

# מטלת מנחה 12 - קורס 20218

328197462

20/08/2023

## שאלה 1

לפנינו משוואה חסרה מטיפוס 2 עם שלושה תנאי התחלה שונים. נניח בשלילה כי קיים פתרון  $u(x)$  למשוואה, עבורו  $u(0) = 0, u'(0) = 1$ . אז מתקיים:

$$\begin{aligned}u(0)u''(0) &= 3(u'(0))^2 - 4u(0)u'(0) \\0 \cdot u''(0) &= 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 0 \cdot 1 \\0 &= 3\end{aligned}$$

וזו סתירה! אין פתרון לבעיית ההתחלה עבורה  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ .

נוכל לזהות פתרון סינגולרי מהצורה  $y = C$ , שכן אז נקבל  $y' = y = 0$  ולכן שני אגפי השוויון מתאפסים. הפתרון הסינגולרי  $y \equiv -1$  מתאים לבעיית ההתחלה בה  $y'(0) = 0$ . נניח אפוא  $y' \neq 0$  נפתור את המשוואה החסרה עבור תנאי שנותר. בהצבת  $z = y'$  מקבלים  $z = y'' \cdot \frac{1}{z} = y'' \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dy}$ . נציב במשוואה ונקבל:

$$yz \cdot \frac{dz}{dy} = 3z^2 - 4yz$$

נחלק ב  $z = y' \neq 0$  ונקבל:

$$y \frac{dz}{dy} = 3z - 4y$$

אם נגביל את עצמנו ל  $y < 0$  (בסביבה כלשהי של  $y = -1$ ) אז נחלק את המשוואה ב  $y$  ונקבל משוואה הומוגנית:

$$\frac{dz}{dy} = 3 \frac{z}{y} - 4$$

בהצבת  $z = uy$ , נקבל  $dz/dy = u + yu'$  ומכאן:

$$\begin{aligned}u + yu' &= 3u - 4 \\yu' - 2u &= -4 \\u' - \frac{2}{y}u &= -\frac{4}{y}\end{aligned}$$

נכפול בגורם האינטגרציה  $e^{-2 \ln |y|} = y^{-2}$  ונקבל:

$$y^{-2}u' - 2y^{-3} = -4y^{-3}(y^{-2}u)' = -4y^{-3}$$

ובאינטגרציה:

$$\begin{aligned}y^{-2}u &= -4 \cdot \frac{y^{-2}}{-2} + C = 2y^{-2} + C \\u &= 2 + Cy^2 \\ \frac{z}{y} &= 2 + Cy^2 \\y' = z &= 2y + Cy^3\end{aligned}$$

נציב  $y(0) = -1, y'(0) = 1$  על מנת למצוא את ערכו של הקבוע C:

$$1 = -2 - C \Rightarrow C = -3$$

$$y' = 2y - 3y^3$$

$$\frac{dy}{y(2-3y^2)} = dx$$

נבצע אינטגרציה:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y(2-3y^2)} &= \left[ dy = \frac{1}{t} dt \right] = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t}(2-3(\frac{1}{t^2}))} = \int \frac{t dt}{-t^2(2-\frac{3}{t^2})} = \\ &= \int \frac{t dt}{3-2t^2} = -\frac{1}{4} \int \frac{-4t dt}{3-2t^2} = -\frac{1}{4} \ln(3-2t^2) + C = -\frac{1}{4} \ln(3-\frac{2}{y^2}) + C \end{aligned}$$

ולכן:

$$-\frac{1}{4} \ln(3-\frac{2}{y^2}) = x + C$$

$$\ln(3-\frac{2}{y^2}) = -4x + C$$

$$3-\frac{2}{y^2} = C_1 e^{-4x}, C_1 > 0$$

נציב  $x = 0, y(0) = -1$  על מנת למצוא את ערכו של  $C_1$ :

$$3 - \frac{2}{(-1)^2} = C_1 e^0$$

$$1 = C_1$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{2}{y^2} = e^{-4x}$$

$$\frac{2}{y^2} = 3 - e^{-4x}$$

$$y^2 = \frac{2}{3 - e^{-4x}}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3 - e^{-4x}}}$$

נרצה לבחור, כמובן, את החלק השלילי של הפתרון המתאים לבעיית ההתחלה שלנו. מקבלים את הפתרון:

$$y = -\sqrt{\frac{2}{3 - e^{-4x}}}$$

## שאלה 2

נניח בשלילה כי  $y_1 = x^2 e^x$ ,  $y_2 = \sin^2 x$  הם פתרונות למשוואה לינארית הומוגנית. מכאן ש  $W(y_1, y_2; x)$  מתאפס זהותית ב  $(-a, a)$  או שאינו מתאפס באף נקודה.

