ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20229

אלגברה לינארית 2

חוברת הקורס - אביב 2023ב

כתב: פרופ׳ יוני סטאנצ׳סקו

מרץ 2023 - סמסטר אביב - תשפ״ג

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו מברכים אתכם עם הצטרפותכם ללומדי הקורס "אלגברה לינארית II" ומאחלים לכם לימוד מהנה ומוצלח.

חוברת זו כוללת את כל הפרטים שעליכם לדעת, כדי לבצע את המוטל עליכם בלימוד קורס זה. זהו מעין מדריך אישי, שתפקידו לסייע לכם בלימוד הקורס ולהבהיר פרטים הקשורים בו. קראו חוברת זו בעיון ושמרו עליה במשך כל לימודיכם בקורס.

בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס והמטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://www.openu.ac.il/shoham .
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה בקורס הוא פרופ' יוני סטאנצ'סקו.
ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 0542688500 בימי ו' בין השעות 14:00 - 15:00 .
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - ionut@openu.ac.il.
- פקס: **09-7780631**.
- **שאילתא** - לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודים.

ב ב ר כ ה ,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (מס' קורס 20229 / 2023ב)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	10.03.2023-5.03.2023	פרק 1, פרק 2			
2	17.03.2023-12.03.2023	פרק 2, פרק 3			
3	24.03.2023-19.03.2023	פרק 2, פרק 3		ממ"ח 01 24.03.2023	
4	31.03.2023-26.03.2023	פרק 3 חזרה על הפרקים 1,2,3			ממ"ן 11 31.03.2023
5	07.04.2023-02.04.2023 (ד-ו פסח)	חזרה על הפרקים 1,2,3			
6	14.04.2023-09.04.2023 (א-ד פסח)	פרק 4, פרק 5			ממ"ן 12 14.04.2023
7	21.04.2023-16.04.2023 (ג יום הזכרון לשואה)	פרק 4, פרק 5			
8	28.04.2023-23.04.2023 (ג יום הזיכרון, ד יום העצמאות)	פרק 5, פרק 6			ממ"ן 13 28.04.2023
9	05.05.2023-30.04.2023	פרק 6 חזרה על הפרקים 4,5,6			
10	12.05.2023-07.05.2023 (ג ל"ג בעומר)	פרק 7, פרק 8			ממ"ן 14 12.05.2023
11	19.05.2023-14.05.2023	פרק 9 , פרק 10			
12	26.05.2023-21.05.2023 (ו שבועות)	פרק 10, פרק 11		ממ"ח 02 26.05.2023	
13	02.06.2023-28.05.2023	פרק 10, פרק 11			ממ"ן 15 02.06.2023
14	09.06.2023-04.06.2023	פרק 10, פרק 11 חזרה על הפרקים 7-11			
15	16.06.2023-11.06.2023	חזרה			ממ"ן 16 16.06.2023

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת 4 נקודות זכות

על מנת לקבל 4 נקודות זכות בקורס עליכם :

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

ג. לקבל בציון הסופי 60 לפחות.

תיאור המטלות

בקורס ״אלגברה לינארית II״ 6 מטלות מנחה ו-2 מטלות מחשב.

ממ״״ן 11	4 נק׳
ממ״ן 12	3 נק׳
ממ״ן 13	4 נק׳
ממ״ן 14	3 נק׳
ממ״ן 15	4 נק׳
ממ״ן 16	3 נק׳
ממ״ח 01	4 נק׳
ממ״ח 02	4 נק׳

במהלך הקורס עליכם להגיש מטלות שמשקלן הכולל לפחות 15 נקודות.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1,2

מספר השאלות: 15 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023ב **מועד אחרון להגשה:** 24.03.2023

(יוני)

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שים לב!

בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

במטלה זו כל המרחבים הם ממימד סופי.

בכל אחת מהשאלות 1-15 מופיעות שתי טענות. קבע לכל אחת מהן אם היא נכונה, אם לא.

סמן:

א – אם רק טענה א נכונה.

ב – אם רק טענה ב נכונה.

ג – אם הטענות א ו- ב נכונות.

ד – אם אף אחת מהטענות אינה נכונה.

