ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20417

אלגוריתמים

חוברת הקורס אביב 2023ב

כתב: ד״ר אסף נוסבוים

פברואר 2023 – סמסטר אביב – תשפ״ג

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנט

אני מקדם בברכה את הצטרפותך לקורס "**אלגוריתמים**".

בחוברת זו תמצא את לוח זמנים ופעילויות, תנאים לקבלת נקודות זכות ומטלות. תאריכי המפגשים בקורס יישלחו בהמשך. וודאו בבקשה שקראתם באתר הקורס את תאור המנהלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת: http://telem.openu.ac.il. מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library. ניתן לפנות אלי בשעות הקבלה הטלפונית (שתפורסם באתר החל מפתיחת הסמסטר 09-7781222), או במייל: assaf.nussbaum@gmail.com. לצורך בירורים אדמיניסטרטיביים נא לפנות לזמירה בטלפון: 09-7781220.

לתשומת לב הסטודנטים הלומדים בחו"ל:

למרות הריחוק הפיסי הגדול, נשתדל לשמור אתכם על קשרים הדוקים ולעמוד לרשותכם ככל האפשר.
הפרטים החיוניים על הקורס נכללים בחוברת הקורס וכן באתר הקורס.
מומלץ מאד להשתמש באתר הקורס ובכל אמצעי העזר שבו וכמובן לפנות אלינו במידת הצורך.

אני מאחל לכם לימוד פורה ומהנה.

ב ב ר כ ה ,

ד"ר אסף נוסבוים
מרכז הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20417 /2023ב)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה	תאריך אחרון להגשת המטלה
1	10.03.2023-5.03.2023	פרקים 1,2		
2	17.03.2023-12.03.2023	פרק 3		
3	24.03.2023-19.03.2023	״		ממ״ן 11 24.03.2023
4	31.03.2023-26.03.2023	פרק 4		
5	07.04.2023-02.04.2023 (ד-ו פסח)	״		
6	14.04.2023-09.04.2023 (א-ד פסח)			ממ״ן 12 14.04.2023
7	21.04.2023-16.04.2023 (ג יום הזכרון לשואה)	פרק 5		
8	28.04.2023-23.04.2023 (ג יום הזיכרון, ד יום העצמאות	״		
9	05.05.2023-30.04.2023	״		ממ״ן 13 05.05.2023

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה	תאריך אחרון להגשת המטלה
10	12.05.2023-07.05.2023 (ג ל״ג בעומר)	פרק 6		
11	19.05.2023-14.05.2023	״		
12	26.05.2023-21.05.2023 (ו שבועות)	״		ממ״ן 14 26.05.2023
13	02.06.2023-28.05.2023	פרק 7		
14	09.06.2023-04.06.2023	״		
15	16.06.2023-11.06.2023	״		ממ״ן 15 16.06.2023

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

3. הנחיות כלליות להצגת אלגוריתמים כפתרון למטלה

א. חובה **להוכיח נכונות** בצורה מדויקת.

ב. חובה להציג ניתוח מדויק של **זמן הריצה**.

ג. חובה להציג את האלגוריתם היעיל ביותר שהצלחתם לפתח.

ד. אם ניתן לפתור בעיה ביעילות באמצעות **הפעלה/תיקון** של אלגוריתם מוכר, יש להציג פתרון שכזה במקום לפתח אלגוריתם חדש לחלוטין.

ה. אסור לפתור תרגילים של פרק מוקדם באמצעות אלגוריתם שנלמד בפרק מאוחר. להלן פרוט הפרקים המתורגלים בכל מטלה :

ממ״ן	פרק בספר הלימוד
11	3 (סריקת גרפים)
12	4 (חמדנות – בדגש על מסלולים/עצים מזעריים)
13	5 (הפרד ומשול – בדגש על התמרת פורייה)
14	6 (תכנון דינאמי)
15	7 (רשתות זרימה)

ניקוד המטלות

בקורס **חובת הגשה** של 3 מטלות מתוך 5. ככל שמוגשות יותר מטלות, כך עולה משקל המטלות בציון הסופי.

למען הלימוד, **חשוב לפתור גם שאלות שאינכם מגישים** לקבלת ציון.

לתשומת לבכם!

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן :

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי. זאת בתנאי שמטלות אלה **אינן חלק מדרישות החובה בקורס** ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

4. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

א. הגשת 3 מטלות לפחות.

ב. ציון של 60 לפחות בבחינת גמר.

ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: **20417, אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: **פרקים 1,3 בספר**

מספר השאלות: **4** **משקל המטלה:** **4%**

סמסטר: **2023ב** **מועד הגשה:** **24.03.2023**

יש להגיש **תשובות לשלוש** מבין השאלות 1,2,3,4

סריקה לרוחב/לעומק: לולאות פנימיות/חיצוניות

כדי לגלות את כל הקדקודים בגרף הקלט, רצים ב**לולאה חיצונית** על כל הקדקודים, ורק כשנתקלים בקדקוד שטרם נתגלה, אז מתחילים לבצע סריקה לרוחב/לעומק מקדקוד זה. הלולאה החיצונית הזו נבדלת מ**הלולאות הפנימיות**, בהן רצים על כל שכניו של קדקוד מסוים x, במסגרת הטיפול בקדקוד המסוים x. כאשר משנים את סדר הריצה בלולאה החיצונית ו/או בלולאות הפנימיות אז עשויים להתקבל עצי-סריקה שונים. ידוע, ונתון מבחינתנו לכל אורך המטלה, כי הרצת סריקה לעומק מקדקוד x, **תסתיים בדיוק** כשיסתיים תהליך הגילוי והסריקה של כל הקדקודים y שנגישים מ- x.

