מטלת מנחה 14 - אלגברה לינארית 2

328197462

12/05/2023

שאלה 1

סעיף א

המטריצה האלכסונית המייצגת של התבנית q לפי הבסיס הסטנדרטי היא:

$$[q]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

נבצע חפיפות אלמנטריות:

$$([q]_E|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_i \to 2R_i} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 2 & 6 & 10 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3/2R_1, R_4 \to R_4 - 5/2R_1]{R_2 \to R_2 - 1/2R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & -13 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -13 & -25 & -5 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -12 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -24 & -4 & -6 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3/2R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

ומכאן שבבסיס $B = (v_1 = (2,2,0,0), v_2 = (-1,1,0,0), v_3 = (-2,-4,2,0), v_4 = (-1,0,-3,2))$ נקבל $q = 4x_1^2 - x_2^2 - 8x_3^2 - 6x_4^2$.
הדרגה של q היא 4 והסימנית $\sigma = 1 - 3 = -2$.

סעיף ב

נרצה להוכיח כי $U = \mathrm{Sp}\{v_1\}$ הוא תת המרחב המקסימלי עליו q חיובית. תחילה נוכיח כי q חיובית על מרחב זה.
יהא $u \in U$, אז $[u]_B = (\alpha, 0, 0, 0)$ עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו ולכן $q(u) = 4\alpha^2 > 0$.
המרחב המשלים $U' = \mathrm{Sp}\{v_2, v_3, v_4\}$ מקיים שq שלילית לחלוטין עליו (ההוכחה זהה לחלוטין).
כעת, נניח בשלילה כי קיים מרחב W כך ש $\dim W > 1$ וגם q חיובית לחלוטין על W.
משיקולי מימדים, בהכרח $\dim(U' \cap W) > 0$ ולכן קיים וקטור שאינו אפס ב$v \in U' \cap W$.
עבור וקטור זה מתקיים $U' \ni v \Leftarrow q(v) < 0$, אבל גם $v \in W$ ולכן $q(v) > 0$ וזו סתירה!

שאלה 2

יהא L_0 תת הקבוצה הנתונה. נוכיח כי תת-קבוצה זו מהווה תת מרחב ממימד $n-\rho$. נתבונן בצורה הקנונית של q. על פי 6.1.1 ו6.3.2, קיים בסיס $(w)=(w_1,w_2,...,w_n)$ כלשהו של V כך ש:

$$[q]_{(w)}=\begin{pmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\mathrm{diag}\{1,1,1,...,1,0,0,...,0\}$$

כלומר, לכל $v\in V$ כך ש $[v]_{(w)}=(x_1,x_2,...,x_n)^{\mathrm{t}}$, מקבלים:

$$q(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_\rho^2+0x_{\rho+1}^2+\cdots+0x_n^2$$

נתבונן אפוא בתת המרחב $U=\mathrm{Sp}\{w_{\rho+1},...,w_n\}$ ממימד $n-\rho$. נוכיח כי קבוצת איברי W היא בדיוק L_0.

כיוון ראשון: יהא $u\in U$, אז עבור $[u]_{(w)}=(x_1,x_2,...,x_n)^{\mathrm{t}}$ נקבל $x_1=x_2=\cdots=x_\rho=0$. לכן:

$$q(u)=0^2+0^2+\cdots+0^2+0x_{\rho+1}^2+\cdots+0x_n^2=0$$

ומכאן $u\in L_0$ ולכן $U\subseteq L_0$.

כיוון שני: יהא $s\in L_0$ ונסמן $[s]_{(w)}=(s_1,s_2,...,s_n)^{\mathrm{t}}$.
על פי הנתון נסיק:

$$q(s)=s_1^2+s_2^2+\cdots+s_\rho^2=0$$

מכאן בהכרח $s_1=s_2=\cdots=s_\rho=0$ ולכן $s\in\mathrm{Sp}\{w_{\rho+1},...,w_n\}=U$ ונקבל $L_0\subseteq U$.
קיבלנו שL_0 הוא בדיוק תת-המרחב U ממימד $n-\rho$ ותמה הוכחת השאלה.

