

מטלת מנחה 13 - קורס 20218

328197462

08/09/2023

שאלה 1

נניח כי קיימת מעבת הומונית $x' = Ax$ עבורה הפונקציות הבאות מהוות פתרון:

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

אז גם הפונקציה $u = 2x_1 - x_2$, שהיא צירוף לינארי של פתרונות למערכת ההומוגנית. מהווה פתרון למערכת מתקיים:

$$u(0) = 2 \cdot e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - e^0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן לפי למה 4.1.7, u הוא הפתרון הטריטוריאלי, כלומר $u(t) = 0$ לכל $t \in (-1, 1)$. אולם:

$$u(0.5) = 2 \cdot e^{0.5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - e^{-0.5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = (e^{0.5} - e^{-0.5}) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

ונקבל סתירה היות ו $e^{0.5} - e^{-0.5} \neq 0$ ובן $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$

שאלה 2

לפינו המשוואה $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ראשית נמצא פתרון למערכת ההומוגנית $x' = Ax$. המטריצה A בעלת ערכים קבועים ולכן נמצא את ערכיה העצמיים:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 5 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2) - (-1) \cdot 5 = \lambda^2 - 4 + 5 = \lambda^2 + 1$$

קיבלנו כי למטריצה A שני ערכים עצמיים, $\pm i$. נמצא וקטור עצמי השייך לע"ע $\lambda = i$:

$$iI - A = \begin{pmatrix} i - 2 & 5 \\ -1 & i + 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} i & 1 - 2i \\ -1 & i + 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow iR_1} \begin{pmatrix} -1 & i + 2 \\ -1 & i + 2 \end{pmatrix}$$

ועבור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ וקטור עצמי נקבל $0 = -a + (i + 2)b$, כלומר $a = (i + 2)b$ ולכן $v = b \begin{pmatrix} i + 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $b = 1$ ונקבל 2 פתרונות מרכיבים בת"ל למערכת ההומוגנית:

$$\begin{cases} x(t) = e^{it}v = (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i + 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x^*(t) = e^{-it}v^* = (\cos t - i \sin t) \begin{pmatrix} -i + 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

על פי שאלה 4.2.14, החלק הממשי והחלק המדומה של $x(t)$ מהווים זוג פתרונות בת"ל גם הם וניתן להחליף בין הזוגות. אם כן,

$$\begin{aligned} x(t) &= (\cos t + i \sin t) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \cos t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \sin t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i(\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

ונקבל זוג פתרונות:

$$\begin{cases} x_1(t) = \operatorname{Re} x(t) = \cos t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ x_2(t) = \operatorname{Im} x(t) = \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{cases}$$

נמצא פתרון פרטי למערכת המקורית בעזרת וריאציית הפרמטרים:

$$\Delta = W(t) = \begin{vmatrix} 2 \cos t - \sin t & \cos t + 2 \sin t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} = \sin t(2 \cos t - \sin t) - \cos t(\cos t + 2 \sin t) =$$

$$= 2 \cos t \sin t - \sin^2 t - \cos^2 t - 2 \cos t \sin t = -(\sin^2 t + \cos^2 t) = -1$$

$$\Delta_{C'_1} = \begin{vmatrix} 5e^{2t} & \cos t + 2 \sin t \\ 0 & \sin t \end{vmatrix} = 5e^{2t} \sin t$$

$$C'_1 = \frac{\Delta_{C'_1}}{\Delta} = -5e^{2t} \sin t$$

$$\Rightarrow C_1 = -5 \int e^{2t} \sin t dt \stackrel{358}{=} -5 \cdot \frac{e^{2t}(2 \sin t - \cos t)}{2^2 + 1^2} = -e^{2t}(2 \sin t - \cos t)$$

$$\Delta_{C'_2} = \begin{vmatrix} 2 \cos t - \sin t & 5e^{2t} \\ \cos t & 0 \end{vmatrix} = -5e^{2t} \cos t$$

$$C'_2 = \frac{\Delta_{C'_2}}{\Delta} = 5e^{2t} \cos t$$

$$\Rightarrow C_2 = 5 \int e^{2t} \cos t dt \stackrel{359}{=} 5 \cdot \frac{e^{2t}(2 \cos t + \sin t)}{2^2 + 1^2} = e^{2t}(2 \cos t + \sin t)$$

$$x_p = -e^{2t}(2 \sin t - \cos t) \begin{pmatrix} 2 \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + e^{2t}(2 \cos t + \sin t) \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t} \left(- \begin{pmatrix} 5 \cos t \sin t - 2 \\ 2 \cos t \sin t - \cos^2 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cos t \sin t + 2 \\ 2 \cos t \sin t + \sin^2 t \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ \cos^2 t + \sin^2 t \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ופתרון למערכת יהיה:

$$x = C_1 \begin{pmatrix} 2 \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

לפינו המערכת $x' = Ax$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים של המטריצה A . נפשט את הפ"א בעזרת הרמז שקיבלנו.

