מטלת מנחה 15 - אלגברה לינארית 1

328197462

22/01/2023

שאלה 1

סעיף א

נראה כי ההעתקה $T_1(x,y) = (\sin y, x)$ אינה עונה על הגדרה $9.1.1$.
מצד אחד:

$$T_1(2(0,\frac{\pi}{2})) = T_1(0,\pi) = (\sin\pi, 0) = (0,0)$$

מצד שני:

$$2T_1(0,\frac{\pi}{2}) = 2(\sin\frac{\pi}{2}, 0) = (2,0)$$

עבור $v = (0,\frac{\pi}{2}) \in \mathbb{R}^2$ לא מתקיים $T_1(2v) = 2T_1(v)$ ולכן ההעתקה אינה ליניארית.

סעיף ב

נוכיח לפי $9.1.3$. יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ ויהיו $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$. מקבלים:

$$\begin{aligned}
T_2(\lambda p(x) + \mu q(x)) &= (x+1)(\lambda p(x) + \mu q(x))' - (\lambda p(x) + \mu q(x)) = \\
&= (x+1)\cdot(\lambda p'(x) + \mu q'(x)) - \lambda p(x) - \mu q'(x) = \\
&= \lambda\cdot[(x+1)p'(x) - p(x)] + \mu\cdot[(x+1)q'(x) - q(x)] = \\
&= \lambda T_2(p(x)) + \mu T_2(q(x))
\end{aligned}$$

ולכן לפי 9.1.3 ההעתקה T_2 היא העתקה לינארית.

שאלה 2

סעיף א

הטענה לא נכונה.
תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה המקיימת את התנאי (קיימת אחת כזאת לפחות - העתקת האפס).
נסמן $u_1=(1,0,1), u_2=(1,2,1), u_3=(0,1,1), u_4=(2,3,3)$ וכן נסמן $T(u_1)=T(u_2)=T(u_3)=T(u_4)=(\alpha,\beta,\gamma)$.

ארבע הוקטורים u_1,u_2,u_3,u_4 מהמרחב $\mathbb{R}^3$ שמימדו 3 הם תלויים לינארית. בדיקה קצרה מראה כי $u_4=u_1+u_2+u_3$.
לכן, לפי 9.1.4 נקבל:

$$(\alpha,\beta,\gamma)=T(u_4)=T(u_1+u_2+u_3)\underset{9.1.4}{=}T(u_1)+T(u_2)+T(u_3)=3(\alpha,\beta,\gamma)$$

נקבל $(\alpha,\beta,\gamma)=\underline{0}$.

נראה כעת כי שלוש הוקטורים u_1,u_2,u_3 מהווים בסיס ל$\mathbb{R}^3$. אם נכתוב אותם כשורות במטריצה, נקבל מטריצה שהדטרמיננטה שלה היא:

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}\underset{4.3.6}{\overset{R_2\to R_2-R_1}{=}}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&1&1\end{vmatrix}\underset{C_1\text{פיתוח לפי}}{=}(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=(2\cdot1-1\cdot0)=1\neq0$$

לפי 4.4.1 המטריצה אינה הפיכה, ולכן לפי 3.10.6 שורותיה הן בת"ל. קיבלנו ש u_1,u_2,u_3 שלושה וקטורים בת"ל ב$\mathbb{R}^3$ ולכן מהווים בסיס ל$\mathbb{R}^3$.

אי-לכך, כל $v\in\mathbb{R}_3$ הוא צ"ל של u_1,u_2,u_3, ונקבל לכל $v\in\mathbb{R}^3$:

$$T(v)=T(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3)\underset{9.1.4}{=}\lambda_1T(u_1)+\lambda_2T(u_2)+\lambda_3T(u_3)=\underline{0}+\underline{0}+\underline{0}=\underline{0}$$

וקיבלנו שT העתקת האפס ולכן לא קיימת העתקה שאינה העתקת האפס המקיימת את התנאי.

סעיף ב

נמצא בסיס כללי לV. לפי הנתון V מרחב לינארי מממד סופי, ונסמן $\dim V=n$.
כמו כן, עבור U תת-מרחב של V מתקיים לפי 8.3.4 $\dim U\leq\dim V$ ונסמן $\dim U=k$.
אז ניקח $B=\{v_1,v_2,...,v_k\}$ בסיס לU. בפרט, B קבוצה בת"ל של וקטורים מV ולכן לפי 8.3.5 קיימים $v_{k+1},...,v_n$ כך שהקבוצה $C=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ תהווה בסיס לV.

