מטלת מנחה 13 - הסתברות למדמ"ח

שאלה 1

השאלה עוסקת בוקטור משתנים מקריים $(X_1,\ X_2)\ \sim\ Mult(21,\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$, כאשר X_1 ו-X_2 מייצגים תוצאות שונות ומשלימות של ניסוי ברנולי שבוצע 21 פעמים. מסיבה זו, מתקיים גם $X_2\ =\ 21\ -\ X_1$.

א. חישוב מקדם המתאם:

ע"פ תכונת השונות המשותפת (טענה 3), מתקיים $Cov(X_1, X_2)\ =-\ 21\ \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} =-\frac{14}{3}$.

על מנת לחשב את השונות של כל אחד מהמשתנים, ניזכר בהתפלגות השולית שלהם:

מתקיים $X_1\ \sim\ Bin(21,\ \frac{1}{3})$, $X_2\ \sim\ Bin(21,\ \frac{2}{3})$, ולכן $Var(X_1)\ =\ Var(X_2)\ =\ 21\ \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$.

ומקבלים:

$$\rho(X_1,\ X_2)\ =\frac{-\frac{14}{3}}{\sqrt{\frac{14}{3}\cdot\frac{14}{3}}} =-\ 1$$

מגדירים גם משתנים מקריים $Y_1\ =\ (-\ 1)^{X_1}$, $Y_2\ =\ (-\ 1)^{X_2}$.

ב. חישוב השונות המשותפת:

ראשית,

$$E[(-\ 1)^{X_1}]\ =\sum_{i=0}^{21}(-\ 1)^i\cdot\ P(X_1\ =\ i)\ =\sum_{i=0}^{21}(-\ 1)^i\cdot\binom{21}{i}\cdot\ (\frac{1}{3})^i\cdot\ (\frac{2}{3})^{21-i}\ =$$

$$=\sum_{i=0}^{21}\binom{21}{i}\cdot\ (-\frac{1}{3})^i\cdot\ (\frac{2}{3})^{21-i} =\ (-\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3})^{21} =\frac{1}{3^{21}}$$

$$E[(-\ 1)^{X_2}]\ =\sum_{i=0}^{21}(-\ 1)^i\cdot\binom{21}{i}\cdot\ (\frac{2}{3})^i\cdot\ (\frac{1}{3})^{21-i} =\sum_{i=0}^{21}\binom{21}{i}\cdot\ (-\ \frac{2}{3})^i\cdot\ (\frac{1}{3})^{21-i}\ =$$

$$=\ (-\ \frac{2}{3}+\frac{1}{3})^{21} =-\ \frac{1}{3^{21}}$$

$$Cov((-\ 1)^{X_1},\ (-\ 1)^{X_2})\ =\ E[(-\ 1)^{X_1}\cdot\ (-\ 1)^{X_2}]\ -\ E[(-\ 1)^{X_1}]\ \cdot\ E[(-\ 1)^{X_2}]\ =$$

$$=\ E[(-\ 1)^{21}]\ -\ E[(-\ 1)^{X_1}]\ \cdot\ E[(-\ 1)^{X_2}] =-\ 1\ -\frac{1}{3^{21}}(-\ \frac{1}{3^{21}})\ =$$

$$=-\ 1\ +\frac{1}{3^{42}}\approx-\ 1$$

ג. חישוב מקדם המתאם

נחשב את השונות של $Y_1,\ Y_2$:

$$Var(Y_1)\ =\ E[{Y_1}^2]\ -\ E[Y_1]^2 =\ E[(-\ 1)^{2X_1}]\ -\ E[(-\ 1)^{X_1}]^2\ =$$

$$=\ E[1]\ -\ (\frac{1}{3^{21}})^2 =\ 1\ -\frac{1}{3^{42}}\approx\ 1$$

באופן דומה, $Var(Y_2)\ =\ 1\ -\ \frac{1}{3^{42}}$ ומקבלים $\rho(Y_1,\ Y_2)\ =\frac{-1+\frac{1}{3^{42}}}{1-\frac{1}{3^{42}}} =-\ 1$.