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} \sin^2 x & e^x x^2 \\ 2 \sin x \cos x & e^x (x^2 + 2x) \end{vmatrix} = \sin^2 x \cdot e^x (x^2 + 2x) - 2 \sin x \cos x \cdot e^x x^2 = \\ &= e^x \sin x \cdot ((x^2 + 2x) \sin x - 2x^2 \cos x) = x e^x \sin x \cdot ((x + 2) \sin x - 2x \cos x) \end{aligned}$$

מתקיים  $W(0) = 0$ , ומכאן  $W(x) \equiv 0$  בכל הקטע  $(-a, a)$ .  
בפרט לכל  $x \in (0, \min(a, \frac{\pi}{2}))$  מתקיים:

$$x e^x \sin x ((x + 2) \sin x - 2x \cos x) = 0$$

נחלק ב  $x, e^x, \sin x > 0$  ונקבל:

$$\begin{aligned} (x + 2) \sin x - 2x \cos x &= 0 \\ (x + 2) \sin x &= 2x \cos x \\ \tan x &= \frac{2x}{x + 2} \end{aligned}$$

קיבלנו זהות  $\tan x \equiv \frac{2x}{x+2}$  בכל הקטע.  
זהות זו כמובן לא מתקיימת, שכן  $\tan x$  אינה פונקציה רציונלית, ולכן נקבל סתירה!

### שאלה 3

#### סעיף א

שוב, נניח בשלילה כי  $y_1 = \sin x, y_2 = x$  פתרונות של משוואה לינארית הומוגנית בכל הישר הממשי. אז  $W(y_1, y_2; x)$  מתאפס בכל הישר הממשי או באף נקודה בו.

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & x \\ \cos x & 1 \end{vmatrix} = \sin x - x \cos x$$

מחד:

$$W(0) = \sin 0 - 0 \cos 0 = 0$$

ומאידך:

$$W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1$$

ונקבל סתירה! לכן לא קיימת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עבורה  $x, \sin x$  פתרונות שלה בכל הישר הממשי.

#### סעיף ב

נניח בשלילה כי  $y_1 = x, y_2 = \sin x$  פתרונות למשוואה מהצורה  $y^{(3)} + ay'' + by' + cy = 0$  בכל הישר הממשי. נקבל  $0 = y_1^{(3)} = y_1'' = y_1' = 1$  ולכן מתקיים בכל הישר הממשי:

$$\begin{aligned} 0 + a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot x &\equiv 0 \\ b + cx &\equiv 0 \end{aligned}$$

בפרט בהצבת  $x = 0$  נקבל  $b = 0$  ובהצבת  $x = 1$  נקבל  $c = 0$ .  
כמו כן, מתקיים  $y_2^{(3)} = -\cos x, y_2'' = -\sin x, y_2' = \cos x$ . לכן:

$$-\cos x - a \sin x \equiv 0$$

בפרט נציב  $x = \frac{\pi}{2}$  ונקבל  $a = 0$ .  
מקבלים  $-\cos x \equiv 0$  בכל הישר הממשי, אך זה כמובן לא נכון! למשל עבור  $x = 0$  נקבל  $-1 = 0$  וזו סתירה!  
מכאן ש  $x, \sin x$  לא יכולים להיות פתרון לאותה משוואה בעלת מקדמים קבועים מסדר 3.

## שאלה 4

לפנינו משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים. נפתור את המשוואה האופיינית של המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$\lambda^2 + \lambda + b = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot b}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4b}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - b}$$

נחלק למקרים. עבור  $b > \frac{1}{4}$  המספר  $\sqrt{\frac{1}{4} - b}$  מדומה טהור.