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 + \lambda R_3]{R_1 \rightarrow R_1 + R_3} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda + 3 \\ 1 + 2\lambda & 0 & \lambda^2 + \lambda + 2 \\ 2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & \lambda + 3 \\ 1 + 2\lambda & \lambda^2 + \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - (2\lambda + 1)(\lambda + 3) = \\ &= \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - (2\lambda^2 + \lambda + 6\lambda + 3) = \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = \\ &= \lambda^2(\lambda - 3) + 2\lambda^2 - 5\lambda - 3 = \\ &= \lambda^2(\lambda - 3) + 2\lambda^2 - 6\lambda + \lambda - 3 = \\ &= \lambda^2(\lambda - 3) + 2\lambda(\lambda - 3) + \lambda - 3 = \\ &= (\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda - 3) = \\ &= (\lambda + 1)^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

נקבל שני ערכים עצמיים - $\lambda_1 = 3$ עם ריבוי אלגברי 1, $\lambda_2 = -1$ עם ריבוי אלגברי 2. נמצא פתרון מהצורה $e^{\lambda t}v$ לכל ערך עצמי:

$$3I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ נקבל $a + 2c = 0, b = 0$, כלומר $v = c \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $c = -1$ ונקבל פתרון למערכת $x_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$-I - A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ועבור $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ נקבל $a - 2c = 0, -b + 4c = 0$, כלומר $v = c \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $c = 1$ ונקבל פתרון למערכת $x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

עבור הפתרון השלישי במערכת הפתרונות נמצא וקטור w כך ש $(-I - A)w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. נחזור על פעולות הדירוג שביצענו קודם לכן:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ועבור $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ מקבלים $a - 2c = -3, -b + 4c = 7$ ולכן $w = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבחר למשל $c = 2$ ונקבל $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

פתרון נוסף למערכת יהיה $x_3(t) = te^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 4t + 1 \\ t + 2 \end{pmatrix}$ והפתרון הכללי יהיה:

$$x = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t} (C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 4t + 1 \\ t + 2 \end{pmatrix})$$

שאלה 4

לפנינו המערכת $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ראשית נמצא פתרון למערכת ההומוגנית $x' = Ax$. נמצא ערכים עצמיים ל-A:

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ 1 - \lambda & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_3} (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \\ 1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(-\lambda + 1 - (-1) \cdot 1) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

קיבלנו 3 ע"ע. נמצא 3 פתרונות למשוואה ההומוגנית מהצורה $e^{\lambda t} v$.

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור וקטור עצמי $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ השייך לע"ע $\lambda = 1$ נקבל $a = 0, b + 2c = 0$ ולכן $v = c \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נבחר למשל $c = -1$ ונקבל $x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור וקטור עצמי $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ השייך לע"ע $\lambda = 2$ נקבל $a - b = 0, c = 0$ ולכן $v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

נבחר למשל $a = 1$ ונקבל $x_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

$$3I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ועבור וקטור עצמי $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ השייך לע"ע $\lambda = 3$ נקבל $a - b = 0, b - 2c = 0$ ולכן $v = c \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נבחר למשל $c = 1$ ונקבל $x_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

נמצא פתרון פרטי למערכת המקורית בעזרת וריאציית הפרמטרים.

$$\Delta = W(t) = e^{6t} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \rightarrow C_1 + C_3} e^{6t} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{6t} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = e^{6t}(2-4) = -2e^{6t}$$

$$\Delta_{C'_1} = e^{7t} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{7t} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = e^{7t}(-1+2) = e^{7t}$$

$$C'_1 = \frac{\Delta_{C'_1}}{\Delta} = -\frac{1}{2}e^t \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}e^t$$

$$\Delta_{C'_2} = e^{6t} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \rightarrow C_1 + C_3} e^{6t} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{6t} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = e^{6t}(0) = 0$$

$$C'_2 = \frac{\Delta_{C'_2}}{\Delta} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Delta_{C'_3} = e^{5t} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -e^{5t} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -e^{5t}(-2+1) = e^{5t}$$

$$C'_3 = \frac{\Delta_{C'_3}}{\Delta} = -\frac{1}{2}e^{-t} \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$x_p = -\frac{1}{2}e^t \cdot e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-t}e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

והפתרון הכללי יהיה:

$$x = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \left(C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 5

לפינו המערכת $x' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} x$ כך ש a, b קבועים ממשיים.

