

מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

06/01/2023

שאלה 1

סעיף א

נפריד לשני טורים ונבצע פעולות חיבור בעזרת משפט 5.9. נסמן אפוא:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 2^n} > 0 \quad b_n = \frac{(-2)^n \cdot \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n} \cdot 2^n} = \frac{(-1)^n \cdot \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$$

ראשית, עבור הסדרה החיובית a_n נקבל

$$0 \leq a_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

כאשר הטור $\sum \frac{1}{2^n}$ הוא טור הנדסי שמנתו $q = \frac{1}{2}$, ולכן מתכנס. אי לכך, לפי מבחן ההשוואה 5.14, גם הטור $\sum a_n$ מתכנס, וכן מאחר ומדובר בסדרה חיובית הטור מתכנס בהחלט.

כעת נבחן את התכנסות הטור $\sum |b_n|$. מתקיים:

$$0 \leq |b_n| = \left| \frac{(-1)^n \cdot \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}} \right| = \frac{|(-1)^n| |\sin \frac{1}{n}|}{\sqrt{n}} = \frac{|\sin \frac{1}{n}|}{\sqrt{n}} \stackrel{\substack{\leq \\ |\sin x| \leq |x|}}{\leq} \frac{1}{n\sqrt{n}} \stackrel{\text{מאינפי 1}}{\leq}$$

הטור $\sum \frac{1}{n^{1.5}} = \sum \frac{1}{n^{1.5}}$ מתכנס (לפי דוגמה 5.8 ביחידה 5 כאשר $\alpha = 1.5 > 1$), ולכן לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי גם הטור $\sum |b_n|$ מתכנס.

כעת נתבונן בטור הנתון בסעיף. מדובר בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-2)^n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n} \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

נשים לב כי לפי אי-שוויון המשולש,

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \stackrel{a_n > 0}{=} a_n + |b_n|$$

הטור $\sum (a_n + |b_n|)$ מתכנס כסכום של טורים מתכנסים לפי משפט 5.9. אי לכך, גם הטור $\sum |a_n + b_n|$ מתכנס, ומכאן נסיק התכנסות בהחלט של הטור הנתון בשאלה.

סעיף ב

נפריד שוב לשני טורים. נסמן אפוא:

$$a_n = \frac{n \cdot \cos 2n}{n^2 - 1} = \frac{n}{n^2 - 1} \cdot \cos 2n \quad b_n = \frac{\cos \pi n}{\ln n \cdot \ln(n^n + n)} = \frac{(-1)^n}{\ln n \cdot \ln(n^n + n)}$$

נתבונן תחילה בטור $\sum a_n$. נרצה להוכיח כי הטור מתכנס לפי מבחן דיריכלה:

i נראה כי הסדרה $\mu_n = \frac{n}{n^2 - 1}$ מונוטונית יורדת.
נגדיר $\mu(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$. מתקיים:

$$\mu'(x) = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0$$

ולכן μ פונקצייה יורדת, ובפרט לכל n טבעי נקבל $\mu_{n+1} = \mu(n+1) < \mu(n) = \mu_n$.

ii כמו כן, $\mu_n = \frac{n}{n^2 - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

iii בנוסף, על פי שאלה 33 ביחידה 5, $\sum \cos 2n$ סכום חסום.

נקבל, על פי משפט 5.22, כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} (\mu_n \cdot \cos 2n)$ מתכנס.

נבחן כעת את התכנסות הטור $|b_n|$. נשים לב כי $\ln(n^n + n) \geq \ln(n^n) = n \ln n$, ואי לכך:

$$|b_n| = \left| \frac{(-1)^n}{\ln n \cdot \ln(n^n + n)} \right| \stackrel{x \geq 1 \Rightarrow \ln x > 0}{=} \frac{|(-1)^n|}{\ln n \cdot \ln(n^n + n)} = \frac{1}{\ln n \cdot \ln(n^n + n)} \leq \frac{1}{\ln n \cdot n \ln n} = \frac{1}{n \ln^2 n}$$

הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ מתכנס לפי שאלה 27 ביחידה 5 עבור $\alpha = 2$, ולכן לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי $\sum_{n=2}^{\infty} |b_n|$ מתכנס, כלומר $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

אי לכך, לפי משפט 5.9 הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n \cdot \cos 2n}{n^2 - 1} + \frac{\cos \pi n}{\ln n \cdot \ln(n^n + n)} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n)$$

מתכנס. כעת, נניח בשלילה כי הטור מתכנס בהחלט. אז לפי משפט 5.9, הטור $\sum_{n=2}^{\infty} (|a_n + b_n| + |b_n|)$ מתכנס. מתקיים:

$$0 \leq |a_n| = |(a_n + b_n) - b_n| \stackrel{\text{א"ש המשולש}}{\leq} |a_n + b_n| + |b_n|$$

ועל כן, לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ מתכנס. ונקבל אפוא

$$|a_n| = \left| \frac{n \cdot \cos 2n}{n^2 - 1} \right| = \frac{n \cdot |\cos 2n|}{n^2 - 1} \stackrel{|\cos x| \geq \cos^2 x}{\geq} \frac{n \cdot \cos^2 2n}{n^2 - 1} \geq 0$$

ומכאן, שוב לפי מבחן ההשוואה, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \cos^2 2n}{n^2 - 1}$, הוא טור מתכנס גם הוא. לפי הזהות $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$, נסיק:

$$\frac{n \cdot \cos^2 2n}{n^2 - 1} = \frac{n}{2(n^2 - 1)} + \frac{n \cdot \cos 4n}{2(n^2 - 1)}$$

הטור $\sum_{n=2}^{\infty}$ מתכנס, לפי מבחן דיריכלה, ובהוכחה שקולה להוכחה מקודם.
אי לכך, לפי שאלה 11 ביחידה 5, נסיק כי גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2(n^2 - 1)}$ מתכנס. עם זאת,

$$\frac{\frac{n}{2(n^2 - 1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{2(n^2 - 1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה 5.15 גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתכנס.

