

# מטלת מנחה 14 - אלגברה לינארית 1

328197462

15/01/2023

## שאלה 1

יהיו  $U, W_1, W_2$  תתי-מרחבים לינאריים של מרחב לינארי  $V$ .

### סעיף א

יהא  $v \in (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$  ועלינו להוכיח  $v \in U \cap (W_1 + W_2)$ .  
מהגדרת החיבור, קיימים  $v_1 \in U \cap W_1, v_2 \in U \cap W_2$  כך ש  $v = v_1 + v_2$ .  
אי לכך,  $v_1, v_2 \in U$  ומסגירות החיבור הוקטורי במרחב הלינארי נסיק  $v = v_1 + v_2 \in U$ .  
כמו כן, מאחר ו  $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$  נקבל מהגדרת החיבור כי  $v = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$ .  
הראינו שייכות לשתי הקבוצות  $U, W_1 + W_2$  ולכן נסיק  $v \in U \cap (W_1 + W_2)$ .

### סעיף ב

עבור  $V = \mathbb{R}^2$  נגדיר:

$$U = \text{Sp}(\{(1, 1)\}) \quad W_1 = \text{Sp}(\{(1, 0)\}) \quad W_2 = \text{Sp}(\{(0, 1)\})$$

אז לפי סעיף א של שאלה זו מתקיים  $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2)$ .

ניקח  $v = (1, 1)$  ונראה כי  $v \in U \cap (W_1 + W_2)$  וגם  $v \notin (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$ .  
נחשב:

$$\begin{aligned} U \cap (W_1 + W_2) &= \text{Sp}(\{(1, 1)\}) \cap (\text{Sp}(\{(1, 0)\}) + \text{Sp}(\{(0, 1)\})) \stackrel{\text{שאלה 7.6.8}}{=} \\ &= \text{Sp}(\{(1, 1)\}) \cap (\text{Sp}(\{(1, 0), (0, 1)\})) = \\ &= \text{Sp}(\{(1, 1)\}) \cap \mathbb{R}^2 = \\ &= \text{Sp}(\{(1, 1)\}) \ni (1, 1) = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U \cap W_1) + (U \cap W_2) &= (\text{Sp}(\{(1, 1)\}) \cap \text{Sp}(\{(1, 0)\})) + (\text{Sp}(\{(1, 1)\}) \cap \text{Sp}(\{(0, 1)\})) = \\ &= \{0\} + \{0\} = \\ &= \{0\} \not\ni (1, 1) = v \end{aligned}$$

ולכן מתקיימת הכלה חזקה בין תתי-המרחבים.

## שאלה 2

יהיו  $W = \text{Sp}\{w_1, w_2\}$ ,  $U = \text{Sp}\{u_1, u_2\}$  תתי-מרחבים לינאריים של  $V$  כך שהקבוצות הפורשות אותם הן בסיסים. מניחים כי  $A = \{u_1, u_2, w_1\}$  תלויה לינארית.

### סעיף א

נראה כי  $w_1 \in U$  בדרך השלילה. נניח בשלילה כי  $w_1 \notin \text{Sp}\{u_1, u_2\}$ . מאחר והקבוצה  $\{u_1, u_2\}$  היא בסיס ולכן בלתי תלויה לינארית, נסיק לפי שאלה 8.1.8 כי  $\{u_1, u_2\} \cup \{w_1\} = A$  בלתי תלויה לינארית, בסתירה לנתון!

כעת, מאחר ו  $w_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \in \text{Sp}\{w_1, w_2\} = W$ , נקבל  $w_1 \in U \cap W$ .

### סעיף ב

ניזכר במשפט המימדים 8.3.6

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

לשני תתי-המרחבים  $U, W$  יש בסיסים בגודל 2 ומכאן  $\dim U = \dim W = 2$ . עלינו למצוא את מימד תת-המרחב  $U \cap W$ .

לפי משפט 3.8.4, עבור  $U \cap W \subseteq U, W$  נסיק  $\dim(U \cap W) \leq 2$ . בנוסף, אם  $\dim(U \cap W) = 2$ , אז נסיק את השוויון  $U \cap W = U = W$  בסתירה לנתון כי  $U, W$  תתי-מרחבים שונים. מכאן נובע אי-השוויון  $\dim(U \cap W) \leq 1$ . מאחר ו  $w_1 \neq 0 \in U \cap W$  (הוקטור נמצא בקבוצה בלתי תלויה לינארית), נסיק  $\dim(U \cap W) \geq 1$  ובסך הכל  $\dim(U \cap W) = 1$ .

נציב במשפט המימדים ונקבל  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$ .

