מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

20/01/2023

שאלה 1

נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{nx}{e^x+n+x}$ המוגדרות (ורציפות) ב$[0, \infty)$.
נחשב את הפונקציה הגבולית. לכל $x \in [0, \infty)$ מתקיים:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^x+n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{e^x \cdot \frac{1}{n} + 1 + x \cdot \frac{1}{n}} = \frac{x}{1} = x$$

כמו כן, מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [0, \infty)$:

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{nx}{e^x+n+x} - x| = |\frac{nx - x(e^x+n+x)}{e^x+n+x}| = |\frac{-x^2 - xe^x}{e^x+n+x}| = \frac{x^2+xe^x}{e^x+n+x}$$

סעיף א

ניקח את הסדרה $x_n = n$. מתקיים:

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n^2+ne^n}{e^n+2n} = \frac{\frac{n^2}{e^n}+n}{1+2\cdot\frac{n}{e^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

מכאן, לפי למה 6.3, נסיק כי (f_n) לא מתכנסת במידה שווה לf.

סעיף ב

יהיו $0 \leq a < b$ כלשהם.
נדגיש כי מתקיים $[a,b] \subseteq [0,\infty)$ והפונקציה הגבולית f נשארת זהה.
נבחר את הסדרה $\mu_n = \frac{b^2+be^b}{e^a+n+a}$. לכל $x \in [a,b], n \in \mathbb{N}$ נקבל:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2+xe^x}{e^x+n+x} \underset{a\leq x\leq b}{\leq} \frac{b^2+be^b}{e^a+n+a} = \mu_n$$

מתקיים $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (a, b קבועים) ולכן לפי שאלה 7 ביחידה 6 נסיק כי (f_n) מתכנסת במ"ש לf.
לכן, לפי משפט 6.8 נקבל

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 2

שאלה 4

סעיף א

הטענה נכונה.
נסמן לכל n טבעי, $u_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה כך שלכל x ממשי $u_n(x) = \frac{x}{4+n^4x^2}$. נוכיח את ההתכנסות במ"ש של $f(x) = \Sigma u_n(x)$ בעזרת מבחן ויירשטראס.

נבחר $\alpha_n = \frac{1}{4n^2}$
לכל $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ נקבל:

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= \frac{1(4+n^4x^2) - x(2n^4x)}{(4+n^4x^2)^2} = \\ &= \frac{4+n^4x^2-2n^4x^2}{(4+n^4x^2)^2} = \\ &= \frac{4-n^4x^2}{(4+n^4x^2)^2} \end{aligned}$$

נקבל נקודות החשודות לערכי קיצון מקומיים כאשר $u_n'(x) = 0$, כלומר עבור $x = \pm\frac{2}{n^2}$.
מתקיים: $u_n(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ ולכן:

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq |u_n(\pm\frac{2}{n^2})| = \\ &= |\frac{\pm\frac{2}{n^2}}{4+n^4(\pm\frac{2}{n^2})^2}| = \\ &= \frac{\frac{|\pm 2|}{n^2}}{4+n^4\cdot\frac{4}{n^4}} = \\ &= \frac{\frac{2}{n^2}}{8} = \frac{1}{4n^2} = \alpha_n \end{aligned}$$

הטור $\Sigma\alpha_n = \Sigma(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^2})$ מתכנס לפי דוגמה 5.8א עבור $\alpha = 2 > 1$ ולפי משפט 5.10 עבור $c = \frac{1}{4} \neq 0$ אי לכך, לפי מבחן ויירשטראס 6.7 נסיק כי טור הפונקציות $\Sigma u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$.
כעת, היות ו u_n פונקציות רציפות ב $\mathbb{R}$ ומתכנסות במ"ש ב$\mathbb{R}$ ל f, נסיק לפי $6.4*$ כי f רציפה ב$\mathbb{R}$.

סעיף ב

הטענה לא נכונה.
גם כאן נסמן $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in [0,1]$ נקבל $u_n(x) = (1-x)x^n = x^n - x^{n+1}$.
נציין כי הפונקציות u_n רציפות ב$\mathbb{R}$ ובפרט ב$[0,1]$.

נמצא התכנסות נקודתית של טור המספרים $\Sigma u_n(x_0)$ עבור $x_0 \in [0,1]$ כלשהו. לכל k נקבל:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{k} x_0^n - x_0^{n+1} \overset{\text{טור טלסקופי}}{=} = x_0 - x_0^{k+1}$$

ולכן:

$$S(x_0) = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} x_0 - x_0^{k+1} = \begin{cases} x_0 & 0 \leq x_0 < 1 \\ 0 & x_0 = 1 \end{cases}$$

אילו היה טור הפונקציות $\Sigma u_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב $[0,1]$, היינו מקבלים לפי $6.4*$ כי הפונקציה $S(x)$ רציפה, בסתירה לכך ש $S(x)$ אינה רציפה בנקודה $x = 1$!