מטלת מנחה 12 - קורס אלגוריתמים

שאלה 1

השאלה עוסקת בגרף $G = (V, E)$ מכוון בעל קשתות עם משקלים חיוביים עם קדקוד מוצא s.

טענה (א): אם כל הקשתות ב $P_{s,v}$ שימושיות, אז $P_{s,v}$ מסלול מזערי.

הוכחה: באינדוקציה (חזקה) על צמתי המסלול.

בסיס: המסלול הריק מ s לעצמו מהווה מסלול מזערי באורך 0, כי נתון שמשקלי הקשתות חיוביים, ולכן כל מסלול אחר מ s לעצמו יהיה בעל אורך גדול מאפס. כמו כן, במסלול הריק טענת מורכבותו מקשתות שימושיות מתקיימת באופן ריק.

הנחת האינדוקציה: נניח כי כל מסלול באורך k, שנסמנו $P_{s,u}$, המורכב מצלעות שימושיות, הוא מזערי.

צעד האינדוקציה: נוסיף למסלול $P_{s,u}$ קשת שימושית $e = (u.v)$ ונניח בשלילה כי $P_{s,v}$ לא מסלול מזערי.

נסמן מסלול מזערי מ s ל v ב P'. מהנחת השלילה, $w(P'_{s,v}) < w(P_{s,v})$. ברור כי חלק (יכול להיות גם 0) מהקשתות האחרונות במסלולים הוא משותף להן (כי הן מסתיימות באותה נקודה) תהא x הצומת המוקדמת ביותר במסלול $P_{s,v}$ שהחל ממנה מסלול זה חופף ל $P'_{s,v}$.

1. אילו $x \neq v$, כלומר יש מקטע סופי משותף לשני המסלולים, אז נחסיר משני המסלולים את מקטע זה ונתבונן בשני המסלולים $P'_{s,x}$ $P_{s,x}$. מתקיים:
$$w(P'_{s,x}) = w(P'_{s,v}) - w(P_{x,v}) < w(P_{s,v}) - w(P_{x,v}) = w(P_{s,u})$$
אבל לפי הנחת האינדוקציה, $P_{s,x}$ מסלול באורך k ומטה המורכב מקשתות שימושיות ולכן הוא מסלול מזערי ונקבל סתירה!
2. אילו $x = v$, אזי אין מקטע חופף סופי לשני המסלולים, ולכן $e = (u, v)$ קשת לא שימושית - לא עובר בה אף מסלול מזערי מ s שמסתיים ב v, בסתירה להנחת הטענה!

טענה (ב): אם קיימת קשת $e = (x, y)$ לא-שימושית ב $P_{s,v}$ אז המסלול אינו מזערי.

הוכחה: נסמן את חלקי המסלול $P_{s,v}$ מ s ל x ומ y ל v ב $P_{s,x}$, $P_{y,v}$, בהתאמה. נבנה מסלול בעל עלות נמוכה יותר מהמסלול $P_{s,v}$, ובכך נוכיח כי $P_{s,v}$ אינו מזערי.

אכן, מהנתון ש e קשת אינה שימושית, נסיק כי בפרט בכל מסלול מזערי מ x ל y ש e לא הקשת האחרונה בו. נתבונן במסלול ה"ישיר" ממ x ל y דרך e. מסלול זה אינו מזערי, ולכן קיים מסלול מזערי $P_{x,y}$ כך ש $w(P_{x,y}) < w(e)$. נשרשר את שלושת המסלולים $P_{s,x}$, $P_{x,y}$, $P_{y,v}$ ונקבל מסלול P' כך ש:
$$w(P') = w(P_{s,x}) + w(P_{x,y}) + w(P_{y,v}) > w(P_{s,x}) + w(e) + w(P_{y,v}) = w(P_{s,v})$$
ואכן, $P_{s,v}$ אינו מסלול מינימלי.

נשים לב שמטענה זו עולה למעשה תכונה חשובה של עץ מרחקים מזערי המושרש ב s:

טענה (ג): כל קשת $e = (u, v)$ בעמ"מ היא שימושית

הוכחה: מהגדרת העמ"מ, המסלול בעץ מ s ל v הוא מזערי, ולכן מטענה (ב) כל קשתותיו הן שימושיות ובפרט הקשת e.

נסמן ב $d(u)$ את המרחק של צומת u מהצומת s בעמ"מ.

טענה (ח): קשת $e = (u, v)$ בגרף היא שימושית אם ורק אם $d(v) = d(u) + w(e)$.