נסמן  $i\beta = \sqrt{\frac{1}{4} - b}$ ,  $\beta \neq 0$  ופתרונות המשוואה יהיו  $y_1 = e^{-1/2x} \sin(\beta x)$ ,  $y_2 = e^{-1/2x} \cos(\beta x)$ .

עבור  $b = 1/4$  נקבל פתרון יחיד  $\lambda = -1/2$ , ופתרונות המשוואה יהיו  $y_1 = e^{-1/2x}$ ,  $y_2 = x e^{-1/2x}$ .

עבור  $b < 1/4$  נקבל שני פתרונות ממשיים  $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - b}$ , שנשמנם  $\lambda, \mu$ . פתרונות המשוואה יהיו  $y_1 = e^{\lambda x}$ ,  $y_2 = e^{\mu x}$ .

נמצא פתרון פרטי למשוואה בעזרת שיטת המקדמים. "ננחש" כי קיים פתרון מהצורה  $y = Ae^{bx}$ , ונקבל:

$$y' = Abe^{bx}$$

$$y'' = Ab^2 e^{bx}$$

$$y'' + y' + by = e^{bx}(Ab^2 + Ab + b \cdot A) = e^{bx}$$

$$Ab^2 + 2Ab = 1$$

$$A(b^2 + 2b) = 1$$

$$A = \frac{1}{b^2 + 2b}$$

מצאנו פתרון פרטי  $y_p = \frac{1}{b^2 + 2b} e^{bx}$ . פתרון זה לא מוגדר עבור  $b = 0, -2$ . נטפל במקרים אלה בנפרד.

עבור  $b = 0$ , המשוואה תהיה  $y' + y = 1$  וקל לראות ש  $y \equiv 1$  פתרון למשוואה.

עבור  $b = -2$ , המשוואה תהיה  $y + y' - 2y = e^{-2x}$ . נחפש פתרון פרטי מהצורה  $y = e^{-2x}u$ :

$$y' = -2e^{-2x}u + e^{-2x}u'$$

$$y'' = 4e^{-2x}u - 2e^{-2x}u' - 2e^{-2x}u' + e^{-2x}u'' = 4e^{-2x}u - 4e^{-2x}u' + e^{-2x}u''$$

$$y'' + y' - 2y = e^{-2x}(u'' - 4u' + 4u) + e^{-2x}(u' - 2u) - 2ue^{-2x} = e^{-2x}(u'' - 3u') = e^{-2x}$$

$$u'' - 3u' = 1$$

נחפש פתרון מהצורה  $u = kx$ , אז  $u' = k$ ,  $u'' = 0$  ונבחר  $k = -\frac{1}{3}$  ונקבל פתרון פרטי  $y_p = -\frac{1}{3}xe^{-2x}$ .

נשים לב כי  $b = \frac{1}{4}$  ולכן  $-\beta^2 = (i\beta)^2 = \frac{1}{4} - b$  ונקבל:

$$y = \begin{cases} e^{-1/2x}(C_1 \sin(\sqrt{b - \frac{1}{4}}x) + C_2 \cos(\sqrt{b - \frac{1}{4}}x)) + \frac{1}{b^2 + 2b}e^{bx} & b > \frac{1}{4} \\ e^{-1/2x}(C_1 + C_2x) + \frac{16}{9}e^{\frac{1}{4}x} & b = \frac{1}{4} \\ e^{-1/2x}(C_1 e^{\sqrt{\frac{1}{4} - b}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{4} - b}x}) + \frac{1}{b^2 + 2b}e^{bx} & 0 < b < \frac{1}{4} \\ e^{-1/2x}(C_1 e^{\sqrt{\frac{1}{4} - b}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{4} - b}x}) + 1 & b = 0 \\ e^{-1/2x}(C_1 e^{\sqrt{\frac{1}{4} - b}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{4} - b}x}) + \frac{1}{b^2 + 2b}e^{bx} & -2 < b < 0 \\ e^{-1/2x}(C_1 e^{\sqrt{\frac{1}{4} - b}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{4} - b}x}) - \frac{1}{3}xe^{-2x} & b = -2 \\ e^{-1/2x}(C_1 e^{\sqrt{\frac{1}{4} - b}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{4} - b}x}) + \frac{1}{b^2 + 2b}e^{bx} & b < -2 \end{cases}$$

## שאלה 5

לפינו משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים.  
ראשית, נמצא לפי השיטה בסעיף 2.4.1 מערכת פתרונות למשוואה ההומוגנית המתאימה.  
המשוואה האופיינית תהיה:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4} = 2 \pm i$$

ולכן מערכת מתאימה של פתרונות תהיה, על פי סעיף 2.4.1,  $y_2 = e^{2x} \cos x$  ו-  $y_1 = e^{2x} \sin x$ .

