מטלת מנחה 17 - אינפי 1

שאלה 1

תהא f רציפה בכל $\mathbb{R}$, ותהא x_0 נקודת מקסימום מקומי בf.
לפי ההגדרה, קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x \in N_\delta(x_0)$ מתקיים $f(x) \le f(x_0)$
נניח כי אין לf נקודות קיצון נוספות, ונרצה להוכיח כי x_0 נקודת מקסימום בf

נניח בשלילה כי f לא מקבלת מקסימום בx_0, כלומר קיים x' ממשי כך ש $f(x') > f(x_0)$. נניח, ללא הגבלת הכלליות, כי $x' > x_0$, אך אם המצב הפוך ההוכחה אנלוגית לחלוטין.

טענה: בקטע $[x_0, x']$, f מקבלת מינימום בx_0.
הוכחה: נתון כי f רציפה בישר הממשי ובפרט ב$[x_0, x']$.
לכן לפי ויירשטראס (5.37), f מקבלת מינימום ב$[x_0, x']$.
נקודת המינימום אינה יכולה להיות פנימית, משום שלפי הנתון לf אין נקודות קיצון מקומיות פרט לx_0. לכן, המינימום בקטע הוא x_0 או x', ומהנחת השלילה, $f(x_0) < f(x')$ ולכן x_0 נקודת מינימום בקטע.

כעת, נסמן $\delta' = \min\{\delta, x' - x_0\}$. ברור ש $x' - x_0 > 0$ (לפי ההנחה כי $x' > x_0$), וכן $\delta > 0$ לפי הגדרה, ולכן $\delta' > 0$. לכן, נתבונן בקטע הלא-ריק $(x_0, x_0 + \delta')$:

טענה: $(x_0, x_0 + \delta') \subseteq [x_0, x'],\ N_\delta(x_0)$
הוכחה: יהא $x \in (x_0, x_0 + \delta')$. מתקיים $x_0 < x < x_0 + \delta'$.
לפי בחירת δ', מתקיים $x_0 + \delta' \le x_0 + x' - x_0 = x' \Leftarrow \delta' \le x' - x_0$,
ולכן $x \in [x_0, x'] \Leftarrow x_0 \le x \le x'$.
בנוסף, $\delta > 0 \Leftarrow x_0 - \delta < x_0$, וכן לפי בחירת δ', מתקיים $x_0 + \delta' \le x_0 + \delta \Leftarrow \delta' \le \delta$
ולכן $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = N_\delta(x_0) \Leftarrow x_0 - \delta < x_0 < x < x_0 + \delta' < x_0 + \delta$

טענה: לכל $x \in (x_0, x_0 + \delta')$, $f(x) = f(x_0)$
הוכחה: יהא $x \in (x_0, x_0 + \delta')$
אז מתקיים $x \in [x_0, x']$ ולכן מטענה קודמת $f(x) \ge f(x_0)$.
כמו כן $x \in N_\delta(x_0)$ ולכן $f(x) \le f(x_0)$, ובהכרח $f(x) = f(x_0)$.

מהטענה האחרונה נסיק כי f קבועה ב $(x_0, x_0 + \delta')$, ולכן כל נקודה בקטע זה היא נקודת קיצון מקומית, בסתירה לנתון!
לכן בהכרח f תקבל מקסימום בx_0.

שאלה 2

תהא f רציפה ב $[a, b]$ וגזירה ב(a, b)
נניח כי יש נקודה $c \in (a, b)$ כך ש$(f(c) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$.

ללא הגבלת הכלליות, $f(c) - f(a) < 0$ ו-$f(b) - f(c) > 0$, ולכן $f(c) < f(a), f(b)$. במקרה השני, $f(c) > f(a), f(b)$ וההוכחה אנלוגית לחלוטין.

נרצה להוכיח כי קיימת נק' $t \in (a, b)$ כך ש $f'(t) = 0$.