שאלה מס' 1 (33%)

עומק של עצי DFS/BFS. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם קדקוד מוצא $s \in V$. מובטח כי כל יתר הקדקודים ב- G נגישים מ- s. נסמן ב- $T_{\text{BFS}}, T'_{\text{BFS}}$ שני עצי-BFS שרירותיים שונים של G שמושרשים ב- s, ונסמן ב- $T_{\text{DFS}}, T'_{\text{DFS}}$ שני עצי-DFS שרירותיים שונים של G שמושרשים ב- s. הביטו בשתי הטענות הנפרדות הבאות (א,ב). לטענה אמתית הציגו הוכחה קצרה ומדויקת. לטענה שקרית הציגו דוגמא-נגדית של גרף עם מספר קדקודים n גדול כרצוננו, כך שהיחס $depth(T)/depth(T')$ בין העומקים של שני העצים יהיה גדול ככל האפשר. נדרשת תשובה של עד 4 משפטים לכל טענה. שימו לב שהגרפים בשאלה זו מכוונים.

(טענה א) לכל שני עצי BFS יש אותו עומק, כלומר $depth(T_{\text{BFS}}) = depth(T'_{\text{BFS}})$.

(טענה ב) לכל שני עצי DFS יש אותו עומק, כלומר $depth(T_{\text{DFS}}) = depth(T'_{\text{DFS}})$.

סריקה לעומק: זמני גילוי/עזיבה

בתחילת סריקת-עומק של כלל הגרף נגדיר **<u>שעון גלובאלי</u>** $clock \leftarrow 0$, שמקודם אך ורק כשמתרחש אחד משני הארועים הבאים: (א) גילינו הרגע לראשונה קדקוד חדש x, שטרם נתקלנו בו קודם: ברגע זה נגדיר את **<u>זמן הגלוי</u>** $B(x) = \underline{BeginTime}(x) \leftarrow clock$ ונקדם את השעון $clock \leftarrow clock + 1$. (ב) עזבנו הרגע לעולמים קדקוד x, משום שמיצינו את כל חקירתו: ברגע זה נגדיר את **<u>זמן העזיבה</u>** $F(x) = \underline{FinishTime}(x) \leftarrow clock$, ונקדם גם הפעם את השעון $clock \leftarrow clock + 1$. למשל, בתום סריקה לעומק של גרף שמתחילה בקדקוד x, כשהגרף כולל רק שני קדקודים וצלע בודדת $x \to y$, נקבל $B(x) = 1,\ B(y) = 2,\ F(y) = 3,\ F(x) = 4$.

שאלה מס׳ 2 (33%)

<u>הרצת סריקה לעומק</u>. הציגו שלוש הרצות-DFS שונות, לגילוי כל הקדקודים בגרף הקלט, שמורכב משבע הצלעות הבאות $(u,v),\ (u,x),\ (u,y),\ (v,y),\ (x,v),\ (y,u),\ (y,z)$ (אין בגרף קדקודים או צלעות נוספות). בכל אחד מהסעיפים הבאים (א׳, ב׳ ,ג׳) נדרשת סריקה שונה, וזאת בהתאם לסדר הריצה על הקדקודים בלולאה החיצונית, ובלולאות הפנימיות.

(הרצה א) בכל הלולאות רצים על הקדקודים ב**סדר מילוני=לקסיקוגרפי**
(למשל, קדקוד a לפני קדקוד b).

(הרצה ב) בכל הלולאות רצים על הקדקודים בסדר **הפוך** לסדר מילוני.

(הרצה ג) בלולאה החיצונית רצים על הקדקודים בסדר מילוני,
ובלולאות הפנימיות רצים על הקדקודים בסדר הפוך לסדר מילוני.

הגישו בכל סעיף **<u>ציור של הגרף</u>**, שבו (i) על כל צלע רשום הסיווג שלה (**עץ/קדימה/אחורה/חוצה**), (ii) לכל קדקוד רשומים **<u>זמן הגילוי וזמן העזיבה</u>** שלו, בנוסף, (iii) רישמו בכל סעיף כמה עצי-DFS נפרדים התקבלו. בבקשה לא לכתוב/לצייר שום פרטים נוספים.

שאלה מס׳ 3 (33%)

<u>פרוק גרף מכוון לרכיבי קשירות-חזקה</u>. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ בייצוג של רשימות-שכנויות. בשאלה זו נפתח אלגוריתם, שרץ בזמן לינארי, ומבצע פרוק מלא של G לרכיבי קשירות חזקה (= **רק״ח** = רכיבים קשירים היטב). הפלט של האלגוריתם יהיה מערך SCC (strongly-connected component), שבו $SCC[x] = SCC[y]$ אמ״מ הקדקודים x, y שייכים לאותו רק״ח. הגדרות וסימונים: בהמשך $C \subseteq V$ תסמן קבוצת קדקודים שרירותית. **רק״ח-מקור** הינו רק״ח, שלא נכנסת אליו אף צלע. **רק״ח-בור** הינו רק״ח שלא יוצאת ממנו אף צלע. **בגרף ההפוך** G^{REV} יש בדיוק אותם קדקודים כמו בגרף המקורי G, אבל כל צלע הופכת את כיוונה. **הגישו תשובות לסעיפים (ד,ה,ו) בלבד**. סעיפים (א,ב,ג,ז) אינם להגשה. ניתן לצטט אותם בסעיפים (ד,ה,ו).

(א) הסבירו כיצד לחשב בזמן לינארי את רשימות-השכנויות של גרף ההפוך G^{REV}.

(ב) הוכיחו כי C מהווה רק"ח בגרף המקורי G אמ"מ C מהווה רק"ח בגרף ההפוך G^{REV}.

