מטלת מנחה 13 - קורס 20417

שאלה 1

סעיף א להגשה - בסעיף זה נדרשנו להדגים את ריצת אלגוריתם ה FFT על פולינום שוקטור מקדמיו הוא הוקטור $(-1, -3, 2, 1)$ על שורש היחידה מסדר 4, $\omega = i$.

החישובים שיתבצעו:

Call $FFT((-1, -3, 2, 1), \omega = i)$

Call $FFT((-1, 2), \omega^2 = -1)$

Call $FFT((-1), \omega^4 = 1)$

Base case **return** (-1)

Call $FFT((2), \omega^4 = 1)$

Base case **return** (2)

Return $(-1 + 1 \cdot (2), -1 + (-1) \cdot 2) = (1, -3)$

Call $FFT((-3, 1), \omega^2 = -1)$

Call $FFT((-3), \omega^4 = 1)$

Base case **return** (-3)

Call $FFT((1), \omega^4 = 1)$

Base case **return** (1)

Return $(-3 + 1 \cdot 1, -3 - 1 \cdot 1) = (-2, -4)$

Return $(1 + 1 \cdot (-2), -3 + i \cdot (-4), 1 + (-1) \cdot (-2), -3 + (-i) \cdot (-4)$
$= (-1, -3 - 4i, 3, -3 + 4i)$.

שאלה 3

בשאלה מתואר אלגוריתם Strassen לכפל מטריצות ריבועיות A, B מסדר $n \times n$. אנחנו נדרשים להוכיח כי הוא מבצע $\theta(n^{\lg 7})$ פעולות בסיסיות בלבד. נסמן ב $T(n)$ את מספר הפעולות האלמנטריות שהאלגוריתם מבצע עבור מטריצות בגודל $n \times n$.

באלגוריתם, מחלקים את המטריצות לרבעים בגודל $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ בהתאמה, ומסמנים אותם a, b, c, d ו e, f, g, h, בהתאמה. לאחר מכן על מנת לחשב את $A \times B$ מבצעים:

1. **חישוב של מטריצות הסכום וההפרש:**
$$g - h,\ a + b,\ c + d,\ f - e,\ a + d,\ e + h,\ b - d, f + h,\ a - c,\ e + g$$
כל חישוב של מטריצת סכום/הפרש ידרוש $(\frac{n}{2})^2$ פעולות חיבור\חיסור אלמנטריות.
2. **חישוב של המטריצות** $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$
חישוב זה מתבצע ע"י 7 פעולות כפל של מטריצות מסדר $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$, וייקח סה"כ זמן של $7T(\frac{n}{2})$ פעולות אלמנטריות.
3. **חישוב איברי מטריצת הכפל.**
חישוב זה יתבצע ע"י בין פעולה אחת ל-3 פעולות חיבור\חיסור עבור כל איבר, בהתאם למיקומו, ובכל מקרה $\Theta(n^2)$ פעולות אלמנטריות.

נקבל כי $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$, כלומר קיימים קבועים c, d חיוביים עבורם לכל n טבעי:
$$7T(\frac{n}{2}) + cn^2 \le T(n) \le 7T(\frac{n}{2}) + dn^2.$$

נוכיח **בשיטת עץ הרקורסיה**:

ברמה ה-0 של הרקורסיה (הקריאה החיצונית) יתבצעו בין cn^2 ל dn^2 פעולות אלמנטריות.

ברמה ה-1, יתבצעו לכל הפחות $7 \cdot c(\frac{n}{2})^2 = \frac{7}{4}c \cdot n^2$ ולכל היותר $\frac{7}{4}d \cdot n^2$ פעולות אלמנטריות.

ברמה ה-2, יתבצעו לכל הפחות $7 \cdot 7 \cdot c(\frac{n}{4})^2 = \frac{49}{16}c \cdot n^2$ ולכל היותר $\frac{49}{16}d \cdot n^2$ פעולות.

ברמה ה-i, יתבצעו לכל הפחות $(\frac{7}{4})^i c \cdot n^2$ ולכל היותר $(\frac{7}{4})^i d \cdot n^2$ פעולות.

ובסך הכל, עבור לכל הפחות $\lg n$ רמות רקורסיה, נקבל לפי נוסחת הסכום לטור גיאומטרי:
$$T(n) \ge \sum_{i=0}^{\lg n - 1} (\frac{7}{4})^i c \cdot n^2 = cn^2 \cdot \sum_{i=0}^{\lg n - 1} (\frac{7}{4})^i = cn^2 \cdot \frac{1-(\frac{7}{4})^{\lg n}}{1-\frac{7}{4}} = \frac{4}{3}cn^2\left((\frac{7}{4})^{\lg n} - 1\right)$$