שאלה 1

א. יהי $V=M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ ויהיו A,B איברים ב- V.

הנוסחה: $(A,B)=tr(BA)$, מגדירה מכפלה פנימית על V.

ב. יהי $V=\mathbf{R}^2$ ויהיו $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ איברים ב- V.

הנוסחה $(u,v)=x_1+y_1$ מגדירה מכפלה פנימית ב- V.

שאלה 2

א. אם V מרחב אוניטרי , אז קיים $0 \neq v \in V$ עבורו מתקיים : $(v,v) = i$.

ב. יהי $V = \mathbf{R}^4$ ויהיו $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = 0$.

לכל $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ו- $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ נגדיר

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \alpha_i \beta_i .$$

הנוסחה הנ"ל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbf{R}^4$.

שאלה 3

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $u, v, w \in V$.

א. $(u,v) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

ב. אם $u \perp v$ ו- $v \perp w$, אז $u \perp w$.

שאלה 4

יהי V מרחב אוניטרי ויהיו $u, v \in V$.

א. אם $\|u+v\| = \|u-v\|$, אז $u \perp v$.

ב. אם $u \perp v$, אז $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

שאלה 5

א. ב- $\mathbf{R}_5[x]$ קיימת מכפלה פנימית שלגביה הקבוצה :

$$\{1, x, x^2, x^3 + 2, 2x\}$$

אורתוגונלית.

ב. יהי V מרחב אוניטרי ו- $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V.

הנורמה של הווקטור u :

$$u = v_1 + \sqrt{2}\, v_2 + \sqrt{3}\, v_3 + \ldots + \sqrt{n}\, v_n$$

היא $\frac{(1+n)n}{2}$.

שאלה 6

א. אם U_1, U_2 ו- U_3 תת-מרחבים של מרחב מכפלה פנימית V, המקיימים:

$V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$, אז מתקיים $V = U_1^{\perp} \oplus U_2^{\perp} \oplus U_3^{\perp}$.

ב. אם U ו- W תת-מרחבים של V כך ש- $U \subseteq W$, אז $U^{\perp} \subseteq W^{\perp}$.

שאלה 7

א. ב- $M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$, $n > 1$, קיימת מטריצה סימטרית שונה מאפס אשר אורתוגונלית

לכל מטריצה אלכסונית.

ב. יהי U תת-מרחב של $\mathbf{R}^n$ המוגדר כך:

$$U = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

אז הווקטור $\{(1,1,\ldots,1)\}$ מהווה בסיס ל- $U^{\perp}$.

שאלה 8

נגדיר ב- $\mathbf{R}_3[x]$ מכפלה פנימית כך:

$$(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)\, Q(k).$$

יהיו $P_1 = 1$, $P_2 = x - 1$ ו- $P_3 = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$.

א. הקבוצה $\{P_1, P_2, P_3\}$ אורתוגונלית.

ב. הקבוצה $\{P_1, P_2, P_3\}$ אורתונורמלית.

שאלה 9

יהיו $u = (1,2,i,0)$ ו- $v = (3+i,-1,1-i,10)$ וקטורים ב- $\mathbf{C}^4$.

א. $(v,u) = 0$.

ב. המרחק בין u ל- v הוא $\sqrt{119}$.

שאלה 10

א. הנורמה של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ היא $\sqrt{30}$ (A איבר ב- $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$).

ב. לכל $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ו- $b_1, b_2, \ldots b_n$ ב- $\mathbf{R}$ מתקיים:

$(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \le (|a_1|^2 + .. + |a_n|^2)\,(|b_1|^2 + .. + |b_n|^2)$.

שאלה 11

א. אם $(\ ,\ )$ מכפלה פנימית במרחב V מעל השדה $\mathbf{C}$, אז גם כל כפולה של $(\ ,\ )$ בסקלר $\mathbf{C} \ni \lambda \neq 0$ היא מכפלה פנימית ב- V.

ב. תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

המכפלה הפנימית הנקבעת על-ידי A בבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^2$ היא:

$(u, v) = 4x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 5x_2 y_2$,

כאשר $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$.

