מטלת מנחה 13 - קורס 20218

328197462

08/09/2023

שאלה 1

נניח כי קיימת מעבת הומונית $x' = Ax$ עבורה הפונקציות הבאות מהוות פתרון:

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

אז גם הפונקציה $u = 2x_1 - x_2$, שהיא צירוף לינארי של פתרונות למערכת ההומוגנית. מהווה פתרון למערכת.
מתקיים:

$$u(0) = 2 \cdot e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - e^0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן לפי למה 4.1.7, u הוא הפתרון הטריוויאלי, כלומר $u(t) = 0$ לכל $t \in (-1, 1)$. אולם:

$$u(0.5) = 2 \cdot e^{0.5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - e^{-0.5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = (e^{0.5} - e^{-0.5}) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

ונקבל סתירה היות ו $e^{0.5} - e^{-0.5} \neq 0$ וכן $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$

שאלה 2

לפנינו המשוואה $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad b = \begin{pmatrix} 5e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ראשית נמצא פתרון למערכת ההומוגנית $x' = Ax$. המטריצה A בעלת ערכים קבועים ולכן נמצא את ערכיה העצמיים:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 5 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2) - (-1) \cdot 5 = \lambda^2 - 4 + 5 = \lambda^2 + 1$$

קיבלנו כי למטריצה A שני ערכים עצמיים, $\pm i$. נמצא וקטור עצמי השייך לע"ע $\lambda = i$:

$$iI - A = \begin{pmatrix} i - 2 & 5 \\ -1 & i + 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} i & 1 - 2i \\ -1 & i + 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to iR_1} \begin{pmatrix} -1 & i + 2 \\ -1 & i + 2 \end{pmatrix}$$

ועבור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ וקטור עצמי נקבל $-a + (i + 2)b = 0$, כלומר $a = (i + 2)b$ ולכן $v = b\begin{pmatrix} i + 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $b = 1$ ונקבל 2 פתרונות מרוכבים בת"ל למערכת ההומוגנית:

$$\begin{cases} x(t) = e^{it}v = (\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} i + 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x^*(t) = e^{-it}v* = (\cos t - i \sin t)\begin{pmatrix} -i + 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

על פי שאלה 4.2.14, החלק הממשי והחלק המדומה של $x(t)$ מהווים זוג פתרונות בת"ל גם הם וניתן להחליף בין הזוגות. אם כן,

$$\begin{aligned} x(t) &= (\cos t + i \sin t)(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \cos t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \sin t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i(\cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

ונקבל זוג פתרונות:

$$\begin{cases} x_1(t) = Re\ x(t) = \cos t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ x_2(t) = Im\ x(t) = \cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{cases}$$

נמצא פתרון פרטי למערכת המקורית בעזרת וריאציית הפרמטרים:

שאלה 3

לפנינו המערכת $x' = Ax$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים של המטריצה A. נפשט את הפ"א בעזרת הרמז שקיבלנו.

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \underset{R_2 \to R_2 + \lambda R_3}{\overset{R_1 \to R_1 + R_3}{=}} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda + 3 \\ 1 + 2\lambda & 0 & \lambda^2 + \lambda + 2 \\ 2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & \lambda + 3 \\ 1 + 2\lambda & \lambda^2 + \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - (2\lambda + 1)(\lambda + 3) = \\ &= \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - (2\lambda^2 + \lambda + 6\lambda + 3) = \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = \\ &= \lambda^2(\lambda - 3) + 2\lambda^2 - 5\lambda - 3 = \\ &= \lambda^2(\lambda - 3) + 2\lambda^2 - 6\lambda + \lambda - 3 \\ &= \lambda^2(\lambda - 3) + 2\lambda(\lambda - 3) + \lambda - 3 \\ &= (\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda - 3) \\ &= (\lambda + 1)^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

