מטלת מנחה 11 - אלגברה לינארית 2

328197462

31/03/2023

שאלה 1

סעיף א

נוכיח ישירות לפי הגדרה כי לכל $A,B\in M^{\mathbb{C}}_{n\times n}$ מתקיים $(T_PA,B)=(A,T_{P^*},B)$.
אכן, יהיו A,B מטריצות ונקבל:

$$
\begin{aligned}
&(T_PA,B)\overset{\text{הגדרה}}{=}\operatorname{tr}(B^*P^{-1}AP)\\
&(A,T_{P^*})\overset{\text{הגדרה}}{=}\operatorname{tr}(((P^*)^{-1}BP^*)^*A)\overset{2.1.4}{=}\operatorname{tr}(PB^*P^{-1}A)\overset{*}{=}\operatorname{tr}(B^*P^{-1}AP)=(T_PA,B)
\end{aligned}
$$

נימוק ל(*): לפי לינארית 1, $\operatorname{tr}(CD)=\operatorname{tr}(DC)$.

סעיף ב

איברי הבסיס הסטנדרטי הם $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.
כידוע מסעיף א, $(T_P)^*=T_{P^*}$. המטריצה $P^*=\begin{pmatrix}i&1\\-1&-i\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}-i&-1\\1&i\end{pmatrix}$
נחשב את המטריצה ההופכית $(P^*)^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
(P^*|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}-i&-1&1&0\\1&i&0&1\end{array}\right)&\xrightarrow{R_1\to iR_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-i&i&0\\1&i&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-i&i&0\\0&2i&-i&1\end{array}\right)\\
\dots&\xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{2}iR_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-i&i&0\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+iR_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{array}\right)=(I|(P^*)^{-1})
\end{aligned}
$$

נחשב את תמונות ההעתקה T_{P^*} עבור איברי הבסיס הסטנדרטי.

$$
\begin{aligned}
(T_{P^*})E_{11}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&-1\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i&0\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&-1\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\\\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\
(T_{P^*})E_{12}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&-1\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}i\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&-1\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\\
(T_{P^*})E_{21}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&-1\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&-1\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}i&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\\
(T_{P^*})E_{22}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&-1\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i&-1\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}i\\-\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ולכן נקבל:

$$
[T_{P^*}]_E=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&i&-i&1\\-i&-1&-1&i\\i&-1&-1&-i\\1&-i&i&1\end{pmatrix}
$$

שאלה 2

נשים לב כי:

$$U^{*} = (P+iQ)^{*} \overset{2.1.4}{=} P^{\mathrm{t}} - iQ^{\mathrm{t}} \qquad\qquad D^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} P^{\mathrm{t}} & Q^{\mathrm{t}} \\ -Q^{\mathrm{t}} & P^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}$$

סעיף א

נניח כי $U = U^{*}$, כלומר $P + iQ = P^{\mathrm{t}} - iQ^{\mathrm{t}}$.
נשווה חלק ממשי וחלק מדומה. מקבלים $P = P^{\mathrm{t}}, Q = -Q^{\mathrm{t}}$, ולכן:

$$D^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} P^{\mathrm{t}} & Q^{\mathrm{t}} \\ -Q^{\mathrm{t}} & P^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} = D$$

ובבך השלמנו את ההוכחה.

סעיף ב

נניח כי U אוניטרית. כלומר:

$$I = U \cdot U^{*} = (P+iQ)(P^{\mathrm{t}} - iQ^{\mathrm{t}}) \overset{\text{פילוג}}{=} PP^{\mathrm{t}} - iPQ^{\mathrm{t}} + iQP^{\mathrm{t}} + QQ^{\mathrm{t}} = (PP^{\mathrm{t}} + QQ^{\mathrm{t}}) + i(QP^{\mathrm{t}} - PQ^{\mathrm{t}})$$

נשווה חלק ממשי וחלק מדומה ונקבל $PP^{\mathrm{t}} + QQ^{\mathrm{t}} = I, QP^{\mathrm{t}} - PQ^{\mathrm{t}} = 0$. לכן:

$$D \cdot D^{t} = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{\mathrm{t}} & Q^{\mathrm{t}} \\ -Q^{\mathrm{t}} & P^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^{\mathrm{t}} + QQ^{\mathrm{t}} & PQ^{\mathrm{t}} - QP^{\mathrm{t}} \\ QP^{\mathrm{t}} - PQ^{\mathrm{t}} & QQ^{\mathrm{t}} + PP^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times n} \\ O_{n\times n} & I_{n\times n} \end{pmatrix} = I_{2n\times 2n}$$

ולכן D אורתוגונלית.

