מטלת מנחה 16 - אינפי 1

שאלה 1

א. טענה: $\lim_{n\to\infty}(1+\sin\frac{1}{n^2})^{n^2}=e$

טענת עזר: הסדרה $(\sin\frac{1}{n^2})_{n=1}^{\infty}$ אפסה ושונה מאפס.

הוכחת טענת העזר: הסדרה $y_n=\frac{1}{n^2}=(\frac{1}{n})^2$ אפסה לפי אריתמטיקה + 2.10, וכן לפי 4.44 מתקיים $\lim_{x\to 0}\sin x=0$.

לכן, לפי הגדרת היינה עבור (y_n) וגבול זה, מתקיים $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}y_n=0$.

כמו כן, מתקיים $\frac{1}{n^2}>0$, ועבור n גדול מספיק מתקיים $\frac{\pi}{2}>1>\frac{1}{n^2}$, ולכן $\sin\frac{1}{n^2}>0$ עבור n גדול מספיק, ומתקיים $\sin\frac{1}{n^2}\neq 0$.

הוכחה: נחשב:

$$(1+\sin\frac{1}{n^2})^{n^2}=(1+\sin\frac{1}{n^2})^{n^2\cdot\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\sin\frac{1}{n^2}}}=[(1+\sin\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n^2}}}]^{n^2\sin\frac{1}{n^2}}$$

כעת, נסמן $a_n=(1+\sin\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n^2}}}$, וכן $r_n=n^2\sin\frac{1}{n^2}$, ונרצה לחשב את $\lim_{n\to\infty}a_n^{r_n}$

לפי 6.18, מתקיים $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. לכן, לפי היינה, לכל סדרה (x_n) האפסה ושונה מאפס, ובפרט עבור $x_n=\sin\frac{1}{n^2}$ (לפי טענת העזר), מתקיים $\lim_{n\to\infty}(1+\sin\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n^2}}}=e$.

לכן, $\lim_{n\to\infty}a_n=e$.

כמו כן, לפי משפט 4.45 מתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. לכן, לפי היינה, לכל סדרה (x_n) האפסה ושונה מאפס, ובפרט עבור $x_n=\frac{1}{n^2}$ (ראו טענת העזר), מתקיים $\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1$.

לכן, לפי 6.15, מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}[(1+\sin\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n^2}}}]^{n^2\sin\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}a_n^{r_n}=e^1=e$$ וסיימנו.

ב. טענה: $\lim_{x\to 0} |x|^{\frac{1}{x^2}} = 0$

הוכחה: ראשית, נסמן $f(x) = |x|,\ g(x) = \frac{1}{x^2}$, ונרצה לחשב את $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}$.

בסביבה נקובה של 0, מתקיים $f(x) = |x| > 0$, ומכאן $f(x) = e^{\ln f(x)}$,
וכן $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$.

כעת, לפי הכללת גבול של הרכבה (4.39) עבור הגבול האינסופי והחד-צדדי $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (לפי משפט 6.14), כאשר לפי רציפות הערך המוחלט מתקיים $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ וכן $|x| > 0$ בסביבה נקובה של 0, מתקיים:

$$\lim_{x\to 0} \ln f(x) = \lim_{x\to 0} \ln |x| = \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$$

כמו כן, לפי רציפות הפולינום x^2 מתקיים $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, וכן בסביבה נקובה של 0 מתקיים $x^2 > 0$. לכן, לפי כלל האריתמטיקה "$\frac{1}{0^+}$" מתקיים $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$.

לכן, לפי אריתמטיקה של גבולות אינסופיים, מתקיים:

$$\lim_{x\to 0} \ln f(x) \cdot g(x) = "-\infty" \cdot "\infty" = -\infty$$

וכן לפי הכללת גבול של הרכבה עבור הגבול הידוע במינוס אינסוף $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ (לפי משפט 6.9 כאשר $a = e$), מתקיים:

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0} e^{\ln f(x)\cdot g(x)} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$$ וסיימנו.

שאלה 2

תהא $f(x) = e^{-x} + \sin^2 x$

א. טענה: $\lim_{n\to\infty} f(\pi n) = 0$

הוכחה: ראשית, לפי מחזוריות הסינוס, מתקיים:

$$f(\pi n) = e^{-\pi n} + \sin^2 \pi n = e^{-\pi n} + 0^2 = e^{-\pi n}$$

כמו כן, לפי אריתמטיקה + 2.37 מתקיים $\lim_{n\to\infty} -\pi n = -\pi \cdot "\infty" = -\infty$.