הקבוצה  $\{u_1, u_2, w_2\}$  בעלת 3 וקטורים ומוכלת ב  $U + W$ . נראה כי הקבוצה בת"ל, כלומר  $w_2 \notin U$ . נניח כי  $w_2 \in U$ . מסעיף א של שאלה זו נקבל  $\{w_1, w_2\} \subseteq \text{Sp}\{u_1, u_2\}$ , ולפי שאלה 7.5.16 נסיק:

$$W = \text{Sp}\{w_1, w_2\} \subseteq \text{Sp}\{u_1, u_2\} = U$$

משוויון המימדים נובע, לפי משפט 3.8.4, כי  $U = W$  וזאת בסתירה לנתון! מצאנו  $w_2 \notin U$  ולכן לפי שאלה 8.1.8 הקבוצה בת"ל.

מצאנו כי  $\{u_1, u_2, w_2\}$  בת"ל ובעלת 3 וקטורים ולכן קבוצה היא בסיס ל  $U + W$ .

### שאלה 3

יהיו תתי המרחבים הבאים של  $V = \mathbb{R}_4[x]$

$$U = \text{Sp}\{u_1 = x^3 + 4x^2 - x + 3, u_2 = x^3 + 5x^2 + 5, u_3 = 3x^3 + 10x^2 + 5\}$$

$$W = \text{Sp}\{w_1 = x^3 + 4x^2 + 6, w_2 = x^3 + 2x^2 - x + 5, w_3 = 2x^3 + 2x^2 - 3x + 9\}$$

נסמן בשאלה את הבסיס הסטנדרטי הסדור של  $V$  ב  $E = (x^3, x^2, x, 1)$ .

בסיס ל  $U$

תחילה, וקטורי הקואורדינטות של הקבוצה הפורשת הנתונה של  $U$ , לפי הבסיס הסטנדרטי, הם:

$$[u_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [u_2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad [u_3]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

תת-המרחב  $U' = \text{Sp}\{[u_1]_E, [u_2]_E, [u_3]_E\}$  הוא תת-מרחב של  $\mathbb{F}^n$ . נמצא לו בסיס. לשם כך, נכתוב את הוקטורים כשורות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{5}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לפי שאלה 7.5.12, מרחב השורות של המטריצה המדורגת הינו גם  $U'$ . כמו כן, שורות המטריצה המדורגת אינן שורות אפס ולכן לפי למה 8.5.1 בת"ל.

קיבלנו כי הקבוצה הבאה בת"ל פורשת את  $\text{Sp}\{[u_1]_E, [u_2]_E, [u_3]_E\}$ , ולכן בסיס לה:

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

וקטורים אלה הם וקטורי הקואורדינטות לפי  $E$  של איברי הקבוצה  $B = \{b_1 = x^3 + 4x^2 - x + 3, b_2 = x^2 + x + 2, b_3 = x\}$ . לפי טענה 8.4.12, מאחר  $B'$  בסיס ל  $U'$  נסיק כי  $B$  בסיס ל  $U$ , וכן כי  $\dim U = 3$ .

בסיס ל  $W$

נשתמש בתהליך זהה. וקטורי הקואורדינטות של הקבוצה הפורשת הנתונה ל  $W$ :

$$[w_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad [w_2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad [w_3]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

תת-המרחב  $W' = \text{Sp}\{[w_1]_E, [w_2]_E, [w_3]_E\}$  הוא תת-מרחב של  $\mathbb{F}^n$ . נמצא לו בסיס. לשם כך, נכתוב את הוקטורים כשורות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לפי שאלה 7.5.12 ולמה 8.5.1, הקבוצה הבאה בת"ל פורשת את  $W'$  ולכן מהווה בסיס.

$$C' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

וקטורי הקבוצה הם וקטורים הקואורדינטות לפי  $E$  של  $C = \{c_1 = x^3 + 4x^2 + 6, c_2 = 2x^2 + x + 1\}$ . לפי טענה 8.4.12, מאחר  $C'$  בסיס ל  $W'$  נסיק כי  $C$  בסיס ל  $W$ , וכן באופן ישיר  $\dim W = 2$ .

בסיס ל- $U + W$

היות ו- $U = \text{Sp}(B)$ ,  $W = \text{Sp}(C)$ , נסיק לפי שאלה 7.6.8 כי

$$U + W = \text{Sp}(B \cup C) = \text{Sp}\{x^3 + 4x^2 - x + 3, x^2 + x + 2, x, x^3 + 4x^2 + 6, 2x^2 + x + 1\}$$

באופן דומה,

$$U' + W' = \text{Sp}\{(1, 4, -1, 3), (0, 1, 1, 2), (0, 0, 1, 0), (1, 4, 0, 6), (0, 2, 1, 1)\}$$

נמצא בסיס ל- $U' + W'$ . לשם כך נחזור על התהליך מהחלקים הקודמים של השאלה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_5 \rightarrow R_5 - 2R_2}]{R_4 \rightarrow R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_5 \rightarrow R_5 + R_3}]{R_4 \rightarrow R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow \frac{1}{3}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \rightarrow R_5 + 5R_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לפי שאלה 7.5.12 ולמה 4.5.1 השורות הראשונות של המטריצה המדורגת בת"ל ופורשות את  $U' + W'$ .  
שוב, לפי טענה 8.4.12, 4 הפולינומים שוקטורי הקואורדינטות שלהם הם 4 שורות המטריצה מהווים בסיס ל- $U + W$ . נקבל  $\dim(U + W) = 4$ , והיות ו- $U + W \subseteq \mathbb{R}_4[x]$  כי 8.3.4 ממשפט  $U + V = \mathbb{R}_4[x]$  ניקח את הבסיס הסטנדרטי למרחב לינארי זה -  $E$  שהוגדר בתחילת השאלה.

## סעיף ב

ראשית, על מנת למצוא את המימד של  $U \cap W$ , ניעזר במשפט המימדים 8.3.6:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

נציב ונקבל  $\dim(U \cap W) = 1$  ומכאן  $4 = 2 + 2 - \dim(U \cap W)$ .

כעת, יהא  $p(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ . על מנת ש- $p(x)$  יהיה שייך לשני תתי-המרחבים הלינאריים  $U, W$ , נדרוש שיהיו קיימים  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$  סקלרים כך ש:

$$\begin{aligned} \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 &= \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 - \mu_1 c_1 - \mu_2 c_2 &= 0 \\ [\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 - \mu_1 c_1 - \mu_2 c_2]_E &= [0]_E \end{aligned}$$

ומלמה 8.4.3 ושאלה 8.4.5 נקבל:

$$\lambda_1 [b_1]_E + \lambda_2 [b_2]_E + \lambda_3 [b_3]_E - \mu_1 [c_1]_E - \mu_2 [c_2]_E = 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 0$$

נדרג את המטריצה על מנת לפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_4 - 2R_2]{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow -\frac{1}{3}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 + R_4]{R_1 \rightarrow R_1 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \mu_2 = 0 \\ \lambda_2 - 2\mu_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \mu_1 - \mu_2 = 0 \end{cases}$$

קיבלנו כי  $\mu_2$  משתנה חופשי. ניקח סקלר  $a$  כלשהו כך ש  $\mu_2 = a$ , אז  $\mu_1 = a$  ונקבל:

$$\begin{aligned} p(x) &= \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 = \\ &= a(x^3 + 4x^2 + 6) + a(2x^2 + x + 1) = \\ &= a(x^3 + 6x^2 + x + 7) \end{aligned}$$

במילים אחרות,  $U \cap V = \text{Sp}\{x^3 + 6x^2 + x + 7\}$  והקבוצה  $\{x^3 + 6x^2 + x + 7\}$  בסיס ל  $U \cap W$

## שאלה 4

יהיו  $U, W$  תתי-מרחבים של  $\mathbb{R}^4$ ,  $\dim U > \dim W$ .

נתון כי  $(0, 0, 1, 0) \notin U + W$ , וכן  $\{(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, 2)\} \subset U \cap W$ . עלינו למצוא את המימד של  $U + W$  וכן בסיס ל  $W$ .

מאחר ו  $U + W \subseteq \mathbb{R}^4$  מתקיים, לפי משפט 8.3.4,  $\dim(U + W) \leq 4$ .

אם נניח בשלילה כי  $\dim(U + W) = 4$ , נקבל מחלקו השני של המשפט  $U + W = \mathbb{R}^4$ , בסתירה לנתון  $(0, 0, 1, 0) \notin U + W$ . לכן,  $\dim(U + W) \leq 3$ .

המרחב הנפרש ע"י קבוצת היוצרים הנתונה ל  $U \cap W$  הוא מרחב השורות של המטריצה להלן.

לפי שאלה 7.5.12, למטריצות שקולות שורה אותו מרחב שורות, ולכן נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שתי השורות הראשונות במטריצה הם בלתי תלויות לינארית ולכן מהווים בסיס ל  $U \cap W$ , ומכאן  $\dim(U \cap W) = 2$ .

כעת, היות  $U \subseteq U + W$  ו  $W \subseteq U + W$ , נקבל לפי משפט 8.3.4 והנתון:

$$2 = \dim(U \cap W) \leq \dim W < \dim U \leq \dim(U + W) \leq 3$$

האפשרות היחידה לפתרון היא  $\dim(U \cap W) = \dim W = 2$ ,  $\dim U = \dim(U + W) = 3$ .

לכן, לפי חלקו השני של המשפט, נקבל  $U \cap W = W$ .

אי לכך, מאחר ו  $\{(1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3)\}$  בסיס ל  $U + W$  והקבוצה מהווה בסיס ל  $W$ .