מטלת מנחה 12 – מתמטיקה בדידה

שאלה 1

עבור A,B,C,D קבוצות:

א. נוכיח כי **אם** $A\Delta B \subseteq D$ **ו**$B\Delta C \subseteq D$ **אז** $A\Delta C \subseteq D$

אילו $A\Delta C = \phi$ אז ברור ש $\phi \subseteq D$.
אחרת, יהי $x \in A\Delta C$ ונוכיח כי $x \in D$.

מאחר ו$x \in A\Delta C$, מתקיים (1) $x \in A, x \notin C$ או (2) $x \in C, x \notin A$
נוכיח לה"כ עבור מקרה 1, אך ההוכחה דואלית גם במקרה השני, זאת משום שלפי חילופיות $C\Delta B = B\Delta C$ ו $B\Delta A = A\Delta B$ ולכן על מנת להוכיח את המקרה השני ניתן פשוט להחליף את הקבוצות A ו-C בהוכחה.

אילו $x \in B$: אז מתקיים $x \in B, x \notin C \Leftarrow x \in B\Delta C$.
לפי הנתון $B\Delta C \subseteq D \Leftarrow x \in D$.

אילו $x \notin B$: אז מתקיים $x \in A, x \notin B \Leftarrow x \in A\Delta B$
לפי הנתון $A\Delta B \subseteq D \Leftarrow x \in D$.

על $P(\{1,2,3\})$ הוגדרו עבור כל $A, B \in P(\{1,2,3\})$ היחסים R ו S

נוכיח כי:

ב. (1) R הוא יחס שקילות

<u>רפלקסיביות:</u> יהי $A \in P(\{1,2,3\})$ ונוכיח כי ARA:
לפי עמוד 44, $A\Delta A = \phi$ ולכן ברור כי $A\Delta A \subseteq \{1,2\}$.
לכן לפי הגדרת היחס הקבוצה עומדת ביחס.

<u>סימטריה:</u> יהיו $< A, B >\in R$ ונוכיח כי BRA.
לפי הגדרת היחס $A\Delta B \subseteq \{1,2\}$.
לכן לפי חילופיות $B\Delta A \subseteq \{1,2\} \Leftarrow BRA$.

<u>טרנזיטיביות:</u> יהיו $A, B, C \in P(\{1,2,3\})$ כך ש ARB, BRC. נוכיח כי ARC.
לפי הגדרת היחס $A\Delta B \subseteq \{1,2\}$, $B\Delta C \subseteq \{1,2\}$.
לכן לפי סעיף א עבור $D = \{1,2\}$ מתקיים $A\Delta C \subseteq \{1,2\} \Leftarrow ARC$.

הוכחנו כי R מקיים ת תכונות הרפלקסיביות, הסימטריה והטרנזיטיביות ולכן הוא יחס שקילות.

נמצא את:

(2) מחלקות השקילות של R:

R מושרה על הקבוצה $P(\{1,2,3\})$ ע"י החלוקה הבאה: $\{\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\},\{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}\}$. נוכיח בקצרה כי לא מתקיים $\{3\}R\phi$ (כלומר: הם בתאי חלוקה שונים), ואז נראה עבור כל קבוצה כי היא שייכת לאחת משני התאים הנ"ל לפי החוקיות לעיל.

לא מתקיים $\{1,2\} \subseteq \{3\}$, ולכן לפי עמוד 44 $\{3\}\Delta\phi \not\subseteq \{1,2\} \Leftrightarrow \{3\}\not R\phi$

יהי $A \in P(\{1,2,3\})$.

אילו $3 \in A$:

אז $3 \notin A\Delta\{3\}$.
מאחר ו$A\Delta\phi = A \subseteq \{1,2,3\}$, ו-$\{3\}\Delta\phi = \{3\} \subseteq \{1,2,3\}$ אז לפי סעיף א $A\Delta\{3\} \subseteq \{1,2,3\}$.
אבל $3 \notin A\Delta\{3\}$ ולכן בוודאות $A\Delta\{3\} \subseteq \{1,2\} \Leftarrow AR\{3\}$.

