מטלת מנחה 13 - אלגברה לינארית 1

328197462

25/12/2022

שאלה 1

עלינו להראות כי

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{vmatrix} = 0$$

נשים לב כי שלושת המטריצות זהות פרט לשורה אחת, לכן, נפעיל את משפט $4.3.4$ פעמיים ונקבל:

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ c & d & e \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ e & c & d \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{vmatrix} \underset{4.3.4}{=} \begin{vmatrix} a & b & b \\ c+e & d+c & e+d \\ f & g & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & c \\ f & g & g \end{vmatrix} \underset{4.3.4}{=} \begin{vmatrix} a & b & b \\ c+d+e & c+d+e & c+d+e \\ f & g & g \end{vmatrix}$$

המטריצה שהתקבלה באגף הימני ביותר היא בעלת שתי עמודות זהות. לכן, לפי משפט $4.3.5$, הדטרמיננטה שלה היא 0 ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 2

סעיף א

נחשב:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \underset{\text{שורה 1}}{\overset{\text{פיתוח לפי}}{=}} a \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

באגף ימין קיבלנו שתי מטריציות משולשיות מסדר $(n-1) \times (n-1)$.
לפי משפט $4.3.8$, ערך כל דטרמיננטה שווה למכפלת האלכסון הראשי של המטרציה שלה. נקבל:

$$D_1 = a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \cdot b^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

סעיף ב

נחשב:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

נחסר מהשורה האחרונה את השורה שלפניה. נקבל, לפי משפט $4.3.6$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n & n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

נבצע עוד $n-2$ פעולות דומות - נחסר מכל שורה את השורה שלפניה, החל מהשורה הלפני אחרונה ועד השורה השנייה.
שוב, לפי משפט $4.3.6$, ערך הדטרמיננטה נשאר זהה ונקבל:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

נרצה להגיע לצורה משולשית תחתית. לשם כך, נחליף את השורה הראשונה עם האחרונה, את השנייה עם הלפני אחרונה וכו'.
בסך הכל נבצע $\frac{n}{2}$ החלפות אם n זוגי, ו$\frac{n-1}{2}$ החלפות אם n אי-זוגי, כלומר $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ החלפות שורה.
לפי משפט $4.3.2$, כל החלפת שורה משנה את סימן הדטרמיננטה. עבור $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ החלפות נקבל:

$$D_2 = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix}$$

המטריצה שבאגף ימין היא מטריצה משולשית תחתית.
לפי משפט $4.3.8$, הדטרמיננטה שלה היא מכפלת האלכסון הראשי, ובמקרה זה $1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot n = n$, ונקבל:

$$D_2 = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n$$

שאלה 3

סעיף א

תחילה נמצא את ההצגה הקוטבית של $w = r\,\text{cis}\,\theta = 1 - i$.

$$\begin{cases} r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \tan\theta = \frac{-1}{1} = -1 \;\Rightarrow\; \theta = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

משיקולי רביע ניקח $\theta = \frac{7\pi}{4}$, אז $w = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{4}, t = \text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$.

כעת, נחשב:

$$\frac{w}{\bar{t}} = \frac{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{4}}{\overline{\text{cis}\,\frac{3\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{4}}{\text{cis}\,-\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\text{cis}\,(\frac{7\pi}{4} - (-\frac{3\pi}{4})) = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{10\pi}{4} = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{2} = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$$

נפתור את המשוואה $z^3 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$. לפי "נוסחת השורשים", נקבל:

$$z_k = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\,(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}), k = 0, 1, 2$$

כלומר $z_2 = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\,\frac{9\pi}{6}$, $z_1 = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}$, $z_0 = \sqrt[6]{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$.

סעיף ב

לפי "נוסחת השורשים", פתרונות המשוואה $z^n = 1 = 1\,\text{cis}\,0$ יהיו:

$$z_k = \sqrt[n]{1}\,\text{cis}\,(\frac{0}{n} + \frac{2\pi k}{n}) = \text{cis}\,(\frac{2\pi k}{n}), k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

מכפלת הפתרונות תהא:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \text{cis}\,(\frac{2\pi k}{n}) = \text{cis}\,\frac{2\pi \cdot 0}{n} + \text{cis}\,\frac{2\pi \cdot 1}{n} + \cdots + \text{cis}\,\frac{2\pi \cdot (n-1)}{n} = \text{cis}\,(\frac{2\pi \cdot 0}{n} + \frac{2\pi \cdot 1}{n} + \cdots + \frac{2\pi \cdot (n-1)}{n}) =$$

$$\text{cis}\,(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi k}{n}) = \text{cis}\,(\frac{2\pi}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k) \underset{\text{סכום סדרה חשבונית}}{=} \text{cis}\,(\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n - 1 + 0)) = \text{cis}\,(\pi \cdot (n-1))$$

אילו n אי-זוגי, אז יש $m \in \mathbb{Z} : n = 2m + 1$, ונקבל:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \text{cis}\,(\frac{2\pi k}{n}) = \text{cis}\,(\pi \cdot (n-1)) = \text{cis}\,(\pi \cdot (2m + 1 - 1)) = \text{cis}\,2m\pi = \text{cis}\,0 = 1$$