מקבלים:

$$\begin{aligned} \Delta = W(x) &= \begin{vmatrix} e^{2x} \sin x & e^{2x} \cos x \\ 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x & 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x \end{vmatrix} = \\ &= e^{4x} \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ 2 \sin x + \cos x & 2 \cos x - \sin x \end{vmatrix} = \\ &= e^{4x} ((2 \sin x \cos x - \sin^2 x) - (2 \sin x \cos x + \cos^2 x)) = \\ &= -e^{4x} (\sin^2 x + \cos^2 x) = -e^{4x} \neq 0 \end{aligned}$$

עלינו למצוא פונקציות מקדמים  $C_1(x), C_2(x)$  כך ש:

$$\begin{cases} e^{2x} \sin x C_1' + e^{2x} \cos x C_2' = 0 \\ e^{2x} (2 \sin x + \cos x) C_1' + e^{2x} (2 \cos x - \sin x) C_2' = \left(\frac{e^x}{\sin x}\right)^2 \end{cases}$$

על פי כלל קרמר, נקבל:

$$\begin{aligned} \Delta C_1' &= \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \cos x \\ e^{2x}/\sin^2 x & e^{2x}(2 \cos x - \sin x) \end{vmatrix} = -e^{4x} \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ C_1' &= \frac{\Delta C_1'}{\Delta} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ C_1 &= \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \left[ \frac{t = \sin x}{dt = \cos x dx} \right] = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

וכן:

$$\begin{aligned} \Delta C_2' &= \begin{vmatrix} e^{2x} \sin x & 0 \\ e^{2x}(2 \sin x + \cos x) & e^{2x}/\sin^2 x \end{vmatrix} = e^{4x} \frac{1}{\sin x} \\ C_2' &= \frac{\Delta C_2'}{\Delta} = -\frac{1}{\sin x} \\ C_2 &= \int \frac{-dx}{\sin x} = [240 \text{ 'חוברת אינט'}] = -\ln(\tan \frac{x}{2}) = \ln(\cot \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

ונקבל פתרון פרטי:

$$y_p = -\frac{1}{\sin x} \cdot e^{2x} \sin x + \ln(\cot \frac{x}{2}) e^{2x} \cos x = e^{2x} (\cos x \cdot \ln(\cot \frac{x}{2}) - 1)$$

ופתרון כללי:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{2x} \sin x + C_2 e^{2x} \cos x + e^{2x} (\cos x \cdot \ln(\cot \frac{x}{2}) - 1) = \\ &= e^{2x} (C_1 \sin x + (C_2 + \ln(\cot \frac{x}{2})) \cos x - 1) \end{aligned}$$

## שאלה 6

לפינו משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר שני. נעביר אותה לצורה הרצויה לפתרון משוואות:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{4x^2}y = \frac{1}{2x^2\sqrt{x}}$$

על פי הרמז שקיבלנו, "ננחש" כי קיים פתרון מהצורה  $u = x^\alpha$  למשוואה ההומוגנית המתאימה. נקבל:

$$u' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$u'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \frac{2}{x}\alpha x^{\alpha-1} + \frac{1}{4x^2}x^\alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + 2\alpha x^{\alpha-2} + \frac{1}{4}x^{\alpha-2} = 0$$

$$x^{\alpha-2}(\alpha^2 - \alpha + 2\alpha + \frac{1}{4}) = 0$$

$$x^{\alpha-2}(\alpha + \frac{1}{2})^2 = 0$$

היות והפונקציות במשוואה המקורית לא רציפות ב  $x=0$ , לא נוכל להבטיח קיום פתרון שם, ונוכל לצמצם ב  $x^{\alpha-2}$ . נקבל פתרון יחיד  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , כלומר  $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$  מהווה פתרון למשוואה ההומוגנית המתאימה.

