מטלת מנחה 14 - אינפי 1

שאלה 1

יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $(f\circ g)(x)=x$ לכל $x\in R$.

טענת עזר: הפונקציות להלן מקיימות $(f\circ g)(x)=x$ לכל x ממשי.

$$f(x)=\begin{cases}x & x\le 0\\ x-1 & x>0\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}x & x\le 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$$

הוכחה: יהי $x\in\mathbb{R}$.

אילו $x\le 0$, אז מתקיים $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x)=x$ וההרכבה מקיימת את הנתון.

אילו $x>0$, אז מתקיים $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)=(x+1)-1=x$

בשני המקרים, ההרכבה מקיימת את הנתון.

א. טענה: f חד-חד-ערכית

הפרכה: ניקח את שתי הפונקציות f,g לעיל המקיימות את הנתון.

נבחר $0,1\in\mathbb{R}$ ונחשב:

$0\le 0 \Leftarrow f(0)=0$

$1>0 \Leftarrow f(1)=1-1=0$

לכן $f(0)=f(1)$ אבל $0\ne 1$ וסיימנו.

ב. טענה: g חד-חד-ערכית

הוכחה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ונניח $g(a)=g(b)$.

לכן מתאים למספר ממשי זה איבר יחיד בטווח f, ומתקיים $f(g(a))=f(g(b))$.

כלומר, $(f\circ g)(a)=(f\circ g)(b) \Leftarrow$ מהנתון $a=b$ וסיימנו.

ג. טענה: f על

הוכחה: יהי $y\in\mathbb{R}$ ונראה כי קיים לו מקור ב f. נבחר $g(y)\in\mathbb{R}$ ונחשב:

מהנתון נובע $f(g(y))=(f\circ g)(y)=y$ וסיימנו.

ד. טענה: g על

הפרכה: נבחר בשנית את שתי הפונקציות f,g לעיל המקיימות את הנתון.

נראה כי ל $1\in\mathbb{R}$ לא קיים מקור ב g, כלומר לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $g(x)\ne 1$.

יהי $x\in\mathbb{R}$. אילו $x\le 0$ אז $g(x)=x\le 0<1$ ובפרט $g(x)\ne 1$.

אחרת, אילו $x>0$, אז $g(x)=x+1>1$ ובפרט $g(x)\ne 1$ וסיימנו.

ה. טענה: $(g\circ f)(x)=x$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הפרכה: נבחר פעם נוספת את f,g לעיל המקיימות את הנתון.

נבחר $1\in\mathbb{R}$ ונראה כי $(g\circ f)(1)\ne 1$.

מאחר ו $1>0$, אז מהגדרת f מתקיים $f(1)=1-1=0$.

לכן, מאחר ו $0\le 0$ אז מהגדרת g מתקיים $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(0)=0\ne 1$ וסיימנו

ו. טענה: אם g על, אז לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $(g \circ f)(x) = x$.

הוכחת הטענה: יהי $x \in R$.

אז לפי ההנחה קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש $x = g(y)$.

נחשב: $x = g(y) = g((f \circ g)(y)) = g(f(g(y)) = (g \circ f)(x)$ וסיימנו.

שאלה 2

א. טענה: $\lim_{x \to \frac{2}{\pi}} \lfloor \sin \frac{1}{x} \rfloor = 0$

הוכחה בלשון ϵ, δ: יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{1}{\pi}$ וכעת יהי $x \in \mathbb{R}$ המקיים $0 < |x - \frac{2}{\pi}| < \delta$.

מההנחה על x, $\frac{1}{\pi} < \frac{2}{\pi} - x < \frac{-1}{\pi} \Leftarrow \frac{3}{\pi} < x < \frac{1}{\pi}$ ובפרט $x > \frac{1}{\pi} > 0$.

לכן, $\frac{1}{x} > 0$ (מנה של שני מספרים חיוביים) וגם $\frac{1}{x} < \pi$, כלומר $0 < \frac{1}{x} < \pi$.

כמו כן, $\frac{2}{\pi} \neq x \Leftarrow \frac{\pi}{2} \neq \frac{1}{x}$.

לכן מהגדרת הסינוס, $1 > \sin\frac{1}{x} > 0 \Leftarrow 0 = \lfloor \sin\frac{1}{x} \rfloor$.

נחשב:

$\epsilon > 0 = |0| = ||\lfloor \sin\frac{1}{x} \rfloor|| = |\lfloor \sin\frac{1}{x} \rfloor - 0||$ וסיימנו.