לפי הגדרת היינה עבור הגבול $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (לפי 6.9 כאשר $a = e$), לכל סדרה (x_n)

השואפת למינוס אינסוף, ובפרט עבור $x_n = -\pi n$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = 0$.

ולכן,

$$\lim_{n\to\infty} f(\pi n) = \lim_{n\to\infty} e^{-\pi n} = 0$$

ב. טענה: לכל x ממשי מתקיים $f(x) > 0$

הוכחה: ראשית, נסמן $g(x) = e^{-x} = (\frac{1}{e})^x$ (לפי חוקי חזקות).

לפי 6.10 עבור $a = \frac{1}{e}$, מתקיים $Im\, g = (0, \infty)$,

כלומר לכל x ממשי מתקיים $g(x) = e^{-x} > 0$.

כמו כן, לכל x ממשי מתקיים $\sin^2 x \geq 0$ (אילו $\sin x$ שלילי אז נקבל מכפלה של שני מספרים שליליים, שהיא מספר חיובי, ואחרת נקבל מכפלה של שני אי-שליליים שהיא אי-שלילית)

לכן, נקבל $f(x) = e^{-x} + \sin^2 x > 0$ לכל x כסכום של מספר חיובי ומספר אי-שלילי.

טענה: $\inf f([0, \infty)) = 0$

הוכחה: נוכיח בעזרת אפיון האינפימום (שאלה 11 ביחידה 3, בשקילות לטענה 3.9).

כבר הוכחנו כי לכל x ובפרט לכל $x \geq 0$ מתקיים $f(x) > 0$, ולכן 0 חסם מלרע של $f([0, \infty))$.

כעת, יהא $\epsilon > 0$.

אז מהגדרת הגבול בסעיף א, קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $|f(\pi n) - 0| < \epsilon$.

לכל $n > N$, התמונה של $x = \pi n$ ע"י f היא מספר חיובי (לפי הטענה הקודמת),

ולכן $|f(\pi n)| = f(\pi n)$.

קיבלנו כי לכל $n > N$ מתקיים $f(\pi n) < 0 + \epsilon$.

בכך הוכחנו כי קיים איבר ב $f([0, \infty))$ הקטן מ$\epsilon + 0$, וסיימנו.

ג. טענה: f לא מקבלת מינימום ב $[0, \infty)$

הוכחה: נניח בשלילה כי קיים מינימום לf ב $[0, \infty)$, כלומר קיים $\min f([0, \infty))$.

לכן לפי טענה 3.13, $\min f([0, \infty)) = \inf f([0, \infty)) = 0$.

מכאן נובע ישירות מהגדרת המינימום כי $0 \in f([0, \infty))$,

כלומר קיים $x_0 \in [0, \infty)$ כך ש $f(x_0) = 0$.

אבל מטענות קודמות עבור x_0, מתקיים $f(x_0) > 0$ וזו סתירה!

שאלה 3

סעיף א

תהא הפונקציה הממשית f המוגדרת כך: לכל x ממשי,

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

נוכיח כי f רציפה ב$\mathbb{R}$, ולפי הגדרת הרציפות (5.2) נסיק כי f מוגדרת ב$\mathbb{R}$.

טענה: f רציפה לכל $x \neq 0$.

הוכחה: לכל $x \neq 0$, הפונקציה הרציונלית $\frac{1}{x}$ מוגדרת, ולכן לפי 5.13 רציפה.

הפונקציה $f(x) = \sin x \cdot \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$ רציפה כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות,
כאשר פונקציית הסינוס רציפה לפי 5.7 בכל נקודה על הישר.

טענה: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

הוכחה: ראשית, בסביבה נקובה של 0, מתקיים $x \neq 0$ ולכן $f(x) = \sin^2 x \sin \frac{1}{x}$.

לפי אריתמטיקה, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin^2 x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

הפונקציה $\sin^2 x$ רציפה ב$\mathbb{R}$ כמכפלה של פונקציות $\sin x \cdot \sin x$, הרציפות ב$\mathbb{R}$ לפי משפט 5.7.

לכן, מהגדרת רציפות, $\lim_{x\to 0} \sin^2 x = (\sin 0)^2 = 0^2 = 0$.

כמו כן, לכל מספר ממשי ובפרט עבור $\frac{1}{x}$ המוגדר לכל x בסביבה נקובה של 0,

מתקיים $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$.

