מטלת מנחה 12 - אלגברה לינארית 2

328197462

14/04/2023

שאלה 1

סעיף א

המטריצה A_1 צמודה לעצמה, ובפרט נורמלית.

$$A_2{}^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}, A_3{}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix}$$
$$A_2 A_2{}^* = \begin{pmatrix} 5 & * \\ * & * \end{pmatrix}, A_2{}^* A_2 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$
$$A_3 A_3{}^* = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix} = A_3{}^* A_3$$

לכן A_2 לא נורמלית ו A_3 נורמלית. נמצא מטריצות אוניטריות המלכסנות את A_1, A_3.

$$p_1(x) = |xI - A_1| = \begin{vmatrix} x & -i \\ i & x \end{vmatrix} = x^2 - (-i)i = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$p_3(x) = (xI - A_3) = \begin{vmatrix} x-1 & -i \\ -1 & x-(2+i) \end{vmatrix} = (x-1)(x-(2+i)) - (-i)(-1) =$$
$$= x^2 - (2+i)x - x + 2 + i - i = x^2 - (3+i)x + 2$$

עבור A_1, נמצא בסיסים אורתונורמליים למרחבים העצמיים $V_{\lambda=1}, V_{\lambda=-1}$.

- עבור $V_{\lambda=1}$ מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $V_{\lambda=1} = \mathrm{Sp}(\{(i,1)\})$. ננרמל ונקבל $B_{\lambda=1} = \{\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

- עבור $V_{\lambda=-1}$ מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$-I - A = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_2 + iR_1} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $V_{\lambda=-1} = \mathrm{Sp}(\{(1,i)\})$. ננרמל ונקבל $B_{\lambda=-1} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\}$

מטריצה אוניטרית המלכסנת את A_1 תהיה $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ומקבלים $Q^* AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

עבור A_3, שורשי הפולינום האופייני יהיו: $\frac{(3+i)\pm\sqrt{(3+i)^2-4\cdot 2}}{2} = \frac{(3+i)\pm\sqrt{6i}}{2} = \frac{-(3+i)\pm\sqrt{3}(1+i)}{2}$
נסמן $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$. המרחבים העצמיים יהיו:

- עבור V_{λ_1} מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i & -i \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $V_{\lambda_1} = \mathrm{Sp}\{(0.366+0.366i, 1)\} = \mathrm{Sp}\{\frac{1}{1.126}(0.366+0.366i, 1)\}$ ו $B_1 = \{(0.325+0.325i, 0.888)\}$ בסיס א"נ ל V_{λ_1}

- עבור V_{λ_2} מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i & -i \\ -1 & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \\ -1 & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $V_{\lambda_2} = \mathrm{Sp}\{(-1.366 - 1.366i, 1)\} = \mathrm{Sp}\{\frac{1}{2.1753}(-1.366 - 1.366i, 1)\}$ ו $B_2 = \{(-0.628 - 0.628i, 0.4597)\}$ בסיס א"נ ל V_{λ_2}

מטריצה אוניטרית המלכסנת את A_3 תהיה $P = \begin{pmatrix} 0.325 + 0.325i & -0.628 - 0.628i \\ 0.888 & 0.4597 \end{pmatrix}$ ונקבל $P^*AP = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$

סעיף ב

תנאי הכרחי לחיוביות (לחלוטין) של מטריצות הוא היותן צמודות לעצמן. המטריצות C_3, C_4, C_6 אינן צמודות לעצמן:

$$C_3{}^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq C_3 \quad C_4{}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq C_4 \quad C_6{}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq C_6$$

המטריצות C_1, C_2, C_5 צמודות לעצמן ובפרט נורמליות. תנאי הכרחי ומספיק להיותן חיוביות (לחלוטין) נתון לנו לפי משפט 3.3.2: המטריצות חיוביות (לחלוטין) אם ורק אם ערכיהם העצמיים אי-שליליים (חיוביים). נחשב פ"א:

$$p_1(x) = |xI - C_1| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1 - 1 = x(x-2)$$
$$p_2(x) = |xI - C_2| = \begin{vmatrix} x & -i \\ i & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$p_5(x) = |xI - C_5| = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

עבור C_1 נקבל ע"ע $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$, והמטריצה אי-שלילית (אך לא חיובית לחלוטין).
עבור C_2 נקבל ע"ע $\lambda = -1$, קיומו של ע"ע שלילי מצביע על כך שהמטריצה לא חיובית (וגם לא לחלוטין). עבור C_5 נקבל ע"ע $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$, והמטריצה חיובית (לחלוטין).

שאלה 2

תהא T נורמלית במרחב מכפלה פנימית ממימד סופי.
נוכיח:
(i) נוכיח בעזרת הכלה דו-כיוונית:
יהא $v \in \ker T$.

$$0 = (Tv, Tv) \overset{\text{תכונות צמוד}}{=} (v, T^*Tv) \overset{TT^* = T^*T}{=} (v, TT^*v) = (T^*v, T^*v)$$

ומתכונת החיוביות נסיק $T^*v = 0$. ההכלה בכיוון השני שקולה לחלוטין.

