מטלת מנחה 14 - אלגברה לינארית 1

328197462

15/01/2023

שאלה 1

יהיו U, W_1, W_2 תתי-מרחבים לינאריים של מרחב לינארי V.

סעיף א

יהא $v \in (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$ ועלינו להוכיח $v \in U \cap (W_1 + W_2)$.
מהגדרת החיבור, קיימים $v_1 \in U \cap W_1, v_2 \in U \cap W_2$ כך ש $v = v_1 + v_2$.
אי לכך, $v_1, v_2 \in U$ ומסגירות החיבור הוקטורי במרחב הלינארי נסיק $v = v_1 + v_2 \in U$.
כמו כן, מאחר ו $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$ נקבל מהגדרת החיבור כי $v = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$.
הראינו שייכות לשתי הקבוצות $U, W_1 + W_2$ ולכן נסיק $v \in U \cap (W_1 + W_2)$

סעיף ב

עבור $V = \mathbb{R}^2$ נגדיר:

$$U = \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \quad W_1 = \mathsf{Sp}(\{(1,0)\}) \quad W_2 = \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})$$

אז לפי סעיף א של שאלה זו מתקיים $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2)$.

ניקח $v = (1,1)$ ונראה כי $v \in U \cap (W_1 + W_2)$ וגם $v \notin (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$.
נחשב:

$$\begin{aligned} U \cap (W_1 + W_2) &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap (\mathsf{Sp}(\{(1,0)\}) + \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})) \underset{\text{7.6.8 שאלה}}{=} \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap (\mathsf{Sp}(\{(1,0),(0,1)\})) = \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap \mathbb{R}^2 = \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \ni (1,1) = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U \cap W_1) + (U \cap W_2) &= (\mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap \mathsf{Sp}(\{(1,0)\})) + (\mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) + \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})) = \\ &= \{\underline{0}\} + \{\underline{0}\} = \\ &= \{\underline{0}\} \not\ni (1,1) = v \end{aligned}$$

ולכן מתקיימת הכלה חזקה בין תתי-המרחבים.

שאלה 2

יהיו $U = \text{Sp}\{u_1, u_2\}$, $W = \text{Sp}\{w_1, w_2\}$ תתי-מרחבים לינאריים של V כך שהקבוצות הפורשות אותם הן בסיסים.
מניחים כי $A = \{u_1, u_2, w_1\}$ תלויה לינארית.

סעיף א

נראה כי $w_1 \in U$ בדרך השלילה.
נניח בשלילה כי $w_1 \notin \text{Sp}\{u_1, u_2\}$. מאחר והקבוצה $\{u_1, u_2\}$ היא בסיס ולכן בלתי תלויה לינארית, נסיק לפי שאלה 8.1.8 כי $A = \{u_1, u_2\} \cup \{w_1\}$ בלתי תלויה לינארית, בסתירה לנתון!

כעת, מאחר ו$W = \text{Sp}\{w_1, w_2\} \ni w_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$, נקבל $w_1 \in U \cap W$.

סעיף ב

ניזכר במשפט המימדים 8.3.6

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

לשני תתי-המרחבים U, W יש בסיסים בגודל 2 ומכאן $\dim U = \dim W = 2$. עלינו למצוא את מימד תת-המרחב $U \cap W$.

לפי משפט $3.8.4$, עבור $U \cap W \subseteq U, W$ נסיק $\dim(U \cap W) \leq 2$.
בנוסף, אם $\dim(U \cap W) = 2$, אז נסיק את השוויון $U \cap W = U = W$ בסתירה לנתון כי U, W תתי-מרחבים שונים.
מכאן נובע אי-השוויון $\dim(U \cap W) \leq 1$. מאחר ו $w_1 \neq \underline{0} \in U \cap W$ (הוקטור נמצא בקבוצה בלתי תלויה לינארית), נסיק $\dim(U \cap W) \geq 1$ ובסך הכל $\dim(U \cap W) = 1$.

נציב במשפט המימדים ונקבל $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$.

הקבוצה $\{u_1, u_2, w_2\}$ בעלת 3 וקטורים ומוכלת ב $U + W$. נראה כי הקבוצה בת"ל, כלומר $w_2 \notin U$.
נניח כי $w_2 \in U$. מסעיף א של שאלה זו נקבל $\{w_1, w_2\} \subseteq \text{Sp}\{u_1, u_2\}$, ולפי שאלה $7.5.16$ נסיק:

$$W = \text{Sp}\{w_1, w_2\} \subseteq \text{Sp}\{u_1, u_2\} = U$$

משוויון המימדים נובע, לפי משפט $3.8.4$, כי $U = W$ וזאת בסתירה לנתון! מצאנו $w_2 \notin U$ ולכן לפי שאלה 8.1.8 הקבוצה בת"ל.