(ג) הוכיחו כי C מהווה רק"ח-בור ב- G אמ"מ C מהווה רק"ח-מקור ב- G^{REV}.

(ד) נתון קדקוד x, ששייך ל-רק"ח C_x. הוכיחו שבסריקה לעומק שמתחילה בקדקוד x מתגלים אך ורק כל הקדקודים של C_x אמ"מ מתקיים ש- C_x הינו רק"ח-בור.

(ה) יהיו $C \neq D$ שני רק"ח, כך שיש ב- G מסלול מקדקוד של C לקדקוד של D. הוכיחו כי **בכל סריקת-עומק** אפשרית של G מתקיים: זמן העזיבה המרבי של קדקוד ב- C, גדול יותר מכל זמני העזיבה של הקדקודים ב- D, כלומר $\max_{x\in C}\{F(x)\} > \max_{y\in D}\{F(y)\}$.

(ו) הציגו ונתחו אלגוריתם שמפרק את G ל-רק"ח, בהתבסס על הסעיפים הקודמים.

(ז) בצעו הרצות שונות של האלגוריתם שלכם על הגרף משאלה 2.

שאלה מס' 4 (33%)

__**בעיית הספיקות (2-SAT)**__. הגדרות: נוסחת <u>k-CNF</u> היא נוסחה מהצורה $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$, כשלכל <u>פסוקית</u> הצורה $\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee \ldots \vee z_{i,k})$, וכל $z_{i,j}$ הינו אחד מהליטרלים $x_1,\ldots,x_n,\neg x_1,\ldots,\neg x_n$. למשל $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$ הינה נוסחת 2-CNF עם $k=2$ ליטרלים בכל פסוקית, $n=3$ משתנים, ו- $m=4$ פסוקיות. לעומתה, $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \neg x_5)$ הינה נוסחת 3-CNF עם $k=3$ ליטרלים בכל פסוקית, $n=5$ משתנים, ו- $m=2$ פסוקיות. <u>השמה</u> הינה פונקציה שמתאימה לכל משתנה x_i ערך "אמת" T או "שקר" F. בהינתן השמה מסוימת, אזי הליטרל x_i מסופק אם ההשמה מקיימת $x_i \leftarrow T$, והליטרל $\neg x_i$ מסופק אם $x_i \leftarrow F$. הפסוקית $\varphi_i = (z_{i,1} \vee z_{i,2} \vee \ldots \vee z_{i,k})$ מסופקת, אם <u>לפחות</u> אחד מהליטרלים שבה $z_{i,1}, z_{i,2}, \ldots, z_{i,k}$ מסופק. הנוסחא כולה $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ מסופקת, אם <u>כל</u> הפסוקיות $\varphi_1,..,\varphi_m$ מסופקות. הנוסחא נקראת <u>ספיקה</u>, אם לפחות אחת מבין 2^n ההשמות האפשריות מספקת אותה.

הציגו אלגוריתם יעיל, שבהינתן נוסחה φ בצורת 2-CNF **מוצא עבורה השמה מספקת**, ואם אין השמה כזו - מדווח שהנוסחה איננה ספיקה. הדרכה: העזרו בגרף מכוון G שמותאם לנוסחה φ.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: **20417, אלגוריתמים**
חומר הלימוד למטלה: **פרק 4 בספר**
מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 4%**
סמסטר: 2023ב **מועד הגשה: 14.04.2023**

יש להגיש תשובות ל**שתי השאלות 1,2**, ובנוסף ל**אחת מהשאלות 3,4**

בכל השאלות בקורס אודות גרפים ממושקלים: **<u>משקל=מחיר=אורך</u>** של מסלול מוגדר כסכום משקלי הצלעות במסלול (ולא כמספרן של הצלעות במסלול). בהתאם לכך, **<u>המרחק</u>** מקדקוד א' לקדקוד ב' מוגדר כמשקל המזערי של מסלול מ-א' ל-ב' (או כאינסוף אם אין בכלל מסלול כזה).

שאלה מס' 1 (35%)

<u>מסלולים כמעט מזעריים</u>. נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם משקלים חיוביים $w(e)>0$ לכל אחת מהצלעות $e\in E$ ועם קדקוד מוצא s. נתון גם שלכל קדקוד v קיים מסלול $P_{s,v}$ מ-s ל-v בגרף. כרגיל, משקלו של מסלול מוגדר כסכום משקלי הצלעות $w(P)=\sum_{e\in P} w(e)$, ומסלול $P_{s,v}$ נקרא מזערי אם מתקיים $w(P_{s,v})\le w(P'_{s,v})$ עבור כל מסלול אחר $P'_{s,v}$. הגדרות חדשות: מסלול $P_{s,v}$ ייקרא **<u>כמעט-מזערי</u>**, אם משקלו קטן ביותר מבין כל המסלולים הלא מזעריים מ-s ל-v. כלומר, אם $w_1<w_2<\ldots<w_k$ הינה רשימת כל המשקלים האפשריים של מסלולים מ-s ל-v, אז למסלול מזערי מתקיים $w(P_{s,v})=w_1$ ולמסלול כמעט-מזערי מתקיים $w(P_{s,v})=w_2$. צלע $e=(u,v)\in E$ תיקרא **<u>שימושית</u>** אם היא צלע <u>אחרונה</u> באיזשהו מסלול מזערי $P_{s,v}$.

(א) הוכיחו שאם <u>כל</u> הצלעות ב-$P_{s,v}$ שימושיות, אז $P_{s,v}$ מסלול מזערי.

