ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20475

חשבון אינפיניטסימלי 2

חוברת הקורס - סתיו א2023

כתב: ד"ר ודים גרינשטיין

אוקטובר 2022- סמסטר סתיו תשפ"ג

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו מקדמים את פניכם עם הצטרפותכם אל הלומדים את הקורס "**חשבון אינפיניטסימלי 2**".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה, כולל גישה לשיעורי וידאו. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת:

http://www.openu.ac.il/shoham.

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה של הקורס הוא ד"ר ודים גרינשטיין. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781424 בימי ה', בין השעות 16:30-18:00.
- בפקס 09-7780631.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - vadimg@openu.ac.il
- **שאילתא** - לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודיכם.

ב ב ר כ ה,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20475/ 2023א)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	28.10.2022-23.10.2022	יחידה 1		
2	04.11.2022-30.10.2022	יחידות 2,1		
3	11.11.2022-6.11.2022	יחידות 2,1		ממ"ן 11 11.11.2022
4	18.11.2022-13.11.2022	יחידה 2		
5	25.11.2022-20.11.2022	יחידות 3,2		ממ"ן 12 25.11.2022
6	02.12.2022-27.11.2022	יחידה 3		
7	09.12.2022-04.12.2022	יחידות 4,3		ממ"ן 13 9.12.2022
8	16.12.2022-11.12.2022	יחידה 4		
9	23.12.2022-18.12.2022 (ב-ו חנוכה)	יחידות 5,4		ממ"ן 14 23.12.2022
10	30.12.2022-25.12.2022 (א-ב חנוכה)	יחידה 5	ממ"ח 01 30.12.2022	
11	06.01.2023-01.01.2023	יחידות 6,5		ממ"ן 15 6.1.2023
12	13.01.2023-08.01.2023	יחידה 6	ממ"ח 02 13.1.2023	
13	20.01.2023-15.01.2023	יחידות 7,6		ממ"ן 16 20.1.2023
14	27.01.2023-22.01.2023	יחידה 7		ממ"ן 17 31.1.2023

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

התנאים לקבלת 7 נקודות זכות

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס עליכם לעמוד בתנאים הבאים:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של **10 נקודות לפחות**.
ב. לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.
ג. לקבל ציון סופי בקורס **60 נקודות לפחות**.

תיאור המטלות

בחורבת הקורס 7 מטלות מנחה (ממ״נים) ו-2 מטלות מחשב (ממ״חים) במשקל כולל של 20 נקודות. **עליכם להגיש במהלך הקורס מטלות שמשקלן הכולל 10 נקודות לפחות.** אנו ממליצים מאוד להגיש את כל המטלות על מנת שתיחשפו למגוון גדול של שאלות.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 1

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 11.11.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>לתשומת לבכם:</u>

במממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית: היא יכולה להחליף כל אחת <u>מהשאלות 1 - 5</u> בממ"ן.

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו את האי-שוויונות הבאים:

א. $\int\limits_0^{10} \frac{x}{x^3+16}dx \le \frac{5}{6}$

ב. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^2}dx \le \frac{2}{\pi}$

ג. $\frac{1}{201} < \int\limits_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx < \frac{1}{100}$

שאלה 2 (15 נקודות)

יהיו f, g ו-h פונקציות חסומות בקטע $[a,b]$ כך ש- $f(x) \le g(x) \le h(x)$ לכל $x \in [a,b]$.

נניח ש- f ו-h אינטגרביליות ב- $[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx$.

הוכיחו כי גם g אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & 0\le x\le 1 \\ -\frac{1}{x} & 1<x\le 3 \end{cases}$.

הראו כי $f(x)$ אינטגרבילית ב- $[0,3]$ ומצאו את הנוסחה המפורשת עבור הפונקציה $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ בקטע $[0,3]$. האם $F(x)$ קדומה של $f(x)$?

שאלה 4 (15 נקודות)

הוכיחו כי קיים $c\in[0,1]$ כך ש- $\int_0^1 \sin(x^3)dx=\int_0^c \sin(x^2)dx$.