טענה: קיימת נקודה $p \in (a, c)$ כך ש $f'(p) < 0$.
הוכחה: f רציפה ב$[a, b]$, ובפרט רציפה ב$[a, c]$, וכן גזירה ב(a, b) ובפרט גזירה ב(a, c).
לכן, לפי משפט לגרנז' (8.6), קיימת נקודה $p \in (a, c)$ כך ש $f'(p) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.
נשים לב כי מכנה הביטוי חיובי: $c \in (a, b) \Leftarrow c > a \Leftarrow c - a > 0$.
כמו כן, לפי הנתון $f(c) < f(a) \Leftarrow f(c) - f(a) < 0$.
לכן, $f'(p) < 0$ כמנה של מספר שלילי ומספר חיובי.

באופן דומה ניתן להוכיח כי קיימת נקודה $q \in (c, b)$ כך ש $f'(q) > 0$.

כעת, מאחר ו $a < p$ ו-$q < b$ נקבל כי $[p, q] \subseteq (a, b)$, ומהנתון שf גזירה ב (a, b) נסיק כי f גזירה בתת-הקטע $[p, q]$.
לכן, לפי משפט דארבו עבור $f'(p) < 0 < f'(q)$, קיימת נקודה $t \in [p, q] \subseteq (a, b)$ כך ש$f'(t) = 0$, ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 3

תהא f גזירה ב$[0, 1]$ כך שלכל $x \in [0, 1]$ מתקיים $0 \le f'(x) \le 1$

נרצה להוכיח כי קיימת נקודה $x_0 \in [0, 1]$ כך ש $f'(x_0) = \frac{3x_0}{\sqrt{3x_0^2+6}}$

נגדיר: לכל $x \in [0, 1]$, $\Upsilon(x) = f(x) - \sqrt{3x^2 + 6}$.

טענה: Υ גזירה ב $[0, 1]$.

הוכחה: ראשית, נדגיש כי הפולינום $3x^2 + 6$ גזיר ב$[0, 1]$.

כאשר $x \in [0, 1]$, $0 \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow 6 \le 3x^2 + 6 \le 9$.

לכן הערך שבתוך השורש מוגדר וגדול מ-0, ומכאן שההרכבה $\sqrt{3x^2 + 6}$ גזירה בקטע.

כסכום והרכבה של פונקציות גזירות ב$[0, 1]$, הפונקציה Υ גזירה ב $[0, 1]$.

נגזור את הפונקציה. לכל $x \in [0, 1]$,

$$\Upsilon'(x) = f'(x) - \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+6}} = f'(x) - \frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}}$$

טענה: לכל $x \in [0, 1]$, אם $\Upsilon'(x) = 0$, אז $f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}}$

הוכחה: הטענה נובעת ישירות מפונקציית הנגזרת של Υ. יהא $x \in [0, 1]$ ונניח $\Upsilon'(x) = 0$. אכן:

$$\Upsilon'(x) = f'(x) - \frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}}$$

נחשב ערכי נגזרות, כאשר לפי הנתון $0 \le f'(x) \le 1$ ובפרט $f'(0) \ge 0$ ו$f'(1) \le 1$

$$\Upsilon'(0) = f'(0) - \frac{3\cdot0}{\sqrt{3\cdot0+6}} = f'(0) \ge 0$$

$$\Upsilon'(1) = f'(1) - \frac{3\cdot1}{\sqrt{3\cdot1+6}} = f'(1) - 1 \le 0$$

אילו $\Upsilon'(0) = 0$ או $\Upsilon'(1) = 0$, אז לפי הטענה עבור $x = 0, 1$ בהתאמה, $f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}}$.

אחרת, מתקיים $\Upsilon'(0) > 0 > \Upsilon'(1)$,

ולכן לפי דארבו (8.10) קיים $x_0 \in [0, 1]$ כך ש $\Upsilon'(x_0) = 0 \Leftarrow f'(x_0) = \frac{3x_0}{\sqrt{3x_0^2+6}}$ וסיימנו.

שאלה 4

תהא $f(x) = \sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ ונוכיח כי f רב"ש ב $[0,\infty)$.
נבחין כי f רציפה ב $[0,\infty)$ כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות ידועות - פונקציית השורש לפי 5.5+5.17, ופונקציית הסינוס לפי 5.7. משיקולים דומים f גזירה ב $(0,\infty)$.
בפרט, f רציפה ב $[0,1]$, ולכן לפי קנטור (משפט 5.48) f רב"ש ב $[0,1]$.

