מטלת מנחה 13 - אינפי 1

שאלה 1

תהי הסדרה (a_n) כך ש $a_1 = 0$ ולכל $n > 1$ טבעי $a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)}$

א. טענה: לכל n טבעי קיים המספר a_n.

נוכיח טענה חזקה יותר: לכל n טבעי קיים המספר a_n וגם $a_n < \frac{1}{2}$.

הוכחה: נוכיח טענה זו באינדוקציה.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור $n = 1$ נתון $a_1 = 0 < \frac{1}{2}$ והטענה מתקיימת.

<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n + 1$.

מהנחת האינדוקציה $a_n < \frac{1}{2}$ ובפרט $a_n \neq 1$, ולכן $1 - a_n \neq 0 \Leftarrow 4(1 - a_n) \neq 0$.

לכן, המנה $\frac{1}{4(1-a_n)}$ מוגדרת היטב ויש מספר המתאים ל a_{n+1}.

מהנחת האינדוקציה ו $a_n < \frac{1}{2}$, ולכן $1 - a_n > 1 - \frac{1}{2} \Leftarrow 4(1 - a_n) > 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

מכך נסיק, מאחר ו$4(1 - a_n) \neq 0$, ש $a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)} < \frac{1}{2}$ וסיימנו.

ב. טענה: (a_n) מונוטונית עולה

הוכחה: נוכיח טענה זו באינדוקציה.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור $n = 1$, $a_1 = 0 \leq \frac{1}{4} = \frac{1}{4(1-0)} = \frac{1}{4(1-a_1)} = a_2$ וסיימנו.

<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח $a_n \leq a_{n+1}$.

אז $1 - a_n \geq 1 - a_{n+1} \Leftarrow 4(1 - a_n) \geq 4(1 - a_{n+1})$.

מסעיף א' $a_{n+1} < \frac{1}{2} \Leftarrow 1 - a_n \geq 1 - a_{n+1} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$,

לכן $4(1 - a_n) \geq 4(1 - a_{n+1}) > 0 \Leftarrow a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)} \leq \frac{1}{4(1-a_{n+1})} = a_{n+2}$ וסיימנו.

טענה: (a_n) מתכנסת

הוכחה: לפי סעיף א', לכל n טבעי מתקיים $a_n < \frac{1}{2}$ ולכן $\frac{1}{2}$ חסם מלעיל של הסדרה.

לפי סעיף ב' (a_n) מונוטונית עולה ולכן $a_1 = 0$ חסם מלרע של הסדרה.

לכן (a_n) חסומה, ומאחר והיא מונוטונית עולה, לפי 3.16 (a_n) מתכנסת וסיימנו.

טענה: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

הוכחה: מהטענה הקודמת (a_n) מתכנסת ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

הסדרה (a_{n+1}) היא הזזה של (a_n) ולכן לפי 2.29 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$

מכלל הרקורסיה $a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)}$, ולכן מיחידות הגבול $L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(1-a_n)}$

מאריתמטיקה, כאשר ידוע שהגבול L הוא ממשי ולכן בוודאות גבול המכנה אינו 0,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(1-a_n)} = \frac{1}{4(1-L)} = L$$

לכן, $4L(1-L) = 4L - 4L^2 = 1 \Leftarrow 4L^2 - 4L + 1 = 0$.

קיבלנו משוואה ריבועית עם L, ונפתור אותה:

$$L = \frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4} = \frac{4\pm\sqrt{0}}{8} = \frac{1}{2}$$

וסיימנו.

שאלה 2

על מנת להסביר מדוע סדרה אינה מתכנסת, גם לא במובן הרחב, נוכיח כי לסדרה שני גבולות חלקיים שונים ע"י חישובם. אילו הסדרה מתכנסת (או מתכנסת במובן הרחב), אז שתי תתי-הסדרות שלה, שאת גבולותיהן חישבנו, צריכות להתכנס לפי משפט 3.25 לאותו גבול בסתירה לחישוב שנבצע. לכן, קיום שני גבולות חלקיים שונים (או שני גבולות חלקיים במובן הרחב) מצביע על אי-קיום גבול (ואי-קיום גבול במובן הרחב).

