

## מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

31/01/2023

### שאלה 1

סעיף א1

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x^2 + 2y^2) + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$$

כי מתקיים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} = [t = 2x^2 + 2y^2 \rightarrow 0^+] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t/2} = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 2$$

וכן, לפי כלל הסנדוויץ':

$$0 \leq \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = |y| \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |y| \cdot \frac{y^2}{y^2} = |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

ולכן  $0 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$  לסיכום נקבל:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x^2 + 2y^2) + y^3}{x^2 + y^2} = 2 + 0 = 2$$

סעיף א2

$$0 \leq \left| x \arctan \left( \frac{x}{x^2 + (y-2)^2} \right) \right| = |x| \left| \arctan \left( \frac{x}{x^2 + (y-2)^2} \right) \right| \leq |x| \cdot \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,2)} 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

ולכן מתקיים  $0 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,2)} x \arctan \left( \frac{x}{x^2 + (y-2)^2} \right)$

סעיף ב1

עלינו לבדוק האם קיים הגבול  $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1$

נכתוב את הפונקציה בדרך נוחה יותר. לכל  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$f(x, y) = \frac{e^{|x|+|y|} - 1}{|x| + |y|} \cdot \ln(|xy| + e)$$

מתקיים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{|x|+|y|} - 1}{|x| + |y|} = [t = |x| + |y| \rightarrow 0^+] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} \stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t}{1} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(|xy| + e) = [p = |xy| \rightarrow 0^+] = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(t + e) = \ln(e) = 1$$

ולכן  $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 \cdot 1 = 1$  והפונקציה רציפה.

## סעיף ב2

הפונקציה לא רציפה בנקודה, כי לא מתקיים הגבול  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 1$ .

ניקח למשל  $P_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$ , ונקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{2}{n^4}} = 0$$

לכן, לפי היינה, לא מתקיים  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 1 = g(0,0)$  והפונקציה לא רציפה בנקודה.

## שאלה 2

### סעיף א

עלינו לבדוק האם הפונקציה בשני משתנים  $f(x, y) = (x^{1/3} + y^{1/3})^3$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ .

נחשב נגזרות חלקיות בנקודה  $p_0 = (0, 0)$

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^{1/3} + 0)^3 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0 + h^{1/3})^3 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

כעת עלינו לבדוק את קיום הגבול  $\epsilon(x, y) = \frac{r(x, y)}{d((x, y), (0, 0))} = \frac{f(x, y) + f_x(0, 0) \cdot x + f_y(0, 0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$  ניקח למשל  $P_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  ונקבל:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(P_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - 1 \cdot \frac{1}{n} - 1 \cdot \frac{1}{n}}{((\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2)^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((\frac{1}{n})^{1/3} + (\frac{1}{n})^{1/3})^3 - 2 \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{2}{n^2})^{1/2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(\frac{1}{n})^{1/3})^3 - 2 \cdot \frac{1}{n}}{(2 \cdot \frac{1}{n^2})^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \frac{1}{n} - 2 \cdot \frac{1}{n}}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \neq 0 \end{aligned}$$

לכן לפי הגדרת היינה לא מתקיים הגבול והפונקציה לא דיפרנציאבילית.

### סעיף ב

נציין כי הפונקציה  $f(x, y) = 3x^2 - y^2$  דיפרנציאבילית כפולינום רב-משתנים בכל המישור. עלינו למצוא נקודה במשטח  $(a, b, f(a, b))$  שהמישור המשיק לה מקביל למישור  $6x + 4y + z + 5 = 0$ . לפי הגדרה 7.64, בכל נקודה במישור מצורה זו, משוואת המישור המשיק למשטח יהיה:

$$z = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

נחשב נגזרות חלקיות:

$$\begin{aligned} f_x &= 6x \quad f_y = -2y \\ z &= 3a^2 - b^2 + 6a(x - a) - 2b(y - b) \\ -6ax + 2by + z &= 3a^2 - b^2 - 6a^2 + 2b^2 \\ -6ax + 2by + z &= -3a^2 + b^2 \end{aligned}$$

על מנת שהמישור יהיה מקביל למישור הנתון, מקדמי שלוש המשתנים צריכים להיות פרופורציונליים. במילים אחרות, קיים  $\lambda \in \mathbb{R}$  כך ש  $(-6a, 2b, 1) = \lambda(6, 4, 1)$  נסיק  $\lambda = 1$  ונקבל:

$$\begin{cases} -6a = 6 & \Rightarrow a = -1 \\ 2b = 4 & \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

ואכן, נציב ונקבל כי המישור המשיק בנקודה  $(-1, 2, f(-1, 2))$  יהיה:

$$6x + 4y + z - 1 = 0$$

מישור זה מקביל למישור הנתון ולא מתלכד איתו (אין פרופורציה באיבר החופשי  $-1 \neq \lambda \cdot 5$ ).

### שאלה 3

#### סעיף א

נסמן בשאלה את  $x(t), y(t)$  ואת הגדלים של שתי הצלעות הנתונות בס"מ והזווית (ברדיאנים) שביניהן בנקודת זמן מסוימת (בשניות), בהתאמה. נתון בשאלה כי בנקודת זמן מסוימת  $t_0$  מתקיים  $\alpha(t_0) = \frac{\pi}{6}$ ,  $x(t_0) = 4$ ,  $y(t_0) = 3$  וכמו כן ערכי הנגזרות  $x', y'$  המייצגות את קצב השינוי לשנייה מקיימים  $x'(t_0) = y'(t_0) = 1$ . עלינו למצוא את  $\alpha'(t_0)$ .