שאלה 12

א. יהיו $x \neq y$ שייכים ל- $\mathbf{R}^n$ ומקיימים $\|x\| = \|y\| = 1$.

אז מתקיים $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1$.

ב. המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ חיובית לחלוטין.

שאלה 13

א. יהי V מרחב מכפלה פנימית, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ בסיס של V ונניח כי קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כך שמתקיים:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 .$$

אז B בסיס אורתונורמלי של V.

ב. יהי $U = Sp\left(\{1, x, x^2\}\right)$ תת מרחב של $\mathbf{R}_5[x]$ עם המכפלה הפנימית האינטגראלית בקטע $[0,1]$. ההיטל האורתוגונאלי של x^3 על U הוא $(x^3, 1)1 + (x^3, x)x + (x^3, x^2)x^2$.

שאלה 14

א. יהי $W = Sp\left(\{2x+1, x^2\}\right)$ תת-מרחב של $\mathbf{R}_3[x]$ עם המכפלה הפנימית האינטגראלית בקטע $[0,1]$, אז $\{40x^2 - 44x + 9\}$ בסיס ל- $W^{\perp}$.

ב. יהי $W = Sp\{(1,i,1)\ ,(1+i,0,2)\}$ תת-מרחב של $\mathbf{C}^3$, אז $\{(1+i,1,-1)\}$ בסיס ל- $W^{\perp}$.

שאלה 15

א. ב- $\mathbf{R}^3$ המרחק של $v = (1,-1,2)$ מתת-המרחב W,

$W = Sp\{(0,1,1)\ ,(0,1,0)\}$,

הוא 1.

ב. ב- $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$, המרחק של $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ מתת-המרחב W,

$$W = Sp\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

הוא $\sqrt{151}$.

הערה; **T^* מסמן את ההעתקה הצמודה של T. A^* מסמן את המטריצה הצמודה של A.**

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1,2,3

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023ב **מועד אחרון להגשה:** 31.03.2023

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שים לב!

בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

במטלה זו כל המרחבים הם ממימד סופי.

הערה; T^* **מסמן את ההעתקה הצמודה של** T. A^* **מסמן את המטריצה הצמודה של** A.

שאלה 1

א. יהי $V = M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ותהי $P \in V$ מטריצה הפיכה.

נגדיר טרנספורמציה לינארית $T_P : M_{n\times n}^{\mathbf{C}} \to M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ על-ידי:

$T_P X = P^{-1}XP$ לכל $X \in V$. הוכיחו ש- $(T_P)^* = T_{P^*}$.

ב. תהי $T_P : M_{2\times 2}^{\mathbf{C}} \to M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$ מוגדרת על-ידי $T_P X = P^{-1}XP$, כאשר $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$.

מצאו את המטריצה המייצגת את $(T_P)^*$ בבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$.

שאלה 2

יהיו P ו- Q מטרצות ממשיות מסדר $(n\times n)$, ותהי $U = P + iQ$.

נסמן $D = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}$.

א. הוכיחו שאם U מטריצה הרמיטית, אז D מטריצה סימטרית.

ב. הוכיחו שאם U מטריצה אוניטרית, אז D מטריצה אורתוגונלית.

שאלה 3

יהיו A ו- B מטריצות חיוביות לחלוטין ו- Q מטריצה אוניטרית.

הוכיחו שאם $A = BQ$ אז $A = B$.

שאלה 4

יהי $0 \neq w \in \mathbf{C}^n$ וקטור עמודה. מצאו תנאי הכרחי ומספיק עבור w כדי שהמטריצה

$H = I - 2ww^*$ תהיה אוניטרית. הוכיחו שבמקרה זה H היא מטריצת שיקוף ביחס ל- $\{w\}^\perp$,

כלומר: $Hw = -w$ ו- $Hv = v$ לכל $v \in \{w\}^\perp$.

(**הערה**: אם $w = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$, אז w^* מוגדר על-ידי $w^* = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$) .

שאלה 5

יהי V מרחב מכפלה פנימית. יהיו $w_1, w_2 \in V$ וקטורים המקיימים:

$||w_1|| = ||w_2|| = 1$, $(w_1, w_2) = 0$.