א. טענה: הסדרה $a_n = \frac{(-5)^n+2(-2)^n+3}{5^{n+1}+2(-3)^n+3}$ מתבדרת במובן הרחב, וגבולותיה החלקיים הם $\pm\frac{1}{5}$.

הוכחה: נחשב:

$$a_n = \frac{(-5)^n+2(-2)^n+3}{5^{n+1}+2(-3)^n+3} = \frac{(-5)^n}{5^n}\cdot\frac{1+2(\frac{-2}{-5})^n+3\cdot(\frac{-1}{5})^n}{5+2(\frac{-3}{5})^n+3(\frac{1}{5})^n} = (-1)^n\cdot\frac{1+2(\frac{2}{5})^n+3(\frac{-1}{5})^n}{5+2(\frac{-3}{5})^n+3(\frac{1}{5})^n}$$

נתבונן בשתי תתי-הסדרות $(a_{2n}), (a_{2n+1})$, המכסות את הסדרה החל מ$n \geq 2$:

עבור (a_{2n}), לפי 2.33 + אריתמטיקה של גבולות עבור המנה $5+2\cdot 0+3\cdot 0 = 5 \neq 0$:

$$a_{2n} = (-1)^{2n}\cdot\frac{1+2(\frac{2}{5})^{2n}+3(\frac{-1}{5})^{2n}}{5+2(\frac{-3}{5})^{2n}+3(\frac{1}{5})^{2n}} = 1\cdot\frac{1+2((\frac{2}{5})^2)^n+3((\frac{-1}{5})^2)^n}{5+2((\frac{-3}{5})^2)^n+3((\frac{1}{5})^2)^n} =$$
$$= \frac{1+2(\frac{4}{25})^n+3(\frac{1}{25})^n}{5+2(\frac{9}{25})^n+3(\frac{1}{25})^n}\to_{n\to\infty}\frac{1+2\cdot0+3\cdot0}{5+2\cdot0+3\cdot0} = \frac{1}{5}$$

עבור (a_{2n+1}), לפי 2.33 + אריתמטיקה עבור המנה $5-\frac{6}{5}\cdot 0+\frac{3}{5}\cdot 0 = 5 \neq 0$:

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}\cdot\frac{1+2(\frac{2}{5})^{2n+1}+3(\frac{-1}{5})^{2n+1}}{5+2(\frac{-3}{5})^{2n+1}+3(\frac{1}{5})^{2n+1}} =-1\cdot\frac{1+\frac{4}{5}((\frac{2}{5})^2)^n-\frac{3}{5}((\frac{-1}{5})^2)^n}{5-\frac{6}{5}((\frac{-3}{5})^2)^n+\frac{3}{5}((\frac{1}{5})^2)^n} =$$
$$=-1\cdot\frac{1+\frac{4}{5}(\frac{4}{25})^n-\frac{3}{5}(\frac{1}{25})^n}{5-\frac{6}{5}(\frac{9}{25})^n+\frac{3}{5}(\frac{1}{25})^n}\to_{n\to\infty}-1\cdot\frac{1+\frac{4}{5}\cdot0-\frac{3}{5}\cdot0}{5-\frac{6}{5}\cdot0+\frac{3}{5}\cdot0} =-\frac{1}{5}$$

כעת, משהוכחנו קיומם של שני גבולות חלקיים שונים, נסיק ש (a_n) אינה מתכנסת.

לפי 3.30+3.31, גבולותיהם של הסדרות המכסות את הסדרה הם כל הגבולות החלקיים של הסדרה. אי לכך, כל גבולותיה החלקיים של (a_n) הם $\pm\frac{1}{5}$.

ב.טענה: $\lim_{n\to\infty}\frac{(-5)^n+2(-3)^n+3}{(-4)^n+2(-2)^n+3} = \infty$

הוכחה: נסמן $a_n = \frac{(-5)^n+2(-3)^n+3}{(-4)^n+2(-2)^n+3}$ ונחשב:

$$a_n = \frac{(-5)^n+2(-3)^n+3}{(-4)^n+2(-2)^n+3} = \frac{(-5)^n}{(-4)^n}\cdot\frac{1+2(\frac{-3}{-5})^n+3(\frac{-1}{5})^n}{1+2(\frac{-2}{-4})^n+3(\frac{-1}{4})^n} = (\frac{5}{4})^n\cdot\frac{1+2(\frac{3}{5})^n+3(\frac{-1}{5})^n}{5+2(\frac{1}{2})^n+3(\frac{-1}{4})^n}$$