שאלה 2

השאלה עוסקת בניסוי צביעת שלושה קלפים ב-6 צבעים אפשריים, באופן אקראי ועם החזרה.
הוגדרו המשתנים המקריים:

- $X \sim Bin(3, \frac{1}{6})$ מייצג את מספר הקלפים שנצבעו באדום. ברור כי טווח ערכיו הוא $\{0, 1, 2, 3\}$.
- Y מייצג את מספר הצבעים שהשתמשו בהם. טווח ערכיו יהיה $\{1, 2, 3\}$.

א. נבנה את טבלת ההתפלגות המשותפת

X\Y	1	2	3	שולית X
0	$\frac{5}{216}$	$\frac{60}{216}$	$\frac{60}{216}$	$\frac{125}{216}$
1	0	$\frac{15}{216}$	$\frac{60}{216}$	$\frac{75}{216}$
2	0	$\frac{15}{216}$	0	$\frac{15}{216}$
3	$\frac{1}{216}$	0	0	$\frac{1}{216}$
שולית Y	$\frac{6}{216}$	$\frac{90}{216}$	$\frac{120}{216}$	

הסברים למילוי הטבלה:

1. נשלים את הערכים בהתפלגות השולית של X ע"י ההצבה בנוסחה.
2. נמלא ערכי 0:
   - בהינתן שהשתמשנו בצבע יחיד, ההסתברות לקבל $X = 1$ או $X = 2$ היא 0. (או שכל הקלפים אדומים, או שאף אחד מהם).
     לכן $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 2, Y = 1) = 0$.
   - בהינתן שהשתמשנו ביותר מצבע אחד, ההסתברות לקבלת $X = 3$ היא אפס (אם $X = 3$, בהכרח השתמשנו בצבע יחיד). אם השתמשנו בשלושה צבעים שונים, ההסתברות לקבלת $X = 2$ היא אפס.
     לכן $P(X = 3, Y = 2) = P(X = 3, Y = 3) = P(X = 2, Y = 3) = 0$.
3. נחשב את ההתפלגות השולית של Y:

$$P(Y = 1) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{6}{216}$$

$$P(Y = 3) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{120}{216}$$

$$P(Y = 2) = 1 - P(Y = 1, 3) = \frac{90}{216}$$

4. נחשב את ההסתברות:

$$P(X = 0, Y = 3) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{60}{216}$$

5. נשלים ועמודות בטבלה בעזרת ההסתברות השולית:
   - השורה $X = 3$: סכום ערכי השורה שווה להסתברות השולית לכן $P(X = 3, Y = 1) + 0 + 0 = \frac{1}{216}$.
   - השורה $X = 2$: באופן דומה, $P(X = 2, Y = 2) = \frac{15}{216}$

- העמודה $Y\ =\ 1$: סכום ערכי העמודה שווה להסתברות השולית, לכן $P(X\ =\ 0, Y\ =\ 1)\ =\ \frac{5}{216}$.
- השורה $X\ =\ 0$: מקבלים $P(X\ =\ 0, Y\ =\ 2)\ =\ \frac{60}{216}$
- העמודות $Y\ =\ 2, Y\ =\ 3$: מקבלים $P(X\ =\ 1, Y\ =\ 2)\ =\ \frac{15}{216}$, $P(X\ =\ 1, Y\ =\ 3)\ =\ \frac{60}{216}$.

ב. נחשב את התוחלת והשונות של $Z\ =\ 6\ -\ Y$:

$$E[Y]\ =\ 1\ \cdot\frac{6}{216}\ +\ 2\ \cdot\frac{90}{216}\ +\ 3\ \cdot\frac{120}{216} = \frac{91}{36} =\ 2.528$$

ולכן $E[6\ -\ Y]\ =\ 6\ -\ 2.528\ =\ 3.472$.

$$E[Y^2] = 1^2\cdot\frac{6}{216} + 2^2\cdot\frac{90}{216} + 3^2\cdot\frac{120}{216} = \frac{241}{36} =\ 6.694$$

מקבלים $Var(Y)\ =\ E[Y^2]\ -\ E[Y]^2 =\ 6.694\ -\ 2.528^2\ =\ 0.305$,

ולכן $Var(6\ -\ Y)\ =\ (-\ 1)^2 Var(Y)\ =\ 0.305$.