שאלה 5 (15 נקודות)

חשבו את הגבול הבא: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x t^{1+t}dt\right)$.

שאלת רשות

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx=0$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $x\in(a,b)$ כך ש- $\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

שאלה 6 (20 נקודות)

שאלה זו ופתרונה באים להמחיש את השימוש באינטגרלים מסוימים ובהגדרתם לפי רימן לחישוב גבולות של סדרות מסוימות.

(8 נקי) א. תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$. הוכיחו כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx \ .$$

(2 נקי) ב. הביעו את $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ כאינטגרל מסוים בהנחה ש- $f(x)$ רציפה בקטע המתאים.

(10 נקי) ג. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

(i) $$a_n=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\cdots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}} \ .$$

(ii) $$b_n=\frac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+2}}}+\frac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+4}}}+\cdots+\frac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+2n}}} \ .$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידות 2,1

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** **25.11.2022**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>לתשומת לבכם:</u>

בממ"ן זה יש סעיפי רשות. סעיפים אלה קשים יותר ומיועדים לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. סעיף רשות הוא סעיף חלופי, כלומר הוא יכול להחליף כל סעיף אחר באותה שאלה.

שאלה 1 (30 נקודות)

חשבו :

א. $\int \frac{x^5}{1-x^3}dx$ ב. $\int (3x-7)^4 dx$ ג. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

ד. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x+1}dx$ ה. $\int \frac{e^{2x}}{16+e^{4x}}dx$ ו. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$

ז. $\int \ln\left(x^2-3x+2\right)dx$ ח. **(רשות)** $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו :

א. $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{5-4\cos x}$ ב. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

ג. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7-x+1}{\cos^2 x}dx$ ד. $\int_0^5 \big||x-1|-|x-2|\big|dx$

ה. **(רשות)** $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx$

שאלה 3 (15 נקודות)

נסמן $I = \int_1^{1+2\pi} \cos x \cdot \exp\left(-\sin^2(x)\right) dx$ (כאשר $\exp(A)$ סימון חלופי עבור e^A).

א. מצאו שגיאה בשיקולים הבאים:

נבצע באינטגרל הנתון את ההצבה $t = \sin x$, אז $dt = \cos x dx$, $x = 1 \quad \Leftarrow \quad t = \sin 1$,

$x = 1 + 2\pi \quad \Leftarrow \quad t = \sin(1+2\pi) = \sin 1$ ולכן $I = \int_{\sin 1}^{\sin 1} e^{-t^2} dt = 0$ על-פי הגדרה 1.22.

ב. הראו כי למרות הדרך הלא נכונה של סעיף א, התשובה המתקבלת היא אכן נכונה, כלומר חשבו את I וקבלו ש-$I = 0$.

שאלה 4 (15 נקודות)

נסמן $S_n = \int (\sin x)^n dx$, $C_n = \int (\cos x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$.

הוכיחו את נוסחאות הנסיגה הבאות:

$$S_n = -\frac{1}{n}\cos x(\sin x)^{n-1} + \frac{n-1}{n}S_{n-2} \quad , \quad C_n = \frac{1}{n}\sin x(\cos x)^{n-1} + \frac{n-1}{n}C_{n-2}.$$

שאלה 5 (10 נקודות)

מצאו את השטח החסום על-ידי העקומה $y^2 = (1-x^2)^3$.

שאלה 6 (10 נקודות)

מצאו את נפח האליפסואיד $x^2 + 4y^2 + 4z^2 \le 4$ (כדור רוגבי).

הדרכה: הגוף הזה מתקבל מסיבוב של תחום מסוים סביב ציר ה-x; שאלה 31 ביחידה 1 תעזור לכם להבין על איזה תחום מדובר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** **9.12.2022**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>לתשומת לבכם:</u>

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית: היא יכולה להחליף כל אחת <u>מהשאלות 2 - 5</u> בממ"ן.

שאלה 1 (20 נקודות)

לגבי כל אחד מהאינטגרלים הבאים קבעו אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x+1}-1}\,dx$.

ב. $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$.

ג. $\int_0^\infty \cos x \frac{\sin x}{\ln(x+1)}\,dx$.

שאלה 2 (20 נקודות)

מצאו את כל הערכים של α ו- β עבורם מתכנס האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha (1-x^2)^\beta}{1-\cos x}\,dx \ .$$

שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

א. אם $f(x)$ אינטגרבילית ב-$[0,t]$ לכל $t>0$ והאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, ואם $g(x)\ge x$ לכל $x\ge 0$, אז $\lim_{x\to\infty}\int_x^{g(x)} f(t)dt=0$.

ב. אם $f(x)$ רציפה בקטע $[1,\infty)$ ומקיימת $f(x)\le \frac{1}{x^2}$ לכל $x\ge 1$ אז $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס.

שאלה 4 (20 נקודות)

ידוע ש- f פונקציה רציפה ואינטגרבילית בהחלט בקטע $[1,\infty)$.

א. האם נובע מכך ש- $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$? אם כן – הוכיחו, או לא – תנו דוגמה נגדית.

ב. הוכיחו שאם בנוסף ידוע שהאינטגרל $\int_1^\infty (f(x))^4 dx$ מתכנס, אז גם האינטגרל $\int_1^\infty (f(x))^2 dx$ מתכנס.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי f פונקציה חסומה ובעלת נגזרת רציפה בקטע $[a,\infty)$, והאינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר.

כמו כן, נניח שקיים $t>a$ כך ש- $f'(x)<f(x)$ לכל $x\ge t$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)\sin(e^x)dx$ מתכנס בתנאי.

שאלת רשות

הראו כי האינטגרל $\int_1^\infty e^{-x^n}dx$ מתכנס לכל n טבעי וחשבו את $\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^\infty e^{-x^n}dx\right)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 4

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 23.12.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>לתשומת לבכם:</u>

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית, כלומר היא יכולה להחליף כל שאלה אחרת בממ"ן.

שאלה 1 (20 נקודות)

היעזרו בפיתוח מקלורן מסדר מתאים של הפונקציה $\sqrt{1+x^2}$ על מנת לחשב $\sqrt{1.01}$ בדיוק של 4 ספרות אחרי הנקודה, כלומר כך שהשגיאה לא תעלה על $0.5\cdot 10^{-4}$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהיינה f, g פונקציות גזירות n פעמים ב- $x=0$ ויהיו $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ פולינומי מקלורן של f ושל g בהתאמה.

הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)x^k$ הוא פולינום מקלורן של $f(x)g(x)$.

שאלה 3 (20 נקודות)

היעזרו בפיתוח מקלורן על מנת לחשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+e^{x^2})\tan x-2\sin^2 x}{x(\tan x - x)}$.

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{1/n}-\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}}{\ln(n^2-1)-2\ln n}$ (שימו לב: מדובר בגבול של סדרה).

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$ כך ש- $f(0) = f(1)$

ו- $|f''(x)| \le A$ לכל $0 \le x \le 1$.

הוכיחו כי $\left|f'(x)\right| \le \frac{A}{2}$ לכל $x \in [0,1]$.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נסמן $M = \max\left\{f(x) : x \in [a,b]\right\}$, $m = \min\left\{f(x) : x \in [a,b]\right\}$

ונניח ש- $m \ne f(a)$, $m \ne f(b)$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש- $\left|f''(c)\right| \ge \frac{2(M-m)}{(b-a)^2}$.

שאלת רשות

הראו כי האינטגרל $\int_1^{\infty}\left(\ln(x+\sin x) - \ln x\right)dx$ מתכנס בתנאי.

הערה: אכן, מדובר בשאלה הקשורה ליחידה 3, אך יש סיבה לשאול אותה בממ"ן זה.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** **30.12.2022**

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות 1 – 7 מופיעות שתי טענות שמסומנות ב-1 ו-2. קבעו לגבי כל אחת מהן אם היא נכונה או לא.

סמנו: א – אם רק טענה 1 נכונה.
ב – אם רק טענה 2 נכונה.
ג – אם שתי הטענות נכונות.
ד – אם שתי הטענות אינן נכונות.

