מטלת מנחה 13 - קורס 20218

328197462

08/09/2023

שאלה 1

נניח כי קיימת מעבת הומונית $x' = Ax$ עבורה הפונקציות הבאות מהוות פתרון:

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

אז גם הפונקציה $u = 2x_1 - x_2$, שהיא צירוף לינארי של פתרונות למערכת ההומוגנית. מהווה פתרון למערכת. מתקיים:

$$u(0) = 2 \cdot e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - e^0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן לפי למה 4.1.7, u הוא הפתרון הטריוויאלי, כלומר $u(t) = 0$ לכל $t \in (-1, 1)$. אולם:

$$u(0.5) = 2 \cdot e^{0.5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - e^{-0.5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = (e^{0.5} - e^{-0.5}) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

ונקבל סתירה היות ו $e^{0.5} - e^{-0.5} \neq 0$ וכן $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$

שאלה 2

לפנינו המשוואה $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad b = \begin{pmatrix} 5e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ראשית נמצא פתרון למערכת ההומוגנית $x' = Ax$. המטריצה A בעלת ערכים קבועים ולכן נמצא את ערכיה העצמיים:

שאלה 3

לפנינו המערכת $x' = Ax$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים של המטריצה A:

שאלה 4

לפנינו המערכת $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ראשית נמצא פתרון למערכת ההומוגנית $x' = Ax$. נמצא ערכים עצמיים לA:

שאלה 5

לפנינו המערכת $x' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} x$ כך שa, b קבועים ממשיים.

עלינו להוכיח שכל רכיביו של פתרון למשוואה זו אפסים באינסוף אם ורק אם $a < b < 0$. תחילה נמצא ערכים עצמיים ל-A.

שאלה 6

לפנינו המערכת $x' = Ax + b$ כך ש:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2t} & \frac{-t}{2} \\ \frac{3}{2t^3} & \frac{-1}{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -t \\ -t^3 \end{pmatrix}$$

נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית המתאימה, $x' = Ax$, שבו הרכיב השני קבוע. נסמן אפוא $x = \begin{pmatrix} u(t) \\ C \end{pmatrix}$. מתקיים:

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = x' = Ax = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ C \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2u(t) - Ct^4 \\ 3u(t) - Ct^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} 2t^3 \cdot u' = 7t^2u - Ct^4 \\ 3u - Ct^2 = 0 \end{cases} \quad \to \begin{cases} 2t^3 \cdot u' = t^2(4u + 3u - Ct^2) \\ 3u - Ct^2 = 0 \end{cases}$$

נציב את המשוואה השנייה בראשונה ונקבל:

$$\begin{aligned} 2t^3 \cdot u' &= 4t^2u \\ \frac{u'}{u} &= \frac{2}{t} \\ \frac{du}{u} &= \frac{2}{t}dt \\ \ln|u| &= 2\ln|t| + C_1 = \ln(t^2) + C_1 \\ |u| &= e^{C_1}t^2 \\ u &= \pm e^{C_1}t^2 = C_2t^2 \end{aligned}$$

נבחר למשל $u = t^2$, אז $Ct^2 = 3u = 3t^2$ ולכן $C = 3$ ו $x_1 = \begin{pmatrix} t^2 \\ 3 \end{pmatrix}$ מהווה פתרון ל$x' = Ax$.

נמצא פתרון נוסף למערכת ההומוגנית על פי הטכניקה בסעיף 4.2.5. נמצא פונקציה וקטורית $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ונסמן $x = \begin{pmatrix} y_1 + t^2y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$.
אז:

$$\begin{pmatrix} y_1' + 2ty_2 + t^2y_2' \\ 3y_2' \end{pmatrix} = x' = Ax = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2 & -t^4 \\ 3 & -t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 + t^2y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2y_1 + 7t^4y_2 - 3t^4y_2 \\ 3y_1 + 3t^2y_2 - 3t^2y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2t^3}\begin{pmatrix} 7t^2y_1 + 4t^4y_2 \\ 3y_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} y_1' + 2ty_2 + t^2y_2' = \frac{7}{2t}y_1 + 2ty_2 \\ y_2' = \frac{1}{2t^3}y_1 \end{cases} \quad \to \begin{cases} y_1' + t^2y_2' = \frac{7}{2t}y_1 \\ y_2' = \frac{1}{2t^3}y_1 \end{cases}$$

נציב את המשוואה השנייה בראשונה ונקבל:

$$\begin{aligned} y_1' + \frac{t^2}{2t^3}y_1 &= \frac{7}{2t}y_1 \\ y_1' + \frac{1}{2t}y_1 &= \frac{7}{2t}y_1 \\ y_1' &= \frac{3}{t}y_1 \\ \frac{dy_1}{y_1} &= \frac{3}{t}dt \\ \ln|y_1| &= 3\ln|t| + C_3 = \ln|t^3| + C_3 \\ |y_1| &= e^{C_3}|t^3| \\ y_1 &= \pm e^{C_3}t^3 = C_4t^3 \end{aligned}$$

נבחר למשל $y_1 = t^3$, אז $y_2' = \frac{1}{2t^3}y_1 = \frac{1}{2}$ ולכן $y_2 = \frac{t}{2} + C_5$. נבחר למשל $y_2 = \frac{t}{2}$ ונקבל פתרון:

$$\begin{pmatrix} t^3 + t^2 \cdot \frac{t}{2} \\ \frac{3t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3t^3}{2} \\ \frac{3t}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$$

ו $x_2 = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$ פתרון נוסף למערכת ההומוגנית.

נמצא פתרון פרטי למערכת המקורית בעזרת וריאציית הפרמטרים: