מטלת מנחה 16 - אלגברה לינארית 2

328197462

16/06/2023

שאלה 1

סעיף א

נמצא ערכים עצמיים של A:

$$P_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-6 & 9 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x(x-6) - (-1)9 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

קיבלנו ערך עצמי יחיד בעל ריבוי אלגברי 2. נמצא את הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי זה, המסמן לפי משפט ז'ורדן את מספר בלוקי הז'ורדן במטריצה:

$$3I - A = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} => \dim\ker(3I - A) = 1$$

אי-לכך, צורת ז'ורדן של המטריצה תהיה $G = J_2(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

בעת, תהא T_A העתקה כך ש $[T_A]_E = A$ עבור הבסיס הסטנדרטי E. נרצה למצוא בסיס $B = \{b_1, b_2\}$ כך ש $[T_A]_B = G$.
כלומר, מתקיים:

$$\begin{cases} Ab_1 = 3b_1 \\ Ab_2 = b_1 + 3b_2 \end{cases} \to \begin{cases} (A-3I)b_1 = 0 \\ (A-3I)b_2 = b_1 \end{cases}$$

הוקטור b_1 הוא וקטור מהמרחב העצמי $V_{\lambda=3}$. ניקח למשל $b_1 = (3,1)$. נפתור:

$$(A - 3I|b_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -9 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ניקח למשל $b_2 = (1,0)$, אז מקבלים $[T_A]_B = G$ כנדרש.
מטריצת המעבר $P_{E\to B}$ תהא $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ומתקיים $G = [T_A]_B = P^{-1}[T_A]P = P^{-1}AP$.

סעיף ב

נחשב באופן כללי את G^n ואת A^n עבור n טבעי כלשהו.
על פי נוסחת הבינום, ולאור העובדה כי λI מטריצה סקלארית מתחלפת עם כל מטריצה, נקבל:

$$\begin{aligned} G^n = (J_2(0) + 3I)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} J_2(0)^i \cdot 3^{n-i} = [J_2(0)^k = 0, k \geq 2] = \\ &= \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} J_2(0)^i \cdot 3^{n-i} = \\ &= 1 \cdot J_2(0)^0 \cdot 3^n + n \cdot J_2(0)^1 \cdot 3^{n-1} = \begin{pmatrix} 3^n & n\cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ידוע כי אם Q פולינום, $P^{-1}AP = G$ אז גם $Q(G) = P^{-1}Q(A)$ לפי טענה 9.1.7. לכן, מתקיים $A^n = PG^nP^{-1}$.
נחשב את P^{-1}:

$$(P|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) = (I|P^{-1})$$

אי-לכך,

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (n+1) \cdot 3^n \\ 3^n & n \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1) \cdot 3^n & -n \cdot 3^{n+1} \\ n \cdot 3^{n-1} & -(n-1) \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

ובפרט $A^{100} = \begin{pmatrix} 101 \cdot 3^{100} & -100 \cdot 3^{101} \\ 100 \cdot 3^{99} & -99 \cdot 3^{100} \end{pmatrix}$, $G^{100} = \begin{pmatrix} 3^{100} & 100 \cdot 3^{99} \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$

סעיף ג

נשים לב כי מתקיים $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 0$.
נוכיח באינדוקציה כי $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.
בסיס האינדוקציה נובע מיידית מהשוויון לעיל. נניח כי השוויון מתקיים עבור n כלשהו. אז לפי קיבוציות כפל מטריצות נקבל:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \overset{\text{נתון}}{=} A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{הנחה}}{=} A(A^{n-1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}) \overset{\text{קיבוציות}}{=} A^n \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

בכך השלמנו את ההוכחה. כעת, נחשב:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot 3^{n-1} & -(n-1) \cdot 3^n \\ (n-1) \cdot 3^{n-2} & -(n-2) \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot 3^{n-1} \cdot b - (n-1) \cdot 3^n \cdot a \\ * \end{pmatrix}$$

ולכן $a_n = n \cdot 3^{n-1} \cdot b - (n-1) \cdot 3^n \cdot a$

שאלה 2

מעל השדה הסגור אלגברית $\mathbb{C}$, הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים לינאריים.
נרצה להראות כי V הוא סכום ישר של מרחבים עצמיים של T: יהא λ שורש של הפולינום האופייני (שורש כזה קיים בוודאות כי הפולינום מתפרק לגורמים לינאריים) ונדון במרחב העצמי שלו V_λ. אילו $V = V\lambda$ אזי ההוכחה הסתיימה - T לכסינה ולכן לפי משפט הלכסון האורתוגונלי נורמלית.
אם $V_\lambda \subsetneq V$ אז נדון במרחב המשלים ${V_\lambda}^\perp$.

נוכיח כי ${V_\lambda}^\perp$ הוא מרחב T-שמור וכן T^*-שמור. לכל $u \in V_\lambda, v \in {V_\lambda}^\perp$ מקבלים:

$$(u, Tv) = (T^*u, v) = [u \text{ וו"ע של } T^*] = (\alpha u, v) = \alpha(u, v) = \alpha \cdot 0 = 0$$
$$(u, T^*v) = (Tu, v) = (\lambda u, v) = \lambda(u, v) = \lambda \cdot 0 = 0$$

קיבלנו כי לכל $v \in {V_\lambda}^\perp$, $Tv, T^*v \in {V_\lambda}^\perp$ ולכן המרחב הוא מרחב T-שמור וכן T^*-שמור.