אילו $3 \notin A$:

אנחנו יודעים כי $A\Delta\phi = A \subseteq \{1,2,3\}$
אך מאחר ו $3 \notin A$ מתקיים $A\Delta\phi = A \subseteq \{1,2\}$ ולכן $AR\phi$.

אנחנו יודעים כי יחס שקילות מחלק את הקבוצה עליו הוא מוגדר לתאי שקילות, וכי כל קבוצה שייכת לתא יחיד, ולכן הוכחנו כי היחס מושרה ע"י החלוקה שהוצגה קודם.

נוכיח כי:

ג. S הוא יחס סדר חלקי

<u>אנטי-רפלקסיביות:</u> עבור כל קבוצה B מתקיים $B = B$, לכן בהכרח $B \not\subset B$.
לכן עבור כל $A \in P(\{1,2,3\})$, עבור $A\Delta\{1,2\}$ מתקיים $A\Delta\{1,2\} \not\subset A\Delta\{1,2\}$
ולכן לא מתקיים ASA.

<u>טרנזיטיביות:</u> $A, B, C \in P(\{1,2,3\})$ כך ש ASB, BSC. נוכיח כי ASC.
לפי הגדרת היחס $A\Delta\{1,2\} \subset B\Delta\{1,2\}$, $B\Delta\{1,2\} \subset C\Delta\{1,2\}$ ולכן לפי טרנזיטיביות היחס $\subset$
מתקיים $A\Delta\{1,2\} \subset C\Delta\{1,2\} \Leftarrow ASC$.

הוכחנו כי S מקיים את תכונות האנטי-רפלקסיביות והטרנזיטיביות ולכן הוא יחס סדר.

<u>היחס אינו משווה:</u> עבור $A = \{1\}$, $B = \{2\}$
מתקיים $A\Delta\{1,2\} = \phi \cup \{2\} = \{2\}$, $B\Delta\{1,2\} = \phi \cup \{1\} = \{1\}$
ולכן לא מתקיים ASB (כי $\{2\} \not\subset \{1\}$), לא מתקיים BSA (כי $\{1\} \not\subset \{2\}$),
וברור שלא מתקיים $A = B$.

לכן S יחס סדר שאינו משווה, כלומר הוא יחס סדר חלקי.

שאלה 2

עבור $A = \{< a,b > | a,b \in \boldsymbol{N}\setminus\{0\}\}$ הוגדרו שני יחסים R, T.

נוכיח כי:

א. (1) R הוא יחס שקילות

רפלקסיביות: יהי $< a,b > \in A$.
$< a,b > R < a,b > \Leftarrow ab = ab$

סימטריה: יהיו $< a,b >, < c,d > \in A$ ונניח $< a,b > R < c,d >$
לכן $.< c,d > R < a,b > \Leftarrow cb = ad \Leftarrow ad = cb$

טרנזיטיביות: יהיו $< a,b >, < c,d >, < e,f > \in A$ ונניח $< a,b > R < c,d >$, $< c,d > R < e,f >$
לכן $ad = cb, cf = ed$, כלומר $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ($b,d,f \neq 0$ לפי הגדרת a).
לכן לפי טרנזיטיביות השוויון $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, כלומר $af = eb$ ולכן $< a,b > R < e,f >$.

הוכחנו כי R מקיים את תכונות הרפלקסיביות, הסימטריה והטרנזיטיביות ולכן הוא יחס שקילות.

(2) T הוא יחס סדר

אנטי-רפלקסיביות: יהי $< a,b > \in A$.
$< a,b > T < a,b >$ לא מתקיים $\Leftarrow ab \nless ab \Leftarrow ab = ab$.

