19.07.2021

מטלת מנחה 11 – מתמטיקה בדידה

שאלה 1

א. לא נכון
ב. נכון
ג. לא נכון
ד. נכון
ה. לא נכון
ו. לא נכון
ז. נכון
ח. נכון

שאלה 2

יהיו A, B, C קבוצות.

בשאלה זו, נניח כי שלושת הקבוצות חלקיות ליקום U

נוכיח:

א. $(\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})\backslash(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$

נוכיח על פי זהויות אלגבריות כאשר נקודת המוצא שלנו היא $(A \cup B)\backslash(B \cap C)$.
לפי המשפט בעמוד 46, $= (A \cup B) \cap (B \cap C)^c$
לפי דה-מורגן, $= (A \cup B) \cap (B^c \cup C^c)$
לפי פילוג $= \big(A \cap (B^c \cup C^c)\big) \cup (B \cap (B^c \cup C^c))$
לפי פילוג, $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \cup (B \cap B^c) \cup (B \cap C^c)$
לפי המשפט בעמוד 46, $= (A\backslash B) \cup (A\backslash C) \cup (B\backslash B) \cup (B\backslash C)$
לפי חוקי הביטול בעמודים 33, 43: $= (A\backslash B) \cup (A\backslash C) \cup \phi \cup (B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$

נוכיח כי $(A\backslash C) \subseteq (A\backslash B) \cup (B\backslash C)$, ולכן ניתן לוותר על איחודי לפי המשפט בעמוד 33 הקובע כי $A \cup B = B$ עבור כל $A \subseteq B$.
אילו $A\backslash C = \phi$ אז ברור ש $\phi \subseteq (A\backslash B) \cup (B\backslash C)$.
אחרת, יהי $x \in A\backslash C \Leftarrow x \in A$, $x \notin C$.
מקרה 1: $x \in B \Leftarrow x \in B\backslash C \Leftarrow x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash C)$
מקרה 2: $x \notin B \Leftarrow x \in A\backslash B \Leftarrow x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash C)$.

לכן הביטוי שווה ל $(A\backslash B) \cup (B\backslash C)$.

ב. אם $\boldsymbol{P(C) = P(A) \cup P(B)}$ אז $\boldsymbol{C = A}$ או $\mathbf{C = B}$

נניח בשלילה כי $A, B \neq C$ ונוכיח כי $P(C) \neq P(A) \cup P(B)$ (קונטרה-פוזיציה)

לפי ההנחה $A \neq C$, לכן $A \not\subseteq C \vee C \not\subseteq A$. כמו כן מתקיים $B \not\subseteq C \vee C \not\subseteq B$.

מקרה 1: $A \not\subseteq C$ לכן קיים $x \in A$, $x \notin C$
לכן $\{x\} \in P(A)$, $\{x\} \notin P(C)$.

לפי המשפט בעמוד 33, $P(A) \subseteq P(A) \cup P(B)$, ולכן $\{x\} \in P(A) \cup P(B)$ אך אינו ב$P(C)$ ולכן הקבוצות אינן שוות.

מקרה 2: $C \not\subseteq A$ וגם $B \not\subseteq C$, לכן קיים $y \in B$, $y \notin C$
לכן $\{y\} \in P(B)$, $\{y\} \notin P(C)$.

לפי המשפט בעמוד 33, $P(B) \subseteq P(A) \cup P(B)$, ולכן $\{y\} \in P(A) \cup P(B)$ אך אינו ב$P(C)$ ולכן הקבוצות אינן שוות.

מקרה 3: $C \not\subseteq A, C \not\subseteq B$. לכן קיימים $a, b \in C$: $a \notin A$, $b \notin B$.

לכן $\{a, b\} \in P(C)$,
$\{a, b\} \notin P(A)$ (כי $a \notin A \Leftarrow \{a, b\} \not\subseteq A$),
ו$\{a, b\} \notin P(B)$ (באופן דומה עבור B, b)

לכן $\{a, b\} \notin P(A) \cup P(B)$ אבל הינו ב$P(C)$ ולכן הקבוצות אינן שוות.

