מטלת מנחה 13 - אינפי 2

328197462

09/12/2022

שאלה 1

סעיף א

נסמן $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x+1}-1}$ חיובית בקטע $(1,2]$. הפונקציה רציפה בקטע זה (ולכן אינטגרבילית בכל קטע סגור החלקי לקטע זה) ואינה חסומה אך ורק בסביבת $x=1$, ולכן נשתמש במבחן ההשוואה לפונקציות שאינן חסומות בקטע סגור.

ניקח $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\frac{1}{(x-1)^{1/2}}$. אז:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}-1}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{2x-1}=\frac{2\sqrt{1^2-1+1}}{2\cdot1-1}=2>0$$

האינטגרל $\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2\frac{1}{(x-1)^{1/2}}dx$ מתכנס לפי שאלה 5 ביחידה 3 כי $\frac{1}{2}<1$,
ולכן לפי מבחן ההשוואה $3.5*$ גם $\int_1^2 f(x)dx$ מתכנס. מאחר והפונקציה חיובית נסיק כי $\int_1^2 f(x)dx$ מתכנס בהחלט.

סעיף ב

נסמן $f(x)=\frac{\arctan x}{\sqrt{x^2+x}}$ חיוביות בקטע $(0,\infty)$.

$$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^\infty f(x)dx$$

האינטגרל משמאל מתכנס אם ורק אם שני האינטגרלים מימין מתכנסים.

נבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$.
ניקח $g(x)=\frac{1}{x}$, אז:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(}\sqrt{x^2+x})\cdot\arctan x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\arctan x=1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}>0$$

האינטגרל $\int_1^\infty g(x)dx=\int_1^\infty\frac{dx}{x}$ מתבדר לפי למה 3.2, לכן לפי מבחן ההשוואה $3.16*$ גם $\int_1^\infty f(x)dx$ מתבדר.

מכאן נסיק כי $\int_0^\infty f(x)$ מתבדר.

סעיף ג

נסמן $f(x)=\cos x\cdot\frac{\sin x}{\ln(1+x)}=\frac{\sin 2x}{2\ln(1+x)}$

$$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^\infty f(x)dx$$

האינטגרל משמאל מתכנס אם ורק אם שני האינטגרלים מימין מתכנסים.
כמו כן, ניתן להסיק מסקנה דומה על התכנסות האינטגרל $\int_0^\infty|f(x)|dx$.

נבחן את התכנסות האינטגרל $\int_0^1 f(x)dx$. הפונקציה רציפה בקטע $(0,1]$ ומתקיים:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\ln(1+x)} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0^+}\cos x\,(1+x) = 1\cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\cos x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1\cdot 1 = 1$$

לכן הפונקציה חסומה בסביבה ימנית של $x=0$ וניתנת להשלמה בנקודה זו.
מכאן נסיק שהאינטגרל $\int_0^1 f(x)dx$ הוא אינטגרל מסוים.
מסקנה דומה ניתן להסיק על האינטגרל $\int_0^1 |f(x)|dx$ לפי רציפות פונקציית הערך המוחלט.

כעת, נראה כי $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס ע"י הוכחת התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$ בעזרת מבחן דיריכלה:

I נראה כי הפונקציה $\frac{1}{\ln(1+x)}$ גזירה ברציפות ויורדת ב $[1,\infty)$.
הפונקציה גזירה בקטע כמנת פונקציות גזירות כאשר ארגומנט הln בהכרח גדול מ-1, ולכן המכנה חיובי. נקבל אפוא:

$$[\frac{1}{\ln(1+x)}]' = [(\ln(1+x))^{-1}]' = -1\cdot(\ln(1+x))^{-2}\cdot\frac{1}{1+x} = \frac{-1}{(\ln(1+x))^2\cdot(1+x)} \underset{x\geq 1}{\leq} \frac{-1}{2(\ln(1+x))^2} < 0$$

מאי-שוויון זה נסיק כי הפונקציה יורדת בקטע. כמו כן, פונקציית הנגזרת רציפה כמנה, הרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות (המכנה שונה מאפס וארגומנט הln חיובי בקטע).

