^b} g(x)$.

לכן, נקבל $\overline{\int_a^b} g(x)dx = \underline{\int_a^b} g(x)$ ולפי הגדרת דארבו g אינטגרבילית ב $[a,b]$.

שאלה 3

תהא f פונקציה בקטע $[0,3]$ כך שלכל $x \in [0,3]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & 0 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{x} & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

ראשית, נוכיח את טענת העזר הבאה:

טענה: לf יש אי-רציפות מהמין הראשון ב$x = 1$.

הוכחה: נחשב את הגבול מימין ואת הגבול משמאל.

$$\lim_{x\to1^+} f(x) =_{(1)} \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x^2+1} =_{(2)} \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) =_{(3)} \lim_{x\to1^-} -\frac{1}{x} =_{(4)} -\frac{1}{1} = -1$$

כאשר:

(1) בסביבה הימנית $(1,3)$ מתקיים $1 < x \le 3 \Leftarrow f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

(2) לפי רציפות (בפרט חד-צדדית) הפונק' הרציונלית $\frac{1}{x^2+1}$ בנקודה $x = 1$ בה המכנה אינו מתאפס.

(3) בסביבה השמאלית $(0,1)$ מתקיים $0 \le x \le 1 \Leftarrow f(x) = -\frac{1}{x}$.

(4) לפי רציפות (בפרט חד-צדדית) של הפונק' הרציונלית $-\frac{1}{x}$ בנקודה $x = 1$ בה המכנה אינו מתאפס.

נוכיח כי f חסומה ומונוטונית למקוטעין.

טענה: f חסומה ויורדת בקטע $[0,1]$.

הוכחה: בקטע $[0,1]$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ רציפה וגזירה כפונקציה רציונלית שהמכנה שלה אינו מתאפס.

לכן, לפי ויירשטראס, f חסומה ב $[0,1]$.

נוסף על כך, לכל $x \in (0,1]$, נקבל:

$$f'(x) = [\frac{1}{x^2+1}]' = \frac{0\cdot(x^2+1)-1\cdot2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

מאחר ו$x > 0$, נקבל $-2x < 0$, וברור כי מכנה הנגזרת חיובי (בקטע $[0,1)$ אינו מתאפס).

לכן נקבל $f'(x) < 0$ בקטע $(0,1]$, ומכאן לפי אינפי 1 f יורדת בקטע $[0,1]$.

טענה: f חסומה ועולה בקטע $(1,3]$

הוכחה: ראשית, נוכיח כי f עולה בקטע.

f גזירה בקטע כפונקציה רציונלית שהמכנה בה אינו מתאפס בקטע.

לכל $x \in (1,3]$, נקבל:

$$f'(x) = [-\frac{1}{x}]' = -[\frac{1}{x}]' = -(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}$$

ברור כי $x \ne 0$ בקטע, ולכן $x^2 > 0 \Leftarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ חיובית כמנת מספרים חיוביים,

ולפי אינפי 1 נסיק כי f עולה בקטע $(1,3]$.

מכאן ש$f(3)$ מהווה חסם מלעיל עבור f בקטע: לכל $x \in (1,3]$ נקבל $f(x) \le f(3)$.

כמו כן, המספר (-1) מהווה חסם מלרע עבור f בקטע, כי לכל $x \in (1,3]$ מתקיים

$0 < 1 < x \Leftarrow \frac{1}{x} < 1 \Leftarrow -\frac{1}{x} > -1$.

קל להראות כי f חסומה בכלל הקטע $[0, 3]$ (נבחר את המקסימום מבין חסמי המלעיל, ואת המינימום מבין חסמי המלרע), והראינו כי f מונוטונית למקוטעין.
מתקיימים תנאי משפט 1.17, ולכן f אינטגרבילית בקטע.

