מטלת מנחה 15 - אלגברה לינארית 2

328197462

02/06/2023

שאלה 1

סעיף א

נחפש מחרבים T-שמורים מכל מימד, כאשר $V = \mathbb{R}^2$ וכאשר $V = \mathbb{C}^2$.
ממימד 0: נקבל את המרחב הטריוויאלי $\{0\}$ הן עבור $\mathbb{R}^2$ והן עבור $\mathbb{C}^2$.
ממימד 1: על פי שאלה 8.4.3, כל מרחב T-שמור חד מימדי נפרש על ידי וקטור עצמי כלשהו. נמצא ערכים עצמיים של T ומכאן וקטורים עצמיים:

$$P_T(x) = |xI - [T]_E| = \begin{vmatrix} x-1 & -5 \\ 10 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x+1) - 10(-5) = x^2 + 49$$

מעל $\mathbb{R}$, נקבל כי לפולינום אין שורשים, ולהעתקה אין ערכים עצמיים. אין מרחבים T-שמורים ממימד 1 עבור $V = \mathbb{R}^2$.
מעל $\mathbb{C}$, שורשי הפולינום האופייני יהיו $\lambda_1 = 7i, \lambda_2 = -7i$. נמצא וקטורים עצמיים השייכים לע"ע אלה:

- עבור $\lambda = 7i$ יש למצוא וקטור במרחב האפס של

$$\begin{pmatrix} 7i-1 & -5 \\ 10 & 7i+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1(-1-7i)} \begin{pmatrix} 50 & 5+35i \\ 10 & 7i+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & 7i+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוקטור $v_1 = (1+7i, -10)$ מקיים את המשוואה.

- עבור $\lambda = -7i$ יש למצוא וקטור במרחב האפס של

$$\begin{pmatrix} -7i-1 & -5 \\ 10 & -7i+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1(-1+7i)} \begin{pmatrix} 50 & 5-35i \\ 10 & -7i+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -7i+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוקטור $v_2 = (1-7i, -10)$ מקיים את המשוואה.

נקבל 2 מרחבים T-שמורים $\mathrm{Sp}\{v_1\}, \mathrm{Sp}\{v_2\}$.
ממימד 2 נקבל את תת-המרחב הטריוויאלי V הן עבור $\mathbb{C}^2$ והן עבור $\mathbb{R}^2$.

סעיף ב

תהא T העתקה כמוגדר. יהא $U \subseteq V$ תת-מרחב של V ממימד 1. על פי הנתון, U תת-מרחב T-שמור.
כלומר, קיים $u_0 \in U$ כך שלכל $u \in U$ מתקיים $Tu = \lambda u_0$. בפרט, $Tu_0 = \alpha u_0$ עבור $\alpha \in \mathbb{F}$ כלשהו.

נבחר ערך α זה ונוכיח כי $T = \alpha I$.
עבור $u \in U$ מקבלים $Tu = T(\lambda u_0) = \lambda T u_0 = \alpha \cdot \lambda u_0 = \alpha u$.
נבחר אם כן $v \in V - U$ ונוכיח כי $Tv = \alpha v$.
נתבונן בתת-המרחב $W = \mathrm{Sp}\{v\}$. תת-מרחב זה הוא T-שמור, לכן $Tv = \beta v$.
נתבונן בתת-המרחב $W' = \mathrm{Sp}\{u_0 + v\}$. שוב, מתקיים $T(u_0 + v) = \gamma \cdot (u_0 + v) = \gamma u_0 + \gamma v$.
מצד שני, $T(u_0 + v) = Tu_0 + Tv = \alpha u_0 + \beta v$.
הוקטורים u_0, v בלתי-תלויים לינארית (אינם פרופורציוניים), לכן לוקטור $T(u_0 + v)$ יש הצגה יחידה כקומבינציה לינארית של u_0 ו-v.
מכאן נסיק $\alpha = \gamma = \beta$ ולכן $Tv = \alpha v$ והשלמנו את מלאכת ההוכחה.

שאלה 2

סעיף א

נסמן ב $m(x)$ את הפולינום המינימלי של T_W, וב$M(x)$ את הפולינום המינימלי של T. עלינו להוכיח כי m מחלק את M.
על פי הגדרה, T מאפסת את M. מכאן שלכל $v \in V$, $M(T)v = 0$, ובפרט עבור $v \in W$. כמו כן, לכל $v \in W$ מקבלים $T_W v = Tv$, ולכן $M(T_W)v = 0$.
קיבלנו כי M מאפסת את T_W. לכן, משאלה 9.9.1א, m מחלק את M.

כעת נניח כי ההעתקה T לכסינה. לפי 10.2.11 בהתאמה למטריצות, נקבל כי $M(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$ כאשר הסקלארים λ_i שונים זה מזה.
היות וm מחלק את M, m הוא מכפלת חלק או כל הגורמים הלינאריים $x-\lambda_i$ השונים זה מזה ומחלקים את M, ולכן לפי 10.2.11 ההעתקה T_W לכסינה.

סעיף ב

נציין כי T בעלת 3 ערכים עצמיים שונים על מרחב ממימד 3 ולכן לכסינה. הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי, לפי לינארית 1, הוא 1.
הפולינום המינימלי והאופייני של V לפי 10.2.11 יהיה:

$$M(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

נסקור את תתי-המרחבים העצמיים לפי מימד:
ממימד 0, נקבל את תת-המרחב הטריוויאלי $\{0\}$.

ממימד 1, נוכיח ראשית את הטענה הבאה: לכל העתקה S, כל תת-מרחב S-שמור חד ממדי נפרש על ידי וקטור עצמי.
כיוון ראשון: נוכיח כי וקטור עצמי פורש תת-מרחב S-שמור. יהא וקטור עצמי v השייך לערך העצמי λ.
לכל $u \in \mathrm{Sp}\{v\}$ נקבל:

$$S(u) = S(av) = aS(v) = a\lambda v \in \mathrm{Sp}\{v\}$$

הכיוון השני של ההוכחה, וקטור הפורש תת-מרחב S-שמור חד ממדי הוא וקטור עצמי, הוכח במהלך סעיף ב של שאלה 1.
מהטענה נסיק כי כל המרחבים הT-שמורים ממימד 1 הם $\mathrm{Sp}\{v_1\}, \mathrm{Sp}\{v_2\}, \mathrm{Sp}\{v_3\}$. שלושה תתי-מרחבים אלה הם, כמובן, שונים, שכן וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל (טענה 3.2.6).

נמצא את תתי-המרחבים ממימד 2 בעזרת סעיף א. נוכיח ראשית כי כל תת-מרחב כזה נפרש על ידי בדיוק 2 וקטורים עצמיים של T. יהא W תת-מרחב T-שמור דו-ממדי ותהא T_W הצמצום של T על W.
על פי סעיף א, T_W לכסינה ולכן הפולינום המינימלי שלה מתפרק לגורמים לינאריים שונים ומחלק את $M(x)$.
יהא $(x-i)$ גורם לינארי כזה, $i \in \{1,2,3\}$. בפרט, i ערך עצמי של T_W, ולכן קיים וקטור עצמי $u_i \in W$.
נציין כי u_i הוא ערך עצמי גם של T, לכן פרופורציוני ל v_i וגם $v_i \in W$.
אילו $(x-i)$ גורם לינארי יחיד, מקבלים כי i ערך עצמי יחיד לT_W ולכן W נפרשת ע"י שני וקטורים עצמיים בת"ל של ערך עצמי זה, בסתירה לכך שהריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי הוא 1!
נסיק כי קיים גורם לינארי נוסף $(x-j)$, ובאופן דומה $v_j \in W$. מצאנו קבוצה בת"ל בעלת 2 איברים ב W ולכן $W = \mathrm{Sp}\{v_i, v_j\}$. כעת, נוכיח כי כל תת-מרחב הנפרש על ידי שני וקטורים עצמיים של T הוא T-שמור.
יהא W מרחב כזה. אז לכל $w \in W$ מקבלים:

$$T(w) = T(\alpha v_i + \beta v_j) = \alpha i v_i + \beta j v_j \in \mathrm{Sp}\{v_i, v_j\}$$

לסיכום, תתי-המרחבים ממימד 2 יהיו בדיוק $\mathrm{Sp}\{v_1, v_2\}, \mathrm{Sp}\{v_1, v_3\}, \mathrm{Sp}\{v_2, v_3\}$.

ממימד 3, נקבל את תת-המרחב הטריוויאלי V.

שאלה 3

סעיף א

נמצא ערכים עצמיים של T:

$$P_T(x) = |xI - [T]_E| = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)^2(x-2)$$

מצאנו שני ערכים עצמיים. נמצא וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים אלה:

- עבור $\lambda = 2$ מדובר בוקטורים ממרחב האפס של

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל מרחב פתרונות $V_{\lambda=2} = \mathrm{Sp}\{(0,0,1)\}$. זהו, על פי סעיף ב בשאלה 2, מרחב T-שמור.

- עבור $\lambda = 3$ מדובר בוקטורים ממרחב האפס של

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נקבל מרחב פתרונות $V_{\lambda=3} = \mathrm{Sp}\{(1,0,0)\}$. זהו מרחב T-שמור.

סעיף ב

מצאנו בסעיף א כי $\ker(T-3I) = V_{\lambda=3} = \mathrm{Sp}\{(1,0,0)\}$. נניח בשלילה כי קיים מרחב T-שמור U כך ש $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.
המרחב U ממימד 2. נבחר לו בסיס $(v') = \{v_2, v_3\}$ ו $(v) = \{(1,0,0), v_2, v_3\}$ בסיס ל$\mathbb{R}^3$.
מהנתון כי U תת-מרחב T-שמור מקבלים $Tv_2 = \alpha v_2 + \beta v_3$, $Tv_3 = \gamma v_2 + \delta v_3$. לכן נקבל:

$$[T]_{(v)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix} \quad [T_U]_{(v')} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני של T יהיה:

$$P_T(x) = |xI - [T]_{(v)}| = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 \\ 0 & x-\alpha & -\gamma \\ 0 & -\beta & x-\delta \end{vmatrix} =$$
$$= (x-3)\begin{vmatrix} x-\alpha & -\gamma \\ -\beta & x-\delta \end{vmatrix} = (x-3)|xI - [T_U]_{(v')}| = (x-3)P_{T_U}$$

מצד שני, $P_T(x) = (x-3)^2(x-2)$ ולכן $P_{T_U}(x) = (x-3)(x-2)$.
נקבל כי 3 ערך עצמי של T_U, ויש לו וקטור עצמי $u \in \mathrm{Sp}\{v_2, v_3\}$. ברור כי $\{u, (1,0,0)\}$ בת"ל (אחרת הקבוצה (v) ת"ל) ולכן מצאנו 2 וקטורים עצמיים בת"ל השייכים לערך $\lambda = 3$ עבור T, בסתירה למציאתנו בסעיף א, בה הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 3$ הוא 1!

שאלה 4

עלינו למצוא פירוק של הפולינום המינימלי של $T|_W$, שנסמנו M_W, ל k פולינומים זרים בזוגות $P_1, P_2, ..., P_k$ כך שלכל i, $\ker P_i(T|_W) = W \cap W_i$.
כמו כן, על פי שאלה 2 במטלה זו, הפולינום המינימלי של $T|_W$ מחלק את $M(t)$. היות והפולינומים $M_1, M_2, ..., M_k$ זרים בזוגות, המשמעות היא שכל גורם בכל פירוק של M_W יחלק אחד בדיוק מבין סדרת פולינומים אלו (אחרת, יהיה להם מחלק משותף שאינו 1).
נסמן אפוא ב $M_W = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$ את הפירוק המקסימלי של M_w, ונבחר את P_i להיות מכפלת כל הפולינומיים האי-פריקים p_j המחלקים את M_i. ברור כי כל פולינום אי-פריק p_j יהיה גורם במכפלה אחת בדיוק, ולכן $M_W = P_1 \cdot P_2 \cdot ... \cdot P_k$.

נסמן $U_i = \ker P_i(T_W)$. לפי הפירוק הפרימרי, $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$.
נוכיח כי $U_i \subseteq W \cap W_i$. יהא $w \in U_i$. ברור כי $w \in W$, שכן $U_i \subseteq W$. עלינו להראות כי $w \in W_i = \ker M_i(T)$.
נניח בשלילה כי $M_i(T)w = M_i(T_W)w \neq 0$. היות ו$P_i$ מחלק את M_i, נקבל גם $P_i(T_W)w \neq 0$ ולכן $w \notin U_i$ וזו סתירה!

נקבל מצד אחד כי $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k \subseteq (W \cap W_1) + (W \cap W_2) + \cdots + (W \cap W_k)$.
מצד שני, $(W \cap W_1) + (W \cap W_2) + \cdots + (W \cap W_k) \subseteq W$ ולכן מתקיים שוויון.
נוסיף כי הקבוצות $(W \cap W_1), (W \cap W_2), ...$ זרות: אם יש איבר משותף בין שתי קבוצות כלשהן בסכום, אז בפרט קיימים i, j כך ש $W_i \cap W_j \neq \{0\}$, בסתירה לסכום הישר בפירוק הפרימרי של V! אי-לכך המרחב W הוא סכום ישר של המרחבים $(W \cap W_i)$.

שאלה 5

תהא T העתקה נורמלית במרחב אוניטרי ויהא W תת-מרחב T-שמור.
לפי משפט הלכסון האוניטרי, ההעתקה T לכסינה, ולפי שאלה 2 בממן זה גם הצמצום שלה T_W מהווה העתקה לכסינה.
אי-לכך, קיים בסיס $(w) = (w_1, w_2, ..., w_k)$ של W המורכב מוקטורים עצמיים.
וקטורים אלה, על פי למה 3.2.5, הם גם וקטורים עצמיים של $T_W{}^*$, השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$.

לכל $w \in W$ מקבלים:

$$T^*(w) = T^*(\sum_{i=1}^{k} a_i w_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i T^*(w_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i w_i \in W$$

קיבלנו כי W תת-מרחב T^*-שמור.