מטלת מנחה 16 - אלגברה לינארית 2

328197462

16/06/2023

שאלה 1

סעיף א

נמצא ערכים עצמיים של A:

$$P_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-6 & 9 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x(x-6) - (-1)9 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

קיבלנו ערך עצמי יחיד בעל ריבוי אלגברי 2. נמצא את הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי זה, המסמן לפי משפט ז'ורדן את מספר בלוקי הז'ורדן במטריצה:

$$3I - A = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} => \dim\ker(3I - A) = 1$$

אי-לכך, צורת ז'ורדן של המטריצה תהיה $G = J_2(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

בעת, תהא T_A העתקה כך ש $[T_A]_E = A$ עבור הבסיס הסטנדרטי E. נרצה למצוא בסיס $B = \{b_1, b_2\}$ כך ש $[T_A]_B = G$.
כלומר, מתקיים:

$$\begin{cases} Ab_1 = 3b_1 \\ Ab_2 = b_1 + 3b_2 \end{cases} \quad \to \begin{cases} (A-3I)b_1 = 0 \\ (A-3I)b_2 = b_1 \end{cases}$$

הוקטור b_1 הוא וקטור מהמרחב העצמי $V_{\lambda=3}$. ניקח למשל $b_1 = (3,1)$. נפתור:

$$(A - 3I|b_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -9 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ניקח למשל $b_2 = (1,0)$, אז מקבלים $[T_A]_B = G$ כנדרש.
מטריצת המעבר $P_{E\to B}$ תהא $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ומתקיים $G = [T_A]_B = P^{-1}[T_A]P = P^{-1}AP$.

סעיף ב

נחשב באופן כללי את G^n ואת A^n עבור n טבעי כלשהו.
על פי נוסחת הבינום, ולאור העובדה כי λI מטריצה סקלארית מתחלפת עם כל מטריצה, נקבל:

$$\begin{aligned} G^n = (J_2(0) + 3I)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} J_2(0)^i \cdot 3^{n-i} = [J_2(0)^k = 0, k \geq 2] = \\ &= \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} J_2(0)^i \cdot 3^{n-i} = \\ &= 1 \cdot J_2(0)^0 \cdot 3^n + n \cdot J_2(0)^1 \cdot 3^{n-1} = \begin{pmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ידוע כי אם Q פולינום, $P^{\text{-}1}AP = G$ אז גם $Q(A) = Q(G)P^{\text{-}1}$ לפי טענה 9.1.7. לכן, מתקיים $A^n = PG^nP^{\text{-}1}$.
נחשב את $P^{\text{-}1}$:

$$(P|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) = (I|P^{\text{-}1})$$

אי-לכך,

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (n+1) \cdot 3^n \\ 3^n & n \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1) \cdot 3^n & -n \cdot 3^{n+1} \\ n \cdot 3^{n-1} & -(n-1) \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

ובפרט $G^{100} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}, A^{100} = \begin{pmatrix} 101 \cdot 3^{100} & -100 \cdot 3^{101} \\ 100 \cdot 3^{99} & -99 \cdot 3^{100} \end{pmatrix}$

סעיף ג

נשים לב כי מתקיים $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 0$.
נוכיח באינדוקציה כי $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.
בסיס האינדוקציה נובע מיידית מהשוויון לעיל. נניח כי השוויון מתקיים עבור n כלשהו. אז לפי קיבוציות כפל מטריצות נקבל:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \overset{\text{נתון}}{=} A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{הנחה}}{=} A(A^{n-1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}) \overset{\text{קיבוציות}}{=} A^n \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

בכך השלמנו את ההוכחה. כעת, נחשב:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot 3^{n-1} & -(n-1) \cdot 3^n \\ (n-1) \cdot 3^{n-2} & -(n-2) \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot 3^{n-1} \cdot b - (n-1) \cdot 3^n \cdot a \\ * \end{pmatrix}$$

