מטלת מנחה 11 - קורס 20218

שאלה 1

לפנינו משוואה נפרדה:

$$y' = \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ובאינטגרציה:

$$\sqrt{y} = \arcsin(x) + C$$
$$y = (\arcsin(x) + C)^2$$

נדרוש $y' > 0$ על מנת שהמשוואה תתקיים, ונקבל $\arcsin(x) + C > 0$, כלומר $x > -\sin C$
והפתרון מוגדר בתחום $(-\sin C, 1)$.

על פנת שהפתרון יספק את השוויון $y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$, צריך להתקיים:

$$|\frac{\pi}{2}| = \arcsin\frac{1}{2} + C = \frac{\pi}{6} + C$$

מקבלים $C = \frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$ מקיימים את המשוואה.

אולם $\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin(-\frac{2\pi}{3})$ ולכן הפתרון $y = (\arcsin(x) - \frac{2\pi}{3})^2$ לא מוגדר ב $x = \frac{1}{2}$ ונקבל פתרון יחיד המוגדר ב $x = \frac{1}{2}$ ומקיים משוואה זו, ללא סתירה עם משפט הקיום והיחידות.

שאלה 2

לפנינו משוואה נפרדה שניתן להביא לצורה:

$$y^{-1/3}dy = 3xdx$$

(ונקבל גם פתרון סינגולרי $y \equiv 0$)

באינטגרציה:

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = \frac{3}{2}x^2 + C$$

נציב $(x, y) = (0, 0)$ ונקבל:

$$0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

ומכאן נקבל:

$$y^2 = x^6$$

ולכן $y = \pm x^3$ הם פתרונות לבעיה.

פתרון רביעי ניתן לקבל מ"תפירה" של שני פתרונות בנקודה x=0, למשל:

$$y_4(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^3 & x \ge 0 \end{cases}$$

הפונקציה מהווה פתרון, משום שהיא גזירה בכל הנקודות ובפרט בנקודה $x = 0$:

$$y_4{'}_-(0) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = \lim_{x\to 0^+} 3x^2 = y_4{'}_+(0)$$

התנאי של משפט הקיום והיחידות שאינו מתקיים הוא רציפות הנגזרת של הפונקציה $f(x, y) = 3x \cdot y^{1/3}$ לפי y במלבן המכיל את הנקודה $(0, 0)$. מתקיים:

$$f_y = x \cdot y^{-2/3}$$

נגזרת זו אינה מוגדרת ב $(0, 0)$ ובפרט אינה רציפה שם, ולכן גם אינה רציפה בכל מלבן המכיל את הנקודה $(0, 0)$.

שאלה 3

נשתמש במשפט הקיום והיחידות.

עבור $f(x,y) = (1-\cos(xy))\cdot e^{\sin(xy)}$ כך ש $y' = f(x,y)$, מקבלים:

$$f_y = x\sin(xy)\cdot e^{\sin(xy)} + (1-\cos(xy))\cdot xcos(xy)\cdot e^{\sin(xy)} =$$
$$= xe^{\sin(xy)}(\sin(xy) + \cos(xy) - \cos(xy)^2)$$

נגזרת זו רציפה בכל המישור כמכפלה, סכום, הפרש והרכבה של פונקציות רציפות. בפרט, נגזרת זו רציפה בכל מלבן המכיל את (x_0, y_0). לכן, לפי משפט הקיום והיחידות,

קיים קטע פתוח I כך ש $x_0 \in I$ ובו מוגדרת פונקציה $u(x)$ המקיימת את המשוואה $u'(x) = f(x, u(x))$ לכל $x \in I$.

עלינו להוכיח כי u עולה בקטע I.

אכן, מיד מההגדרה מקבלים כי בכל המישור מתקיים:

$$\cos(xy) \le 1 \Rightarrow (1-\cos(xy)) \ge 0$$
$$e^{\sin(xy)} > 0$$

ולכן $u'(x) = (1-\cos(xu(x)))\cdot e^{\sin(xu(x))} \ge 0$.

והפונקציה u לא-יורדת ב I.

נניח כי קיים קטע $J \subseteq I$ בו u לא עולה, דהיינו - $u' \equiv 0$ בכל הקטע.