נשים לב כי לפי שאלה 2.41 בספר עבור $k = \frac{5}{4} > 1$, מתקיים $(\frac{5}{4})^n\to_{n\to\infty}\infty$

בהינתן מסקנה זו, נחשב את גבול הסדרה לפי אריתמטיקה של גבולות (המנה $5+2\cdot0+3\cdot0 = 5 \neq 0$ אינה מתכנסת לאפס) + 2.33 + 2.43:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{5}{4})^n\cdot\frac{1+2(\frac{3}{5})^n+3(\frac{-1}{5})^n}{5+2(\frac{1}{2})^n+3(\frac{-1}{4})^n} = "\infty"\cdot\frac{1+2\cdot0+3\cdot0}{5+2\cdot0+3\cdot0} = "\infty"\cdot\frac{1}{5} = \infty$$

ג. טענה: הסדרה $a_n = (\frac{1}{n} - 1)^n$ מתבדרת במובן הרחב וגבולותיה החלקיים הם $\pm\frac{1}{e}$.

הוכחה: נחשב:

$$a_n = (\frac{1}{n} - 1)^n = (-(1 - \frac{1}{n}))^n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})^n$$

נתבונן בשתי תתי-הסדרות $(a_{2n}), (a_{2n+1})$, המכסות את הסדרה החל מ $n \geq 2$:

$$a_{2n} = (-1)^{2n}(1 - \frac{1}{2n})^{2n} = 1 \cdot (1 - \frac{1}{2n})^{2n} = (1 - \frac{1}{2n})^{2n}$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}(1 - \frac{1}{2n+1})^{2n+1} =- 1 \cdot (1 - \frac{1}{2n+1})^{2n+1} =- (1 - \frac{1}{2n+1})^{2n+1}$$

נשים לב ששני הטורים $((1 - \frac{1}{2n})^{2n}), ((1 - \frac{1}{2n+1})^{2n+1})$ הם תתי-סדרות של הטור $((1 - \frac{1}{n})^n)$ שלפי שאלה 3.66 מתכנס ל$\frac{1}{e}$.

לכן, לפי משפט 3.25, גם טורים אלה מתכנסים ל$\frac{1}{e}$, ולכן $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2n})^{2n} = \frac{1}{e}$

נוסף על כך, לפי אריתמטיקה, $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} -(1 - \frac{1}{2n+1})^{2n+1} =- 1 \cdot \frac{1}{e} =- \frac{1}{e}$.

כעת, משהוכחנו קיומם של שני גבולות חלקיים שונים, נסיק ש (a_n) אינה מתכנסת.

לפי 3.30+3.31, גבולותיהם של הסדרות המכסות את הסדרה הם כל הגבולות החלקיים של הסדרה. אי לכך, כל גבולותיה החלקיים של (a_n) הם $\pm\frac{1}{e}$.

ד. תהי (a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים.

טענה: הסדרה $b_n = ((1 + \frac{1}{a_n})^{a_n})$ מתכנסת ל e.

טענת עזר: קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > 0$.

הוכחת טענת העזר: נניח בשלילה שלכל N קיים $n > N$ כך ש $a_n \leq 0$.

מאחר והסדרה עולה ממש, מתקיים $a_N < a_{N+1} <...< a_n \leq 0$,

ובפרט לפי טרנזיטיביות $a_N < 0$ לכל N טבעי. לכן, 0 חסם מלעיל של הסדרה (a_n).

כמו כן, מאחר והסדרה עולה ממש, a_1 חסם מלרע של הסדרה והסדרה חסומה.

לפי 3.16, הסדרה עולה ממש וחסומה ולכן מתכנסת. מאחר וסדרה מתכנסת היא סדרת קושי, אז על פי תנאי קושי עבור $\epsilon = 1$ קיים N טבעי כך שלכל $n, m > N$,

ובפרט עבור $n = m + 1 > m > N$, מתקיים $|a_{m+1} - a_m| = a_{m+1} - a_m < 1$ (ניתן להשמיט את הערך המוחלט משום ש a_n עולה ממש ולכן $a_{m+1} > a_m$).