לכן, לפי היינה + 2.22 (חסומה × אפסה), מתקיים:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin^2 x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

מקיום גבול זה נסיק כי $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ ולכן f רציפה גם ב$x = 0$.

ובסך הכל, f רציפה ומוגדרת בכל נקודה על הישר. נעבור לבדוק את תחומי הגזירות של f.

טענה: f גזירה לכל $x \neq 0$.

הוכחה: לכל $x \neq 0$, $f(x) = \sin^2 x \sin \frac{1}{x}$ ולכן f גזירה כמכפלה והרכבה של פונקציות גזירות:

פונקציית הסינוס גזירה לפי 7.22, ופונקציית המנה $\frac{1}{x}$ גזירה כי $x \neq 0$ לפי 7.18.

נגזור את הפונקציה כאשר $x \neq 0$. לכל $x \neq 0$,

$$f'(x) = [\sin^2 x \sin \frac{1}{x}]' = [\sin^2 x]' \cdot \sin \frac{1}{x} + \sin^2 x \cdot [\sin \frac{1}{x}]' =$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin \frac{1}{x} + \sin^2 x \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} =$$

$$= \sin 2x \sin \frac{1}{x} - \frac{\sin^2 x \cdot \cos \frac{1}{x}}{x^2}$$

טענה: f גזירה ב$x = 0$

הוכחה: נחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. אם קיים, לפי טענה 7.8 f גזירה והגבול הוא ערך הנגזרת ב0

ראשית, נשים לב:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-0}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$$

כעת, בסביבה נקובה של 0 מתקיים $x \neq 0 \Leftarrow f(x) = \sin^2 x \sin\frac{1}{x}$, ולכן:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$$

לפי משפט 4.45, מתקיים $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

כאמור, פונקציית הסינוס רציפה בכל נקודה על הישר, ובפרט בנק' 0 מתקיים $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

כמו כן, כאמור, לכל $x \neq 0$ מתקיים $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$, ולכן לפי היינה + 2.22 (חסומה × אפסה), מתקיים $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$.

לסיכום, לפי אריתמטיקה,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \sin\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \sin\frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

ולכן, f גזירה בכל נקודה על הישר, וערך הנגזרת:

$$f'(x) = \begin{cases} \sin 2x \sin\frac{1}{x} - \frac{\sin^2 x \cdot \cos\frac{1}{x}}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

סעיף ב'

כעת, תהא הפונקציה $g(x) = |\ln x|$.
פונקציית הלוגריתם הטבעי מוגדרת לכל $x > 0$, ופונקציית הערך המוחלט מוגדרת לכל x, ומכאן שההרכבה שלהן מוגדרת לכל $x > 0$. כלומר: תחום ההגדרה הוא $(0, \infty)$
כמו כן, לכל $x > 0$, g רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות (פונקציית הערך המוחלט רציפה בכל נקודה על הישר, ופונקציית הלוגריתם הטבעי רציפה בכל תחום הגדרתה לפי 6.14).

כעת, נעבור להתעסק בערכי הנגזרת. נפריד למקרים בהם $\ln x \geq 0$, $\ln x \leq 0$ על מנת "להיפטר" מהערך המוחלט.

טענה: הפונקציה גזירה בקטע $[1, \infty)$ ולכל $x \in [1, \infty)$ מתקיים $g'(x) = \frac{1}{x}$ (כאשר בקצה הכוונה לנגזרת ימנית)

הוכחה: לכל $x \geq 1$, פונקציית הלוגריתם הטבעי, שהיא מונוטונית עולה, מקיימת $\ln x \geq \ln 1 = 0$, ולכן $g(x) = |\ln x| = \ln x$. בתחום זה $g(x)$ זהה ל$\ln x$, ו-$\ln x$ גזירה ב$(0, \infty)$ (ובפרט ב$[1, \infty)$), וכן לפי 7.12 גזירה מימין ב$x = 1$. ולכן, גם $g(x)$ גזירה ב$[1, \infty)$.

כמו כן, בתחום זה הפונקציות זהות ולכן $g(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$ לפי 7.29 (כאשר בקצה הכוונה לנגזרת ימנית, שוב לפי 7.12).

טענה: הפונקציה גזירה בקטע $(0,1]$, ולכל $x \in (0,1]$ מתקיים $g'(x) = -\frac{1}{x}$ (כאשר בקצה הכוונה לנגזרת שמאלית).

