מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

06/01/2023

שאלה 1

סעיף א

נפריד לשני טורים ונבצע פעולות חיבור בעזרת משפט 5.9. נסמן אפוא:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 2^n} > 0 \quad b_n = \frac{(-2)^n \cdot \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}\cdot 2^n} = \frac{(-1)^n \cdot \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$$

ראשית, עבור הסדרה החיובית a_n נקבל

$$0 \le a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 2^n} \underset{\sqrt{n}\ge 1}{\le} \frac{1}{2^n}$$

כאשר הטור $\sum \frac{1}{2^n}$ הוא טור הנדסי שמנתו $q = \frac{1}{2}$, ולכן מתכנס.
אי לכך, לפי מבחן ההשוואה 5.14, גם הטור $\sum a_n$ מתכנס, וכן מאחר ומדובר בסדרה חיובית הטור מתכנס בהחלט.

כעת נבחן את התכנסות הטור $\Sigma|b_n|$. מתקיים:

$$0 \le |b_n| = \left|\frac{(-1)^n \cdot \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right| = \frac{|(-1)^n||\sin\frac{1}{n}|}{\sqrt{n}} = \frac{|\sin\frac{1}{n}|}{\sqrt{n}} \underset{|\sin x|\le|x| \text{ מאינפי 1}}{\le} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

הטור $\Sigma\frac{1}{n\sqrt{n}} = \Sigma\frac{1}{n^{1.5}}$ מתכנס (לפי דוגמה א5.8 ביחידה 5 כאשר $\alpha = 1.5 > 1$),
ולכן לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי גם הטור $\Sigma|b_n|$ מתכנס.

כעת נתבונן בטור הנתון בסעיף. מדובר בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-2)^n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

נשים לב כי לפי אי-שוויון המשולש,

$$|a_n+b_n| \le |a_n| + |b_n| \underset{a_n>0}{=} a_n + |b_n|$$

הטור $\Sigma(a_n+|b_n|)$ מתכנס כסכום של טורים מתכנסים לפי משפט 5.9.
אי לכך, גם הטור $\Sigma|a_n+b_n|$ מתכנס, ומכאן נסיק התכנסות בהחלט של הטור הנתון בשאלה.

סעיף ב

נפריד שוב לשני טורים. נסמן אפוא:

$$a_n = \frac{n \cdot \cos 2n}{n^2-1} = \frac{n}{n^2-1} \cdot \cos 2n \quad b_n = \frac{\cos \pi n}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)} = \frac{(-1)^n}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)}$$

נתבונן תחילה בטור Σa_n. נרצה להוכיח כי הטור מתכנס לפי מבחן דיריכלה:

i נראה כי הסדרה $\mu_n = \frac{n}{n^2-1}$ מונוטונית יורדת.
נגדיר $\mu(x) = \frac{x}{x^2-1}$. מתקיים:

$$\mu'(x) = \frac{x^2-1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$$

ולכן μ פונקצייה יורדת, ובפרט לכל n טבעי נקבל $\mu_{n+1} = \mu(n+1) < \mu(n) = \mu_n$.

ii כמו כן, $\mu_n = \frac{n}{n^2-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

iii בנוסף, על פי שאלה 33א ביחידה 5, $\Sigma \cos 2n$ סכום חסום.

נקבל, על פי משפט 5.22, כי הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty} a_n = \Sigma_{n=2}^{\infty}(\mu_n \cdot \cos 2n)$ מתכנס.

נבחן כעת את התכנסות הטור $|b_n|$. נשים לב כי $\ln(n^n+n) \geq \ln(n^n) = n\ln n$, ואי לכך:

$$|b_n| = \left|\frac{(-1)^n}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)}\right| \underset{x\geq 1 \Rightarrow \ln x > 0}{=} \frac{|(-1)^n|}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)} = \frac{1}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)} \underset{\text{הסבר מקודם}}{\leq} \frac{1}{\ln n \cdot n \ln n} = \frac{1}{n \ln^2 n}$$

הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ מתכנס לפי שאלה 27א ביחידה 5 עבור $\alpha = 2$, ולכן לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי $\Sigma_{n=2}^{\infty}|b_n|$ מתכנס, כלומר $\Sigma_{n=2}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