מצאנו כי $\{u_1, u_2, w_2\}$ בת"ל ובעלת 3 וקטורים ולכן קבוצה היא בסיס ל$U + W$.

שאלה 3

יהיו תתי המרחבים הבאים של $V=\mathbb{R}_4[x]$

$$\begin{aligned} U&=\text{Sp}\{u_1=x^3+4x^2-x+3, \quad u_2=x^3+5x^2+5, \quad u_3=3x^3+10x^2+5\}\\ W&=\text{Sp}\{w_1=x^3+4x^2+6, \quad w_2=x^3+2x^2-x+5, \quad w_3=2x^3+2x^2-3x+9\}\end{aligned}$$

נסמן בשאלה את הבסיס הסטנדרטי הסדור של V ב $E=(x^3,x^2,x,1)$.

בסיס לU

תחילה, וקטורי הקואורדינטות של הקבוצה הפורשת הנתונה של U, לפי הבסיס הסטנדרטי, הם:

$$[u_1]_E=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\3\end{pmatrix}, \qquad [u_2]_E=\begin{pmatrix}1\\5\\0\\5\end{pmatrix}, \qquad [u_3]_E=\begin{pmatrix}3\\10\\0\\5\end{pmatrix}$$

תת-המרחב $U'=\text{Sp}\{[u_1]_E,[u_2]_E,[u_3]_E\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$. נמצא לו בסיס.
לשם כך, נכתוב את הוקטורים כשורות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\1&5&0&5\\3&10&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&-2&3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to\frac{1}{5}R_3}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

לפי שאלה $7.5.12$, מרחב השורות של המטריצה המדורגת הינו גם U'. כמו כן, שורות המטריצה המדורגת אינן שורות אפס ולכן לפי למה $8.5.1$ בת"ל.
קיבלנו כי הקבוצה הבאה בת"ל ופורשת את $\text{Sp}\{[u_1]_E,[u_2]_E,[u_3]_E\}$, ולכן בסיס לה:

$$B'=\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

וקטורים אלה הם וקטורי הקואורדינטות לפי E של איברי הקבוצה $B=\{b_1=x^3+4x^2-x+3, b_2=x^2+x+2, b_3=x\}$.
כעת, לפי טענה $8.4.12$, מאחר וB' בסיס לU' נסיק כי B בסיס לU, וכן כי $\dim U=3$

בסיס לW

נשתמש בתהליך זהה. וקטורי הקואורדינטות של הקבוצה הפורשת הנתונה לW:

$$[w_1]_E=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\6\end{pmatrix}, \qquad [w_2]_E=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}, \qquad [w_3]_E=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\\9\end{pmatrix}$$

תת-המרחב $W'=\text{Sp}\{[u_1]_E,[u_2]_E,[u_3]_E\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$. נמצא לו בסיס.
לשם כך, נכתוב את הוקטורים כשורות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&4&0&6\\1&2&-1&5\\2&2&-3&9\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&4&0&6\\0&-2&-1&-1\\0&-6&-3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_2}\begin{pmatrix}1&4&0&6\\0&-2&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to -R_3}\begin{pmatrix}1&4&0&6\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לפי שאלה $7.5.12$ ולמה $8.5.1$, הקבוצה הבאה בת"ל ופורשת את W' ולכן מהווה בסיס.

$$C'=\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\0\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

וקטורי הקבוצה הם וקטורים הקואורדינטות לפי E של $C=\{c_1=x^3+4x^2+6, c_2=2x^2+x+1\}$.
אי לכך, לפי טענה $8.4.12$, מאחר וC' בסיס לW' נסיק כי C בסיס לW, וכן באופן ישיר $\dim W=2$

בסיס ל$U+W$

היות ו$U=\text{Sp}(B), W=\text{Sp}(C)$, נסיק לפי שאלה 7.6.8 כי

$$U+W=\text{Sp}(B\cup C)=\text{Sp}\{x^3+4x^2-x+3, x^2+x+2, x, x^3+4x^2+6, 2x^2+x+1\}$$

באופן דומה,

$$U'+W'=\text{Sp}\{(1,4,-1,3),(0,1,1,2),(0,0,1,0),(1,4,0,6),(0,2,1,1)\}$$

נמצא בסיס ל$U'+W'$. לשם כך נחזור על התהליך מהחלקים הקודמים של השאלה:

