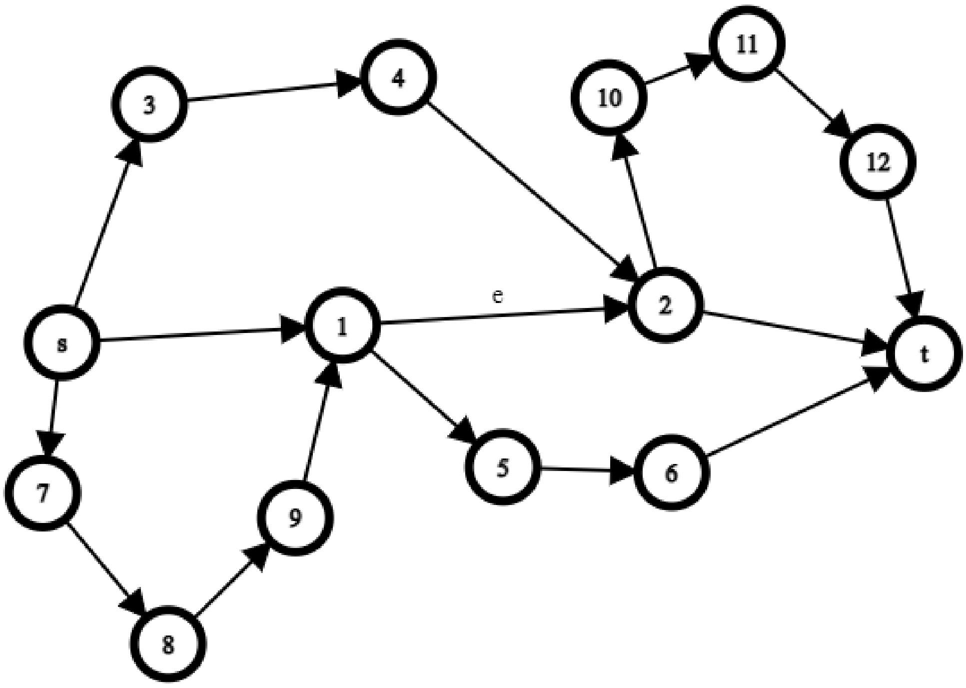
מטלת מנחה 15 - קורס 20417

שאלה 1

בעוד בהרצת Ford-Fulkerson לא נוכל לקבוע איזה מסלול ייבחר קודם, בהרצת Edmonds-Karp סדר הבחירה ידוע מראש: המסלול הקצר ביותר קודם. נבנה רשת זרימה המכילה קשת שתוסר, תיווסף ושוב תוסר מהרשת השיורית (משקל כל הקשתות 1).



המסלולים שהאלגוריתם יבחר יהיו, בסדר הזה:

- s, 1, 2, t - כאן הקשת e תוסר מהגרף השיורי
- s, 3, 2, 1, 5, 6, t - כאן הקשת e תתווסף מחדש לגרף
- s, 7, 8, 9, 1, 2, 10, 11, 12, t - כאן הקשת e שוב תוסר מהגרף.

שאלה 2

השאלה עוסקת בקיבולות החוסמות מלרע (ולא מלעיל) את הזרימה הנדרשת.

א. טענה: אם קיימת זרימה חוקית ברשת, אז קיימת ברשת זרימה חוקית גדולה כרצוננו

הוכחה: יהא קבוע $N \in \mathbb{N}$ ותהא זרימה f. נוכיח כי ניתן להגדיר זרימה חדשה, $\bar{f}$, שערכה גדול מערך הזרימה f.

יהא מסלול פשוט P כלשהו מ s ל t בגרף. נגדיר:

$$\bar{f} = \begin{cases} f(e) & e \notin P \\ f(e) + N & e \in P \end{cases}$$

מתקיים תנאי הקיבולת כי לכל $e \in E$, $\bar{f}(e) \geq f(e) \geq c(e)$.

כמו כן, לכל $v \in V$ צומת פנימית, אם $v \notin P$ אז $f^{in}(v) = f^{out}(v)$ - כל הקשתות הנכנסות והיוצאות ל v נותרו ללא שינוי.אם $v \in P$ צומת פנימית במסלול פשוט אזי יש בדיוק קשת אחת הנכנסת ל v השייכת למסלול, ובדיוק קשת אחת היוצאת מ v ושייכת למסלול. מקבלים:

$$\bar{f}^{in}(v) = \sum_{e=(u,v)\in E} \bar{f}(e) = \sum_{e=(u,v)\in E} f(e) + N = f^{in}(v) + N =$$

$$= f^{out}(v) + N = \sum_{e=(v,u)\in E} f(e) + N = \sum_{e=(v,u)\in E} \bar{f}(e) = \bar{f}^{out}(v)$$

ב. רעיון האלגוריתם: "נדחוף" לאורך מסלולים ברשת השיורית קבוע מסוים שיבטיח שערך הזרימה של כל קשת יהיה גדול מהקיבולת שלה.