ולכן $a_n = n \cdot 3^{n-1} \cdot b - (n-1) \cdot 3^n \cdot a$

שאלה 2

שאלה 3

נמצא פולינומים אופיניים למטריצות:

$$P_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix}x-1&3&0&-3\\2&x+6&0&-13\\0&3&x-1&-3\\1&4&0&x-8\end{vmatrix}\overset{C_3\text{ פיתוח}}{=}$$

$$=(x-1)\begin{vmatrix}x-1&3&-3\\2&x+6&-13\\1&4&x-8\end{vmatrix}=(x-1)P_B(x)$$

$$P_B(x)=|xI-B|=\begin{vmatrix}x-1&3&-3\\2&x+6&-13\\1&4&x-8\end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix}x+6&-13\\4&x-8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&-13\\1&x-8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&x-6\\1&4\end{vmatrix}=$$

$$=(x-1)[x^2-2x-48+52]-3(2x-16+13)-3(8-(x-6))=$$

$$=(x-1)(x^2-2x+4)-3[(2x-3)+(2-x)]=$$

$$=(x-1)(x^2-2x+4)-3(x-1)=$$

$$=(x-1)(x^2-2x+4-3)=(x-1)^3$$

קיבלנו $P_A(x)=(x-1)^4, P_B(x)=(x-1)^3$.

סעיף א

האפשרויות לפולינום המינימלי של A הן $(x-1)^4, (x-1)^3, (x-1)^2, (x-1)$. המטריצה A לא סקלארית ולכן $x-1$ נפסל. נבדוק האם A מאפסת את $(x-1)^2, (x-1)^3$:

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&-3&0&3\\-2&-7&0&13\\0&3&0&3\\-1&-4&0&7\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&*&*&*\\ *&*&*&*\\ *&*&*&*\\ *&*&*&*\end{pmatrix}\neq 0$$

מנגד, נמצא את הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 1:

$$\begin{pmatrix}0&-3&0&3\\-2&-7&0&13\\0&3&0&3\\-1&-4&0&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&-7\\0&-3&0&3\\-2&-7&0&13\\0&3&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&-7\\0&-3&0&3\\0&1&0&-1\\0&3&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&-7\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו $\rho(A-I)=2$ ולכן הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי זה הוא 2, וכך גם לפי שאלה 11.9.2 מספר הבלוקים. אילו A לא מאפסת את $(x-1)^3$, נקבל שבלוק הז'ורדן הגדול ביותר בצורת הז'ורדן הוא מסדר 4, כלומר יש בלוק אחד בדיוק וזו סתירה.
נקבל שבצורת הז'ורדן של A יש שני בלוקים, והגדול ביניהם הוא בגודל 3 בדיוק. כלומר צורת הז'ורדן תהיה:

$$\mathrm{diag}\{J_3(1),J_1(1)\}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

סעיף ב

האפשרויות לפולינום המינימלי של B הן $(x-1)^3, (x-1)^2, (x-1)$. שוב נפסלת האפשרות $x-1$. נבדוק האם $(x-1)^2$ מתאפס ע"י B:

$$(B-I)^2=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-2&-7&13\\-1&-4&7\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&*&*\\ *&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}\neq 0$$

הפולינום המינימלי של B יהיה $M_B(x)=(x-1)^3$, ובצורת הז'ורדן של B יש בלוק ז'ורדן בגודל 3.

נקבל את צורת הז'ורדן $J=J_3(1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

נגדיר העתקה $T_B : v \rightarrowtail Bv$, אז $[T_B]_E = B$ עבור הבסיס הסטנדרטי E, ונרצה למצוא בסיס $(v) = (v_1, v_2, v_3)$ כך ש:

$$\begin{cases} Bv_1 = v_1 \\ Bv_2 = v_1 + v_2 \\ Bv_3 = v_2 + v_3 \end{cases} \to \begin{cases} (B-I)v_1 = 0 \\ (B-I)v_2 = v_1 \\ (B-I)v_3 = v_2 \end{cases}$$

נפתור את המערכות. עבור v_1 נרצה וקטור הפותר את:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבחר למשל $v_1 = (3,1,1)$ ונפתור עבור v_2:

$$(B-I|v_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 & 1 \\ -1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נבחר למשל $v_2 = (0,-2,-1)$ ונפתור עבור v_3:

$$(B-I|v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 13 & -2 \\ -1 & -4 & 7 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 13 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נבחר למשל $v_3 = (1,0,0)$, אז אכן מתקיים $[T_B]_{(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ומטריצת המעבר היא $P_{E\to(v)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.