מטלת מנחה 13 - אלגברה לינארית 2

328197462

12/05/2023

שאלה 1

סעיף א

המטריצה האלכסונית המייצגת של התבנית q לפי הבסיס הסטנדרטי היא:

$$[q]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

נבצע חפיפות אלמנטריות:

$$([q]_E|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_i \to 2R_i} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 2 & 6 & 10 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3/2R_1, R_4 \to R_4 - 5/2R_1]{R_2 \to R_2 - 1/2R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & -13 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -13 & -25 & -5 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -12 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -24 & -4 & -6 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3/2R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

ומכאן שבבסיס $B = (v_1 = (2,2,0,0), v_2 = (-1,1,0,0), v_3 = (-2,-4,2,0), v_4 = (-1,0,-3,2))$ נקבל $q = 4x_1^2 - x_2^2 - 8x_3^2 - 6x_4^2$.
הדרגה של q היא 4 והסימנית $\sigma = 1 - 3 = -2$.

סעיף ב

נרצה להוכיח כי $U = \mathrm{Sp}\{v_1\}$ הוא תת המרחב המקסימלי עליו q חיובית. תחילה נוכיח כי q חיובית על מרחב זה.
יהא $u \in U$, אז $[u]_B = (\alpha, 0, 0, 0)$ עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו ולכן $q(u) = 4\alpha^2 > 0$.
המרחב המשלים $U' = \mathrm{Sp}\{v_2, v_3, v_4\}$ מקיים שq שלילית לחלוטין עליו (ההוכחה זהה לחלוטין).
כעת, נניח בשלילה כי קיים מרחב W כך ש $\dim W > 1$ וגם q חיובית לחלוטין על W.
משיקולי מימדים, בהכרח $\dim(U' \cap W) > 0$ ולכן קיים וקטור שאינו אפס ב$v \in U' \cap W$.
עבור וקטור זה מתקיים $v \in U' \Leftarrow q(v) < 0$, אבל גם $v \in W$ ולכן $q(v) > 0$ וזו סתירה!

שאלה 2

יהא L_0 תת הקבוצה הנתונה. נוכיח כי תת-קבוצה זו מהווה תת מרחב ממימד $n-\rho$. נתבונן בצורה הקנונית של q. על פי 6.1.1 ו6.3.2, קיים בסיס $(w) = (w_1, w_2, ..., w_n)$ כלשהו של V כך ש:

$$[q]_{(w)} = \begin{pmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, ..., 1, 0, 0, ..., 0\}$$

כלומר, לכל $v \in V$ כך ש $[v]_{(w)} = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{t}}$, מקבלים:

$$q(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\rho^2 + 0x_{\rho+1}^2 + \cdots + 0x_n^2$$

נתבונן אפוא בתת המרחב $U = \mathrm{Sp}\{w_{\rho+1}, ..., w_n\}$ ממימד $n-\rho$. נוכיח כי קבוצת איברי W היא בדיוק L_0.

כיוון ראשון: יהא $u \in U$, אז עבור $[u]_{(w)} = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{t}}$ נקבל $x_1 = x_2 = \cdots = x_\rho = 0$. לכן:

$$q(u) = 0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 + 0x_{\rho+1}^2 + \cdots + 0x_n^2 = 0$$

ומכאן $u \in L_0$ ולכן $U \subseteq L_0$.

כיוון שני: יהא $s \in L_0$ ונסמן $[s]_{(w)} = (s_1, s_2, ..., s_n)^{\mathrm{t}}$.
על פי הנתון נסיק:

$$q(s) = s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_\rho^2 = 0$$

מכאן בהכרח $s_1 = s_2 = \cdots = s_\rho = 0$ ולכן $s \in \mathrm{Sp}\{w_{\rho+1}, ..., w_n\} = U$ ונקבל $L_0 \subseteq U$.
קיבלנו שL_0 הוא בדיוק תת-המרחב U ממימד $n-\rho$ ותמה הוכחת השאלה.

שאלה 3

נוכיח את השאלה על דרך השלילה.
נניח בשלילה כי q אינה שומרת סימן. בהכרח, על פי 6.3.2, בהצגה הקנונית של q על פי בסיס $(w) = (w_1, w_2, ..., w_n)$, נקבל לפחות איבר אחד בעל מקדם 1 שנסמנו x_1, ולפחות איבר אחד בעל מקדם (-1) שנסמנו $x_{\pi+1}$. ההצגה תהיה, בסימוני 6.3.2,

$$q(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + \cdots + x_\pi^2 - x_{\pi+1}^2 - \cdots - x_\rho^2 + 0x_{\rho+1}^2 + \cdots + 0x_n^2$$

יהא $u_1 = w_1$, אז $[u_1]_{(w)} = (1, 0, ..., 0)^{\mathrm{t}}$ ולכן $q(u_1) = 1$ ו$u_2 \in L$.
יהא $u_2 = w_{\pi+1} + 2w_1$. אז $q(u_1) = 2^2 - 1^2 = 3$ ולכן $u_2 \in L$
אבל $q(u_2 - 2u_1) = q(w_{\pi+1}) = -1$ ולכן $u_2 - 2u_1 \notin L$ בסתירה לתכונת הסגירות לחיבור של המרחב הלינארי L!