שאלה 4

הקבוצה $V = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ בצירוף הפעולות שהוגדרו לא מהווה מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$.
נראה כי היא אינה מקיימת את אקסיומה ג מאקסיומות הכל בסקלר (פילוג הכפל בסקלר מעל החיבור):

נבחר למשל $v = (1,0) \in V$, $\lambda = 8, \mu = 2 \in \mathbb{R}$. מתקיים:

$$(\lambda+\mu)v = (8+2)\cdot(1,0) \underset{\text{לפי הגדרה}}{=} (1, 10\cdot 0) = (1,0)$$

ואולם

$$\lambda v + \mu v = 8\cdot(1,0) + 2\cdot(1,0) \underset{\text{לפי הגדרה}}{=} (1,0)+(1,0) = (2,0) \neq (1,0) = (\lambda+\mu)v$$

מאחר והקבוצה בצירוף הפעולות לא מקיימת את אקסיומות המרחב הלינארי נסיק כי היא אינה מרחב לינארי.

שאלה 5

נבחן את ארבע הקבוצות בשאלה:

1. קבוצת הפונקציות $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x+1) = f(x) + 1 \quad x \in \mathbb{R}$ לכל$\}$

נראה כי הקבוצה W לעיל אינה מהווה מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$:
הקבוצה אינה סגורה לפעולת חיבור הפונקציות המוגדרת בעמוד 155 בכרך ב:
ניקח למשל $u = x, v = x+1 \in W$, אז:

$$f(x) = u + v = x + x + 1 = 2x + 1$$

אבל $f(x) \notin W$ כי

$$f(1) = 3 \quad f(0) = 1 \quad f(0+1) \neq f(0) + 1$$

2. קבוצת הפולינומים $M = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(x) = p(x-1) \quad x \in \mathbb{R}$ לכל$\}$

נוכיח כי הקבוצה $M \subseteq \mathbb{R}_4[x]$לעיל מהווה מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$ בעזרת משפט 7.3.2:

$$M = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(x) = p(x-1) \quad x \in \mathbb{R} \text{ לכל}\}$$

תחילה, $W \neq \emptyset$ כי הפולינום $p(x) = 0 \in \mathbb{R}_4[x]$ מקיים לכל $x \in \mathbb{R}$ $p(x) = 0 = p(x-1)$ ומכאן ש $p(x) \in M$.
נראה סגירות לחיבור המוגדר בעמוד 155 בכרך ב. יהיו $u, v \in M$. נקבל:

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) \underset{\text{מ"ל } \mathbb{R}_4[x]}{\in} \mathbb{R}_4[x]$$
$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) \underset{u,v\in M}{=} u(x-1) + v(x-1) = (u+v)(x-1)$$
$$\Rightarrow u + v \in M$$

נראה סגירות לכפל בסקלר. יהא $v \in M$ וכן $\lambda \in R$. נקבל:

$$\lambda v \underset{\text{מ"ל } \mathbb{R}_4[x]}{\in} \mathbb{R}_4[x]$$
$$(\lambda v)(x) = \lambda \cdot v(x) \underset{v \in M}{=} \lambda \cdot v(x-1) = (\lambda v)(x-1)$$

הראינו כי שלוש התכונות מתקיימות ולכן לפי 7.3.2 M מהווה מרחב לינארי.
נמצא קבוצה פורשת סופית לקבוצה M שהוגדרה לעיל.
תחילה נמצא איבר כללי לאיברי הסדרה. יהא $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in M$. אז מתקיים:

$$p(x-1) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d =$$
$$a(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + b(x^2 - 2x + 1) + c(x-1) + d =$$
$$ax^3 + (b-3a)x^2 + (c - 2b + 3a)x + (d - c + b - a)x = p(x)$$

נשווה את מקדמיהם של שני הפולינומים ונקבל:

$$\begin{cases} a = a & \\ b - 3a = b & \Rightarrow \quad a = 0 \\ c - 2b + 3a = c & \underset{a=0}{\Rightarrow} \quad b = 0 \\ d - c + b - a = d & \underset{a=b=0}{\Rightarrow} \quad c = 0 \end{cases}$$

קיבלנו $p(x) = d$, ולכן $M = \{p(x) = d \mid d \in \mathbb{R}\} = \text{Sp}\{1\}$.

3. קבוצת המטריצות $S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid ad = 0\}$

נראה כי הקבוצה S לעיל אינה מהווה מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$:

הקבוצה אינה סגורה לפעולת חיבור מטריצות: ניקח למשל $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{1 \cdot 1 \neq 0}{\notin} S$$

4. קבוצת השלשות $L = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_2 = \overline{z_1}\}$

נראה כי הקבוצה $L \subseteq \mathbb{C}^3$ לעיל היא מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$:

תחילה, $L \neq \emptyset$ כי $(1,1,1) \in \mathbb{C}^3$ מקיימת $\overline{1} = 1$ (1 ממשי ולפי משפט 6.4.2), ואי לכך $(1,1,1) \in L$.