לפי 9.4.2 קיימת העתקה לינארית T יחידה כך שלכל $v_i\in C$ מתקיים:

$$T(v_i)=\begin{cases}\underline{0} & i=1,...,k\\ v_i & i=(k+1),...,n\end{cases}$$

נבחר את העתקה זו ונראה כי היא מקיימת את תנאי השאלה.
לפי למה 9.3.6 מתקיים:

$$\text{Im}\,T=\text{Sp}\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k),T(v_{k+1}),...,T(v_n)\}=\text{Sp}\{\underline{0},v_{k+1},...,v_n\}\underset{7.5.13\ \text{שאלה}}{=}\text{Sp}\{v_{k+1},...,v_n\}$$

כמו כן הוקטורים $v_{k+1},...,v_n$ בלתי תלויים לינארית (תת-קבוצה של בסיס לV) ולכן מהווים בסיס ל$\text{Im}\,T$ ובפרט $\dim\text{Im}\,T=n-k$.

כעת, לפי משפט המימדים 9.6.1 מתקיים $\dim\ker T+\dim\text{Im}\,T=n$ ונסיק $\dim\ker T=n-(n-k)=k$.
נראה כעת כי $U\subseteq\ker T$. יהא $u\in U$, אז קיימים סקלרים $\lambda_1,...,\lambda_k\in\mathbb{F}$ כך ש $u=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k$, ולכן לפי 9.1.4 מתקיים:

$$T(u)=T(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k)=\lambda_1T(v_1)+\cdots+\lambda_kT(v_k)=\underline{0}$$

ולכן $u\in\ker T$, מתקיים $U\subseteq\ker T$ וממשפטים $8.3.4$א + $8.3.4$ב נקבל $U=\ker T$.

לסיום, לפי שאלה $7.6.8$ נקבל:

$$\ker T+\text{Im}\,T=\text{Sp}(\{v_1,v_2,...,v_k\}\cup\{v_{k+1},...,v_n\})=\text{Sp}(C)=V$$

בפרט $\dim(\ker T+\operatorname{Im} T)=n$ וממשפט המימדים 8.3.6 נקבל:

$$n=\dim(\ker T+\operatorname{Im} T)=\dim\operatorname{Im} T+\dim\ker T-\dim(\operatorname{Im} T\cap\ker T).$$

נסיק $\dim(\operatorname{Im} T\cap\ker T)=n-(n-k)-k=0$, לכן לפי הגדרה $\operatorname{Im} T\cap\ker T=\{\underline{0}\}$ ובכך סיימנו את ההוכחה.

סעיף ג

נניח בשלילה כי קיימת העתקה לינארית $T:V\to V$ כך ש$\ker TS=\{0\}$ אבל $\ker T\neq\{0\}$.
מאחר ו TS העתקה לינארית שמרחב התחום ומרחב הטווח שלה נוצרים סופית וכמובן בעלי אותו מימד, נסיק ממסקנה 9.6.2 כי TS הפיכה.
לכן ההעתקה $T=(TS)\circ S^{-1}$ הפיכה כהרכבת שתי העתקות הפיכות. שוב ממסקנה $9.6.2$ נסיק כי $\ker T=0$ בסתירה להנחת השלילה!

שאלה 3

תהא T העתקה לינארית ממרחב לינארי V לעצמו כך שעבור k טבעי מסוים $T^k = 0$ אבל $T^{k-1} = 0$.
נדגיש כי ברור שלכל $n > k$, $T^n = T^k \circ T^{n-k} = 0$, ועבור כל $v \in V$ כך ש $T^{k-1}(v) \neq 0$ מתקיים לכל $n < k$ $T^n(v) \neq 0$, שכן אחרת $T^{k-1}(v) = T(k-1-n)(T^n(v)) = T^{k-1-n}(0) = 0$. אשתמש בטעות אלה בהמשך התרגיל מבלי לנמק אותן שוב.

סעיף א

יהא $u \in V$ כך ש $T^{k-1}(u) \neq 0$. צריך להוכיח כי $L = \{u, T(u), T^2(u), ..., T^{k-1}(u)\}$ היא קבוצה בלתי-תלויה לינארית, כלומר שאין פתרון לא טריוויאלי למשוואה $\alpha_1 u + \alpha_2 T(u) + \cdots + \alpha_k T^{k-1}(u) = \underline{0}$ $(*)$.
נפעיל את ההעתקה הלינארית T^{k-1} על כל הצדדים. נקבל לפי 9.1.4 כי:

$$T^{k-1}(\alpha_1 u + \alpha_2 T(u) + \cdots + \alpha_k T^{k-1}(u)) = \alpha_1 T^{k-1}(u) + \alpha_2 T^k(u) + \cdots + \alpha_k T^{2k-2}(u) =$$
$$= \alpha_1 T^{k-1}(u) + \underline{0} + \cdots + \underline{0} = \alpha_1 T^{k-1}(u) = \underline{0}$$

היות ו$T^{k-1}(u) \neq 0$ מובטח לנו $\alpha_1 = 0$.