(ב) הוכיחו שאם יש צלע <u>לא</u> שימושית ב-$P_{s,v}$ (אחת או יותר), אז $P_{s,v}$ <u>איננו</u> מסלול מזערי.

(ג) הוכיחו שאם $P_{s,v}$ מסלול כמעט-מזערי אז מופיעה בו צלע לא שימושית <u>אחת ויחידה</u>.

(ד) תהי $e=(u_1,u_2)$ הצלע הלא שימושית היחידה במסלול כמעט-מזערי $P_{s,v}$. הוכיחו שהרישא של $P_{s,v}$ מ-s ל-u_1 מהווה מסלול מזערי, וגם שהסיפא של $P_{s,v}$ מ-u_2 ל-v מהווה מסלול מזערי.

(ה) הציגו בעזרת הסעיפים הקודמים אלגוריתם למציאת מסלול כמעט-מזערי מקדקוד מוצא נתון s לקדקוד יעד נתון t, בזמן $\Theta(|E|\cdot\log|V|)$. הניחו כי פעולות של חיבור/חיסור/השוואה של משקלים, כולן פעולות "אלמנטריות", שמתבצעות בזמן $\Theta(1)$.

שאלה מס' 2 (45%)

<u>עצים פורשים מזעריים (משקלים יחודיים)</u>. לכל אורך השאלה נתון גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ עם משקלים חיוביים $w(e)>0$ בצלעות. מכיוון שהגרף קשיר, אז ידוע לנו שיש לו לפחות עץ-פורש אחד, ולכן גם יש לו לפחות עץ-פורש מזערי (עפ״מ) אחד. הגדרה: משקלי-הצלעות נקראים **<u>יחודיים</u>** אם לכל זוג של צלעות $e_1 \neq e_2$ יש משקלים שונים $w(e_1) \neq w(e_2)$. הגדרה: חלוקה $V=S \cup T$ של קדקודי הגרף לשתי תתי-קבוצות זרות ולא ריקות S,T נקראת **<u>חתך</u>**.

הוכיחו/הפריכו כל אחת משתי הטענות הנפרדות הבאות. (כל הוכחה חייבת להיות מדויקת. כל הפרכה חייבת להציג דוגמא נגדית של גרף עם מספר קדקודים n גדול כרצוננו).

(טענה א) אם e^* הינה הצלע המזערית **<u>היחידה</u>**, שחוצה חתך מסוים S,T
(כלומר אין אף צלע אחרת e, שחוצה את אותו החתך ומקיימת $w(e)<w(e^*)$),
אזי בהכרח e^* שייכת **<u>לכל</u>** עפ"מ של G.

(טענה ב) אם משקלי-הצלעות יחודיים, אז בהכרח יש לגרף עפ"מ **<u>יחיד</u>**
(כלומר לא ייתכנו שני עפ"מים שונים).

שאלה מס' 3 (20%)

<u>בעיית הספיקות (3-SAT) – כשלון החמדנות</u>. הפורמט של נוסחת 3-CNF הוגדר כזכור במסגרת ממ״ן 1. נביט באלגוריתם החמדן הבא למציאת השמה מספקת לנוסחת 3-CNF שרירותית φ.
האלגוריתם סורק את כל המשתנים $x_1,\dots,x_n$ בזה אחר זה, ולכל משתנה x_i בוחר השמה, שממקסמת את מספר הפסוקיות המסופקות **<u>החדשות</u>**. (למשל, כשהאלגוריתם מטפל במשתנה x_2, בוחנים רק את הפסוקיות שטרם סופקו ע״י ההשמה שנקבעה כבר למשתנה x_1. אם ב-5 מהפסוקיות הללו מופיע הליטרל x_2, וב-6 מהפסוקיות הללו מופיע הליטרל $\neg x_2$, אז מציבים $x_2 \leftarrow F$, משום שכך יסופקו 6 פסוקיות חדשות במקום 5). הציגו נוסחת 3-CNF עליה האלגוריתם החמדן נכשל: הנוסחא ספיקה, אבל האלגוריתם מפיק כפלט השמה לא מספקת.

שאלה מס' 4 (20%)

<u>קידוד הופמן</u>. עץ מושרש T נקרא בינארי לחלוטין אם לכל קדקוד שלו שאינו עלה יש שני בנים. הוכיחו כי לכל עץ מושרש בינרי לחלוטין T בעל n עלים, קיימת סדרת שכיחויות $f_1,f_2,\dots,f_n$ כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T. (הבהרה: כזכור, השורש אף פעם אינו נחשב לעלה בעצים מושרשים. לכן הטענה חלה עבור $n \geq 2$ בלבד).

מטלת מנחה (ממ״ן) 13

הקורס: **20417, אלגוריתמים**
חומר הלימוד למטלה: **פרק 5 בספר**
מספר השאלות: 4 **משקל המטלה: 4%**
סמסטר: 2023ב **מועד הגשה: 05.05.2023**

יש להגיש תשובות ל**שאלה 1**, ובנוסף **לשתיים מבין** שלוש השאלות **2,3,4**.

שאלה מס׳ 1 (30%)

<u>הרצת FFT</u>. (בשאלה זו סעיף א׳ כן להגשה, **וסעיף ב׳ לא להגשה**). נביט בפולינום $p(x)=x^3+2x^2-3x-1$ שדרגתו קטנה מ-4. רישמו את כל החישובים מעל שדה המרוכבים (לרבות הקריאות הרקורסיביות) עבור:

(א) הרצת FFT מסדר 4 (הרצת $FFT(\cdot,\omega_4)$) על מקדמי הפולינום.

(ב) הרצת INVERSE-FFT (הרצת $FFT(\cdot,(\omega_4)^{-1})$) על הערכים שהתקבלו בסעיף א׳.

