מטלת מנחה 12 - קורס 20218

328197462

20/08/2023

שאלה 1

לפנינו משוואה חסרה מטיפוס 2 עם שלושה תנאי התחלה שונים. נניח בשלילה כי קיים פתרון $u(x)$ למשוואה, עבורו $u(0)=0, u'(0)=1$. אז מתקיים:

$$\begin{aligned} u(0)u''(0) &= 3(u'(0))^2 - 4u(0)u'(0) \\ 0 \cdot u''(0) &= 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 0 \cdot 1 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

וזו סתירה! אין פתרון לבעיית ההתחלה עבורה $y(0)=0, y'(0)=1$.

נוכל לזהות פתרון סינגולרי מהצורה $y=C$, שכן אז נקבל $y'=y=0$ ולכן שני אגפי השוויון מתאפסים. הפתרון הסינגולרי $y \equiv -1$ מתאים לבעיית ההתחלה בה $y'(0)=0$. נניח אפוא $y' \neq 0$ נפתור את המשוואה החסרה עבור תנאי שנותר.
בהצבת $z=y'$ מקבלים $\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = y'' \cdot \frac{1}{z}$. נציב במשוואה ונקבל:

$$yz \cdot \frac{dz}{dy} = 3z^2 - 4yz$$

נחלק ב $z = y' \neq 0$ ונקבל:

$$y\frac{dz}{dy} = 3z - 4y$$

אם נגביל את עצמנו ל$y<0$ (בסביבה כלשהי של $y=-1$) אז נחלק את המשוואה בy ונקבל משוואה הומוגנית:

$$\frac{dz}{dy} = 3\frac{z}{y} - 4$$

בהצבת $z=uy$, נקבל $dz/dy = u + yu'$ ומכאן:

$$u + yu' = u - 4yu' = -4du = \frac{-4}{y}dyu = -4\ln|y| = -4\ln(-y)y' = z = -4y\ln(-y)y' = -4y\ln(-y)\frac{dy}{y\ln(-y)} = -4dx$$

ומקבלים:

$$\int \frac{dy}{y\ln(-y)} = \begin{bmatrix} y=-t \\ dy=-dt \end{bmatrix} = \int \frac{-dt}{-t\ln t} = \int \frac{dt}{t\ln t} =_{343} \ln(\ln(t)) = \ln(\ln(-y))$$

ולכן:

$$\ln(\ln(-y)) = -4x + C$$

נציב $x=0, y=-1$

שאלה 4

לפנינו משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים. נפתור את המשוואה האופיינית של המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$\lambda^2+\lambda+b=0$$
$$\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot b}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1-4b}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-b}$$

נחלק למקרים. עבור $b>\frac{1}{4}$ המספר $\sqrt{\frac{1}{4}-b}$ מדומה טהור.

נסמן $i\beta=\sqrt{\frac{1}{4}-b}, \beta\neq0$ ופתרונות המשוואה יהיו $y_1=e^{-1/2x}\sin(\beta x), y_2=e^{-1/2x}\cos(\beta x)$.

עבור $b=1/4$ נקבל פתרון יחיד $\lambda=-1/2$, ופתרונות המשוואה יהיו $y_1=e^{-1/2x}, y_2=xe^{-1/2x}$.

עבור $b<1/4$ נקבל שני פתרונות ממשיים $-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-b}$, שנסמנם λ,μ. פתרונות המשוואה יהיו $y_1=e^{\lambda x}, y_2=e^{\mu x}$.

נמצא פתרון פרטי למשוואה בעזרת שיטת המקדמים. "ננחש" כי קיים פתרון מהצורה $y=Ae^{bx}$, ונקבל:

$$\begin{aligned}
y'&=Abe^{bx}\\
y''&=Ab^2e^{bx}\\
y''+y'+by&=e^{bx}(Ab^2+Ab+b\cdot A)=e^{bx}\\
Ab^2+2Ab&=1\\
A(b^2+2b)&=1\\
A&=\frac{1}{b^2+2b}
\end{aligned}$$

מצאנו פתרון פרטי $y_p=\frac{1}{b^2+2b}e^{bx}$. פתרון זה לא מוגדר עבור $b=0,-2$. נטפל במקרים אלה בנפרד.