אי לכך, לפי משפט 5.9, הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n \cdot \cos 2n}{n^2-1} + \frac{\cos \pi n}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}(a_n+b_n)$$

מתכנס. כעת, נניח בשלילה כי הטור מתכנס בהחלט. אז לפי משפט 5.9, הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty}(|a_n+b_n|+|b_n|)$ מתכנס. מתקיים:

$$0 \leq |a_n| = |(a_n+b_n)-b_n| \underset{\text{א"ש המשולש}}{\leq} |a_n+b_n|+|b_n|$$

ועל כן, לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי $\Sigma_{n=2}^{\infty}|a_n|$ מתכנס. ונקבל אפוא

$$|a_n| = \left|\frac{n \cdot \cos 2n}{n^2-1}\right| = \frac{n \cdot |\cos 2n|}{n^2-1} \underset{|\cos x| \geq \cos^2 x}{\geq} \frac{n \cdot \cos^2 2n}{n^2-1} \geq 0$$

ומכאן, שוב לפי מבחן ההשוואה, $\Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \cos^2 2n}{n^2-1}$
הוא טור מתכנס גם הוא. לפי הזהות $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, נסיק:

$$\frac{n \cdot \cos^2 2n}{n^2-1} = \frac{n}{2(n^2-1)} + \frac{n \cdot \cos 4n}{2(n^2-1)}$$

הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty}$ מתכנס, לפי מבחן דיריכלה, ובהוכחה שקולה להוכחה מקודם.
אי לכך, לפי שאלה 11א ביחידה 5, נסיק כי גם הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2(n^2-1)}$ מתכנס. עם זאת,

$$\frac{\frac{n}{2(n^2-1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{2(n^2-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה 5.15 גם הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתכנס.
נסיק כי לפי משפט 5.12 גם הטור $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתכנס, בסתירה לדוגמה 5.8א בספר!
מהסתירה נובע כי הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty}|a_n+b_n|$ לא מתכנס, ולכן הטור שבשאלה מתכנס בתנאי.

שאלה 2

תהא (u_n) המתכנסת לגבול שלילי, וכן יהא a מספר חיובי.
נסמן $a_n = a^{u_1+u_2+\cdots+u_n}$ ונראה כי Σa_n מתכנס אם ורק אם $a > 1$.

נחשב את הגבול:

$$c = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}}}{a^{u_1+u_2+\cdots+u_n}}\right| = \lim_{n\to\infty}|a^{u_{n+1}}| \underset{a>0\Rightarrow a^x>0}{=}$$
$$\lim_{n\to\infty} a^{u_{n+1}} \underset{\text{לפי אינפי 1}}{=} (\lim_{n\to\infty} a)^{\lim_{n\to\infty} u_{n+1}} \underset{\text{הזזה}}{=} a^{\lim_{n\to\infty} u_n} \underset{\text{נתון}}{=} a^u$$

אילו $a > 1$, אז מהנתון $u < 0$ נסיק $c = a^u < 1$ ולכן לפי משפט $5.17**$ הטור Σa_n מתכנס בהחלט, ובפרט מתכנס.
אילו $a < 1$, אז מהנתון $u < 0$ נסיק $c = a^u > 1$ ולכן לפי משפט $5.17**$ הטור Σa_n מתבדר.

אילו $a = 1$, אז נקבל לכל n טבעי $a_n = 1^{\cdots} = 1 = \frac{1}{n^0}$
ולכן הטור Σa_n מתבדר, לפי דוגמה א5.8 ביחידה 5, כי $\alpha = 0 < 1$ בכך הוכחנו כי הטור Σa_n מתכנס אם ורק אם $a > 1$.