טענה: לכל $x \in [1,\infty)$, $|f'(x)| \le 1$.
הוכחה: f גזירה ב$(0,\infty)$, ובפרט גזירה בקטע $[1,\infty)$. כעת, משהראינו שהנגזרת מוגדרת היטב בקטע,

$$f'(x) = [\sqrt{x}\sin\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\cdot\cos\sqrt{x}$$

כעת, נכניס לערך מוחלט:

$$|f'(x)| = |\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\cdot\cos\sqrt{x}| \le_{(1)}$$
$$\le |\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x}| + |\frac{1}{2}\cdot\cos\sqrt{x}| =_{(2)}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot|\sin\sqrt{x}| + \frac{1}{2}\cdot|\cos\sqrt{x}| \le_{(3)}$$
$$\le \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \le_{(4)} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

מעברים:

(1) לפי אי-שוויון המשולש, טענה 1.49
(2) מתכונות הערך המוחלט, טענה 1.48 ($|ab| = |a||b|$)
וכן מתכונות פונקציית השורש, $x \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x} \ge 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$
(3) פונקציות הסינוס והקוסינוס מקיימות $|\sin t|, |\cos t| \le 1$ לכל t ממשי ובפרט עבור $t = \sqrt{x}$.
(4) $x \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x} \ge 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{1}{2}$

הוכחנו כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חסומה ב$[1,\infty)$, ולכן משאלה 9 ביחידה 8 f רב"ש ב$[1,\infty)$.
כעת, לפי שאלה 49 ביחידה 5, f רב"ש באיחוד הקטעים $[0,\infty)$.

שאלה 5

תהא f גזירה ב$[a, \infty)$

א. טענה: אם קיים קבוע $m > 0$ כך ש $f'(x) \geq m$ לכל $x \in [a, \infty)$, אז $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

טענת עזר: לכל $x > a$, תהא $g(x) = f(a) - ma + mx$, ומתקיים $f(x) \geq g(x)$.
הוכחת טענת העזר: יהא $x > a$. לפי 7.9, f גזירה ולכן רציפה ב$[a, \infty)$ ובפרט ב$[a, x]$.
כמו כן, f גזירה ב (a, x). לכן, לפי משפט לגרנז' (8.6), קיים $c \in (a, x)$ כך ש$f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
לפי הנתון עבור $c \geq a$ מתקיים $f'(c) \geq m$, ולכן $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq m$.
מאחר ו$x > a$ (כלומר $x - a > 0$), נכפול את אי-השוויון בביטוי זה תוך שמירה על הסימן,
ונקבל $f(x) - f(a) \geq m(x - a) = mx - ma$,
ולכן $f(x) \geq f(a) - ma + mx = g(x)$ וסיימנו.
הוכחת הטענה: לפי אריתמטיקה + כללי "∞ + מספר ממשי", "$\infty \cdot$ מספר חיובי",

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} f(a) - ma + mx = "f(a) - ma + m \cdot \infty" = \infty$$

לפי טענת העזר, לכל $x > a$ מתקיים $f(x) \geq g(x)$, ולכן לפי היינה + 2.45 $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$

טענה: אם קיים $m > 0$ כך ש $f'(x) <- m$ לכל $x \in [a, \infty)$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x) =- \infty$.

הוכחה: נגדיר $h(x) =- f(x)$ לכל $x \in [a, \infty)$.
h גזירה בקטע כמכפלה של פונקציות גזירות, ולכל $x \in [a, \infty)$ מתקיים $h'(x) =- f'(x)$.
לפי הנתון $m < - f'(x)$, ולכן לכל x בקטע מתקיים $h'(x) =- f'(x) > m$
נסיק, לפי הטענה הקודמת, כי $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$.
מאחר ו$f(x) =- h(x)$, לפי אריתמטיקה נסיק:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} - h(x) = " - 1 \cdot \infty" =- \infty$$

ובכך סיימנו את ההוכחה.

תהא f גזירה פעמיים (ובפרט גזירה) ב$(0, \infty)$ המקיימת $f''(x) > 0$ לכל $x \in (0, \infty)$ ומתכנסת לגבול סופי L באינסוף. מהנתון f'' חיובית ב $(0, \infty)$ נסיק, לפי 8.17, כי f' עולה בקטע זה.

