מטלת מנחה 14 - אלגברה לינארית 1

328197462

15/01/2023

שאלה 1

יהיו U, W_1, W_2 תתי-מרחבים לינאריים של מרחב לינארי V.

סעיף א

יהא $v \in (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$ ועלינו להוכיח $v \in U \cap (W_1 + W_2)$.
מהגדרת החיבור, קיימים $v_1 \in U \cap W_1, v_2 \in U \cap W_2$ כך ש $v = v_1 + v_2$.
אי לכך, $v_1, v_2 \in U$ ומסגירות החיבור הוקטורי במרחב הלינארי נסיק $v = v_1 + v_2 \in U$.
כמו כן, מאחר ו $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$ נקבל מהגדרת החיבור כי $v = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$.
הראינו שייכות לשתי הקבוצות $U, W_1 + W_2$ ולכן נסיק $v \in U \cap (W_1 + W_2)$

סעיף ב

עבור $V = \mathbb{R}^2$ נגדיר:

$$U = \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \quad W_1 = \mathsf{Sp}(\{(1,0)\}) \quad W_2 = \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})$$

אז לפי סעיף א של שאלה זו מתקיים $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2)$.

ניקח $v = (1,1)$ ונראה כי $v \in U \cap (W_1 + W_2)$ וגם $v \notin (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$.
נחשב:

$$\begin{aligned} U \cap (W_1 + W_2) &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap (\mathsf{Sp}(\{(1,0)\}) + \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})) \underset{\text{7.6.8 שאלה}}{=} \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap (\mathsf{Sp}(\{(1,0),(0,1)\})) = \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap \mathbb{R}^2 = \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \ni (1,1) = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U \cap W_1) + (U \cap W_2) &= (\mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap \mathsf{Sp}(\{(1,0)\})) + (\mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) + \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})) = \\ &= \{\underline{0}\} + \{\underline{0}\} = \\ &= \{\underline{0}\} \not\ni (1,1) = v \end{aligned}$$

ולכן מתקיימת הכלה חזקה בין תתי-המרחבים.

שאלה 2

יהיו $U=\text{Sp}\{u_1,u_2\}$, $W=\text{Sp}\{w_1,w_2\}$ תתי-מרחבים לינאריים של V כך שהקבוצות הפורשות אותם הן בסיסים.
מניחים כי $A=\{u_1,u_2,w_1\}$ תלויה לינארית.

סעיף א

נראה כי $w_1\in U$ בדרך השלילה.
נניח בשלילה כי $w_1\notin \text{Sp}\{u_1,u_2\}$. מאחר והקבוצה $\{u_1,u_2\}$ היא בסיס ולכן בלתי תלויה לינארית, נסיק לפי שאלה 8.1.8 כי $A=\{u_1,u_2\}\cup\{w_1\}$ בלתי תלויה לינארית, בסתירה לנתון!

כעת, מאחר ו$W=\text{Sp}\{w_1,w_2\}\ni w_1=1\cdot w_1+0\cdot w_2$, נקבל $w_1\in U\cap W$.

סעיף ב

ניזכר במשפט המימדים 8.3.6

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

לשני תתי-המרחבים U,W יש בסיסים בגודל 2 ומכאן $\dim U=\dim W=2$. עלינו למצוא את מימד תת-המרחב $U\cap W$.

לפי משפט $3.8.4$, עבור $U\cap W\subseteq U,W$ נסיק $\dim(U\cap W)\leq 2$.
בנוסף, אם $\dim(U\cap W)=2$, אז נסיק את השוויון $U\cap W=U=W$ בסתירה לנתון כי U,W תתי-מרחבים שונים.
מכאן נובע אי-השוויון $\dim(U\cap W)\leq 1$. מאחר ו $w_1\neq \underline{0}\in U\cap W$ (הוקטור נמצא בקבוצה בלתי תלויה לינארית), נסיק $\dim(U\cap W)\geq 1$ ובסך הכל $\dim(U\cap W)=1$.