בכל אחת מהשאלות 8 – 19
סמנו: א – אם הטור מתכנס בהחלט.
ב – אם הטור מתכנס בתנאי.
ג – אם הטור מתבדר.

שאלה 1

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתבדרים אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ מתבדר.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ מתבדר.

שאלה 2

1. אם $a_n > 0$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ מתכנס.
2. אם $a_n > 0$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

שאלה 3

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ טור מתכנס אז הסדרה (na_n) חסומה.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס ו- $b_n \to 0$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

שאלה 4

בהינתן (a_n) נגדיר את (b_n) כך: $b_{2n} = a_{2n-1}$, $b_{2n-1} = a_{2n}$ לכל n.

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

שאלה 5

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ מתכנס.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ מתכנס ו- (a_n) סדרה מונוטונית, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

שאלה 6

1. אם $a_n > 0$ לכל n ו- $\lim_{n\to\infty} na_n = \pi$, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
2. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו- $a_n \neq 1$ לכל n, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + 1}{a_n - 1}$ מתבדר.

שאלה 7

1. בכל טור מתכנס בתנאי ניתן לשנות את סדר איבריו כך שהטור המתקבל לא יתכנס בתנאי.
2. לכל סדרה מונוטונית ואפסה (a_n) קיימת פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חד-חד-ערכית ועל כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ מתכנס.

שאלה 8

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\cdot\sqrt{\ln^3 n+3}}$$

שאלה 9

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3^n+(-1)^n\right)\cdot\sin n}{(2n+3)\pi^n}$$

שאלה 10

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cos(\pi n)}{n+2}$$

שאלה 11

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{\left(\ln(\ln n)\right)^5}$$

שאלה 12

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n! e^{-n^2}$$

שאלה 13

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3-n}{n^2+1}$$

שאלה 14

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^{3/2}}$$

שאלה 15

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{(x+1)}{\cos x}dx$$

שאלה 16

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\frac{\arctan^3 n}{\sqrt[3]{n}}$$

שאלה 17

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}$$

שאלה 18

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1\right)$$

שאלה 19

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n^2)$$

שאלה 20

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n^3+1}\right)^p$

א. מתכנס בהחלט עבור כל p חיובי.

ב. מתכנס בתנאי עבור כל p חיובי.

ג. מתכנס בהחלט אס"ם $p > 1$.

ד. לא מתכנס בהחלט לאף ערך של p.

ה. מתכנס בתנאי אס"ם $0 < p \le 1/2$.

ו. מתכנס בתנאי אס"ם $0 < p \le 1/\pi$.

סמנו "ז" אם בין התשובות א – ו יש כמה תשובות נכונות.

סמנו "ח" אם בין התשובות א – ו אין תשובה נכונה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 6.1.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>לתשומת לבכם:</u>

בממ"ן זה יש סעיפי רשות. סעיפים אלה קשים יותר ומיועדים לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. סעיף רשות הוא סעיף חלופי, כלומר הוא יכול להחליף כל סעיף אחר באותה שאלה.

שאלה 1 (15 נקודות)

קבעו לגבי כל אחד מהטורים הבאים אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-2)^n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}\cdot 2^n}$.

ב. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n\cdot\cos 2n}{n^2-1}+\frac{\cos\pi n}{\ln n\cdot\ln(n^n+n^2)}\right)$.

ג. **(רשות)** $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots$,

כלומר $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ כאשר $a_n=\begin{cases}\dfrac{-1}{\sqrt{k+1}+1}, & n=2k\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{k+1}-1}, & n=2k-1\end{cases}$.

שאלה 2 (15 נקודות)

תהי (u_n) סדרה מתכנסת, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u<0$, ויהי a מספר חיובי.

הוכיחו כי הטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^{u_1+u_2+\cdots+u_n}$ מתכנס אם ורק אם $a>1$.

שאלה 3 (15 נקודות)

נתונה סדרה מתכנסת (a_n) שכל איבריה והגבול שלה שונים מאפס.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$ מתכנס בהחלט אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ מתכנס בהחלט.

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. קיים טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(a_n)$ מתכנס.

ב. בהינתן $a_n > 0$ לכל n, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 + a_n$ מתכנס.