נסיק כי לפי משפט 5.12 גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתכנס, בסתירה לדוגמה 5.8 בספר!
מהסתירה נובע כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n + b_n|$ לא מתכנס, ולכן הטור שבשאלה מתכנס בתנאי.

שאלה 2

תהא (u_n) המתכנסת לגבול שלילי, וכן יהא a מספר חיובי. נסמן $a_n = a^{u_1+u_2+\dots+u_n}$ ונראה כי מתכנס אם ורק אם $a > 1$.

נחשב את הגבול:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{u_1+u_2+\dots+u_n+u_{n+1}}}{a^{u_1+u_2+\dots+u_n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a^{u_{n+1}}| =_{a>0 \Rightarrow a^x>0} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_n} = a^u$$

אילו $a > 1$, אז מהנתון $u < 0$ נסיק $c = a^u < 1$ ולכן לפי משפט * 5.17 הטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, ובפרט מתכנס. אילו $a < 1$, אז מהנתון $u < 0$ נסיק $c = a^u > 1$ ולכן לפי משפט * 5.17 הטור $\sum a_n$ מתבדר.

אילו $a = 1$, אז נקבל לכל n טבעי $a_n = 1^{\dots} = 1 = \frac{1}{n^0}$ ולכן הטור $\sum a_n$ מתבדר, לפי דוגמה 5.8 ביחידה 5, כי $0 < 1 = \alpha$ בכך הוכחנו כי הטור $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם $a > 1$.

שאלה 3

נסמן $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. אז מהגדרת הגבול עבור $\epsilon = \frac{|a|}{2}$, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - a| < \epsilon$, כלומר, מאי-שוויון המשולש $-\frac{|a|}{2} < |a_n| - |a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{|a|}{2} < |a_n| < \frac{3|a|}{2}$. אי לכך, לכל $n + 1 > n_0$ נקבל:

$$\frac{a^2}{4} < |a_{n+1}a_n| < \frac{9a^2}{4}$$

כעת, נשים לב שהחל מ n_0 מתקיים:

$$\frac{a^2}{4} |a_n - a_{n+1}| < \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right| = \frac{|a_n - a_{n+1}|}{|a_n a_{n+1}|} < \frac{9a^2}{4} |a_n - a_{n+1}|$$

כעת נניח כי $\sum (a_{n+1} - a_n)$ מתכנס בהחלט, כלומר $\sum |a_{n+1} - a_n|$ מתכנס, ונזכיר לפי מבחן ההשוואה כי הטור החיובי $\sum \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right|$ מתכנס.

לפי משפט 5.10 (נדגיש $\frac{9a^2}{4} \neq 0$) נסיק כי $\sum \frac{9a^2}{4} |a_{n+1} - a_n|$ מתכנס. הראינו כי כמעט לכל n מתקיים $\left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right| < \frac{9a^2}{4} |a_{n+1} - a_n|$, ואי לכך לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי הטור מתכנס, כלומר $\sum \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right)$ מתכנס בהחלט.

בכיוון השני, אם נניח כי $\sum \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right|$ מתכנס, אז לפי מבחן ההשוואה 5.14 ומשפט 5.10 נסיק כי הטור החיובי $\sum |a_{n+1} - a_n|$ מתכנס.

שאלה 4

סעיף א

הטענה לא נכונה.

יהא טור מתכנס $\sum a_n$, מתקיים לפי משפט 5.5 התנאי ההכרחי $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. אי לכך,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(a_n) = \left[\begin{array}{c} \text{לפי היינה} \\ x = a_n \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos(0) = 1$$

לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות טור ולכן הטור $\sum \cos(a_n)$ לא מתכנס.

סעיף ב

הטענה נכונה. נוכיח לפי מבחן ההשוואה 5.15

נתון כי איברי הסדרה a_n חיוביים. כמו כן, $a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n^2 + a_n > 0$ כמו כן מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + a_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n^2}{a_n} + \frac{a_n}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) \stackrel{\text{התנאי ההכרחי 5.5}}{=} 0 + 1 = 1 > 0$$

אי לכך, לפי מבחן ההשוואה 5.5 הטורים $\sum a_n, \sum(a_n^2 + a_n)$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

סעיף ג

הטענה נכונה. נניח כי הטור $\sum |a_{n+1} - a_n|$ מתכנס.

אז מכאן נסיק שהטור $\sum(a_{n+1} - a_n)$ מתכנס, ולכן סדרת הסכומים החלקיים של הטור,

$$S_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{k+1} - a_k) = a_{k+1} - a_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S$$

מתכנסת. אי לכך,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \stackrel{\text{הזזה}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1} - a_1 + a_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{k+1} - a_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} a_1 = S + a_1$$

הוכחנו כי לסדרה (a_n) יש גבול סופי ולכן היא מתכנסת.