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\1&4&0&6\\0&2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5\to R_5-2R_2]{R_4\to R_4-R_1}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&1&3\\0&0&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5\to R_5+R_3]{R_4\to R_4-R_3}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to\frac{1}{3}R_4}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5\to R_5+5R_4}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לפי שאלה 7.5.12 ולמה 8.5.1 4 השורות הראשונות של המטריצה המדורגת בת"ל ופורשות את $U'+W'$.
שוב, לפי טענה 8.4.12, 4 הפולינומים שוקטורי הקואורדינטות שלהם הם 4 שורות המטריצה מהווים בסיס ל$U+W$. נקבל $\text{dim}(U+W)=4$, והיות ו$U+W\subseteq\mathbb{R}_4[x]$ נקבל ממשפט 8.3.4 כי $U+V=\mathbb{R}_4[x]$.
ניקח את הבסיס הסטנדרטי למרחב לינארי זה - E שהוגדר בתחילת השאלה.

סעיף ב

ראשית, על מנת למצוא את המימד של $U\cap W$, ניעזר במשפט המימדים 8.3.6:

$$\text{dim}(U+W)=\text{dim}\,U+\text{dim}\,W-\text{dim}(U\cap W)$$

נציב ונקבל $4=2+2-\text{dim}(U\cap W)$ ומכאן $\text{dim}(U\cap W)=1$.

כעת, יהא $p(x)\in\mathbb{R}_4[x]$. על מנת ש$p(x)$ יהיה שייך לשני תתי-המרחבים הלינאריים U,W, נדרוש שיהיו קיימים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\mu_1,\mu_2$ סקלרים כך ש:

$$\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3=\mu_1 c_1+\mu_2 c_2$$
$$\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3-\mu_1 c_1-\mu_2 c_2=0$$
$$[\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3-\mu_1 c_1-\mu_2 c_2]_E=[0]_E$$

ומלמה 8.4.3 ושאלה 8.4.5 נקבל:

$$\lambda_1[b_1]_E+\lambda_2[b_2]_E+\lambda_3[b_3]_E-\mu_1[c_1]_E-\mu_2[c_2]_E=0$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\mu_1\begin{pmatrix}1\\4\\0\\6\end{pmatrix}-\mu_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\4&1&0&-4&-2\\-1&1&1&0&-1\\3&2&0&-6&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}=0$$

נדרג את המטריצה על מנת לפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\4&1&0&-4&-2\\-1&1&1&0&-1\\3&2&0&-6&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_1]{R_2\to R_2-4R_1\ R_3\to R_3+R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&0&-2\\0&1&1&-1&-1\\0&2&0&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-2R_2]{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&-3&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to -\frac{1}{3}R_4}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+R_4]{R_1\to R_1+R_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{cases}\lambda_1-\mu_2=0\\\lambda_2-2\mu_2=0\\\lambda_3=0\\\mu_1-\mu_2=0\end{cases}$$

קיבלנו כי μ_2 משתנה חופשי. ניקח סקלר a כלשהו כך ש $\mu_2=a$, אז $\mu_1=a$ ונקבל:

$$\begin{aligned}p(x)&=\mu_1c_1+\mu_2c_2=\\&=a(x^3+4x^2+6)+a(2x^2+x+1)=\\&=a(x^3+6x^2+x+7)\end{aligned}$$

במילים אחרות, $U\cap V=\text{Sp}\{x^3+6x^2+x+7\}$ והקבוצה $\{x^3+6x^2+x+7\}$ בסיס ל$U\cap W$

סעיף ג

לפי משפט $8.3.5$, הקבוצה הבלתי-תלויה לינארית C של וקטורים מ$\mathbb{R}_4[x]$ ניתנת להשלמה לבסיס.
כלומר, קיימים $c_3,c_4\in V$ כך ש $C\cup\{c_3,c_4\}$ בסיס ל$\mathbb{R}_4[x]$.
ניקח $T=\text{Sp}\{c_3,c_4\}$. אז לפי שאלה 7.6.8 $W+T=\text{Sp}(C\cup\{c_3,c_4\})=\mathbb{R}_4[x]$.
כמו כן T נפרשת על ידי 2 וקטורים בת"ל (מעצם הגדרתם כבסיס ל$\mathbb{R}_4[x]$) ולכן $\dim T=2$ ולפי מסקנה $8.3.7$ מתקבל $W\oplus T=\mathbb{R}_4[x]$.
לסיכום, תת-המרחב הנפרש על ידי שני וקטורים c_3,c_4 כאלה מהווה קבוצה T מתאימה.