ג. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{n+1}-a_n\right|$ מתכנס אז גם הסדרה (a_n) מתכנסת.

ד. **(רשות)** לכל $0 < a < 1$ מתקיים: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a^2+n^2} < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

נניח כי שני הטורים הבאים, המתקבלים מהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ על-ידי הכנסת סוגריים, מתכנסים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n = (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots$$ (כלומר, $b_n = a_{2n-1}+a_{2n}$ לכל n)

ו- $$\sum_{n=1}^{\infty}c_n = a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots$$ (כלומר, $c_1 = a_1$, $c_{n+1} = a_{2n}+a_{2n+1}$ לכל n).

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $a_n \to 0$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ו- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}c_n$.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}c_n = S$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס וסכומו הוא S.

ג. התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ נובעת מהנתון ללא תנאים נוספים.

שאלה 6 (15 נקודות)

הוכיחו כי קיימת פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חד-חד-ערכית ועל כך ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{f(n)}\ln\frac{f(n)+1}{f(n)} = \ln 2023$$

(אין צורך לחפש את f).

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

מספר השאלות: 15   **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2023א   **מועד אחרון להגשה:** 13.1.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מהשאלות 1 – 8 מופיעות שלוש טענות.

סמנו: א – אם רק טענה 1 נכונה.
ב – אם רק טענה 2 נכונה.
ג – אם רק טענה 3 נכונה.
ד – אם רק טענות 2,1 נכונות.
ה – אם רק טענות 3,1 נכונות.
ו – אם רק טענות 3,2 נכונות.
ז – אם כל הטענות 3,2,1 נכונות.
ח – אם בין הטענות 1 – 3 אין אף טענה נכונה.

בכל אחת מהשאלות 10 – 15 מופיעות שתי טענות.

סמנו: א – אם רק טענה 1 נכונה.
ב – אם רק טענה 2 נכונה.
ג – אם שתי הטענות נכונות.
ד – אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

תהי (f_n) סדרת פונקציות המוגדרות בקטע $[0,1]$ על-ידי: $f_n(x)=\dfrac{x^2}{x^2+(nx-1)^2}$.

1. (f_n) לא מתכנסת במידה שווה באף קטע $[0,a]$, $0<a\le 1$.
2. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב- $(0,1)$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{1/2}^{1} f_n(x)dx=0$.

שאלה 2

תהי (f_n) סדרת פונקציות המוגדרות על-ידי: $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

1. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ מוגדרת לכל x ממשי.
2. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב-$[0,\infty)$.
3. $\int\limits_0^{\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx=0$.

שאלה 3

נגדיר סדרת הפונקציות (f_n) ב-$[0,\infty)$ על-ידי:

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<n\\ x-n & n\le x<n+1\\ 1 & x\ge n+1\end{cases}.$$

1. (f_n) מתכנסת ב-$[0,\infty)$.
2. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב-$[0,a]$ לכל $a>0$.
3. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב-$[b,\infty)$ לכל $b>0$.

שאלה 4

סדרת הפונקציות (f_n) מוגדרת על-ידי: $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$.

1. (f_n) מתכנסת ב-$[0,2]$ לפונקציה רציפה.
2. (f_n) מתכנסת במידה שווה ב-$[0,2]$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)=\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$ לכל $x\in[0,2]$.

שאלה 5

תהי $f(x)$ מוגדרת על-ידי: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ כאשר $u_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n^2+1}}$.

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב-$[a,\infty)$ לכל $a>0$.
2. טור הנגזרות $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ מתכנס במידה שווה ב-$(0,\infty)$.
3. $f(x)$ גזירה לכל $x>0$.

שאלה 6

נגדיר את $f(x)$ על-ידי: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1+x^2 & x \neq 0 \end{cases}$.
2. טור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ מתכנס במידה שווה ב- $(0,\infty)$.
3. $f'(1) = f(1)$.

שאלה 7

תהי $f(x)$ מוגדרת על-ידי: $f(x) = x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot n!} + \cdots$.