הוכחה: נסמן ב $P_{s,u}$ את המסלול המזערי בעמ"מ $T = (V, E')$ מ s ל u.

אם e בעמ"מ, אז ברור שהיא קשת אחרונה במסלול מזערי מ s ל v ואורך המסלול $d(v) = d(u) + w(e)$.
אם e לא בעמ"מ אז:

כיוון ראשון: אם $d(v) = d(u) + w(e)$, אז שרשור הקשת e למסלול $P_{s,v}$ ייתן לנו מסלול באורך $d(v)$ מ s ל v, כלומר מסלול מזערי (כי $d(v)$ המרחק של v מ s בעמ"מ). במסלול זה e תהיה הקשת האחרונה ולכן היא קשת שימושית.

כיוון שני: אם $e \notin T$ שימושית. מהגדרה, קיים מסלול $P_{s,v}$ מזערי העובר בקשת e. כל הקשתות במסלול זה שימושיות, ובפרט בחלק המסלול מ s ל u שנסמנו ב $P_{s.u}$, ע"פ טענה (ב). לכן לפי טענה (א) $P_{s,u}$ מסלול מזערי, ואורכו, מהגדרת העמ"מ, $w(P_{s,u}) = d(u)$. בשרשור e, נקבל שאורך המסלול $P_{s,v}$ יהיה $d(u) + w(e)$.

יהא $P'_{s,v}$ המסלול המזערי מ s ל v שקשתותיו נמצאות בעמ"מ. אז $w(P'_{s,v}) = d(v)$ וברור כי מסלול זה לא עובר ב e.

היות ושני המסלולים מזעריים, הם בהכרח שווי-אורך (אחרת הארוך מביניהם לא היה מזערי). מכאן נקבל $d(v) = d(u) + w(e)$.

טענה (ג): מסלול כמעט-מזערי $P_{s,v}$ מכיל בדיוק קשת לא-שימושית אחת.

הוכחה: מסלול שאינו מכיל קשתות שימושיות, בהכרח יהיה מזערי ע"פ טענה (א) ולכן כל מסלול כמעט-מזערי חייב להכיל <u>לפחות</u> קשת לא שימושית אחת.

נניח כי מסלול $P_{s,v}$ מכיל יותר מקשת לא-שימושית אחת. תהא $e = (x, y)$ הקשת הלא-שימושית ה"מוקדמת" ביותר במסלול $P_{s,v}$. ע"פ בחירתנו, במסלול $P_{s,x}$ מ-s ל x אין קשתות לא-שימושיות, ולפי טענה (א) הוא מזערי.

נתבונן במסלול $P_{y,v}$. היות והוא מכיל לכל הפחות קשת לא-שימושית אחת, הוא אינו מזערי על פי טענה (ב), ונסמן ב $P'_{y,v}$ מסלול מזערי כלשהו מ y ל v.

שרשור שלושת המסלולים $P_{s,x},\ e,\ P'_{y,v}$ ייתן לנו מסלול לא מזערי (כי הוא מכיל את הקשת e, ע"פ טענה ב) ובעל מחיר נמוך יותר מ $P_{s,v}$:

$$w(P_{s,v}) = w(P_{s,x}) + w(e) + w(P_{y,v}) > w(P_{s,x}) + w(e) + w(P'_{y,v})$$

אי-לכך, מסלול בעל יותר מקשת לא-שימושית אחת בהכרח לא יהיה כמעט-מזערי, ומכאן שמסלול כמעט-מזערי יכיל לכל היותר קשת לא-שימושית אחת.

משילוב שתי הטענות נסיק כי מסלול כמעט-מזערי יכיל בדיוק קשת אחת.

טענה (ד): בסימוני סעיף ג, אם $e = (x, y)$ קשת לא-שימושית יחידה במסלול כמעט-מזערי $P_{s,v}$, אז $P_{s,x}$ ו-$P_{y,v}$ מסלולים מזעריים.

הוכחה: אכן, אם e קשת לא-שימושית יחידה אז תתי-המסלולים $P_{s,x},\ P_{y,v}$ מכילים קשתות שימושיות בלבד ולכן הם מזעריים על פי טענה (א).

סעיף (ה) - רעיון האלגוריתם: עלינו למצוא למעשה את המסלול הקצר ביותר העובר דרך קשת לא-שימושית. בהינתן עמ"מ, נוכל לקבוע בזמן קבוע אילו קשתות הן לא-שימושיות, ונבנה גרף מיוחד G' שהוא שכפול של העמ"מ כך שהדרך היחידה לעבור בין שני העותקים של העמ"מ היא על ידי מעבר על קשת לא שימושית.
נריץ שוב את דייקסטרה למציאת המסלול הקצר ביותר בעומד בתנאים אלו.

