מטלת מנחה 13 – מתמטיקה בדידה

שאלה 1

נוכיח כי:

א. תהי $\mathbf{M} = \{x \in (\mathbf{0},\mathbf{1}) \mid g(x)\}$ כך ש g התנאי שפורט בשאלה. נוכיח $|M| = א$.

<u>חסימה מלמעלה:</u> הפונקציה $f: M \to (0,1)$ המקיימת לכל $x \in M$: $f(x) = x$ היא פונקציה חח"ע, כי לכל שני איברים שונים בתחום מותאמים שני איברים שונים בטווח – הם עצמם. לכן $|M| \le |(0,1)|$.

<u>חסימה מלמטה:</u> הפונקציה $h: (0,1) \to M$, המתאימה לכל $r \in (0,1)$, אותו ניתן לכתוב כמספר הממשי $0.r_1r_2r_3r_4r_5r_6\ldots$, מספר בקבוצה M לפי ההתאמה הבאה:

$$h(0.r_1r_2r_3r_4\ldots) = 0.r_1r_1r_2r_2r_3r_3r_4r_4\ldots$$

פונקציה זו היא חח"ע, כי אילו קיימים $r,s \in (0,1)$ השונים זה מזה, אז בהכרח קיים $n \in \mathbb{N}$ כלשהו כך ש $r_n \neq s_n$, לכן שתי זוגות הספרות במקומות $2n-1$ ו$2n$ בדמויות של r,s ע"י h שונות זו מזו, ולכן $h(r) \neq h(s)$.

קיום פונקציה חח"ע כזו מצביע על כך ש $|0,1| \le |M|$.

לכן לפי משפט קנטור-ברונשטיין מתקיים $|M| = |0,1| = א$

ב. $\aleph_0 = \left|\left(\mathbb{N} \times (\mathbf{0},\mathbf{1})\right) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})\right|$

ראשית נסמן את הביטוי בM נפשט אותו.

$$M = \left(\mathbb{N} \times (0,1)\right) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) = \{<a,b> \mid a \in \mathbb{N} \cap \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\}$$

מתקיים $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, לכן ניתן לפשט עוד יותר את הביטוי: $\{<a,b> \mid a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\} =$

קבוצה זו שקולה ל$Q_+ = \{x \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{N} \mid x > 0\}$,
כי הפונקציה f המתאימה לכל $<a,b> \in M$ את $a+b \in Q_+$ היא חח"ע ועל.

ברור כי לכל $q \in Im(f)$ יש הצגה **יחידה** של שלם ושבר כך שהשבר בין 0 ו-1, כך שהחלק השלם הוא המספר הטבעי המרכיב אותו והחלק השברי הוא השבר המרכיב אותו.

מטענה זו נובעת ההוכחה כי f על.

הוכחת חח"ע: יהיו $<a,b>,<c,d> \in M$ כך ש $<a,b> \neq <c,d>$. לכן $a \neq c$ או $b \neq d$.

אילו $a \neq c$: אז החלק השלם בהצגה היחידה של $f<a,b>$
והחלק השלם בהצגה היחידה של $f<c,d>$ שונים זה מזה, לכן $f<a,b> \neq f<c,d>$

אילו $b \neq d$: אז החלק השברי בהצגה היחידה של $f<a,b>$
והחלק השברי בהצגה היחידה של $f<c,d>$ שונים זה מזה, לכן $f<a,b> \neq f<c,d>$

לכן $Q_+ \sim M$.

לפי עמוד 186, מתקיים $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.
בנוסף, מאחר ו$\mathbb{Q}$ בת מנייה נובע ו $Q_+ \subseteq \mathbb{Q}$ (כי לכל $x \in Q_+$ מתקיים $x \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{N}$, ולכן $x \in \mathbb{Q}$), נובע כי גם Q_+ בת מנייה.

Q_+ אינסופית כי הקבוצה $\{1.5,2.5,3.5, \dots\}$ היא תת-קבוצה אינסופית של Q_+.

מכך ניתן להסיק ש Q_+ היא בת מנייה ואינסופית, לכן $|Q_+| = \aleph_0$.
ומהשקילות לM נובע כי $|M| = \aleph_0$.