נדון אפוא בצמצום של T, T^* למרחב ${V_\lambda}^\perp$, שנסמנם ב S, S^*. אכן, S^* צמוד ל S, כי לכל $u, v \in {V_\lambda}^\perp$ מתקיים $(Su, v) = (Tu, v) = (u, T^*v) = (u, S^*v)$. כמו כן, כל וקטור עצמי של S (שהוא וקטור עצמי של T ולכן גם של T^*) יהיה וקטור עצמי של S, ולכן ניתן לחזור על התהליך שעשינו עם ערך עצמי נוסף.
נחזור שוב ושוב על התהליך, עד שהמרחב העצמי שמצאנו בשלב זה יהיה שווה בדיוק למרחב עליו הגדרנו את העתקת הצמצום (דבר המובטח בהעתקה ממימד 1).

נקבל כי V הוא סכום ישר של מרחבים עצמיים של T. על כל תת-מרחב כזה ניתן לבצע גרם שמידט, ואיחוד הבסיסים שמצאנו יהווה בסיס א"נ של וקטורים עצמיים של T על פי 3.2.6.
מצאנו כי T לכסינה אורתוגונלית ולכן לפי 3.2.1 ההעתקה T נורמלית.

שאלה 3

נמצא פולינומים אופיניים למטריצות:

$$P_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix}x-1&3&0&-3\\2&x+6&0&-13\\0&3&x-1&-3\\1&4&0&x-8\end{vmatrix}\overset{\text{פיתוח}\ C_3}{=}$$
$$=(x-1)\begin{vmatrix}x-1&3&-3\\2&x+6&-13\\1&4&x-8\end{vmatrix}=(x-1)P_B(x)$$
$$P_B(x)=|xI-B|=\begin{vmatrix}x-1&3&-3\\2&x+6&-13\\1&4&x-8\end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix}x+6&-13\\4&x-8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&-13\\1&x-8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&x-6\\1&4\end{vmatrix}=$$
$$=(x-1)[x^2-2x-48+52]-3(2x-16+13)-3(8-(x-6))=$$
$$=(x-1)(x^2-2x+4)-3[(2x-3)+(2-x)]=$$
$$=(x-1)(x^2-2x+4)-3(x-1)=$$
$$=(x-1)(x^2-2x+4-3)=(x-1)^3$$

קיבלנו $P_A(x)=(x-1)^4, P_B(x)=(x-1)^3$.

סעיף א

האפשרויות לפולינום המינימלי של A הן $(x-1)^4$, $(x-1)^3$, $(x-1)^2$, $(x-1)$. המטריצה A לא סקלארית ולכן $x-1$ נפסל. נבדוק האם A מאפסת את $(x-1)^2, (x-1)^3$:

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&-3&0&3\\-2&-7&0&13\\0&3&0&3\\-1&-4&0&7\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&*&*&*\\*&*&*&*\\*&*&*&*\\*&*&*&*\end{pmatrix}\neq 0$$

מנגד, נמצא את הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 1:

$$\begin{pmatrix}0&-3&0&3\\-2&-7&0&13\\0&3&0&3\\-1&-4&0&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&-7\\0&-3&0&3\\-2&-7&0&13\\0&3&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&-7\\0&-3&0&3\\0&1&0&-1\\0&3&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&-7\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו $\rho(A-I)=2$ ולכן הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי זה הוא 2, וכך גם לפי שאלה 11.9.2 מספר הבלוקים. אילו A לא מאפסת את $(x-1)^3$, נקבל שבלוק הז'ורדן הגדול ביותר בצורת הז'ורדן הוא מסדר 4, כלומר יש בלוק אחד בדיוק וזו סתירה.
נקבל שבצורת הז'ורדן של A יש שני בלוקים, והגדול ביניהם הוא בגודל 3 בדיוק. כלומר צורת הז'ורדן תהיה:

$$\operatorname{diag}\{J_3(1),J_1(1)\}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

סעיף ב

האפשרויות לפולינום המינימלי של B הן $(x-1)^3, (x-1)^2, (x-1)$. שוב נפסלת האפשרות $x-1$. נבדוק האם $(x-1)^2$ מתאפס ע"י B:

$$(B-I)^2=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-2&-7&13\\-1&-4&7\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&*&*\\*&*&*\\*&*&*\end{pmatrix}\neq 0$$

הפולינום המינימלי של B יהיה $M_B(x)=(x-1)^3$, ובצורת הז'ורדן של B יש בלוק ז'ורדן בגודל 3.
נקבל את צורת הז'ורדן $J=J_3(1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