טרנזיטיביות: יהיו $< a,b >, < c,d >, < e,f > \in A$ ונניח $< a,b > T < c,d >$, $< c,d > T < e,f >$
לכן $ad < bc$, $cf < ed$.
מאחר וכל המספרים באי-השוויונות חיוביים ניתן להסיק כי $c > \frac{ad}{b}, c < \frac{ed}{f}$
לכן $\frac{ad}{b} < c < \frac{ed}{f}$, ולכן לפי טרנזיטיביות יחס ה"גדול מ" מתקיים $\frac{ad}{b} < \frac{ed}{f}$
מאחר וd הוא מספר חיובי ניתן לחלק את אי-השוויון בו ולקבל $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$.
ומאחר וכל המספרים באי-השוויון חיוביים ניתן להסיק כי $af < eb$ ולכן $< a,b > T < e,f >$.

הוכחנו כי T מקיים את תכונות האנטי-רפלקסיביות והטרנזיטיביות ולכן הוא יחס סדר.

ב. (1) לכל $\boldsymbol{m,n} \in \boldsymbol{N}\setminus\{\boldsymbol{0}\}$, אם $\boldsymbol{m \neq n}$ אז $\boldsymbol{S_{<n,1>} \cap S_{<m,1>} = \phi}$

נוכיח את הטענה בקונטרה-פוזיציה. נניח כי קיים איבר ב $S_{<n,1>} \cap S_{<m,1>}$ ונראה כי $m = n$.

קיים איבר ב $S_{<n,1>} \cap S_{<m,1>}$ $\Leftarrow$ קיים $< a,b > \in A$: $< a,b > R < n,1 > \wedge < a,b > R < m,1 >$
לכן לפי סימטריה וטרנזיטיביות R $< m,1 > R < n,1 >$, כלומר $m \cdot 1 = n \cdot 1$ ולכן $m = n$.

(2) הקבוצה $\{\boldsymbol{S_{<n,1>}} | \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}\setminus\{\boldsymbol{0}\}\}$ אינה חלוקה של A.

נראה כי $< 2,3 > \in A$ אינו שייך לאף אחת ממחלקות השקילות מהצורה $S_{<n,1>}$. נניח בשלילה כי קיים $n \in \boldsymbol{N}\setminus\{0\}$ כך ש $< 2,3 > \in S_{<n,1>}$. לכן $< 2,3 > R < n,1 >$, כלומר $2 \cdot 1 = 3n$

לכן $n = \frac{2}{3}$ אבל n טבעי חיובי!

ג. (1) היחס T הוא סדר חלקי

נראה כי קיימים שני זוגות סדורים ב A עבורם T אינו משווה. בחרתי בזוגות $A \ni <1,3>, <2,6>$.

גם $2 \cdot 3$ וגם $6 \cdot 1$ הם בעלי אותו הערך, ומכאן ש $6 \cdot 1 \nless 2 \cdot 3$, $2 \cdot 3 \nless 6 \cdot 1$,
כלומר לא $<1,3> T <2,6>$ ולא $<2,6> T <1,3>$, אך גם לא $<1,3> = <2,6>$.

(2) אין איברים מינימליים ומקסימליים בT עבור A.

נראה כי עבור כל $A \ni <a,b>$, הזוג הסדור אינו מינימלי ואינו מקסימלי.

<u>אינו מקסימלי:</u> האיבר $A \ni <a+1,b>$ מקיים $<a,b> T <a+1,b>$, כי $ab < (a+1)b$

<u>אינו מינימלי:</u> האיבר $<a,b+1>$ מקיים $<a,b+1> T <a,b>$ כי $ab < a(b+1)$.