הוכחה: לכל $x \le 1$, פונקציית הלוגריתם הטבעי, שהיא מונוטונית עולה, מקיימת $\ln x \le \ln 1 = 0$,
ולכן $g(x) = |\ln x| = -\ln x$. בתחום זה $g(x)$ זהה ל$-\ln x$, וכמכפלת פונקציות הגזירות בקטע $(0,\infty)$, הפונקציה $-\ln x$ גזירה ב$(0,\infty)$ (ובפרט ב$(0,1]$), וכן לפי 7.12 גזירה משמאל ב$x = 1$. ולכן, גם $g(x)$ גזירה ב$(0,1]$.

כמו כן, בתחום זה הפונקציות זהות ולכן $g(x) = [-1\cdot \ln x]' = -\frac{1}{x}$ לפי 7.15 + 7.29
נדגיש שוב: בקצה הכוונה לנגזרת שמאלית.

טענה: הפונקציה לא גזירה ב$x = 1$
הוכחה: מטענות קודמות, $g'_+(1) = \frac{1}{1} = 1 \neq -1 = -\frac{1}{1} = g'_-(1)$.
לכן, התנאי השני של משפט 7.12 לא מתקיים, ו-g אינה גזירה ב$x = 1$.

נסכם - הפונקציה גזירה בקטעים $(0,1)$ ו $(1,\infty)$, ולכל $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ מתקיים:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ -\frac{1}{x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

שאלה 4

תהא f מוגדרת ב$\mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(-x) = f(x)$.

טענה: אם f גזירה ב0, אז $f'(0) = 0$.
הוכחה: לפי ההנחה, f גזירה ב0,
לכן לפי 7.8 קיים הגבול $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

נפעיל גבול של הרכבה (4.39) עבור $t = -x$. לפי רציפות $\lim_{x\to 0} t = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$,

וכן בסביבה נקובה של 0 מתקיים $x \neq 0$ ומכאן $-x \neq 0$, ולכן:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(-t)-f(0)}{-t}$$

לפי הנתון על f, מתקיים $f(-t) = f(t)$ לכל t ממשי ובפרט בסביבה נקובה של 0, ולכן:

$$\frac{f(-t)-f(0)}{-t} = -1\cdot\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

מהגדרת הנגזרת ב-0 (7.8), מתקיים $f'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}$

ולכן, לפי אריתמטיקה,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(-t)-f(0)}{-t} = \lim_{t\to 0} -1\cdot\frac{f(t)-f(0)}{t} = -f'(0)$$

ומכאן $2\cdot f'(0) = 0$, ולכן $f'(0) = 0$ וסיימנו.

שאלה 5

יהא a קבוע כלשהו ותהא f פונקציה כך שלכל x ממשי:

$$f(x) = \begin{cases} x + xe^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{a - 2\cos x}{\sin x} & x > 0 \end{cases}$$

סעיף א

על מנת ש f תהיה רציפה ב$x = 0$ נדרוש, לפי טענה 5.18, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

טענה: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

הוכחה: ראשית, בסביבה שמאלית של 0 מתקיים $x < 0 \Leftarrow f(x) = x + xe^{\frac{1}{x}}$.

נחשב תחילה את הגבול $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$:

נציב $t = \frac{1}{x}$. לפי כלל "$\frac{1}{-\infty}$", מתקיים $\lim_{t\to -\infty} \frac{1}{t} = 0$, וכן בסביבת מינוס אינסוף, כל x מקיים $0 > \frac{1}{x} = t$. לכן, לפי הכללת משפט גבול של הרכבה (4.39) עבור גבול חד-צדדי ועבור הגבול במינוס אינסוף $\lim_{t\to -\infty} e^t = 0$ (6.9 עבור $a = e$), מתקיים:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$$

כעת, לפי רציפות חד צדדית, $\lim_{x\to 0^-} x = 0$. לכן לפי אריתמטיקה (הכללה עבור גבולות חד-צדדיים):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x + xe^{\frac{1}{x}} = 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

טענה: עבור $a = 2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

הוכחה: ראשית, בסביבה ימנית של 0 מתקיים $x > 0 \Leftarrow f(x) = \frac{2-2\cos x}{\sin x}$.