שאלה 3

נוכיח את השאלה על דרך השלילה.
נניח בשלילה כי q אינה שומרת סימן. בהכרח, על פי 6.3.2, בהצגה הקנונית של q על פי בסיס $(w)=(w_1,w_2,...,w_n)$, נקבל לפחות איבר אחד בעל מקדם 1 שנסמנו x_1, ולפחות איבר אחד בעל מקדם (-1) שנסמנו $x_{\pi+1}$. ההצגה תהיה, בסימוני 6.3.2,

$$q(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^2+\cdots+x_\pi^2-x_{\pi+1}^2-\cdots-x_\rho^2+0x_{\rho+1}^2+\cdots+0x_n^2$$

יהא $u_1=w_1$, אז $[u_1]_{(w)}=(1,0,...,0)^{\mathrm{t}}$ ולכן $q(u_1)=1$ ו$u_2\in L$.
יהא $u_2=w_{\pi+1}+2w_1$. אז $q(u_1)=2^2-1^2=3$ ולכן $u_2\in L$
אבל $q(u_2-2u_1)=q(w_{\pi+1})=-1$ ולכן $u_2-2u_1\notin L$ בסתירה לתכונת הסגירות לחיבור של המרחב הלינארי L!

שאלה 4

סעיף א

המטריצה המייצגת של q לפי הבסיס הסטנדרטי תהיה:

$$[q]_E = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

נשתמש בשיטת יעקובי על מנת למצוא תנאים הכרחיים ומספיקים לחיוביות של q: זוהי מסקנה 6.4.3. נקבל אפוא - תנאי הכרחי ומספיק לחיוביות של q יהיה סיפוקם של שלושת אי השוויונות הבאים:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |[1]| = 1 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2 > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 1(4-9) - \lambda(\lambda - 15) + 5(3\lambda - 20) = \\ &= -\lambda^2 + 30\lambda - 105 > 0 \end{aligned}$$

נקבל $\Delta_2 > 0$ אם ורק אם $-2 < \lambda < 2$.
כמו כן, הערכים $\lambda = 15 \pm 2\sqrt{30}$ מאפסים את Δ_3 ו$\Delta_3 > 0$ אם ורק אם $4.05 \approx 15 - 2\sqrt{30} < \lambda < 15 + 2\sqrt{30} \approx 25.95$.
קיבלנו שני אי-שוויונות שלא ניתן לספק במקביל עבור שום ערך של λ ולכן q אינה חיובית לחלוטין עבור שום ערך של λ.

סעיף ב

הסעיף עוסק בשיטת יעקובי וביישום מרכזי שלה - לכסון סימולטני.
בסימוני 6.5.1':

$$B = [q_1]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = [q_2]_E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

שלבי הפתרון הם כלהלן, על פי הוכחת משפט 6.5.1':

- נמצא מטריצה P כך ש $P^{\mathrm{t}} BP = I$.
- נגדיר $S = P^{\mathrm{t}} AP$. המטריצה S תהא סימטרית ממשית ולכן לכסינה אורתוגונלית.
- נמצא מטריצה Q אורתוגונלית כך ש $Q^* SQ = \mathrm{diag}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$
- המטריצה המלכסנת שלנו תהיה $M = PQ$ ונקבל $q_1 = \delta_1 y_1^2 \delta_2 y_2^2 + \delta_3 y_3^2$

נעבור לפתרון. נמצא את P בעזרת חפיפה אלמנטרית:

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) = (I|P^{\mathrm{t}})$$

נקבל אפוא כי B אכן חיובית לחלוטין וכן $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

נחשב את S:

$$S=P^{\mathrm{t}}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&1\\4&8&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&1\\2&4&1\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