II כמו כן,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ln(1+x)} = \begin{bmatrix} t=1+x \\ t\to\infty \Rightarrow x\to\infty\end{bmatrix} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\ln t} = 0$$

III וכן,

$$|G(x)| = |\int_0^x \sin 2t\ dt| = |\cos 0 - \cos x| \leq 2$$

לכן, לפי מבחן דיריכלה (משפט 3.19), האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{2}\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס,
ומכאן נסיק כי האינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס.

נראה כי האינטגרל הנ"ל מתכנס בתנאי ע"י הוכחה כי $\int_1^\infty |f(x)|dx$ מתבדר.
תחילה, נשים לב כי $\int_1^\infty f(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\ln(1+x)}|\sin 2x|dx$.
ברור כי $|\sin 2x| \leq 1$, ולכן $|\sin 2x| \geq \sin^2 2x$
ולפי מבחן ההשוואה 3.16 נסיק כי אם $\int_1^\infty \frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\sin^2 2x\ dx$ מתבדר אז $\int_1^\infty |f(x)|dx$ מתבדר.
נניח בשלילה כי $\int_1^\infty \frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\sin^2 2x\ dx$ מתכנס.
מהשוויון הטריגונומטרי $\cos 4x = 1-2\sin^2 2x$ נקבל:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\sin^2 2x\ dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\ln(1+x)}dx - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\ln(1+x)}\cos 4x\ dx$$

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{\ln(1+x)}\cos 4x\ dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה, באופן דומה להוכחה זו.
לכן נסיק כי האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{\ln(1+x)}dx$ מתכנס וערכו $2\int_1^\infty \frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\sin^2 2x\ dx + \int_1^\infty \frac{1}{\ln(1+x)}\cos 4x\ dx$

ניקח $g(x)=\frac{1}{x}$. אז:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(1+x)}}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{ln(1+x)} = \infty$$

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתבדר לפי למה 3.12. לכן, לפי מבחן ההשוואה $*3.16$, האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{\ln(1+x)}$ מתבדר והגענו לסתירה!
מכאן נסיק שהאינטגרל $\int_1^\infty |f(x)|dx$ מתבדר, ולכן $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס בתנאי.

שאלה 2

נסמן $f(x)=\frac{x^\alpha(1-x^2)^\beta}{1-\cos x}$. עלינו לבדוק את ההתכנסות את האינטגרל $\int_0^1 f(x)dx$.
נדגיש כי הפונקציה חיובית לכל אורך קטע האינטגרציה הנתון.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{1/2} f(x)dx+\int_{1/2}^1 f(x)dx$$

האינטגרל משמאל מתכנס אם ורק אם שני האינטגרלים מימין מתכנסים. נבדוק את ההתכנסות של כל אחד מהם בנפרד.

נבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_0^{1/2} f(x)dx$.
נבחר $g(x)=\frac{x^\alpha}{x^2}=\frac{1}{x^{2-\alpha}}$. אז:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^\alpha(1-x^2)^\beta\cdot x^2}{(1-\cos x)\cdot x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}(1-x^2)^\beta\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{1-\cos x}\underset{\text{לופיטל}}{=}1\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\sin x}=2>0$$

האינטגרל $\int_0^{1/2} g(x)dx=\int_0^{1/2}\frac{1}{x^{2-\alpha}}dx$ מתכנס אם ורק אם $2-\alpha<1$, כלומר $\alpha>1$ (לפי למה 3.2).
לכן לפי מבחן ההשוואה $3.5*$ גם האינטגרל $\int_0^{1/2} f(x)dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha>1$.