מאחר ו a_n סדרה עולה של מספרים שלמים, $a_{m+1} \geq a_m + 1$ ולכן $a_{m+1} - a_m \geq 1$.

סתירה! לא ייתכן שבו-בזמן $a_{m+1} - a_m$ יהיה קטן-ממש מאחד וגם גדול או שווה לו!

הוכחת הטענה: מטענת העזר נסיק כי קיימת סדרה עולה-ממש של מספרים <u>טבעיים</u> (a_{N+n}) שהיא הזזה של (a_n). לכן הטור $b_{N+n} = (1 + \frac{1}{a_{N+n}})^{a_{N+n}}$ הוא תת-סדרה של הטור $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$,

שלפי דוגמה 3.5 בספר מתכנס לקבוע e. לפי 3.25 עבור תת-הסדרה b_{N+n}, $\lim_{n\to\infty} b_{N+n} = e$.

לפי משפט 2.29 עבור ההזזה b_{N+n} של הטור המקורי b_n, נסיק $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{N+n} = e$

וסיימנו.

שאלה 3

תהי $a_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

א. טענה: הסדרה (a_n) חסומה.

הוכחה: לפי 1.64 (תכונות החלק השלם), לכל n טבעי מתקיים:

$\lfloor\sqrt{n}\rfloor \le \sqrt{n} < \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$. נוריד משני האגפים $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, אז $0 \le \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < 1$

לסדרה חסם מלרע - 0, וחסם מלעיל - 1, ולכן היא חסומה.

ב. טענה: 0 הוא גבול חלקי של (a_n)

הוכחה: נתבונן בתת-הסדרה (a_{n^2}). לכל n טבעי, מהגדרת החלק השלם, $\lfloor n\rfloor = n$, וכן:

$$a_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor\sqrt{n^2}\rfloor = n - \lfloor n\rfloor = n - n = 0 \to_{n\to 0} 0$$

מאחר וקיימת תת-סדרה של (a_n) שגבולה הוא 0,

אז מהגדרת הגבול החלקי 0 הוא גבול חלקי של הסדרה.

טענה: $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$

הוכחה: יהי L גבול חלקי של הסדרה (a_n).

לכן קיימת סדרת אינדקסים מוגדרת היטב (n_k) כך ש $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$.

מאחר ו-0 חסם תחתון של הסדרה, לכל n טבעי מתקיים $a_n \ge 0$.

בפרט, לכל k טבעי מתקיים $a_{n_k} \ge 0$, ולכן ממשפט 2.31 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \ge 0 \Leftarrow L \ge 0$ וסיימנו.

ג. טענה: $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \min\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = 0$

הוכחה: ראשית, נוכיח כי 0 איבר של הסדרה. אכן, $a_1 = \sqrt{1} - \lfloor\sqrt{1}\rfloor = 1 - 1 = 0$.

מסעיף א', 0 חסם תחתון של הסדרה, ועל כן לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \ge 0$.

לכן, נסיק $\min\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = 0$ ולפי 3.13, $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \min\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = 0$

ד. טענה: לכל n טבעי, $\sqrt{n^2 - 1} - \lfloor\sqrt{n^2 - 1}\rfloor = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$

הוכחה: נוכיח כי $\lfloor\sqrt{n^2 - 1}\rfloor = n - 1$

נשתמש בהגדרה המפורשת: $\lfloor\sqrt{n^2 - 1}\rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \le \sqrt{n^2 + 1}\}$

ראשית נוכיח כי המספר השלם $n - 1$ הינו קטן או שווה ל$\sqrt{n^2 - 1}$:

לכל n טבעי, $n \ge 1$ ולכן $-2n \le -2$ ו $-2n + 1 \le -1$.

נוסיף לאי-השוויון את ריבוע המספר n ונקבל $(n - 1)^2 = n^2 - 2n - 1 \le n^2 - 1$

שני האגפים הם אי-שליליים, משום ש $n^2 \ge 1$ ולכן $n^2 - 1 \ge 0$,

וכמו כן $n - 1 \ge 0 \Leftarrow (n - 1)^2 \ge 0$.

לכן, נוציא שורש מאי-השוויון ונקבל $n - 1 \le \sqrt{n^2 - 1}$ כנדרש.

כעת, נוכיח כי איבר זה הוא המקסימלי בקבוצה.