האלגוריתם:

1. הרץ דייקסטרה תוך שימור התכונה $d(u)$ לכל צומת. נסמן ב T את העמ"מ שנוצר.
2. בנה גרף G' באופן הבא:
   2.1. לכל צומת $u \in V$, צור 2 צמתים $u_1,\ u_2$.
   2.2. לכל קשת $e = (u, v) \in E$:
      2.2.1. אם $d(v) = d(u) + w(e)$, אז צור 2 קשתות $(u_1,\ v_1),\ (u_2,\ v_2)$.
      2.2.2. אחרת, צור קשת $(u_1,\ v_2)$
3. הרץ דייקסטרה ב G' למציאת מסלול מ s_1 ל t_2. אם אין מסלול כזה, אז אין מסלול כמעט-מזערי בגרף. אם קיים, נסמן מסלול זה ב $P\ *$.
4. נבנה מסלול P באופן הבא: לכל $(u_i,\ v_j) \in P\ *$, נוסיף את הקשת (u, v) ל P ונחזיר את P.

הוכחת נכונות:

לפי טענה (ה) ובניית הגרף G', הקשת (p_1, q_2) קיימת ב G' אם ורק אם (p, q) קשת לא שימושית ב G.

אם אין קשת בין קדקוד המסומן "1" וקדקוד המסומן "2" בגרף G', אז אין קשת לא שימושית בגרף ולכן אין מסלול כמעט-מזערי מ s ל t (כל מסלול כזה יעבור רק על קשתות שימושיות ולכן מזערי לפי (א)).
אכן, דייקסטרה לא ימצא מסלול מ s_1 ל t_2 (בשביל מסלול כזה חייב לעבור על קשת $(p_1,\ q_2)$ כלשהי) ותוחזר תוצאה נכונה.

אם הוחזר מסלול, נסמנו ב P . תחילה, ברור כי P מסלול מ s ל t:
מבחירת $Dijkstra$, המסלול $P\ *= s_1, a_1,\ ...,\ p_1,\ q_2,\ ...,\ v_2,\ t_2$ מסלול פשוט מ s_1 ל t_2 שיתורגם למסלול $P = s,\ a,\ ...,\ p,\ q,\ ....,\ v,\ t$ מ s ל t.
נוכיח כי מסלול זה כמעט-מזערי. אכן, קיימת במסלול קשת לא שימושית (p, q), ולכן מסלול זה אינו מזערי.
כמו כן, אורכי המסלולים $P\ *$ ו-P שווים: בשני המסלולים מספר קשתות זהה, ויש התאמה שומרת-משקל בין כל קשת (u_i, v_j) ב $P\ *$ לקשת (u, v) ב P.

יהא מסלול כמעט-מזערי מ s ל t שנסמנו P'. לפי (ג) + (ד), יש במסלול קשת לא-שימושית אחת בדיוק $e = (x, y)$, והמסלולים $P_{s,x},\ P_{y,t}$ מזעריים ולפי (ב) מורכבים אך ורק מקשתות שימושיות.

נתבונן במסלול $\bar{P}$ ב G' בעל אורך זהה ל P':

1. המסלול $P_{s,x} = s,\ \alpha, \beta, ...\ \pi, x$ מורכב רק מקשתות שימושיות, לכן ב G' קיים המסלול $\bar{P}_{s,x} = s_1,\ \alpha_1, ...,\ \pi_1, x_1$ ואורכו זהה לאורכו של $P_{s,x}$.
2. הקשת (x, y) לא-שימושית, לכן ב G' קיימת הקשת $(x_1,\ y_2)$ וניתן לשרשר למסלול שמצאנו את y_2.
3. המסלול $P_{y,t} = y,\ \rho,\ ...,\ \omega,\ t$ מורכב רק מקשתות שימושיות, ולכן בG' קיים המסלול $\bar{P}_{y,t} = y_2,\ \rho_2, ..., \omega_2,\ t_2$ ואורכו זהה לאורכו של $P_{y,t}$.

