

מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

20/01/2023

שאלה 1

נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{nx}{e^x + n + x}$ המוגדרות (ורציפות) ב $[0, \infty)$. נחשב את הפונקציה הגבולית. לכל $x \in [0, \infty)$ מתקיים:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{e^x + n + x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x \cdot \frac{1}{n} + 1 + x \cdot \frac{1}{n}} = \frac{x}{1} = x$$

כמו כן, מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [0, \infty)$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{e^x + n + x} - x \right| = \left| \frac{nx - x(e^x + n + x)}{e^x + n + x} \right| = \left| \frac{-x^2 - xe^x}{e^x + n + x} \right| = \frac{x^2 + xe^x}{e^x + n + x}$$

סעיף א

ניקח את הסדרה $x_n = n$. מתקיים:

$$\sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n^2 + ne^n}{e^n + 2n} = \frac{\frac{n^2}{e^n} + n}{1 + 2 \cdot \frac{n}{e^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

מכאן, לפי למה 6.3, נסיק כי (f_n) לא מתכנסת במידה שווה ל f .

סעיף ב

יהיו $0 \leq a < b$ כלשהם.

נדגיש כי מתקיים $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ והפונקציה הגבולית f נשארת זהה.

נבחר את הסדרה $\mu_n = \frac{b^2 + be^b}{e^a + n + a}$. לכל $x \in [a, b], n \in \mathbb{N}$ נקבל:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2 + xe^x}{e^x + n + x} \leq \frac{b^2 + be^b}{e^a + n + a} = \mu_n$$

מתקיים $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (קבועים) ולכן לפי שאלה 7 ביחידה 6 נסיק כי (f_n) מתכנסת במ"ש ל f .
לכן, לפי משפט 6.8 נקבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 2

מגדירים פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, וכן לכל n טבעי מגדירים $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in [0, 1]$ מתקיים $f_n(x) = f(x^n)$. נגדיר $g(x) \equiv f(0)$ פונקציה קבועה.

סעיף א

יהא $0 < a < 1$ כלשהו.

נראה תחילה התכנסות נקודתית לפונקציה g . לכל $x \in [0, a]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n) \stackrel{t=x^n \rightarrow 0+}{=} \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \stackrel{\text{רציפות } f}{=} f(0)$$

נוכיח התכנסות במידה שווה לפי הגדרה. יהא $\epsilon_0 > 0$.

הפונקציה $\delta(x) = |f(x) - f(0)|$ היא פונקציה רציפה ב $[0, 1]$ כהפרש והרכבה של פונקציות רציפות.

לכן, לפי אינפי 1, יש לה ערך מקסימלי בקטע $[0, 1]$. נסמן ערך זה ב $x_\Delta \in [0, 1]$.

עבור $\delta(x_\Delta) > \epsilon_0$, לכל n טבעי ולכל $x \in [0, a]$ מתקיים $x^n \in [0, 1]$ ולכן $|f_n(x) - f(0)| < |f(x_\Delta) - f(0)| < \epsilon_0$.

בפרט, כאשר $x_\Delta = 0$ נקבל $\delta(x_\Delta) = 0$ ולכן $\epsilon_0 > \delta(x_\Delta)$.

נוכיח עבור שארית המקרים - $\epsilon_0 < \delta(x_\Delta)$ וכן $x_\Delta \in (0, 1]$.

מרציפות פונקציית המרחק ואי-השוויון $\delta(x_\Delta) > \epsilon_0 > \delta(0) = 0$, קיים לפי משפט ערך הביניים מאינפי 1 $x_\epsilon \in [0, 1]$ כלשהו כך ש $\delta(x_\epsilon) = \epsilon_0$. לא ייתכן $x_\epsilon = 0$ כי $\delta(0) = 0 < \delta(x_\epsilon)$.

נרצה לבחור את הנקודה x_ϵ השמאלית ביותר האפשרית, כלומר, אילו קיים $x' \in (0, x_\epsilon)$ כך ש $\delta(x') > \epsilon_0$, משפט ערך הביניים מבטיח לנו קיומו של $x_\epsilon \in (0, x')$ נוסף כך ש $\delta(x_\epsilon) = \epsilon_0$. בחירה זו מבטיחה לנו כי לכל $x \in [0, x_\epsilon]$ מתקיים $\delta(x) < \epsilon_0$.

