מטלת מנחה 12 - אלגברה לינארית 2

328197462

14/04/2023

שאלה 1

סעיף א

המטריצה A_1 צמודה לעצמה, ובפרט נורמלית.

$$A_2{}^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}, A_3{}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix}$$
$$A_2A_2{}^* = \begin{pmatrix} 5 & * \\ * & * \end{pmatrix}, A_2{}^*A_2 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$
$$A_3A_3{}^* = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix} = A_3{}^*A_3$$

לכן A_2 לא נורמלית ו A_3 נורמלית. נמצא מטריצות אוניטריות המלכסנות את A_1, A_3.

$$p_1(x) = |xI - A_1| = \begin{vmatrix} x & -i \\ i & x \end{vmatrix} = x^2 - (-i)i = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$p_3(x) = (xI - A_3) = \begin{vmatrix} x-1 & -i \\ -1 & x-(2+i) \end{vmatrix} = (x-1)(x-(2+i)) - (-i)(-1) =$$
$$= x^2 - (2+i)x - x + 2 + i - i = x^2 - (3+i)x + 2$$

עבור A_1, נמצא בסיסים אורתונורמליים למרחבים העצמיים $V_{\lambda=1}, V_{\lambda=-1}$.

- עבור $V_{\lambda=1}$ מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $V_{\lambda=1} = \mathrm{Sp}(\{(i,1)\})$. ננרמל ונקבל $B_{\lambda=1} = \{\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

- עבור $V_{\lambda=-1}$ מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$-I - A = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_2 + iR_1} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $V_{\lambda=-1} = \mathrm{Sp}(\{(1,i)\})$. ננרמל ונקבל $B_{\lambda=-1} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\}$

מטריצה אוניטרית המלכסנת את A_1 תהיה, לפי $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ומקבלים $Q^*AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

עבור A_3, שורשי הפולינום האופייני יהיו: $\frac{-(3+i)\pm\sqrt{3}(1+i)}{2} = \frac{-(3+i)\pm\sqrt{6i}}{2} = \frac{-(3+i)\pm\sqrt{(3+i)^2-4\cdot 2}}{2}$

נסמן $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}-3}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i, \lambda_2 = \frac{-\sqrt{3}-3}{2} + \frac{-\sqrt{3}-1}{2}i$. המרחבים העצמיים יהיו:

- עבור V_{λ_1} מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-5}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i & -i \\ -1 & \frac{\sqrt{3}-7}{2} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $V_{\lambda=1} = \mathrm{Sp}(\{(i,1)\})$. ננרמל ונקבל $B_{\lambda=1} = \{\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

שאלה 2

תהא T נורמלית במרחב מכפלה פנימית ממימד סופי.
נוכיח:
(i) נוכיח בעזרת הכלה דו-כיוונית:
יהא $v \in \ker T$.

$$0 = (Tv, Tv) \overset{\text{תכונות צמוד}}{=} (v, T^*Tv) \overset{TT^*=T^*T}{=} (v, TT^*v) = (T^*v, T^*v)$$

ומתכונות החיוביות נסיק $T^*v = 0$. ההכלה בכיוון השני שקולה לחלוטין.

(ii) נוכיח בעזרת הכלה ושוויון מימדים. יהא $u \in \operatorname{Im} T, v \in \ker T$. עבור u, קיים $w \in V : Tw = u$. נקבל:

$$(u, v) = (Tw, v) = (w, T^*v) \overset{(i)}{=} (w, 0) = 0$$

קיבלנו $\operatorname{Im} T \subseteq (\ker T)^\perp$. אולם, מלינארית 1 ידוע לנו כי $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim V = \dim \ker T + \dim (\ker T)^\perp$.
קיבלנו שוויון מימדים ולכן $\operatorname{Im} T = (\ker T)^\perp$.

(iii) נוכיח בעזרת התכונות שהוכחנו קודם:

$$\operatorname{Im} T \overset{(ii)}{=} (\ker T)^\perp \overset{(i)}{=} (\ker T^*)^\perp \overset{(ii)}{=} \operatorname{Im} T^*$$

שאלה 3

נבודד את T^* מהשוויון הנתון:

$$T^2 = \frac{1}{2}(T + T^*) \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}T^* = T^2 - \frac{1}{2}T \Leftrightarrow$$
$$T^* = 2T^2 - T$$

נראה כי T מתחלפת עם הצמודה לה:

$$TT^* = T(2T^2 - T) = 2T^3 - T^2$$
$$T^*T = (2T^2 - T)T = 2T^3 - T^2 = TT^*$$

הוכחנו כי T נורמלית. נראה כ T צמודה לעצמה: יהא λ שורש (ממשי או מרוכב) כלשהו של הפולינום האופייני של T. נוכיח כי בהכרח λ ממשי.
יהא B בסיס א"נ כלשהו של V, ותהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה כך ש $[T]_B = A$.
משוויון הפולינומים האופייניים של T ו-A נסיק כי λ שורש של הפולינום האופייני של A. בגלל שA מרוכבת, λ ערך עצמי של A.
לפי לינארית 1, v וקטור עצמי של A^2 השייך לλ^2.
נפעיל את ההעתקה $[\cdot]_B$ על השוויון שמצאנו לעיל:

$$A^* \overset{2.1.3}{=} [T^*]_B = [2T^2 - T]_B = 2[T]_B^2 - [T]_B = 2A^2 - A$$

לכן, $A^*v = (2A^2 - A)v = (2\lambda^2 - \lambda)v$. בנוסף, לפי למה 3.2.5 בתרגום למטריצות, $A^*v = \overline{\lambda}v$. נשווה ונקבל $(\lambda^2 - \lambda - \overline{\lambda})v = 0$.
היות ו $v \neq 0$, בהכרח מקבלים $\lambda^2 - \lambda - \overline{\lambda} = 0$. נראה כי ממשיותו של λ הכרחית לקיום שוויון זה.
נסמן אפוא $\lambda = x + iy$.

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - \lambda - \overline{\lambda} &= (x + iy)^2 - (x + iy) - (x - iy) = \\
&= x^2 + 2ixy - y^2 - x - iy - x + iy = \\
&= (x^2 - 2x - y^2) + (2xy)i = 0 \\
&\rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

מהשוויון השני, בהכרח $x = 0$ או $y = 0$. נניח כי $x = 0$ ונציב בשוויון הראשון. נקבל $-y^2 = 0$ ובשני המקרים $y = 0$ וλ מספר ממשי.
אי-לכך, ממשפט 3.3.1 מקבלים שT צמודה לעצמה, ולכן:

$$T^2 = \frac{1}{2}(T + T^*) = \frac{1}{2}(T + T) = T$$

שאלה 4

תהא מטריצה H ממשית סימטרית. לפי משפט הלכסון האורתוגונלי, H לכסינה אורתוגונלית, ונסמן ב Q מטריצה אורתוגונלית המלכסנת אותה.
נסמן את עמודות Q ב $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. אלו n וקטורים עצמיים של H, ולכל אחד מהם נסמן $Hv_i = \lambda_i v_i$.
ע"פ משפט 2.3.6, B בסיס אורתונורמלי ל$\mathbb{R}^n$. יהא $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש $||v|| = 1$. נציג את v כצירוף לינארי של וקטורי B:

$$Hv = \sum_{i=1}^{n} Ha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i \qquad\qquad v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$