ב. טענה: $\lim_{x \to \infty} \sqrt{2x - \sin 3x} = \infty$

הוכחה בלשון M_1, M_2: יהא $M_1 \in \mathbb{R}$, נבחר $M_2 = max\{1, \frac{M_1^{\ 2}+1}{2}\}$ ואז לכל $x > M_2$,

מתקיים $2x > 1 \geq \sin 3x$, ולכן $2x - \sin 3x \geq 0$ והביטוי מוגדר כהלכה.

כמו כן, מתקיים:

$$\sqrt{2x - \sin 3x} \geq_{(1)} \sqrt{2x - 1} >_{(2)} \sqrt{2M_2 - 1} \geq_{(3)} |M_1| \geq M_1$$ וסיימנו.

מעברים:

(1) לכל מספר ממשי, ובפרט $3x$, מתקיים $\sin 3x \leq 1$.

(2) מההנחה על x, מתקיים $x > M_2$

(3) מבחירת M_2, מתקיים $M_2 \geq \frac{M_1^{\ 2}+1}{2}$. לכן, $M_1^{\ 2} \leq 2M_2 - 1$.

שני האגפים אי-שליליים כי $M_2 \geq 1 \Leftarrow 2M_2 \geq 2 \Leftarrow 2M_2 - 1 \geq 1 > 0$, וכן $M_1^{\ 2} \geq 0$

לכן, $\sqrt{2M_2 - 1} \leq \sqrt{M_1^{\ 2}} = |M_1|$.

שאלה 3

תהא f המוגדרת בקטע (M, ∞).

א. טענה: לא קיים לf גבול סופי כש $x \to \infty$

שלילת הטענה בניסוח Cauchy:

לכל $L \in \mathbb{R}$, לא (לכל $\epsilon > 0$ קיים M ממשי כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$)

לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\epsilon > 0$ כך שלא (קיים M ממשי כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$)

לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל M ממשי לא (לכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$)

לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל M ממשי קיים $x > M$ כך שלא $(|f(x) - L| < \epsilon)$

לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל M ממשי קיים $x > M$ כך ש $|f(x) - L| \geq \epsilon$

שלילת הטענה בניסוח Heine:

לכל $L \in \mathbb{R}$, לא (לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש $x_n \to_{n\to\infty} \infty$ מתקיים $f(x_n) \to_{n\to\infty} L$)

לכל $L \in \mathbb{R}$ קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש $x_n \to_{n\to\infty} \infty$ כך שלא $(f(x_n) \to_{n\to\infty} L)$

לכל $L \in \mathbb{R}$ קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש $x_n \to_{n\to\infty} \infty$ כך ש $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$.

ב. טענה: לפונקציה $f(x) = \frac{4}{5+\cos x}$ לא קיים גבול סופי כאשר $x \to \infty$.

הוכחה בניסוח Cauchy:

יהא L ממשי. נבחין בין שני מקרים:

אילו $L \neq \frac{2}{3}$, נבחר $\epsilon = |\frac{2}{3} - L| > 0$

ואז לכל M ממשי נבחר $x = max\{0, 2\pi\lceil M\rceil\} + 2\pi \geq_{(1)} \lceil M\rceil + 2\pi > \lceil M\rceil \geq_{(2)} M$

נחשב: אילו $x = 2\pi$ אז $\cos x = 1$,

ואילו $x = 2\pi\lceil M\rceil + 2\pi$ אז לפי מחזוריות הקוסינוס $\cos x = 1$

לכן, בשני המקרים $\cos x = 1 \Leftarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{5+1} = \frac{4}{5+\cos x} = f(x)$.

נחשב: $\epsilon = |\frac{2}{3} - L| \geq |\frac{2}{3} - L| = |f(x) - L|$ וסיימנו.

אחרת, אילו $L = \frac{2}{3}$, נבחר $\epsilon = \frac{1}{3}$

ואז לכל M ממשי נבחר $x = max\{0, 2\pi\lceil M\rceil\} + \pi >_{(1)} \lceil M\rceil + \pi > \lceil M\rceil \geq_{(2)} M$

נחשב: אילו $2\pi\lceil M\rceil \geq 0$ אז $\cos x = \cos\pi = -1$.

אחרת, לפי מחזוריות הקוסינוס $\cos x = \cos(2\pi\lceil M\rceil + \pi) = \cos\pi = -1$.

בשני המקרים $\cos x = -1 \Leftarrow f(x) = \frac{4}{5+\cos x} = \frac{4}{5-1} = 1$

נחשב: $\epsilon = \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} = |1 - \frac{2}{3}| = |f(x) - L|$ וסיימנו.

