מטלת מנחה 13 - קורס 20218

328197462

08/09/2023

שאלה 1

נניח כי קיימת מעבת הומונית $x' = Ax$ עבורה הפונקציות הבאות מהוות פתרון:

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

אז גם הפונקציה $u = 2x_1 - x_2$, שהיא צירוף לינארי של פתרונות למערכת ההומוגנית. מהווה פתרון למערכת. מתקיים:

$$u(0) = 2 \cdot e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - e^0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן לפי למה 4.1.7, u הוא הפתרון הטריוויאלי, כלומר $u(t) = 0$ לכל $t \in (-1, 1)$. אולם:

$$u(0.5) = 2 \cdot e^{0.5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - e^{-0.5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = (e^{0.5} - e^{-0.5}) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

ונקבל סתירה היות ו $e^{0.5} - e^{-0.5} \neq 0$ וכן $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$

שאלה 2

לפנינו המשוואה $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ראשית נמצא פתרון למערכת ההומוגנית $x' = Ax$. המטריצה A בעלת ערכים קבועים ולכן נמצא את ערכיה העצמיים:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 5 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2) - (-1) \cdot 5 = \lambda^2 - 4 + 5 = \lambda^2 + 1$$

קיבלנו כי למטריצה A שני ערכים עצמיים, $\pm i$. נמצא וקטור עצמי השייך לע"ע $\lambda = i$:

$$iI - A = \begin{pmatrix} i-2 & 5 \\ -1 & i+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} i & 1-2i \\ -1 & i+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to iR_1} \begin{pmatrix} -1 & i+2 \\ -1 & i+2 \end{pmatrix}$$

ועבור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ וקטור עצמי נקבל $-a + (i+2)b = 0$, כלומר $a = (i+2)b$ ולכן $v = b\begin{pmatrix} i+2 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $b = 1$ ונקבל 2 פתרונות מרוכבים בת"ל למערכת ההומוגנית:

$$\begin{cases} x(t) = e^{it}v = (\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} i+2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x^*(t) = e^{-it}v* = (\cos t - i \sin t)\begin{pmatrix} -i+2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

על פי שאלה 4.2.14, החלק הממשי והחלק המדומה של $x(t)$ מהווים זוג פתרונות בת"ל גם הם וניתן להחליף בין הזוגות. אם כן,

$$\begin{aligned} x(t) &= (\cos t + i \sin t)(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \cos t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \sin t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i(\cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

ונקבל זוג פתרונות:

$$\begin{cases} x_1(t) = Re\ x(t) = \cos t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ x_2(t) = Im\ x(t) = \cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{cases}$$

נמצא פתרון פרטי למערכת המקורית בעזרת וריאציית הפרמטרים:

$$\Delta = W(t) = \begin{vmatrix} 2\cos t - \sin t & \cos t + 2\sin t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} = \sin t(2\cos t - \sin t) - \cos t(\cos t + 2\sin t) =$$
$$= 2\cos t \sin t - \sin^2 t - \cos^2 t - 2\cos t \sin t = -(\sin^2 t + \cos^2 t) = -1$$
$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 5e^{2t} & \cos t + 2\sin t \\ 0 & \sin t \end{vmatrix} = 5e^{2t}\sin t$$
$$C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -5e^{2t}\sin t$$
$$\Rightarrow C_1 = -5\int e^{2t}\sin t dt \overset{358}{=} -5 \cdot \frac{e^{2t}(2\sin t - \cos t)}{2^2+1^2} = -e^{2t}(2\sin t - \cos t)$$
$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} 2\cos t - \sin t & 5e^{2t} \\ \cos t & 0 \end{vmatrix} = -5e^{2t}\cos t$$
$$C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = 5e^{2t}\cos t$$
$$\Rightarrow C_2 = 5\int e^{2t}\cos t dt \overset{359}{=} 5 \cdot \frac{e^{2t}(2\cos t + \sin t)}{2^2+1^2} = e^{2t}(2\cos t + \sin t)$$
$$x_p = -e^{2t}(2\sin t - \cos t)\begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + e^{2t}(2\cos t + \sin t)\begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} =$$
$$= e^{2t}(-\begin{pmatrix} 5\cos t \sin t - 2 \\ 2\cos t \sin t - \cos^2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\cos t\sin t + 2 \\ 2\cos t \sin t + \sin^2 t \end{pmatrix}) = e^{2t}\begin{pmatrix} 4 \\ \cos^2 t + \sin^2 t \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ופתרון למערכת יהיה:

$$x = C_1\begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

לפנינו המערכת $x' = Ax$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים של המטריצה A. נפשט את הפ"א בעזרת הרמז שקיבלנו.