נגדיר טרנספורמציה ליניארית $T: V \to V$ כך: $Tv = v - 2(v, w_1)w_1 - 2(v, w_2)w_2$.

א. הוכיחו כי T טרנספורמציה ליניארית צמודה לעצמה ואוניטרית.

ב. בדקו האם T אי שלילית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1,2,3

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023ב **מועד אחרון להגשה:** 14.04.2023

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שים לב!

בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

במטלה זו כל המרחבים הם ממימד סופי.

שאלה 1

א. נתונות המטריצות:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad , A_2 = \begin{bmatrix} i & 2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , A_3 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{bmatrix}$$

לכל אחת מהמטריצות בדקו אם היא נורמלית, ואם כן - מצאו מטריצה אוניטרית המלכסנת אותה.

ב. מצאו אילו מבין המטריצות הבאות הן חיוביות (חיוביות לחלוטין):

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית נורמלית במרחב מכפלה פנימית ממימד סופי.

הוכיחו :

(i) $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Ker}T^*$.

(ii) $\mathrm{Im}\,T = (\mathrm{Ker}T)^{\perp}$.

(iii) $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{Im}\,T^*$.

שאלה 3

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו- $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית המקיימת

$\frac{1}{2}(T+T^*) = T^2$. הוכיחו ש- T נורמלית ו- $T^2 = T$.

שאלה 4

תהי H מטריצה סימטרית ממשית מסדר $(n\times n)$ ויהי λ הערך העצמי המקסימאלי של H.

הוכיחו שלכל $v\in\mathbf{R}^n$, $||v||=1$ מתקיים $v^tHv\le\lambda$.

שאלה 5

הוכיחו שהמטריצה $A=\begin{bmatrix}2-i & -1 & 0\\ -1 & 1-i & 1\\ 0 & 1 & 2-i\end{bmatrix}$ היא נורמלית, ומצאו את הפירוק

$A=\sum_i \lambda_i P_i$ כאשר P_i הן המטריצות (המייצגות בבסיס הסטנדרטי) של ההטלות

האורתוגונאליות שמופיעות בפירוק הספקטראלי של T_A .

הערה; T^* **מסמן את ההעתקה הצמודה של** T **.** A^* **מסמן את המטריצה הצמודה של** A **.**

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4,5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023ב **מועד אחרון להגשה:** 28.04.2023

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שים לב!

בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

במטלה זו כל המרחבים הם ממימד סופי.

שאלה 1

יהי $V = M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ ותהי $f:V\times V\to\mathbf{R}$ מוגדרת לפי: $f(A,B) = tr(A^t MB)$, לכל $A,B\in V$.

א. מצאו תנאי מספיק והכרחי על M כדי ש-f תהיה תבנית סימטרית.

ב. מצאו את $[f]_E$ כאשר $n=2$, E הבסיס הסטנדרטי של $V = M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ ו- $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

ג. מצאו הצגה של f כסכום של תבנית בילינארית סימטרית ותבנית בילינארית אנטיסימטרית, כאשר $n=2$, $V = M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ ו- $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

שאלה 2

הוכיחו שתבנית בילינארית $f \neq 0$ ניתנת להצגה כמכפלה של שתי תבניות ליניאריות:

$$f(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j\right)$$

אם ורק אם הדרגה של f היא 1.

שאלה 3

תהי f תבנית על $\mathbf{R}^2$ הנתונה על-ידי:

$$f\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=x_1y_1+4x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1.$$

א. הוכיחו ש-f תבנית בילינארית, מצא בסיס שבו f מיוצגת על-ידי מטריצה אלכסונית והצג את התבנית הריבועית המסומכת ל-f.

ב. בדקו את נכונות נוסחת המעבר מן הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^2$ לבסיס שמצאת בסעיף הקודם.

שאלה 4

א. מצאו צורה אלכסונית של התבנית הריבועית $q:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$$q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j.$$

מצאו את התבנית הבילינארית הסימטרית הקוטבית ל-q.

ב. מצאו בסיס שבו התבנית הריבועית מסעיף א' היא בעלת צורה אלכסונית.