כעת המשוואה $(*)$ תהא כתובה כך: $\alpha_2 T(u) + \alpha_3 T^2(u) + \cdots + \alpha_k T^{k-1}(u) = \underline{0}$.
נפעיל הפעם T^{k-2} על שני האגפים ונקבל, באופן דומה, $\alpha_2 T^{k-1}(u) = \underline{0}$ ולכן $\alpha_2 = 0$. נוכל לחזור שוב ושוב על התהליך ובסוף נקבל $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. הפתרון הטריוויאלי הוא פתרון יחיד למשוואה, ולכן הקבוצה L היא בלתי-תלויה ליניארית.

סעיף ב

נניח בשלילה כי קיימת $A \in M_2(\mathbb{R})$ כך ש $A^2 \neq 0$ אבל $A^3 = 0$. נבחר $V = \mathbb{R}_2$ וכן נבחר העתקה לינארית $T : V \to V$ כך שלכל $v \in V$ נקבל $T(v) = Av$.
זוהי בוודאות העתקה לינארית לפי דוגמה ח ביחידה 9 ושאלה 9.2.9.
מההנחה ומשאלה 9.8.6 נקבל לכל $v \in V$, $T^2(v) = A^2 v$ וכן $T^3(v) = A^3 v = 0$. היות ו$A^2 \neq 0$ נסיק כי $T^2 \neq 0$. בפרט, קיים $u \in V$ כך ש $T^2(u) \neq 0$

כעת, לפי סעיף א עבור $k = 3$, הקבוצה $\{u, T(u), T^2(u)\}$ בלתי תלויה לינארית, אבל זוהי קבוצה של שלושה וקטורים ממרחב במימד 2 וזו סתירה!

שאלה 4

בשאלה מדובר על העתקה $T \neq 0$ לא הפיכה המקיימת $T^2 = 2T$.

סעיף א

מימד מרחב המוצא $\mathbb{R}^2$ הוא 2. אי-לכך, לפי 9.6.1 מקבלים:

$$\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = 2$$

מההנחה $T \neq 0$ נובע $\ker T \neq 2$ ולכן $\ker T \leq 1$. נציב במשוואה לעיל ונקבל $\dim \operatorname{Im} T \geq 1$.
כמו כן, מההנחה כי T לא הפיכה נקבל ממסקנה 9.6.2 כי $\Im T \neq \mathbb{R}^2$, לכן לפי 8.3.4 מקבלים $\dim \operatorname{Im} T \leq 1$.
לכן, מאי-השוויונות לעיל נקבל $\dim \operatorname{Im} T = 1$ ולכן $\dim \ker T = 1$.

סעיף ב

מכך ש $\dim \ker T = 1$ נסיק כי קיים $u \in \ker T$ כך ש $u \neq \underline{0}$.
באופן דומה, מכך ש $\dim \operatorname{Im} T = 1$ נסיק כי קיים $v \in \operatorname{Im} T$ כך ש $v \neq 0$.
עבור v זה קיים $w \in \mathbb{R}^2$ כך ש $v = T(w)$. אי-לכך:

$$T(v) = T(T(w)) = T^2(w) = 2T(w) = 2v$$

נראה כי $B = (u, v)$ בסיס ל$\mathbb{R}^2$. נפתור את המשוואה $\lambda u + \mu v = \underline{0}$ ונראה כי קיים רק הפתרון הטריוויאלי.
נפעיל את T על שני אגפי המשוואה. נקבל לפי 9.1.4 כי:

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v) = \lambda \cdot \underline{0} + 2\mu v = \underline{0}$$

היות ו$v \neq 0$ נסיק כי $2\mu = 0$ ולכן $\mu = 0$.
נחזור למשוואה המקורית ונקבל $\lambda u = 0$. שוב, היות ו$u \neq 0$ נקבל $\lambda = 0$ וקיים רק הפתרון הטריוויאלי למשוואה.
לכן $B = (u, v)$ סדרה בת 2 איברים ובת"ל ולכן מהווה בסיס ל$\mathbb{R}^2$.

כעת נחשב וקטורי קואורדינטות:

$$[T(u)]_B = [\underline{0}]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [T(v)]_B = [2v]_B - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$[T]_B = ([T(u)]_B \mid [T(v)]_B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ובזאת סיימנו את ההוכחה.

שאלה 5

נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, וכן נתון $B=(v_1=(1,1,1),v_2=(1,0,1),v_3=(1,1,0))$ בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.
כמו כן ידוע כי $T(1,0,0)=\underline{0}$.