(ii) נוכיח בעזרת הכלה ושוויון מימדים. יהא $u \in \operatorname{Im} T, v \in \ker T$. עבור u, קיים $w \in V : Tw = u$. נקבל:

$$(u, v) = (Tw, v) = (w, T^*v) \overset{(i)}{=} (w, 0) = 0$$

קיבלנו $\operatorname{Im} T \subseteq (\ker T)^\perp$. אולם, מלינארית 1 ידוע לנו כי $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim V = \dim \ker T + \dim(\ker T)^\perp$.
קיבלנו שוויון מימדים ולכן $\operatorname{Im} T = (\ker T)^\perp$.

(iii) נוכיח בעזרת התכונות שהוכחנו קודם:

$$\operatorname{Im} T \overset{(ii)}{=} (\ker T)^\perp \overset{(i)}{=} (\ker T^*)^\perp \overset{(ii)}{=} \operatorname{Im} T^*$$

שאלה 3

נבודד את T^* מהשוויון הנתון:

$$\begin{aligned} T^2 = \frac{1}{2}(T + T^*) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}T^* = T^2 - \frac{1}{2}T \Leftrightarrow \\ T^* = 2T^2 - T \end{aligned}$$

נראה כי T מתחלפת עם הצמודה לה:

$$\begin{aligned} TT^* &= T(2T^2 - T) = 2T^3 - T^2 \\ T^*T &= (2T^2 - T)T = 2T^3 - T^2 = TT^* \end{aligned}$$

הוכחנו כי T נורמלית. נראה כ T צמודה לעצמה: יהא λ שורש (ממשי או מרוכב) כלשהו של הפולינום האופייני של T. נוכיח כי בהכרח λ ממשי.
יהא B בסיס א"נ כלשהו של V, ותהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה כך ש $[T]_B = A$.
משוויון הפולינומים האופייניים של T ו-A נסיק כי λ שורש של הפולינום האופייני של A. בגלל שA מרוכבת, λ ערך עצמי של A.
לפי לינארית 1, v וקטור עצמי של A^2 השייך לλ^2.
נפעיל את ההעתקה $[\cdot]_B$ על השוויון שמצאנו לעיל:

$$A^* \overset{2.1.3}{=} [T^*]_B = [2T^2 - T]_B = 2[T]_B^2 - [T]_B = 2A^2 - A$$

לכן, $A^*v = (2A^2 - A)v = (2\lambda^2 - \lambda)v$. בנוסף, לפי למה 3.2.5 בתרגום למטריצות, $A^*v = \overline{\lambda}v$. נשווה ונקבל $(\lambda^2 - \lambda - \overline{\lambda})v = 0$.
היות ו $v \neq 0$, בהכרח מקבלים $\lambda^2 - \lambda - \overline{\lambda} = 0$. נראה כי ממשיותו של λ הכרחית לקיום שוויון זה.
נסמן אפוא $\lambda = x + iy$.

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - \overline{\lambda} &= (x + iy)^2 - (x + iy) - (x - iy) = \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 - x - iy - x + iy = \\ &= (x^2 - 2x - y^2) + (2xy)i = 0 \\ &\to \begin{cases} x^2 - 2x - y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

מהשוויון השני, בהכרח $x = 0$ או $y = 0$. נניח כי $x = 0$ ונציב בשוויון הראשון. נקבל $-y^2 = 0$ ובשני המקרים $y = 0$ וλ מספר ממשי.
אי-לכך, ממשפט 3.3.1 מקבלים שT צמודה לעצמה, ולכן:

$$T^2 = \frac{1}{2}(T + T^*) = \frac{1}{2}(T + T) = T$$

שאלה 4

תהא מטריצה H ממשית סימטרית. לפי משפט הלכסון האורתוגונלי, H לכסינה אורתוגונלית, ונסמן ב Q מטריצה אורתוגונלית המלכסנת אותה.
נסמן את עמודות Q ב $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$. אלו n וקטורים עצמיים של H, ולכל אחד מהם נסמן $Hv_i=\lambda_i v_i$.
ע"פ משפט 2.3.6, B בסיס אורתונורמלי ל$\mathbb{R}^n$. יהא $v\in\mathbb{R}^n$ כך ש $||v||=1$. נציג את v כצירוף לינארי של וקטורי B:

$$v=\sum_{i=1}^n a_i v_i \qquad\qquad Hv=\sum_{i=1}^n Ha_i v_i=\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i v_i$$

