מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

31/01/2023

שאלה 1

סעיף א1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

כי מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)}{x^2+y^2} = [t=2x^2+2y^2 \to 0^+] = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t/2} = 2\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 2$$

וכן, לפי כלל הסנדוויץ':

$$0 \le \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = |y| \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \le |y| \cdot \frac{y^2}{y^2} = |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

ולכן $0 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{y^3}{x^2+y^2}$. לסיכום נקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)+y^3}{x^2+y^2} = 2+0=2$$

סעיף א2

$$0 \le \left|x \arctan\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)\right| = |x| \left|\arctan\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)\right| \le |x| \cdot \frac{\pi}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

ולכן מתקיים $0 \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} x\arctan\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)$

סעיף ב1

עלינו לבדוק האם קיים הגבול $1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(x,y)$.

נכתוב את הפונקציה בדרך נוחה יותר. לכל $(x,y) \ne (0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{e^{|x|+|y|}-1}{|x|+|y|} \cdot \ln(|xy|+e)$$

מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{|x|+|y|}-1}{|x|+|y|} = [t=|x|+|y| \to 0^+] = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t-1}{t} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t}{1} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(|xy|+e) = [p=|xy| \to 0^+] = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(t+e) = \ln(e) = 1$$

ולכן $1 \cdot 1 = 1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(x,y)$ והפונקציה רציפה.

סעיף ב2

הפונקציה לא רציפה בנקודה, כי לא מתקיים הגבול $1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} g(x,y)$.

ניקח למשל $P_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$, ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty} g(P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{2}{n^4}} = 0$$

לכן, לפי היינה, לא מתקיים $g(0,0) = 1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} g(x,y)$ והפונקציה לא רציפה בנקודה.

שאלה 2

סעיף א

עלינו לבדוק האם הפונקציה בשני משתנים $f(x,y)=(x^{1/3}+y^{1/3})^3$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

נחשב נגזרות חלקיות בנקודה $p_0=(0,0)$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^{1/3}+0)^3-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h^{1/3})^3-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

כעת עלינו לבדוק את קיום הגבול $\epsilon(x,y)=\frac{r(x,y)}{d((x,y),(0,0))}=\frac{f(x,y)+f_x(0,0)\cdot x+f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.
ניקח למשל $P_n=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\epsilon(P_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})-1\cdot\frac{1}{n}-1\cdot\frac{1}{n}}{((\frac{1}{n})^2+(\frac{1}{n})^2)^{1/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{((\frac{1}{n})^{1/3}+(\frac{1}{n})^{1/3})^3-2\cdot\frac{1}{n}}{(\frac{2}{n^2})^{1/2}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2(\frac{1}{n})^{1/3})^3-2\cdot\frac{1}{n}}{(2\frac{1}{n^2})^{1/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\cdot\frac{1}{n}-2\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}\neq 0$$

לכן לפי הגדרת היינה לא מתקיים הגבול והפונקציה לא דיפרנציאבילית.

סעיף ב

נציין כי הפונקציה $f(x,y)=3x^2-y^2$ דיפרנציאבילית כפולינום רב-משתנים בכל המישור.
עלינו למצוא נקודה במשטח $(a,b,f(a,b))$ שהמישור המשיק לה מקביל למישור $6x+4y+z+5=0$.
לפי הגדרה 7.64, בכל נקודה במישור מצורה זו, משוואת המישור המשיק למשטח יהיה:

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

נחשב נגזרות חלקיות:

$$\begin{aligned}
&f_x=6x\quad f_y=-2y\\
&z=3a^2-b^2+6a(x-a)-2b(y-b)\\
&-6ax+2by+z=3a^2-b^2-6a^2+2b^2\\
&-6ax+2by+z=-3a^2+b^2
\end{aligned}$$

על מנת שהמישור יהיה מקביל למישור הנתון, מקדמי שלוש המשתנים צריכים להיות פרופורציונליים.
במילים אחרות, קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש $(-6a,2b,1)=\lambda(6,4,1)$
נסיק $\lambda=1$ ונקבל:

$$\begin{cases}-6a=6 & \Rightarrow a=-1\\ 2b=4 & \Rightarrow b=2\end{cases}$$

ואכן, נציב ונקבל כי המישור המשיק בנקודה $(-1,2,f(-1,2))$ יהיה:

$$6x+4y+z-1=0$$

מישור זה מקביל למישור הנתון ולא מתלכד איתו (אין פרופורציה באיבר החופשי $-1\neq\lambda\cdot 5$).