נציב במשפט המימדים ונקבל $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)=2+2-1=3$.

הקבוצה $\{u_1,u_2,w_2\}$ בעלת 3 וקטורים ומוכלת ב $U+W$. נראה כי הקבוצה בת"ל, כלומר $w_2\notin U$.
נניח כי $w_2\in U$. מסעיף א של שאלה זו נקבל $\{w_1,w_2\}\subseteq\text{Sp}\{u_1,u_2\}$, ולפי שאלה $7.5.16$ נסיק:

$$W=\text{Sp}\{w_1,w_2\}\subseteq\text{Sp}\{u_1,u_2\}=U$$

משוויון המימדים נובע, לפי משפט $3.8.4$, כי $U=W$ וזאת בסתירה לנתון! מצאנו $w_2\notin U$ ולכן לפי שאלה 8.1.8 הקבוצה בת"ל.

מצאנו כי $\{u_1,u_2,w_2\}$ בת"ל ובעלת 3 וקטורים ולכן קבוצה היא בסיס ל$U+W$.

שאלה 3

יהיו תתי המרחבים הבאים של $V = \mathbb{R}_4[x]$

$$U = \mathsf{Sp}\{u_1 = x^3 + 4x^2 - x + 3, \quad u_2 = x^3 + 5x^2 + 5, \quad u_3 = 3x^3 + 10x^2 + 5\}$$
$$W = \mathsf{Sp}\{w_1 = x^3 + 4x^2 + 6, \quad w_2 = x^3 + 2x^2 - x + 5, \quad w_3 = 2x^3 + 2x^2 - 3x + 9\}$$

נסמן בשאלה את הבסיס הסטנדרטי הסדור של V ב $E = (x^3, x^2, x, 1)$.

בסיס לU

תחילה, וקטורי הקואורדינטות של הקבוצה הפורשת הנתונה של U, לפי הבסיס הסטנדרטי, הם:

$$[u_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad [u_2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad [u_3]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

תת-המרחב $U' = \mathsf{Sp}\{[u_1]_E, [u_2]_E, [u_3]_E\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$. נמצא לו בסיס.
לשם כך, נכתוב את הוקטורים כשורות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{5}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לפי שאלה $7.5.12$, מרחב השורות של המטריצה המדורגת הינו גם U'. כמו כן, שורות המטריצה המדורגת אינן שורות אפס ולכן לפי למה $8.5.1$ בת"ל.
קיבלנו כי הקבוצה הבאה בת"ל ופורשת את $\mathsf{Sp}\{[u_1]_E, [u_2]_E, [u_3]_E\}$, ולכן בסיס לה:

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

וקטורים אלה הם וקטורי הקואורדינטות לפי E של איברי הקבוצה $B = \{b_1 = x^3 + 4x^2 - x + 3, b_2 = x^2 + x + 2, b_3 = x\}$.
כעת, לפי טענה $8.4.12$, מאחר וB' בסיס לU' נסיק כי B בסיס לU, וכן כי $\dim U = 3$

בסיס לW

נשתמש בתהליך זהה. וקטורי הקואורדינטות של הקבוצה הפורשת הנתונה לW:

$$[w_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad [w_2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad [w_3]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

תת-המרחב $W' = \mathsf{Sp}\{[u_1]_E, [u_2]_E, [u_3]_E\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$. נמצא לו בסיס.
לשם כך, נכתוב את הוקטורים כשורות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לפי שאלה $7.5.12$ ולמה $8.5.1$, הקבוצה הבאה בת"ל ופורשת את W' ולכן מהווה בסיס.

$$C' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

וקטורי הקבוצה הם וקטורים הקואורדינטות לפי E של $C = \{c_1 = x^3 + 4x^2 + 6, c_2 = 2x^2 + x + 1\}$.
אי לכך, לפי טענה $8.4.12$, מאחר וC' בסיס לW' נסיק כי C בסיס לW, וכן באופן ישיר $\dim W = 2$