ג. א $= |\mathbf{P}((\mathbf{0},\mathbf{1})\backslash \boldsymbol{I})|$**, כאשר** $\boldsymbol{I} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

ראשית, נסמן $M = (0,1)\backslash I$ וננסה לפשט את הביטוי.

נסמן $U = \mathbb{R}$ ונפשט:

$$M = (0,1)\backslash I = (0,1) \cap I^c = (0,1) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^c = (0,1) \cap (\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^c)^c = (0,1) \cap (\mathbb{R}^c \cup \mathbb{Q})$$
$$= (0,1) \cap (\phi \cup \mathbb{Q}) = (0,1) \cap \mathbb{Q}$$

הקבוצה $K = \{\frac{n+1}{n+2} | n \in \mathbb{N}\}$ היא חלקית לקבוצה M כי כל איבר בK הוא שבר בין 0 ו1.
כמו כן, מתקיים $K \sim N$ כי הפונקציה המתאימה לכל $n \in \mathbb{N}$ את $\frac{n+1}{n+2} \in K$ היא חח"ע ועל.

הוכחת חח"ע: לכל $m.n \in \mathbb{N}$, ונניח $\frac{m+1}{m+2} = \frac{n+1}{n+2}$.
לכן $m = n \Leftarrow mn + 2n + m + 2 + mn + 2m + n + 2$

הוכחת על: יהי $q \in K$. לכן קיים $n \in \mathbb{N}$: $q = \frac{n+1}{n+2}$ ולכן קיים מקור לq.

לכן $K \sim \mathbb{N}$. לפי עמוד 186 $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, ולכן לפי טרנזיטיביות $K \sim \mathbb{Q}$.
ומאחר ו $K \subseteq M \subseteq \mathbb{Q}$, אז לפי כלל הסנדוויץ' $M \sim Q$, לכן $|M| = \aleph_0$.

לכן א $= 2^{\aleph_0} = |P(M)|$.

ד. א' $= \left|\boldsymbol{P}\left((\mathbf{0},\mathbf{10^{-10}})\backslash\mathbb{Q}\right)\right|$

נסמן $M = (0,10^{-10})$. M הוא קטע ממשיים בלתי מנוון ולכן, לפי עמוד 193, שקול ל$\mathbb{R}$ ועוצמתו א.
כמו כן, לפי עמוד 186, $\mathbb{Q}$ היא קבוצה בת-מנייה ועוצמתה $\aleph_0$.

לפי עמוד 198, חיסור קבוצה שעוצמתה א מקבוצה בת מנייה ייתן קבוצה שעוצמתה א.
לכן א $= |M\backslash\mathbb{Q}|$.

לכן, א' $= 2^{\aleph} = |P(M\backslash\mathbb{Q})|$.

13.08.2021

שאלה 2

יהיו $M = \{A \in P(\mathbb{N}) |\ |A| = \aleph_0 \wedge |A^c| = \aleph_0\}$,

ו $K = \{A \in P(\mathbb{N}) |\ \ |A^c| = \aleph_0\}$.

ברור ש $M \subseteq K \subseteq P(\mathbb{N})$.

נראה כי M אינה בת-מנייה בשיטת האלכסון של קנטור

נניח בשלילה כי קיימת מנייה כלשהי לקבוצות בM. כל הקבוצות בM הן אינסופיות, ויש להתייחס לכך במנייה.

אז המנייה תיראה כך (אין משמעות לסדר איברי הקבוצה, לכן נבחר לסדרם בסדר עולה):

$$\{a_0^0, a_1^0, a_2^0, \dots.\}$$

$$\{a_0^1, a_1^1, a_2^2, \dots.\}$$

$$\{a_0^2, a_1^2, a_2^2, \dots.\}$$

נסתכל על האיבר $\delta \in M$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ האיבר במקום ה-n-י בδ (בסדר עולה), שונה מa_n^n. למשל:

$$\delta = \{(a_0^0 + 1)(a_1^1 + 1), (a_1^1 + 1)(a_2^2 + 1), \dots\}$$

אילו δ היה במנייה, אז היה קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a_n^n \in \delta$, זאת בסתירה להגדרת δ.