נמצא נוסחה מפורשת עבור $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ **בקטע** $[0, 3]$**:**

נפצל לקטעים.
בקטע $[0, 1]$, לכל x נקבל $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. נשים לב כי $\arctan\ x$ קדומה של $f(x)$ בקטע, כי לכל $x \in [0, 1]$ מתקיים $[\arctan\ x]' = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$. לכן, לפי הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטיסימלי (1.13):

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \arctan\ t\Big|_0^x = \arctan\ x - \arctan\ 0 = \arctan\ x$$

בקטע $(1, 3]$: נרצה "לעבוד" עם קטע סגור. ניעזר בלמה 1.25, ונגדיר בקטע $[1, 3]$ את הפונקציה $g(x) = -\frac{1}{x}$. נשים לב כי לכל $x \in (1, 3]$ נקבל $g(x) = -\frac{1}{x} = f(x)$, כלומר g מתקבלת מ-f בקטע על ידי שינוי ערך בנקודה יחידה - $x = 1$, כלומר מספר סופי של נקודות.
מכאן נסיק $\int_1^x -\frac{1}{t}dt = \int_1^x g(t)dt = \int_1^x f(t)dt$ לכל $x \in [1, 3]$ ובפרט לכל $x \in (1, 3]$.

הפונקציה $-\ln t$ היא קדומה של $-\frac{1}{t}$ בקטע $[1, 3]$, כי לכל $t \in [1, 3]$ נקבל $[-\ln t]' = -\frac{1}{t}$. לכן, לפי הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטיסימלי, לכל $x \in [1, 3]$ נקבל

$$\int_1^x -\frac{1}{t}dt = (-\ln t)\Big|_1^x = -\ln x - (-\ln 1) = -\ln x - 0 = -\ln x$$

כעת, לפי תכונת האדיטיביות (1.23), לכל $x \in (1, 3]$ נקבל:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = \arctan\ 1 + \int_1^x -\frac{1}{t}dt = \frac{\pi}{4} - \ln x$$

ונסכם:

$$F(x) = \begin{cases} \arctan x & 0 \le x \le 1 \\ \frac{\pi}{4} - \ln x & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

טענה: F לא קדומה של f.
הוכחה: נניח בשלילה כי F קדומה של f. אז מתקיים $F'(x) = f(x)$.
לפי אינפי 1, כל נקודות אי-הרציפות של $F'(x) = f(x)$ הן מהמין השני, אבל הוכחנו כי לf יש אי-רציפות מהמין הראשון ב $[0, 3]$ וזו סתירה!

שאלה 4

עלינו להוכיח כי קיים $c \in [0,1]$ כך ש $\int_0^c \sin(x^2)dx = \int_0^1 \sin(x^3)dx$.

נגדיר בקטע $[0,1]$ את הפונקציה $F(x) = \int_0^t \sin(x^2)dx$. הפונקציה $\sin(x^2)$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות - פולינום וסינוס, ולכן אינטגרבילית. לפי 1.32 נקבל כי F רציפה.

ידוע לנו כי פונקציית הסינוס עולה ואי-שלילית בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$, בפרט בתת-הקטע $[0,1]$.

נשים לב גם ללמה החשובה הבאה:

למה: לכל $x \in [0,1]$, $x^2, x^3 \in [0,1]$.

הוכחה: יהא $x \in [0,1]$. נקבל $0 \cdot 0 \le x \cdot x \le 1 \cdot 1$, כלומר $x^2 \in [0,1]$.

באופן דומה, $0 \cdot 0 \cdot 0 \le x \cdot x \cdot x \le 1 \cdot 1 \cdot 1$, כלומר $x^3 \in [0,1]$.

מכאן ניתן להסיק שתי טענות חשובות:

טענה: $F(0) \le \int_0^1 \sin(x^3)dx$.

הוכחה: לכל $x \in [0,1]$ לפי הלמה $x^3 \in [0,1]$.

פונקציית הסינוס אי-שלילית ב$[0,1]$, ולכן עבור x^3 נקבל $\sin(x^3) \ge 0$.

כמו כן, $\sin(0^3) = \sin 0 = 0$, ולכן 0 הוא ערך מינימום של $\sin(x^3)$ בקטע.