עבור $b=0$, המשוואה תהיה $y+y'=1$ וקל לראות ש $y\equiv1$ פתרון למשוואה.

עבור $b=-2$, המשוואה תהיה $y+y'-2y=e^{-2x}$. נחפש פתרון פרטי מהצורה $y=e^{-2x}u$:

$$\begin{aligned}
y'&=-2e^{-2x}u+e^{-2x}u'\\
y''&=4e^{-2x}u-2e^{-2x}u'-2e^{-2x}u'+e^{-2x}u''=4e^{-2x}u-4e^{-2x}u'+e^{-2x}u''\\
y''+y'-2y&=e^{-2x}(u''-4u'+4u)+e^{-2x}(u'-2u)-2ue^{-2x}=e^{-2x}(u''-3u')=e^{-2x}\\
u''-3u'&=1
\end{aligned}$$

נחפש פתרון מהצורה $u=kx$, אז $u'=k, u''=0$ ומקבלים $-3k=1$ ולכן $k=-\frac{1}{3}$ ונקבל פתרון פרטי $y_p=-\frac{1}{3}xe^{-2x}$.

נשים לב כי $-\beta^2=(i\beta)^2=\frac{1}{4}-b$ ולכן $\beta=\sqrt{b-\frac{1}{4}}$ ונקבל:

$$y=\begin{cases}
e^{-1/2x}(C_1\sin(\sqrt{b-\frac{1}{4}}x)+C_2\cos(\sqrt{b-\frac{1}{4}}x))+\frac{1}{b^2+2b}e^{bx} & b>\frac{1}{4}\\
e^{-1/2x}(C_1+C_2x)+\frac{16}{9}e^{\frac{1}{4}x} & b=\frac{1}{4}\\
e^{-1/2x}(C_1e^{\sqrt{\frac{1}{4}-b}x}+C_2e^{-\sqrt{\frac{1}{4}-b}x})+\frac{1}{b^2+2b}e^{bx} & 0<b<\frac{1}{4}\\
e^{-1/2x}(C_1e^{\sqrt{\frac{1}{4}-b}x}+C_2e^{-\sqrt{\frac{1}{4}-b}x})+1 & b=0\\
e^{-1/2x}(C_1e^{\sqrt{\frac{1}{4}-b}x}+C_2e^{-\sqrt{\frac{1}{4}-b}x})+\frac{1}{b^2+2b}e^{bx} & -2<b<0\\
e^{-1/2x}(C_1e^{\sqrt{\frac{1}{4}-b}x}+C_2e^{-\sqrt{\frac{1}{4}-b}x})-\frac{1}{3}xe^{-2x} & b=-2\\
e^{-1/2x}(C_1e^{\sqrt{\frac{1}{4}-b}x}+C_2e^{-\sqrt{\frac{1}{4}-b}x})+\frac{1}{b^2+2b}e^{bx} & b<-2
\end{cases}$$

שאלה 5

לפנינו משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים.
ראשית, נמצא לפי השיטה בסעיף 2.4.1 מערכת פתרונות למשוואה ההומוגנית המתאימה.
המשוואה האופיינית תהיה:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4} = 2 \pm i$$

ולכן מערכת מתאימה של פתרונות תהיה, על פי סעיף 2.4.1, $y_1 = e^{2x} \sin x$ ו $y_2 = e^{2x} \cos x$.

