מטלת מנחה 16 - אלגברה לינארית 1

328197462

31/01/2023

שאלה 1

סעיף א

נביע באמצעות a את הפולינום האופייני של $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$$p(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t & -a & -1 \\ -a & t & 1 \\ 0 & 0 & t-a \end{vmatrix} \overset{\text{פיתוח לפי } R_3}{=} (t-a)\begin{vmatrix} t & -a \\ -a & t \end{vmatrix} = (t-a)(t^2-a^2) = (t-a)^2(t+a)$$

הערכים העצמיים של המטריצה יהיו $\lambda = 0$ בריבוי אלגברי 3 כאשר $a = 0$, ובמקרה אחר יהיו $\lambda = a$ בריבוי אלגברי 2 ו$\lambda = -a$ בריבוי אלגברי 1.

נדון בריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 0$ כאשר $a = 0$. זהו ממד מרחב האפס של המטריצה $0I - A$, שהוא מרחב האפס של A - $P(A)$.
לפי $8.6.1$, עבור A מסדר 3 נקבל $\dim P(A) = 3 - \rho(A) = 2$. הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 0$ שונה מהריבוי האלגברי ולכן לפי 11.5.4 המטריצה לא לכסינה כאשר $a = 0$.

כעת נדון בריבויים הגיאומטריים של הערכים העצמיים של A במקרה הנוסף. הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = -a$ הוא לפחות 1 (שהרי יש בממד העצמי וקטור שאינו וקטור האפס) ולכל היותר (לפי $11.5.3$) כריבוי האלגברי - 1. נסיק כי בסך הכל הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = -a$ הוא 1.
הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = a$ הוא ממד מרחב האפס של המטריצה $aI - A = \begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ -a & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. נחשב את דרגת המטריצה:

$$\rho(aI - A) = \rho\begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ -a & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{8.5.1}{\overset{R_2 \to R_2 + R_1}{=}} \rho\begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

ושוב לפי 8.6.1 נקבל שהריבוי הגיאומטרי של $\lambda = a$ הוא 2. במקרה זה, קיבלנו שעבור כל הערכים העצמיים הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי ולכן לפי 11.5.4 המטריצה A לכסינה עבור $a \neq 0$.

סעיף ב

עבור $a = -1$ נקבל $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. הערכים העצמיים של המטריצה A הם $\lambda = 1$ בר"א ור"ג 1, ו$\lambda = -1$ בר"א ור"ג 2.
לכן, A לכסינה ודומה למטריצה $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
כמו כן, קיים במרחב העצמי של $\lambda = 1$ וקטור השונה מאפס v_1 כך ש$Av_1 = v_1$, וקיימים במרחב העצמי של $\lambda = -1$ שני וקטורים בלתי תלויים לינארית ושונים מאפס (כי ממד המרחב הוא 2) v_2, v_3 המקיימים $Av_2 = -v_2, Av_3 = -v_3$.
הוקטור v_1 השייך לערך עצמי שונה לא תלוי לינארית בv_2, v_3 לפי 11.2.4 ולכן השלשה (v_1, v_2, v_3) בת"ל בת שלושה וקטורים עצמיים. המטריצה $P = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)$ הפיכה ומתקיים לפי 11.3.7 $D = P^{-1}AP$.

נמצא ערכים מתאימים ל-v_1, v_2, v_3. עלינו למצוא פתרון לא טריוואלי v_1 למערכת ההומוגנית $(I-A)x=0$. נדרג:

$$I-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&2\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

הוקטור $v_1=(-1,1,0)$ פותר משוואה זו. באופן דומה נדרג את $-I-A$:

$$-I-A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נסמן $x_3=t, x_2=s$, אז $x_1=s-t$ ו-$(s-t,s,t)$ פתרונות למשוואה. ניקח למשל $v_2=(1,1,0), v_3=(-1,0,1)$.

נקבל, לפי השיקולים שהוסברו לעיל, כי $P=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ מלכסנת את A.

נמצא את המטריצה ההופכית P^{-1}. מציאתה תסייע לנו בחישוב.

$$(P|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&-1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&0&1&0&1\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{2}R_2]{R_1\to -R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&-1&0&-1\\0&1&0&0.5&0.5&0.5\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-0.5&0.5&-0.5\\0&1&0&0.5&0.5&0.5\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)=(I|P^{-1})$$

כעת, היות ו-$D=P^{-1}AP$, נקבל $A=PDP^{-1}$ ולכן:

$$A^{2023}=(PDP^{-1})^{2023}=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})\underset{\text{קיבוציות}}{=}PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^{2023}P^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{2023}\begin{pmatrix}-0.5&0.5&-0.5\\0.5&0.5&0.5\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.5&0.5&-0.5\\0.5&0.5&0.5\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.5&0.5&-0.5\\0.5&0.5&0.5\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$