מטלת מנחה 13 - אלגברה לינארית 2

328197462

28/04/2023

שאלה 1

לאורך שאלה זו נשתמש בתכונות הבאות של תבנית ההעתקה: $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ וכן $\operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr} A$.

סעיף א

נוכיח כי f סימטרית אם ורק אם M סימטרית.
כיוון ראשון: נניח כי M סימטרית ונוכיח כי f סימטרית. לכל $A, B \in V$ נקבל אם כן:

$$f(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} MB)$$
$$f(B,A) = \operatorname{tr}(B^{\mathrm{t}} MA) = \operatorname{tr}((B^{\mathrm{t}} MA)^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M^{\mathrm{t}} B) \overset{M^{\mathrm{t}}=M}{=} \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} MB) = f(A,B)$$

כיוון שני: נניח כי f סימטרית. בפרט נבחר $A = I, B = (M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}$ ונקבל $f(A,B) = f(B,A)$.

$$f(A,B) = \operatorname{tr}(I^{\mathrm{t}} M(M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}(M(M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}})$$
$$f(B,A) \overset{\text{פיתוח לעיל}}{=} \operatorname{tr}(I^{\mathrm{t}} M^{\mathrm{t}}(M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}(M^{\mathrm{t}}(M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}})$$

על פי השוויון, נסיק $f(A,B) - f(B,A) = 0$ ולכן:

$$f(A,B) - f(B,A) = \operatorname{tr}(M(M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) - \operatorname{tr}(M^{\mathrm{t}}(M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}((M - M^{\mathrm{t}})(M - M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = ||M - M^{\mathrm{t}}||^2$$

ומתכונת החיוביות של המכפלה הפנימית, השוויון $||M - M^{\mathrm{t}}|| = 0$ גורר $M - M^{\mathrm{t}} = 0$ ולכן $M = M^{\mathrm{t}}$.

סעיף ב

נסמן את הבסיס הסטנדרטי של V ב $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, וכן נסמן $M = [m_i j]$
נשים לב כי $(E_{ij})^{\mathrm{t}} = E_{ji}$. נרצה לחשב בצורה כללית כל אחת מ16 המכפלות.

סעיף ג

ניזכר בטענה חשובה מלינארית 1: מרחב המטריצות הממשיות מסדר $n \times n$ הוא סכום ישר של מרחב המטריצות הסימטריות עם מרחב המטריצות האנסימטריות מאותו סדר. לכן, קיימות ויחידות M_1 סימטרית וM_2 אנסיטמרית כך ש $M_1 + M_2 = M$.
במקרה שלנו $M = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן ניקח $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$

הוכחנו כי $f_1(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_1 B)$ תבנית סימטרית. נוכיח באותו האופן כי $f_2(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_2 B)$ אנסימטרית:

$$f_2(B,A) = \operatorname{tr}(B^{\mathrm{t}} M_2 A) = \operatorname{tr}((B^{\mathrm{t}} M_2 A)^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} {M_2}^{\mathrm{t}} B) = -\operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_2 B) = -f_2(A,B)$$

ומקבלים:

$$f(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} MB) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}}(M_1 + M_2)B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_1 B + A^{\mathrm{t}} M_2 B) =$$
$$= \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_1 B) + \operatorname{tr}(A^{\mathrm{t}} M_2 B) = f_1(A,B) + f_2(A,B)$$

שאלה 2

כיוון ראשון: נניח כי f ניתנת להצגה כמכפלה של שתי תבניות לינאריות, ונוכיח כי $\rho(f)=1$.
יהא אפוא $(w)=(w_1,w_2,...,w_n)$ בסיס לV עבורו f מקבלת את הצורה הנתונה. נמצא את $[f]_{(w)}$.
לכל i,j מקבלים $[w_i]_{(w)}=e_i, [w_j]_{(w)}=e_j$. לכן:

$$f(w_i,w_j)=(b_1\cdot 0+\dots+b_i\cdot 1+\dots+b_n\cdot 0)(c_1\cdot 0+\dots+c_j\cdot 1+\dots+c_n\cdot 0)=b_ic_j$$

ומקבלים $[f]_{(w)}=[b_ic_j]_{ij}$.
נסמן $c=(c_1,c_2,...,c_n)$. שורות המטריצה $[f]_{(w)}$ הם כולם כפל בסקלר של וקטור זה. לכן, מרחב השורות של $[f]_{(w)}$ מוכל ב $\mathrm{Sp}(\{c\})$, ונקבל $\rho([f]_w)\le \mathrm{Sp}(\{c\})\le 1$.
מנגד, מהנתון $f\neq 0$ נסיק $\rho(f)>0$, וקיבלנו $\rho(f)=1$.

כיוון שני: נניח $\rho(f)=1$ ונוכיח כי f ניתנת להצגה כמכפלת שתי תבניות לינאריות.
יהא (w) בסיס כלשהו של V. אז המטריצה $[f]_{(w)}$ היא מדרגה 1 על פי 5.1.4.
תהא אם כן $c=(c_1,c_2,...,c_n)\in F^n$ שורה כלשהי ב $[f]_{(w)}$ שאינה אפס. בהכרח קיימת שורה כזו, כי דרגת המטריצה שונה מאפס.
היות ודרגת המטריצה היא 1, השורה ה i של המטריצה היא בהכרח כפל בסקלר b_i (יכול להיות אפס) של c.
לכל $x,y\in V$ נקבל:

$$f(x,y)=[x]_{(w)}{}^{\mathrm{t}}[f]_{(w)}[y]_{(w)}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1c_1 & b_1c_2 & \cdots & b_1c_n\\ b_2c_1 & b_2c_2 & \cdots & b_2c_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_nc_1 & b_nc_2 & \cdots & b_nc_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \cdots\\ y_n\end{pmatrix}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot\sum_{j=1}^{n}b_ic_jy_j)=\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\cdot\sum_{j=1}^{n}c_jy_j$$

ובבך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 3

סעיף א

נוכיח לפי 4.1.5. התבנית f נקבעת ע"י הפולינום הבילינארי:

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 = f((x_1,x_2),(y_1,y_2))$$

יתר על כך, $[f]_E$ סימטרית (E הוא הבסיס הסטנדרטי ל $\mathbb{R}^2$) ולכן f סימטרית על פי 4.2.2 והתבנית הריבועית המוסמכת לf תהיה:

$$q((x_1,x_2)) = f((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$$

נמצא ייצוג אלכסוני ל q ולf על פי שיטת לגראנז'. מקבלים באופן מיידי:

$$q((x_1,x_2)) = 1\cdot(x_1+2x_2)^2 + 0\cdot x_2^2$$

אם כן, עלינו למצוא בסיס (w') כך שלכל $v\in\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}[v]_E = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix} = [v]_{(w')}$.

נקבל שמטריצת המעבר $M^{-1}{}_{(w')\to E} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, וההופכית לה $M_{E\to(w')} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ מטריצת המעבר מ E ל(w').

מכאן מקבלים $(w') = ((1,0),(-2,1))$ ו $[f]_{(w')} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

סעיף ב

נבדוק באופן ישיר על פי משפט 4.5.1. מטריצת המעבר $M_{E\to(w')} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ומקבלים:

$$[q]_{(w')} = M^{\mathrm{t}}[q]_E M = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

שאלה 4

נפתור ביחד את סעיפים א + ב על פי טכניקת החפיפה האלמנטרית. ראשית, עבור הבסיס הסטנדרטי E, מקבלים:

$$[q]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ואז:

$$([q]_E|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$