מכאן לפי שאלה 51 ביחידה 1, $\int_0^1 \sin(x^3) \ge 0(1 - 0) = 0$.

כמו כן, לפי הגדרה 1.22, $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$.

וסך הכל $F(0) \le \int_0^1 \sin(x^3)$ וסיימנו.

טענה: $F(1) \ge \int_0^1 \sin(x^3)dx$

הוכחה: לכל $x \in [0,1]$, לפי הלמה $x^2, x^3 \in [0,1]$.

אי לכך, $0 \le x \le 1, x^2 \ge 0 \Leftarrow x^3 = x \cdot x^2 \le 1 \cdot x^2 = x^2$.

פונקציית הסינוס עולה בקטע זה, ולכן עבור $x^3 \le x^2$ נקבל $\sin(x^3) \le \sin(x^2)$.

כעת, לפי משפט 1.26, $\int_0^1 \sin(x^3)dx \le \int_0^1 \sin(x^2)dx = F(1)$ וסיימנו.

קיבלנו כי F רציפה ב $[0,1]$ ו $F(0) \le \int_0^1 \sin(x^3)dx \le F(1)$. לכן, לפי משפט ערך הביניים של קושי באינפי 1, נסיק כי קיים $c \in [0,1]$ כך ש $\int_0^1 \sin(x^3)dx = \int_0^c \sin(x^2)dx = F(c)$ וסיימנו.

שאלה 5

עלינו לחשב את הגבול $\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x^2}\int_0^x t^{1+t}dt)$.

נסמן $f(x) = x^{1+x}$, וכן $F(x) = \int_0^x t^{1+t}dt = \int_0^x f(t)dt$.

נשים לב כי מתקיים $\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x^2} = \lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt)$.

טענה: $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$

הוכחה: בסביבה ימנית של 0 נקבל $f(x) = x^{1+x} = e^{\ln x\cdot(1+x)}$.
לפי אריתמטיקה של גבולות, רציפות והגבול הידוע $\lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty$,
גבול מעריך החזקה יהיה $\lim_{x\to0^+}\ln x\cdot(1+x) = "-\infty\cdot(1+0)" = -\infty$.
כעת, לפי הכללת גבול של הרכבה עבור פונקציה רציפה (משפט 5.14 מאינפי 1)
והגבול הידוע $\lim_{t\to-\infty}e^t = 0$, נקבל:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\ln x\cdot(1+x)} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

טענה: F קדומה של f בקטע $[0,1]$.

הוכחה: בסביבה הימנית של $(0,2)$ של 0, $f(x) = x^{1+x} = e^{\ln x\cdot(1+x)}$ רציפה כמכפלה והרכבה של הפונקציות הרציפות $\ln$ בסביבה ימנית של 0, פולינום, ופונקציה מעריכית.
בפרט f רציפה ב$(0,1]$
מהטענה הקודמת נסיק $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 = 0^1 = f(0)$ ולכן קf רציפה מימין ב-0.
נקבל כי f רציפה ב $[0,1]$, ולכן אינטגרבילית לפי משפט 1.18, ולפי '1.33, נסיק כי F קדומה של f.

טענה: $\lim_{x\to0^+} F(x) = 0$

הוכחה: ראינו כי F קדומה של f. F מוגדרת כאינטגרל בלתי מסוים של f ולכן לפי משפט 1.32 רציפה ב $[0,1]$. לכן, לפי רציפות חד-צדדית והגדרה 1.22:

$$\lim_{x\to0^+} F(x) = F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$$

הוכחנו כי מתקיימים תנאי כלל לופיטל במונה $\frac{F(x)}{x^2}$. ברור כי מכנה הגבול גזיר בסביבה ימנית של 0 ושואף לאפס (פונקציית פולינום). נקבל, לפי כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt) = \lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{2x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^{1+x}}{2x} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}\cdot x^x$$

טענה: $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

הוכחה: בסביבה ימנית של 0 בסיס החזקה חיובי ונקבל $x^x = e^{x\ln x}$.
את גבול המעריך ניתן לחשב לפי כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

ולכן $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim_{t\to 0} e^t = e^0 = 1$.