לכל $x \in J$ נקבל $u'(x) = (1-\cos(xu(x)))\cdot e^{\sin(xu(x))} = 0$, כלומר $\cos(xu(x)) = 1$ ולכן $xu(x) = 2\pi k$ עבור k שלם כלשהו. נקבל, כי לכל $0 \ne x \in J$ מתקיים:

$$u(x) = \frac{2\pi k}{x}$$
$$u'(x) = \frac{-2\pi k}{x^2} = 0$$

והדבר מחייב $k = 0$, כלומר $u(x) = 0$ בקטע J (כאן הדבר נכון גם עבור $x = 0$ אם $0 \in J$, עקב הדרישה כי u תהא גזירה, ולכן גם רציפה).

אילו $x_0 \in J$, נקבל $y_0 = u(x_0) = 0$ בסתירה לנתון $y_0 \ne 0$! לכן נוכל "לצמצם" את בחירת הקטע I אותו בחרנו לקטע רציף החלקי ל I / J ומכיל את x_0 (בהכרח קיים קטע כזה, כי עבור $I = (\alpha, \beta),\ J = (\gamma, \delta)$ בהכרח מתקיים $x_0 < \gamma$ או $x_0 > \delta$ ובהתאמה (α, γ) ו (δ, β) יהיו קטעים מתאימים).

אי לכך, מצאנו קטע בו u עולה ממש ובכך השלמנו את ההוכחה.

שאלה 4

את המשוואה הנתונה נוכל להעביר להצגה סימטרית של משוואה דיפרנציאלית:

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$$

כך ש:

$$X = 2x + \frac{y}{1+x^2y^2} \qquad Y = \frac{x}{1+x^2y^2} - 2y$$

$$X_y = \frac{(1+x^2y^2)-y\cdot 2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \qquad Y_x = \frac{(1+x^2y^2)-x\cdot 2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$$

קיבלנו משוואה סימטרית. נמצא את פוטנציאל המשוואה:

$$\phi(x,y) = \int^x (2t + \frac{y}{1+y^2t^2})dt + C(y) = x^2 + y\int^x \frac{dt}{1+y^2t^2} + C(y) =$$

על פי נוסחה 63 בחוברת האינטגרלים:

$$\phi(x,y) = x^2 + y\cdot\frac{1}{y}\cdot \arctan(xy) + C(y) = x^2 + \arctan(xy) + C(y)$$

$$\phi_y = \frac{x}{1+(xy)^2} + C'(y) = \frac{x}{1+x^2y^2} - 2y$$

נקבל $C'(y) = -2y$, לכן $C(y) = -y^2$ ופתרון המשוואה הכללי יהיה:

$$\phi(x,y) = x^2 - y^2 + \arctan(xy) = C$$

נציב $(x,y) = (1,\sqrt{3})$ ונקבל:

$$1 - 3 + \arctan\sqrt{3} = C \Rightarrow C = \frac{\pi}{3} - 2$$

ופתרון הבעיה יהיה:

$$x^2 - y^2 + \arctan(xy) = \frac{\pi}{3} - 2$$

שאלה 5

המשוואה הנתונה לנו היא:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-3y+1}$$

נהפוך מונה ומכנה ונקבל

$$\frac{dx}{dy} = x - 3y + 1$$
$$x' - x = 3y + 1$$

קיבלנו משוואה לינארית ב-x. נכפול בגורם האינטגרציה e^{-y} ונקבל:

$$(xe^{-y})' = 3ye^{-y} + e^{-y}$$

ובאינטגרציה:

$$xe^{-y} = 3\int^{y} ue^{-u}du - \int^{y} e^{-u}du + C =$$

$$= 3e^{-y}(-y - 1) + e^{-y} + C = e^{-y}(-3y - 3 + 1) + C$$

נכפול ב e^{y} ונקבל:

$$x = -3y - 2 + Ce^{y}$$

נציב $(x, y) = (1, -1)$:

$$1 = 3 - 2 + Ce^{-1}$$
$$1 = 1 + Ce^{-1}$$
$$Ce^{-1} = 0$$
$$C = 0$$

ופתרון המשוואה יהיה:

$$x = -3y - 2$$
$$3y = -x - 2$$
$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

שאלה 6

לפנינו הצגה סימטרית של משוואה:

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$$

כך ש:

$$X = x - \sin x \cdot e^{-2y} \qquad Y = x^2$$
$$X_y = 2\sin x \cdot e^{-2y} \qquad Y_x = 2x$$

