מטלת מנחה 13 - אלגברה לינארית 2

328197462

28/04/2023

שאלה 1

לאורך שאלה זו נשתמש בתכונות הבאות של תבנית ההעתקה: $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ וכן $\operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr} A$.

סעיף א

נוכיח כי f סימטרית אם ורק אם M סימטרית.
כיוון ראשון: נניח כי M סימטרית ונוכיח כי f סימטרית. לכל $A, B \in V$ נקבל אם כן:

$$f(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} MB)$$
$$f(B,A) = \operatorname{tr}(B^{\mathrm{t}} MA) = \operatorname{tr}((B^{\mathrm{t}} MA)^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M^{\mathrm{t}} B) \overset{M^{\mathrm{t}}=M}{=} \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} MB) = f(A,B)$$

כיוון שני: נניח כי f סימטרית. בפרט נבחר $A = I, B = (M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}$ ונקבל $f(A,B) = f(B,A)$.

$$f(A,B) = \operatorname{tr}(I^{\mathrm{t}} M(M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}(M(M-M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}})$$
$$f(B,A) \overset{\text{פיתוח לעיל}}{=} \operatorname{tr}(I^{\mathrm{t}} M^{\mathrm{t}}(M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}(M^{\mathrm{t}}(M-M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}})$$

על פי השוויון, נסיק $f(A,B) - f(B,A) = 0$ ולכן:

$$f(A,B) - f(B,A) = \operatorname{tr}(M(M-M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) - \operatorname{tr}(M^{\mathrm{t}}(M-M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}((M-M^{\mathrm{t}})(M-M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = ||M - M^{\mathrm{t}}||^2$$

ומתכונת החיוביות של המכפלה הפנימית, השוויון $||M - M^{\mathrm{t}}|| = 0$ גורר $M - M^{\mathrm{t}} = 0$ ולכן $M = M^{\mathrm{t}}$.

סעיף ב

נסמן את הבסיס הסטנדרטי של V ב $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, וכן נסמן $M = [m_i j]$
נשים לב כי $(E_{ij})^{\mathrm{t}} = E_{ji}$. נרצה לחשב בצורה כללית כל אחת מ16 המכפלות.

סעיף ג

ניזכר בטענה חשובה מלינארית 1: מרחב המטריצות הממשיות מסדר $n \times n$ הוא סכום ישר של מרחב המטריצות הסימטריות עם מרחב המטריצות האנסימטריות מאותו סדר. לכן, קיימות ויחידות M_1 סימטרית וM_2 אנסיטמרית כך ש $M_1 + M_2 = M$.
במקרה שלנו $M = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן ניקח $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$

הוכחנו כי $f_1(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_1 B)$ תבנית סימטרית. נוכיח באותו האופן כי $f_2(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_2 B)$ אנסימטרית:

$$f_2(B,A) = \operatorname{tr}(B^{\mathrm{t}} M_2 A) = \operatorname{tr}((B^{\mathrm{t}} M_2 A)^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} {M_2}^{\mathrm{t}} B) = -\operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_2 B) = -f_2(A,B)$$

ומקבלים:

$$f(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} MB) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}}(M_1+M_2)B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_1 B + A^{\mathrm{t}} M_2 B) =$$
$$= \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_1 B) + \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_2 B) = f_1(A,B) + f_2(A,B)$$

שאלה 2

כיוון ראשון: נניח כי f ניתנת להצגה כמכפלה של שתי תבניות לינאריות, ונוכיח כי $\rho(f) = 1$.
יהא אפוא $(w) = (w_1, w_2, ..., w_n)$ בסיס לV עבורו f מקבלת את הצורה הנתונה. נמצא את $[f]_{(w)}$.
לכל i, j מקבלים $[w_i]_{(w)} = e_i, [w_j]_{(w)} = e_j$. לכן:

$$f(w_i, w_j) = (b_1 \cdot 0 + \cdots + b_i \cdot 1 + \cdots + b_n \cdot 0)(c_1 \cdot 0 + \cdots + c_j \cdot 1 + \cdots + c_n \cdot 0) = b_i c_j$$

ומקבלים $[f]_{(w)} = [b_i c_j]_{ij}$.
נסמן $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$. שורות המטריצה $[f]_{(w)}$ הם כולם כפל בסקלר של וקטור זה. לכן, מרחב השורות של $[f]_{(w)}$ מוכל ב $\mathrm{Sp}(\{c\})$, ונקבל $\rho([f]_w) \leq \mathrm{Sp}(\{c\}) \leq 1$.
מנגד, מהנתון $f \neq 0$ נסיק $\rho(f) > 0$, וקיבלנו $\rho(f) = 1$.