האלגוריתם:

1. נמצא את $M = \max_{e\in E} c(e)$ ע"י מעבר לינארי על הקשתות.
2. נאתחל לכל קשת e, $f(e) \leftarrow 0$.
3. לכל קשת $e = (u, v) \in E$:
   3.1. נמצא ע"י זוג הרצות DFS מסלול P מ s ל u, ל v, ל t - מסלול מ s ל t העובר דרך e.
   3.2. לכל $e' \in P$ נבצע $f(e') \leftarrow f(e') + M$
4. נחזיר את f.

נכונות: נראה כי הזרימה f שהוחזרה מקיימת את תנאי הקיבול: יהא $e \in E$. באיטרציות בלולאה המרכזית בצעד 3, שלפני האיטרציה של הקשת e, ערכה של $f(e)$ לא-קטן (ואולי אף גדל). בשלב זה, $f(e) \geq 0$ ולאחר מכן בעקבות צעד 3.2 נקבל $f(e) \geq M$.

באיטרציות לאחר המעבר על קשת זו, שוב ערך הזרימה על הקשת לא יקטן ונקבל $f(e) \geq M \geq c(e)$.

תנאי השימור מתקיים בכל איטרציה של הלולאה משלב 3. ההוכחה - באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה - לפני ההרצה, לכל $v \in V\backslash\{s, t\}$ מתקיים $f^{in}(v) = f^{out}(v) = 0$.

צעד האינדוקציה - נניח כי התנאי התקיים לפני איטרציה כלשהי ונסמן ב f^* את ערכי הזרימה לפני האיטרציה. לכל $v \in V\backslash\{s, t\}$ שאינה על המסלול P מתקיים $f^{in}(v) = f^{*in}(v) = f^{*out}(v) = f^{out}(v)$.

כמו כן, לכל $v \in V\backslash\{s, t\}$ מתקיים שוויון. ההוכחה זהה להוכחה בסעיף א עבור הקבוע M.

זמן ריצה: מעבר לינארי על קשתות לשם מציאת הקיבולת המרבית ולשם אתחול ערכי הזרימה יתבצע ב $O(m)$ פעולות. לאחר מכן, הלולאה בשלב 3 תתבצע m פעמים, ובכל פעם נבצע הרצות DFS ושינוי ערכי הזרימה בזמן $O(m + n)$. נקבל סך הכל זמן ריצה של $O(m^2 + mn)$.

ג. רעיון האלגוריתם: בהינתן זרימה חוקית f, עבור כל קשת $e \in E$, ההפרש $f(e) - c(e)$ מהווה מעין "קיבולת" של כמות יחידות הזרימה המקסימלית עליה אנחנו יכולים לוותר. ניתן לנצל זאת על מנת לבנות רשת זרימה חדשה, G', בעלת ערכי הקיבולת המתאימים, ולהפעיל עליה אלגוריתם של זרימה ברשת.

האלגוריתם:
1. הגדר גרף $G' = (V, E)$ עם ערכי קיבולת $c'(e) = f(e) - c(e)$ לכל $e \in E$.
2. הפעל $Edmonds - Karp$ על G' למציאת זרימה מרבית f' ב G'.
3. הגדר $\bar{f}(e) \leftarrow f(e) - f'(e)$ לכל $e \in E$.
4. החזר את $\bar{f}$.

נכונות: הזרימה $\bar{f}$ מקיימת את תנאי הקיבול כי לכל $e \in E$ מתקיים:

$$\bar{f}(e) = f(e) - f'(e) \geq f(e) - c'(e) = c(e)$$

וכן את תנאי השימור, כי לכל $v \in V\backslash\{s, t\}$ מתקיים (היות ו f, f' מקיימים את תנאי השימור):

$$\bar{f}^{in}(v) = \sum_{e=(u,v)\in E} \bar{f}(e) = \sum_{e=(u,v)\in E} f(e) - \sum_{e=(u,v)\in E} f'(e) =$$

$$= \sum_{e=(v,u)\in E} f(e) - \sum_{e=(v,u)\in E} f'(e) = \sum_{e=(v,u)\in E} \bar{f}(e) = \bar{f}^{out}(v)$$

זמן ריצה: בניית הגרף החדש תתבצע ב $O(m + n)$.
לאחר מכן, $Edmonds - Karp$ ירוץ ב $O(mn)$ ובניית הזרימה החדשה תתבצע ב $O(m)$.
סך הכל, נקבל זמן ריצה של $O(mn)$.

שאלה 3

א. רעיון האלגוריתם: אם נגדיל את הקיבולת של הקשת e^*, הזרימה הנוכחית תישאר חוקית. מסיבה זו, ניתן להפעיל את השיטה הפנימית $augment$ לשיפור זרימה זו.

האלגוריתם:

1. נבנה מחדש את הגרף השיורי G_f.
2. נמצא, למשל בעזרת DFS, מסלול מs לt בגרף השיורי.
3. אם קיים מסלול כזה, נפעיל את שיטת $augment$ המוצגת בספר על מסלול זה.
4. נחזיר את הזרימה שהתקבלה.