נרצה למצוא פונקציה $\mu(y)$ כלשהי כך ש $(\mu X)_y = (\mu Y)_x$. כמובן ש $\mu_x \equiv 0,\ \mu_y \equiv \mu'$, ולכן נדרוש:

$$\mu' X + \mu X_y = 0Y + \mu Y_x$$
$$\mu'(x - \sin x \cdot e^{-2y}) + \mu(2\sin x \cdot e^{-2y}) = \mu \cdot 2x$$
$$\mu'(x - \sin x \cdot e^{-2y}) = \mu(2x - 2\sin x \cdot e^{-2y}) = 2\mu(x - \sin x \cdot e^{-2y})$$
$$\frac{\mu'}{\mu} = 2$$
$$\frac{d\mu}{\mu} = 2dy$$

ובאינטגרציה:

$$\ln|\mu| = 2y$$
$$|\mu| = e^{2y}$$

נבחר למשל $\mu(y) = e^{2y}$. כפל המשוואה ב μ ייתן לנו משוואה סימטרית, ונקבל:

$$\phi(x,y) = \int^{x}(te^{2y} - \sin t)dt + C(y) = \frac{1}{2}e^{2y}x^2 + \cos x + C(y)$$

$$\phi_y = e^{2y}x^2 + C'(y) = e^{2y}x^2 = \mu Y$$

מקבלים $C'(y) = 0$, אז נבחר למשל $C(y) = 0$ ופתרון המשוואה יהיה:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}e^{2y}x^2 + \cos x = C$$
$$\frac{1}{2}e^{2y}x^2 = C - \cos x$$

ולכן, בשינוי הקבוע C:

$$e^{2y} = \frac{C - 2\cos x}{x^2}$$

ועל פי חוקי לוגריתמים:

$$2y = \ln(C - 2\cos x) - 2\ln x$$
$$y = \ln\sqrt{C - 2\cos x} - \ln x$$

שאלה 7

את המשוואה לפנינו ניתן לכתוב בצורה:

$$y' - 3y = y^3e^{-x}$$

זוהי משוואת ברנולי עבור $m = 3$. הפתרון הסינגולרי $y \equiv 0$ לא תואם לתנאי ההתחלה. לכן נכפול ב y^{-3} ונקבל:

$$y'y^{-3} - 3y^{-2} = e^{-x}$$

נציב $z = y^{-2}$, אז $z' =- 2y^{-3}y'$ ולכן:

$$-\frac{1}{2}z' - 3z = e^{-x}$$

$$z' + 6z =- 2e^{-x}$$

נכפול את המשוואה ב e^{6x} ונקבל:

$$\frac{d}{dx}\left(ze^{6x}\right) = e^{6x}z' + 6e^{6x}z =- 2e^{5x}$$

ובאינטגציה:

$$ze^{6x} =- \frac{2}{5}e^{5x} + C$$

נכפול ב e^{-6x} ונקבל:

$$\frac{1}{y^2} = z = Ce^{-6x} - \frac{2}{5}e^{-x}$$

$$y =\pm \frac{1}{\sqrt{Ce^{-6x}-\frac{2}{5}e^{-x}}}$$

נציב $(x, y) = (0, - 2)$:

$$- 2 =- \frac{1}{\sqrt{C-\frac{2}{5}}}$$

$$\sqrt{C - \frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$C - \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{13}{20}$$

ופתרון המשוואה יהיה:

$$y =- \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{20}e^{-6x}-\frac{2}{5}e^{-x}}}$$

שאלה 8

לפנינו הצגה סימטרית של משוואה:

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$$

כך ש:

$$X = y^4 - 4xy \qquad Y = 2xy^3 - 3x^2$$

$$X_y = 4y^3 - 4x \qquad Y_x = 2y^3 - 6x$$

עלינו למצוא פונקציה $\mu(t)$ כלשהי, כך ש $(\mu(xy)X)_y = (\mu(xy)Y)_x$.