בסיס ל$U+W$

היות ו$U=\text{Sp}(B), W=\text{Sp}(C)$, נסיק לפי שאלה $7.6.8$ כי

$$U+W=\text{Sp}(B\cup C)=\text{Sp}\{x^3+4x^2-x+3, x^2+x+2, x, x^3+4x^2+6, 2x^2+x+1\}$$

באופן דומה,

$$U'+W'=\text{Sp}\{(1,4,-1,3),(0,1,1,2),(0,0,1,0),(1,4,0,6),(0,2,1,1)\}$$

נמצא בסיס ל$U'+W'$. לשם כך נחזור על התהליך מהחלקים הקודמים של השאלה:

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\1&4&0&6\\0&2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5\to R_5-2R_2]{R_4\to R_4-R_1}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&1&3\\0&0&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5\to R_5+R_3]{R_4\to R_4-R_3}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to \frac{1}{3}R_4}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5\to R_5+5R_4}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לפי שאלה 7.5.12 ולמה 8.5.1 4 השורות הראשונות של המטריצה המדורגת בת"ל ופורשות את $U'+W'$.
שוב, לפי טענה $8.4.12$, 4 הפולינומים שוקטורי הקואורדינטות שלהם הם 4 שורות המטריצה מהווים בסיס ל$U+W$. נקבל $\dim(U+W)=4$, והיות ו$U+W\subseteq\mathbb{R}_4[x]$ נקבל ממשפט $8.3.4$ כי $U+V=\mathbb{R}_4[x]$.
ניקח את הבסיס הסטנדרטי למרחב לינארי זה - E שהוגדר בתחילת השאלה.

סעיף ב

ראשית, על מנת למצוא את המימד של $U\cap W$, ניעזר במשפט המימדים $8.3.6$:

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

נציב ונקבל $4=2+2-\dim(U\cap W)$ ומכאן $\dim(U\cap W)=1$.

כעת, יהא $p(x)\in\mathbb{R}_4[x]$. על מנת ש$p(x)$ יהיה שייך לשני תתי-המרחבים הלינאריים U,W, נדרוש שיהיו קיימים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\mu_1,\mu_2$ סקלרים כך ש:

$$\begin{gathered}\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3=\mu_1 c_1+\mu_2 c_2\\ \lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3-\mu_1 c_1-\mu_2 c_2=0\\ [\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3-\mu_1 c_1-\mu_2 c_2]_E=[0]_E\end{gathered}$$

ומלמה $8.4.3$ ושאלה $8.4.5$ נקבל:

$$\lambda_1[b_1]_E+\lambda_2[b_2]_E+\lambda_3[b_3]_E-\mu_1[c_1]_E-\mu_2[c_2]_E=0$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\mu_1\begin{pmatrix}1\\4\\0\\6\end{pmatrix}-\mu_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\4&1&0&-4&-2\\-1&1&1&0&-1\\3&2&0&-6&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}=0$$

נדרג את המטריצה על מנת לפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1 \ R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to -\frac{1}{3}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_4]{R_1 \to R_1 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \lambda_1 - \mu_2 = 0 \\ \lambda_2 - 2\mu_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \mu_1 - \mu_2 = 0 \end{cases}$$

קיבלנו כי μ_2 משתנה חופשי. ניקח סקלר a כלשהו כך ש $\mu_2 = a$, אז $\mu_1 = a$ ונקבל:

$$\begin{aligned} p(x) &= \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 = \\ &= a(x^3 + 4x^2 + 6) + a(2x^2 + x + 1) = \\ &= a(x^3 + 6x^2 + x + 7) \end{aligned}$$

במילים אחרות, $U \cap V = \text{Sp}\{x^3 + 6x^2 + x + 7\}$ והקבוצה $\{x^3 + 6x^2 + x + 7\}$ בסיס ל$U \cap W$