שאלה 3

עבור כל שתי קבוצות A, B וכל פונקציה $f: A \to B$,
נסמן ב$g: P(B) \to P(A)$ את הפונקציה עבורה לכל $D \in P(B)$: $g(D) = f^{-1}[D]$

נוכיח כי:

א. f על אם ורק אם g חח"ע

$\Leftarrow$: נניח כי f על. יהיו $D_1, D_2 \in P(B)$. נניח $g(D_1) = g(D_2)$ ונוכיח $D_1 = D_2$.
לפי ההנחה $g(D_1) = g(D_2)$, כלומר $f^{-1}[D_1] = f^{-1}[D_2]$

מאחר ובשתי הקבוצות יש אותם איברים, גם בתמונותיהן יש אותם איברים.
לכן, $f[f^{-1}[D_1]] = f[f^{-1}[D_2]]$
לפי עמוד 138 f על $\Leftarrow$ $f\left[f^{-1}[D_1]\right] = D_1$ ו $f\left[f^{-1}[D_2]\right] = D_2$

ולכן $D_1 = D_2$.

$\Rightarrow$: נוכיח בקונטרה-פוזיציה. נניח בשלילה כי f לא על ונוכיח כי g לא חח"ע.
הפונקציה f לא על, לכן קיים $y \in B$ ללא מקור, כלומר $f^{-1}[\{y\}] = \phi$ ולכן $g(\{y\}) = \phi$
כמו כן, $g(\phi) = f^{-1}[\phi] = \phi$.

מצאנו שני איברים שונים בתחום של g להם אותה דמות, ולכן g לא חח"ע.

עבור A = B = N, ו-$f(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ n-1 & n > 0 \end{cases}$

נוכיח כי:

ב. (1) g חח"ע

נוכיח כי f על ולפי סעיף א ישתמע מכך כי g חח"ע.
יהי $y \in \boldsymbol{N}$ ונוכיח כי קיים לו מקור בf.

$y \in \boldsymbol{N} \Leftarrow y \geq 0 > -1 \Leftarrow y + 1 > 0$**.**
לכן $f(y+1) = (y+1) - 1 = y$ וקיים ל-y מקור.

נמצא את:

(2) $\boldsymbol{g(\{0, 1, 2, \dots n\})}$

הדמות של $\{0,1,2, \dots n\}$ ע"י g היא $f^{-1}[\{0,1,2, \dots n\}]$.
קל לראות כי $\{0,1,2, \dots n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{i\}$, ולכן התמונה של קבוצה זו היא $f^{-1}[\bigcup_{i=0}^{n} \{i\}]$.

לפי עמוד 132, $\bigcup_{i=0}^{n} f^{-1}[\{i\}] =$
כעת נותר להראות כי עבור $i = 0$, $f^{-1}[\{i\}] = \{0,1\}$ (כי הדמות של 1 היא 1-1=0 והדמות של 0 היא 0 עבור f, ואילו היה מקור אחר $y \geq 2$ ל-0 בf אז $f(y) = y - 1 = 0$ ולכן $y = 1$!)

ועבור $i > 0$, $f^{-1}[\{i\}] = \{i+1\}$ (כי $i = i + 1 - 1$) אילו היה קיים מקור נוסף $x > 0$ (0 אינו מקור של $i > 0$) ל-i, אז $f(x) = i$ ולכן $i = x - 1 \Leftarrow x = i + 1$.

מכאן נובע השוויון הבא:

$$g(\{0,1,2,\dots n\}) = \bigcup_{i=0}^{n} f^{-1}[\{i\}] = \{0,1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \dots \cup \{n+1\} = \{0,1,2,\dots n+1\}$$

(3) $\boldsymbol{g(N)}$

נרחיב את הטענה הקודמת, ונמשיך את האיחוד עד אינסוף.

$$g(\boldsymbol{N}) = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-1}[\{i\}] = \{0,1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \dots = \boldsymbol{N}$$

(4) $\boldsymbol{g(N \setminus\{0\})}$

לפי הגדרת הפונקציה $g(\boldsymbol{N}\setminus\{0\}) = f^{-1}(\boldsymbol{N}\setminus\{0\})$.
לפי עמוד 132, $= f^{-1}[\boldsymbol{N}]\setminus f^{-1}[\{0\}]$
לפי הטענות הקודמות, $= \boldsymbol{N}\setminus\{0,1\}$

ולכן $g(\boldsymbol{N}\setminus\{0\}) = \boldsymbol{N}\setminus\{0,1\}$.