נמשיך ונבדוק את התכנסות האינטרל $\int_{1/2}^1 f(x)dx$.
נבחר, הפעם, $g(x)=(1-x)^\beta=\frac{1}{(1-x)^{-\beta}}$. אז:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^\alpha(1-x^2)^\beta}{(1-\cos x)\cdot(1-x)^\beta}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^\alpha}{1-\cos x}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{((1-x)(1+x))^\beta}{(1-x)^\beta}=$$

$$\frac{1}{1-\cos 1}\cdot\lim_{x\to 1^-}(1+x)^\beta=\frac{2^\beta}{1-\cos 1}>0$$

האינטגרל $\int_{1/2}^1 g(x)dx=\int_{1/2}^1\frac{1}{(1-x)^{-\beta}}$ מתכנס, לפי שאלה 5 ביחידה 3, אם ורק אם $-\beta<1$, כלומר $\beta>-1$
לכן לפי מבחן ההשוואה $3.5*$ גם האינטגרל $\int_{1/2}^1 f(x)dx$ מתכנס אם ורק אם $\beta>-1$.

לסיכום נקבל שהאינטגרל $\int_0^1 f(x)dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha>1\wedge\beta>-1$

שאלה 3

סעיף א

הטענה נכונה. נוכיח את נכונותה ישירות מהגדרת הגבול.
תהא, אם כן, f אינטגרבילית ב$[0,t]$ לכל $t>0$ כך ש $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, ותהא g פונקציה המקיימת $g(x)\ge x$ לכל $x\ge 0$.

יהא $\epsilon>0$. עלינו למצוא M ממשי כך שלכל $x>M$ מתקיים $\left|\int_x^{g(x)} f(x)dx\right|<\epsilon$.
לפי מבחן קושי (משפט 3.15), עבור ϵ יש $M_0>0$ כך שלכל שני מספרים $r,s\in(M_0,\infty)$ נקבל $\left|\int_r^s f(x)dx\right|<\epsilon$.
נבחר $M=M_0$. נקבל אפוא כי לכל $x>M$ מתקיים, לפי הנתון, $g(x)\ge x>M$.
לכן $x,g(x)\in(M_0,\infty)$ מקיימים $\left|\int_x^{g(x)} f(x)dx\right|<\epsilon$ ובכך סיימנו את ההוכחה.

סעיף ב

הטענה שגויה. נציג דוגמה נגדית.
נבחר $f(x)=-x$. ברור כי f רציפה בקטע $[1,\infty)$, וכן בקטע זה נקבל $\frac{1}{x^2}>0>-1\ge f(x)$ כנדרש.

האינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס אם ורק אם מתכנס האינטגרל $\int_1^\infty -f(x)dx$, ובמקרה זה נקבל $\int_1^\infty f(x)dx=-\int_1^\infty -f(x)dx$.
אבל האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^{-1}}dx=\int_1^\infty xdx=\int_1^\infty -f(x)dx$ לא מתכנס (כי $-1<1$) ולכן גם האינטגרל $\int_1^\infty f(x)dx$ לא מתכנס.

שאלה 4

סעיף א

הטענה לא שגויה. ניקח למשל f כך שלכל $x \leq 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ x & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

בסעיף 3.2.6 (עמוד 38 בכרך ב) מוכיחים בעזרת למה 1.25 כי $\int_1^\infty f(x)dx$ אכן מתכנס.

אבל $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$, כי עבור $\epsilon = 1$ עבור כל x בתחום ההגדרה ניקח את $x < \lfloor x \rfloor + 1$ ונקבל:

$$\frac{f(\lfloor x \rfloor + 1)}{\lfloor x \rfloor + 1} = \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{\lfloor x \rfloor + 1} = 1 \geq \epsilon$$

סעיף ב

הפונקציה f^2 היא פונקציה חיובית, ולכן נרצה להשתמש במבחן ההשוואה על מנת להוכיח כי האינטגרל $\int_1^\infty f^2(x)dx$ מתכנס.