מעברים:

(1) אילו $\lceil M\rceil < 0$, אז $max\{0, 2\pi\lceil M\rceil\} \geq 0 > \lceil M\rceil$ ולפי טרנזיטיביות $max\{0, 2\pi\lceil M\rceil\} > \lceil M\rceil$ וסיימנו.

אילו $\lceil M\rceil = 0$, אז $max\{0, 2\pi\lceil M\rceil\} = \lceil M\rceil = 0 = 2\pi\lceil M\rceil$ ובפרט $max\{0, 2\pi\lceil M\rceil\} \geq \lceil M\rceil$ וסיימנו.

אילו $\lceil M\rceil > 0$, אז $2\pi\lceil M\rceil > \lceil M\rceil > 0$ ולכן $max\{0, 2\pi\lceil M\rceil\} = 2\pi\lceil M\rceil > \lceil M\rceil$ וסיימנו.

(2) מתכונות החלק השלם העליון 1.64.

הוכחה בניסוח Heine

יהא L מספר ממשי.

אילו $L = \frac{2}{3}$, נבחר $x_n = 2\pi n + \pi$. הסדרה שואפת לאינסוף לפי 2.37 וכללי האריתמטיקה "$\infty +$ מספר חיובי" ו"$\infty \cdot$ מספר חיובי" (2.43).

לפי מחזוריות הקוסינוס, $\cos x_n = \cos \pi = -1$.

לכן:

$$f(x_n) = \frac{4}{5+\cos x_n} = \frac{4}{5-1} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

מצאנו סדרה כנדרש המקיימת $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq \frac{2}{3} = L$ וסיימנו.

אחרת, $L \neq \frac{2}{3}$. נבחר $y_n = 2\pi n$. הסדרה שואפת לאינסוף לפי 2.37 וכלל האריתמטיקה "$\infty \cdot$ מספר חיובי" (2.43).

לפי מחזוריות הקוסינוס, $\cos y_n = \cos 2\pi = 1$.

לכן:

$$f(y_n) = \frac{4}{5+\cos y_n} = \frac{4}{5+1} = \frac{2}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

מצאנו סדרה כנדרש המקיימת $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \frac{2}{3} \neq L$ וסיימנו.

שאלה 4

א. טענה: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

הוכחה: נחשב:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =_{(1)} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} =_{(2)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} =_{(3)} 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

מעברים:

(1) בסביבה נקובה קטנה מספיק של 0, $\cos x \approx 1 > 0$ ולכן $1 + \cos x \neq 0$.

(2) מכללי הטריגונומטריה $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

(3) לפי אריתמטיקה (4.38),

טענה 4.44 $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$,

ומשפט 4.45 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ב. טענה: הגבול $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{x^7}$ לא קיים.

הוכחה: נוכיח כי קיימים, במובן הרחב, שני גבולות שונים מימין ומשמאל, ולכן לפי הכללה של 4.48 עבור המובן הרחב נסיק כי לא קיים גבול במובן הרחב, ובפרט לא קיים גבול.

כמו כן, לפי משפט 4.48, הגבול של $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ בנקודה $x = 0$ הוא גם הגבול שלה מימין ומשמאל בנקודה זו. לכן ניתן להשתמש במשפט 4.45 עבור הגבולות משני הצדדים:

<u>גבול מימין.</u> נחשב, לפי אריתמטיקה + 4.45 + 4.53 כלל "$\frac{1}{0^+}$":

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^4 x}{x^7} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^4 x}{x^4} \cdot \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \cdot \frac{1}{x^3} = 1^4 \cdot \frac{1}{(0^+)^3} = \infty$$

<u>גבול משמאל.</u> נחשב, לפי אריתמטיקה + 4.45 + 4.53 כלל "$\frac{1}{0^-}$":

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^4 x}{x^7} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^4 x}{x^4} \cdot \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \cdot \frac{1}{x^3} = 1^4 \cdot \frac{1}{(0^-)^3} = -\infty$$

ג. טענה: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3-3x^5+1}{5x^5+3x^3+1} = -\frac{3}{5}$

הוכחה: נסמן $f(x) = \frac{5x^3-3x^5+1}{5x^5+3x^3+1}$ ונחשב את הגבול.