שאלה 3

צריך להראות כי Q אוניטרית המקיימת את תנאי השאלה היא בהכרח מטריצת הזהות.
המטריצה Q אוניטרית ובפרט (דוגמה 3א) נורמלית, ולכן ממשפט הלכסון האוניטרי Q לכסינה אונטירית ובפרט דומה למטריצה אלכסונית.
נדון בערכים העצמיים של Q. יהא λ ערך עצמי כזה, ומטענה 2.4.3 נסיק כי $|\lambda| = 1$. כמו כן יהא $v \neq 0$ וו"ע השייך לλ.

$$(Av, v) = (BQv, v) \overset{\lambda\text{ע"ע}}{=} (B\lambda v, v) = \lambda(Bv, v)$$

מהגדרה 2.2.7 ערכי $(Av, v), (Bv, v)$ ממשיים חיוביים, ולכן λ ממשי חיובי עם ערך מוחלט 1 ובפרק $\lambda = 1$ ע"ע יחיד של Q. הריבוי הגיאומטרי של Q שווה בהכרח לn, כי במקרה אחר Q אינה לכסינה ע"פ לינארית 1. נסיק כי Q דומה לI ע"י מטריצה מלכסנת כלשהי P, ומקבלים:

$$A = BQ = B(P^{-1}IP) = B(P^{-1}P) = BI = B$$

ובבך השלמנו את ההוכחה.

שאלה 4

ראשית:

$$H^* = (I - 2ww^*)^* \overset{2.1.4}{=} I - 2(w^*)^* w^* = I - 2ww^* = H$$
$$HH^* = (I - 2ww^*)(I - 2ww^*) = I - 4ww^* + 4(ww^*)^2$$

נדרוש $HH^* = I$. נקבל $4(ww^*)^2 - 4ww^* = 0$, ולכן $ww^* = (ww^*)^2$.
נשים לב כי:

$$(ww^*)^2 = (ww^*)(ww^*) = w(w^*w)w^* = w||w||^2w^* = ||w||^2ww^*$$

נציב את שתי המסקנות האחרונות שלנו ביחד, ונקבל $ww^* = ||w||^2ww^*$, כלומר $||w||^2 = 1$ ולכן $||w|| = 1$ מתכונת החיוביות.

מצאנו תנאי הכרחי עבור w: אם H אוניטרית, אז $||w|| = 1$. נוכיח כי זהו תנאי מספיק.
עבור $||w|| = 1$,

$$HH^* = I - 4ww^* + 4(ww^*)^2 = I - 4ww^* + 4||w||^2ww^* \overset{||w||=1}{=} I$$

נוכיח את תכונת השיקוף.

$$Hw = (I - 2ww^*)w = Iw - 2ww^*w = w - 2||w||^2w = -w$$

יהא $v \in w^\perp$. אז $< v, w >= w^*v = 0$, ומקבלים:

$$Hv = (I - 2ww^*)v = Iv - 2ww^*v = v - 2w \cdot 0 = v$$

שאלה 5

נסמן $U=\mathrm{Sp}(w_1,w_2)$. ברור כי w_1,w_2 בסיס אורתונורמלי לU.
ההעתקה $P_U(v)=(v,w_1)w_1+(v,w_2)w_2$ היא ההיטל האורתונוגלי של v על U לכל $v\in V$ על פי 1.5.6.
אז ההעתקה T שהגדירו היא אינה אלא $T=I-2P_U$.

סעיף א

נראה כי T צמודה לעצמה:

$$T^*=(I-2P_U)^*\overset{2.1.4}{=}I^*-2P_U{}^*\overset{\text{2.2 דוגמה}}{=}I-2P_U=T$$

אוניטריות: יהא $v\in V$, אז קיימים $u\in U,u'\in U^{\perp}$ כך ש $v=u+u'$. נקבל:

$$P_U^2(v)=P_U(P_U(v))\overset{\text{הגדרה}}{=}P_U(u)\overset{\text{הגדרה}}{=}u=P_U(v)$$

מכאן נקבל $P_U^2=P_U$. אי-לכך,

$$TT^*=(I-2P_U)(I-2P_U)\overset{\text{פילוג}}{=}I-4P_U+4P_U^2\overset{P_U^2=P_U}{=}I$$

ולכן T אוניטרית לפי 2.1.1.

סעיף ב

נשים לב כי:

$$Tw_1=(I-2P_U)w_1=w_1-2w_1=-w_1$$

קיבלנו ש$\lambda=-1$ ע"ע של T, ולכן לפי שאלה 2.4.2ב נקבל שT אינה אי-שלילית.