שאלה מס׳ 2 (35%)

<u>כפל מספרים שלמים בגישת FFT</u>: כפל מספרים שלמים הינה בעיה אלגוריתמית בעלת חשיבות מעשית עליונה. לשם פשטות להלן נניח ששני המספרים המוכפלים שווי אורך (לשניהם ייצוג בינארי של n ביטים), וששניהם חיוביים. בתרגיל זה יוצגו עיקר הרכיבים באחד האלגוריתמים היעילים ביותר המוכרים כיום לכפל שלמים: <u>זמן הריצה</u> שלו הוא <u>$\Theta(n\log^2 n)$</u> בלבד. כזכור, אלגוריתם הכפל של **Karatsuba** מבוסס על פיצול הספרות של כל קלט לשני בלוקים שווי גודל, ורץ בזמן $\Theta(n^{\log_2 3})$. הציגו אלגוריתם משופר, שמחלק כל קלט ל-(n/k) בלוקים בגודל k. היעזרו באלגוריתם ה-FFT לפתרון תתי-הבעיות המתקבלות. הניחו לשם פשטות (וללא הצדקה), כי ההכפלות שמתבצעות במהלך הקריאות הרקורסיביות אינן מגדילות את אורכם של המספרים, ולכן ניתן לממש הכפלות אלו בצורה תמימה תוך ביצוע $\Theta(k^2)$ פעולות על ביטים. בחרו לבסוף את גודלם של הבלוקים להיות $k=\log n$.

שאלה מס' 3 (35%)

<u>כפל מטריצות ריבועיות (Strassen)</u>. כזכור, כפל של שתי מטריצות ריבועיות A, B מסדר $n \times n$ (מעל שדה שרירותי) מניב מטריצה $C = A \times B$ אף היא מסדר $n \times n$, המוגדרת ע"י הכלל

$$C_{i,j} = \sum_{1 \le k \le n} A_{i,k} \times B_{k,j}.$$

לכן **<u>מימוש ישיר</u>** של כפל מטריצות כרוך ב- $\Theta(n^3)$ פעולות אריתמטיות בסיסיות מעל השדה הנדון (כפל/חיבור/חיסור), ובפרט ב- $\Theta(n^3)$ פעולות כפל. בתרגיל זה נוכיח כי ניתן להכפיל מטריצות ריבועיות באמצעות $\underline{\Theta(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.81})}$ פעולות אריתמטיות בסיסיות בלבד. פרטי ההוכחה מובאים להלן. נניח בה"כ כי n זוגי. נפרק כל מטריצה ל-4 תתי-מטריצות מסדר $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}.$$

וודאו (לא להגשה) כי מהגדרת כפל מטריצות מתקיים:

$$\begin{aligned} r &= a \times e + b \times f \\ s &= a \times g + b \times h \\ t &= c \times e + d \times f \\ u &= c \times g + d \times h \end{aligned}$$

כעת נגדיר:

$$\begin{aligned} P_1 &= a \times (g - h) \\ P_2 &= (a + b) \times h \\ P_3 &= (c + d) \times e \\ P_4 &= d \times (f - e) \\ P_5 &= (a + d) \times (e + h) \\ P_6 &= (b - d) \times (f + h) \\ P_7 &= (a - c) \times (e + g) \end{aligned}$$

(ב) וודאו (**<u>לא להגשה</u>**) כי חישוב המטריצות $P_1, \dots, P_7$, כרוך ב-7 פעולות כפל בלבד (וכן מספר מצומצם של פעולות חיבור/חיסור) של מטריצות מסדר $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$.

(ג) וודאו (**<u>לא להגשה</u>**) כי מתקיים:

$$\begin{aligned} s &= P_1 + P_2 \\ t &= P_3 + P_4 \\ r &= P_4 + P_5 + P_6 - P_2 \\ u &= P_1 + P_5 - P_3 - P_7 \end{aligned}$$

(ד) הוכיחו (כן להגשה) כי מספר הפעולות האלמנטריות של האלגוריתם הוא $\Theta(n^{\log_2 7})$ בלבד.

שאלה מס' 4 (35%)

<u>חישוב כל הנגזרות של פולינום בנקודה</u>. מקובל לסמן ב- $f^{(k)}(x)$ את הנגזרת מסדר k של הפונקציה $f(x)$. למשל, $f^{(1)}(x)=f'(x)$, $f^{(2)}(x)=f''(x)$, $f^{(3)}(x)=f'''(x)$ וכן $f^{(0)}(x)=f(x)$. נתונים מקדמי הפולינום $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ ונתונה נקודה מסוימת x_0. הציגו אלגוריתם לחישוב ערכי כל הנגזרות $f^{(0)}(x_0),\ldots,f^{(n)}(x_0)$ באותה נקודה x_0, תוך ביצוע $\Theta(n\log n)$ פעולות אריתמטיות בסיסיות בלבד. (פעולה בסיסית = חיבור, חיסור, כפל, חילוק או השוואה של מספרים). למשל לפולינום מדרגה $n=4$ יש לחשב את הערכים הבאים:

$$
\begin{array}{llllll}
f^{(0)}(x_0)= & a_0 & +a_1\cdot x_0 & +a_2\cdot(x_0)^2 & +a_3\cdot(x_0)^3 & +a_4\cdot(x_0)^4 \\
f^{(1)}(x_0)= & & +a_1 & +2a_2\cdot x_0 & +3a_3\cdot(x_0)^2 & +4a_4\cdot(x_0)^3 \\
f^{(2)}(x_0)= & & & 2a_2 & +2\cdot 3a_3\cdot x_0 & +3\cdot 4a_4\cdot(x_0)^2 \\
f^{(3)}(x_0)= & & & & 2\cdot 3a_3 & +2\cdot 3\cdot 4a_4\cdot(x_0) \\
f^{(4)}(x_0)= & & & & & 2\cdot 3\cdot 4a_4
\end{array}
$$