לכן, מהגבול הידוע מאינפי 1 $\sqrt[n]{x_\epsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ נסיק כי עבור $\epsilon = 1 - a > 0$, החל מ $N \in \mathbb{N}$ כלשהו נקבל:

$$|\sqrt[n]{x_\epsilon} - 1| < 1 - a \stackrel{\sqrt[n]{x_\epsilon} \leq 1}{\Rightarrow} 1 - \sqrt[n]{x_\epsilon} < 1 - a \Rightarrow \sqrt[n]{x_\epsilon} > a$$

נבחר N זה. לכל $n > N$ נקבל בקטע $[0, a]$ כי הפונקציה x^n מונוטונית עולה,

ולכן לכל $0 \leq x \leq a < \sqrt[n]{x_\epsilon}$ מקבלים $0 \leq x \leq a < \sqrt[n]{x_\epsilon} \Rightarrow x^n \leq a^n < x_\epsilon \Rightarrow x \in [0, x_\epsilon]$ אי לכך,

$$|f_n(x) - f(0)| = |f(x^n) - f(0)| = \delta(x^n) \stackrel{x^n \in [0, x_\epsilon]}{<} \epsilon_0$$

סעיף ב

הפונקציה f רציפה ולכן אינטגרלית, וכמו כן הפונקציות f_n רציפות ולכן אינטגרליות כהרכבה של פונקציות רציפות. נוכיח לפי הגדרת הגבול, בהשראת הוכחת משפט 6.8. אם כן, יהא $\epsilon > 0$ ועלינו להוכיח שהחל מ $N \in \mathbb{N}$ מסוים מתקיים:

$$\left| \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 f(0) dx \right| < \epsilon$$

נשים לב כי מאחר ו $f(0)$ פונקציה קבועה ורציפה ולכן אינטגרלית, נקבל לפי שאלה 51 ביחידה 1:

$$f(0) = (1 - 0) \cdot f(0) \leq \int_0^1 f(0) \leq (1 - 0) \cdot f(0) = f(0)$$

ואכן נקבל לכל N טבעי:

$$\left| \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 f(0) dx \right| \stackrel{1.24}{=} \left| \int_0^1 (f_n(x) - f(x)) dx \right| \stackrel{1.50 \text{ שאלה}}{\leq} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \stackrel{3.3}{=} \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a |f_n(x) - f(x)| dx$$

לכל $0 < a < 1$, לפי סעיף א, מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ החל מ N מסוים. לכן, לפי 1.26 ואינפי 1:

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a |f_n(x) - f(x)| dx \leq \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a \frac{\epsilon}{2} = \lim_{a \rightarrow 1^-} a \cdot \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

ובזאת סיימנו את ההוכחה.

שאלה 3

סעיף א

לפינו טור חזקות מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, כאשר לכל n טבעי נקבל $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$, נמצא רדיוס התכנסות לפי למה 6.11:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (2n)! \cdot (2n+1)(2n+2)}{(2n)! \cdot n! \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)} = \infty$$

ותחום ההתכנסות הוא \mathbb{R} .

סעיף ב

לפינו טור חזקות מהצורה $\sum_{k=10}^{\infty} a_k (x-1)^k$ כאשר לכל k טבעי נקבל:

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{5n}}{n \ln n \cdot 5^n} & k = 5n \\ 0 & k \neq 5n \end{cases}$$

רדיוס ההתכנסות נתון לנו ע"י משפט 6.10 - $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$.
תתי הסדרות (a_{5n}) , $m \neq 5n$, (a_m) מכסות את (a_k) ומאחר ו (a_m) סדרת אפסים נקבל $\sqrt[n]{|a_m|} = 0 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.
הגבול עבור תת-הסדרה a_{5n} יהיה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5n]{\left| \frac{(-1)^{5n}}{n \ln n \cdot 5^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[5n]{n \ln n} \cdot \sqrt[5]{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$$

* כי החל מ N מסוים מתקיים אי-השוויון הבא וממנו נובע כלל הסנדוויץ' $\sqrt[5n]{n \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

$$(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5n]{n} \leq \sqrt[5n]{n \ln n} \leq \sqrt[5n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^{\frac{2}{5}}$$

לסיכום, רדיוס ההתכנסות יתקבל לפי $\sqrt[5]{5}$ $\Rightarrow R = \sqrt[5]{5}$

נבדוק קצוות. בקצה $x = 1 + \sqrt[5]{5}$ נקבל את טור המספרים $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{5n} \cdot (\sqrt[5]{5})^{5n}}{n \ln n \cdot 5^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.
טור זה הוא טור לייבניץ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \lambda_n$ כאשר הסדרה $\lambda_n = \frac{1}{n \ln n}$ חיובית, אפסה, ומונטונית יורדת כי לכל n טבעי מקבלים:

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \leq \frac{1}{n \ln(n+1)} \leq \frac{1}{n \ln n} = \lambda_n$$

אי-לכך, לפי משפט 5.20 נסיק את התכנסות טור המספרים $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.
בקצה $x = 1 - \sqrt[5]{5}$ יתקבל טור המספרים $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{5n} \cdot (-\sqrt[5]{5})^{5n}}{n \ln n \cdot 5^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. טור זה מתבדר לפי שאלה 27 ביחידה 5.