נבצע הצבה  $z = x^{-1/2}$  כמתואר בסעיף 2.4.2, על מנת למצוא פתרון נוסף למשוואה ההומוגנית:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{2}x^{-3/2}z + x^{-1/2}z' \\ y'' &= \frac{3}{4}x^{-5/2}z - \frac{1}{2}x^{-3/2}z' - \frac{1}{2}x^{-3/2}z' + x^{-1/2}z'' = \\ &= \frac{3}{4}x^{-5/2}z - x^{-3/2}z' + x^{-1/2}z'' \end{aligned}$$

נציב במשוואה ההומוגנית המתאימה ונקבל:

$$\begin{aligned} (\frac{3}{4}x^{-5/2}z - x^{-3/2}z' + x^{-1/2}z'') + \frac{2}{x}(-\frac{1}{2}x^{-3/2}z + x^{-1/2}z') + \frac{1}{4x^2}(x^{-1/2}z) &= 0 \\ \frac{3}{4}x^{-5/2}z - x^{-3/2}z' + x^{-1/2}z'' - x^{-5/2}z + 2x^{-3/2}z' + \frac{1}{4}x^{-5/2}z &= 0 \\ x^{-1/2}z'' + (-x^{3/2} + 2x^{-3/2})z' + (\frac{3}{4}x^{-5/2} - x^{-5/2} + \frac{1}{4}x^{-5/2})z &= 0 \\ x^{-1/2}z'' + x^{-3/2}z' &= 0 \\ z'' + \frac{1}{x}z' &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה חסרה. נציב  $u = z'$  ונקבל  $u + \frac{1}{x}u = 0$ . זוהי משוואה לינארית מסדר ראשון. כפל בגורם האינטגרציה  $e^{\ln x} = x$  ייתן לנו:

$$xu' + u = 0$$

$$(xu)' = 0$$

$$xu = C$$

$$u = \frac{C}{x}$$

נבחר למשל  $C = 1$ , ונקבל  $z' = u = 1/x$ , כלומר  $z = \ln(x)$   $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$  מהווה פתרון שני למשוואה ההומוגנית המתאימה. נחזור על התהליך שנית למציאת פתרון פרטי למשוואה המקורית:

$$x^{-1/2} z'' + x^{-3/2} z' = \frac{1}{2} x^{-5/2}$$

$$z'' + \frac{1}{x} z' = \frac{1}{2} x^{-2}$$

$$[u = z'] \Rightarrow u' + \frac{1}{x} u = \frac{1}{2} x^{-2}$$

$$xu' + u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$(xu)' = \frac{1}{2} \frac{1}{x}$$

$$xu = \frac{1}{2} \ln x + C$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{\ln x + C}{x}$$

נבחר למשל  $C = 0$ , אז  $z' = u = \frac{1}{2x} \ln x$ , ונקבל:

$$z = \frac{1}{2} \int \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \left[ \frac{t = \ln x}{dt = dx/x} \right] = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{4} t^2 = \frac{1}{4} \ln^2 x$$

ונקבל פתרון פרטי  $y_p = \frac{\ln^2 x}{4\sqrt{x}}$ , והפתרון הכללי למשוואה יהיה:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + C_2 \cdot \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{\ln^2 x}{4\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} (C_1 + C_2 \ln x + \frac{1}{4} \ln^2 x) \end{aligned}$$



## שאלה 7

לפינו משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר 3 במקדמים קבועים. המשוואה האופיינית תהיה:

$$\begin{aligned}\lambda^3 - \lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda^2 - 1) &= 0 \\ \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) &= 0\end{aligned}$$