ג. נחשב:

$$P(2^Y\ =\ i\ |\ X\ =\ 0)\ =\frac{P(Y=\log_2 i, X=0)}{P(X=0)}$$

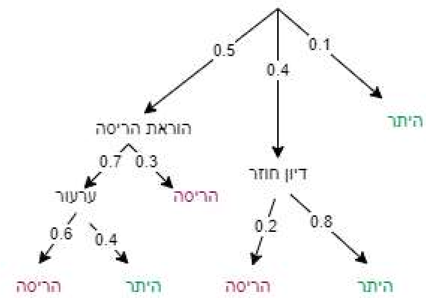
עבור $i\ =\ 2$ נקבל $\log_2 i\ =\ 1$ ולכן $\frac{P(Y=\log_2 i, X=0)}{P(X=0)} = \frac{\frac{5}{216}}{\frac{125}{216}} =\ 0.04$.

עבור $i\ =\ 4, 8$ נקבל $\log_2 i\ =\ 2, 3$ ולכן $\frac{P(Y=\log_2 i, X=0)}{P(X=0)} = \frac{\frac{60}{216}}{\frac{125}{216}} =\ 0.48$

לסיכום:

$$P(2^Y = i|X = 0) = \begin{cases} 0.04 & i = 2 \\ 0.48 & i = 4, 8 \\ 0 & else \end{cases}$$

שאלה 3



א. נחשב את ההסתברות לקבלת היתר לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(approved) = 0.1 + 0.4 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.4 = 0.56$$

ההסתברות לקבלת היתר בדיון הראשון היא 0.1, לקבלת היתר לאחר הדיון הראשון היא 0.46, וההסתברות לא לקבל היתר היא 0.44.

הועדה דנה באופן בלתי תלוי ב-20 מבנים בלתי-חוקיים בעיר.

נגדיר משתנה מקרי $W \sim NB(2,\ 0.1)$ המייצג את מספרו הסידורי של המבנה שהועדה תדון בעניינו ויהיה השני שיקבל היתר עוד בדיון הראשון.

ב. נחשב:

$$P(W = 15) = \binom{14}{1} \cdot 0.9^{13} \cdot 0.1^{2} = 0.036$$

נגדיר וקטור משתנים מקריים $(X, Y, Z) \sim Mult(20,\ (0,1,\ 0.46, 0.44))$ כך ש:

- המשתנה X מייצג את מספר המבנים שקיבלו היתר בדיון הראשון
- המשתנה Y מייצג את מספר המבנים שקיבלו היתר לאחר הדיון הראשון
- המשתנה Z מייצג את מספר המבנים שלא קיבלו היתר.

ג. נחשב:

$$P(X = 3 \mid X + Y = 14) = \frac{P(X=3, Y=11, Z=6)}{P(X+Y=14)}$$

$$P(X = 3, Y = 11, Z = 6) = \binom{20}{3,11,6} \cdot 0.1^{3} \cdot 0.46^{11} \cdot 0.44^{6}$$

$$P(X + Y = 14) = \binom{20}{14} \cdot 0.56^{14} \cdot 0.44^{6}$$

ומקבלים $P(X = 3 \mid X + Y = 14) = \frac{0.0199}{0.364} = 0.055$.

ד. צריך לחשב את $P(Y = i \mid X = 3)$.

$$P(Y = i \mid X = 3) = \frac{P(X=3, Y=i, Z=17-i)}{P(X=3)}$$

$$P(X = 3, Y = i, Z = 17 - i) = \binom{20}{3,i,17-i} \cdot 0.1^{3} \cdot 0.46^{i} \cdot 0.44^{17-i}$$

$$P(X = 3) = \binom{20}{3} \cdot 0.1^{3} \cdot 0.9^{17}$$

$$P(Y = i \mid X = 3) = \left(\frac{20!}{3! \cdot i! \cdot (17-i)!} \cdot 0.1^{3} \cdot 0.46^{i} \cdot 0.44^{17-i}\right) \div \left(\frac{20!}{3!17!} \cdot 0.1^{3} \cdot 0.9^{17}\right) =$$

$$= \frac{17!}{i! \cdot (17-i)!} \cdot \left(\frac{0.46}{0.9}\right)^{i} \cdot \left(\frac{0.44}{0.9}\right)^{i} = \binom{17}{i} \cdot \left(\frac{23}{45}\right)^{i} \cdot \left(\frac{22}{45}\right)^{17-i}$$

ומקבלים $Y \mid X = 3 \sim Bin(17,\ \frac{23}{45})$.