נשים לב כי בסביבה גדולה מספיק, $x > 0$ ולכן $x^5 \neq 0$.

$$f(x) = \frac{5x^3-3x^5+1}{5x^5+3x^3+1} = \frac{\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}} \cdot \frac{5x^3-3x^5+1}{5x^5+3x^3+1} = \frac{5\cdot\frac{1}{x^2}-3+\frac{1}{x^5}}{5+3\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}} = \frac{5\cdot(\frac{1}{x})^2-3+(\frac{1}{x})^5}{5+3\cdot(\frac{1}{x})^2+(\frac{1}{x})^5}$$

כעת, לפי אריתמטיקה + 4.53 כלל "$\frac{1}{\infty}$", כאשר גבול המכנה $5 + 3 \cdot 0^2 + 0^5 = 5 \neq 0$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot(\frac{1}{x})^2-3+(\frac{1}{x})^5}{5+3\cdot(\frac{1}{x})^2+(\frac{1}{x})^5} = \frac{5\cdot 0^2-3+0^5}{5+3\cdot 0^2+0^5} = -\frac{3}{5}$$ וסיימנו.

ד. טענה: $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - \sin x} + x = 0$

הוכחה: נדון בסביבה $(-\infty, -1)$ של $-\infty$. לכל $x < -1$ מתקיים $x^2 > 1 \geq \sin x$,
ולכן $x^2 - \sin x \geq 0$ והפונקציה מוגדרת בסביבה זו.

ראשית, לפי הכללת גבול של הרכבה במובן הרחב עבור $x = -u$,
ולפי הזהות הטריגונומטרית $\sin(-u) = -u$ והזהות האלגברית $(-u)^2 = u^2$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - \sin x} + x = \lim_{u\to\infty} \sqrt{(-u)^2 - \sin(-u)} + (-u) = \lim_{u\to\infty} \sqrt{u^2 + \sin u} - u$$

כעת, נסמן $g(u) = \sqrt{u^2 + \sin u} - u$, וכן $f(u) = \sqrt{u^2 - 1} - u$, $h(u) = \sqrt{u^2 + 1} - u$.
לכל מספר ממשי ובפרט u, מתקיים $-1 \leq \sin u \leq 1 \Leftarrow u^2 - 1 \leq u^2 + \sin u \leq u^2 + 1$
בהינתן u גדול מספיק, $u > 1 \Rightarrow u^2 > 1 \Rightarrow u^2 - 1 > 0$ ולכן שלושת הביטויים אי-שליליים.
לכן,

$$\sqrt{u^2 - 1} \leq \sqrt{u^2 + \sin u} \leq \sqrt{u^2 + 1}$$

$$\sqrt{u^2 - 1} - u \leq \sqrt{u^2 + \sin u} - u \leq \sqrt{u^2 + 1} - u$$

$f(u) \leq g(u) \leq h(u)$ בהינתן u גדול מספיק.

נחשב:

$$f(u) = \sqrt{u^2 - 1} - u = (\sqrt{u^2 - 1} - u) \cdot \frac{\sqrt{u^2-1}+u}{\sqrt{u^2-1}+u} = \frac{u^2-1-u^2}{\sqrt{u^2-1}+u} = \frac{-1}{\sqrt{u^2-1}+u}$$

לכל $\epsilon > 0$, נבחר $M = max\{\frac{1}{\epsilon}, 1\}$, ואז לכל $u > M$, הביטוי $\sqrt{u^2 - 1} + u$ הוא סכום של ביטויים אי-שליליים ולכן אי-שלילי. וכן, מההנחה על u ומבחירת M:

$$|f(u) - 0| = |\frac{-1}{\sqrt{u^2-1}+u}| = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}+u} < \frac{1}{u} < \frac{1}{M} \leq \epsilon$$

ולכן $\lim_{u\to\infty} f(u) = 0$.

באופן דומה, ניתן להוכיח $\lim_{u\to\infty} h(u) = 0$. לכן, ממשפט הסנדוויץ',

$$\lim_{u\to\infty} g(u) = \lim_{u\to\infty} f(u) = \lim_{u\to\infty} h(u) = 0$$

ולסיכום,

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - \sin x} + x = \lim_{u\to\infty} g(u) = 0$ וסיימנו.

ה. טענה: $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{x}{2})\lfloor \sin x\rfloor = 0$.

הוכחה: ראשית, לפי הרכבה עבור $u = \frac{x}{2}$,

כאשר לכל x בסביבה נקובה של 0 מתקיים $x \neq 0 \Leftarrow u \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} \sin(\frac{x}{2})\lfloor \sin x\rfloor = \lim_{u\to 0} \sin u\lfloor \sin 2u\rfloor$$

נחשב גבול מימין ומשמאל, נראה כי גבולות אלו שווים ונסיק, לפי משפט 4.48, את קיום הגבול $\lim_{u\to 0} \sin u\lfloor \sin 2u\rfloor$ ואת ערכו.