1. $f(x)$ גזירה ב- $\mathbb{R}$.
2. $f'(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)$ לכל $x \neq 0$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!} = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$.

שאלה 8

נתון טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות סופי $R > 0$.

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בהחלט ב-$[0,R]$.
2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במידה שווה ב-$[0,R]$.
3. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במידה שווה ב- $(-R,R)$.

שאלה 9

תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2023^n} x^n$ הוא:

א. $\{0\}$ ב. $\left(-\frac{1}{2023}, \frac{1}{2023}\right)$ ג. $[-1,1)$ ד. $(-1,1)$

ה. $(2023, -2023)$ ו. $[0, 2023)$ ז. $(-\infty, \infty)$

סמנו "ח" אם בין התשובות א – ז אין תשובה נכונה.

שאלה 10

1. אם סדרת הפונקציות (f_n) מתכנסת במידה שווה לפונקציה f בקטע I אז סדרת הפונקציות $(f_n{}^2)$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה f^2 בקטע I.
2. אם סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה ב- $\mathbb{R}$ אז היא מתכנסת במידה שווה בכל קטע.

שאלה 11

1. הפונקציה $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\sin nx)}{n^3}$ גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}$ (כלומר $f'(x)$ קיימת ורציפה לכל x ממשי).
2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^{n-1}x-\cos^n x}{(1+\cos^n x)(1+\cos^{n-1}x)}$ מתכנס במידה שווה ב- $[0\,,\,\pi/2]$.

שאלה 12

תהי $(u_n(x))$ סדרת פונקציות חיוביות וגזירות בקטע $[0,1]$ כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב- $[0,1]$. נסמן את סכום הטור הזה ב- $f(x)$. אז:

1. לכל $x\in[0,1]$ מתקיים $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n{}'(x)$.
2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n{}'(x)}{n}$ מתכנס לכל $x\in[0,1]$.

שאלה 13

1. טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{\left(1+1/n\right)^{n^2}}x^n$ מתכנס במידה שווה ב- $[0,e/3)$.
2. טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x^2+2n-\sin nx}$ מתכנס במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

שאלה 14

1. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ מתכנס עבור $|x|<1$, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{2n+1}$ מתכנס עבור $|x|<1$.
2. רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ לא גדול מרדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}x^{3n}$.

שאלה 15

תהי $f(x)$ גזירה מכל סדר ב- $\mathbb{R}$. נסמן ב- $R_n(x)$ את השארית מסדר n של $f(x)$ ב- $x=0$.

1. $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ לכל x.
2. אם $\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{x^n}=0$ לכל n אז רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ גדול מ- 0.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

מספר השאלות: 5   **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023א   **מועד אחרון להגשה:** **20.1.2023**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

<u>לתשומת לבכם:</u>

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית, כלומר היא יכולה להחליף כל שאלה אחרת בממ"ן.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $\left(f_n(x)\right)$ סדרת פונקציות המוגדרות ב- $[0,\infty)$ על-ידי $f_n(x) = \dfrac{nx}{e^x + n + x}$.

א. האם $\left(f_n\right)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,\infty)$?

ב. האם לכל $0 \le a < b$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$?

נמקו היטב את תשובותיכם!

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$.

א. נגדיר $f_n(x) = f(x^n)$ לכל n טבעי ולכל $x \in [0,1]$.
הוכיחו כי לכל $0 < a < 1$ סדרת הפונקציות $\left(f_n(x)\right)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,a]$ לפונקציה הקבועה $g(x) \equiv f(0)$.

ב. הסתמכו על סעיף א כדי להוכיח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$.

שימו לב: מהנתון לא נובע שהסדרה $\left(f_n\right)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$.

שאלה 3 (20 נקודות)

לגבי כל אחד מהטורים הבאים מצאו את תחום התכנסותו.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$.

ב. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-x)^{5n}}{n \ln n \cdot 5^n}$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n$ כאשר $d(n)$ כמות המחלקים של מספר n .

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו :

א. הפונקציה $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4 + n^4 x^2}$ רציפה ב- $\mathbb{R}$.

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x) x^n$ מתכנס במידה שווה בקטע $[0,1]$.