ב. טענה: $f'(x) < 0$ לכל $x \in (0, \infty)$.
הוכחה: נניח בשלילה כי קיים x_0 כלשהו כך ש $f'(x) \geq 0$.
אז נבחר $a > x_0$ כלשהו, ולפי מונוטוניות $f' \Leftarrow f'(a) > f'(x_0) \geq 0$.
כעת, נסמן $m = f'(a) > 0$. לכל $x \geq a$, לפי מונוטוניות, $f'(x) \geq f'(a) = m$
ולכן, מהסעיף הקודם, f מתכנסת לגבול אינסופי באינסוף, בסתירה לנתון!

מטענה זו נסיק, לפי 8.17, כי f יורדת בקטע.

טענה: $\sup f'((0,\infty)) = 0$
הוכחה: נוכיח לפי אפיון הסופרימום (טענה 3.9).
בטענה הקודמת הוכחנו כי 0 חסם עליון של $f'((0,\infty))$.
כעת, יהא $\epsilon > 0$ ונרצה להוכיח כי f' מקבלת ערך הגדול מ$-\epsilon = 0 - \epsilon$ ב$(0,\infty)$.
לפי הגדרת הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, עבור $\frac{\epsilon}{2}$ קיים M כך שלכל $x > M$, $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$.
נבחר $x' > max\{M, 0\}$ כלשהו.
אז בפרט עבור x' ועבור $x' + 1 > x' > M$, $|f(x') - L|, |f(x' + 1) - L| < \frac{\epsilon}{2}$.
מאחר וf יורדת ב$(0,\infty)$, עבור $x' + 1 > x' > 0$ מתקיים $f(x' + 1) < f(x')$, ולכן:
$$f(x') - f(x' + 1) = |f(x') - f(x' + 1)| = |(f(x') - L) + (L - f(x' + 1))|$$
כעת, לפי אי-שוויון המשולש (1.49):
$$|(f(x') - L) + (L - f(x' + 1))| \le |f(x') - L| + |L - f(x' + 1)|$$
ולפי אי-השוויונות מקודם:
$$|f(x') - L| + |L - f(x' + 1)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$
לסיכום: $f(x') - f(x' + 1) < \epsilon \Leftarrow f(x' + 1) - f(x') > -\epsilon$

כעת, נתבונן בקטע הסגור $[x', x' + 1]$. מאחר ו-f גזירה ב$(0,\infty)$, ובפרט גזירה ב$[x', x' + 1]$ לפי 7.9 f רציפה בקטע סגור זה. כמו כן, f גזירה בתת-הקטע $(x', x' + 1)$.
לכן מתקיימים תנאי משפט לגרנז', וקיים $c \in (x', x' + 1)$ כך ש:
$$f'(c) = \frac{f(x'+1)-f(x')}{(x'+1)-x'} = \frac{f(x'+1)-f(x')}{1} = f(x' + 1) - f(x') > -\epsilon$$
מטרנזיטיביות $c > x' > max\{M, 0\} \ge 0$ ולכן $c \in (0,\infty)$.
הוכחנו כי קיים $c \in (0,\infty)$ כך ש $f'(c) > -\epsilon$, ולכן קיים ב$f'((0,\infty))$ ערך הגדול מ$-\epsilon$ – וסיימנו

טענה: $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$

הוכחה: נוכיח ישירות מהגדרת הגבול.
יהא $\epsilon > 0$. לפי הסעיף הקודם, קיים $x_0 \in (0,\infty)$ כך ש $f'(x_0) > 0 - \epsilon$
כעת, יהא $x > x_0$ כלשהו. f' עולה ולכן $f'(x) > f'(x_0) \Leftarrow -f'(x) < -f'(x_0)$
כמו כן, מטענות קודמות $f' < 0$, ולכן:
$$|f'(x) - 0| = |f'(x)| = -f'(x) < -f'(x_0) < -(-\epsilon) = \epsilon$$
הוכחנו כי לכל $\epsilon > 0$ קיים x_0 כך שלכל $x > x_0$ מתקיים $|f'(x) - 0| < \epsilon$, ולכן לפי הגדרת הגבול באינסוף $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

שאלה 6

א. חישוב גבול: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$

נסמן $f(x) = x^x - x = e^{x\ln x} - x$, $g(x) = \ln x - x + 1$.
שתי הפונקציות רציפות כהפרש, סכום, מכפלה והרכבה של פונקציות רציפות ב$(0,\infty)$ ובפרט ב $x = 1$: e^x, $\ln x$, ופולינומים.