סעיף ג

לפי משפט $8.3.5$, הקבוצה הבלתי-תלויה לינארית C של וקטורים מ$\mathbb{R}_4[x]$ ניתנת להשלמה לבסיס.
כלומר, קיימים $c_3, c_4 \in V$ כך ש $C \cup \{c_3, c_4\}$ בסיס ל$\mathbb{R}_4[x]$.
ניקח $T = \text{Sp}\{c_3, c_4\}$. אז לפי שאלה 7.6.8 $W + T = \text{Sp}(C \cup \{c_3, c_4\}) = \mathbb{R}_4[x]$.
כמו כן T נפרשת על ידי 2 וקטורים בת"ל (מעצם הגדרתם כבסיס ל$\mathbb{R}_4[x]$) ולכן $\dim T = 2$ ולפי מסקנה $8.3.7$ מתקבל $W \oplus T = \mathbb{R}_4[x]$.
לסיכום, תת-המרחב הנפרש על ידי שני וקטורים c_3, c_4 כאלה מהווה קבוצה T מתאימה.

נמצא וקטורים אלה. על מנת ש $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$יהיה בסיס ל $\mathbb{R}_4[x]$ נדרוש כי $\{[c_1]_E, [c_2]_E, [c_3]_E, [c_4]_E\}$ יהיה בסיס ל $\mathbb{F}^4$ לפי $8.4.12$.
תנאי הכרחי ומספיק לכך שהקבוצה בת 4 וקטורים תהווה בסיס לF^n הוא היות קבוצת הוקטורים בלתי תלויה לינארית.
נכתוב את ארבעת הוקטורים כשורות במטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

נבחר למשל $[c_3]_E = (0,0,1,0), [c_4]_E = (0,0,0,1)$. לכל שורה במטריצה לעיל יש איבר פותח ולכן מרחב השורות שלה אכן מהווה בסיס ל$\mathbb{F}^4$ לפי למה $8.5.1$ נקבל שהקבוצה $T = \text{Sp}\{c_3 = x, c_4 = 1\}$ אכן מקיימת $W \oplus T = \mathbb{R}_4[x]$ לפי מה שהוכחתי לעיל.

שאלה 4

יהיו U, W תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$, $\dim U > \dim W$.
נתון כי $(0,0,1,0) \notin U + W$, וכן $U \cap W = \text{Sp}\{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(-1,0,1,2)\}$
עלינו למצוא את המימד של $U+W$ וכן בסיס לW.

מאחר ו$U + W \subseteq \mathbb{R}^4$ מתקיים, לפי משפט $8.3.4$, $\dim(U+W) \leq 4$.
אם נניח בשלילה כי $\dim(U+W) = 4$, נקבל מחלקו השני של המשפט $U+W = \mathbb{R}^4$, בסתירה לנתון $(0,0,1,0) \notin U+W$.
לכן, $\dim(U+W) \leq 3$.

המרחב הנפרש ע"י קבוצת היוצרים הנתונה ל$U \cap W$ הוא מרחב השורות של המטריצה להלן.
לפי שאלה $7.5.12$, למטריצות שקולות שורה אותו מרחב שורות, ולכן נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שתי השורות הראשונות במטריצה הם בלתי תלויות לינארית ולכן מהווים בסיס ל$U \cap W$, ומכאן $\dim(U+W) = 2$.

כעת, היות ו$U \subseteq U + W$ ו$U \cap W \subseteq W$, נקבל לפי משפט 8.3.4 והנתון:

$$2 = \dim(U \cap W) \leq \dim W < \dim U \leq \dim(U+W) \leq 3$$

האפשרות היחידה לפתרון היא $\dim(U \cap W) = \dim W = 2$, $\dim U = \dim(U+W) = 3$.
לכן, לפי חלקו השני של המשפט, נקבל $U \cap W = W$.
אי לכך, מאחר ו $\{(1,2,3,4),(0,1,2,3)\}$ בסיס ל$U+W$ הקבוצה מהווה בסיס לW.