נדרשת תשובה של **<u>4-5 שורות בלבד</u>**. נדרשת תשובה ש**<u>מבוססת על FFT</u>**. בפרט, לא יינתן ניקוד על האלגוריתם הטריוויאלי שמחשב בנפרד כל אחד מבין $\Theta(n^2)$ המחוברים. העזרו בתשובתכם בצמצום הסטנדרטי של עצרות:

$$\frac{m!}{\ell!}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m-1)\cdot m}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\ell-1)\cdot\ell}=(\ell+1)\cdot(\ell+2)\cdot\ldots\cdot(m-1)\cdot m .$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: **20417, אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: **פרק 6 בספר**

מספר השאלות: **4** **משקל המטלה:** **4%**

סמסטר: **2023ב** **מועד הגשה:** **26.05.2023**

יש להגיש תשובות ל**שלוש מבין ארבע** השאלות 1,2,3,4

שאלה מס' 1 (33%)

<u>מסלולים מזעריים בשריג</u>. נתון שריג ריבועי מסדר $n\times n$ עם מחירים אי-שליליים על קדקודים: אברי השריג הם נקודות מהצורה (i,j) כאשר $1\le i,j\le n$, ולכל איבר מותאם מחיר $c(i,j)\ge 0$. הקואורדינטה הראשונה i מייצגת מיקום אופקי (ימינה/שמאלה) בשריג. לכן השכבה השמאלית ביותר מורכבת מהנקודות בהן $i=1$, והשכבה הימנית ביותר מהנקודות בהן $i=n$. הקואורדינטה השנייה j מייצגת מיקום אנכי (מעלה/מטה). לכן השכבה התחתונה ביותר מורכבת מהנקודות בהן $j=1$, והשכבה העליונה ביותר מהנקודות בהן $j=n$. בשריג מותרת תנועה רק בצעדים מאחת משלוש הצורות הבאות: $(i,j)\to(i+1,j+1)$, או $(i,j)\to(i+1,j)$ או $(i,j)\to(i,j+1)$, כלומר, "ימינה ולמעלה" או "ימינה" או "למעלה".

הציגו אלגוריתם שרץ בזמן $\Theta(n^2)$ למציאת מסלול במחיר מזערי מהפינה השמאלית התחתונה לפינה הימנית העליונה, כשמחיר מסלול מוגדר כסכום מחירי הנקודות במסלול. (פעולות אריתמטיות על המחירים, כמו חיבור, חיסור והשוואה, מתבצעות בזמן $\Theta(1)$).

הגדרת המערך (5 נק'): ______

נוסחת הנסיגה (20 נק'): ______

אתחול המערך (3 נק'): ______

עדכון המערך לפי נוסחת הנסיגה (3 נק'): ______

______

יעילות (2 נק'): ______

שאלה מס' 2 (33%)

<u>בחירת מלונות לאורך מסלול</u>) ברצוננו לערוך מסע לאורכו של מסלול ישר מנקודת-התחלה s לנקודת-סיום f. נתונה רשימה $p_1 < ... < p_n$ של מיקומי-מלונות, כך שמלון i ממוקם בדיוק p_i קילומטרים מתחילת-המסלול. במהלך המסע לנים בכל לילה במלון אחר. החופשה מוגבלת בזמן, ולכן <u>חייבים</u> להשלים את המסע תוך לכל היותר t ימים ($t<n$ נתון). ידוע שכמות-המאמץ, שנדרש ביום-הליכה הינה <u>הריבוע</u> d^2 של המרחק d, שהולכים באותו יום. ברצוננו לבחור את נקודות-הלינה, כך שנמזער את סכום המאמצים בכל המסע.

הציגו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לבעיה, שרץ בזמן פולינומי ביחס ל- t וביחס ל- n. נדרשת תשובה שמבוססת על **<u>נוסחת-נסיגה</u>** בשיטה של תכנון-דינאמי.

מגדירים מערך שמשמעותו ______________________________________(5 נק')

נוסחת-הנסיגה עבור המערך הינה (נדרש הסבר קצר)__________________________________

____(22 נק')

איך ממלאים את התאים במערך____(3 נק')

זמן הריצה (הסבר קצרצר)____(3 נק')

שאלה מס' 3 (33%)

<u>אינטרפולציה באמצעות תכנון דינאמי</u>: פולינום ממשי מדרגה קטנה מ- n הינו ביטוי מהצורה $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^{n-1}$. משפט נודע באלגברה קובע, כי פולינום שכזה נקבע ביחידות לפי ערכו ב- n מקורות שונים x_i. למשל, כל קו ישר (כלומר פולינום מדרגה קטנה מ-2) נקבע ביחידות ע"י 2 נקודות דרכן הוא עובר. באופן כללי, בהינתן n נקודות $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ עבורן $x_i \neq x_j$ לכל $i \neq j$, קיים פולינום אחד ויחיד $p(x)$ מדרגה קטנה מ- n המקיים $p(x_1)=y_1,...,p(x_n)=y_n$. פולינום זה נקרא פולינום האינטרפולציה של הנקודות הנתונות. בבעיית-האינטרפולציה נתונות הנקודות $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ המקיימות $x_i \neq x_j$, וברצוננו לחשב את המקדמים $a_0,...,a_{n-1}$ של פולינום-האינטרפולציה.

(א. 26 נק') לכל $i \le j$ נסמן ב- $p_{i,j}$ את פולינום האינטרפולציה של הנקודות $(x_i,y_i),...,(x_j,y_j)$.