קיבלנו $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\cdot x^x = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$.

שאלה 6

א. טענה: תהא f רציפה ב$[a, b]$. נרצה להוכיח $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n}) = \int_a^b f(x)dx$

הוכחה: נוכיח לפי הגדרת הגבול. יהא $\epsilon > 0$.

f רציפה בקטע ולכן אינטגרבילית לפי 1.18. מכאן, לפי הגדרת רימן, עבור ϵ יש $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P של הקטע $[a, b]$ המקיימת $\lambda(P) < \delta$, נקבל שכל סכום רימן שלה σ יקיים

$$|\sigma - \int_a^b f(x)dx| < \epsilon$$

נתבונן בביטוי $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n}) = \sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n}) \cdot \frac{b-a}{n}$. זהו <u>סכום רימן</u> של f השייך לחלוקה הרגולגית של הקטע $[a, b]$ לn חלקים שווים, כאשר לכל k מתקיים $\xi_k = x_k$.

אורך כל קטע Δx_k הוא, בהתאם, $\frac{b-a}{n}$, ולכן פרמטר החלוקה הוא $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$.

נבחר $N = \lfloor\frac{b-a}{\delta}\rfloor + 1 > 0$ המקיים $N > \frac{b-a}{\delta} \Leftarrow \frac{b-a}{N} < \delta$. לכל $n > N$, ניקח את החלוקה הרגולרית של הקטע $[a, b]$. פרמטר החלוקה מקיים $\lambda(P) = \frac{b-a}{n} < \frac{b-a}{N} < \delta$, ולכן לפי הגדרת רימן כל סכום רימן של חלוקה זאת, ובפרט הסכום $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$, יקיים:

$$|\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n}) - \int_a^b f(x)dx| < \epsilon$$

וסיימנו.

ב. הביטוי $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ הוא סכום רימן של f השייך לחלוקה הרגולרית של הקטע $[0, 1]$ לn חלקים שווים - מקרה פרטי של $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n})$ עבור $a = 0, b = 1$.

נניח כי f רציפה ב $[0, 1]$. לפי סעיף א', נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$$

ג. תהא $a_n = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\cdots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}$.

נחשב:

$$a_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\cdots+\sqrt{2n}}{n^{1/2}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\sqrt{n+k}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$$

נתבונן בסדרה $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)$. לפי סעיף ב', כאשר $f(x) = \sqrt{1+x}$, נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1\sqrt{1+x}dx = \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} - \frac{2}{3}$$

כעת, לפי אריתמטיקה:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}} - \frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} - \frac{2}{3}\right) - 0\cdot\sqrt{1+0} = \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2} - \frac{2}{3}$$

כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ וסיימנו.

ד. תהא $b_n = \frac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+2}}} + \frac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+4}}} + \cdots + \frac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+2n}}}$

נחשב:

$$b_n = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e^{n+2}}} + \frac{1}{\sqrt[n]{e^{n+4}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{e^{n+2n}}}\right) = \frac{2}{n}\left(e^{-\frac{n+2}{n}} + e^{-\frac{n+4}{n}} + \cdots + e^{-\frac{n+2n}{n}}\right) =$$

$$= \frac{2}{n}\left(e^{-(1+\frac{2}{n})} + e^{-(1+\frac{4}{n})} + \cdots + e^{-(1+\frac{2n}{n})}\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-(1+\frac{2k}{n})}$$

לפי סעיף א', כאשר $f(x) = e^{-x}$, $a = 1$, $b = 3$ (ולכן פרמטר החלוקה הרגולרית $\frac{2}{n}$):

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-(1+\frac{2k}{n})} = \int_1^3 e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^3 = -e^{-3} - (-e^{-1}) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^3}$$

וסיימנו.