שאלה 3

סעיף א

נסמן בשאלה את $x(t), y(t)$ ו$\alpha(t)$ את הגדלים של שתי הצלעות הנתונות בס"מ והזווית (ברדיאנים) שביניהן בנקודת זמן מסוימת (בשניות), בהתאמה. נתון בשאלה כי בנקודת זמן מסוימת t_0 מתקיים $x(t_0) = 4, y(t_0) = 3, \alpha(t_0) = \frac{\pi}{6}$ וכמו כן ערכי הנגזרות x', y' המייצגות את קצב השינוי לשנייה קיימים $x'(t_0) = y'(t_0) = 1$. עלינו למצוא את $\alpha'(t_0)$.

מנתוני השאלה, שטח המשולש בזמן t_0 הוא (לפי נוסחה ידועה) $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 3$. נתון כי שטח המשולש נשאר קבוע, ולכן בכל נקודת זמן t מתקיים:

$$\frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \sin(\alpha(t)) = 3$$

ומכאן נקבל $\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{6}{x(t)\cdot y(t)}\right)$ בכל נקודת זמן t.

אז נסמן $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{6}{x\cdot y}\right)$. כאן נדרש $x \cdot y > 6$ וכן מהעובדה שx, y מייצגים אורכים חיוביים של צלעות נסיק $x, y > 0$.
נחשב נגזרות חלקיות לפי הכלל בעמוד 68:

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{6}{xy})^2}} \cdot \frac{6}{y} \cdot (\frac{1}{x})' = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2y^2-36}} \cdot \frac{6}{y} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-6}{x\sqrt{x^2y^2-36}}$$
$$f_y = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{6}{xy})^2}} \cdot \frac{6}{x} \cdot (\frac{1}{y})' = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2y^2-36}} \cdot \frac{6}{x} \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-6}{y\sqrt{x^2y^2-36}}$$

בפרט $f_x(4,3) = \frac{-6}{4\sqrt{108}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$ וכן $f_y(4,3) = \frac{-6}{3\sqrt{108}} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$

אי לכך, לפי כלל השרשרת 7.66 עבור $\alpha(t) = f(x(t), y(t))$ מקבלים:

$$\alpha'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

ובפרט עבור $t = t_0$ מקבלים:

$$\alpha'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0) =$$
$$= f_x(4,3) \cdot 1 + f_y(4,3) \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{9} = -\frac{7\sqrt{3}}{36} = -0.3367$$

כלומר ברגע זה קצב גדילתה של הזווית הוא -0.3367 רדיאנים בשנייה.

סעיף ב

תהא פונקציה $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2 בכל המישור, ומגדירים $x(u,v) = u+v, y(u,v) = u-v$.
כמו כן מגדירים $z(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ אז לפי חוקי הגזירה מאתר הקורס מתקיים:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = z_u = f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 1 = f_x(u-v, u+v) + f_y(u-v, u+v)$$
$$z_uv = (f_{xx} \cdot x_v + f_{xy} \cdot y_v) + (f_{yx} \cdot x_v + f_{yy} \cdot y_v) = f_{xx} \cdot 1 + f_{xy} \cdot (-1) + f_{yx} \cdot 1 + f_{yy} \cdot (-1) \underset{\text{נתון}+7.71}{=}$$
$$= f_{xx} - f_{xy} + f_{xy} - f_{xx} = 0$$

קיבלנו כי $\frac{\partial}{\partial v}(z_u)$ זהותית 0 בכל המישור, לכן הפונקציה z_u אינה מושפעת מערך המשתנה v.

מכאן נסיק כי קיימת פונקציה במשתנה אחד $g(t)$ כך ש $z_u(u,v) \equiv g(u)$. באופן דומה להוכחה שלנו, z_v אינה תלויה בu ולכן קיימת פונקציה נוספת $h(t)$ במשתנה אחד כך ש $z_v(u,v) \equiv h(v)$. נדגיש כי g, h רציפות (סכום של נגזרות חלקיות רציפות) ולכן אינטגרביליות לפי u, v בהתאמה.

סעיף ג

תהא $h(r)$ פונקציה במשתנה אחד גזירה פעמיים ותהא $f(x,y)\equiv h(r)$ עבור $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

נוכיח את טענת העזר הבאה: לכל פונקציה גזירה $g(r)$ ולכל פוקנקציה בשני משתנים $k(u,v)\equiv g(r)$ כך ש$r(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$ מקבלים $k_u=g'(r)\cdot\frac{u}{r}$.
אכן, לפי עמוד 68 בכרך ג נקבל $k_u=g'(r)+r_u$, ומתקיים $r_u=\frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{u}{r}$.
בנקל נוכל להוכיח טענה זהה עבור v.