א. $|K| = \aleph_0$ – הטענה שגויה.

אילו K הייתה בת-מנייה, אז כל תת-קבוצה שלה הייתה בת-מנייה, אבל M לא בת מנייה!

ב. $|\mathbf{M}| = \aleph_0$ – הטענה שגויה. הוכחנו כי M אינה בת-מנייה.

על מנת לענות על הסעיפים הבאים, נחשב את $P(\mathbb{N}) \backslash K$.

$$P(\mathbb{N}) \backslash K = P(\mathbb{N}) \backslash \{A \in P(\mathbb{N}) \big| |A^c| = \aleph_0\big\} = \{A \in P(\mathbb{N}) |\ |A^c| < \aleph_0\}$$

(עוצמת הקבוצות בK בוודאות קטנה או שווה ל $\aleph_0$ כי כל אחת מהן חלקית ל $\mathbb{N}$)

כעת נראה כי כל קבוצה בקבוצה זו היא אינסופית. עבור כל קבוצה A כך ש $|A^c| < \aleph_0$, קיים מספר טבעי n כך ש $|A^c| = n$. מאחר ו$A \cap A^c = \phi$, מתקיים $\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |A \cup A^c| = |A| + n$

אילו A סופית, אז $\aleph_0$ היא מספר סופי – סתירה!

לכן $P(\mathbb{N}) \backslash K = \{A \in P(\mathbb{N}) |\ |A| = \aleph_0 \wedge |A^c| < \aleph_0\}$.

נחשב את $K \backslash M$: $K \backslash M = \{A \in P(\mathbb{N}) |\ |A^c| = \aleph_0 \wedge \neg(|A^c| = \aleph_0 \wedge |A| = \aleph_0)\} =$

לפי פילוג והכנסת שלילה לסוגריים

$$= \{A \in P(\mathbb{N})\ |\ (|A^c| = \aleph_0 \wedge |A^c| < \aleph_0) \vee (|A^c| = \aleph_0 \wedge |A| < \aleph_0)\} =$$

$$= \{A \in P(\mathbb{N}) |\ |A| < \aleph \wedge |A^c| = \aleph_0\}$$

נוכיח כי $\mathbf{K}\backslash \boldsymbol{M} \sim \boldsymbol{P}(\mathbb{N})\backslash \boldsymbol{K}$:

הפונקציה $h: K\backslash M \to P(\mathbb{N})\backslash K$ המתאימה לכל $A \in K\backslash M$ את $A^c \in P(\mathbb{N})\backslash K$ היא פונקציה חח"ע ועל.

הוכחה שהפונקציה מוגדרת היטב:

לכל $A \in K\backslash M$, מתקיים $|A^c| = \aleph_0$ וגם $|A| < \aleph_0$, כי התנאי הראשון חייב להתקיים לפי הגדרת K, ושני התנאים לא יכולים להתקיים, אחרת $A \in M$.
לכן $A^c \in P(\mathbb{N})\backslash K$.

הוכחת חח"ע: יהיו $A, B \in K\backslash M$ ונניח $h(A) = h(B)$.
לכן $A^c = B^c$. נפעיל $(\quad)^c$ על שני האגפים ונקבל כי $A = B$.

הוכחת על: לכל קבוצה ביקום קיים משלים ביחס אליו.

ג. $|\mathbf{P}(\mathbb{N})\backslash \boldsymbol{K}| = \aleph_0$

לכל $n \in \mathbb{N}$, תהי $\Gamma_n = \{A \in K\backslash M \mid |A| = n\}$. הקבוצה מוגדרת היטב כי הראנו שכל הקבוצות ב $K\backslash M$ הן סופיות. $\Gamma_0 = \{\phi\}$ היא כמובן בת מנייה. תהי $f_1: \mathbb{N} \to \Gamma_1$ הפונקציה המתאימה לכל $n \in \mathbb{N}$ את $\{n\} \in \Gamma_1$. קל לראות כי f_1 על וחח"ע ולכן Γ_1 בת מנייה.

<u>נראה כי לכל $n \geq 2$, הקבוצה Γ_n היא בת מנייה:</u>

<u>חסימה מלמטה:</u> ברור שΓ_n אינסופית, כלומר $|\Gamma_n| \geq \aleph_0$.