לסיכום, נקבל כי תחום ההתכנסות הוא $[-1 + \sqrt[5]{5}, 1 + \sqrt[5]{5}]$.

סעיף ג

לפינו טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} d(n)x^n$ כאשר $d(n)$ הוא מספר המחלקים של n .

רדיוס ההתכנסות נתון לנו, לפי 6.10, ע"י הגבול $R = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{d(n)}$.

מאחר ולכל n טבעי מתקיים $1 \leq d(n) \leq n$, ולכן $1 \leq \sqrt[n]{d(n)} \leq \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, נסיק מכלל הסנדוויץ' כי $\sqrt[n]{d(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

ובפרט $R = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{d(n)} = 1$.

נבדוק התכנסות בקצוות. יתקבלו טורי המספרים $\sum (\pm 1)^n d(n)$ בהתאמה.

היות ולא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות טורים $0 \rightarrow (-1)^n d(n) \rightarrow 0$, נסיק כי הטורים מתבדרים.

לסיכום, תחום ההתכנסות של טור החזקות הוא $(-1, 1)$.

שאלה 4

סעיף א

הטענה נכונה.

נסמן לכל n טבעי, $u_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כך שלכל x ממשי $u_n(x) = \frac{x}{4+n^4x^2}$. נוכיח את ההתכנסות במ"ש של $f(x) = \sum u_n(x)$ בעזרת מבחן ויירשטראס.

נבחר $\alpha_n = \frac{1}{4n^2}$ לכל $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ נקבל:

$$\begin{aligned} u'_n(x) &= \frac{1(4+n^4x^2) - x(2n^4x)}{(4+n^4x^2)^2} = \\ &= \frac{4+n^4x^2 - 2n^4x^2}{(4+n^4x^2)^2} = \\ &= \frac{4-n^4x^2}{(4+n^4x^2)^2} \end{aligned}$$

נקבל נקודות החשודות לערכי קיצון מקומיים כאשר $u'_n(x) = 0$, כלומר עבור $x = \pm \frac{2}{n^2}$. מתקיים: $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ ולכן:

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq |u_n(\pm \frac{2}{n^2})| = \\ &= |\frac{\pm \frac{2}{n^2}}{4+n^4(\pm \frac{2}{n^2})^2}| = \\ &= \frac{\frac{|\pm 2|}{n^2}}{4+n^4 \cdot \frac{4}{n^4}} = \\ &= \frac{\frac{2}{n^2}}{8} = \frac{1}{4n^2} = \alpha_n \end{aligned}$$

הטור $\sum \alpha_n = \sum (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^2})$ מתכנס לפי דוגמה 5.8 עבור $\alpha = 2 > 1$ ולפי משפט 5.10 עבור $c = \frac{1}{4} \neq 0$ אי לך, לפי מבחן ויירשטראס 6.7 נסיק כי טור הפונקציות $\sum u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- \mathbb{R} . כעת, היות ו u_n פונקציות רציפות ב \mathbb{R} ומתכנסות במ"ש ב \mathbb{R} ל f , נסיק לפי 6.4* כי f רציפה ב \mathbb{R} .

סעיף ב

הטענה לא נכונה.

גם כאן נסמן $u_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in [0, 1]$ נקבל $u_n(x) = (1-x)x^n = x^n - x^{n+1}$. נציין כי הפונקציות u_n רציפות ב \mathbb{R} ובפרט ב $[0, 1]$.

נמצא התכנסות נקודתית של טור המספרים $\sum u_n(x_0)$ עבור $x_0 \in [0, 1]$ כלשהו. לכל k נקבל:

$$S_k = \sum_{n=1}^k u_n(x_0) = \sum_{n=1}^k x_0^n - x_0^{n+1} \stackrel{\text{טור טלסקופי}}{=} x_0 - x_0^{k+1}$$

ולכן:

$$S(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_0 - x_0^{k+1} = \begin{cases} x_0 & 0 \leq x_0 < 1 \\ 0 & x_0 = 1 \end{cases}$$

אילו היה טור הפונקציות $\sum u_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב $[0, 1]$, היינו מקבלים לפי 6.4* כי הפונקציה $S(x)$ רציפה, בסתירה לכך ש $S(x)$ אינה רציפה בנקודה $x=1$!