ונקבל כי  $e^{0x} \equiv 1, e^x, e^{-x}$  מהווים מערכת בסיסית של פתרונות. נמצא פתרון פרטי על פי כלל קרמר ווריאצית הפרמטרים:

$$\begin{aligned}\Delta = W(x) &= \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \\ \Delta_{C'_1} &= \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ \frac{1}{e^x + e^{-x}} & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 1 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{-2}{e^x + e^{-x}} = -\operatorname{sech} x \\ \Delta_{C'_2} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & \frac{1}{e^x + e^{-x}} & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -e^{-x} \\ \frac{1}{e^x + e^{-x}} & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{e^{2x} + 1} \\ \Delta_{C'_3} &= \begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & \frac{1}{e^x + e^{-x}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{1}{e^x + e^{-x}} \end{vmatrix} = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \\ C'_1 &= -\frac{1}{2} \operatorname{sech} x \Rightarrow_{369} C_1 = -\arctan(e^x) \\ C'_2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{e^{2x} + 1} \Rightarrow_{361} C_2 = \frac{1}{2} \cdot (x - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x})) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln(1 + e^{2x}) \\ C'_3 &= \frac{1}{2} \frac{1}{e^{-2x} + 1} \Rightarrow_{361} C_3 = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2x})) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \ln(1 + e^{-2x}) \\ y_p &= -\arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{1 + e^{2x}}\right) = \\ &= -\arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{e^{-x}(e^x + e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})}\right) = \\ &= -\arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{4} \ln(e^{-2x}) = \\ &= -\arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}x = \\ &= -\arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x} - 1) = \\ y &= C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} - \arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x} - 1)\end{aligned}$$

## שאלה 8

בהצבת 0, נקבל:

$$f'(0) + 2 \int_0^0 f(t) dt = \sin 0 + 3f(0)$$

$$f'(0) = 3f(0)$$

ומהדרישה  $f(0) = 0$  נקבל  $f'(0) = 0$ . נגזור את המשוואה הנתונה משני צדדיה:

$$f''(x) + 2f(x) = \cos x + 3f'(x)$$

בצירוף 2 הדרישות לעיל, נקבל את בעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \cos x \\ y'(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

על פי משפט הקיום והיחידות 2.3.5, והיות וכל הפונקציות במשוואה רציפות ב  $(-\infty, \infty)$ , נקבל כי קיים פתרון לבעיית ההתחלה ב  $(-\infty, \infty)$  והוא יחיד.

על מנת למצוא פתרון זה, ראשית נפתור את המשוואה האופיינית של המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

ונקבל על פי סעיף 2.4.1 כי  $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$  מהווים מערכת של פתרונות למשוואה ההומוגנית המתאימה.

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0$$

על מנת למצוא פתרון פרטי למשוואה, עלינו למצוא פונקציות  $C_1(x), C_2(x)$  כך שמתקיים:

$$\begin{cases} e^x C_1' + e^{2x} C_2' = 0 \\ e^x C_1' + 2e^{2x} C_2' = \cos x \end{cases}$$

נפתור על פי כלל קרמר.

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \cos x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{2x} \cos x$$

$$C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -e^{-x} \cos x$$

$$C_1 = - \int e^{-x} \cos x dx = [359 \text{ אינט}'] = - \frac{e^{-x}(-\cos x + \sin x)}{(-1)^2 + 1^2} = \frac{1}{2} e^{-x} (\cos x - \sin x)$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \cos x \end{vmatrix} = e^x \cos x$$

$$C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = e^{-2x} \cos x$$

$$C_2 = \int e^{-2x} \cos x dx = [359 \text{ אינט}'] = \frac{e^{-2x}(-2 \cos x + \sin x)}{(-2)^2 + 1^2} = \frac{1}{5} e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x)$$

ונקבל פתרון פרטי למשוואה:

$$y_p = \frac{1}{2} e^{-x} (\cos x - \sin x) \cdot e^x + \frac{1}{5} e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x) \cdot e^{2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x =$$

$$= \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$$

הפתרון הכללי למשוואה יהיה:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$$
$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x$$

נציב 0 בשני הביטויים ונקבל:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{10} = 0 \\ y'(0) = C_1 + 2C_2 - \frac{3}{10} = 0 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה ונקבל  $C_2 - \frac{4}{10} = 0$ , כלומר  $C_2 = \frac{4}{10}$  ולכן  $C_1 = -\frac{5}{10}$  מקבלים:

$$f(x) = 0.4e^{2x} - 0.5e^x + 0.1 \cos x - 0.3 \sin x$$

זהו, כאמור, פתרון יחיד לבעיה הנתונה.