ניקח $g(x) = |f(x)| + f^4(x)$. ברור כי g פונקציה חיובית ורציפה ב $[1,\infty)$ כסכום של שתי פונקציות חיוביות ורציפות.
מכאן נסיק, לפי 1.18, כי g אינטגרבילית בקטע $[1,t]$ לכל $t \geq 1$.
לפי הנתון האינטגרל $\int_1^\infty |f(x)|dx$ והאינטגרל $\int_1^\infty f^4(x)dx$ מתכנסים.
לכן, הגבול

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t g(x)dx \underset{1.24}{=} \lim_{t\to\infty} \int_1^t |f(x)|dx + \lim_{t\to\infty} \int_1^t f^4(x)dx$$

קיים וסופי כסכום של של מספרים סופיים, ומכאן $\int_1^\infty g(x)dx$ מתכנס.

כעת, נרצה להוכיח כי יש $A \geq 1$ כלשהו כך ש $g(x) \geq f^2(x)$ לכל $x \in [A,\infty)$. ניקח $A = 1$. לכל $x \in [1,\infty)$,

I אילו $|f(x)| < 1$, אז $f^2(x) < |f(x)| \leq |f(x)| + f^4(x) = g(x)$

II אחרת, $|f(x)| \geq 1$ ונקבל $f^2(x) \leq |f(x)|^3 \leq f^4(x) \leq |f(x)| + f^4(x) = g(x)$

לכן, לפי מבחן ההשוואה 3.16, האינטגרל $\int_1^\infty f^2(x)dx$ מתכנס וסיימנו.

שאלה 5

ראשית, הפונקציה $f(x)\,\text{sin}(e^x)$ רציפה בקטע $[a,\infty)$ כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות.
בפרט, הפונקציה רציפה (ואינטגרבילית לפי 1.18) בתת-הקטע $[a,t]$, וכן בכל תת-קטע $[t,s]$ כך ש $t \geq s$.
לכן, לפי תכונת האדיטיביות המוכללת,

$$\int_a^\infty f(x)\,\text{sin}(e^x)dx \underset{1.23}{=} \int_a^t f(x)\,\text{sin}(e^x)dx + \int_t^\infty f(x)\,\text{sin}(e^x)dx$$

האינטגרל $\int_a^t f(x)\,\text{sin}(e^x)dx$ הוא אינטגרל מסוים - הפונקציה אינטגבילית בקטע סגור זה.
מכאן נסיק כי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)\,\text{sin}(e^x)dx$ מתכנס אם רק אם האינטגרל $\int_t^\infty f(x)\,\text{sin}(e^x)dx$ מתכנס.
משיקולים דומים, $\int_a^\infty |f(x)\,\text{sin}(e^x)|dx$ מתכנס אם ורק אם $\int_t^\infty |f(x)\,\text{sin}(e^x)|dx$ מתכנס.
וכן $\int_t^\infty f(x)dx$ מתבדר כי לפי הנתון $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר.

כעת, נעבור לעסוק בשאלת ההתכנסות של האינטגרל $\int_t^\infty f(x)\,\text{sin}(e^x)dx$. מתקיים:

$$\int_t^\infty f(x)\,\text{sin}(e^x)dx = \begin{bmatrix} u = e^x & & \\ \text{ln}\,u = x & \Rightarrow & \frac{du}{u} = dx \\ x = t & \Rightarrow & u = e^t \\ x \to \infty & \Rightarrow & u \to \infty \end{bmatrix} = \int_{e^t}^\infty \frac{f(\text{ln}\,u)}{u} \cdot \text{sin}\,u\;du$$

נרצה להשתמש במבחן דיריכלה להוכיח את התכנסות אינטגרל זה. לשם כך נסמן $\xi(u) = \frac{f(\text{ln}\,u)}{u}$.