19.07.2021

ג. אם A, B סופיות ואם $|P(A)| = 2 \cdot |P(A\backslash B)|$ אז $|A \cap B| = 1$

לפי המשפט בעמוד 42 מתקיים כי $A\backslash B \subseteq A$.
לכן לפי המשפט בעמוד 29 עבור A סופית מתקיים כי גם $\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}$ סופית.

לפי ההנחה $|P(A)| = 2 \cdot |P(A\backslash B)|$,
לכן לפי המשפט עבור $A, A\backslash B$ קבוצות סופיות: $2^{|A|} = 2 \cdot 2^{|A\backslash B|}$,
כלומר $|\mathrm{A}| = 1 + |\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}|$.

לפי המשפט בעמוד 37 עבור $A\backslash B, A \cap B$:
$|(A\backslash B) \cup (A \cap B)| = |\mathrm{A}\backslash B| + |A \cap B| - |(A\backslash B) \cap (A \cap B)|$

הקבוצה $(A\backslash B) \cap (A \cap B)$ היא קבוצה ריקה משום שעבור כל $x \in A\backslash B$, $x \notin B \Leftarrow x \notin A \cap B$.

הקבוצה $(A\backslash B) \cup (A \cap B)$ היא הקבוצה A משום שלפי המשפט בעמוד 46 $\mathrm{A}\backslash\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap B^c$,
ולכן $(A\backslash B) \cup (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$.
לפי פילוג, השוויון לעיל שווה ל $A \cap (B \cup B^c)$.
לפי המשפט בעמוד 45 עבור B: $\mathrm{B} \cup B^c = U$ ולכן השוויון לעיל שווה ל$\mathrm{A} \cap U$.
מאחר ו $\mathrm{A} \subseteq U$, לפי המשפט בעמוד 45 $\mathrm{A} \cap U = A$.

לכן מתקיים $|A| = |A\backslash B| + |A \cap B| - |\phi|$ וגם $|A| = 1 + |A\backslash B|$

לכן $|A\backslash B| + |A \cap B| - 0 = 1 + |A\backslash B|$, ולכן $|A \cap B| = 1$.

19.07.2021

שאלה 3

יהיו $A, B, C \subseteq U$ קבוצות.

נוכיח:

א. אם $\mathbf{A} \subset \boldsymbol{B}$ אז $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{c}} \neq \boldsymbol{U}$

לפי ההנחה $\mathrm{A} \subset B$, כלומר $(\mathrm{A} \subseteq B \wedge B \nsubseteq A)$
לכן לפי $B \nsubseteq A$ קיים $x \in B$: $x \notin A$.
מ $x \in B$ נובע כי $x \notin B^c$
לכן $(x \notin A \wedge x \notin B^c)$, כלומר $x \notin A \cup B^c$

כמו כן לפי הנתון $B \subseteq U$, לכן עבור $x \in B$ מתקיים $x \in U$

מצאנו איבר השייך לU שאינו שייך ל$A \cup B^c$. מכאן שהקבוצות בהכרח אינן שוות.

ב. אם $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{C}} \Delta \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{c}} \Delta \boldsymbol{B}$ אז $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$

לפי הנתון $A^c \Delta B = B^C \Delta C$
לפי חילופיות $\mathrm{A}^c \Delta B = C \Delta B^C$
נפעיל ΔB^c מימין ונקבל $(A^c \Delta B) \Delta B^c = (C \Delta B^c) \Delta B^c$
לפי קיבוציות $A^c \Delta (B \Delta B^c) = C \Delta (B^c \Delta B^c)$

לפי עמוד 43 $B^c \Delta B^c = \phi$**,** לפי עמוד 47 $B \Delta B^c = U$
ולכן $\mathrm{A}^c \Delta U = C \Delta \phi$

לפי עמוד 43 $\mathrm{C} \Delta \phi = C$**,** $A^c \Delta U = (A^c)^c = A$**,**
ולכן $\mathrm{A} = \mathrm{C}$**.**

ג. אם $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{B} \Delta \boldsymbol{C}$ אז $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$.