שאלה 5

א. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbf{C}$, $\dim V\ge 2$.
הוכיחו שאם $q:V\to\mathbf{C}$ תבנית ריבועית, אז קיים $v\ne 0$ כך ש-$q(v)=0$. נמקו.

ב. האם תכונה זאת נכונה גם עבור תבנית ריבועית $q:V\to\mathbf{R}$, כאשר V מרחב וקטורי מעל $\mathbf{R}$, $\dim V\ge 2$? נמקו.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4,5,6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023ב **מועד אחרון להגשה:** 12.05.2023

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שים לב!

בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

במטלה זו כל המרחבים הם ממימד סופי.

שאלה 1

א. מצאו את הדרגה ואת הסימנית של התבנית הריבועית $q:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$:

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4 .$$

ב. מצאו תת-מרחב ממימד מקסימאלי של $\mathbf{R}^4$ שעליו q היא תבנית חיובית לחלוטין.

שאלה 2

תהי q תבנית ריבועית חיובית למחצה. הוכיחו כי:

$$L_0 = \{v \in V \mid q(v) = 0\}$$

הוא תת-מרחב ממימד $n-\rho$ כאשר ρ הדרגה של q.

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbf{R}$ ו- $q:V \to \mathbf{R}$ תבנית ריבועית.

הוכיחו שאם הקבוצה $L = \{v \mid q(v) \geq 0\}$ היא תת מרחב של V,

אז q **שומרת סימן**.

(הערה: ההגדרה של תבנית ש**אינה שומרת סימן** נמצאת בסעיף ה', הגדרה 6.3.1).

שאלה 4

א. מצאו את כל הערכים הממשיים של λ שעבורם התבנית הריבועית $q:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$$

חיובית לחלוטין.

ב. תהיינה התבניות הבאות על $\mathbf{R}^3$:

$$q_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 ,$$

$$q_2(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 .$$

מצאו בסיס של $\mathbf{R}^3$ אשר ביחס אליו:

$q_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ ו- $q_2 = \delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + \delta_3 y_3^2$. מהם δ_3, δ_2, δ_1?

שאלה 5

א. הוכיחו כי אם q תבנית ריבועית אי-שלילית, אז המטריצה המייצגת אותה היא מטריצה סינגולארית. (<u>הערה</u>: אי-שלילית = חיובית למחצה)

ב. תהי $A = A^t$ מטריצה סימטרית. תהי $q(x) = x^tAx,\ x \in \mathbf{R}^n$ תבנית ריבועית חיובית לחלוטין. הוכיחו כי A מטריצה אורתוגונלית אם ורק אם $A = I$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7,8,9

מספר השאלות: 15 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023ב **מועד אחרון להגשה:** 26.05.2023

(יוני)

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שים לב!

בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

במטלה זו כל המרחבים הם ממימד סופי.

בשאלות 1-14 מופיעות שתי טענות. סמן:

א – אם רק טענה א נכונה.

ב – אם רק טענה ב נכונה.

ג – אם שתי הטענות נכונות.

ד – אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

תהי A מטריצה מסדר 3×3.

א. אם $A^4 = 0$, אז $A^3 = 0$.

ב. אם $A^3 = 0$, אז $A^2 = 0$.

שאלה 2

תהי A מטריצה מסדר $n \times n$ ויהי $P(t)$ הפולינום המינימאלי שלה.

אם $P(t)$ ממעלה k ו- $(c \neq 0;1)$, אז הפולינום המינימאלי של המטריצה cA הוא:

א. $c^k P\left(\frac{t}{c}\right)$.

ב. $c^n P\left(\frac{t}{c}\right)$.

שאלה 3

תהי $A \in M_{n\times n}^{\mathbf{F}}$ מטריצה שאינה ניתנת ללכסון.

אז קיים פולינום $0 \neq P(t) \in \mathbf{F}_n[t]$ ממעלה קטנה מ- n כך שמתקיים: $\left[P(A)\right]^2 = 0$.

א. כאשר $F = \mathbf{C}$.

ב. כאשר $F = \mathbf{R}$.

שאלה 4

א. אם $T:V \to V$ טרנספורמציה לינארית המקיימת: $T^2 = I$, אז $T = I$ או $T = -I$.