נקבל שני ערכים עצמיים - $\lambda_1 = 3$ עם ריבוי אלגברי 1, ו$\lambda_2 = -1$ עם ריבוי אלגברי 2. נמצא פתרון מהצורה $e^{\lambda t}v$ לכל ערך עצמי:

$$3I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ נקבל $a + 2c = 0, b = 0$, כלומר $v = c\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $c = -1$ ונקבל פתרון למערכת $x_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$-I - A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ועבור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ נקבל $a - 2c = 0, -b + 4c = 0$, כלומר $v = c\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $c = 1$ ונקבל פתרון למערכת $x_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

עבור הפתרון השלישי במערכת הפתרונות נמצא וקטור w כך ש $(-I - A)w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. נחזור על פעולות הדירוג שביצענו קודם לכן:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ועבור $w = \begin{pmatrix} abc \end{pmatrix}$ מקבלים $a - 2c = -3, -b + 4c = 7$ ולכן $w = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $c = 2$ ונקבל $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

פתרון נוסף למערכת יהיה $x_3(t) = te^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 4t + 1 \\ t + 2 \end{pmatrix}$, והפתרון הכללי יהיה:

$$x = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t}(C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 4t + 1 \\ t + 2 \end{pmatrix})$$

שאלה 4

לפנינו המערכת $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ראשית נמצא פתרון למערכת ההומוגנית $x' = Ax$. נמצא ערכים עצמיים לA:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \overset{R_2\to R_2-R_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{R_2\to R_2+R_3}{=}(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-3)(-\lambda+1-(-1)\cdot 1) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

קיבלנו 3 ע"ע. נמצא 3 פתרונות למשוואה ההומוגנית מהצורה $e^{\lambda t}v$.

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור וקטור עצמי $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ השייך לע"ע $\lambda = 1$ נקבל $b + 2c = 0, a = 0$ ולכן $v = c\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נבחר למשל $c = -1$ ונקבל $x_1(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור וקטור עצמי $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ השייך לע"ע $\lambda = 2$ נקבל $a - b = 0, c = 0$ ולכן $v = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

נבחר למשל $a = 1$ ונקבל $x_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

$$3I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור וקטור עצמי $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ השייך לע"ע $\lambda = 3$ נקבל $a - b = 0, b - 2c = 0$ ולכן $v = c\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נבחר למשל $c = 1$ ונקבל $x_3(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

נמצא פתרון פרטי למערכת המקורית בעזרת וריאציית הפרמטרים.

שאלה 5

לפנינו המערכת $x' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} x$ כך ש-a, b קבועים ממשיים.

עלינו להוכיח שכל רכיביו של פתרון למשוואה זו אפסים באינסוף אם ורק אם $a < b < 0$. תחילה נמצא ערכים עצמיים ל-A.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - b) - (-b)(-b) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - b^2$$

נמצא שורשים לפ"א:

$$\Delta = (a+b)^2 - 4(ab - b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4b^2 = (a-b)^2 + 4b^2 \geq 0$$

נחלק למקרים. אילו $\Delta = 0$, כלומר יש פתרון יחיד למשוואה וע"ע יחיד למטריצה, הדבר מחייב $b = 0, a - b = 0$ ולכן $a = b = 0$.
במקרה זה נקבל פתרונות מהצורה $C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, שעבור $C_1 \neq 0$ או $C_2 \neq 0$ יכילו רכיבים שאינם אפסים באינסוף.

