מטלת מנחה 16 - אלגברה לינארית 1

328197462

31/01/2023

שאלה 1

סעיף א

נביע באמצעות a את הפולינום האופייני של $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$$p(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t & -a & -1 \\ -a & t & 1 \\ 0 & 0 & t-a \end{vmatrix} \overset{\text{פיתוח לפי } R_3}{=} (t-a)\begin{vmatrix} t & -a \\ -a & t \end{vmatrix} = (t-a)(t^2-a^2) = (t-a)^2(t+a)$$

הערכים העצמיים של המטריצה יהיו $\lambda = 0$ בריבוי אלגברי 3 כאשר $a = 0$, ובמקרה אחר יהיו $\lambda = a$ בריבוי אלגברי 2 ו-$\lambda = -a$ בריבוי אלגברי 1.

נדון בריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 0$ כאשר $a = 0$. זהו ממד מרחב האפס של המטריצה $0I - A$, שהוא מרחב האפס של A - $P(A)$.
לפי $8.6.1$, עבור A מסדר 3 נקבל $\dim P(A) = 3 - \rho(A) = 2$. הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 0$ שונה מהריבוי האלגברי ולכן לפי 11.5.4 המטריצה לא לכסינה כאשר $a = 0$.

כעת נדון בריבויים הגיאומטריים של הערכים העצמיים של A במקרה הנוסף. הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = -a$ הוא לפחות 1 (שהרי יש בממד העצמי וקטור שאינו וקטור האפס) ולכל היותר (לפי $11.5.3$) כריבוי האלגברי - 1. נסיק כי בסך הכל הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = -a$ הוא 1.
הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = a$ הוא ממד מרחב האפס של המטריצה $aI - A = \begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ -a & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. נחשב את דרגת המטריצה:

$$\rho(aI - A) = \rho\begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ -a & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{8.5.1}{\overset{R_2 \to R_2 + R_1}{=}} \rho\begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

ושוב לפי 8.6.1 נקבל שהריבוי הגיאומטרי של $\lambda = a$ הוא 2. במקרה זה, קיבלנו שעבור כל הערכים העצמיים הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי ולכן לפי 11.5.4 המטריצה A לכסינה עבור $a \neq 0$.

סעיף ב

עבור $a = -1$ נקבל $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. הערכים העצמיים של המטריצה A הם $\lambda = 1$ בר"א ור"ג 1, ו-$\lambda = -1$ בר"א ור"ג 2.
לכן, A לכסינה ודומה למטריצה $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
כמו כן, קיים במרחב העצמי של $\lambda = 1$ וקטור השונה מאפס v_1 כך ש-$Av_1 = v_1$, וקיימים במרחב העצמי של $\lambda = -1$ שני וקטורים בלתי תלויים לינארית ושונים מאפס (כי ממד המרחב הוא 2) v_2, v_3 המקיימים $Av_2 = -v_2, Av_3 = -v_3$.
הוקטור v_1 השייך לערך עצמי שונה לא תלוי לינארית ב-v_2, v_3 לפי 11.2.4 ולכן השלשה (v_1, v_2, v_3) בת"ל בת שלושה וקטורים עצמיים. המטריצה $P = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)$ הפיכה ומתקיים לפי 11.3.7 $D = P^{-1}AP$.

נמצא ערכים מתאימים ל-v_1, v_2, v_3. עלינו למצוא פתרון לא טריוואלי v_1 למערכת ההומוגנית $(I-A)x=0$. נדרג:

$$I-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&2\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

הוקטור $v_1=(-1,1,0)$ פותר משוואה זו. באופן דומה נדרג את $-I-A$:

$$-I-A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נסמן $x_3=t, x_2=s$, אז $x_1=s-t$ ו-$(s-t,s,t)$ פתרונות למשוואה. ניקח למשל $v_2=(1,1,0), v_3=(-1,0,1)$.

נקבל, לפי השיקולים שהוסברו לעיל, כי $P=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ מלכסנת את A.

נמצא את המטריצה ההופכית P^{-1}. מציאתה תסייע לנו בחישוב.

$$(P|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&-1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&0&1&0&1\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{2}R_2]{R_1\to -R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&-1&0&-1\\0&1&0&0.5&0.5&0.5\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-0.5&0.5&-0.5\\0&1&0&0.5&0.5&0.5\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)=(I|P^{-1})$$

כעת, היות ו-$D=P^{-1}AP$, נקבל $A=PDP^{-1}$ ולכן:

$$A^{2023}=(PDP^{-1})^{2023}=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})\underset{\text{קיבוציות}}{=}PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^{2023}P^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{2023}\begin{pmatrix}-0.5&0.5&-0.5\\0.5&0.5&0.5\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.5&0.5&-0.5\\0.5&0.5&0.5\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.5&0.5&-0.5\\0.5&0.5&0.5\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

שאלה 2

סעיף א

נניח בשלילה כי קיימת מטריצה A מדרגה 3 עם פולינום אופייני $p(x) = x^7 - x^5 + x^3$.
משאלה $11.4.5$ נסיק כי A מטריצה מסדר 7×7 בהכרח, שכן אחרת הפולינום האופייני של המטריצה היה ממעלה שאינה 7.
כמו כן, $\lambda = 0$ שורש של הפולינום האופייני של A ולכן ערך עצמי של המטריצה עם ריבוי אלגברי 3.

נדון בריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 0$. ערך זה שווה למימד מרחב הפתרונות של המשוואה $Ax = 0$, וערכו, לפי $8.6.1$, יהיה $7 - \rho(A) = 4$.
מצד שני, לפי 11.5.3 ידוע לנו שהריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 0$ לא עולה על הריבוי האלגברי (במקרה זה 3) וזו סתירה!

סעיף ב

נתונה לנו ה"ל $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ עם פולינום אופייני $x^2 + 2x - 3$.

עלינו להוכיח כי ההעתקה $3T + I$ היא איזומורפיזם $|3T + I| \neq 0$.
שורשי הפולינום האופייני של ההעתקה T, שהם $x_1 = -3, x_2 = 1$, מהווים הערכים העצמיים היחידים של ההעתקה, זאת לפי $11.4.1$.
קרי, לכל $\lambda \neq -3, 1$ מתקיים $|\lambda I - T| \neq 0$, ובפרט עבור $\lambda = -\frac{1}{3}$ מקבלים $|-\frac{1}{3}I - T| \neq 0$.
מכאן נובע לפי שאלה 10.7.7 כי ההעתקה $-\frac{1}{3}I - T$ ומ$9.9.2$ נקבל ש$-\frac{1}{3}I - T$ איזומורפיזם.
קל להיווכח שההעתקה המבוקשת $3T + I$, שהיא כפל בסקלר של איזומורפיזם, היא איזומורפיזם בעצמה - תכונות העל והחח"ע מתקיימות באופן מיידי.

נבנה את הפולינום האופייני של T^3 בעזרת מידע הידוע לנו על ההעתקה. לפי שאלה $11.3.2$ עבור הערכים העצמיים $\lambda = -3, 1$ של T נקבל ש$(-3)^3 = -27, 1^3 = 1$ ערכים עצמיים של T^3.
לפי 11.2.6 לא ייתכנו ערכים עצמיים נוספים עבור T^3 ממימד 2, ולכן הערכים העצמיים שמצאנו הם שורשיו היחידים של הפולינום האופייני. כמו כן, לפי שאלה 11.4.5 הפולינום האופייני הוא פולינום מתוקן ממעלה 2. משתי מסקנות אלה נקבל את הפולינום האופייני:

$$p(t) = (t + 27)(t - 1) = t^2 + 26t - 27$$

סעיף ג

נסמן $p(x) = |xI - A|$ ונדון בערכים העצמיים של המטריצה $A_{4\times4}$ הנתונה.
נציין שלפי שאלה 11.4.5 מעלת הפולינום היא 4 בדיוק.

תחילה, היות וA סינגולית, נקבל ש$\lambda = 0$ הוא ערך עצמי של A ושורש של הפולינום האופייני שלה. הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי זה הוא לכל הפחות 1 (אחרת לא היה ערך עצמי) ומכך נקבל לפי 11.5.3 כי הריבוי האלגברי של $\lambda = 0$, שנסמנו בα, הוא לכל הפחות 1. נסיק כי $p(x)$ מתחלק בx^α ותוצאת החלוקה היא פולינום ממעלה $4 - \alpha \leq 3$

כעת, מהנתון $|-2I + A| = (-1)^4|2I - A| = |2I - A| = 0$ נסיק כי $\lambda = 2$ הוא ערך עצמי נוסף של המטריצה בעל ריבוי גיאומטרי של לכל הפחות 1. נסמן את הריבוי האלגברי של ערך עצמי זה ב$1 \leq \beta$. מתוצאה זו והתוצאה לעיל נסיק כי p מתחלק ב$x^\alpha(x-2)^\beta$ ותוצאת החילוק היא פולינום ממעלה $4 - \alpha - \beta \leq 2$

כעת, מהנתון $\rho(2I + A) = 2$, כאשר $2I + A$ מטריצה מסדר 4, נקבל ש$2I + A$ אינה הפיכה.
בפרט $|2I + A| = (-1)^4|-2I - A| = |-2I - A| = 0$ ולכן $\lambda = -2$ ערך עצמי של A. הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי זה הוא כמימד מרחב האפס של $(-2I - A)$, המתקבל לנו לפי $8.6.1$:

$$\text{dim}\, P(-2I - A) = 4 - \rho(-2I - A) = 4 - \rho(2I + A) = 2$$

נסמן את הריבוי האלגברי של הערך העצמי ב$2 \leq \gamma$. אז מתוצאה זו ותוצאות לעיל נסיק כי p מתחלק ב$x^\alpha(x-2)^\beta(x+2)^\gamma$, ותוצאת החילוק תהיה פולינום ממעלה $4 - \alpha - \beta - \gamma \leq 0$.

היות וp אינו פולינום האפס, תוצאת החלוקה חייבת להיות פולינום ממעלה 0 ולכן $4 - \alpha - \beta - \gamma = 0$. מכך ש$\alpha, \beta, \gamma$ מספרים טבעיים ו-$2 \leq \gamma$ נקבל כי האפשרות היחידה לפתרון תהיה $\alpha = \beta = 1, \gamma = 2$. הפולינום p הוא פולינום מתוקן ממעלה 4 המתחלק ב$x(x-2)(x+2)^2$ ומכאן נקבל $p(x) = x(x-2)(x+2)^2$.

הערכים העצמיים $\lambda = 0, \lambda = 2$ בעלי ריבוי אלגברי 1 וריבוי גיאומטרי החסום מלמעלה (ע"י הריבוי האלגברי) ומלמטה (הסברנו לעיל) ע"י 1. הערך העצמי $\lambda = -2$ הוא בעל ריבוי אלגברי וגיאומטרי 2. נקבל לפי 11.5.4 כי A לכסינה ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 3

תהא $A_{n\times n}$ לכסינה, כלומר קיימת מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $D=P^{-1}AP$ ומכאן ישירות $A=PDP^{-1}$.
נשים לב שלכל k טבעי מתקיים:

$$\begin{aligned}A^k=(PDP^{-1})^k&=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})=\\&=PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^kP^{-1}\end{aligned}$$

מסמנים את הפולינום האופייני של A בתור $p(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kt^k$ ומגדירים $p(A)=\sum_{k=0}^{n}a_kA^k$. אז:

$$p(A)=\sum_{k=0}^{n}a_kA^k=\sum_{k=0}^{n}a_kPD^kP^{-1}\underset{\text{פילוג}}{=}P\sum_{k=0}^{n}a_kD^kP^{-1}=Pp(D)P^{-1}$$

היות וD אלכסונית, נסמן $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$ כך ש $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ סקלרים.

סקלרים אלה הם איברי האלכסון במטריצה אלכסונית הדומה לA, ולכן לפי $11.2.3$ג (בהתאמה למטריצות) נסיק כי אלו הם הערכים העצמיים של A (לא בהכרח כולם שונים), ולכן מהווים שורשים של הפולינום האופייני!

$$\begin{aligned}p(D)=\sum_{k=0}^{n}a_kD^k&=\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\begin{pmatrix}\lambda_1^k&0&\cdots&0\\0&\lambda_2^k&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n^k\end{pmatrix}\right)=\\&=\begin{pmatrix}a_0+a_1\lambda_1+\cdots+a_n\lambda_1^n&0&\cdots&0\\0&a_0+a_1\lambda_2+\cdots+a_n\lambda_2^n&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_0+a_1\lambda_n+\cdots+a_n\lambda_n^n\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}p(\lambda_1)&0&\cdots&0\\0&p(\lambda_2)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&p(\lambda_n)\end{pmatrix}\underset{p(\lambda_i)=0}{=}0\end{aligned}$$

ולכן $p(A)=Pp(D)P^{-1}=0$