שאלה 5 (20 נקודות)

מצאו את סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!(n+3)}$.

הדרכה : היעזרו בטור חזקות ובגזירה/אינטגרציה איבר-איבר.

שאלת רשות

הראו כי לכל α חיובי מתקיים השוויון $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^\alpha e^{-nx} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^\alpha e^{-nx} \right) dx$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 7

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2023א **מועד אחרון להגשה:** 31.1.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

א. חשבו את הגבולות הבאים, או הראו שאינם קיימים:

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+2y^2)+y^3}{x^2+y^2}$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,2)} x\arctan\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)$$

ב. בדקו אם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}^2$:

1. $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\left(e^{|x|}e^{|y|}-1\right)\left(\ln\left(|xy|+e\right)\right)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

2. $$g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^4}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

שאלה 2 (20 נקודות)

א. בדקו אם הפונקציה $f(x,y)=\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

הערה: שימו לב כי הביטוי $\sqrt[3]{a}$ מוגדר היטב לכל a ממשי.

ב. מצאו נקודה על גרף הפונקציה $f(x,y)=3x^2-y^2$, בה מישור משיק לגרף מקביל למישור $6x+4y+z=5$.

האם המישור המשיק לגרף בנקודה שמצאתם מתלכד עם המישור $6x+4y+z=5$?

שאלה 3 (25 נקודות)

א. הצלעות והזוויות של המשולש משתנים לאורך זמן. ברגע מסוים אורכים של שתי צלעות המשולש הם 4 ס"מ ו-3 ס"מ והזווית בין הצלעות האלה היא $\pi/6$. ברגע הנתון הזה שתי הצלעות האלה גדלות בקצב של 1 ס"מ לשנייה. באיזה קצב משתנה ברגע זה את הזווית בין הצלעות האלה אם ידוע ששטח המשולש נשאר קבוע?

ב. תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות מסדר 2 רציפות ב- $\mathbb{R}^2$ כך ש- $f_{yy} \equiv f_{xx}$ ב- $\mathbb{R}^2$.
נגדיר $z(u,v) = f(u+v, u-v)$. הראו כי הפונקציה $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ אינה תלויה ב- v.
הסיקו מכך שקיימות פונקציות במשתנה אחד h_1, h_2 כך ש- $z(u,v) = h_1(u) + h_2(v)$.

ג. תהי $f(x,y) = h(r)$ כאשר h גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$ ו- $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
נניח כי לכל $(x,y) \neq (0,0)$ הפונקציה f מקיימת את **משוואת לפלס**[1] $f_{xx} + f_{yy} = 0$.
הוכיחו כי $rh''(r) + h'(r) = 0$ לכל $r > 0$.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos(x+y)$.

א. מצאו את כל נקודות המקסימום המקומי ואת כל נקודות המינימום המקומי של f השייכות לתחום $D = \left\{(x,y) : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$.

ב. מצאו את המקסימום ואת המינימום של f בקבוצה $\left\{(x,y) : -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

שאלה 5 (15 נקודות)

תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $\mathbb{R}^2$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל $p_0 \in \mathbb{R}^2$ קיים כיוון v כך ש- $(D_v f)(p_0) = 0$.

ב. אם $\|\nabla f(p_0)\| \le 1$, אז לכל כיוון v מתקיים $|(D_v f)(p_0)| \le 1$.

ג. אם $f(p_1) = f(p_2)$ אז קיימת $p_0 \in [p_1, p_2]$ כך ש- $\nabla f(p_0) = \mathbf{0}$.

שאלת הרשות הבאה יכולה להחליף את שאלה 5

הוכיחו כי אם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $\mathbb{R}^2$, אז לכל שתי נקודות $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ קיימת נקודה $p_0 \in [p_1, p_2]$ כך ש- $f(p_2) - f(p_1) = (D_v f)(p_0) \cdot \|p_2 - p_1\|$ כאשר v וקטור היחידה בכיוון מ- p_1 ל- p_2.

[1] Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827), מתמטיקאי, פיסיקאי ואסטרונום צרפתי מפורסם.