נוכיח כי:

ג. g אינה על.

לקבוצה $\{1\} \in P(A)$ אין מקור עבור g. נניח בשלילה כי קיימת $D \in P(B)$ כך ש $g(D) = \{1\}$.

אז $f^{-1}[D] = \{1\}$, ומאחר ומדובר באותה קבוצה אז מתקיים $f\left[f^{-1}[D]\right] = f[\{1\}]$

f על ולכן $f[f^{-1}\left[[D]\right] = D$, ולכן $D = f[\{1\}] = \{0\}$

אבל $g(D) = g(\{0\}) = f^{-1}[\{0\}] = \{0,1\} \neq \{1\}$!

שאלה 4

נתונות $f, g: \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}$ המוגדרות כך:

לכל $n \in \boldsymbol{Z}$, $m \in \boldsymbol{N}$:

$$f < m, n >=< m, 2m - n >$$

$$g < m, n >=< m, m - 2n >$$

נוכיח כי:

א. (1) f הפיכה

נוכיח כי f על. יהי $< a, b >\in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}$ ונראה כי קיים מקור עבורן ב-f, והוא $< a, 2a - b >$:

אנחנו יודעים בוודאות כי $2a - b \in \boldsymbol{Z}$ כי $2a, b$ הם מספרים שלמים (כפל שלמים זו פעולה סגורה) ולכן $2a - b \in \boldsymbol{Z}$ (חיסור שלמים זו פעולה סגורה)

$$f < a, 2a - b >=< a, 2a - (2a - b) >=< a, b >$$

כעת נוכיח כי f היא חח"ע. יהיו $< a_1, b_1 >, < a_2, b_2 >\in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}$ ונניח כי $f < a_1, b_1 >= f < a_2, b_2 >$.

לכן $< a_1, 2a_1 - b_1 >=< a_2, 2a_2 - b_2 >$
כלומר $a_1 = a_2$ וגם $2a_1 - b_1 = 2a_2 - b_2$.

נוכל לחסר משני אגפי המשוואה השנייה את $2a_1$ ו$2a_2$ בהתאמה,
כי $a_1 = a_2$ ולכן לפי כלל הצמצום בכפל $2a_1 = 2a_2$.
קיבלנו כי $-b_1 = -b_2$, ולפי כללי הצמצום בכפל $b_1 = b_2$.

לכן $< a_1, b_1 >=< a_2, b_2 >$ ולכל תמונה יש מקור אחד לכל היותר עבור f

בהינתן f הפיכה, נמצא את:

(2) $f^{-1} =?$

תחום וטווח הפונקציה f^{-1} יהיו זהים לטווח ותחום f בהתאמה. לכן $f^{-1}: \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}$.

בחלק הקודם של הסעיף הוכחתי כי המקור של $< a, b >\in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}$ עבור f הוא $< a, 2a - b >$, ולכן:

$$f^{-1} < a, b >=< a, 2a - b >$$

למעשה, $f^{-1} = f$ כי עבור כל $< a, b >\in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}$
מתקיים $f < a, b >= f^{-1} < a, b >=< a, 2a - b >$

נוכיח כי:

ב. g אינה הפיכה

נוכיח כי g אינה על, כלומר קיים זוג סדור שאין לו מקור עבור g.
הזוג הסדור $<0,1>$ מקיים טענה זו.

נניח כי קיים זוג סדור $<m,n>\in \boldsymbol{N}\times \boldsymbol{Z}$ כך ש $g<m,n>=<0,1>$.

לכן לפי הגדרת g $m=0, m-2n=1$, כלומר $-2n=1$.
לכן $n=-0.5$ אבל n שלם!