אילו $\mathrm{A} \cap B = \phi$ אז ברור ש $\phi \subseteq C$

אחרת, יהי $x \in A \cap B$ ונוכיח כי $x \in C$.

לפי ההנחה $A \cap B \subseteq A \Delta B \Delta C$, לכן $x \in A \Delta B \Delta C$.

לפי קיבוציות $x \in (A \Delta B) \Delta C$, כלומר $x \in A \Delta B \ xor \ x \in C$.

מאחר ו $x \in A \cap B$, כלומר $x \in A \wedge x \in B$, לא מתקיים $(x \in A \ xor \ x \in B)$ ולכן $x \notin A \Delta B$.

לכן מתקיים $(x \in A \Delta B \ xor \ x \in C) \wedge x \notin A \Delta B \Leftarrow x \in C$.

שאלה 4

נמצא קבוצות מהסוג A_k השוות ל-

א. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$

נראה כי עבור **k=2** יתקבל שוויון נכון

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} = A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_8 \cup \dots$$

עבור כל $k \in \boldsymbol{N}$, הקבוצה $\mathrm{A}_{2k} = \{2kn | n \in \boldsymbol{N}\}$ ולכן עבור כל $x \in A_{2k}$ קיים $n \in \boldsymbol{N}$ כך ש $x = 2kn = 2(kn)$.
המספר kn הוא טבעי (כפל טבעיים הוא טבעי), מכאן שלפי הגדרת A_2 מתקיים כי $x \in A_2$.
במילים אחרות, כל קבוצה מהצורה A_{2k} היא חלקית לקבוצה A_2.

מכאן אנו מסיקים שהביטוי בשאלה הוא איחוד אינסופי של הקבוצה A_2 עם קבוצות החלקיות לה, ולכן הביטוי שווה לA_2.

ב. $\bigcap_{k=1}^{5} A_k$

$$\bigcap_{k=1}^{5} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$$

מהגדרות הקבוצות לעיל, ניתן להסיק כי הקבוצה השווה לאיחוד הקבוצות לעיל היא הקבוצה המכילה את הכפולות האי-שליליות המשותפות של 1, 2, 3, 4, 5. כלומר, $k = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ (אין צורך לספור את 2 משום שכל כפולה משותפת של 2 עם 4 היא **בהכרח** כפולה של 4).

לכן **k=60**.

ג. $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots$$

בדומה לסעיף הקודם, עלינו למצוא את הכפולות האי-שליליות המשותפות של **כל** המספרים.

עבור כל $n \in \boldsymbol{N}$, אם $n \geq 2$ אז $n+1$ לא מתחלק ב-n.
זאת משום שהמחלקים של n הקרובים ביותר ל $n+1$ הם $n, 2n$, כאשר $n+1 \neq n$ ו $n+1 \neq 2n$, אחרת $n = 1$ ואילו לפי הנחת הטענה $n \geq 2$.

קיבלנו שאין אף $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$ השייך לקבוצה. גם 1 לא שייך לקבוצה כי $1 \notin A_2$. נשארנו עם הקבוצה הסופית $\{0\}$, הלא היא $A_0 = \{0 \cdot 0, 1 \cdot 0, 2 \cdot 0, \dots\}$. לכן השוויון נכון עבור **k=0**.

ד. $\mathbf{A_6} \cup \{\boldsymbol{x} + \mathbf{3} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A_6}\}$

נראה כי עבור **k=3** יתקבל שוויון נכון.

הקבוצה A_6 שווה ל$\{0,6,12,18, \dots\}$ (כל הכפולות הזוגיות האי-שליליות של 3), והקבוצה $\{x+3|x \in A_6\}$ שווה ל $\{3,9,15,21, \dots\}$ (כל הכפולות האי-שליליות האי-זוגיות של 3).

איחוד הכפולות האי-שליליות האי-זוגיות של 3 עם הכפולות האי-שליליות הזוגיות של 3 ייתן לנו את קבוצת כל הכפולות האי-שליליות של 3, כלומר את הקבוצה $A_3 = \{0,3,6,9,12,15, \dots.\}$