מקבלים:

$$\begin{aligned}\Delta = W(x) &= \begin{vmatrix} e^{2x} \sin x & e^{2x} \cos x \\ 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x & 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x \end{vmatrix} = \\ &= e^{4x} \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ 2 \sin x + \cos x & 2 \cos x - \sin x \end{vmatrix} = \\ &= e^{4x}((2 \sin x \cos x - \sin^2 x) - (2 \sin x \cos x + \cos^2 x)) = \\ &= -e^{4x}(\sin^2 x + \cos^2 x) = -e^{4x} \neq 0\end{aligned}$$

עלינו למצוא פונקציות מקדמים $C_1(x), C_2(x)$ כך ש:

$$\begin{cases} e^{2x} \sin x C_1' + e^{2x} \cos x C_2' = 0 \\ e^{2x}(2 \sin x + \cos x)C_1' + e^{2x}(2 \cos x - \sin x)C_2' = (\frac{e^x}{\sin x})^2 \end{cases}$$

על פי כלל קרמר, נקבל:

$$\begin{aligned}\Delta C_1' &= \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \cos x \\ e^{2x} / \sin^2 x & e^2 x(2 \cos x - \sin x) \end{vmatrix} = -e^{4x} \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ C_1' &= \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ C_1 &= \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\sin x}\end{aligned}$$

וכן:

$$\begin{aligned}\Delta C_2' &= \begin{vmatrix} e^{2x} \sin x & 0 \\ e^{2x}(2 \sin x + \cos x) & e^{2x} / \sin^2 x \end{vmatrix} = e^{4x} \frac{1}{\sin x} \\ C_2' &= \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = -\frac{1}{\sin x} \\ C_2 &= \int \frac{-dx}{\sin x} = [\text{חוברת אינט' 240}] = -\ln(\tan \frac{x}{2}) = \ln(\cot \frac{x}{2})\end{aligned}$$

ונקבל פתרון פרטי:

$$y_p = -\frac{1}{\sin x} \cdot e^{2x} \sin x + \ln(\cot \frac{x}{2}) e^{2x} \cos x = e^{2x}(\cos x \cdot \ln(\cot \frac{x}{2}) - 1)$$

ופתרון כללי:

$$\begin{aligned}y &= C_1 e^{2x} \sin x + C_2 e^{2x} \cos x + e^{2x}(\cos x \cdot \ln(\cot \frac{x}{2}) - 1) = \\ &= e^{2x}(C_1 \sin x + (C_2 + \ln(\cot \frac{x}{2})) \cos x - 1)\end{aligned}$$

שאלה 6

לפנינו משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר שני. נעביר אותה לצורה הרצויה לפתרון משוואות:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{4x^2}y = \frac{1}{2x^2\sqrt{x}}$$

על פי הרמז שקיבלנו, "ננחש" כי קיים פתרון מהצורה $u = x^\alpha$ למשוואה ההומוגנית המתאימה. נקבל:

$$\begin{aligned}
u' &= \alpha x^{\alpha-1} \\
u'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \\
\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \frac{2}{x}\alpha x^{\alpha-1} + \frac{1}{4x^2}x^\alpha &= 0 \\
\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + 2\alpha x^{\alpha-2} + \frac{1}{4}x^{\alpha-2} &= 0 \\
x^{\alpha-2}(\alpha^2 - \alpha + 2\alpha + \frac{1}{4}) &= 0 \\
x^{\alpha-2}(\alpha + \frac{1}{2})^2 &= 0
\end{aligned}$$

היות והפונקציות במשוואה המקורית לא רציפות ב $x = 0$, לא נוכל להבטיח קיום פתרון שם, ונוכל לצמצם ב $x^{\alpha-2}$. נקבל פתרון יחיד $\alpha = -\frac{1}{2}$, כלומר $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$ מהווה פתרון למשוואה ההומוגנית המתאימה.

נבצע הצבה $y = x^{-1/2}z$ כמתואר בסעיף 2.4.2, על מנת למצוא פתרון נוסף למשוואה ההומוגנית:

$$\begin{aligned}
y' &= -\frac{1}{2}x^{-3/2}z + x^{-1/2}z' \\
y'' &= \frac{3}{4}x^{-5/2}z - \frac{1}{2}x^{-3/2}z' - \frac{1}{2}x^{-3/2}z' + x^{-1/2}z'' = \\
&= \frac{3}{4}x^{-5/2}z - x^{-3/2}z' + x^{-1/2}z''
\end{aligned}$$