<u>חסימה מלמעלה:</u> הפונקציה $\mathrm{f}_n: \Gamma_n \to \times_{i=1}^{n} \mathbb{N}$, המוגדרת כך (אין משמעות לסדר איברי הקבוצה, לכן נבחר לסדרם בסדר עולה):

$$f_n(\{a_1, a_2, \dots a_n\}) = < a_1, a_2, \dots a_n >$$

היא חח"ע, כי לכל שתי קבוצות A,B מתוך Γ_n השונות זה מזה, לפחות אחד מאיברי A לא נמצא בB, או לפחות אחד מאיברי B לא נמצא בA. לכן לפחות אחד מאיברי $f(A)$ לא נמצא במקום כלשהו ב$f(B)$, או הפוך, ומכאן ש $f(A) \neq f(B)$.

לכן לפי עמוד 204 מתקיים $|\Gamma_n| \leq |\times_{i=1}^{n} \mathbb{N}|$. עוצמת הקבוצה $\times_{i=1}^{n} \mathbb{N}$, היא $\aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0$ (n-1 פעולות כפל).
לפי קיבוציות כפל עוצמות והעובדה כי $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (עמוד 219), מתקיים כי $|\times_{i=1}^{n} \mathbb{N}| = \aleph_0$.

לכן, $|\Gamma_n| \leq \aleph_0$.

לכן לפי קנטור-ברונשטיין $|\Gamma_2| = \aleph_0$.

לכן, הקבוצה

$$K\backslash M = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$$

היא איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה, ולכן לפי עמוד 195 היא בת מנייה.
כמובן שהקבוצה אינסופית, בתור איחוד של אינסוף קבוצות זרות.

לכן $|K\backslash M| = \aleph_0$. לפי טענת העזר $P(\mathbb{N})\backslash K \sim K\backslash M$, לכן $|P(\mathbb{N})\backslash K| = \aleph_0$ והטענה נכונה.

13.08.2021

ד. $|\mathbf{P}(\mathbb{N})\backslash \boldsymbol{M}| = \aleph_0$

נראה כי הקבוצה היא איחוד של הקבוצות $P(\mathbb{N})\backslash K$ ו $K\backslash M$ בעזרת הכלה דו-כיוונית.

$\subseteq$: לכל $x \in P(\mathbb{N})\backslash M$, אם $x \in K$ אז $x \in K\backslash M$, ואם לא אז $x \in P(\mathbb{N})\backslash K$.

$\supseteq$: לכל $x \in (P(\mathbb{N})\backslash K) \cup (K\backslash M)$,

אם $x \in K$ אז $x \in P(\mathbb{N})$ (הראנו כי $K \subseteq P(\mathbb{N})$), וגם $x \notin P(\mathbb{N})\backslash K$.
לכן בוודאות $x \in K\backslash M$, כלומר $x \notin M$ ולכן $x \in P(\mathbb{N})\backslash M$.

אם $x \notin K$, אז $x \notin M$ (הראנו כי $\mathrm{M} \subseteq K$), וגם $x \notin K\backslash M$.
לכן בוודאות $x \in P(\mathbb{N})\backslash K$, כלומר $x \in P(\mathbb{N})$ ולכן $x \in P(\mathbb{N})\backslash M$.

לפי הסעיף הקודם, שתי הקבוצות $P(\mathbb{N})\backslash K$ ו $K\backslash M$ הן בנות מנייה.
האיחוד שלהן, לפי עמוד 193, הוא גם בן מנייה.

כמו כן, $\mathrm{P}(\mathbb{N})\backslash K \subseteq (P(\mathbb{N})\backslash K) \cup (K\backslash M) = P(\mathbb{N})\backslash M$ היא קבוצה אינסופית, ולכן גם $P(\mathbb{N})\backslash M$ אינסופית.

הראינו כי $P(\mathbb{N})\backslash M$ בת מנייה ואינסופית ולכן הטענה נכונה.

13.08.2021

שאלה 3

יהיו – A תת-קבוצה של $P(\mathbb{N})$ כמתואר בשאלה.