$$\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_1\to R_1+R_3 \\ R_2\to R_2+\lambda R_3}}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda+3 \\ 1+2\lambda & 0 & \lambda^2+\lambda+2 \\ 2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \lambda & \lambda+3 \\ 1+2\lambda & \lambda^2+\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3+\lambda^2+2\lambda-(2\lambda+1)(\lambda+3) = \\
&= \lambda^3+\lambda^2+2\lambda-(2\lambda^2+\lambda+6\lambda+3) = \\
&= \lambda^3-\lambda^2-5\lambda-3 = \\
&= \lambda^2(\lambda-3)+2\lambda^2-5\lambda-3 = \\
&= \lambda^2(\lambda-3)+2\lambda^2-6\lambda+\lambda-3 \\
&= \lambda^2(\lambda-3)+2\lambda(\lambda-3)+\lambda-3 \\
&= (\lambda^2+2\lambda+1)(\lambda-3) \\
&= (\lambda+1)^2(\lambda-3)
\end{aligned}$$

נקבל שני ערכים עצמיים - $\lambda_1 = 3$ עם ריבוי אלגברי 1, ו$\lambda_2 = -1$ עם ריבוי אלגברי 2. נמצא פתרון מהצורה $e^{\lambda t}v$ לכל ערך עצמי:

$$3I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ נקבל $b = 0, a + 2c = 0$, כלומר $v = c\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $c = -1$ ונקבל פתרון למערכת $x_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$-I - A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ועבור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ נקבל $a - 2c = 0, -b + 4c = 0$, כלומר $v = c\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $c = 1$ ונקבל פתרון למערכת $x_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

עבור הפתרון השלישי במערכת הפתרונות נמצא וקטור w כך ש $(-I - A)w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. נחזור על פעולות הדירוג שביצענו קודם לכן:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ועבור $w = \begin{pmatrix} abc \end{pmatrix}$ מקבלים $a - 2c = -3, -b + 4c = 7$ ולכן $w = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $c = 2$ ונקבל $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

פתרון נוסף למערכת יהיה $x_3(t) = te^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 2t+1 \\ 4t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}$, והפתרון הכללי יהיה:

$$x = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t}(C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 2t+1 \\ 4t+1 \\ t+2 \end{pmatrix})$$

שאלה 4

לפנינו המערכת $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ראשית נמצא פתרון למערכת ההומוגנית $x' = Ax$. נמצא ערכים עצמיים לA:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{R_2 \to R_2 + R_3}{=} (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-3)(-\lambda+1-(-1)\cdot 1) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

קיבלנו 3 ע"ע. נמצא 3 פתרונות למשוואה ההומוגנית מהצורה $e^{\lambda t} v$.

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור וקטור עצמי $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ השייך לע"ע $\lambda = 1$ נקבל $a = 0, b + 2c = 0$ ולכן $v = c \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נבחר למשל $c = -1$ ונקבל $x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור וקטור עצמי $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ השייך לע"ע $\lambda = 2$ נקבל $c = 0, a - b = 0$ ולכן $v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

נבחר למשל $a = 1$ ונקבל $x_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

$$3I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור וקטור עצמי $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ השייך לע"ע $\lambda = 3$ נקבל $b - 2c = 0, a - b = 0$ ולכן $v = c \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נבחר למשל $c = 1$ ונקבל $x_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

נמצא פתרון פרטי למערכת המקורית בעזרת וריאציית הפרמטרים.

$$\Delta = W(t) = e^{6t}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1\to C_1+C_3}{=} e^{6t}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{6t}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = e^{6t}(2-4) = -2e^{6t}$$

$$\Delta_{C_1'} = e^{7t}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{7t}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = e^{7t}(-1+2) = e^{7t}$$

$$C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -\frac{1}{2}e^{t} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}e^{t}$$

$$\Delta_{C_2'} = e^{6t}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1\to C_1+C_3}{=} e^{6t}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{6t}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = e^{6t}(0) = 0$$

$$C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Delta_{C_3'} = e^{5t}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -e^{5t}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -e^{5t}(-2+1) = e^{5t}$$

$$C_3' = \frac{\Delta_{C_3'}}{\Delta} = -\frac{1}{2}e^{-t} \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$x_p = -\frac{1}{2}e^{t}\cdot e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-t}e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