ב. תהי:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

אז A מאפסת את הפולינום $t^6 - t$.

שאלה 5

א. קיימת מטריצה ממשית עבורה הפולינום האופייני הוא $t(t-1)(t^2+t+1)$ ואילו הפולינום המינימאלי הוא $t(t-1)$.

ב. יהיו A ו- B מטריצות מסדר $n \times n$.

אם קיים פולינום $q(t)$ המקיים $q(A) = 0$ אבל $q(B) \neq 0$, אז A ו- B אינן דומות.

שאלה 6

א. הפולינום המינימאלי של המטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ הוא ממעלה 2 לכל היותר.

ב. עבור $A = diag\{2,2,5,5,6\}$ הפולינום המינימאלי הוא: $(t-2)^2(t-5)(t-6)$.

שאלה 7

א. אם למטריצות A ו- B אותו פולינום אופייני, אז הן דומות.

ב. לכל פולינום מתוקן $1 \neq p(t) \in \mathbf{F}[t]$ קיימת מטריצה כך ש- $p(t)$ הוא הפולינום האופייני שלה.

שאלה 8

תהי $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

א. מטריצה A מאפסת פולינום ממעלה 1.

ב. הפולינום המינימאלי של A הוא : $t^3 - t$.

שאלה 9

א. אם $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ו- $P(t) = t^2 - 1$, אז $P(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$.

ב. תהי $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

הפולינום המינימאלי של A הוא $(t-2)^2(t-3)^3$.

שאלה 10

תהי $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, אז :

א. $B^4 = B^2 - 6B - 6I$.

ב. $B^{-1} = -\frac{1}{6}B^2 + \frac{1}{6}B$.

שאלה 11

א. תהי $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ טרנספורמציית הסיבוב ב- 120° נגד כיוון השעון סביב הנקודה O.

יהי $P(t) = t^7 - t^4 + t^3$. אז $P(T)(x,y) = (x,y)$, לכל $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

ב. תהי $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ טרנספורמציית השיקוף ביחס לציר ה- x, כלומר $T(x,y) = (x,-y)$,

ויהי $P(t) = t^3 + t - 1$. אז $P(T)(x,y) = (x,-3y)$.

שאלה 12

תהי $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

א. הפולינום האופייני של A הוא $(t+4)^4$.

ב. הפולינום המינימאלי של A הוא $t^3+12t^2+48t+64$.

שאלה 13

יהיו V מרחב ליניארי ממימד 5, $T:V \to V$ טרנספורמציה ליניארית הפיכה.

א. האיבר החופשי של הפולינום המינימאלי של T שונה מ- 0.

ב. T^{-1} ניתנת להצגה על-ידי פולינום ב- T ממעלה קטנה או שווה ל- 4.

שאלה 14

א. אם $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V, ו- $T:V \to V$ מקיימת:

$$Tv_1 = 0$$

$$Tv_i = v_{i-1}, \qquad 2 \le i \le n \,,$$

אז קיים $1 \le k < n$ עבורו $T^k = 0$.

ב. אם מטריצה ריבועית A מאפסת את הפולינום $P(t) = t^2+5t+1$, אז A הפיכה.

שאלה 15

א. אם מטריצה ריבועית A מאפסת את הפולינום $t^{102}+t^2+t$, אז A הפיכה.

ב. תהי A מטריצה ממשית הפיכה המקיימת $A^{-1} = -A$, אז הפולינום המינימאלי של A (ביחס ל- $\mathbf{R}$) הוא t^2+1.

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7,8,9,10

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2023ב **מועד אחרון להגשה:** 02.06.2023

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שים לב!

בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

במטלה זו כל המרחבים הם ממימד סופי.

שאלה 1

א. תהי $T:V\to V$ ההעתקה המיוצגת בבסיס הסטנדרטי על-ידי המטריצה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

מצאו את כל תת-המרחבים ה- T-שמורים של V:

(1) כאשר $V=\mathbf{R}^2$.

(2) כאשר $V=\mathbf{C}^2$.

ב. יהי V מרחב ליניארי מעל שדה $\mathbf{F}$, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית.