נתייחס למקרה בו יש שני שורשים שונים, λ_1, λ_2. נקבל מערכת של פתרונות $e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2$ כאשר v_1, v_2 וקטורים עצמיים השייכים לע"ע λ_1, λ_2 בהתאמה.
היות ו-v_1, v_2 וקטורים קבועים, רכיבי שני פתרונות אלה אפסים באינסוף אם ורק אם $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. במקרה זה כל פתרונות המערכת יהיו צירוף לינארי של שני הפתרונות שלהם וגם הם יהיו אפסים באינסוף.
במילים אחרות, כל רכיב בכל פתרון למערכת אפס באינסוף אם ורק אם $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

שאלה 6

לפנינו המערכת $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2t} & \frac{-t}{2} \\ \frac{3}{2t^3} & \frac{-1}{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -t \\ -t^3 \end{pmatrix}$$

נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית המתאימה, $x' = Ax$, שבו הרכיב השני קבוע. נסמן אפוא $x = \begin{pmatrix} u(t) \\ C \end{pmatrix}$. מתקיים:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = x' = Ax = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ C \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2u(t) - Ct^4 \\ 3u(t) - Ct^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} 2t^3 \cdot u' = 7t^2u - Ct^4 \\ 3u - Ct^2 = 0 \end{cases} \quad \to \begin{cases} 2t^3 \cdot u' = t^2(4u + 3u - Ct^2) \\ 3u - Ct^2 = 0 \end{cases}$$

נציב את המשוואה השנייה בראשונה ונקבל:

$$\begin{aligned} 2t^3 \cdot u' &= 4t^2u \\ \frac{u'}{u} &= \frac{2}{t} \\ \frac{du}{u} &= \frac{2}{t}dt \\ \ln|u| &= 2\ln|t| + C_1 = \ln(t^2) + C_1 \\ |u| &= e^{C_1}t^2 \\ u &= \pm e^{C_1}t^2 = C_2t^2 \end{aligned}$$

נבחר למשל $u = t^2$, אז $Ct^2 = 3u = 3t^2$ ולכן $C = 3$ ו $x_1 = \begin{pmatrix} t^2 \\ 3 \end{pmatrix}$ מהווה פתרון ל$x' = Ax$.

נמצא פתרון נוסף למערכת ההומוגנית על פי הטכניקה בסעיף 4.2.5. נמצא פונקציה וקטורית $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ונסמן $x = \begin{pmatrix} y_1 + t^2y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$.
אז:

$$\begin{pmatrix} y_1' + 2ty_2 + t^2y_2' \\ 3y_2' \end{pmatrix} = x' = Ax = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 + t^2y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2y_1 + 7t^4y_2 - 3t^4y_2 \\ 3y_1 + 3t^2y_2 - 3t^2y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2y_1 + 4t^4y_2 \\ 3y_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} y_1' + 2ty_2 + t^2y_2' = \frac{7}{2t}y_1 + 2ty_2 \\ y_2' = \frac{1}{2t^3}y_1 \end{cases} \quad \to \begin{cases} y_1' + t^2y_2' = \frac{7}{2t}y_1 \\ y_2' = \frac{1}{2t^3}y_1 \end{cases}$$

נציב את המשוואה השנייה בראשונה ונקבל:

$$\begin{aligned} y_1' + \frac{t^2}{2t^3}y_1 &= \frac{7}{2t}y_1 \\ y_1' + \frac{1}{2t}y_1 &= \frac{7}{2t}y_1 \\ y_1' &= \frac{3}{t}y_1 \\ \frac{dy_1}{y_1} &= \frac{3}{t}dt \\ \ln|y_1| &= 3\ln|t| + C_3 = \ln|t^3| + C_3 \\ |y_1| &= e^{C_3}|t^3| \\ y_1 &= \pm e^{C_3}t^3 = C_4t^3 \end{aligned}$$

נבחר למשל $y_1 = t^3$, אז $y_2' = \frac{1}{2t^3}y_1 = \frac{1}{2}$ ולכן $y_2 = \frac{t}{2} + C_5$. נבחר למשל $y_2 = \frac{t}{2}$ ונקבל פתרון:

$$\begin{pmatrix} t^3 + t^2 \cdot \frac{t}{2} \\ \frac{3t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3t^3}{2} \\ \frac{3t}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$$

ו $x_2 = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$ פתרון נוסף למערכת ההומוגנית.

נמצא פתרון פרטי למערכת המקורית בעזרת וריאציית הפרמטרים: