מטלת מנחה 13 - לוגיקה למדמ"ח 20466

שאלה 1

סעיף א

נראה שנוכל להגיע לטבלת האמת של הקשר $\neg$ בעזרת הקשרים $\rightarrow$ ו $\perp$.

α	$\perp(\alpha)$	$(\alpha \rightarrow \perp(\alpha))$	$\neg\alpha$
T	F	F	F
F	F	T	T

כידוע, שפה המכילה את הקשרים $\{\neg, \ \rightarrow\}$ היא שפה קשרית מלאה (עמוד 151 בספר), לכן גם השפה בעלת שני הקשרים $\{\perp, \rightarrow\}$ היא שפה מלאה.

סעיף ב

נוכיח באינדוקציה על דרגת הפסוקים כי אין פסוק בשפה הנ"ל השקול לפסוק $(\psi \rightarrow \theta)$. כזכור, טבלת האמת של $\psi \rightarrow \theta$ מכילה 3 ערכי T וערך F אחד. נוכיח כי עבור כל שני פסוקים, טבלת האמת תכיל מספר זוגי של ערכי T ו F.

יהיו $\psi, \ \theta$ פסוקים אלמנטריים. מתקיים:

ψ	θ	$M(\psi, \psi, \psi)$	$M(\psi, \psi, \theta)$	$M(\psi, \theta, \theta)$	$M(\theta, \theta, \theta)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

והראינו כי עבור כל אפשרות (עד כדי סדר הפסוקים, שאין לו חשיבות בקשר M), מספר ערכי T וF בטבלה הוא זוגי.

על כן, נניח כי הטענה עבור כל זוג פסוקים ψ, θ מדרגה n מספר ערכי T וF בטבלאות האמת שלהם עם הקשר M הוא זוגי, ונוכיח את הטענה עבור פסוק ϕ המורכב מהם מדרגה $n + 1$.
שוב, על פי טבלת האמת לעיל והנחת האינדוקציה, מספר המודלים בהם ϕ מקבל T הוא סכום של בדיוק שני מספרים זוגיים בכל אחת מן האפשרויות - ולכן מספר זוגי.
טענה דומה ניתן לתת גם לגבי מספר המודלים בהם ϕ מקבל F.

הוכחנו באינדוקציה כי אין פסוק בשפה הנ"ל השקול לפסוק $(\psi \rightarrow \theta)$, ולכן השפה אינה מלאה.

שאלה 2

סעיף א

צריך להוכיח כי עבור כל קבוצת פסוקים K, אם פסוק ϕ יכיח בD מתוך K אז הוא נובע לוגית מK.
יהא ϕ פסוק יכיח בK. נוכיח כי ϕ נובע לוגית מK באינדוקציה על סדרת ההוכחה.
בסיס האינדוקציה: אם ϕ הוא הפסוק הראשון בסדרת ההוכחה, אז יש שתי אפשרויות:

1. אם ϕ הוא אקסיומה, אז הוא טאוטולוגיה, ובפרט כל מודל המספק את K יספק גם אותו.
   נראה כי אקסימות התחשיב שהוגדרו הן טאוטולוגיות בעזרת טבלאות אמת:

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \phi)$	$(\phi \leftrightarrow \neg\psi)$	$(\neg\phi \leftrightarrow \psi)$	$((\phi \leftrightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\phi \leftrightarrow \psi))$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

2. אם ϕ הוא פסוק מ K הוא בפרט נובע לוגית מK.

כעת, נניח כי כל הפסוקים שקדמו ל ϕ בסדרת ההוכחה נובעים לוגית מ K, ונוכיח כי ϕ נובע לוגית מ K. גם כאן נתייחס לשלושה מקרים:

1. ϕ אקסיומה (ואז הראינו כי הוא נובע לוגית מK)
2. ϕ הוא פסוק מ K, ובפרט נובע לוגית מK.
3. קיימים בסדרת ההוכחה של ϕ שני פסוקים ψ ו-θ שהוא $(\psi \rightarrow \phi)$ - דבר זה מחייב אותנו היות ויש כלל היסק יחיד והוא MP.
   במקרה זה, נניח בשלילה כי יש מודל M המספק את K ואינו מספק את ϕ.
   היות ש ψ קודם ל ϕ בסדרת ההוכחה שלו, על פי הנחת האינדוקציה M מספק את ψ.
   לכן, במודל זה, $M(\psi \rightarrow \phi) = F$ על פי ההגדרה, זאת בסתירה להנחת האינדוקציה לפיה θ נובע לוגית מK!

סעיף ב

יהא ϕ פסוק יכיח בD. נוכיח באינדוקציה כי האפשרויות לקשר הראשי ב ϕ הן → או ↔, ואם הקשר הראשי ב ϕ הוא → כך ש ϕ הוא $(\psi \rightarrow \theta)$, אז הקשר הראשי ב θ יהיה → או ↔
בסיס האינדוקציה: אם ϕ אקסיומה, הקשר הראשי שלו יהיה → או ↔. הקשר הראשי של האקסיומה השנייה הוא →, ואכן הקשר הראשי של אגף ימין שלו הוא ↔.

כעת נניח כי כל הפסוקים שקדמו ל ϕ בסדרת ההוכחה מקיימים את הנחת האינדוקציה. אם ϕ אקסיומה - גם הוא מקיים את התנאי, ואחרת, ϕ פסוק שהוסק מכלל ההיסק MP, כלומר קדמו לו בסדרת ההוכחה שלו פסוק כלשהו ψ ופסוק נוסף θ שהוא $(\psi \rightarrow \phi)$. היות ו θ מקיים את הנחת האינדוקציה, נסיק כי הקשר הראשי ב ϕ הוא ↔ או → ובזאת תמה הוכחתנו.

זאת ועוד - התחשיב אינו שלם. למשל, הפסוק $(\phi \vee \neg\phi)$ הוא טאוטולוגיה, אך לא יכיח בD כי הקשר הראשי שלו אינו → או ↔.

סעיף ג

1. נראה בעזרת טבלת אמת כי הפסוק אינו טאוטולוגיה:

P_1	P_2	$(P_1 \leftrightarrow P_2)$	$(P_2 \rightarrow \neg P_1)$	$(P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow \neg P_1))$	$((P_1 \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow (P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow \neg P_1)))$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T

היות והפסוק אינו טאוטולוגיה, והתחשיב נאות, ϕ אינו יכיח ב D.

2. הפסוק מכיל קשר $\wedge$, ולכן לא יכיח בD. פסוקים יכיחים בD הם בעלי קשר ראשי מהצורה $\rightarrow$ או $\leftrightarrow$.
3. הפסוק יכיח בD. סדרת ההוכחה:

	<u>פסוק</u>	<u>הסבר</u>
1	$(\neg P_1 \leftrightarrow \neg P_1)$	אקסיומה 1 עבור $\phi = \neg P_1$
2	$((\neg P_1 \leftrightarrow \neg P_1) \rightarrow (\neg\neg P_1 \leftrightarrow P_1))$	אקסיומה 2 עבור $\phi = \neg P_1,\ \psi = P_1$
3	$(\neg\neg P_1 \leftrightarrow P_1)$	ניתוק 1, 2