עלינו להוכיח שכל רכיביו של פתרון למשוואה זו אפסים באינסוף אם ורק אם $a < b < 0$. תחילה נמצא ערכים עצמיים ל-A.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - b) - (-b)(-b) = \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - b^2$$

נמצא שורשים לפ"א:

$$\Delta = (a + b)^2 - 4(ab - b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4b^2 = (a - b)^2 + 4b^2 \geq 0$$

נחלק למקרים. אילו $\Delta = 0$, כלומר יש פתרון יחיד למשוואה וע"ע יחיד למטריצה, הדבר מחייב $a - b = 0$, $b = 0$ ולכן $a = b = 0$.

במקרה זה נקבל פתרונות מהצורה $C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, שעבור $C_1 \neq 0$ או $C_2 \neq 0$ יכולו רכיבים שאינם אפסים באינסוף.

נתייחס למקרה בו יש שני שורשים שונים, λ_1, λ_2 . נקבל מערכת של פתרונות $e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2$ כאשר v_1, v_2 וקטורים עצמיים השייכים לע"ע λ_1, λ_2 בהתאמה.

היות v_1, v_2 וקטורים קבועים, רכיבי שני פתרונות אלה אפסים באינסוף אם ורק אם $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. במקרה זה כל פתרונות המערכת יהיו צירוף לינארי של שני הפתרונות שלהם וגם הם יהיו אפסים באינסוף.

נסכם: כל רכיב בכל פתרון למערכת אפס באינסוף אם ורק אם $\Delta > 0$ וכן $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. על פי נוסחת השורשים:

$$\lambda_1 = \frac{a + b + \sqrt{\Delta}}{2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < -a - b$$

היות $\sqrt{\Delta}$ הוא מספר חיובי, נדרוש $-a - b > 0$, כלומר $a + b < 0$. בהינתן דרישה סמויה זו, אי-שוויון זה שקול ל:

$$\begin{aligned} \Delta &= (a - b)^2 + 4b^2 < (-a - b)^2 \\ a^2 - 2ab + 5b^2 &< a^2 + 2ab + b^2 \\ 4b^2 &< 4ab \\ b^2 &< ab \end{aligned}$$

עבור $b = 0$ שוויון זה בהכרח לא מתקיים.

לכן $b \neq 0$ ובהכרח $\Delta < (a - b)^2 + 4b^2 \Rightarrow (a - b)^2 < b^2 > 0$. מקבלים:

$$\lambda_1 = \frac{a + b + \sqrt{\Delta}}{2} > \frac{a + b + \sqrt{(a - b)^2}}{2} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

אם $a \geq b$, כלומר $a - b \geq 0$, מקבלים $\lambda_1 > \frac{a + b + a - b}{2} = a$.

אחרת נקבל $\lambda_1 > \frac{a + b + b - a}{2} = b$.

בכל מקרה, $\lambda_1 > \max\{a, b\}$ ולכן עבור שליליותו של λ_1 צריך בהכרח להתקיים $a, b < 0$.

משליליותו של b ואי-שוויון $b^2 < ab$ נסיק $b > a$, ונקבל תנאי הכרחי לשליליותו של λ_1 : $0 > b > a$.

כעת נראה כי זהו תנאי מספיק לשליליותם של λ_1, λ_2 . הראינו כי עבור $0 > b > a$ מתקיים $b^2 < ab$, הגורר $\lambda_1 < 0$. נוסף על כך, עבור $\lambda_2 = \frac{a + b - \sqrt{\Delta}}{2}$, כאשר a, b שליליים, וממילא $\sqrt{\Delta}$ חיובי, נסיק כי $a + b - \sqrt{\Delta} < 0$ ולכן $\lambda_2 < 0$.

לסיכום, הראינו כי $0 > b > a$ תנאי הכרחי ומספיק לשליליותם של λ_1, λ_2 ומכאן לאפסות באינסוף של כל רכיב בכל פתרון למשוואה הנתונה.