<u>רשמו 3 פולינומים פשוטים</u> $q(x),r(x),s(x)$ מדרגה 0 או 1, עבורם מתקיים

$$(*)\quad p_{i,j+1}(x) = \frac{q(x)\cdot p_{i,j}(x)-r(x)\cdot p_{i+1,j+1}(x)}{s(x)}$$

הפולינומים ובדיקה שמתקיים (*)____

____

____

(<u>השאלה ממשיכה בעמוד הבא</u>)

(ב. 7 נק') הציגו אלגוריתם **<u>תכנון-דינאמי</u>** לבעיית-האינטרפולציה, המבוסס על נוסחת-הנסיגה מסעיף (א). לשם פשטות, החשיבו פעולות אריתמטיות על מספרים כפעולות-אלמנטריות.

הגדרת המערך: ______________________________

אתחול המערך: ______________________________

עדכון המערך לפי נוסחת הנסיגה: ______________________________

____

____

יעילות: ______________________________

____

(ג. **<u>לא להגשה וללא ניקוד</u>**). יהי $p(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4$. הציבו ב-$p(x)$ את חמשת הערכים $-2,-1,0,1,2$, והריצו את אלגוריתם האינטרפולציה מהסעיף הקודם על חמש הנקודות שמתקבלות. וודאו שהאלגוריתם אכן מניב כפלט את מקדמיו של $p(x)$.

שאלה מס' 4 (33%)

נתון גרף <u>מכוון</u> $G=(V,E)$ עם משקלים אי-שליליים $c(e)\geq 0$ על הצלעות $e\in E$, ונתון קדקוד מסוים $r\in V$. הביטו באלגוריתם הבא:

(i) מאתחלים מערך חד-ממדי A באמצעות הכלל: $A[v]=\begin{cases}0, & v=r\\ \infty, & v\neq r\end{cases}$.

(ii) לולאה חיצונית: חוזרים שוב ושוב על הפעולה הבאה.

(1ii) לולאה פנימית: סורקים את הצלעות בסדר לקסיקוגרפי. לכל $e=(u,v)\in E$ מבצעים:

אם $A[v]>A[u]+c(e)$ אז מעדכנים $A[v]\leftarrow A[u]+c(e)$.

(2ii) אם בהרצה הנוכחית של כל הלולאה הפנימית לא בוצע אף עדכון,

אז האלגוריתם מסיים.

(א) רישמו <u>מה מחשב האלגוריתם</u> (אין צורך להוכיח נכונות).

(ב) יהי $B(n)$ המספר המרבי של איטרציות שמתבצעות בלולאה <u>החיצונית</u> על גרפים בעלי n קדקודים. חשבו את $B(n)$, והציגו סדרת גרפים G_n עליהם מתבצעות בדיוק $B(n)$ איטרציות.

(ג) הציגו סדרת גרפים אחרת G_n', עבורם נכנסים ללולאה החיצונית פעמיים בלבד, וזאת למרות <u>שמספר הצלעות שלהם זהה</u> לגרפים מהסעיף הקודם, כלומר $|E(G_n')|=|E(G_n)|$ לכל n.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: **20417, אלגוריתמים**

חומר הלימוד למטלה: **פרק 7 בספר**

מספר השאלות: **4**   **משקל המטלה:** **4%**

סמסטר: **2023ב**   **מועד הגשה:** **16.06.2023**

יש להגיש תשובות ל**שלוש שאלות** מבין השאלות **1,2,3,4**. שאלה 5 לתרגול נוסף ולא להגשה.

בכל רשתות הזרימה בקורס **לא נכנסות צלעות למקור**, ו**לא יוצאות צלעות מהיעד**.

שאלה מס' 1 (33%)

<u>צלעות שמוסרות, נוספות מחדש, ושוב מוסרות מהרשת השיורית</u>. הציגו דוגמא פשוטה של רשת זרימה עם צלע e, שמקיימת את שתי התכונות הבאות: (א) במהלך הרצת **Edmonds-Karp** על הרשת ישנן שתי איטרציות שונות, שבהן תוספת הזרימה דרך e זהה לקיבולת השיורית של e. (ב) הצלע e מחברת בגרף המקורי בין שני קדקודים, שמרחקם מהמקור s שונה. שימו לב שהדוגמא באיור 7.6 בספר הקורס אינה עונה לדרישות השאלה. (הדוגמא מתארת הרצה של **Ford-Fulkerson** אבל לא של המימוש של **Edmonds-Karp**). נדרשת רשת זרימה גדולה יותר. נדרשת תשובה קצרה: **<u>ציור</u>** של הרשת, והסבר של **<u>2-3 שורות</u>** בלבד).

שאלה מס' 2 (33%)

<u>זרימה מזערית כשקיבולות חוסמות מלרע את הזרימה הנדרשת</u>. כרגיל נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור ויעד $s\neq t\in V$ ועם קיבולת אי-שלילית $c(e)>0$ לכל צלע בגרף. (כאשר $e\notin E$ אז $c(e)$ אינה מוגדרת, ומובטח שלכל זוג קדקודים $u\neq v$, לכל היותר אחת מבין הצלעות (u,v), (v,u) נמצאת בגרף). כרגיל זרימה חוקית הינה פונקציה $f:E\to\mathbb{R}$, המקיימת את חוק שימור הזרימה $\sum_{(u,v)\in E} f(u,v)-\sum_{(v,w)\in E} f(v,w)=0$ לכל קדקוד $v\neq s,t$. אלא שהפעם, כל <u>קיבולת חוסמת את הזרימה דווקא מלמטה</u>: כלומר f נדרשת לקיים $f(e)\geq c(e)$ לכל צלע $e\in E$ (במקום $f(e)\leq c(e)$). כל השאלות להלן מתייחסות לרשת המתוארת בפסקה האחרונה.