המטריצה S היא מטריצה סימטרית ממשית ולכן לכסינה אורתוגונלית. נמצא את הערכים העצמיים של S:

$$\begin{aligned}p(x)=|xI-S|&=\begin{vmatrix}x-2&-2&-1\\-2&x-2&-1\\-1&-1&x-3\end{vmatrix}\overset{R_1=\Sigma R_i}{=}\begin{vmatrix}x-5&x-5&x-5\\-2&x-2&-1\\-1&-1&x-3\end{vmatrix}=\\&=(x-5)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&x-2&-1\\-1&-1&x-3\end{vmatrix}\overset{R_3\to R_3+R_1}{=}(x-5)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&x-2&-1\\0&0&x-2\end{vmatrix}=\\&=(x-5)(x-2)\begin{vmatrix}1&1\\-2&x-2\end{vmatrix}=(x-5)(x-2)(x-2-(-2\cdot1))=x(x-5)(x-2)\end{aligned}$$

נקבל שלושה ערכים עצמיים $0,2,5$ עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. נמצא בסיסים אורתוגונליים לכל אחד משלוש המרחבים העצמיים V_0,V_2,V_5:

- עבור V_0 נקבל את מרחב האפס של S. דירוג ייתן לנו:

$$\begin{pmatrix}2&2&1\\2&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&1\\2&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&1&3\\2&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נקבל וקטור עצמי $v_0=(1,-1,0)$. ננרמל ונקבל $v_0*=\frac{1}{\sqrt2}(1,-1,0)$.

- עבור V_2 נרצה למצוא את מרחב האפס של המטריצה:

$$\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-2&0&-1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&0&-1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נקבל וקטור עצמי $v_2=(1,1,-2)$ ווקטור מנורמל $v_2*=\frac{1}{\sqrt6}(1,1,-2)$

- עבור המרחב העצמי V_5 ניעזר בעובדה שסכום כל שורה במטריצה הוא 5, ולכן ניקח $v_5=(1,1,1)$ ו-$v_5*=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)$

מקבלים:

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{-2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}\sqrt3&1&\sqrt2\\-\sqrt3&1&\sqrt2\\0&-2&\sqrt2\end{pmatrix},$$

$$M=PQ=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt3&1&\sqrt2\\-\sqrt3&1&\sqrt2\\0&-2&\sqrt2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}2\sqrt3&-4&2\sqrt2\\-\sqrt3&3&0\\0&-1&\sqrt2\end{pmatrix}$$

מקבלים $M^{\mathrm{t}}BM=Q^{\mathrm{t}}P^{\mathrm{t}}BPQ=Q^{-1}IQ=I$, וכן $M^{\mathrm{t}}AM=Q^{\mathrm{t}}SQ=\mathrm{diag}\{0,2,5\}$. הבסיס המבוקש הוא שורות המטריצה M, וערכי δ_i הם $0,2,5$.

שאלה 5

סעיף א

עלינו להוכיח כי מטריצה סימטרי כלשהי $A_{n\times n}$ המייצגת את q אינה הפיכה.
על פי 6.2.1, A חופפת למטריצה אלכסונית B. על פי חלק ב של אותו המשפט, למטריצה B אותה דרגה ונסמן $\rho = \rho(B) = \rho(A)$.
על פי 6.3.2 נקבל $0 < \rho < n$. לכן $\rho(A) < n$ ו-A סינגולרית!

סעיף ב

המטריצה $A = [\alpha_{ij}]$ מטריצה סימטרית ממשית ולכן לפי 3.2.1 לכסינה אורתוגונלית על ידי מטריצה אוניטרית Q.
מהנתון נסיק כי לכל $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j > 0$$

אי לכך, על פי הגדרה A חיובית לחלוטין ולכן לפי 3.3.2 כל ערכיה העצמיים של A ממשיים חיוביים.
הכיוון הראשון טריוויאלי: אם $A = I$ אז בפרט A אורתוגונלית.
אילו A אורתוגונלית אז לכל ערך עצמי λ של A מתקיים $|\lambda| = 1$ ולכן ל-A ערך עצמי יחיד $\lambda = 1$. היות ו-A לכסינה, הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי זה הוא n ו-A דומה ל-I.
נקבל אפוא:

$$A = Q^* IQ = Q^{-1} Q = I$$