מטלת מנחה 12 - קורס 20425

שאלה 1

השאלה עוסקת במ"מ X רציף המציין את הרווח החודשי במיליונים של ערוץ הספורט, במ"מ Y המציין את סכום הכסף שנתרם בחודש מסוים, ובמ"מ Z המציין את מספר החודשים שבהם הערוץ **הרוויח**.

סעיף א

נשתמש בתכונת הרציפות: $\lim_{x\to 0^-} f_X(x) = f(0) = 0.8$.

$$\lim_{x\to 0^-} f_X(x) = \lim_{x\to 0^-} 2b(x + 0.5) = 2b(0 + 0.5) = b$$

ונקבל $b = 0.8$.

כמו כן, נדרש גם $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. נקבל ע"פ אדיטיביות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_a^0 (1.6x + 0.8)dx + \int_0^2 (0.8 - 0.4x)dx =$$

$$= (0.8x^2 + 0.8x)|_a^0 + (0.8x - 0.2x^2)|_0^2 =- 0.8a^2 - 0.8a + 0.8 = 1$$

$$0.8a^2 + 0.8a + 0.2 = 0$$
$$4a^2 + 4a + 1 = 0$$
$$(2a + 1)^2 = 0$$
$$a =- 0.5$$

פונקציית הצפיפות של X תהיה:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1.6x + 0.8 & -0.5 \le x \le 0 \\ 0.8 - 0.4x & 0 \le x < 2 \\ 0 & else \end{cases}$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת תהיה, לכל $x \in [-0.5, 0]$:

$$F_X(x) = \int_{-0.5}^{x} (1.6t + 0.8)dt = (0.8t^2 + 0.8t)|_{-0.5}^{x} = 0.8x^2 + 0.8x + 0.2$$

בפרט $P\{X \le 0\} = F_X(0) = 0.2$

לכל $x \in [0, 2]$ פונקציית ההתפלגות המצטברת תהיה:

$$F_X(x) = \int_{-0.5}^{0} f_X(X) + \int_0^x (0.8 - 0.4t)dt = 0.2 + (0.8t - 0.2t^2)|_0^x =- 0.2x^2 + 0.8x + 0.2$$

ולסיכום:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x > -0.5 \\ 0.8x^2 + 0.8x + 0.2 & -0.5 \le x \le 0 \\ -0.2x^2 + 0.8x + 0.2 & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

סעיף ב

על פי הנתונים, ערכו של המ"מ Y יינתן על פי:

$$Y = \begin{cases} 0.1X & 0 \le X \le 0.5 \\ 0.1 & x > 0.5 \\ 0 & else \end{cases}$$

תהא אם כן פונקציה $g: [-\ 0.5,\ 2] \to \mathbb{R}$ כך ש $Y\ =\ g(X)$. אז ע"פ אדיטיביות ולינאריות האינטגרל:

$$E[Y]\ =\ E[g(X)]\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx\ =$$

$$=\ \int_{-0.5}^{0} 0\ \cdot f_X(x)dx\ \ +\ \int_{0}^{0.5} 0.1x\ \ \cdot f_X(x)dx\ +\ \int_{0.5}^{2} 0.1\, f_X(x)dx\ =$$

$$=\ 0\ +\ 0.1\int_{0}^{0.5}(0.8x\ -\ 0.4x^2)dx\ +\ 0.1(F_X(2)\ -F_X(0.5))\ =$$

$$=\ 0.1\ \cdot\ (0.4x^2 - \frac{0.4}{3}x^3)|_{0}^{0.5} +\ 0.1(1\ -\ 0.55)\ =$$

$$=\frac{1}{120}\ +\ 0.045\ =\ 0.0533$$

סעיף ג

נחשב:

$$P\{X\ \le\ 1\ |\ X\ >\ 0\}\ =\frac{P\{0 < X \le 1\}}{P\{X>0\}} = \frac{F_X(1)-F_X(0)}{1-F_X(0)} = \frac{0.8-0.2}{1-0.2} =\ 0.75$$

סעיף ד

על פי הנתונים, $Z\ \sim\ Bin(12,\ P(X\ >\ 0)\ =\ 0.8)$.

נחשב:

$$P\{Z\ =\ 10, 11, 12\}\ = \binom{12}{10}\cdot\ 0.8^{10}\ \cdot\ 0.2^2 + \binom{12}{11}\cdot\ 0.8^{11}\ \cdot\ 0.2\ +\ 0.8^{12} =\ 0.558$$

שאלה 2

השאלה עוסקת במ"מ הבאים:

- המ"מ $A \sim N(13,\ 0.1^2)$ מציין אורך נר (בס"מ) שיוצר במפעל א.
- המ"מ $X \sim Bin(45,\ P\{12.82 \le X \le 13.06\})$ מציין את מספר הנרות שאורכם בין 12.82 ל-13.06 ס"מ בחבילת נרות שיוצרה במפעל א.
- המ"מ $B \sim U(15.5,\ 17.5)$ מציין אורך נר (בס"מ) שיוצר במפעל ב.