כיוון שני: נניח $\rho(f) = 1$ ונוכיח כי f ניתנת להצגה כמכפלת שתי תבניות לינאריות.
יהא (w) בסיס כלשהו של V. אז המטריצה $[f]_{(w)}$ היא מדרגה 1 על פי 5.1.4.
תהא אם כן $c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in F^n$ שורה כלשהי ב $[f]_{(w)}$ שאינה אפס. בהכרח קיימת שורה כזו, כי דרגת המטריצה שונה מאפס.
היות ודרגת המטריצה היא 1, השורה ה i של המטריצה היא בהכרח כפל בסקלר b_i (יכול להיות אפס) של c.
לכל $x, y \in V$ נקבל:

$$f(x,y) = [x]_{(w)}{}^{\mathrm{t}}[f]_{(w)}[y]_{(w)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & \cdots & b_1c_n \\ b_2c_1 & b_2c_2 & \cdots & b_2c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_nc_1 & b_nc_2 & \cdots & b_nc_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_i c_j y_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} c_j y_j$$

ובבך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 3

סעיף א

נוכיח לפי 4.1.5. התבנית f נקבעת ע"י הפולינום הבילינארי:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 = f((x_1,x_2),(y_1,y_2))$$

יתר על כך, $[f]_E$ סימטרית (E הוא הבסיס הסטנדרטי ל $\mathbb{R}^2$) ולכן f סימטרית על פי 4.2.2 והתבנית הריבועית המוסמכת לf תהיה:

$$q((x_1,x_2)) = f((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$$

נמצא ייצוג אלכסוני ל q ולf על פי שיטת לגראנז'. מקבלים באופן מיידי:

$$q((x_1,x_2)) = 1 \cdot (x_1 + 2x_2)^2 + 0 \cdot x_2^2$$

אם כן, עלינו למצוא בסיס (w') כך שלכל $v \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}[v]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = [v]_{(w')}$.
נקבל שמטריצת המעבר $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M^{-1}{}_{(w')\to E}$, וההופכית לה $M_{E\to(w')} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ מטריצת המעבר מ E ל(w').
מכאן מקבלים $(w') = ((1,0),(-2,1))$ ו $[f]_{(w')} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

סעיף ב

נבדוק באופן ישיר על פי משפט 4.5.1. מטריצת המעבר $M_{E\to(w')} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ומקבלים:

$$[q]_{(w')} = M^{\mathrm{t}}[q]_E M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

סעיף א

ראשית, עבור הבסיס הסטנדרטי E, מקבלים:

$$[q]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ננצל את העובדה שהמטריצה ממשית סימטרית. לפי משפט הלכסון האוניטרי, $[q]_E$ לכסינה אורתוגונלית, כלומר קיימת מטריצה אורתוגונלית P כך ש $P^{-1}[q]_E P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. היות ו$P$ אורתוגונלית מקבלים $P^{-1} = P^{\mathrm{t}}$ ולכן $P^{\mathrm{t}}[q]_E P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.
נמצא את הפולינום האופייני של $[q]_E$:

$$p(x) = |xI - [q]_E| = \begin{vmatrix} x-1 & -1/2 & \cdots & -1/2 \\ -1/2 & x-1 & \cdots & -1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/2 & -1/2 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \to \Sigma R_i}{=} \begin{vmatrix} x-1-(n-1)/2 & x-1-(n-1)/2 & \cdots & x-1-(n-1)/2 \\ -1/2 & x-1 & \cdots & -1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/2 & -1/2 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - \frac{n+1}{2}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1/2 & x-1 & \cdots & -1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/2 & -1/2 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} \overset{R_i \to R_i + 1/2 R_1}{=} (x - \frac{n+1}{2}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1/2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1/2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - \frac{n+1}{2})(x - \frac{1}{2})^{n-1}$$

