מטלת מנחה 12 - אינפי 2

328197462

25/11/2022

שאלה 1

נחשב את כל האינטגרלים

סעיף א

$$\int \frac{x^5}{1-x^3}dx = \int \frac{x^2 \cdot x^3 - x^2 + x^2}{1-x^3}dx = \int \frac{x^2(x^3-1)+x^2}{1-x^3}dx =$$

$$\int(-x^2 - \frac{x^2}{x^3-1})dx = -\frac{x^3}{3} + \int \frac{(x^3-1)'}{x^3-1}dx = \begin{bmatrix} \text{לפי נגזרת} \\ \text{הפונקציה} \\ \text{הלוגוריתמית} \end{bmatrix} = -\frac{x^3}{3} + \ln(x^3-1) + C$$

סעיף ב

$$\int (3x-7)^4 dx = [\textstyle\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C] = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-7)^5}{5} + C = \frac{(3x-7)^5}{15} + C$$

סעיף ג

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}dx = \int(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})dx =$$

$$\begin{bmatrix} \text{לפי דוגמה 2.29} \\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C \end{bmatrix} = \arcsin x + \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C$$

סעיף ד

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \sin x + 1}dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int \frac{tdt}{t^2+t+1} = \left[t = \tfrac{1}{2}(2t+1) - \tfrac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)dt}{t^2+t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

כאשר לפי הצבה לוגוריתמית

$$\int \frac{(2t+1)dt}{t^2+t+1} = \ln(t^2+t+1) + C$$

וכן,

$$\int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{(t+0.5)^2+0.75} = \begin{bmatrix} u = t+0.5 \\ du = dt \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^2+0.75} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{שאלה 7ב ביחידה 2} \\ a^2 = \frac{3}{4} \\ a = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt{3}(t+0.5)}{3} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt{3}t + \sqrt{3}}{3} + C$$

ומכאן נקבל

$$\int \frac{tdt}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)dt}{t^2+t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt{3}t+\sqrt{3}}{3} + C$$

ולכן

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \sin x + 1}dx = \frac{1}{2}\ln(\sin^2 x + \sin x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2\sqrt{3}\sin x + \sqrt{3}}{3} + C$$

סעיף ה

$$\int \frac{e^{2x}}{16+e^{4x}}dx = \begin{bmatrix} t = e^{2x} \\ dt = 2e^{2x}dx \\ \frac{1}{2}dt = e^{2x}dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{16+t^2} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{שאלה 7ב ביחידה 2} \\ a^2 = 16 \\ a = 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \arctan \frac{t}{4} + C = \frac{1}{8} \arctan \frac{e^{2x}}{4} + C$$

סעיף ו

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin x & v' = (x+1)^{-\frac{1}{2}} \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = 2\arcsin x \cdot \sqrt{x+1} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2\sqrt{x+1}dx =$$

כאשר מתקיים:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2\sqrt{x+1}dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2\int (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \cdot 2(1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1) + C = -4\sqrt{1-x} + C$$

ולכן

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx = 2\arcsin x \cdot \sqrt{x+1} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2\sqrt{x+1}dx = 2\arcsin x \cdot \sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x} + C$$

סעיף ז

$$\int \ln(x^2-3x+2)dx = \int \ln(x^2-3x+2) \cdot 1dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x^2-3x+2) & v' = 1 \\ u' = \frac{2x-3}{x^2-3x+2} & v = x \end{bmatrix} = x\ln(x^2-3x+2) - \int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} \cdot xdx$$

כאשר מתקיים

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} \cdot xdx = \int \frac{2x^2-3x}{x^2-3x+2}dx$$

נרצה לבצע חילוק פולינומים על מנת להעביר את האינטגרל לצורה פשוטה יותר.
שורשי המכנה הם $x=1,2$, לכן נרצה להעביר את האינטגרד לצורה $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+p(x)$ כאשר p פולינום
נפתור את מערכת המשוואות ע"י כפל במכנה

$$\frac{2x^2-3x}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+p(x)\xrightarrow{\cdot(x-1)(x-2)}2x^2-3x=a(x-2)+b(x-1)+p(x)(x^2-3x+2)$$

נקבל כי מעלת הפולינום p היא לכל היותר 1, שכן אחרת מעלת הביטוי מימין תהיה גבוהה ממעלת הביטוי משמאל.
נסמן $p(x)=k$

$$\Rightarrow\begin{cases}[x^2]:2=k\\ [x]:-3=a+b-3k=a+b-6\Rightarrow a+b=3\\ [1]:0=-2a-b+2k=-2a-b+4\Rightarrow 2a+b=4\end{cases}$$

נחסר את שתי המשוואות האחרונות זו מזו ונקבל $a=1\Rightarrow b=2$
לכן פונקציית האינטגרד היא $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+2$
ונקבל:

$$\int\frac{2x^2-3x}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{1}{x-1}dx+2\int\frac{1}{x-2}dx+\int 2dx=\ln(x-1)+2\ln(x-2)+2x+C$$