נגדיר העתקה $T_B : v \mapsto Bv$, אז $[T_B]_E = B$ עבור הבסיס הסטנדרטי E, ונרצה למצוא בסיס $(v) = (v_1, v_2, v_3)$ כך ש:

$$\begin{cases} Bv_1 = v_1 \\ Bv_2 = v_1 + v_2 \\ Bv_3 = v_2 + v_3 \end{cases} \to \begin{cases} (B-I)v_1 = 0 \\ (B-I)v_2 = v_1 \\ (B-I)v_3 = v_2 \end{cases}$$

נפתור את המערכות. עבור v_1 נרצה וקטור הפותר את:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבחר למשל $v_1 = (3,1,1)$ ונפתור עבור v_2:

$$(B-I|v_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 & 1 \\ -1 & -4 & 7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נבחר למשל $v_2 = (0,-2,-1)$ ונפתור עבור v_3:

$$(B-I|v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 13 & -2 \\ -1 & -4 & 7 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 13 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נבחר למשל $v_3 = (1,0,0)$, אז אכן מתקיים $[T_B]_{(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ומטריצת המעבר היא $P_{E\to(v)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 4

המטריצה A מסדר 7 בעלת ע"ע יחיד $\lambda \in \mathbb{C}$, ולכן הפולינום האופייני שלה יהיה $P_A(x) = (x-\lambda)^7$.
מהנתון $\rho(A-\lambda I) = 2$ נסיק כי הריבוי הגיאומטרי של λ יהיה $7-2=5$.
לכן, לפי משפט ז'ורדן, צורת ז'ורדן של A תכיל 5 בלוקים יסודיים שגודלם הכולל הוא 7. האפשרויות לגדלים, עד כדי סדר הבלוקים, יהיו $2,2,1,1,1$ או $3,1,1,1,1$.
הצורה הראשונה אינה אפשרית, שכן אם זוהי צורת הז'ורדן J, אז לפי 11.10.7 מקבלים:

$$\rho((A-\lambda I)^2) = \rho((J-\lambda I)^2) = \rho\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}^2\right) = 0 \neq 1$$

אי-לכך, צורת הז'ורדן של A תהיה:

$$J = \operatorname{diag}\{J_3(\lambda), J_1(\lambda), J_1(\lambda), J_1(\lambda), J_1(\lambda)\} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & \lambda & & \\ & & & & & \lambda & \\ & & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

הפולינום המינימלי של A יהיה $(x-\lambda)^k$ כאשר k הוא גודל הבלוק המרבי בצורת הז'ורדן של A על פי 11.9.2.
כלומר - $M_A(x) = (x-\lambda)^3$.

שאלה 5

למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני, על כן הפולינום האופייני של A^3 יהיה $P(x) = (x-8)^2(x-1)$. על פי מספר בלוקי בז'ורדן ושאלה 11.9.2 נסיק כי הריבוי הגיאומטרי של 8 ב A^3 הוא 1, והריבוי הגיאומטרי של 1 ב A^3 הוא 1 גם הוא.
נדון כעת בערכים העצמיים של A: ידוע מלינארית 1 כי אם λ ע"ע של A, אזי λ^3 ע"ע של A^3 בעל אותו וקטור עצמי.
אי-לכך, הערכים העצמיים של A יכולים להיות 1 ו-2 בלבד, שכן עבור כל ערך אחר נקבל ע"ע של A^3 הסותרים את הפולינום האופייני שלה.

האפשרויות לפולינום האופייני של A יהיו אפוא $(x-2)^3, (x-1)(x-2)^2, (x-1)^2(x-2), (x-1)^3$. צורת הז'ורדן של A, הדומה לA, תהא בעלת אותו פולינום אפייני.
נניח בשלילה כי הפולינום האופייני של A הוא $(x-1)^3$.
למטריצה A קיימת צורת ז'ורדן הדומה לה, לפי 11.10.1, מעל $\mathbb{C}$, ונסמנה ב $J = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ על פי 9.1.7, המטריצה $J^3 = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ דומה למטריצה A^3 ולכן המטריצות בעלות פולינומים אופיינים זהים, וזו סתירה. באופן דומה נוכל לפסול גם את האפשרויות $(x-1)^2(x-2)$ ו$(x-2)^3$.
הפולינום האופייני של A יהיה בהכרח $P_A(x) = (x-1)(x-2)^2$

אי לכך, האפשרויות לפולינום המינימלי של A יהיו, לפי 9.8.6, $(x-1)(x-2)$ או $(x-1)(x-2)^2$. נניח בשלילה כי $M_A(x) = (x-1)(x-2)$, אז A לכסינה על פי 10.2.11 ולכן צורת הז'ורדן שלה אלכסונית, $J = \mathrm{diag}\{2,2,1\}$. לכן, המטריצה A^3 דומה לפי 9.1.7 למטריצה האלכסונית $J^3 = \mathrm{diag}\{8,8,1\}$, בסתירה לצורת הז'ורדן הנתונה שלה!
הפולינום המינימלי של A יהיה אפוא $M_A(x) = (x-1)(x-2)^2$.

אי-לכך, על פי שאלה 11.10.4, האפשרות היחידה לצורת ז'ורדן של A עד כדי סדר הבלוקים תהא:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$