לכן, לפי רציפות, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) = 1^1 - 1 = 0$, ו $\lim\limits_{x\to1} g(x) = g(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$

נרצה להפעיל את כלל לופיטל. שוב, שתי הפונקציות גזירות בסביבת הנקודה $x = 1$ כהפרש, סכום, מכפלה והרכבה של פונקציות גזירות ב$(0,\infty)$: e^x, $\ln x$, ופולינומים. נחשב:

$$f'(x) = [e^{x\ln x} - x]' = e^{x\ln x}\cdot[x\cdot\frac{1}{x} + \ln x] - 1 = e^{x\ln x}(1 + \ln x) - 1$$

$$g'(x) = [\ln x - x + 1]' = \frac{1}{x} - 1$$

תנאי כלל לופיטל ממשיכים להתקיים. נגזור שוב:

$$f''(x) = [e^{x\ln x}(1 + \ln x) - 1]' = [e^{x\ln x}]'\cdot\frac{1}{x} + e^{x\ln x}(1 + \ln x) =$$

$$= e^{x\ln x}(1 + \ln x)\cdot\frac{1}{x} + e^{x\ln x}(1 + \ln x) = e^{x\ln x}(1 + \ln x)(\frac{1}{x} + 1) = x^x(1 + \ln x)(1 + \frac{1}{x})$$

$$g''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

בסביבה נקובה קטנה מספיק של 1 מתקיים $x > 0$, ולכן f'' רציפה בסביבה זו כסכום, הרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות, כאשר מכנה שונה מאפס. כמו כן, הפונקציה הרציונלית g'' רציפה כי המכנה שלה שונה מאפס בסביבה זו. לכן, לפי רציפות:

$$\lim_{x\to1} f''(x) = f''(1) = 1^1(1 + \ln 1)(1 + \frac{1}{1}) = 2$$

$$\lim_{x\to1} g''(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$$

לכן, לפי אריתמטיקה וכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to1}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{2}{-1} = -2$$

ב. הוכחת אי-קיום גבול: $\lim\limits_{x\to0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$.

נחשב גבולות חד-צדדיים.

$$\lim_{x\to0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} =_{(1)} \lim_{t\to\infty}\frac{e^t-1}{t} =_{(2)} \lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{1} =_{(3)} \infty$$

מעברים:

(1) לפי משפט גבול של הרכבה (4.39, הכללה עבור גבול אינסופי חד-צדדי) עבור $t = \frac{1}{x}$, כאשר לפי "$\frac{1}{0^+}$" מתקיים $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x} = \infty$, כאשר אכן קיים הגבול האינסופי $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^t-1}{t}$ (נוכיח בהמשך)

(2) נסמן $f(t) = e^t - 1$, $g(t) = t$. מתקיים $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\infty} e^t - 1 = "\infty - 1" = \infty$ לפי 6.9 ואריתמטיקה, וכן $\lim\limits_{t\to\infty} t = \infty$ (גבול ידוע).

שתי הפונקציות גזירות (הפרש של פונקציות גזירות ופולינום) לכל אורך הישר, ומתקיים $f'(t) = e^t$, $g'(t) = 1$.

לכן, מאחר וקיים הגבול האינסופי (נוכיח בהמשך) $\lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)}$, אז לפי כלל לופיטל קיים הגבול האינסופי $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)}$.

(3) גבול ידוע לפי 6.9

כמו כן, לפי גבול של הרכבה (4.39, הכללה עבור גבול חד-צדדי וגבול באינסוף) עבור $t = \frac{1}{x}$, כאשר קיים הגבול הידוע $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$ לפי 6.9, ומתקיים $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ לפי כלל "$\frac{1}{0^-}$":

$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} e^t = 0$$

כעת, לפי רציפות + 4.48 מתקיים $\lim_{x\to0^-} x = 0$, ולפי אריתמטיקה:

$$\lim_{x\to0^-} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 0 \cdot (0 - 1) = 0$$

קיבלנו שני גבולות חד-צדדיים שונים, ולכן לפי 4.48 לא קיים גבול.