נציב במשוואה ההומוגנית המתאימה ונקבל:

$$\begin{aligned}
&(\frac{3}{4}x^{-5/2}z - x^{-3/2}z' + x^{-1/2}z'') + \frac{2}{x}(-\frac{1}{2}x^{-3/2}z + x^{-1/2}z') + \frac{1}{4x^2}(x^{-1/2}z) = 0 \\
&\frac{3}{4}x^{-5/2}z - x^{-3/2}z' + x^{-1/2}z'' - x^{-5/2}z + 2x^{-3/2}z' + \frac{1}{4}x^{-5/2}z = 0 \\
&x^{-1/2}z'' + (-x^{3/2} + 2x^{-3/2})z' + (\frac{3}{4}x^{-5/2} - x^{-5/2} + \frac{1}{4}x^{-5/2})z = 0 \\
&x^{-1/2}z'' + x^{-3/2}z' = 0 \\
&\qquad z'' + \frac{1}{x}z' = 0
\end{aligned}$$

קיבלנו משוואה חסרה. נציב $u = z'$ ונקבל $u' + \frac{1}{x}u = 0$. זוהי משוואה לינארית מסדר ראשון. כפל בגורם האינטגרציה $e^{\ln x} = x$ ייתן לנו:

$$\begin{aligned}
xu' + u &= 0 \\
(xu)' &= 0 \\
xu &= C \\
u &= \frac{C}{x}
\end{aligned}$$

נבחר למשל $C=1$, ונקבל $z'=u=1/x$, כלומר $z=\ln(x)$ ו $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ מהווה פתרון שני למשוואה ההומוגנית המתאימה.
נחזור על התהליך שנית למציאת פתרון פרטי למשוואה המקורית:

$$\begin{aligned}
x^{-1/2}z''+x^{-3/2}z'&=\frac{1}{2}x^{-5/2}\\
z''+\frac{1}{x}z'&=\frac{1}{2}x^{-2}\\
[u=z']\Rightarrow u'+\frac{1}{x}u&=\frac{1}{2}x^{-2}\\
xu'+u&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\\
(xu)'&=\frac{1}{2}\frac{1}{x}\\
xu&=\frac{1}{2}\ln x+C\\
u&=\frac{1}{2}\frac{\ln x+C}{x}
\end{aligned}$$

נבחר למשל $C=0$, אז $z'=u=\frac{1}{2x}\ln x$, ונקבל:

$$z=\frac{1}{2}\int\ln x\cdot\frac{dx}{x}=\begin{bmatrix}t=\ln x\\ dt=dx/x\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int tdt=\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{4}\ln^2 x$$

ונקבל פתרון פרטי $y_p=\frac{\ln^2 x}{4\sqrt{x}}$, והפתרון הכללי למשוואה יהיה:

$$\begin{aligned}
y&=C_1\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+C_2\cdot\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+\frac{\ln^2 x}{4\sqrt{x}}=\\
&=\frac{1}{\sqrt{x}}(C_1+C_2\ln x+\frac{1}{4}\ln^2 x)
\end{aligned}$$

שאלה 7

לפנינו משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר 3 במקדמים קבועים. המשוואה האופיינית תהיה:

$$\lambda^3 - \lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$
$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

ונקבל כי $e^{0x} \equiv 1, e^x, e^{-x}$ מהווים מערכת בסיסית של פתרונות. נמצא פתרון פרטי על פי כלל קרמר ווריאצית הפרמטרים:

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ \frac{1}{e^x+e^{-x}} & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 1 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{-2}{e^x + e^{-x}} = -\operatorname{sech} x$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & \frac{1}{e^x+e^{-x}} & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -e^{-x} \\ \frac{1}{e^x+e^{-x}} & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{e^{2x} + 1}$$

$$\Delta_{C_3'} = \begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & \frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{e^{-2x}+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{1}{e^x+e^{-x}} \end{vmatrix} = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$$

$$C_1' = -\frac{1}{2}\operatorname{sech} x \Rightarrow_{369} C_1 = -\arctan(e^x)$$

$$C_2' = \frac{1}{2}\frac{1}{e^{2x}+1} \Rightarrow_{361} C_2 = \frac{1}{2} \cdot (x - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2x})) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln(1 + e^{2x})$$

$$C_3' = \frac{1}{2}\frac{1}{e^{-2x}+1} \Rightarrow_{361} C_3 = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x})) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ln(1 + e^{-2x})$$

$$\begin{aligned} y_p &= -\arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{4}\ln(\frac{1 + e^{-2x}}{1 + e^{2x}}) = \\ &= -\arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{4}\ln(\frac{e^{-x}(e^x + e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})}) = \\ &= -\arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{4}\ln(e^{-2x}) = \\ &= -\arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}x = \\ &= -\arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x} - 1) = \end{aligned}$$