B קבוצה של קטעים פתוחים לא ריקים ב-$\mathbb{R}$ כך שלאף אחד מהם אין נקודה משותפת

C קבוצה אינסופית, לא בת מנייה, של קטעים פתוחים ב$\mathbb{R}$

נוכיח כי:

א. $|\boldsymbol{B}| \leq |\boldsymbol{A}|$

ראשית נוכיח כי $|A| = \aleph_0$.

הפונקציה $f: \mathbb{N} \to A$ המתאימה לכל $n \in \mathbb{N}$ את $A_n \in A$ היא פונקציה חח"ע כי לפי הנתון לכל $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, מתקיים $A_i \neq A_j$.

הוכחה כי f על: תהי $X \in A$. לכן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $X = A_n$, לכן n מקור של X.

הוכחנו כי $A \sim \mathbb{N}$ ולכן $|A| = \aleph_0$. לכן, על מנת להוכיח את הטענה בשאלה, עלינו להוכיח כי B בת מנייה.

אילו B סופית – אז B בת מנייה, כלומר $|B| \leq \aleph_0$.

אילו B אינסופית:

נסמן ב$b_0 \in B$ את הקטע הפתוח המכיל את $0 \in \mathbb{R}$, או את המספר הממשי הקרוב אליו ביותר השייך לקטע כלשהו בB (אם קיימים שניים כאלה, נבחר את הנמוך יותר). מאחר ולקטעים ב-B אין נקודות משותפות, ניתן לסדר אותם לפי ערכי האיבר התוחם את הקטע משמאל (בקטע הפתוח (a, b) – מדובר על האיבר a).

אנחנו יודעים בוודאות כי זהו יחס סדר מלא לפי תכונות האנטי-רפלקסיביות, הטרנזיטיביות וההשוואה של היחס >.

אילו אין ב-B איברים ראשון ואחרון,

לכל $m \in \mathbb{Z}$, נסמן b_m הקטע במקום m בסדר זה, כך ש b_0 במקום ה-0. הפונקציה המתאימה לכל $m \in \mathbb{Z}$ את הקטע במקום m בB, היא כמובן חח"ע (אם $m, n \in \mathbb{Z}$ איברים שונים, יותאמו להם קבוצות שונות) ועל (לכל קטע X ב-B קיים $m \in \mathbb{Z}$: $X = b_m$)

לכן הקבוצה B שקולה ל$\mathbb{Z}$. לפי עמוד 186, $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, לכן לפי טרנזיטיביות $B \sim N$ ו$|B| = \aleph_0$

אילו קיים ב-B איבר ראשון או איבר אחרון (אם שניהם קיימים – B סופית), אז ההוכחה דואלית, כאשר b_0 הוא איבר הקצה ומתאימים כל איבר ל$\mathbb{N}$ על פי הסדר שהגדרנו, או היפוכו.

לכן $B \sim \mathbb{N}$, כלומר $|B| = \aleph_0$

הוכחנו כי בכל מקרה $|B| \leq \aleph_0 = |A|$.

ב. קיימים $\mathbf{I}, \mathbf{J} \in \boldsymbol{C}$, כך ש $|\mathbb{R}| = |\boldsymbol{I} \cap \boldsymbol{J}|$

נניח בשלילה כי לכל $I, J \in C$, $|\mathbb{R}| \neq |I \cap J|$, כלומר $\mathbb{R} \nsim (I \cap J)$.

לכן, $I \cap J$ אינו קטע ממשיים בלתי-מנוון, כי לפי עמוד 193 כל קטע בלתי-מנוון שקול ל-$\mathbb{R}$.

אבל I, J הם קטעים בלתי-מנוונים פתוחים, ולכן על מנת שחיתוכם לא יהיה קטע בלתי-מנוון, הקטעים חייבים להיות זרים! אחרת, יש להם קטע משותף, והוא קטע מנוון בסתירה לטענה הקודמת בהוכחה.

לכן לכל $I, J \in C$, $I \cap J = \phi$. כלומר – הקבוצה C עונה על כל התנאים שהוגדרו עבור קבוצה B.

לכן לפי סעיף א, $|C| \leq |A| = \aleph_0$, בסתירה להנחה כי C אינה בת מנייה!