I נראה כי ξ יורדת וגזירה ברציפות בקטע $[e^t,\infty)$.
הפונקציה גזירה בקטע כמנה והרכבה של פונקציות גזירות כאשר מובטח לנו $u > 0$ מההצבה $u = e^x$. נקבל אפוא:

$$\xi'(x) = [\frac{f(\text{ln}\,u)}{u}]' = \frac{f'(\text{ln}\,u)\cdot\frac{1}{u}\cdot u - f(\text{ln}\,u)}{u^2} = \frac{f'(\text{ln}\,u) - f(\text{ln}\,u)}{u^2}$$

לכל $u \in [e^t,\infty)$ יש $x \in [t,\infty)$ כך ש $u = e^x$.
נקבל, לפי הנתון עבור $x \geq t$, כי $f'(\text{ln}\,u) - f(\text{ln}\,u) = f'(x) - f(x) < 0$.
לכן $\xi'(u) < 0$ והפונקציה יורדת בקטע $[e^t,\infty)$.
פוקנציית הנגזרת ξ' רציפה כהפרש, מנה והרכבה של פונקציות רציפות כאשר $u > 0$ מובטח.

II מהמשפט האנלוגי "חסומה כפול אפסה" עבור $f(\text{ln}\,u)$ חסומה לפי הנתון ו $\frac{1}{u}$ אפסה, נסיק $\xi(u) = \frac{f(\text{ln}\,u)}{u} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

III כמו כן, מתקיים

$$|G(x)| = |\int_{e^t}^x \text{sin}\,u\;du| = |\,\text{cos}\,e^t - \text{cos}\,x| \leq 2$$

הראינו כי מתקיימים תנאי מבחן דיריכלה ולכן לפי 3.19 האינטגרל הנ"ל מתכנס.

נראה כי האינטגרל מתכנס בתנאי, כלומר $\int_{e^t}^\infty |\xi(u)\,\text{sin}\,u|du$ מתבדר.
תחילה, נשים לב כי ξ חיובית בקטע $[t,\infty)$ (כי היא יורדת ברציפות ושואפת לאפס), ולכן $\int_{e^t}^\infty |\xi(u)\,\text{sin}\,u|du = \int_{e^t}^\infty \xi(u)|\,\text{sin}\,u|du$
ידוע כי $|\,\text{sin}\,u| \leq 1$ ולכן $|\,\text{sin}\,u| \geq \text{sin}^2\,u$. אי לכך, לפי מבחן ההשוואה 3.16, אילו $\int_{e^t}^\infty \xi(u)\,\text{sin}^2\,u\;du$ מתבדר אז $\int_{e^t}^\infty \xi(u)|\,\text{sin}\,u|du$.

נניח בשלילה כי $\int_{e^t}^\infty \xi(u)\,\text{sin}^2\,u\;du$ מתכנס.
מהזהות הטריגונומטרית $\text{cos}\,2u = 1 - 2\,\text{sin}^2\,u$ נסיק:

$$\int_{e^t}^\infty \xi(u)\,\text{sin}^2\,u\;du = \frac{1}{2}\int_{e^t}^\infty \xi(u)du - \frac{1}{2}\int_{e^t}^\infty \xi(u)\,\text{cos}\,2u\;du$$

האינטגרל $\int_{e^t}^\infty \xi(u)\,\text{cos}\,2u\;du$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה משיקולים דומים לחלק הקודם של ההוכחה.
לכן, מהשוויון שלעיל, נקבל כי גם האינטגרל $\int_{e^t}^\infty \xi(u)du$ מתכנס וערכו הוא $2\int_{e^t}^\infty \xi(u)\,\text{sin}^2\,u\;du + \int_{e^t}^\infty \xi(u)\,\text{cos}\,2u\;du$.

$$\int_{e^t}^\infty \xi(u)du = \int_{e^t}^\infty \frac{f(\text{ln}\,u)}{u}du = \begin{bmatrix} x = \text{ln}\,u & dx = \frac{du}{u} \\ u = e^t \Rightarrow & x = t \\ u \to \infty \Rightarrow & x \to \infty \end{bmatrix} = \int_t^\infty f(x)dx$$

ולכן $\int_t^\infty f(x)dx$ מתכנס, אבל בתחילת ההוכחה הראינו שהוא מתבדר וזו סתירה! מכאן נסיק כי האינטגרל מתכנס בתנאי.