מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

06/01/2023

שאלה 1

סעיף א

נפריד לשני טורים ונבצע פעולות חיבור בעזרת משפט 5.9. נסמן אפוא:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 2^n} > 0 \quad b_n = \frac{(-2)^n \cdot \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}\cdot 2^n} = \frac{(-1)^n\cdot \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$$

ראשית, עבור הסדרה החיובית a_n נקבל

$$0 \le a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 2^n} \underset{\sqrt{n}\ge 1}{\le} \frac{1}{2^n}$$

כאשר הטור $\sum \frac{1}{2^n}$ הוא טור הנדסי שמנתו $q=\frac{1}{2}$, ולכן מתכנס.
אי לכך, לפי מבחן ההשוואה 5.14, גם הטור $\sum a_n$ מתכנס, וכן מאחר ומדובר בסדרה חיובית הטור מתכנס בהחלט.

כעת נבחן את התכנסות הטור $\Sigma|b_n|$. מתקיים:

$$0 \le |b_n| = \left|\frac{(-1)^n\cdot \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}\right| = \frac{|(-1)^n||\sin\frac{1}{n}|}{\sqrt{n}} = \frac{|\sin\frac{1}{n}|}{\sqrt{n}} \underset{|\sin x|\le|x| \text{ מאינפי 1}}{\le} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

הטור $\Sigma\frac{1}{n\sqrt{n}} = \Sigma\frac{1}{n^{1.5}}$ מתכנס (לפי דוגמה א5.8 ביחידה 5 כאשר $\alpha = 1.5 > 1$),
ולכן לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי גם הטור $\Sigma|b_n|$ מתכנס.

כעת נתבונן בטור הנתון בסעיף. מדובר בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-2)^n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

נשים לב כי לפי אי-שוויון המשולש,

$$|a_n+b_n| \le |a_n| + |b_n| \underset{a_n>0}{=} a_n + |b_n|$$

הטור $\Sigma(a_n+|b_n|)$ מתכנס כסכום של טורים מתכנסים לפי משפט 5.9.
אי לכך, גם הטור $\Sigma|a_n+b_n|$ מתכנס, ומכאן נסיק התכנסות בהחלט של הטור הנתון בשאלה.

סעיף ב

נפריד שוב לשני טורים. נסמן אפוא:

$$a_n = \frac{n \cdot \cos 2n}{n^2-1} = \frac{n}{n^2-1} \cdot \cos 2n \quad b_n = \frac{\cos \pi n}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)} = \frac{(-1)^n}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)}$$

נתבונן תחילה בטור Σa_n. נרצה להוכיח כי הטור מתכנס לפי מבחן דיריכלה:

i נראה כי הסדרה $\mu_n = \frac{n}{n^2-1}$ מונוטונית יורדת.
נגדיר $\mu(x) = \frac{x}{x^2-1}$. מתקיים:

$$\mu'(x) = \frac{x^2-1-x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$$

ולכן μ פונקצייה יורדת, ובפרט לכל n טבעי נקבל $\mu_{n+1} = \mu(n+1) < \mu(n) = \mu_n$.

ii כמו כן, $\mu_n = \frac{n}{n^2-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

iii בנוסף, על פי שאלה 33א ביחידה 5, $\Sigma \cos 2n$ סכום חסום.

נקבל, על פי משפט 5.22, כי הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty}(\mu_n \cdot \cos 2n) = \Sigma_{n=2}^{\infty} a_n$ מתכנס.

נבחן כעת את התכנסות הטור $|b_n|$. נשים לב כי $\ln(n^n+n) \geq \ln(n^n) = n \ln n$, ואי לכך:

$$|b_n| = \left|\frac{(-1)^n}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)}\right| \underset{x\geq 1 \Rightarrow \ln x > 0}{=} \frac{|(-1)^n|}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)} = \frac{1}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)} \underset{\text{הסבר מקודם}}{\leq} \frac{1}{\ln n \cdot n \ln n} = \frac{1}{n \ln^2 n}$$

הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n \ln^2 n}$ מתכנס לפי שאלה 27א ביחידה 5 עבור $\alpha = 2$, ולכן לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי $\Sigma_{n=2}^{\infty}|b_n|$ מתכנס, כלומר $\Sigma_{n=2}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

אי לכך, לפי משפט 5.9, הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n \cdot \cos 2n}{n^2-1} + \frac{\cos \pi n}{\ln n \cdot \ln(n^n+n)}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}(a_n + b_n)$$

מתכנס. כעת, נניח בשלילה כי הטור מתכנס בהחלט. אז לפי משפט 5.9, הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty}(|a_n+b_n| + |b_n|)$ מתכנס. מתקיים:

$$0 \leq |a_n| = |(a_n+b_n) - b_n| \underset{\text{א"ש המשולש}}{\leq} |a_n+b_n| + |b_n|$$