סעיף א

לפי משפט 10.2.1:

$$[T(1,0,0)]_B=[T]_B\cdot[(1,0,0)]_B$$

נתונה לנו באופן חלקי המטריצה המייצגת של ההעתקה T, והיא $[T]_B=\begin{pmatrix}a&0&b\\3&2a&1\\2c&b&a\end{pmatrix}$

כעת נמצא את $([(1,0,0)]_B)$. צריך למצוא α,β,γ סקלרים כך ש $(1,0,0)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(1,1,0)$.
נוציא משוואות ונקבל:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1\\\alpha+\gamma=0\\\alpha+\beta=0\end{cases}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_3\to R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&0&-1\\0&0&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_3\to -R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\to\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=1\\\gamma=1\end{cases}$$

אי-לכך,

$$[T]_B\cdot[(1,0,0)]_B=\begin{pmatrix}a&0&b\\3&2a&1\\2c&b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+b\\-3+2a+1\\-2c+b+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+b\\2a-2\\a+b-2c\end{pmatrix}$$

מאידך, ידוע לנו כי $[T(1,0,0)]_B=[\underline{0}]_B=\underline{0}$, ולכן נקבל:

$$\begin{cases}-a+b=0&\Rightarrow b=1\\2a-2=0&\Rightarrow a=1\\a+b-2c=0&\Rightarrow c=1\end{cases}$$

לסיכום, נקבל $a=b=1$ והמטריצה המייצגת תהיה $[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$

סעיף ב

ניזכר במשפט 10.1.5 - $\rho([T]_B)=\dim\operatorname{Im}T$. לכן נמצא את דרגתה של המטריצה המייצגת ע"י דירוג שלה:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\3&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-3R_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to\frac{1}{2}R_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

הגענו לצורה מדורגת של המטריצה וקיבלנו שתי שורות שאינן שורות אפס. מכאן, לפי 8.5.1 נקבל ש $\rho([T]_B)=2$ ומימד מרחב התמונות $\operatorname{Im}T$, בהתאם, יהיה 2. נמצא שני וקטורים בלתי-תלויים לינארית ב $\operatorname{Im}T$ והם יהוו בסיס לפי 8.3.2.

מהגדרת המטריצה המייצגת נסיק $[T(v_2)]_B=(0\ 2\ 1)^t$, $[T(v_3)]_B=(1\ 1\ 1)^t$. שני הוקטורים הם בת"ל (אינם פרופורציונים) ולכן לפי 8.4.4 גם הוקטורים $T(v_2),T(v_3)\in\operatorname{Im}T$ הינם בלתי-תלויים לינארית ולכן מהווים בסיס ל-$\operatorname{Im}T$. נחשב אותם במפורש:

$$T(v_2)=0v_1+2v_2+1v_3=2(1,0,1)+(1,1,0)=(3,1,2)$$
$$T(v_3)=1v_1+1v_2+1v_3=(1,1,1)+(1,0,1)+(1,1,0)=(3,2,2)$$

ולכן הקבוצה $\{(3,1,2),(3,2,2)\}$ בסיס ל-$\operatorname{Im}T$.

כעת, ניזכר במשפט המימדים 9.6.1. מימד מרחב המוצא $\mathbb{R}^3$ הוא 3, ולכן נקבל $\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker T=3$, ומכאן $\dim\ker T=1$
כלומר, יש צורך בוקטור יחיד מ-$\ker T$ (הקבוצה המכילה אותו בת"ל), למשל $(1,0,0)\in\ker T$, והקבוצה $\{(1,0,0)\}$ בסיס ל-$\ker T$.

סעיף ג

יהא וקטור $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. נמצא וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס B.
מחפשים שוב α,β,γ כך ש$\alpha(1,1,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(1,1,0)=(x,y,z)$ (נביע באמצעות x,y,z). נוציא משוואות:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=x\\ \alpha+\gamma=y\\ \alpha+\beta=z\end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\1&0&1&y\\1&1&0&z\end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_3\to R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&-1&0&y-x\\0&0&-1&z-x\end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_3\to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&1&0&x-y\\0&0&1&x-z\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&y\\0&1&0&x-y\\0&0&1&x-z\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-x+y+z\\0&1&0&x-y\\0&0&1&x-z\end{array}\right) \to \begin{cases}\alpha=-x+y+z\\ \beta=x-y\\ \gamma=x-z\end{cases}$$

כעת, שוב לפי 10.2.1, נקבל:

$$[T(v)]_B=[T]_B\cdot[v]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-x+y+z\\x-y\\x-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y+2z\\y+z\end{pmatrix}$$

"נתרגם" מוקטור הקואורדינטות:

$$T(v)=y(1,1,1)+(y+2z)(1,0,1)+(y+z)(1,1,0)=(3y+3z,2y+z,2y+2z)$$

לסיכום נקבל $T(x,y,z)=(3y+3z,2y+z,2y+2z)$.