שאלה 6

לפינו המערכת $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2t} & \frac{-t}{2t^3} \\ \frac{2}{2t} & \frac{-t^4}{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3} \begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -t \\ -t^3 \end{pmatrix}$$

נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית המתאימה, $x' = Ax$, שבו הרכיב השני קבוע. נסמן אפוא $x = \begin{pmatrix} u(t) \\ C \end{pmatrix}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = x' = Ax &= \frac{1}{2t^3} \begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ C \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3} \begin{pmatrix} 7t^2 u(t) - Ct^4 \\ 3u(t) - Ct^2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{cases} 2t^3 \cdot u' = 7t^2 u - Ct^4 \\ 3u - Ct^2 = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 2t^3 \cdot u' = t^2(4u + 3u - Ct^2) \\ 3u - Ct^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

נציב את המשוואה השנייה בראשונה ונקבל:

$$\begin{aligned} 2t^3 \cdot u' &= 4t^2 u \\ \frac{u'}{u} &= \frac{2}{t} \\ \frac{du}{u} &= \frac{2}{t} dt \\ \ln |u| &= 2 \ln |t| + C_1 = \ln(t^2) + C_1 \\ |u| &= e^{C_1} t^2 \\ u &= \pm e^{C_1} t^2 = C_2 t^2 \end{aligned}$$

נבחר למשל $u = t^2$, אז $Ct^2 = 3u = 3t^2$ ולכן $C = 3$ ו $x_1 = \begin{pmatrix} t^2 \\ 3 \end{pmatrix}$ מהווה פתרון ל $x' = Ax$.

נמצא פתרון נוסף למערכת ההומוגנית על פי הטכניקה בסעיף 4.2.5. נמצא פונקציה וקטורית $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ונסמן $x = \begin{pmatrix} y_1 + t^2 y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$ אז:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1' + 2ty_2' + t^2 y_2'' \\ 3y_2' \end{pmatrix} = x' = Ax &= \frac{1}{2t^3} \begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + t^2 y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3} \begin{pmatrix} 7t^2 y_1 + 7t^4 y_2 - 3t^4 y_2 \\ 3y_1 + 3t^2 y_2 - 3t^2 y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3} \begin{pmatrix} 7t^2 y_1 + 4t^4 y_2 \\ 3y_1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{cases} y_1' + 2ty_2' + t^2 y_2'' = \frac{7}{2t} y_1 + 2ty_2 \\ y_2' = \frac{1}{2t^3} y_1 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} y_1' + t^2 y_2' = \frac{7}{2t} y_1 \\ y_2' = \frac{1}{2t^3} y_1 \end{cases} \end{aligned}$$

נציב את המשוואה השנייה בראשונה ונקבל:

$$\begin{aligned} y_1' + \frac{t^2}{2t^3} y_1 &= \frac{7}{2t} y_1 \\ y_1' + \frac{1}{2t} y_1 &= \frac{7}{2t} y_1 \\ y_1' &= \frac{3}{t} y_1 \\ \frac{dy_1}{y_1} &= \frac{3}{t} dt \\ \ln |y_1| &= 3 \ln |t| + C_3 = \ln |t^3| + C_3 \\ |y_1| &= e^{C_3} |t^3| \\ y_1 &= \pm e^{C_3} t^3 = C_4 t^3 \end{aligned}$$

נבחר למשל $y_1 = t^3$, אז $y_2' = \frac{1}{2t^3} y_1 = \frac{1}{2}$ ולכן $y_2 = \frac{t}{2} + C_5$. נבחר למשל $y_2 = \frac{t}{2}$ ונקבל פתרון:

$$\begin{pmatrix} t^3 + t^2 \cdot \frac{t}{2} \\ \frac{3t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3t^3}{2} \\ \frac{3t}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$$

ו $x_2 = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$ פתרון נוסף למערכת ההומוגנית.

נמצא פתרון פרטי למערכת המקורית בעזרת וריאציית הפרמטרים:

$$\begin{aligned}\Delta = W(t) &= \begin{vmatrix} t^2 & t^3 \\ 3 & t \end{vmatrix} = t^3 - 3t^3 = -2t^3 \\ \Delta_{C'_1} &= \begin{vmatrix} -t & t^3 \\ -t^3 & t \end{vmatrix} = -t^2 + t^6 \\ C'_1 = \frac{\Delta_{C'_1}}{\Delta} &= \frac{1}{2t} - \frac{1}{2}t^3 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \ln |t| - \frac{1}{8}t^4 \\ \Delta_{C'_2} &= \begin{vmatrix} t^2 & -t \\ 3 & -t^3 \end{vmatrix} = -t^5 + t \\ C'_2 = \frac{\Delta_{C'_2}}{\Delta} &= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^{-2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2t} \\ x_p &= \left(\frac{1}{2} \ln |t| - \frac{1}{8}t^4\right) \begin{pmatrix} t^2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2t}\right) \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}\end{aligned}$$