לסיכום:

$$\int\ln(x^2-3x+2)dx=x\ln(x^2-3x+2)-\ln(x-1)-2\ln(x-2)-2x+C$$

שאלה 2

סעיף א

$$\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{5-4\cos x}=\begin{bmatrix} t=\tan\frac{x}{2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt \\ \text{לפי 2.3.8} \\ x=0,\pi/3\Rightarrow t=0,\sqrt{3}/3\end{bmatrix}=\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{1}{5-4(\frac{1-t^2}{1+t^2})}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{1+t^2}{5(1+t^2)-4(1-t^2)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=2\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{dt}{5+t^2-4+4t^2}=2\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{dt}{9t^2+1}=\frac{2}{9}\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{dt}{t^2+(\frac{1}{3})^2}=$$

$$\begin{bmatrix}\text{לפי שאלה 7ב} \\ \text{ביחידה 2}\end{bmatrix}=\frac{2}{9}\cdot 3\arctan 3t\Big|_0^{\sqrt{3}/3}=\frac{2\pi}{9}$$

סעיף ב

נתחיל בחישוב פונקציה קדומה לפונקציית האינטגרד.

נתקלנו בפונקציה קדומה מהצורה $\int\frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, לכן נבצע הצבת אוילר: $\sqrt{x^2+1}=t-x$

נקבל, לפי עמוד 161

$$x=\frac{t^2-1}{2t};\ dx=\frac{t^2+1}{2t^2}dt;\ x+1=\frac{t^2-1}{2t}+\frac{2t}{2t}=\frac{t^2+2t-1}{2t}\ \ \sqrt{x^2+1}=t\cdot\frac{2t}{2t}-\frac{t^2-1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t}$$

נשים לב בנוסף: $x=0\Rightarrow t=1, x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}+1$

ומכאן:

$$\int_0^1\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{\frac{t^2+2t-1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t}}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{4t^2}{2t^2(t^2+2t-1)}dt=2\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{dt}{t^2+2t-1}$$

נרצה להפריד לצורת $\frac{a}{t-(-1+\sqrt{2})}+\frac{b}{t-(-1-\sqrt{2})}$.

$$\frac{1}{t^2+2t-1}=\frac{a}{t+1-\sqrt{2}}+\frac{b}{t+1+\sqrt{2}}$$

$$1=a(t+1+\sqrt{2})+b(t+1-\sqrt{2})$$

נשווה מקדמים של איברי הפולינום:

$$\begin{cases}[t]\ a+b=0\ \Rightarrow a=-b \\ [1]\ a+\sqrt{2}a+b-\sqrt{2}b=1\ \Rightarrow 2\sqrt{2}a=1\end{cases}$$

נקבל $a=\frac{1}{2\sqrt{2}}, b=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$2\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{dt}{t^2+2t-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{2}+1}(\frac{1}{t+1-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+1+\sqrt{2}})dt=\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln(\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}})\Big|_1^{\sqrt{2}+1})=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln(\frac{2}{2+2\sqrt{2}})-\ln(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}))=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\frac{2}{2-\sqrt{2}})\approx 0.868$$

סעיף ג

נשתמש בתכונת הלינאריות של האינטגרל

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^7-x+1}{\cos^2 x}dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^7-x}{\cos^2 x}dx+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^7-x}{\cos^2 x}dx+\tan x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

באשר לאינטגרל שנותר, נשים לב כי פונקציית האינטגרד $f(x)=\frac{x^7-x}{\cos^2 x}$ היא אי-זוגית. המונה הוא פונקציית פולינום אי-זוגית, והמכנה הוא פונקציה זוגית ידועה, וביחד המנה תהיה אי-זוגית.
לכן ניעזר בשאלה 43 ביחידה 2. נקבל $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}f(x)dx=0$
ולסיכום:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^7-x+1}{\cos^2 x}dx=0+\tan x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=0+1-(-1)=2$$

סעיף ד

נשתמש בתכונת האדיטיביות של האינטגרגל $\int_0^5 ||x-1|-|x-2||dx$

$$\int_0^5 ||x-1|-|x-2||dx=\int_0^1 ||x-1|-|x-2||dx+\int_1^2 ||x-1|-|x-2||dx+\int_2^5 ||x-1|-|x-2||dx$$