כמו כן נשים לב כי מתקיים:

$$r_{uu}=(\frac{u}{r})'=\frac{1\cdot r-u\cdot r_u}{r^2}=\frac{r-u\cdot\frac{u}{r}}{r^2}=\frac{r^2-u^2}{r^3}=\frac{v^2}{r^3}$$

וכן טענה דומה ניתן להוכיח עבור r_{vv}

יהי $r>0$ מספר ממשי. אז ניקח את הנקודות $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ המקיימות $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ ובפרט $(x,y)\neq(0,0)$.

$$\begin{aligned}
f_x&=h'(r)\cdot\frac{x}{r}\\
f_{xx}&=(h'(r))_x\cdot\frac{x}{r}+h'(r)\cdot(\frac{x}{r})_x=(h''(r)\cdot\frac{x}{r})\cdot\frac{x}{r}+h'(r)+h'(r)\cdot\frac{y^2}{r^3}=\\
&=h''(r)\cdot\frac{x^2}{r^2}+h'(r)\cdot\frac{y^2}{r^3}=\frac{x^2+y^2}{r^3}\cdot(rh''(r)+h'(r))=\frac{1}{r}\cdot(rh''(r)+h'(r))
\end{aligned}$$

באופן דומה מתקיים $f_y=h'(r)\cdot\frac{y}{r}$ וכן $f_{yy}=\frac{1}{r}\cdot(rh''(r)+h'(r))$.
נקבל לפי הנתון $0=f_{xx}+f_{yy}=2\cdot\frac{1}{r}\cdot(rh''(r)+h'(r))$ ומכאן, היות ו$r\neq0$, $rh''(r)+h'(r)=0$

שאלה 4

שאלת רשות

תהא $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בכל המישור ויהיו $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$.
נסמן $u = p2 - p1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, אז $v = \frac{u}{||u||}$ וקטור היחידה בכיוון מp_1 לp_2.
צריך להוכיח כי קיימת $p_0 \in [p_1, p_2]$ כך ש$f(p_2) - f(p_1) = (D_v f)(p_0) \cdot ||p_1 - p_2||$

נגדיר פונקציה במשתנה יחיד $h(t)$ המוגדרת בתחום $[0, ||u||]$ כך:

$$h(t) = f(p_1 + t \cdot v) = f(p_1 + t \cdot \frac{p_2 - p_1}{||p_2 - p_1||}) = f((1 - \frac{t}{||p_2 - p_1||})p_1 + \frac{t}{||p_2 - p_1||}p_2)$$

בפרט $h(0) = f(p_1), h(||p_2 - p_1||) = f(p_2)$. מטעמי נוחות נסמן:

$$x(t) = (1 - \frac{t}{||p_2 - p_1||})x_1 + \frac{t}{||p_2 - p_1||}x_2$$
$$y(t) = (1 - \frac{t}{||p_2 - p_1||})y_1 + \frac{t}{||p_2 - p_1||}y_2$$

ומקבלים $h(t) = f(x(t), y(t))$.

הפונקציה גזירה בקטע זה כיוון שמייצגת "מסלול" בפונקציה דיפרנציאבילית בשני משתנים. בפרט, נגזרת הפונקציה בקטע לכל t תהיה, לפי כלל השרשרת 7.66,

$$\begin{aligned}
h'(t) &= f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = \\
&= f_x(x(t), y(t)) \cdot (-\frac{x_1}{||p_2 - p_1||} + \frac{x_2}{||p_2 - p_1||}) + f_y(x(t), y(t)) \cdot (-\frac{y_1}{||p_2 - p_1||} + \frac{y_2}{||p_2 - p_1||}) = \\
&= \frac{1}{||p_2 - p_1||} \cdot (f_x(x(t), y(t)) \cdot (x_2 - x_1) + f_y(x(t), y(t)) \cdot (y_2 - y_1)) = \\
&= \frac{1}{||p_2 - p_1||} \cdot \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (p_2 - p_1) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \frac{p_1 - p_2}{||p_2 - p_1||} = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot v \underset{7.67}{=} (D_v f)(x(t), y(t))
\end{aligned}$$

היות והפונקציה גזירה, נקבל לפי לגראנז' מאינפי 1 כי קיים $t_0 \in [0, ||p_2 - p_1||]$ כך שמתקיים:

$$h'(t_0) = \frac{h(||p_2 - p_1||) - h(0)}{||p_2 - p_1|| - 0} = \frac{f(p_2) - f(p_1)}{||p_2 - p_1||}$$

נבחר $p_0 = (x(t_0), y(t_0)) \in [p_1, p_2]$ ונקבל:

$$f(p_2) - f(p_1) = h'(t_0) \cdot ||p_2 - p_1|| = (D_v f)(p_0) \cdot ||p_2 - p_1||$$

ובכך סיימנו את ההוכחה.