ידוע כי כל תת-מרחב של V הוא T-שמור. הוכיחו שקיים $\alpha\in F$ כך ש- $T=\alpha I$,

(כלומר T טרנספורמציה סקלרית).

שאלה 2

א. תהי T טרנספורמציה ליניארית במרחב ליניארי V שמימדו סופי.

יהי W תת-מרחב T-שמור של V ו- T_W הצמצום של T ל-W.

(1) הוכיחו כי הפולינום המינימאלי של T_W מחלק את הפולינום המינימאלי של T.

(2) הסיקו כי אם T לכסינה, אז T_W לכסינה.

ב. אם $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ היא בעלת ערכים עצמיים 1 , 2 ו- 3 ווקטורים עצמיים v_1 , v_2 ו- v_3 בהתאמה, מה הם כל תת-המרחבים ה- T-שמורים של $\mathbf{R}^3$? נמקו .

שאלה 3

תהי $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ הטרנספורמציה הליניארית המיוצגת בבסיס הסטנדרטי על-ידי המטריצה :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

א. מצאו לפחות שני תת-מרחבים T-שמורים לא טריוויאליים של $\mathbf{R}^3$.

ב. יהי $W = Ker(T-3I)$. הוכיחו כי לא קיים תת-מרחב U של $\mathbf{R}^3$ שהוא T-שמור ומקיים :

$$\mathbf{R}^3 = W \oplus U \,.$$

שאלה 4

תהי $T:V \to V$ טרנספורמציה ליניארית במרחב ליניארי ממימד סופי V,

ויהי $M(t) = M_1(t)\cdot\ldots\cdot M_k(t)$ הפולינום המינימאלי של T (מניחים ש- $M_i(t)$ פולינומים מתוקנים זרים בזוגות).

נסמן : $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ הפירוק הפרימרי המתאים ל- T , כאשר $W_i = KerM_i(T)$.

יהי W תת-מרחב T-שמור של V.

הוכיחו כי $W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2) \oplus \ldots \oplus (W \cap W_k)$.

שאלה 5

יהי V מרחב אוניטרי מממד סופי ו- $T:V \to V$ טרנספורמציה נורמלית.

הוכיחו שכל תת-מרחב T-שמור הוא גם T^*-שמור.

***__הערה;__* נסמן ב - T^* את ההעתקה הצמודה של T.**

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7-11

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2023ב **מועד אחרון להגשה:** 16.06.2023 (יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שים לב!

בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

במטלה זו כל המרחבים הם ממימד סופי.

שאלה 1

תהי $A = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

א. מצאו את צורת ז'ורדן G של A ומצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = G$.

ב. חשבו את G^{100} ואת A^{100}.

ג. מצאו נוסחה עבור a_n, כאשר נתון:

$$a_0 = a,$$
$$a_1 = b,$$

ו- $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$, לכל $n \geq 0$.

שאלה 2

יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי, ותהי $T: V \to V$ טרנספורמציה ליניארית.

נתון שכל וקטור עצמי של T הוא גם וקטור עצמי של T^*.

הוכיחו כי T טרנספורמציה נורמלית. __*הערה:*__ **נסמן ב - T^* את ההעתקה הצמודה של T.**

שאלה 3

א. מצאו את צורת ז׳ורדן של המטריצה $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

ב. מצאו את צורת ז׳ורדן J של המטריצה B ומצא מטריצה הפיכה P המקיימת $B=P^{-1}JP$,

כאשר B נתונה על ידי $B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$.

שאלה 4

תהי A מטריצה ריבועית מסדר 7 בעלת ערך עצמי יחיד $\lambda \in \mathbf{C}$.

נתון ש- $\rho(A-\lambda I)^2 = 1$ ו- $\rho(A-\lambda I) = 2$.

מצאו את צורת ז׳ורדן ואת הפולינום המינימאלי של A.

שאלה 5

תהי A מטריצה מסדר 3 בעלת ערכים עצמיים ממשיים בלבד, כך שצורת ז׳ורדן של A^3 היא:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מצאו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימאלי של A, ורשמו את צורת ז׳ורדן של A. נמקו.