נכונות: אילו לפני העלאת הקיבולת, הקשת e^* לא הייתה רוויה - אזי הייתה בגרף השיורי קשת בכיוון של e^* ובכל זאת נעצר אלגוריתם פורד-פולקרסון. המשמעות, לפי הגדרת הגרף השיורי, היא שאין מסלול ב G_f מs לt, וגם לא יהיה לו נגדיל את הקיבולת השיורית של קשת קיימת ב-1. הזרימה הקיימת תוחזר במקרה זה, ואכן - הקשת e^* לא מהווה צוואר-בקבוק בזרימה, והעלאת הקיבולת שלה לא תשנה את הזרימה המקסימלית.

אילו לפני העלאת הקיבולת, הקשת e^* הייתה רוויה, אזי בגרף השיורי G_f לא הייתה קשת בכיוון e^*, וקשת זו תופיע כעת ביצירת הגרף השיורי מחדש. אילו עדיין לא קיים מסלול לאחר הוספת הקשת, אזי לפי נכונות פורד-פולקרסון שוב אין מסלול שיפור ותוחזר הזרימה המקורית.

וכעת למקרה ה"מעניין": אילו לפני העלאת הקיבולת, הקשת e^* הייתה רוויה, וכעת מצאנו מסלול s לt בגרף השיורי, אזי השיטה $augment$ תחזיר זרימה חדשה $\bar{f}$. ברור כי זוהי זרימה חוקית, לפי טענה (7.1) בספר. נוכיח כי היא מקסימלית: ברור כי $bottleneck(P, f) = 1$ בדיוק עבור המסלול שמצאנו, שכן נתון כי כל הקיבולות שלמות, ולכן הקיבולת השיורית המינימלית במסלול היא לכל הפחות 1 - הקיבולת השיורית של הקשת בכיוון e^*. לכן, ערך הזרימה יגדל ב-1 בדיוק על פי טענה (7.3) בספר הלימוד.
אבל ערך הזרימה המקסימלית לאחר הגדלת הקיבולת גדל <u>לכל היותר</u> ב-1, כי הגדלנו קיבולת של קשת ביחדה אחת בדיוק! אי-לכך, ניווכח כי הגדלת הזרימה ב-1 משמעותה שהגענו בהכרח לערך זרימה מקסימלי.

זמן ריצה: בניית הגרף השיורי תתבצע ב $O(m + n)$.
הרצת DFS תתבצע ב$O(m + n)$ וכן גם שיטת ה $augment$ פועלת בזמן לינארי.
נקבל סך הכל זמן ריצה לינארי.

ב. רעיון האלגוריתם: לעומת זאת, הקטנת הקיבולת של הקשת e^* עלולה לגרור מצב בו הזרימה לא תישאר חוקית, ויש להשיב אותה לחוקית (ע"י הקטנת ערכה) ורק לאחר מכן לדרוש שיפורים.

האלגוריתם:

1. אם הזרימה עדיין חוקית, כלומר $f(e^*) \leq c(e^*)$ לאחר הורדת הקיבולת, עצור והחזר את f.
2. עבור $e^* = (u, v)$ מצא מסלול, למשל בעזרת BFS, מ s ל-u ומ v ל t. נגדיר את P להיות שרשור המסלולים.
3. לאורך המסלול P, הורד את הזרימה בכל אחת מן הקשתות ב-1.
4. בצע את האלגוריתם מסעיף א.

נכונות: הזרימה שנוצרה בשלב 3 היא זרימה חוקית, משום שהיא מקיימת את תנאי הקיבול ואת תנאי השימור (הזרימה המקורית קיימה את תנאי השימור, ומהורדת קבוע לאורך מסלול נבטיח כי גם הזרימה החדשה תקיים תנאי זה).

ערך הזרימה המקסימלי עבור הגרף לאחר הקטנת הקיבולת הוא לכל היותר $v(f)$, משום שאם קיימת זרימה בעלת ערך גבוה יותר f', אז f לא זרימה מרבית עבור הרשת המקורית בסתירה לנכונות פורד-פולקרסון.
נקבל שוב זרימה שערכה קטן לכל היותר ב-1 מערך הזרימה המקורית, ובה כל ערכי הקיבולות הם מספרים שלמים.

הרצת השלבים מסעיף א תגרור שוב כי:

- אילו העלינו את ערך הזרימה, בהכרח הגענו לערך המרבי.
- אילו ערך הזרימה נשאר ללא שינוי, אזי לפי נכונות פורד-פולקרסון הגענו בהכרח לערך המרבי.

זמן ריצה: שתי הרצות BFS יקחו שתיהן זמן לינארי, נוסף על הורדת ערך הזרימה לאורך המסלול והרצת האלגוריתם מסעיף א. נקבל שוב אלגוריתם הרץ בזמן לינארי.