(א) הוכיחו שאם קיימת זרימה חוקית ברשת אז קיימת ברשת זרימה חוקית גדולה כרצוננו.

(ב) הציגו אלגוריתם למציאת זרימה <u>חוקית</u> (לאו דווקא מזערית) ברשת.

(ג) הציגו אלגוריתם למציאת זרימה <u>חוקית מזערית</u> ברשת.

שאלה מס' 3 (33%)

<u>תיקון זרימה מרבית נתונה</u>. נתונה רשת זרימה, כלומר גרף מכוון $G=(V,E)$ עם מקור ויעד $s \neq t \in V$, ועם <u>קיבולות שלמות</u> $c(e)>0$ לכל $e \in E$. נתונה זרימה מרבית f ברשת, שהתקבלה מהרצה של אלגוריתם Ford Fulkerson, ונתונה צלע מסוימת $e^* \in E$. הציגו אלגוריתמים <u>בסיבוכיות ליניארית</u> עבור כל אחת מהבעיות הבאות. (כדי לקצר את ניתוח היעילות, הניחו שבכל הצלעות הקיבולות קטנות ולכן חיבור/חיסור/השוואה של קיבולת/זרימה הינן פעולות אלמנטריות המתבצעות בזמן $\Theta(1)$).

(א) מציאת זרימה מרבית ברשת, המתקבלת <u>מהגדלת</u> הקיבולת של e^* ב-1.

(ב) מציאת זרימה מרבית ברשת, המתקבלת <u>מהקטנת</u> הקיבולת של e^* ב-1.

שאלה מס' 4 (33%)

<u>בעיית הספיקות</u>. הפורמט של נוסחת 3-CNF הוגדר כזכור במסגרת ממ"ן 1. נתונה נוסחת 3-CNF, שבה כל אחד מהמשתנים $x_1,\ldots,x_n$ מופיע <u>בדיוק בשלוש</u> פסוקיות שונות, וכל פסוקית כוללת <u>בדיוק שלושה</u> משתנים שונים (כזכור הופע של הליטרל $\neg x_i$ גם נחשבת כהופעה של המשתנה x_i). הוכיחו כי הנוסחא ספיקה. הציגו אלגוריתם למציאת השמה מספקת עבור נוסחאות כאלו. הדרכה: העזרו במשפט החתונה של **Hall**.

שאלה מס' 5 (לא להגשה)

<u>אוב הפרדה</u>. הבעיה המקורית (רקע לשאלה): נתון קלט שמורכב מגרף לא מכוון $G=(V,E)$ וממספר ממשי $k \geq 1$. לכל אורך השאלה $S \subseteq V$ תסמן תת-קבוצה לא טריוויאלית של קדקודים, כלומר $\varnothing \neq S \neq V$. מעוניינים להגדיר משקלים אי-שליליים $w(e) \geq 0$ על הצלעות. המשקלים נקראים "**<u>חוקיים</u>**" אם לכל קבוצה S, סכום משקלי הצלעות שיוצאות מ-S לעבר $V \setminus S$ הינו **<u>לפחות</u>** k. המטרה היא למצוא משקלים חוקיים עבורם סכום משקלי כלל הצלעות מזערי.

ידוע שניתן לפתור ביעילות את הבעיה המקורית הזו כל עוד נצליח להציג עבורה "**<u>אוב הפרדה</u>**". אוב הפרדה הינו אלגוריתם יעיל A, שבהינתן הצעת-פתרון לבעיה המקורית (כלומר בהינתן רשימת משקלים $w(e) \geq 0$), מקיים:

(א) אם המשקלים חוקיים – אז האלגוריתם A עונה "המשקלים חוקיים".

(ב) אם המשקלים אינם חוקיים – אז האלגוריתם מוצא **<u>קבוצה מסוימת</u>** S' של קדקודים, שביחס אליה המשקלים אינם חוקיים. (שימו לב שהאלגוריתם A חייב להיות יעיל. לכן אסור לו לבדוק בזו אחר זו את כל $2^{|V|}-2$ תתי-הקבוצות האפשריות S).

השאלה ממשיכה בעמוד הבא

(נביט למשל, **במקרה הפרטי** שבו כל המשקלים $w(e)\in\{0,1\}$ ובנוסף $k=1$. אוב ההפרדה הנדרש במקרה הפרטי מתקבל מהרצה של BFS/DFS על תת-הגרף G', שכולל את כל הקדקודים אבל רק את הצלעות שמשקלן $w(e)=1$. ואכן: (א) אם BFS/DFS מגלה ש-G' קשיר, אז מכל S יוצאת בגרף המקורי G לפחות צלע אחת עם משקל $w(e)=1$, והאוב יענה כנדרש שהמשקלים חוקיים. (ב) אם בסריקת BFS/DFS מתגלה ש-G' איננו קשיר, אז בסריקה מוצאים גם את קבוצת הקדקודים S' ברכיב הקשירות של קדקוד ההתחלה של הסריקה. בברור, לכל לצלע שיוצאת מ-S' בגרף המקורי G יש משקל $w(e)=0$. האוב יחזיר את S' כקבוצה מסוימת שביחס אליה המשקלים אינם חוקיים).

השאלה: הציגו אוב הפרדה, כלומר אלגוריתם יעיל שמקיים (א,ב), עבור המקרה הכללי שבו $w(e)\geq 0$, $k\geq 1$. כל הרקע וההסברים המקדימים נתונים עבורכם ואין שום צורך להוכיחם.