שאלה 4

השאלה עוסקת בפרסומות המשודרות בטלוויזיה בתהליך פואוסוני. נגדיר, בסימוני השאלה:

- $X \sim Po(3)$ מספר הפרסומות המשודרות בין 20:00 ל 21:00.
- $Y \sim Po(\frac{1}{2} \cdot 3)$ מספר הפרסומות המשודרות בין 20:00 ל 20:30.
- משתנה עזר $Y' \sim Po(\frac{1}{2} \cdot 3)$ המייצג את מספר הפרסומות המשודרות בין 20:30 ל 21:00.
- $Z \sim Po(\frac{1}{4} \cdot 3)$ מספר הפרסומות ששודרו באותו יום בין 20:00-20:15.
- משתנה עזר $Z' \sim Po(\frac{3}{4} \cdot 3)$ המייצג את מספר הפרסומות המשודרות בין 20:15 ל 21:00.

א. נחשב:

$$P(X \le 3 \mid X \ge 1) = \frac{P(1 \le X \le 3)}{P(X \ge 1)} = \frac{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)}{1-P(X=0)}.$$

כאשר:

$$P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$
$$= e^{-3} \cdot \frac{3^1}{1!} + e^{-3} \cdot \frac{3^2}{2!} + e^{-3} \cdot \frac{3^3}{3!} = e^{-3} \cdot 12 = 0.597$$
$$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!} = 0.950$$

ולכן $P(X \le 3 \mid X \ge 1) = 0.629$

ב. נחשב:

$$P(Y = 3 \mid X \ge 1) = \frac{P(Y=3, X\ge1)}{P(X\ge1)} = \frac{P(X\ge1 \mid Y=3)\cdot P(Y=3)}{P(X\ge1)} = \frac{1\cdot e^{-1.5}\cdot\frac{1.5^3}{3!}}{0.950} = 0.132$$

ג. נחשב את $E[Z \mid X = 5]$ **ואת** $Var[Z \mid X = 5]$:

לשם כך, נחשב את פונקציית ההסתברות:

$$P(Z = i \mid X = 5) = \frac{P(Z=i, X=5)}{P(X=5)} = \frac{P(Z=i, Z'=5-i)}{P(X=5)}$$

המשתנים Z, Z' מתייחסים לקטעים זרים ולכן בלתי-תלויים על פי ההנחות של המשתנה הפואסוני. אי-לכך:

$$P(Z = i, Z' = 5 - i) = P(Z = i) \cdot P(Z' = 5 - i) =$$
$$= e^{-0.75} \cdot \frac{0.75^i}{i!} \cdot e^{-2.25} \cdot \frac{2.25^{5-i}}{5-i!} = e^{-3} \cdot \frac{1}{i!(5-i)!} \cdot 0.75^i \cdot 2.25^{5-i}$$

ולכן

$$P(Z = i \mid X = 5) = (e^{-3} \cdot \frac{1}{i!(5-i)!} \cdot 0.75^i \cdot 2.25^{5-i}) \div (e^{-3} \cdot \frac{3^5}{5!}) =$$
$$= \frac{5!}{i!(5-i)!} \cdot (\frac{0.75}{3})^i \cdot (\frac{2.25}{3})^{5-i} = \binom{5}{i} \cdot 0.25^i \cdot 0.75^{5-i}$$

נקבל $Z \mid X = 5 \sim Bin(5, 0.25)$.

לכן $E[Z \mid X = 5] = 5 \cdot 0.25 = 1.25$ ו $Var(Z \mid X = 5) = 5 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 0.9375$.