ג. חישוב גבול: $\lim_{x\to\infty} (\frac{2}{\pi}\arctan\ x)^x$

נסמן $f(x) = (\frac{2}{\pi}\arctan\ x)^x$. כעת:

$$f(x) = e^{\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)\cdot x} = e^{\frac{\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}{\frac{1}{x}}}$$

נחשב את הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}{\frac{1}{x}}$. לשם כך, נסמן $g(x) = \ln(\frac{2}{\pi}\arctan\ x)$ ו-$h(x) = \frac{1}{x}$.

לפי הגבול הידוע $\lim_{x\to\infty} \arctan\ x = \frac{\pi}{2}$ ואריתמטיקה, נסיק $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\pi}\arctan\ x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$. כעת, לפי גבול של פונקציית הרכבה (5.14) עבור $\ln x$ הרציפה בנקודה $x = 1$, מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(\frac{2}{\pi}\arctan\ x) = \ln 1 = 0$$

כמו כן, לפי כלל "$\frac{1}{\infty}$", עבור h מתקיים $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0^+$.

הפונקציה g גזירה בסביבת אינסוף כהרכבה ומכפלה של פונקציות גזירות ידועות: $\ln x$, $\arctan\ x$ ו-$\frac{2}{\pi}$, כאשר בסביבת אינסוף מתקיים $\frac{2}{\pi}\arctan\ x \to 1$ ולכן $\frac{2}{\pi}\arctan\ x > 0$ עבור x גדול מספיק.

כמו כן, הפונקציה הרציונלית h גזירה כי בסביבת אינסוף מתקיים $x > 0$ ולכן מכנה הביטוי שונה מאפס.

לכן, ננסה להפעיל את כלל לופיטל. נגזור:

$$g'(x) = [\ln \frac{2}{\pi}\arctan\ x]' = \frac{[\frac{2}{\pi}\arctan x]'}{\frac{2}{\pi}\arctan x} = \frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{2}{\pi}\arctan x} = \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\arctan x}$$

$$h'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

ונחשב:

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{\frac{1}{(1+x^2)}\cdot\frac{1}{\arctan x}}{\frac{-1}{x^2}} = -1 \cdot \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\arctan x}$$

נשים לב כי לפי כלל "$\frac{1}{\infty}$" ואריתמטיקה,

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \to_{x\to\infty} 1 - "\frac{1}{1+\infty^2}" = 1 - "\frac{1}{\infty}" = 1 - 0 = 1$$

ולכן, לפי אריתמטיקה וכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to\infty} -1 \cdot \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\arctan x} = -1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

כעת, לפי משפט גבול של הרכבה (5.14), עבור e^x הרציפה בנקודה $x = -\frac{2}{\pi}$:

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{2}{\pi}\arctan x)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}{\frac{1}{x}}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

שאלה 7

א. תהא $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ המוגדרת בקטע $(0, \infty)$.

נוכיח כי f יורדת בקטע $(0, 1]$ ועולה בקטע $[1, \infty)$. ואז, לכל $x \in (0, \infty)$:

- אילו $x < 1$, אז מאחר ו-f יורדת בקטע $(0, 1]$, מתקיים $f(x) > f(1)$
- אילו $x > 1$, אז מאחר ו-f עולה בקטע $[1, \infty)$, מתקיים $f(x) > f(1)$
- עבור $x = 1$ כמובן שמתקיים $f(1) \geq f(1)$

ולכן f מקבלת מינימום בנקודה $x = 1$.

ראשית, f גזירה ב $(0, \infty)$ כסכום של פונקציות גזירות בקטע, וכן:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} + \frac{x}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

טענה: f יורדת בקטע $(0, 1]$.

הוכחה: f גזירה, ובפרט רציפה (לפי 7.9) בקטע $(0, \infty)$,

ובפרט רציפה בקטע $(0, 1]$ וגזירה בקטע $(0, 1)$.

כעת, יהא $x \in (0, 1)$. מאחר ו-$x > 0 \Leftarrow x^2 > 0$ ומאחר ו-$x < 1 \Leftarrow x - 1 < 0$, פונקציית הנגזרת $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$ שלילית כמנה של מספר שלילי ומספר חיובי.