נניח בשלילה כי קיים $N > n - 1$ טבעי המקיים $N < \sqrt{n^2 - 1}$.

אז בהכרח $N \geq n$ ולפי טרנזיטיביות $n < \sqrt{n^2 - 1}$.

נעלה בריבוע (שני האגפים אי-שליליים) ונקבל $n^2 < n^2 - 1$, כלומר $0 > -1$.

סתירה! בזאת הסתיימה ההוכחה שלנו.

כעת נסיק: $\sqrt{n^2 - 1} - \lfloor\sqrt{n^2 - 1}\rfloor = \sqrt{n^2 - 1} - (n - 1) = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$ וסיימנו.

ה. טענה: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - 1} - n + 1 = 1$.

הוכחה: נסמן $b_n = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1$ ונחשב:

$$b_n = \sqrt{n^2 - 1} - n + 1 = (\sqrt{n^2 - 1} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2-1}+n}{\sqrt{n^2-1}+n} + 1 = \frac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} + 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n}$$

נסמן: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $c_n = 1$. ברור כי $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$,

וכן לפי אריתמטיקה של גבולות + 2.10 מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 - 0 = 1$.

כמו כן, לכל n טבעי:

(1) כאמור מקודם, הביטוי $\sqrt{n^2 - 1}$ הינו אי-שלילי ולכן $n \geq n + \sqrt{n^2 - 1}$.
לכן, $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} \leq \frac{1}{n}$ ולכן $1 - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} \geq 1 - \frac{1}{n} \Leftarrow b_n \geq a_n$.

(2) לפי טרנזיטיביות, $0 < n \leq n + \sqrt{n^2 - 1} \Leftarrow 0 < n + \sqrt{n^2 - 1}$.
לכן, $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} > 0$ מנה של שני מספרים חיוביים.
ולכן $1 - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} < 1 \Leftarrow b_n < c_n$.

לכן, לפי משפט הסנדוויץ', $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$ וסיימנו.

ו. טענה: 1 הוא גבול חלקי של (a_n).

הוכחה: נתבונן בתת הסדרה $(a_{(n+1)^2-1}) = (a_{n^2+2n})$.

נחשב:

$$a_{(n+1)^2-1} = \sqrt{(n + 1)^2 - 1} - \lfloor\sqrt{(n + 1)^2 - 1}\rfloor$$

נשים לב שטור זה הוא <u>הזזה</u> של הטור $(\sqrt{n^2 - 1} - \lfloor\sqrt{n^2 - 1}\rfloor)$.

אכן:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n^2+2n} =_{(1)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - 1} - \lfloor\sqrt{n^2 - 1}\rfloor =_{(2)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - 1} - n + 1 =_{(3)} 1$$

(1) לפי משפט 2.29, גבול של סדרה נשמר בהזזה
(2) שוויון הסדרות לפי סעיף ד', שוויון הגבולות נשמר מיחידות הגבול.
(3) לפי סעיף ה'

מצאנו כנדרש תת-סדרה של (a_n) שגבולה הוא אינסוף, ובכך סיימנו.

ז. טענה: $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$

הוכחה: יהי L גבול חלקי של (a_n)

לכן קיימת סדרת אינדקסים מוגדרת היטב (n_k) כך ש $L = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.

לפי סעיף א', לכל n טבעי מתקיים $a_n \le 1$, ובפרט לכל k טבעי מתקיים $a_{n_k} \le 1$.

לכן לפי 2.31, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \le 1 \Leftarrow L \le 1$ וסיימנו.

ח. טענה: $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$

הוכחה: מסעיף א' נובע כי 1 הוא חסם עליון של הקבוצה.

בסעיף ו' הוכחנו כי 1 הוא גבול חלקי של הסדרה (a_n),

שכל איבריה כמובן מוכלים בקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

לכן משאלה 3.9, $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$ וסיימנו.

טענה: לא קיים מקסימום לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים N טבעי כך ש $a_N = \max\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

אז לפי 3.8 והטענה הקודמת, $a_N = \max\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$

אבל לפי סעיף א' לכל n טבעי ובפרט עבור N מתקיים $a_n < 1$!

סתירה! לא ייתכן כי $a_N < 1$ וגם $a_N = 1$ בו זמנית.