שאלה 3

נסמן $a = \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. אז מהגדרת הגבול עבור $\epsilon = \frac{|a|}{2}$, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - a| < \epsilon$,
כלומר, מאי-שוויון המשולש $-\frac{|a|}{2} < |a_n| - |a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{|a|}{2} < |a_n| < \frac{3|a|}{2}$.
אי לכך, לכל $n + 1 > n_0$ נקבל:

$$\frac{a^2}{4} < |a_{n+1}a_n| < \frac{9a^2}{4}$$

כעת, נשים לב שהחל מn_0 מתקיים:

$$\frac{a^2}{4}|a_n - a_{n+1}| < |\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}| = \frac{|a_n - a_{n+1}|}{|a_n a_{n+1}|} < \frac{9a^2}{4}|a_n - a_{n+1}|$$

כעת נניח כי $\Sigma(a_{n+1} - a_n)$ מתכנס בהחלט, כלומר $\Sigma|a_{n+1} - a_n|$ מתכנס,
ונוכיח לפי מבחן ההשוואה כי הטור החיובי $\Sigma|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}|$ מתכנס.
לפי משפט 5.10 (נדגיש $\frac{9a^2}{4} \neq 0$) נסיק כי $\Sigma\frac{9a^2}{4}|a_{n+1} - a_n|$ מתכנס. הראינו כי כמעט לכל n מתקיים $|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}| < \frac{9a^2}{4}|a_{n+1} - a_n|$,
ואי לכך לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי הטור מתכנס, כלומר $\Sigma(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n})$ מתכנס בהחלט.

בכיוון השני, אם נניח כי $\Sigma|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}|$ מתכנס, אז לפי מבחן ההשוואה 5.14 ומשפט 5.10 נסיק כי הטור החיובי $\Sigma|a_{n+1} - a_n|$ מתכנס.

שאלה 4

סעיף א

הטענה לא נכונה.
יהא טור מתכנס Σa_n, מתקיים לפי משפט 5.5 התנאי ההכרחי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. אי לכך,

$$\lim_{n\to\infty} \cos(a_n) = \begin{bmatrix} \text{לפי היינה} \\ x = a_n \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \cos x \underset{\text{רציפות}}{=} \cos(0) = 1$$

לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות טור ולכן הטור $\Sigma \cos(a_n)$ לא מתכנס.

סעיף ב

הטענה נכונה. נוכיח לפי מבחן ההשוואה 5.15
נתון כי איברי הסדרה a_n חיוביים. כמו כן, $a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n^2 + a_n > 0$ כמו כן מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 + a_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n^2}{a_n} + \frac{a_n}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} (a_n + 1) \underset{\text{התנאי ההכרחי } 5.5}{=} 0 + 1 = 1 > 0$$

אי לכך, לפי מבחן ההשוואה 5.5 הטורים $\Sigma a_n, \Sigma(a_n^2 + a_n)$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

סעיף ג

הטענה נכונה. נניח כי הטור $\Sigma|a_{n+1} - a_n|$ מתכנס.
אז מכאן נסיק שהטור $\Sigma(a_{n+1} - a_n)$ מתכנס, ולכן סדרת הסכומים החלקיים של הטור,

$$S_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{k+1} - a_k) = a_{k+1} - a_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} S$$

מתכנסת. אי לכך,

$$\lim_{k\to\infty} a_k \underset{\text{הזזה}}{=} \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} (a_{k+1} - a_1 + a_1) = \lim_{k\to\infty} (a_{k+1} - a_1) + \lim_{k\to\infty} a_1 = S + a_1$$

הוכחנו כי לסדרה (a_n) יש גבול סופי ולכן היא מתכנסת.

שאלה 5

יהא Σa_n טור ויהיו Σb_n, Σc_n טורים כמוגדר בשאלה.
נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של Σb_n ב (σ_k), ואת סדרת הסכומים החלקיים של Σc_n ב(τ_k).
כמו כן נסמן $\sigma = \lim_{k\to\infty} \sigma_k, \tau = \lim_{k\to\infty} \tau_k$

סעיף א

הטענה נכונה.
נניח כי (a_n) אפסה.
נשים לב כי עבור הסכומים החלקיים נקבל:

$$\sigma_k = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2k-1} + a_{2k})$$
$$\tau_k = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{2k-2} + a_{2k-1})$$

אי לכך,

$$\sigma_k - \tau_k = a_{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{לפי הנתון + תת סדרה}} 0$$

ומכאן נסיק:

$$\sigma = \lim_{k\to\infty} \sigma_k = \lim_{k\to\infty} (\sigma_k - \tau_k + \tau_k) = \lim_{k\to\infty} (\sigma_k - \tau_k) + \lim_{k\to\infty} \tau_k = 0 + \tau = \tau$$

במילים אחרות, תנאי סעיף א גורר את תנאי סעיף ב, ונכונותו של סעיף א נובעת מנכונותו של סעיף ב כפי שנוכיח מיד.