סעיף א

ראשית, נסמן את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ב $F(x)$. נקבל:

$$P\{12.82 \le X \le 13.06\} = F(13.06) - F(12.82) =$$
$$= \Phi(\frac{13.06-13}{0.1}) - \Phi(\frac{12.82-13}{0.1}) = \Phi(0.6) - \Phi(-1.8) =$$
$$= \Phi(0.6) - (1 - \Phi(1.8)) = 0.7257 - (1 - 0.9452) = 0.6709$$

כעת,

$$P\{X = 30\} = \binom{45}{30} \cdot 0.6709^{30} \cdot (1 - 0.6709)^{15} = 0.125$$

צריך למצוא גם x כך ש $F(x) = 0.92$.

נגדיר $z = \frac{x-13}{0.1}$, אז $\Phi(z) = 0.92$, וע"פ הערכים הנתונים של Φ, נקבל $1.4 < z < 1.41$. נבצע אינטרפולציה לינארית על מנת למצוא את z:

$$z \approx 1.4 + (1.41 - 1.4) \cdot \frac{0.92-0.9192}{0.9207-0.9192} = 1.405$$

נקבל אפוא $\frac{x-13}{0.1} = 1.405$, כלומר $x - 13 = 0.1405$ ונקבל $x = 13.1405$.

סעיף ב

נקבל ע"פ הנוסחה הידועה כי $Var(B) = \frac{(17.5-15.5)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$.

שאלה 3

נגדיר עבור שאלה זו מאורע T המסמן תנועה עמוסה. נתון כי $P(T) = 0.18$.
כמו כן, נגדיר מספר משתנים מקריים:

- משתנה מקרי $X_1 \sim Exp(\frac{1}{10})$ המסמן את זמן ההמתנה בדקות לאוטובוס בתנועה לא עמוסה.
- מ"מ $X_2 \sim Exp(\frac{1}{20})$ המסמן את זמן ההמתנה בדקות לאוטובוס בתנועה עמוסה.
- מ"מ Y המסמן את זמן ההמתנה לאוטובוס בפועל.

לאורך השאלה נשתמש פעמים רבות בנוסחת ההסתברות השלמה עבור החלוקה $T,\ T^C$ של מרחב המדגם.

סעיף א

לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P\{Y > 15\} = P\{Y > 15 \mid T\} \cdot P(T) + P\{Y > 15 \mid T^C\} \cdot P(T^C) =$$
$$= 0.18 \cdot P\{X_2 > 15\} + 0.82 \cdot P\{X_1 > 15\} =$$

כאשר $P\{X_2 > 15\} = 1 - P\{X_2 \le 15\} = 1 - F_{X2}(15) = 1 - (1 - e^{-0.05\cdot 15}) = e^{-0.75} \approx 0.472$

וכן $P\{X_1 > 15\} = 1 - F_{X1}(15) = e^{-15\cdot 0.1} = e^{-1.5} \approx 0,223$

נקבל סה"כ $P\{Y > 15\} = 0.268$.

סעיף ב

נחשב:

$$P\{T \mid Y > 15\} = \frac{P(T \cap (Y>15))}{P(Y>15)} = \frac{P\{Y>15 \mid T\} \cdot P(T)}{P(Y>15)} = \frac{P\{X_2>15\}\cdot P(T)}{P\{Y>15\}} = \frac{0.472\cdot 0.18}{0.268} = 0.317$$

סעיף ג

שוב על פי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P\{Y \le 8\} = 0.82 \cdot P\{X_1 \le 8\} + 0.18 \cdot P\{X_2 \le 8\} =$$
$$= 0.82(1 - e^{-0.1\cdot 8}) + 0.18(1 - e^{-0.05\cdot 8}) = 0.5109$$

אז:

$$P\{Y \le 15 \mid Y \ge 8\} = \frac{P\{8\le Y\le 15\}}{P\{Y\ge 8\}} = \frac{P\{Y\le 15\}-P\{Y\le 8\}}{1-P\{Y\le 8\}} = \frac{(1-0.268)-0.5109}{1-0.5109} = 0.4521$$

שאלה 4

בשאלה זו $X \sim Exp(0.1)$ ו-$Y = -2X$.

סעיף א

עבור $P\{X > A\} = 0.7$ מקבלים $P\{X \leq A\} = F_X(A) = 0.3$.

נפתור: $F_X(A) = 1 - e^{-0.1A} = 0.3$, ולכן $e^{-0.1A} = 0.7$.

נפעיל את פונקציית הלוגריתם הטבעי ונקבל $-0.1A = \ln(0.7)$ ולכן $A = -10\ln(0.7) \approx 3.5667$.

סעיף ב

נחשב:

$$E[e^{2X}] = \int_0^\infty e^{2x} \cdot 0.1e^{-0.1x} = 0.1\int_0^\infty e^{1.9x} = \infty$$

סעיף ג

הערכים של Y נעים בין 0 ל $-\infty$ — כנגדי למשתנה מעריכי. לכל $x \in (-\infty, 0)$:

$$F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{-2X \leq x\} = P\{X \geq -\frac{1}{2}x\} = 1 - F_X(-\frac{1}{2}x) =$$
$$= 1 - (1 - e^{-0.1\cdot(-0.5)x}) = e^{0.05x}$$

נגזור ונקבל $f_Y(x) = 0.05 \cdot e^{0.05x}$.

מקבלים: $E[Y] = E[-2X] = -2E[X] = -2 \cdot 10 = -20$,

וכן: $Var(Y) = Var(-2X) = (-2)^2 \cdot Var(X) = 4 \cdot 100 = 400$.