שאלה 4

סעיף א

המטריצה המייצגת של q לפי הבסיס הסטנדרטי תהיה:

$$[q]_E = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

נשתמש בשיטת יעקובי על מנת למצוא תנאים הכרחיים ומספיקים לחיוביות של q: זוהי מסקנה 6.4.3. נקבל אפוא - תנאי הכרחי ומספיק לחיוביות של q יהיה סיפוקם של שלושת אי השוויונות הבאים:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= |[1]| = 1 > 0 \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 > 0 \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= 1(4-9) - \lambda(\lambda - 15) + 5(3\lambda - 20) = \\
&= -\lambda^2 + 30\lambda - 105 > 0
\end{aligned}$$

נקבל $\Delta_2 > 0$ אם ורק אם $-2 < \lambda < 2$.
כמו כן, הערכים $\lambda = 15 \pm 2\sqrt{30}$ מאפסים את Δ_3 ו$\Delta_3 > 0$ אם ורק אם $4.05 \approx 15 - 2\sqrt{30} < \lambda < 15 + 2\sqrt{30} \approx 25.95$.
קיבלנו שני אי-שוויונות שלא ניתן לספק במקביל עבור שום ערך של λ ולכן q אינה חיובית לחלוטין עבור שום ערך של λ.

סעיף ב

הסעיף עוסק בשיטת יעקובי וביישום מרכזי שלה - לכסון סימולטני.
בסימוני '6.5.1:

$$B = [q_1]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = [q_2]_E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

שלבי הפתרון הם כלהלן, על פי הוכחת משפט '6.5.1:

- נמצא מטריצה P כך ש $P^{\mathrm{t}}BP = I$.
- נגדיר $S = P^{\mathrm{t}}AP$. המטריצה S תהא סימטרית ממשית ולכן לכסינה אורתוגונלית.
- נמצא מטריצה Q אורתוגונלית כך ש $Q^*SQ = \mathrm{diag}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$
- המטריצה המלכסנת שלנו תהיה $M = PQ$ ונקבל $q_1 = \delta_1 y_1^2 \delta_2 y_2^2 + \delta_3 y_3^2$

נעבור לפתרון. נמצא את P בעזרת חפיפה אלמנטרית:

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) = (I|P^{\mathrm{t}})$$

נקבל אפוא כי B אכן חיובית לחלוטין וכן $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

נחשב את S:

$$S = P^{\mathrm{t}}AP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 4 & 8 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

המטריצה S היא מטריצה סימטרית ממשית ולכן לכסינה אורתוגונלית. נמצא את הערכים העצמיים של S:

$$\begin{aligned}
p(x) = |xI - S| = \begin{vmatrix}x-2 & -2 & -1\\ -2 & x-2 & -1\\ -1 & -1 & x-3\end{vmatrix} &\overset{R_1=\Sigma R_i}{=} \begin{vmatrix}x-5 & x-5 & x-5\\ -2 & x-2 & -1\\ -1 & -1 & x-3\end{vmatrix} =\\
= (x-5)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & x-2 & -1\\ -1 & -1 & x-3\end{vmatrix} &\overset{R_3\to R_3+R_1}{=} (x-5)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & x-2 & -1\\ 0 & 0 & x-2\end{vmatrix} =\\
= (x-5)(x-2)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & x-2\end{vmatrix} &= (x-5)(x-2)(x-2-(-2\cdot 1)) = x(x-5)(x-2)
\end{aligned}$$

נקבל שלושה ערכים עצמיים $0,2,5$ עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. נמצא בסיסים אורתוגונליים לכל אחד משלוש המרחבים העצמיים V_0, V_2, V_5:

- עבור V_0 נקבל את מרחב האפס של S. דירוג ייתן לנו:

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

נקבל וקטור עצמי $v_0 = (1,-1,0)$. ננרמל ונקבל $v_0* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$.

- עבור V_2 נרצה למצוא את מרחב האפס של המטריצה:

$$\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ -2 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

נקבל וקטור עצמי $v_2 = (1,1,-2)$ ווקטור מנורמל $v_2* = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$

- עבור המרחב העצמי V_5 ניעזר בעובדה שסכום כל שורה במטריצה הוא 5, ולכן ניקח $v_5 = (1,1,1)$ ו-$v_5* = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

מקבלים:

$$\begin{aligned}
Q &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\end{pmatrix},\\
M = PQ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\sqrt{3} & -4 & 2\sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 3 & 0\\ 0 & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

מקבלים $M^{\mathrm{t}}BM = Q^{\mathrm{t}}P^{\mathrm{t}}BPQ = Q^{-1}IQ = I$, וכן $M^{\mathrm{t}}AM = Q^{\mathrm{t}}SQ = \mathrm{diag}\{0,2,5\}$. הבסיס המבוקש הוא שורות המטריצה M, וערכי δ_i הם $0,2,5$.

שאלה 5

סעיף א

עלינו להוכיח כי מטריצה סימטרי כלשהי $A_{n\times n}$ המייצגת את q אינה הפיכה.
על פי 6.2.1, A חופפת למטריצה אלכסונית B. על פי חלק ב של אותו המשפט, למטריצה B אותה דרגה ונסמן $\rho = \rho(B) = \rho(A)$.
על פי 6.3.2 נקבל $0 < \rho < n$. לכן $\rho(A) < n$ וA סינגולרית!

סעיף ב

המטריצה $A = [\alpha_{ij}]$ מטריצה סימטרית ממשית ולכן לפי 3.2.1 לכסינה אורתוגונלית על ידי מטריצה אוניטרית Q.
מהנתון נסיק כי לכל $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_i\xi_j > 0$$

אי לכך, על פי הגדרה A חיובית לחלוטין ולכן לפי 3.3.2 כל ערכיה העצמיים של A ממשיים חיוביים.
הכיוון הראשון טריוויאלי: אם $A = I$ אז בפרט A אורתוגונלית.
אילו A אורתוגונלית אז לכל ערך עצמי λ של A מתקיים $|\lambda| = 1$ ולכן לA ערך עצמי יחיד $\lambda = 1$. היות וA לכסינה, הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי זה הוא n וA דומה לI.
נקבל אפוא:

$$A = Q^*IQ = Q^{-1}Q = I$$