נשים לב כי $(\frac{7}{4})^{\lg n} = 7^{\log_7 n / \log_7 2} \div 2^{2\lg n} = n^{1/\log_7 2} \div n^2 = \frac{n^{\lg 7}}{n^2}$, ומקבלים:
$$T(n) \ge \frac{4}{3}cn^{\lg 7} - \frac{4}{3}cn^2 = \Omega(n^{\lg 7})$$

באופן דומה, עבור לכל היותר $\lg n + 1$ רמות רקורסיה, נקבל:
$$T(n) \le \sum_{i=0}^{\lg n} (\frac{7}{4})^i d \cdot n^2 = dn^2 \sum_{i=0}^{\lg n} (\frac{7}{4})^i = dn^2 \cdot \frac{1-(\frac{7}{4})^{\lg n+1}}{1-\frac{7}{4}} = \frac{4}{3}dn^2\left((\frac{7}{4})^{\lg n+1} - 1\right) =$$
$$\le \frac{4}{3}dn^2 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{n^{\lg 7}}{n^2} = \frac{7}{3}d \cdot n^{\lg 7} = O(n^{\lg 7})$$

ונקבל $T(n) = \Omega(n^{\lg 7})$.

שאלה 4

נשים לב כי ערכי הנגזרות מסדר 4 עד 0 (בסדר זה) אינם אלא 5 האיברים הראשונים בוקטור הקונבולוציה של הוקטורים $(4!\,a_4,\ 3!\,a_3,\ 2!\,a_2,\ 1!\,a_1,\ 0!\,a_0)$ ו- $(\frac{x_0^{\,0}}{0!},\ \frac{x_0^{\,1}}{1!},\ \frac{x_0^{\,2}}{2!},\ \frac{x_0^{\,3}}{3!},\ \frac{x_0^{\,4}}{4!})$.

נכליל: הנגזרות מסדר n עד 0 (בסדר זה) אינם אלא $n + 1$ האיברים הראשונים של:

$$(n!\cdot a_n,\ (n-1)!\cdot a_{n-1},\ldots,0!\cdot a_0) * (\frac{x_0^{\,0}}{0!},\ \frac{x_0^{\,1}}{1!},\ \ldots,\ \frac{x_0^{\,n}}{n!})$$

ניתן להפיק כל אחד משני הוקטורים בקונבולוציה זו בזמן לינארי, ואז להתייחס אליהם כמקדמים של פולינומים ממעלה n ולחשב את פולינום הכפל שלהם בעזרת אלגוריתם ה FFT. מקדמי הפולינום הם למעשה איברי וקטור הקונבולוציה, ו $n + 1$ ערכיו הראשונים הם אינם אלא ערכי הנגזרות הרצויים.
נקרא לוקטור הראשון A ולוקטור השני B בקונבולוציה זו.

על בסיס טענה זו, ניתן לבנות אלגוריתם יעיל לחישוב ערכי נגזרת בנקודה מסוימת x_0:

האלגוריתם:

1. צור את וקטורי הקונבולוציה A, B: לכל i מ-0 ועד n:
   1.1. תחזק משתנה שיכיל את הערך $x_0^{\,i}$ ע"י כפל ב x_0.
   1.2. תחזק משתנה שיכיל את הערך $i!$ ע"י כפל ב i
   1.3. בצע $A[i] \leftarrow i!\cdot a_i,\ B[i] \leftarrow x_0^{\,i} \div i!$
2. חשב את ערכיהם תמונותיהם של שורשי היחידה מסדר $2n + 1$ בעזרת FFT בפולינומים ממעלה n שוקטורי מקדמיהם הם A ו B.
3. חשב את ערכי התמונות ביחס לפולינום המכפלה $A \cdot B$ של שורשי היחידה מסדר $2n + 1$ ע"י מעבר לינארי על שורשי היחידה וביצוע פעולת כפל פשוטה.
4. חשב את וקטור המקדמים של הפולינום עבורו מצאנו בשלב הקודם $2n + 1$ תמונות, בעזרת אלגוריתם ה FFT ההפוך. נקרא לוקטור זה בשם C.
5. החזר $f^{(n)}(x_0) = C[0],\ f^{(n-1)}(x_0) = C[1],\ \ldots,\ f^{(0)}(x_0) = C[n]$

נכונות: ישירות מנכונות $FFT,\ Inverse - FFT$ וההגדרה המתמטית לקונבולוציה.

סיבוכיות:

- יצירת וקטורי הקונבולוציה A, B תתבצע ב $O(n)$ פעולות אלמנטריות.
- חישוב ייצוג תמונות של שני הפולינומים ייקח $2O(n\ \lg n)$ פעולות אלמנטריות
- חישוב תמונות המכפלה יתבצע ב $O(n)$ פעולות אלמנטריות.
- הפקת וקטור המקדמים C תתבצע ב $O(n\ \lg n)$ פעולות אלמנטריות.
- פעולת ההחזרה תתבצע ב $O(n)$.

ונקבל סה"כ סיבוכיות של $O(n\ \lg n)$.