קיבלנו 2 ע"ע $\frac{n+1}{2}$ עם ריבוי אלגברי 1, ו-$\frac{1}{2}$ עם ריבוי אלגברי $n-1$.
היות והמטריצה לכסינה, היא דומה אורתוגונלית (ולכן חופפת) ל$\mathrm{diag}(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2})$.
כלומר, על פי 4.5.4, קיים בסיס (w) כלשהו כך ש $[q]_{(w)} = \mathrm{diag}(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2})$, והצורה האלכסונית של q בבסיס זה תהיה:

$$q(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{n+1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \cdots + \frac{1}{2}x_n$$

כמו כן, התבנית הבילינארית הקוטבית ל$[q]$ תהיה, על פי $[q]_E$, התבנית:

$$f((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le n, i \ne j} x_i y_j$$

סעיף ב

מכיוון ש $[q](w) = P^{\mathrm{t}}[q]_E P$, מקבלים ש P מטריצת המעבר מE ל(w). היות ו-P אורתוגונלית נסיק כי היא מטריצת מעבר בין בסיסים אורתונורמליים, ולכן (w) בסיס א"נ של וקטורים עצמיים של $[q]_E$. נמצא בסיסים א"נ למרחבים העצמיים $V_{(n+1)/2}, V_{1/2}$ של $[q]_E$. איחודים יהיה, לפי 2.3.6, בסיס א"נ מתאים.

עבור $V_{(n+1)/2}$ נקבל מרחב עצמי מממד 1. זהו מרחב האפס של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} (n-1)/2 & -1/2 & \cdots & -1/2 \\ -1/2 & (n-1)/2 & \cdots & -1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/2 & -1/2 & \cdots & (n-1)/2 \end{pmatrix}$$

קל לראות כי $w_1 = (1, 1, ..., 1)$ פותר את המשוואה. הקבוצה $\{\frac{1}{||w_1||}w_1\}$ בת"ל ומוכלת במרחב $V_{(n+1)/2}$ מממד 1 ולכן מהווה בסיס א"נ למרחב זה.

נעבור למציאת בסיס א"נ למרחב העצמי $V_{1/2}$. זהו מרחב האפס של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & \cdots & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & \cdots & -1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/2 & -1/2 & \cdots & -1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

נבחר למשל את הוקטורים $w_2 = (1, -1, 0, ..., 0), w_n = (0, ...0, 1, -1)$ ונבצע באינדוקציה תהליך גרם-שמידט.
טענת האינדוקציה: לכל $2 \leq k \leq n$, הוקטור w_k* המתקבל בתהליך גרם-שמידט על $(w_2, .., w_n)$ הוא

$$\frac{1}{\sqrt{k(k-1)}}(\sum_{i=1}^{k} e_i - ke_k) = \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}}(1, 1, ..., 1, -(k-1), 0, 0, ..., 0)$$

בסיס האינדוקציה: נרמול הוקטור w_2 ייתן לנו $w_2* = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$.

צעד האינדוקציה: נניח כי כל הוקטורים $w_2 * .. w_{k-1}*$ הם מהצורה הנתונה, ובפרט $w_{k-1}* = \frac{1}{\sqrt{(k-1)(k-2)}}(\sum_{i=1}^{k-1} e_i - (k-1)e_{k-1})$

עבור הוקטור $w_k = e_{k-1} - e_k$ מקבלים:
ניעזר בתכונות המכפלה הפנימית. ע"פ 1.5.7:

$$(w_k, w_i*) = \sum_{j=1}^{n}(w_k, e_j)(w_i*, e_i) = 0 + 1(w_i*, e_{k-1}) - (w_i*, e_k) == (w_i*, e_{k-1})$$

$$= \begin{cases} 0 & i \neq k-1 \\ \frac{1}{\sqrt{(k-1)(k-2)}}((e_1, e_{k-1}) + \cdots + (e_{k-2}, e_{k-1}) - (k-2)(e_{k-1}, e_{k-1})) = \frac{-(k-2)}{\sqrt{(k-1)(k-2)}} & i = k-1 \end{cases}$$