טענת עזר: $\boldsymbol{g}[\cup_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty}\{<\boldsymbol{i},\boldsymbol{0}>\}]=\cup_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty}\boldsymbol{g}[\{<\boldsymbol{i},\boldsymbol{0}>\}]$

כאשר i=1, $\cup_{i=0}^{1} g[\{<i,0>\}]=g[\{<0,0>\}]\cup g[\{<1,0>\}]=g[\{<0,0>\}\cup\{<1,0>\}]$

לפי קיבוצויות איחוד, $\cup_{i=0}^{2} g[\{<i,0>\}]=\cup_{i=0}^{1} g[\{<i,0>\}]\cup g[\{<2,0>\}]$
$=g\left[\cup_{i=0}^{1}\{<i,0>\}\right]\cup g[\{<2,0>\}]$
לפי עמוד 132 $=g\left[\cup_{i=0}^{1}\{<i,0>\}\cup\{<2,0>\}\right]=g[\cup_{i=0}^{2}\{<i,0>\}]$

וכך הלאה, נחזור על הפעולה כל פעם שנרצה להוסיף את האיבר הבא בתור.

נמצא את:

ג. (1) $\boldsymbol{g}[\boldsymbol{N}\times\{\boldsymbol{0}\}]$

מאחר ו $\boldsymbol{N}\times 0=\{<n,0>|n\in\boldsymbol{N}\}$, ניתן להציג את הקבוצה בייצוג $\cup_{i=0}^{\infty}\{<i,0>\}$

לכן $g[\boldsymbol{N}\times 0]=g[\cup_{i=0}^{\infty}\{<i,0>\}]$
לפי טענת העזר $=\cup_{i=0}^{\infty} g[\{<i,0>\}]$
לפי הגדרת g: $=\cup_{i=0}^{\infty}\{<i,i-2\cdot 0>\}=\cup_{i=0}^{\infty}\{<i,i>\}$

$$g[\boldsymbol{N}\times\{0\}]=\bigcup_{i=0}^{\infty}\{<i,i>\}=\{<0,0>\}\cup\{<1,1>\}\cup\{<2,2>\}\cup\ldots=\{<n,n>|n\in\boldsymbol{N}\}$$

(2) $\boldsymbol{g^{-1}[N \times \{0\}]}$

בדומה לסעיף הקודם, נציג את הקבוצה $\boldsymbol{N} \times 0$ בתור $\bigcup_{i=0}^{\infty}\{< i, 0 >\}$

לפי עמוד 132 $g^{-1}[\bigcup_{i=0}^{\infty}\{< i, 0 >\}] = \bigcup_{i=0}^{\infty} g^{-1}[\{< i, 0 >\}]$

נמצא עבור כל האיברים מהצורה $< i, 0 >$ את המקורות שלהם.
יהיו $< a, b >\in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{Z}$ כך ש $g < a, b >=< i, 0 >$.
לכן לפי הגדרת g: $a = i$, $a - 2b = 0 \Leftarrow b = \frac{i}{2}$.

אילו i זוגי, המקור מוגדר היטב, לכן $g^{-1}[\{< i, 0 >\}] = \{< i, \frac{i}{2} >\}$
אילו i אי-זוגי, המקור לא מוגדר כי b מספר שלם, לכן $g^{-1}[\{< i, 0 >\}] = \phi$

לכן ניתן לכתוב את האיחוד באופן הבא, תוך התחשבות בגללי הבליעה של איחוד קבוצה ריקה
$\bigcup_{i=0}^{\infty} g^{-1}[\{< i, 0 >\}] = \bigcup_{i=0}^{\infty}\{< 2i, i >\}$. לכן:

$$g^{-1}[N \times \{0\}] = \bigcup_{i=0}^{\infty}\{< 2i, i >\} = \{< 0,0 >\} \cup \{< 2,1 >\} \cup \{< 4,2 >\} \cup \dots = \{< 2n, n > | n \in \boldsymbol{N}\}$$