נמצא וקטורים אלה. על מנת ש $\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$יהיה בסיס ל $\mathbb{R}_4[x]$ נדרוש כי $\{[c_1]_E,[c_2]_E,[c_3]_E,[c_4]_E\}$ יהיה בסיס ל $\mathbb{F}^4$ לפי $8.4.12$.
תנאי הכרחי ומספיק לכך שהקבוצה בת 4 וקטורים תהווה בסיס לF^n הוא היות קבוצת הוקטורים בלתי תלויה לינארית.
נכתוב את ארבעת הוקטורים כשורות במטריצה:

$$\begin{pmatrix}1&4&0&6\\0&2&1&1\\?&?&?&?\\?&?&?&?\end{pmatrix}$$

נבחר למשל $[c_3]_E=(0,0,1,0),[c_4]_E=(0,0,0,1)$. לכל שורה במטריצה לעיל יש איבר פותח ולכן מרחב השורות שלה אכן מהווה בסיס ל$\mathbb{F}^4$ לפי למה $8.5.1$ נקבל שהקבוצה $T=\text{Sp}\{c_3=x,c_4=1\}$ אכן מקיימת $W\oplus T=\mathbb{R}_4[x]$ לפי מה שהוכחתי לעיל.

שאלה 4

יהיו U, W תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$, $\dim U > \dim W$.
נתון כי $(0,0,1,0) \notin U + W$, וכן $U \cap W = \text{Sp}\{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(-1,0,1,2)\}$
עלינו למצוא את המימד של $U + W$ וכן בסיס לW.

מאחר ו$U + W \subseteq \mathbb{R}^4$ מתקיים, לפי משפט 8.3.4, $\dim(U+W) \leq 4$.
אם נניח בשלילה כי $\dim(U+W) = 4$, נקבל מחלקו השני של המשפט $U + W = \mathbb{R}^4$, בסתירה לנתון $(0,0,1,0) \notin U + W$.
לכן, $\dim(U+W) \leq 3$.

המרחב הנפרש ע"י קבוצת היוצרים הנתונה ל$U \cap W$ הוא מרחב השורות של המטריצה להלן.
לפי שאלה 7.5.12, למטריצות שקולות שורה אותו מרחב שורות, ולכן נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שתי השורות הראשונות במטריצה הם בלתי תלויות לינארית ולכן מהווים בסיס ל$U \cap W$, ומכאן $\dim(U+W) = 2$.

כעת, היות ו$U \subseteq U + W$ ו$U \cap W \subseteq W$, נקבל לפי משפט 8.3.4 והנתון:

$$2 = \dim(U \cap W) \leq \dim W < \dim U \leq \dim(U+W) \leq 3$$

האפשרות היחידה לפתרון היא $\dim(U \cap W) = \dim W = 2$, $\dim U = \dim(U+W) = 3$.
לכן, לפי חלקו השני של המשפט, נקבל $U \cap W = W$.
אי לכך, מאחר ו $\{(1,2,3,4),(0,1,2,3)\}$ בסיס ל$U + W$ הקבוצה מהווה בסיס לW.

שאלה 5

תהא A מטריצה ריבועית מסדר n ומדרגה 1. בפרט $A \neq 0$.
נסמן את השורה ב A שאינה שורת אפסים ב $R = (a_1, a_2, ..., a_n)$.
אז קיימים סקלרים $l_1, l_2, ..., l_n$, כולם 0 חוץ מסקלר יחיד $l_p = 1$, כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} l_1a_1 & l_1a_2 & \cdots & l_1a_n \\ l_2a_1 & l_2a_2 & \cdots & l_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_na_1 & l_na_2 & \cdots & l_na_n \end{pmatrix}$$

והעקבה של A מקיימת:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} l_ia_i$$

סעיף א

נחשב את האיבר הכללי במטריצה $A \cdot A$:

$$(A^2)_{ij} = [A]_i^R \cdot [A]_j^C = (l_ia_1, l_ia_2, \cdots, l_ia_n) \cdot \begin{pmatrix} l_1a_j \\ l_2a_j \\ \vdots \\ l_na_j \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (l_ia_k)(l_ka_j) = l_ia_j \sum_{k=1}^{n} l_ka_k = A_{i,j} \cdot tr(A)$$

ומכאן נסיק $A^2 = tr(A) \cdot A$ באופן ישיר.