ועל כן, לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי $\Sigma_{n=2}^{\infty}|a_n|$ מתכנס. ונקבל אפוא

$$|a_n| = \left|\frac{n \cdot \cos 2n}{n^2-1}\right| = \frac{n \cdot |\cos 2n|}{n^2-1} \underset{|\cos x| \geq \cos^2 x}{\geq} \frac{n \cdot \cos^2 2n}{n^2-1} \geq 0$$

ומכאן, שוב לפי מבחן ההשוואה, $\Sigma_{n=2}^{\infty}\frac{n \cdot \cos^2 2n}{n^2-1}$
הוא טור מתכנס גם הוא. לפי הזהות $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, נסיק:

$$\frac{n \cdot \cos^2 2n}{n^2-1} = \frac{n}{2(n^2-1)} + \frac{n \cdot \cos 4n}{2(n^2-1)}$$

הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty}$ מתכנס, לפי מבחן דיריכלה, ובהוכחה שקולה להוכחה מקודם.
אי לכך, לפי שאלה 11א ביחידה 5, נסיק כי גם הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2(n^2-1)}$ מתכנס. עם זאת,

$$\frac{\frac{n}{2(n^2-1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{2(n^2-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה 5.15 גם הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתכנס.
נסיק כי לפי משפט 5.12 גם הטור $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתכנס, בסתירה לדוגמה 5.8א בספר!
מהסתירה נובע כי הטור $\Sigma_{n=2}^{\infty}|a_n+b_n|$ לא מתכנס, ולכן הטור שבשאלה מתכנס בתנאי.

שאלה 2

תהא (u_n) המתכנסת לגבול שלילי, וכן יהא a מספר חיובי.
נסמן $a_n = a^{u_1+u_2+\cdots+u_n}$ ונראה כי Σa_n מתכנס אם ורק אם $a > 1$.

נחשב את הגבול:

$$c = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}}}{a^{u_1+u_2+\cdots+u_n}}\right| = \lim_{n\to\infty}|a^{u_{n+1}}| \underset{a>0\Rightarrow a^x>0}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{u_{n+1}} \underset{\text{לפי אינפי 1}}{=} (\lim_{n\to\infty} a)^{\lim_{n\to\infty} u_{n+1}} \underset{\text{הזזה}}{=} a^{\lim_{n\to\infty} u_n} \underset{\text{נתון}}{=} a^u$$

אילו $a > 1$, אז מהנתון $u < 0$ נסיק $c = a^u < 1$ ולכן לפי משפט $5.17**$ הטור Σa_n מתכנס בהחלט, ובפרט מתכנס.
אילו $a < 1$, אז מהנתון $u < 0$ נסיק $c = a^u > 1$ ולכן לפי משפט $5.17**$ הטור Σa_n מתבדר.

אילו $a = 1$, אז נקבל לכל n טבעי $a_n = 1^{\cdots} = 1 = \frac{1}{n^0}$
ולכן הטור Σa_n מתבדר, לפי דוגמה א5.8 ביחידה 5, כי $\alpha = 0 < 1$ בכך הוכחנו כי הטור Σa_n מתכנס אם ורק אם $a > 1$.

שאלה 3

נסמן $a = \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. אז מהגדרת הגבול עבור $\epsilon = \frac{|a|}{2}$, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - a| < \epsilon$,
כלומר, מאי-שוויון המשולש $-\frac{|a|}{2} < |a_n| - |a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{|a|}{2} < |a_n| < \frac{3|a|}{2}$.
אי לכך, לכל $n+1 > n_0$ נקבל:

$$\frac{a^2}{4} < |a_{n+1}a_n| < \frac{9a^2}{4}$$

כעת, נשים לב שהחל מn_0 מתקיים:

$$\frac{a^2}{4}|a_n - a_{n+1}| < |\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}| = \frac{|a_n - a_{n+1}|}{|a_n a_{n+1}|} < \frac{9a^2}{4}|a_n - a_{n+1}|$$

כעת נניח כי $\Sigma(a_{n+1} - a_n)$ מתכנס בהחלט, כלומר $\Sigma|a_{n+1} - a_n|$ מתכנס,
ונוכיח לפי מבחן ההשוואה כי הטור החיובי $\Sigma|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}|$ מתכנס.
לפי משפט 5.10 נסיק כי $\Sigma\frac{9a^2}{4}|a_{n+1} - a_n|$ מתכנס. הראינו כי כמעט לכל n מתקיים $|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}| < \frac{9a^2}{4}|a_{n+1} - a_n|$, ואי לכך לפי מבחן ההשוואה 5.14 נסיק כי הטור מתכנס, כלומר $\Sigma(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n})$ מתכנס בהחלט.

בכיוון השני, אם נניח כי $\Sigma|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}|$ מתכנס, אז לפי מבחן ההשוואה 5.14 ומשפט 5.10 נסיק כי הטור החיובי $\Sigma|a_{n+1} - a_n|$ מתכנס.