לכן, לפי משפט 8.18, f יורדת בקטע $(0, 1]$.

באופן שקול לחלוטין ניתן להוכיח כי f עולה בקטע $[1, \infty)$. בכך סיימנו את ההוכחה.

ב. תהא $g(x) = e^x \ln x$ ונוכיח כי לכל y ממשי קיים x <u>יחיד</u> בתחום ההגדרה של g, הקטע $(0, \infty)$, כך ש $g(x) = y$. נשים לב כי הפונקציה רציפה וגזירה בכל תחום ההגדרה כמכפלה של פונקציות רציפות\גזירות.

ראשית, נוכיח כי g מקבלת כל ערך ממשי. נחשב גבולות חד-צדדיים.

טענה: $\lim_{x \to 0^+} e^x \ln x = -\infty$.

הוכחה: מרציפות e^x + 4.48, $\lim_{x \to 0^+} e^x = 1$.

לכן, לפי אריתמטיקה והגבול הידוע $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (6.14):

$$\lim_{x \to \infty} e^x \ln x = 1 \cdot "-\infty" = -\infty$$

טענה: $\lim_{x \to \infty} e^x \ln x = \infty$

הוכחה: לפי הגבולות הידועים $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$, $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$ (לפי 6.9 + 6.14), ולפי אריתמטיקה של גבולות אינסופיים:

$$\lim_{x \to \infty} e^x \ln x = "\infty \cdot \infty" = \infty$$

כעת, נוכיח בעזרת הגדרות הגבול:
טענה: g מקבלת כל ערך ממשי ב$(0,\infty)$
הוכחה: יהא y ממשי כלשהו ונוכיח כי יש לו מקור בg.
לפי הגדרת הגבול $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x \ln x = -\infty$,
עבור $y = M$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (0, 0+\delta)$, מתקיים $f(x) < M = y$.
בפרט, נבחר $x = \frac{\delta}{2}$ ונסיק $f(\frac{\delta}{2}) < y$.

לפי הגדרת הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} e^x \ln x = \infty$ (כאשר תחום ההגדרה הוא $(0,\infty)$)
עבור $y = M_1$ קיים $M_2 > 0$ כך שלכל $x > M_2$ מתקיים $f(x) > M_1 = y$
בפרט, נבחר $x = M_2 + \frac{\delta}{2}$ ונסיק $f(M_2 + \frac{\delta}{2}) > y$.

ברור כי $M_2 + \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2} > 0$, ולכן נתבונן בתת-הקטע $[\frac{\delta}{2}, M_2 + \frac{\delta}{2}]$. כאמור, g רציפה ב$(0,\infty)$
ובפרט בתת-הקטע $[\frac{\delta}{2}, M_2 + \frac{\delta}{2}]$.
לכן, לפי משפט ערך הביניים (5.31) עבור $f(\frac{\delta}{2}) < y < f(M_2 + \frac{\delta}{2})$,
קיים $x \in (\frac{\delta}{2}, M_2 + \frac{\delta}{2})$ כך ש $f(x) = y$. מאחר ו$x > \frac{\delta}{2} > 0$, מצאנו $x \in (0,\infty)$ כנדרש.

כעת, נוכיח כי g מונוטונית עולה, כלומר חד-חד ערכית. כאמור, g גזירה בכל ת"ה וכן:
$$g'(x) = e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \ln x = e^x(\frac{1}{x} + \ln x)$$
טענה: לכל $x \in (0,\infty)$, $\frac{1}{x} + \ln x > 0$.
הוכחה: לפי הסעיף הקודם, הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ מקבלת מינימום ב-1 בקטע $(0,\infty)$
כלומר לכל $x \in (0,\infty)$,
$$f(x) \geq f(1) = \frac{1}{1} + \ln 1 = 1 + 0 = 1 > 0$$

לכן, המכפלה $e^x(\frac{1}{x} + \ln x)$ של שני מספרים חיוביים היא חיובית, ולכן $g'(x) > 0$ לכל $x \in (0,\infty)$.
ממשפט 8.17 נסיק כי g עולה ב $(0,\infty)$, לכן חד-חד-ערכית וסיימנו.