מנתוני השאלה, שטח המשולש בזמן  $t_0$  הוא (לפי נוסחה ידועה)  $3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{6}$ . נתון כי שטח המשולש נשאר קבוע, ולכן בכל נקודת זמן  $t$  מתקיים:

$$\frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \sin(\alpha(t)) = 3$$

ומכאן נקבל  $\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{6}{x(t) \cdot y(t)}\right)$  בכל נקודת זמן  $t$ .

אז נסמן  $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{6}{x \cdot y}\right)$ . כאן נדרש  $x \cdot y > 6$  וכן מהעובדה ש  $x, y$  מייצגים אורכים חיוביים של צלעות נסיק  $x, y > 0$ . נחשב נגזרות חלקיות לפי הכלל בעמוד 68:

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{6}{xy}\right)^2}} \cdot \frac{6}{y} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 y^2 - 36}} \cdot \frac{6}{y} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-6}{x \sqrt{x^2 y^2 - 36}}$$

$$f_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{6}{xy}\right)^2}} \cdot \frac{6}{x} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)' = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 y^2 - 36}} \cdot \frac{6}{x} \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-6}{y \sqrt{x^2 y^2 - 36}}$$

$$f_y(4, 3) = \frac{-6}{3\sqrt{108}} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ וכן } f_x(4, 3) = \frac{-6}{4\sqrt{108}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$$

אי לכך, לפי כלל השרשרת 7.66 עבור  $\alpha(t) = f(x(t), y(t))$  מקבלים:

$$\alpha'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

ובפרט עבור  $t = t_0$  מקבלים:

$$\begin{aligned} \alpha'(t_0) &= f_x(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0) = \\ &= f_x(4, 3) \cdot 1 + f_y(4, 3) \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{9} = -\frac{7\sqrt{3}}{36} = -0.3367 \end{aligned}$$

כלומר ברגע זה קצב גדילתה של הזווית הוא  $-0.3367$  רדיאנים בשנייה.

#### סעיף ב

תהא פונקציה  $f(x, y)$  בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2 בכל המישור, ומגדירים  $x(u, v) = u + v$ ,  $y(u, v) = u - v$  כמו כן מגדירים  $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  אז לפי חוקי הגזירה מאתר הקורס מתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= z_u = f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 1 = f_x(u - v, u + v) + f_y(u - v, u + v) \\ z_{uv} &= (f_{xx} \cdot x_v + f_{xy} \cdot y_v) + (f_{yx} \cdot x_u + f_{yy} \cdot y_u) = f_{xx} \cdot 1 + f_{xy} \cdot (-1) + f_{yx} \cdot 1 + f_{yy} \cdot (-1) = \\ &= f_{xx} - f_{xy} + f_{xy} - f_{yy} = 0 \end{aligned}$$

קיבלנו כי  $\frac{\partial}{\partial v}(z_u)$  זהותית 0 בכל המישור, לכן הפונקציה  $z_u$  אינה מושפעת מערך המשתנה  $v$ .

מכאן נסיק כי קיימת פונקציה במשתנה אחד  $g(t)$  כך ש  $z_u(u, v) \equiv g(u)$ . באופן דומה להוכחה שלנו,  $z_v$  אינה תלויה ב  $u$  ולכן קיימת פונקציה נוספת  $h(t)$  במשתנה אחד כך ש  $z_v(u, v) \equiv h(v)$ . נדגיש כי  $g, h$  רציפות (סכום של נגזרות חלקיות רציפות) ולכן אינטגרביליות לפי  $u, v$  בהתאמה.

## סעיף ג

תהא  $h(r)$  פונקציה במשתנה אחד גזירה פעמיים ותהא  $f(x, y) \equiv h(r)$  עבור  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

נוכיח את טענת העזר הבאה: לכל פונקציה גזירה  $g(r)$  ולכל פונקציה בשני משתנים  $k(u, v) \equiv g(r)$  כך ש  $r(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$  מקבלים  $k_u = g'(r) \cdot \frac{u}{r}$ .

אכן, לפי עמוד 68 בכרך ג נקבל  $k_u = g'(r) + r_u$  ומתקיים  $r_u = \frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u}{r}$  בנקל נוכל להוכיח טענה זהה עבור  $v$ .

כמו כן נשים לב כי מתקיים:

$$r_{uu} = \left(\frac{u}{r}\right)' = \frac{1 \cdot r - u \cdot r_u}{r^2} = \frac{r - u \cdot \frac{u}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - u^2}{r^3} = \frac{v^2}{r^3}$$

וכן טענה דומה ניתן להוכיח עבור  $r_{vv}$

יהי  $r > 0$  מספר ממשי. אז ניקח את הנקודות  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  המקיימות  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  ובפרט  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

$$f_x = h'(r) \cdot \frac{x}{r}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (h'(r))_x \cdot \frac{x}{r} + h'(r) \cdot \left(\frac{x}{r}\right)_x = (h''(r) \cdot \frac{x}{r}) \cdot \frac{x}{r} + h'(r) + h'(r) \cdot \frac{y^2}{r^3} = \\ &= h''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + h'(r) \cdot \frac{y^2}{r^3} = \frac{x^2 + y^2}{r^3} \cdot (rh''(r) + h'(r)) = \frac{1}{r} \cdot (rh''(r) + h'(r)) \end{aligned}$$

באופן דומה מתקיים  $f_{yy} = \frac{1}{r} \cdot (rh''(r) + h'(r))$  וכן  $f_y = h'(r) \cdot \frac{y}{r}$ .  
נקבל לפי הנתון  $0 = f_{xx} + f_{yy} = 2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rh''(r) + h'(r))$  ומכאן, היות  $r \neq 0$ ,  $rh''(r) + h'(r) = 0$ .