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} - \arctan(e^x) + \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x} - 1)$$

שאלה 8

בהצבת 0, נקבל:

$$\begin{aligned} f'(0)+2\int_0^0 f(t)dt &= \sin 0 + 3f(0) \\ f'(0) &= 3f(0) \end{aligned}$$

ומהדרישה $f(0)=0$ נקבל $f'(0)=0$. נגזור את המשוואה הנתונה משני צדדיה:

$$f''(x)+2f(x)=\cos x + 3f'(x)$$

בצירוף 2 הדרישות לעיל, נקבל את בעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=\cos x \\ y'(0)=y(0)=0 \end{cases}$$

על פי משפט הקיום והיחידות 2.3.5, והיות וכל הפונקציות במשוואה רציפות ב$(-\infty,\infty)$, נקבל כי קיים פתרון לבעיית ההתחלה ב $(-\infty,\infty)$ והוא יחיד.
על מנת למצוא פתרון זה, ראשית נפתור את המשוואה האופיינית של המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$\begin{aligned} \lambda^2-3\lambda+2&=0 \\ (\lambda-2)(\lambda-1)&=0 \end{aligned}$$

ונקבל על פי סעיף 2.4.1 כי $y_1=e^x, y_2=e^{2x}$ מהווים מערכת של פתרונות למשוואה ההומוגנית המתאימה.

$$\Delta = W(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}-e^{3x}=e^{3x}\neq 0$$

על מנת למצוא פתרון פרטי למשוואה, עלינו למצוא פונקציות $C_1(x), C_2(x)$ כך שמתקיים:

$$\begin{cases} e^x C_1' + e^{2x}C_2' = 0 \\ e^x C_1' + 2e^{2x}C_2' = \cos x \end{cases}$$

נפתור על פי כלל קרמר.

$$\begin{aligned} \Delta_{C_1'} &= \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \cos x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{2x}\cos x \\ C_1' &= \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -e^{-x}\cos x \\ C_1 &= -\int e^{-x}\cos x dx = [\text{חוברת אינט' 359}] = -\frac{e^{-x}(-\cos x+\sin x)}{(-1)^2+1^2} = \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x) \\ \Delta_{C_2'} &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \cos x \end{vmatrix} = e^x \cos x \\ C_2' &= \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = e^{-2x}\cos x \\ C_2 &= \int e^{-2x}\cos x dx = [\text{חוברת אינט' 359}] = \frac{e^{-2x}(-2\cos x+\sin x)}{(-2)^2+1^2} = \frac{1}{5}e^{-2x}(\sin x - 2\cos x) \end{aligned}$$

ונקבל פתרון פרטי למשוואה:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x-\sin x)\cdot e^x + \frac{1}{5}e^{-2x}(\sin x - 2\cos x)\cdot e^{2x} = \\ &= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x = \\ &= \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x \end{aligned}$$

הפתרון הכללי למשוואה יהיה:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$$
$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x$$

נציב 0 בשני הביטויים ונקבל:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{10} = 0 \\ y'(0) = C_1 + 2C_2 - \frac{3}{10} = 0 \end{cases}$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה ונקבל $C_2 - \frac{4}{10} = 0$, כלומר $C_2 = \frac{4}{10}$ ולכן $C_1 = -\frac{5}{10}$ מקבלים:

$$f(x) = 0.4e^{2x} - 0.5e^x + 0.1\cos x - 0.3\sin x$$

זהו, כאמור, פתרון יחיד לבעיה הנתונה.