והפתרון הכללי יהיה:

$$x = C_1e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t}(C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) + C_3e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 5

לפנינו המערכת $x' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} x$ כך ש a, b קבועים ממשיים.
עלינו להוכיח שכל רכיביו של פתרון למשוואה זו אפסים באינסוף אם ורק אם $a < b < 0$. תחילה נמצא ערכים עצמיים ל-A.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - b) - (-b)(-b) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - b^2$$

נמצא שורשים לפ"א:

$$\Delta = (a+b)^2 - 4(ab - b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4b^2 = (a-b)^2 + 4b^2 \geq 0$$

נחלק למקרים. אילו $\Delta = 0$, כלומר יש פתרון יחיד למשוואה וע"ע יחיד למטריצה, הדבר מחייב $b = 0, a - b = 0$ ולכן $a = b = 0$.
במקרה זה נקבל פתרונות מהצורה $C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, שעבור $C_1 \neq 0$ או $C_2 \neq 0$ יכילו רכיבים שאינם אפסים באינסוף.
נתייחס למקרה בו יש שני שורשים שונים, λ_1, λ_2. נקבל מערכת של פתרונות $e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2$ כאשר v_1, v_2 וקטורים עצמיים השייכים לע"ע λ_1, λ_2 בהתאמה.
היות וv_1, v_2 וקטורים קבועים, רכיבי שני פתרונות אלה אפסים באינסוף אם ורק אם $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. במקרה זה כל פתרונות המערכת יהיו צירוף לינארי של שני הפתרונות שלהם וגם הם יהיו אפסים באינסוף.
נסכם: כל רכיב בכל פתרון למערכת אפס באינסוף אם ורק אם $\Delta > 0$ וכן $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. על פי נוסחת השורשים:

$$\lambda_1 = \frac{a + b + \sqrt{\Delta}}{2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < -a - b$$

היות ו$\sqrt{\Delta}$ הוא מספר חיובי, נדרוש $-a - b > 0$, כלומר $a + b < 0$. בהינתן דרישה סמויה זו, אי-שוויון זה שקול ל:

$$\begin{aligned} \Delta = (a-b)^2 + 4b^2 &< (-a-b)^2 \\ a^2 - 2ab + 5b^2 &< a^2 + 2ab + b^2 \\ 4b^2 &< 4ab \\ b^2 &< ab \end{aligned}$$

עבור $b = 0$ שוויון זה בהכרח לא מתקיים.
לכן $b \neq 0$ ובהכרח $b^2 > 0 \Rightarrow (a-b)^2 < (a-b)^2 + 4b^2 = \Delta$. מקבלים:

$$\lambda_1 = \frac{a + b + \sqrt{\Delta}}{2} > \frac{a + b + \sqrt{(a-b)^2}}{2} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

אם $a \geq b$, כלומר $a - b \geq 0$, מקבלים $\lambda_1 > \frac{a+b+a-b}{2} = a$.
אחרת נקבל $\lambda_1 > \frac{a+b+b-a}{2} = b$.
בכל מקרה, $\lambda_1 > \max\{a, b\}$ ולכן עבור שליליותו של λ_1 צריך בהכרח להתקיים $a, b < 0$.
משליליותו של b ואי-השוויון $b^2 < ab$ נסיק $a > b$, ונקבל תנאי הכרחי לשליליותו של λ_1: $a > b > 0$.
בעת נראה כי זהו תנאי מספיק לשליליותם של λ_1, λ_2. הראינו כי עבור $a > b > 0$ מתקיים $b^2 < ab$, הגורר $\lambda_1 < 0$. נוסף על כך, עבור $\lambda_2 = \frac{a+b-\sqrt{\Delta}}{2}$, כאשר a, b שליליים, וממילא $\sqrt{\Delta}$ חיובי, נסיק כי $a + b - \sqrt{\Delta}$ שלילי ומכאן $\lambda_2 < 0$.
לסיכום, הראינו כי $a > b > 0$ תנאי הכרחי ומספיק לשליליותם של λ_1, λ_2 ומכאן לאפסות באינסוף של כל רכיב בכל פתרון למשוואה הנתונה.