<u>גבול מימין:</u> בסביבה נקובה (מימין) קטנה מספיק של 0,

מתקיים $0 < u < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2u < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin 2u < 1 \Rightarrow \lfloor \sin 2u\rfloor = 0$.

לכן מאריתמטיקה + 4.44,

$$\lim_{u\to 0^+} \sin u\lfloor \sin 2u\rfloor = 0 \cdot 0 = 0$$

<u>גבול משמאל:</u> בסביבה נקובה (משמאל) קטנה מספיק של 0,

מתקיים $-\frac{\pi}{4} < u < 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 2u < 0 \Rightarrow -1 < \sin 2u < 0 \Rightarrow \lfloor \sin 2u\rfloor = -1$

לכן מאריתמטיקה + 4.44,

$$\lim_{u\to 0^-} \sin u\lfloor \sin 2u\rfloor = 0 \cdot (-1) = 0$$

לסיכום, $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{x}{2})\lfloor \sin x\rfloor = \lim_{u\to 0} \sin u\lfloor \sin 2u\rfloor = 0$ וסיימנו.

טענה: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin(\frac{x}{2})\lfloor \sin x\rfloor = 0$

הוכחה: ראשית, נסמן $f(x) = \sin(\frac{x}{2})\lfloor \sin x\rfloor$.

נשים לב כי בסביבה נקובה קרובה מספיק ל $\frac{\pi}{2}$, מתקיים $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

לכן, $0 < \sin x < 1 \Rightarrow \lfloor \sin x\rfloor = 0$.

לכן, בסביבה נקובה קרובה מספיק ל $\frac{\pi}{2}$, מתקיים:

$$f(x) = \sin(\frac{x}{2}) \cdot 0 = 0$$

ולכן, לפי מקומיות הגבול (טענה 4.34), $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$.

טענה: $\lim_{x\to \pi} \sin(\frac{x}{2})\lfloor \sin x\rfloor$ לא קיים.

טענת עזר: $\lim_{x\to \pi} \sin(\frac{x}{2}) = 1$.

הוכחת טענת העזר: ראשית, לפי הרכבה עבור $u = \frac{x}{2}$,

כאשר בסביבה נקובה של π מתקיים $u = \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to \pi} \sin(\frac{x}{2}) = \lim_{u\to \frac{\pi}{2}} \sin u$.

לפי שאלה 4.77, $\lim_{u\to \frac{\pi}{2}} \sin u = 1$ וסיימנו.

הוכחה: נוכיח כי קיימים שני גבולות שונים מימין ומשמאל, ולכן לפי 4.48 נסיק כי לא קיים גבול.

לפי טענת העזר ומשפט 4.48, מתקיים $\lim_{x\to\pi^+} \sin(\frac{x}{2}) = \lim_{x\to\pi^+} \sin(\frac{x}{2}) = \lim_{x\to\pi} \sin(\frac{x}{2}) = 1$

ניעזר בגבולות אלו בחישוב הגבולות החד-צדדיים שלנו:

<u>גבול מימין:</u> בסביבה הימנית $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ של π, מתקיים $-1 < \sin x < 0$ ולכן $\lfloor \sin x \rfloor = -1$.

כעת, לפי הכללה של מקומיות הגבול עבור גבול חד-צדדי, מתקיים $\lim_{x\to\pi^+} \lfloor \sin x \rfloor = -1$

לכן, לפי אריתמטיקה,

$$\lim_{x\to\pi^+} \sin(\frac{x}{2})\lfloor \sin x \rfloor = \lim_{x\to\pi^+} \sin(\frac{x}{2}) \cdot \lim_{x\to\pi^+} \lfloor \sin x \rfloor = 1 \cdot (-1) = -1$$

<u>גבול משמאל:</u> בסביבה השמאלית $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ של π, מתקיים $0 < \sin x < 1$ ולכן $\lfloor \sin x \rfloor = 0$

כעת, לפי הכללה של מקומיות הגבול עבור גבול חד-צדדי, מתקיים $\lim_{x\to\pi^-} \lfloor \sin x \rfloor = -1$

לכן, לפי אריתמטיקה,

$$\lim_{x\to\pi^-} \sin(\frac{x}{2})\lfloor \sin x \rfloor = \lim_{x\to\pi^-} \sin(\frac{x}{2}) \cdot \lim_{x\to\pi^-} \lfloor \sin x \rfloor = 1 \cdot 0 = 0$$

מצאנו קיומם של שני גבולות חד-צדדיים שונים ובכך סיימנו.