מטלת מנחה 12 - אלגברה לינארית 1

328197462

04/12/2022

שאלה 1

סעיף א

נפתור לפי טענה $2.6.5$. על מנת שקבוצת הוקטורים תהא תלויה לינארית, ננסה למצוא פתרון לא טרוייואלי למערכת ההומוגנית שמטריצת המקדמים המצומצמת שלה היא A המפורטת מטה, בעזרת דירוג:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{R_3 \to R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו 3 משתנים קשורים ומשתנה אחד חופשי. לכן, נסיק כי קיים יותר מפתרון יחיד למערכת, בפרט יש לה פתרון לא טריוויאלי.
לפי טענה 2.6.5 נסיק כי הקבוצה תלויה לינארית.

סעיף ב

שוב, על מנת שקבוצת הוקטורים מעל $\mathbb{Z}_3$ תהא בלתי תלויה לינארית, למערכת המשוואות ההומוגנית שמטריצת המקדמים שלה היא B המפורטת מטה צריך להיות פתרון יחיד (הפתרון הטריוויאלי) בלבד.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי כל המשתנים קשורים ולכן יש פתרון יחיד. מאחר והמערכת הומוגנית,זהו הפתרון הטריוויאלי ונסיק כי הקבוצה בלתי תלויה לינארית

שאלה 2

יהא F שדה אינסופי ו $n \geq 1$ מספר טבעי. יהיו $v_1, v_2, ..., v_n, w \in F^n$ וקטורים שונים.
נשים לב כי למשוואה ההומוגנית $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = \underline{0}$ יש פתרון יחיד (הפתרון הטריוויאלי) או אינסוף פתרונות, מאחר ומדובר בשדה אינסופי. אז נניח בשלילה כי למשוואה יש פתרון יחיד - הפתרון הטריוויאלי.
נקבל, לפי הגדרה, כי הקבוצה $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ בלתי תלויה לינארית. כעת, A בת n איברים ובת"ל, לכן לפי 2.7.11 מהווה בסיס ל F^n, ובפרט פורשת את F^n.
לכן, עבור $w \in F^n$ יש צירוף לינארי של איברי A, כלומר קיימים $x_1, x_2, ..., x_n \in F$ כך ש $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = w$, אבל לפי הנתון אין ל$w$ צירוף לינארי כזה!

שאלה 3

נתונות $A_{m\times n}, B_{n\times m} : A\cdot B = I_m$

סעיף א

עלינו להוכיח כי למערכת ההומוגנית $B\underline{x} = \underline{0}$ יש פתרון יחיד. מאחר ומדובר במערכת הומוגנית, ברור כי פתרון זה יהיה הפתרון הטריוויאלי.

אכן, יהא $\underline{c} \in F^m$ פתרון למערכת ונרצה להוכיח $\underline{c} = \underline{0}$. מתקיים:

$$\underline{c} \underset{3.5.3}{=} I_m \cdot \underline{c} \underset{\text{לפי הנתון}}{=} (AB)\underline{c} \underset{\text{קיבוציות}}{=} A(B\underline{c}) \underset{\text{c פתרון למערכת}}{=} A_{m\times n} \cdot \underline{0}_{n\times 1} = \underline{0}_{m\times 1}$$

ובכך הוכחנו כי הפתרון הטריוויאלי הוא פתרון יחיד.

סעיף ב

ניעזר בטענה $2.6.5$.
לפי סעיף א' למערכת $B\underline{x} = \underline{0}$
יש פתרון יחיד. לכן, לפי טענה זו, וקטורי העמודות של מטריצת המקדמים B, שהם קבוצה של m מאיברי F^n, מהווים קבוצה בלתי-תלויה לינארית.
כעת, מאחר והקבוצה בלתי-תלויה לינארית, נובע לפי מסקנה $2.6.7$ כי $m \le n$ ובכך סיימנו את ההוכחה.

סעיף ג

נניח כי $B\cdot X = I_n$.
באופן דומה לסעיף א', נקבל כי למערכת ההומוגנית $X\underline{x} = \underline{0}$ יש פתרון יחיד, ובאופן דומה לסעיף ב' נסיק $n \le m$.

נקבל $m = n$, נציב בנתון נקבל $A\cdot B = I_n$, כלומר A, B הפיכות ומתקיים $B^{-1} = A$.

