מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

20/01/2023

שאלה 1

נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{nx}{e^x+n+x}$ המוגדרות (ורציפות) ב$[0,\infty)$.
נחשב את הפונקציה הגבולית. לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^x+n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{e^x \cdot \frac{1}{n} + 1 + x \cdot \frac{1}{n}} = \frac{x}{1} = x$$

כמו כן, מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [0,\infty)$:

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{nx}{e^x+n+x} - x| = |\frac{nx - x(e^x+n+x)}{e^x+n+x}| = |\frac{-x^2 - xe^x}{e^x+n+x}| = \frac{x^2+xe^x}{e^x+n+x}$$

סעיף א

ניקח את הסדרה $x_n = n$. מתקיים:

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n^2+ne^n}{e^n+2n} = \frac{\frac{n^2}{e^n}+n}{1+2\cdot\frac{n}{e^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

מכאן, לפי למה 6.3, נסיק כי (f_n) לא מתכנסת במידה שווה לf.

סעיף ב

יהיו $0 \leq a < b$ כלשהם.
נדגיש כי מתקיים $[a,b] \subseteq [0,\infty)$ והפונקציה הגבולית f נשארת זהה.
נבחר את הסדרה $\mu_n = \frac{b^2+be^b}{e^a+n+a}$. לכל $x \in [a,b], n \in \mathbb{N}$ נקבל:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2+xe^x}{e^x+n+x} \underset{a\leq x\leq b}{\leq} \frac{b^2+be^b}{e^a+n+a} = \mu_n$$

מתקיים $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (a,b קבועים) ולכן לפי שאלה 7 ביחידה 6 נסיק כי (f_n) מתכנסת במ"ש לf.
לכן, לפי משפט 6.8 נקבל

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

ובכך סיימנו את ההוכחה.