סעיף ב

אם $tr(A) = 0$ אז באופן מיידי נובע מהסעיף הקודם כי $A^2 = 0$

נרצה להוכיח באינדוקציה כי לכל $k \geq 1$ טבעי, $A^k = (trA)^{k-1} \cdot A$.
בסיס האינדוקציה עבור $k = 1$ טריוויאלי. בסעיף א הוכחנו עבור $k = 2$.
נניח באינדוקציה כי עבור k מסוים מתקיים $A^k = (trA)^{k-1} \cdot A$. אז:

$$A^{k+1} \underset{\text{הגדרת חזקה}}{=} A^k \cdot A \underset{\text{הנחה}}{=} (trA)^{k-1} \cdot AA = (trA)^{k-1} \cdot A^2 \underset{\text{סעיף א}}{=} (trA)^{k-1} \cdot (trA) \cdot A = (trA)^k \cdot A$$

כעת, אם $trA \neq 0$ אז מאחר ש $A \neq 0$ נקבל לכל $k \geq 1$ טבעי כי $A^k \neq 0$.

סעיף ג

נניח כי עבור k מסוים $A^k = 0$.
נקבל לפי הטענה בסעיף ב כי $(trA)^{k-1} \cdot A = 0$, ומאחר ו$A \neq 0$ נסיק $trA = 0$. ובאופן ישיר, מסעיף ב, נקבל כי $A^2 = 0$.

שאלה 6

מגדירים פונקציות $f,g,h,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\begin{array}{cc} f(x)=\sin x & g(x)=\cos x \\ h(x)=2\sin x+\cos x & k(x)=3\cos x \end{array}$$

וכן מגדירים $V=\text{Sp}\{f,g\}$.

סעיף א

הקבוצה $B=\{f,g\}$ פורשת את V ולכן על מנת שתהווה בסיס נוכיח שהיא בת"ל.
כלומר נוכיח כי אין פתרון לא-טריוואלי למשוואה $\lambda f+\mu g=\underline{0}$, כאשר $\underline{0}$ מייצג את פונקציית האפס.
במילים אחרות, מחפשים סקלרים λ,μ כך ש $\lambda\sin(x)+\mu\cos(x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. בפרט:

$$\lambda\sin(0)+\mu\cos(0)=0\Rightarrow\mu=0$$
$$\lambda\sin(\frac{\pi}{2})+\mu\cos(\frac{\pi}{2})=0\Rightarrow\lambda=0$$

מצאנו כי למשוואה יש פתרון יחיד - הפתרון הטריוויאלי, ומכאן שהקבוצה B בת"ל ופורשת ולכן מהווה בסיס לV.
כמו כן נסיק $\dim V=2$.

הקבוצה C בעלת 2 וקטורים ולכן די להוכיח כי היא פורשת את V. אכן, לפי שאלה 7.5.11 נקבל:

$$\begin{aligned} V=\text{Sp}\{f,g\} &\overset{T_1\to 2T_1}{=} \\ =\text{Sp}\{2f,g\} &\overset{T_1\to T_1+T_2}{=} \\ =\text{Sp}\{2f+g,g\} &\overset{T_2\to 3T_2}{=} \\ =\text{Sp}\{2f+g,3g\} &= \\ =\text{Sp}\{h,k\} \end{aligned}$$

ואכן לפי $8.3.2$ נסיק כי C בסיס לV.

סעיף ב

קל לראות כי מתקיים:

$$[h]_B=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},[k]_B=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

אי-לכך, מטריצת המעבר מB ל C, לפי הגדרה $8.4.6$, היא:

$$M=([h]_B|[k]_B)=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$$

נשתמש בטכניקה למציאת המטריצה הפוכה על מנת למצוא את M^{-1}. לפי משפט 8.4.9 זוהי מטריצת המעבר מC לB.

$$(M|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&3&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{array}\right)=(I|M^{-1})$$

ולכן המטריצה $M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ היא מטריצת המעבר מC לB.

סעיף ג

הגדירו $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $l(x)=5\,\text{sin}(x)-2\,\text{cos}(x)$.
ע"פ משפט 8.4.8 מתקיים:

$$[l]_C = M^{-1}[l]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

קיבלנו $[l]_C = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, ואכן:

$$\frac{5}{2}h(x) - \frac{3}{2}k(x) = \frac{5}{2}(2\,\text{sin}(x) + \text{cos}(x)) - \frac{3}{2}(3\,\text{cos}(x)) = 5\,\text{sin}(x) - 2\,\text{cos}(x) = l(x)$$