כעת, מאחר ובסביבה הימנית $(0, \pi)$ של 0 מתקיים $\cos x \neq -1 \Leftarrow 1 + \cos x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{2-2\cos x}{\sin x} = 2 \cdot \frac{1-\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = 2 \cdot \frac{1-\cos^2 x}{\sin x \cdot (1+\cos x)}$$

לפי הזהות הטריגונומטרית $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, נסיק $1 - cos^2 x = \sin^2 x$, ולכן:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = 2 \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

כעת, לפי 4.44 + 4.48, $\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$, וכן $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$. לכן, לפי אריתמטיקה, כאשר גבול המכנה $1 + \cos x$ הוא $2 \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2 \cdot \frac{0}{1+1} = 0$$

המסקנה משתי הטענות האחרונות היא שכאשר $a = 2$, $f(x)$ רציפה ב$x = 0$.

נבדוק האם קיימים ערכים נוספים בהם $f(x)$ רציפה:
טענה: לכל $a > 2$, הגבול $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ לא קיים (במובנו הסופי)

הוכחה: ראשית, לפי 4.44 + 4.48 ואריתמטיקה: $\lim_{x\to 0^+} a - 2\cos x = a - 2 \cdot 1 = a - 2$.

מההנחה, $a > 2$ ולכן קיים מספר ממשי $\gamma = a - 2 > 0$, כך ש $\lim_{x\to 0^+} a - 2\cos x = \gamma$.

כמו כן, לפי 4.44 + 4.48 מתקיים $\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$, וכן בסביבה הימנית $(0, \frac{\pi}{2})$ של 0 מתקיים

$\sin x > 0$, ולכן לפי אריתמטיקה + כלל "$\frac{1}{0^+}$" + כלל "$\infty \cdot$ מספר חיובי"

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{a-2\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} (a - 2\cos x) \cdot \frac{1}{\sin x} = \gamma \cdot "\frac{1}{0^+}" = \gamma \cdot "\infty" = \infty$$

באופן אנלוגי לחלוטין, לכל $a < 2$ הגבול $\lim_{x\to 0^+} a - 2\cos x = a - 2 =- \gamma < 0$, לפי אריתמטיקה

והכללים הכתובים מעלה:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{a-2\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} (a - 2\cos x) \cdot \frac{1}{\sin x} =- \gamma \cdot "\frac{1}{0^+}" =- \gamma \cdot "\infty" =- \infty$$

בשני המקרים, כאשר $a \neq 2$ נקבל כי f לא רציפה מימין ב$x = 0$, ולכן לא רציפה לפי 5.18.

ובסך הכל, f רציפה ב$x = 0$ אם ורק אם $a = 2$.

סעיף ב

לפי 7.9, על מנת שf תהיה גזירה ב$x = 0$ נדרוש רציפות, ולכן עבור $a \neq 2$ הפונקציה f בוודאות לא תהיה גזירה ב$x = 0$.
נבדוק האם f גזירה כאשר $x = 0$ בעזרת משפט 7.12. כלומר, נחשב נגזרת שמאלית וימנית:

טענה: $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

הוכחה: בסביבה שמאלית של 0, $x < 0 \Leftarrow f(x) = x + xe^{\frac{1}{x}}$. לכן,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x+xe^{\frac{1}{x}}-0}{x} = 1 + e^{\frac{1}{x}}$$

בסעיף קודם הוכחנו $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, ולכן לפי אריתמטיקה:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} 1 + e^{\frac{1}{x}} = 1 + 0 = 1$$

לפי משפט 7.8 (הכללה עבור נגזרת חד-צדדית), המשמעות היא ש$f'_(0) = 1$

על מנת שf תהיה גזירה ב$x = 0$, נדרוש $f'_+(0) = 1$.

טענה: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

הוכחה: בסביבה ימנית של 0, $x>0 \Leftarrow f(x)=\frac{2-2\cos x}{\sin x}$, וכפי שהוכח קודם, $f(x)=2\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}$. לכן,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{2\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}-0}{x}=2\cdot\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}=\frac{2}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

כעת, לפי 4.44 + 4.48 ואריתמטיקה (הכללה עבור גבול חד-צדדי), כאשר גבול המכנה הוא $2\neq0$, מתקיים $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2}{1+\cos x}=\frac{2}{1+1}=1$

וכן לפי 4.45 + 4.48, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

ולכן לפי אריתמטיקה,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=1\cdot1=1$$

שוב, לפי הכללת 7.8 עבור נגזרת חד-צדדית קיבלנו כי $f'_+(0)=1$, ומכאן נסיק $f'(0)=1$

ולכן, f גזירה ב0 $x=$ אם ורק אם $a=2$.