נקבל את המסלול $\bar{P} = s_1,\ s_1,\ \alpha_1, ...,\ \pi_1, x_1,\ y_2, \rho_2, ..., \omega_2,\ t_2$ מ s_1 ל t_2, ואורכו:

$$w(\bar{P}) = w(\bar{P}_{s,x}) + w(x_1,\ y_2) + w(\bar{P}_{y,t}) = w(P_{s,x}) + w(x, y) + w(P_{y,t}) = w(P')$$

המסלולים $P\ *,\ \bar{P}$ הם מסלולים מ s_1 ל t_2 ב G'. לכן, מבחירת דייקסטרה של המסלול $P\ *$ על פני המסלול $\bar{P}$, נסיק $w(P\ *) \le w(\bar{P})$, כלומר $w(P) \le w(P')$,
ולכן P מסלול לא-מזערי ולא ארוך יותר ממסלול כמעט-מזערי ובכך הוכחנו את נכונות האלגוריתם.

זמן ריצה:

1. הרצת $Dijkstra$ תיקח $O(m\ log\ n)$ צעדים.
2. בניית הגרף: עוברים על n צמתים ו m קשתות ומבצעים בדיקות והוספות ב $\Theta(1)$.
   סך הכל, השלב ייקח $O(m\ +\ n)$ צעדים.
3. הרצת דייקסטרה על גרף בעל $2n$ צמתים ו $O(m)$ (לכל היותר $2m$) קשתות תיקח $O(m\ log\ n)$ צעדים.

סך הכל, נקבל סיבוכיות של $O(m\ log\ n)$ כנדרש.

שאלה 2

השאלה עוסקת בגרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ עם משקלים חיוביים.

טענה (א): אם e * צלע מזערית יחידה החוצה חתך $S, V - S$, אז בהכרח e * נמצאת בכל עפ"מ של G.
הוכחה: הטענה נכונה. זוהי למעשה **תכונת החתך**, עם שינוי קטן בהנחות - לא מובטחים לנו משקלי קשתות שונים בגרף, רק העובדה ש e * מזערית יחידה.
יהא אם כן T עץ פורש שאינו מכיל את e * ונראה כי עלותו אינה מינימלית.
תהא הקשת $e' \in T$ החוצה את החלוקה, שנבחרה בהוכחת תכונת החתך (עמוד 157 בספר). מהנחת השאלה, אכן $w(e *) < w(e')$.
תוכן ההוכחה מבטיח לנו שהעץ $T *= T - \{e'\} + \{e *\}$ גם הוא עץ פורש. עלותו של T * נמוכה מעלותו של T, משום שביצענו פעולת החלפה של קשת בעלת משקל גדול בקשת בעלת משקל קטן יותר.
הוכחנו כי כל עץ פורש שאינו מכיל את e * הוא אינו עפ"מ, והמשמעות היא שכל עפ"מ מכיל בהכרח את e *.

טענה (ב): אם משקלי הצלעות ייחודיים, אז בהכרח לגרף יש עפ"מ יחיד.
הוכחה: הטענה נכונה. נניח בשלילה כי יש שני עפ"מים שונים T_1, T_2.
בלי הגבלת הכלליות, קיימת קשת $e \in T_1$ כך ש $e \notin T_2$ (אחרת היה מתקיים שוויון). נתבונן בגרף החלקי ל G שנוצר מהוספת e ל T_2. בהכרח יווצר מעגל ב $T_2 \cup \{e\}$ המכיל את e (הגרף ללא e הוא עץ ואינו מכיל מעגלים, והוספת קשת שאינה חלק מהעץ תגרור בהכרח יצירת מעגל).
נסמן מעגל זה ב C. כל קשתות מעגל זה נמצאות בעפ"מ כלשהו T_1 או T_2, ובפרט הקשת היקרה ביותר ב C, זאת בסתירה לתכונת המעגל!

שאלה 3

השאלה עוסקת בבעיית הספיקות $SAT - 3$ ובאלגוריתם חמדן המוצע לפתרון הבעיה.

ה"חולשה" באלגוריתם: **סדר הפתרון בליטרלים לא מתחשב בפסוקיות שכבר לא יוכלו להיות מסופקות בעתיד** (מצבי "אין ברירה"). במילים אחרות, ייתכן שלאחר טיפול בליטרלים x_2 ,x_1, נבצע השמה ל x_3 כך שפסוקית מסוימת $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ לא תסופק, וכידוע מספיק שפסוקית יחידה לא תסופק על מנת שנוסחת ה CNF לא תסופק. נבנה דוגמה כזו:

$$\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee x_6) \wedge$$
$$\wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$$

לא קשה לראות כי האלגוריתם יספק את ההשמה $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \leftarrow T$, בעוד השמה שתספק את הנוסחה תהיה $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6 \leftarrow T$ ו $x_3 \leftarrow F$ תספק את הנוסחה ולכן האלגוריתם נכשל.