ואז:

$$\begin{aligned} w_k - \sum_{i}^{k-1}(w_k, w_i*)w_i* = w_k + \frac{(k-2)}{\sqrt{(k-1)(k-2)}}w_{k-1}* = \\ = e_{k-1} - e_k + \frac{(k-2)}{(k-1)(k-2)}(\sum_{i=1}^{k-1} e_i - (k-1)e_{k-1}) = \\ = e_{k-1} - e_k + \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} e_i - e_{k-1} = \\ = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} e_i - e_k = \\ = \frac{1}{k-1}(1, 1, ..., 1, -(k-1), 0, ..., 0) \end{aligned}$$

וכמו כן,

$$\begin{aligned} ||w_k - \sum_{i}^{k-1}(w_k, w_i*)w_i *|| = ||\frac{1}{k-1}(1, 1, ..., 1, -(k-1), 0, ..., 0)|| = \\ = \frac{1}{k-1}||(1, 1, ..., 1, -(k-1), 0, ..., 0)|| = \\ = \frac{1}{k-1} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + \cdots 1^2 + (k-1)^2} = \\ = \frac{1}{k-1} \cdot \sqrt{(k-1) \cdot 1^2 + (k-1)^2} = \\ = \frac{1}{k-1} \cdot \sqrt{k(k-1)} = \end{aligned}$$

אי-לכך, $w_k* = \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}}(1, 1, ..., 1, -(k-1), 0, 0, ..., 0)$ והושלמה הוכחת האינדוקציה.

תשובה סופית: $(w) = (\frac{1}{\sqrt{n}}(1, ..., 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, ..., 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -2, ..., 0), ..., \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}(1, 1, ..1, n-1))$ בסיס מלכסן.

שאלה 5

סעיף א

תהא $q \neq 0$ תבנית ריבועית שממד מרחב המקור שלה V הוא לכל הפחות 2 כפי שנתון. נסמן $\dim V = n$.
היות וq תבנית ריבועית, קיים לפי 5.1.2ג בסיס כלשהו $(w) = (w_1, w_2, .., w_n)$ למרחב V כך ש$[q]_{(w)}$ מטריצה אלכסונית.
נסמן את הסקלארים באלכסון המטריצה $[q]_{(w)}$ ב $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. מקבלים שלכל $v \in V$, כאשר $[v]_{(w)} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^{\mathrm{t}}$:

$$q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

כעת, נחלק למקרים.

- אילו קיים $\lambda_i = 0$ כלשהו, אז מקבלים עבור $w_i \neq 0$ כי:

$$q(w_i) = \lambda_1 \cdot 0^2 + \cdots + \lambda_i \cdot 1^2 + \cdots + \lambda_n \cdot 0^2 = \lambda_i = 0$$

- אחרת, אילו אין סקלאר λ_i השווה לאפס, אז בפרט $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ (קיומם מובטח בוודאות כי $n \geq 2$).
נבחר אפוא $v = iw_1 + \sqrt{\lambda_1/\lambda_2} w_2 \neq 0$. מקבלים $[v]_{(w)} = (i \quad \sqrt{\lambda_1/\lambda_2} \quad 0 \ \cdots \ 0)^{\mathrm{t}}$ ולכן:

$$q(v) = \lambda_1 \cdot i^2 + \lambda_2 \cdot \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}^2 + \cdots + \lambda_i \cdot 0^2 + \cdots + \lambda_n \cdot 0^2 = -\lambda_1 + \lambda_2 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0$$

בשני המקרים מצאנו $v \neq 0$ כך ש $q(v) = 0$ והטענה נכונה.

סעיף ב

הטענה לא נכונה אילו מרחב המקור V היה מעל $\mathbb{R}$ ושדה הטווח היה $\mathbb{R}$.
ניקח למשל $V = \mathbb{R}^2$ וq לפי הבסיס הסנדרטי תהא $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = ||(x_1, x_2)||^2$.
מתכונת החיוביות של המכפלה הפנימית, $q(x_1, x_2) = ||(x_1, x_2)||^2 = 0$ אם ורק אם $(x_1, x_2) = 0$, ולכן לא קיים $v = 0$ כך ש $q(v) = 0$.