נראה סגירות לחיבור שלשות. יהיו $(z_1, \overline{z_1}, z_3), (w_1, \overline{w_1}, w_3) \in L$. נקבל:

$$(z_1, \overline{z_1}, z_3), +(w_1, \overline{w_1}, w_3) = (z_1 + w_1, \overline{z_1} + \overline{w_1}, z_3 + w_3) \underset{6.4.2}{=} (z_1 + w_1, \overline{z_1 + w_1}, z_3 + w_3) \in L$$

בנוסף, נראה סגירות לכפל בסקלר מהשדה $\alpha \in \mathbb{R}$. יהא $(z_1, \overline{z_1}, z_3) \in L$ ונקבל אפוא:

$$\alpha(z_1, \overline{z_1}, z_3) = (\alpha z_1, \alpha \overline{z_1}, \alpha z_3) \underset{\text{שאלה } 6.4.3}{=} (\alpha z_1, \overline{\alpha z_1}, \alpha z_3) \in L$$

אי לכך, מתקיימים תנאי משפט $7.3.2$ והקבוצה, בצירוף הפעולות הרגילות, מהווה מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$.

נמצא קבוצה פורשת סופית לקבוצה, ולשם כך נמצא איבר כללי. יהא $(z_1, \overline{z_1}, z_3) \in L$. נקבל אפוא:

$$(z_1, \overline{z_1}, z_3) \underset{\text{הצגה קרטזית}}{=} (a_1 + ib_1, a_1 - ib_1, a_3 + ib_3) = a_1(1,1,0) + b_1(i, -i, 0) + a_3(0,0,1) + b_3(0,0,i)$$

ולכן נקבל:

$$L = \{a_1(1,1,0) + b_1(i,-i,0) + a_3(0,0,1) + b_3(0,0,i) \mid a_1, a_3, b_1, b_3 \in \mathbb{R}\}$$

כלומר, מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$L = \text{Sp}\{(1,1,0), (i,-i,0), (0,0,1), (0,0,i)\}$$

שאלה 6

סעיף א

נשתמש בשאלה $7.5.11$. לפי שאלה זו, ביצוע פעולות אלמנטריות (כפל וקטור מהקבוצה בסקלר מהשדה שאינו 0, והוספת מכפלה בסקלר מהשדה של וקטור מהקבוצה לוקטור אחר), לא משנה את תת-המרחב הנפרש. אי לכך,

$$\begin{aligned}
\mathsf{Sp}\{u-v+2w,-2u+v-w,-u+2v+w\} &\underset{T_2\to T_2+2T_1}{=} \mathsf{Sp}\{u-v+2w,-v+3w,-u+2v+w\}\\
&\underset{T_3\to T_3+T_1}{=} \mathsf{Sp}\{u-v+2w,-v+3w,v+3w\}\\
&\underset{T_1\to T_1-T_2}{=} \mathsf{Sp}\{u-w,-v+3w,v+3w\}\\
&\underset{T_3\to T_3+T_2}{=} \mathsf{Sp}\{u-w,-v+3w,6w\}\\
&\underset{T_3\to 1/6\ T_3}{=} \mathsf{Sp}\{u-w,-v+3w,w\}\\
&\underset{T_1\to T_1+T_3}{=} \mathsf{Sp}\{u,-v+3w,w\}\\
&\underset{T_2\to T_2-3T_3}{=} \mathsf{Sp}\{u,-v,w\}\\
&\underset{T_2\to -T_2}{=} \mathsf{Sp}\{u,v,w\}
\end{aligned}$$

ואכן מתקיים שוויון בין תתי המרחבים הנפרשים מעל $\mathbb{R}$

סעיף ב

נסמן $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&1&3\end{pmatrix}$.
תת-המרחב U הוא מרחב השורות של המטריצה A, וכן תת-המרחב W הוא מרחב השורות של המטריצה B.

נדרג את A:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}=A'$$

לפי שאלה $7.5.12$, מאחר והמטריצות A,A' שקולות שורה מרחב השורות שלהן זהה, ובפרט $(0,1,2)\in\mathsf{Sp}\{(1,2,5),(1,1,3)\}=U$.
אבל $(0,1,2)\notin V$. נראה זאת: נמצא $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$(0,1,2)=\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,1)\Leftrightarrow\begin{cases}0=1\alpha+0\beta & \Rightarrow\alpha=0\\1=0\alpha+1\beta & \Rightarrow\beta=1\\2=1\alpha+1\beta & \Rightarrow 0+1=2\end{cases}$$

קיבלנו סתירה, ולכן אין פתרונות למשוואה, כלומר $(0,1,2)$ אינו קומבינציה לינארית של $(1,0,1),(0,1,1)$,
ואי לכך $(0,1,2)\notin\mathsf{Sp}\{(1,0,1),(0,1,1)\}=W$
מכאן נובע ישירות $U\neq W$