סעיף ב

הטענה נכונה.
נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של Σa_n ב (S_k). אז לכל k מתקיים:

$$S_{2k-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{2k-2} + a_{2k-1}) = \tau_k \xrightarrow{k\to\infty} \tau$$
$$S_{2k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k-1} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sigma_k \xrightarrow{k\to\infty} \sigma$$

מההנחה נסיק כי שתי תתי-הסדרות $(S_{2k-1}), (S_{2k})$ המכסות את (S_k), מתכנסות לאותו הגבול $S = \tau = \sigma$.
אי לכך, לפי אינפי 1, הסדרה (S_k) מתכנסת גם היא וגבולה הוא S כנדרש בשאלה.

סעיף ג

הטענה לא נכונה. נבחר כדוגמה נגדית $a_n = (-1)^n$. אז $c_1 = a_1 = -1$, ולכל n טבעי:

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = (-1)^{2n-1} + (-1)^{2n} = (-1) + 1 = 0$$
$$c_{n+1} = a_{2n} + a_{2n+1} = (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} = 1 + (-1) = 0$$

אי לכך סדרות הסכומים החלקיים יהיו:

$$\sigma_k = \sum_{n=1}^{k} b_n = k \cdot 0 = 0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\tau_k = \sum_{n=1}^{k} c_n = c_1 + \sum n = 2^k c_n = -1 + (k-1) \cdot 0 = -1 \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$$

שתי הסדרות מתכנסות ולכן אכן מתקיימים תנאי השאלה.
סדרת הסכומים החלקיים של Σa_n מוגדרת כך, בדומה לסעיף ב:

$$S_k = \begin{cases} -1 & \text{אי-זוגי } k \\ 0 & \text{זוגי } k \end{cases}$$

הסדרה מתבדרת ובהתאם הטור Σa_n מתבדר.

שאלה 6

נסמן $b_n = (-1)^n \cdot \ln(\frac{n+1}{n}) = (-1)^n \cdot \ln(1+\frac{1}{n})$ ונוכיח כי הטור Σb_n מתכנס בתנאי.

נוכיח התכנסות של Σb_n לפי מבחן לייבניץ. נסמן $a_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ אי-שלילית כי ln חיובית בתחום $[1,\infty)$.
הסדרה יורדת כי פונקציית ה ln עולה והסדרה $(\frac{1}{n})$ יורדת. כמו כן, הסדרה אפסה:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \begin{bmatrix} x=\frac{1}{n} \\ \text{לפי היינה} \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x) \underset{\text{רציפות}}{=} \ln(1+0) = 0$$

מתקיימים תנאי משפט לייבניץ 5.20, ואי לכך הטור $\Sigma b_n = \Sigma(-1)^n a_n$ מתכנס.

נראה כי הטור $\Sigma|b_n|$ לא מתכנס לפי מבחן ההשוואה הגבולי. תחילה, היות והסדרה (a_n) אי-שלילית,

$$|b_n| = |(-1)^n||a_n| = a_n = \ln(1+\frac{1}{n})$$

ניקח להשוואה את הטור $\Sigma\frac{1}{n}$. מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \begin{bmatrix} x=\frac{1}{n} \\ \text{לפי היינה} \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 > 0$$

היות והטור $\Sigma\frac{1}{n}$ מתבדר לפי דוגמה 5.8 א, נסיק כי גם הטור $\Sigma|b_n|$ מתבדר.

הראינו כי הטור מתכנס בתנאי. לכן, לפי משפט רימן 5.27, עבור $S = \ln(2023)$ קיים טור, המתקבל על ידי שינוי סדר איבריו של b_n, כך שסכומו S. את שינוי סדר האיברים ניתן לייצג על ידי פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חד חד ערכית ועל, ולכן עבור f נקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{f(n)} = \ln(2023)$$

וסיימנו.