נחשב:

$$1=||v||^2=\langle v,v\rangle=\langle\sum_{i=1}^n a_i v_i,\sum_{i=1}^n a_i v_i\rangle\overset{\text{לינאריות}}{=}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i a_j\langle v_i,v_j\rangle \underset{\langle v_i,v_i\rangle=1}{\overset{\langle v_i,v_j\rangle=0}{=}} \sum_{i=1}^n a_i^2$$

$$v^{\,\mathrm{t}}\,Hv=\langle Hv,v\rangle=\langle\sum_{i=1}^n a_i v_i,\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i v_i\rangle\overset{\text{לינאריות}}{=}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i a_j\lambda_j\langle v_i,v_j\rangle \underset{\langle v_i,v_i\rangle=1}{\overset{\langle v_i,v_j\rangle=0}{=}} \sum_{i=1}^n\lambda_i a_i^2\le\sum_{i=1}^n\lambda a_i^2=\lambda\sum_{i=1}^n a_i^2=\lambda$$

שאלה 5

עבור $A=\begin{pmatrix}2-i&-1&0\\-1&1-i&1\\0&1&2-i\end{pmatrix}$ מקבלים $A^*=\begin{pmatrix}2+i&-1&0\\-1&1+i&1\\0&1&2+i\end{pmatrix}$. נחשב:

$$AA^*=\begin{pmatrix}6&-3&-1\\-3&4&3\\-1&3&6\end{pmatrix}=A^*A$$

ולכן A נורמלית.
נסמן ב $E=(e_1,e_2,e_3)$ את הבסיס הסטנדרטי ל $V=\mathbb{C}^3$ ונגדיר את ההעתקה $T_A:V\to V$ כך שלכל $v\in V$, $T_A(v)=Av$.
אז E בסיס א"נ ומתקיים $[T_A]_E=A$, לכן לפי שאלה 3.1.4 A נורמלית $\Leftarrow$ T_A נורמלית.
ההעתקה T_A נורמלית מעל $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, לכן ניתן להשתמש במשפט הפירוק הספקטרלי 3.4.2. נמצא את הפולינום האופייני של T_A:

$$\begin{aligned}p(x)=\det(xI-[T_A]_E)&=\begin{vmatrix}x-2+i&1&0\\1&x-1+i&-1\\0&-1&x-2+i\end{vmatrix}=\\&=(x-2+i)\begin{vmatrix}x-1+i&-1\\-1&x-2+i\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&-1\\0&(x-2+i)\end{vmatrix}=\\&=(x-2+i)(x^2-(3-2i)x+1-3i-1)-(x-2+i)=\\&=(x-2+i)(x^2-(3-2i)x-1-3i)=\\&=(x-2+i)(x+i)(x-3+i)\end{aligned}$$

נקבל 3 ע"ע $\lambda_1=-i,\lambda_2=2-i,\lambda_3=3-i$.

- המרחב העצמי V_{λ_1} הוא מרחב האפס של המטריצה:

$$\begin{pmatrix}-2&1&0\\1&-1&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&1&0\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_1+2R_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&-2\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $V_{\lambda_1}=\mathrm{Sp}\{(1,2,-1)\}$ ונקבל בסיס א"נ $B_1=\{\frac{1}{\sqrt6}(1,2,-1)\}$

- המרחב העצמי V_{λ_2} הוא מרחב האפס של המטריצה:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $V_{\lambda_1}=\mathrm{Sp}\{(1,0,-1)\}$ ונקבל בסיס א"נ $B_2=\{\frac{1}{\sqrt2}(1,0,-1)\}$

- המרחב העצמי V_{λ_3} הוא מרחב האפס של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $V_{\lambda_3} = \mathrm{Sp}\{(1,-1,-1)\}$ ונקבל בסיס א"נ $B_3 = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\}$

נסמן ב P_i את ההטלה האורתוגונלית על המרחב V_{λ_i}.
על פי משפט הפירוק הספקטראלי, מקבלים $T_A = -iP_1 + (2-i)P_2 + (3-i)P_3$.
נפעיל את ההעתקה $[\cdot]_E$ ונקבל $A = -i[P_1]_E + (2-i)[P_2]_E + (3-i)[P_3]_E$.
על פי משפט 1.5.4,

$$P_1(e_1) = \langle (1,0,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1) = \frac{1}{6}(1,2,-1)$$
$$P_1(e_2) = \langle (0,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1) = \frac{2}{6}(1,2,-1)$$
$$P_1(e_3) = \langle (0,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1) = \frac{-1}{6}(1,2,-1)$$
$$P_2(e_1) = \langle (1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \frac{1}{2}(1,0,-1)$$
$$P_2(e_2) = \langle (0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = 0$$
$$P_2(e_3) = \langle (0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \frac{1}{2}(1,0,-1)$$
$$P_3(e_1) = \langle (1,0,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1) = \frac{1}{3}(1,-1,-1)$$
$$P_3(e_2) = \langle (0,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1) = \frac{-1}{3}(1,-1,-1)$$
$$P_3(e_3) = \langle (0,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1) = \frac{-1}{3}(1,-1,-1)$$

ולכן:

$$A = -i \begin{pmatrix} 1/6 & 2/6 & -1/6 \\ 2/6 & 4/6 & -2/6 \\ -1/6 & -2/6 & 1/6 \end{pmatrix} + (2-i) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} + (3-i) \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$