נחזור להנחה. נקבל $B\cdot X = I_n = B\cdot A$.
מאחר וB הפיכה, נפעיל את כלל הצמצום $3.8.3$ ונקבל $X = A$ ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 4

תחילה נוכיח כי $(AB^2 - A) = A(B+I)(B-I)$:

$$(B+I)(B-I) \underset{\text{לפי פילוג}}{=} B(B-I) + I(B-I) \underset{\text{לפי פילוג + 3.5.3}}{=} B^2 - B\cdot I + B - I \underset{3.5.3}{=} B^2 - B + B - I = B^2 - I$$

$$A(B+I)(B-I) \underset{\text{חישוב קודם}}{=} A(B^2 - I) \underset{\text{לפי פילוג + 3.5.3}}{=} AB^2 - A$$

כעת, ידוע כי $AB^2 - A$ הפיכה. נקבל, לפי שאלה $3.8.3$:

$$(AB^2 - A)^{-1} = (A(B+I)(B-I))^{-1} = (B-I)^{-1}(B+I)^{-1}A^{-1}$$

נסיק לפי שאלה $3.10.2$ כי קיימות המטריצות $(B-I)^{-1}, (B+I)^{-1}, A^{-1}$.
בנוסף, נקבל לפי פילוג ו $3.8.2 + 3.5.3$: $BA + A = (B+I)A$.
לכן, לפי משפט $3.8.4$, המטריצה $BA + A$ הפיכה כמכפלת מטריצות הפיכות ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 5

סעיף א

לפי הנתון, המטריצה $I+2A$ הפיכה.
לכן, לפי משפט $3.8.4$, גם המטריצה $(I+2A)^t$ הפיכה.
נחשב:

$$(I+2A)^t \underset{3.3.7}{=} I^t + (2A)^t \underset{3.3.7}{=} I + 2(A^t) \underset{\text{לפי הנתון}}{=} I + 2(-A) \underset{3.3.5}{=} I - 2A$$

ולכן גם המטריצה $I-2A$ הפיכה.

סעיף ב

עבור $C=(I-2A)(I+2A)^{-1}$ נחשב את C^t:

$$C^t = ((I-2A)(I+2A)^{-1})^t \underset{3.4.5}{=} ((I+2A)^{-1})^t (I-2A)^t \underset{3.8.4}{=} ((I+2A)^t)^{-1}(I-2A)^t \underset{3.2.4+\text{חישוב קודם}}{=} (I-2A)^{-1}(I+2A)$$

נראה כי $(I-2A),(I+2A)$ מתחלפות:

$$(I-2A)(I+2A) \underset{\text{פילוג}}{=} I(I+2A) - 2A(I+2A) \underset{3.5.3+\text{לפי פילוג}}{=} I + 2A - 2A - 2A(2A) \underset{3.5.6}{=} I - 4A^2$$

באופן דומה $(I+2A)(I-2A)=I-4A^2$, ולכן המטריצות מתחלפות.

נקבל:

$$C^tC = (I-2A)^{-1}(I+2A)(I-2A)(I+2A)^{-1} \underset{\text{קיבוציות וחישוב קודם}}{=} (I-2A)^{-1}(I-2A)(I+2A)(I+2A)^{-1} \underset{\text{קיבוציות}}{=} I \cdot I = I$$

שאלה 6

נתונות מעל $\mathbb{Z}_7$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

סעיף א

לפי מסקנה 3.9.9, קיימת C כנדרש אם ורק אם A ו-B שקולות שורה.
נמצא את ההצגה הקנונית של שתי המטריצות. ברור כי שתי המטריצות שקולות-שורה להצגתן הקנונית, ומאחר וההצגה הקנונית של כל מטריצה היא יחידה, נסיק כי שתי המטריצות שקולות שורה אם ורק אם הצגתן הקנונית זהה. נרצה לדרג את שתי המטריצות עד לקבלת מטריצה קנונית Q.
במקביל, נבצע את אותן הפעולות על מטריצת היחידה על מנת למצוא את המטריצות $P_1, P_2 : Q = P_1 A = P_2 B$
נחשב:

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\phi_1 : R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\phi_2 : R_2 \to R_2 + R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\phi_4 : R_3 \to R_3 - 3R_2]{\phi_3 : R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\phi_5 : R_1 \to 4R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & -2 \end{array}\right) \equiv_7 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 5 \end{array}\right) = (Q|P_1)$$

$$(B|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to 3R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) = (Q|P_2)$$

אכן, קיבלנו כי A, B שקולות לאותה צורה קנונית ולכן קיים C כנדרש.
מתקיים $Q = P_1 A = P_2 B$, המטרציה P_2 הפיכה כמכפלת מטריצות אלמנטריות ולכן נכפול את השוויון משמאל בהופכית לה ונקבל $B = P_2^{-1} P_1 A$. מכך נובע $C = P_2^{-1} P_1$ והיא אכן הפיכה כמכפלת מטריצות הפיכות.

נרצה לחשב את C. לשם כך, נבצע על P_1 את הפעולות האלמנטריות ההפוכות לפעולות שביצענו בדירוג המטריצה B. לפי מסקנה 3.9.6 וטענה 3.9.4 הדבר אכן ייתן לנו את המטריצה המבוקשת.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\phi_7 : R_3 \to R_3 - R_2]{\phi_6 : R_1 \to R_1 + 3R_2} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi_8 : R_2 \to 3^{-1} R_2 \equiv_7 5R_2} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\phi_{10} : R_3 \to R_3 + 3R_1]{\phi_9 : R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

סעיף ב

נציג את C כמכפלת המטריצות האלמנטריות המייצגות כל פעולה

$$C \underset{3.9.4}{=} \phi_{10}(I) \phi_9(I) \cdots \phi_1(I) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$