כלומר -

$$\mu_y X + \mu X_y = \mu_x Y + \mu Y_x$$

כמובן שמתקיים $(\mu(xy))_x = y\mu'(xy),\ (\mu(xy))_y = x\mu'(xy)$. לכן:

$$x\mu' \cdot (y^4 - 4xy) + \mu \cdot (4y^3 - 4x) = y\mu \cdot '(2xy^3 - 3x^2) + \mu \cdot (2y^3 - 6x)$$

$$\mu' \cdot (xy^4 - 4x^2y) + \mu \cdot (4y^3 - 4x) = \mu' \cdot (2xy^4 - 3x^2y) + \mu \cdot (2y^3 - 6x)$$

$$\mu' \cdot ((xy^4 - 4x^2y) - (2xy^4 - 3x^3y)) = \mu \cdot ((2y^3 - 6x) - (4y^3 = 4x))$$

$$\mu' \cdot (- xy^4 - x^2y) = \mu \cdot (- 2y^3 - 2x)$$

$$xy \cdot \mu'(xy) \cdot (- y^3 - x) = 2\mu(xy) \cdot (- y^3 - x)$$

$$xy \cdot \mu'(xy) = 2\mu(xy)$$

נציב $t = xy$, אז:

$$t \cdot \mu'(t) = 2\mu(t)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2dt}{t}$$

ובאינטגרציה:

$$\ln|\mu| = 2\ln|t| = \ln(t^2) + C$$

$$|\mu| = e^C t^2$$

ובהחלפת קבוע $\mu(t) = Ct^2,\ C \neq 0$.

נבחר למשל $\mu(t) = t^2$, אז המשוואה $\mu X dx + \mu Y dy = 0$ סימטרית, ומתקיים:

$$\mu(xy)X = x^2y^6 - 4x^3y^3 \qquad \mu(xy)Y = 2x^3y^5 - 3x^4y^2$$

$$\phi(x, y) = \int^x (t^2y^6 - 4t^3y^3)dt + C(y) = \frac{1}{3}x^3y^6 - x^4y^3 + C(y)$$

$$\phi_y = 2x^3y^5 - 3x^4y^2 + C'(y) = 2x^3y^5 - 3x^4y^2 = \mu(xy)Y$$

נקבל $C'(y) = 0$, אז נבחר $C(y) = 0$, ופתרון המשוואה יהיה:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^6 - x^4y^3 = C$$

נפתור משוואה ריבועית עבור $u = y^3$: $\frac{1}{3}x^3u^2 - x^4u - C = 0$.

$$u_{1,2} = \frac{x^4 \pm \sqrt{x^8 + \frac{4}{3}Cx^3}}{\frac{2}{3}x^3} = \frac{3}{2}x \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x^8 + \frac{4}{3}Cx^3}{x^6}} = \frac{3}{2}x \pm \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + \frac{4}{3}Cx^{-3}}$$

ובהחלפת הקבוע נקבל:

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x \pm \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + Cx^{-3}}}$$

שאלה 9

לפנינו משוואה דיפרנציאלית:

$$(2x^2y + xy^2)y' = 2xy^2 + y^3 + x^4\cos x \cdot e^{-\frac{y}{x}}$$

נחלק את המשוואה ב x^3 ונקבל:

$$(2\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2})y' = 2\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} + x\cos x \cdot e^{-\frac{y}{x}}$$

העברה לצורה סטנדרטית תיתן לנו פונקציה $f(x, y)$ שאינה תלוי בערכו של $\frac{y}{x}$ בלבד, אלא גם בערכו של $x\cos x$. עם זאת, הצבת $z = \frac{y}{x}$ תיתן לנו $y = zx$, ולכן $y' = z + z'x$ ולכן:

$$(2z + z^2)(z + z'x) = 2z^2 + z^3 + x\cos x \cdot e^{-z}$$

$$2z^2 + z^3 + x(2z + z^2)z' = 2z^2 + z^3 + x\cos x \cdot e^{-z}$$

$$x(2z + z^2)z' = x\cos x \cdot e^{-z}$$

$$e^z(2z + z^2)z' = \cos x$$

$$e^z(2z + z^2)dz = \cos x dx$$

לא קשה להיווכח כי:

$$d(e^zz^2) = (e^zz^2 + e^z \cdot 2z)dz = e^z(2z + z^2)dz$$

ולכן באינטגרציה נקבל

$$e^zz^2 = \sin x + C$$

$$\frac{y^2}{x^2}e^{\frac{y}{x}} = \sin x + C$$

$$y^2e^{\frac{y}{x}} - x^2(\sin x + C) = 0$$