שאלה 6

לפנינו המערכת $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2t} & \frac{-t}{2} \\ \frac{3}{2t^3} & \frac{-1}{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -t^3 \\ -t \end{pmatrix}$$

נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית המתאימה, $x' = Ax$, שבו הרכיב השני קבוע. נסמן אפוא $x = \begin{pmatrix} u(t) \\ C \end{pmatrix}$. מתקיים:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = x' = Ax = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ C \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2u(t) - Ct^4 \\ 3u(t) - Ct^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} 2t^3 \cdot u' = 7t^2u - Ct^4 \\ 3u - Ct^2 = 0 \end{cases} \quad \to \begin{cases} 2t^3 \cdot u' = t^2(4u + 3u - Ct^2) \\ 3u - Ct^2 = 0 \end{cases}$$

נציב את המשוואה השנייה בראשונה ונקבל:

$$\begin{aligned} 2t^3 \cdot u' &= 4t^2u \\ \frac{u'}{u} &= \frac{2}{t} \\ \frac{du}{u} &= \frac{2}{t}dt \\ \ln|u| &= 2\ln|t| + C_1 = \ln(t^2) + C_1 \\ |u| &= e^{C_1}t^2 \\ u &= \pm e^{C_1}t^2 = C_2t^2 \end{aligned}$$

נבחר למשל $u = t^2$, אז $Ct^2 = 3u = 3t^2$ ולכן $C = 3$ ו $x_1 = \begin{pmatrix} t^2 \\ 3 \end{pmatrix}$ מהווה פתרון ל$x' = Ax$.

נמצא פתרון נוסף למערכת ההומוגנית על פי הטכניקה בסעיף 4.2.5. נמצא פונקציה וקטורית $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ונסמן $x = \begin{pmatrix} y_1 + t^2y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$. אז:

$$\begin{pmatrix} y_1' + 2ty_2 + t^2y_2' \\ 3y_2' \end{pmatrix} = x' = Ax = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 + t^2y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2y_1 + 7t^4y_2 - 3t^4y_2 \\ 3y_1 + 3t^2y_2 - 3t^2y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2y_1 + 4t^4y_2 \\ 3y_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} y_1' + 2ty_2 + t^2y_2' = \frac{7}{2t}y_1 + 2ty_2 \\ y_2' = \frac{1}{2t^3}y_1 \end{cases} \quad \to \begin{cases} y_1' + t^2y_2' = \frac{7}{2t}y_1 \\ y_2' = \frac{1}{2t^3}y_1 \end{cases}$$

נציב את המשוואה השנייה בראשונה ונקבל:

$$\begin{aligned} y_1' + \frac{t^2}{2t^3}y_1 &= \frac{7}{2t}y_1 \\ y_1' + \frac{1}{2t}y_1 &= \frac{7}{2t}y_1 \\ y_1' &= \frac{3}{t}y_1 \\ \frac{dy_1}{y_1} &= \frac{3}{t}dt \\ \ln|y_1| &= 3\ln|t| + C_3 = \ln|t^3| + C_3 \\ |y_1| &= e^{C_3}|t^3| \\ y_1 &= \pm e^{C_3}t^3 = C_4t^3 \end{aligned}$$

נבחר למשל $y_1 = t^3$, אז $y_2' = \frac{1}{2t^3}y_1 = \frac{1}{2}$ ולכן $y_2 = \frac{t}{2} + C_5$. נבחר למשל $y_2 = \frac{t}{2}$ ונקבל פתרון:

$$\begin{pmatrix} t^3 + t^2 \cdot \frac{t}{2} \\ \frac{3t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3t^3}{2} \\ \frac{3t}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$$

ו$\begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$ $x_2 =$ פתרון נוסף למערכת ההומוגנית.

נמצא פתרון פרטי למערכת המקורית בעזרת וריאציית הפרמטרים:

$$\Delta = W(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t^3 \\ 3 & t \end{vmatrix} = t^3 - 3t^3 = -2t^3$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} -t^3 & t^3 \\ -t & t \end{vmatrix} = -t^4 + t^4 = 0$$

$$C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} t^2 & -t^3 \\ 3 & -t \end{vmatrix} = -t^3 + 3t^3 = 2t^3$$

$$C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = -1 \Rightarrow C_2 = -t$$

$$x_p = 0 \begin{pmatrix} t^2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-t) \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^4 \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

והפתרון הכללי למשוואה יהיה:

$$x = \begin{pmatrix} -t^4 \\ -t^2 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$$