בתחום $[0,1]$ נקבל $x\le 1,2\Rightarrow |x-1|=-x+1, |x-2|=-x+2$
ולכן האינטגרד בתחום זה יהיה $||x-1|-|x-2||=|-x+1-((-x)+2)|=|-1|=1$
ונקבל:

$$\int_0^1 ||x-1|-|x-2||dx=\int_0^1 1dx=x\Big|_0^1=1-0=1$$

באופן דומה:

$$\int_1^2 ||x-1|-|x-2||dx=\int_1^2 |x-1-(-x+2)|dx=\int_1^2 |2x-3|dx=$$

$$\int_1^{1.5}(-2x+3)dx+\int_{1.5}^2(2x-3)dx=(-x^2+3x)\Big|_1^{1.5}+(x^2-3x)\Big|_{1.5}^2=-\frac{27}{4}-(-4)+10-\frac{27}{4}=\frac{1}{2}$$

וכן

$$\int_2^5 ||x-1|-|x-2||dx=\int_2^5 |(x-1)-(x-2)|dx=\int_2^5 |1|dx=x\Big|_2^5=5-2=3$$

לסיכום נקבל

$$\int_0^5 ||x-1|-|x-2||dx=1+\frac{1}{2}+3=4.5$$

שאלה 3

סעיף א

הטעות טמונה במעבר $\int_1^{1+2\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx = \int_{\sin 1}^{\sin 1} e^{-t^2} dt$.
השתמשנו כאן במשפט 2.11. לפי המשפט, מתקיים השוויון הבא:

$$\int_{\sin 1}^{\sin 1} f(x)dx = \int_1^{1+2\pi} f(\sin(t)) \cos x dt$$

כאשר $f(x) = e^{-x^2}$, זאת בכפוף לתנאי המשפט.
אכן, sin מוגדרת בקטע $[1, 1+2\pi]$ כנדרש בתנאי הראשון.
התנאי השני של במשפט דורש $\sin([1, 1+2\pi]) \subseteq [\sin 1, \sin 1] = \{\sin 1\}$ נשים לב כי מדובר במחזור שלם של פונקציית הסינוס, ולכן $\sin([1, 1+2\pi]) = [-1, 1]$ והתנאי לא מתקיים! זוהי הטעות בהצבה.

סעיף ב

ניעזר בתכונת האדיטיביות של האינטגרל:

$$I = \int_1^{1+2\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx = \int_1^{1+\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx + \int_{1+\pi}^{1+2\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx$$

נחשב את ערך האינטגרל $\int_{1+\pi}^{1+2\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx$ כעת נציב $t = x - \pi$.
אז $dt = dx$, ונקבל:

$$\int_{1+\pi}^{1+2\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx = \begin{bmatrix} x = 1+\pi & \Rightarrow & t = 1 \\ x = 1+2\pi & \Rightarrow & t = 1+\pi \end{bmatrix} = \int_1^{1+\pi} \cos(t+\pi) \cdot e^{-\sin^2(t+\pi)} dt$$

כעת, ניעזר בזהויות טריגונומטריות מאינפי 1:

$$\sin(t+\pi) = -\sin(2\pi - (t+\pi)) = -\sin(\pi - t) = -\sin t \Rightarrow -\sin^2(t+\pi) = -(-\sin t)^2 = -\sin t$$

$$\cos(t+\pi) = \cos(2\pi - (t+\pi)) = \cos(\pi - t) = -\cos t$$

נקבל:

$$\int_{1+\pi}^{1+2\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx = \int_1^{1+\pi} \cos(t+\pi) \cdot e^{-\sin^2(t+\pi)} dt = -\int_1^{1+\pi} \cos t \cdot e^{-\sin^2 t} dt$$

ולכן

$$I = \int_1^{1+\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx + \int_{1+\pi}^{1+2\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx =$$
$$= \int_1^{1+\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx - \int_1^{1+\pi} \cos x \cdot e^{-\sin^2 x} dx = 0$$

שאלה 4

נסמן לפי הנתון, לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \int \sin^n(x)dx \quad C_n = \int \cos^n(x)dx$$

לכל $n \geq 3$ טבעי:

$$S_n = \int \sin^n(x)dx = \int \sin^2(x) \cdot \sin^{n-2}(x)dx = \int (1-\cos^2 x) \cdot \sin^{n-2}(x)dx = S_{n-2} - \int \cos^2 x \cdot \sin^{n-2}(x)dx$$

נבצע אינטגרציה בחלקים למחוסר. נקבל:

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^{n-2}(x)dx = \begin{bmatrix} u = \cos x & v' = \cos x \cdot \sin^{n-2}(x) \\ u' = -\sin x & v = \frac{1}{n-1} \cdot \sin^{n-1}(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{n-1}\cos x \cdot \sin^{n-1}(x) - \frac{1}{n-1}\int -\sin^n(x)dx$$

נשים לב: $-\frac{1}{n-1}\int -\sin^n(x)dx = \frac{1}{n-1}S_n$. לכן נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{n-1}{n-1}S_n = S_{n-2} - \frac{1}{n-1}\cos x \cdot \sin^{n-1}(x) - \frac{1}{n-1}S_n$$

$$\frac{n}{n-1}S_n = -\frac{1}{n-1}\cos x \cdot \sin^{n-1}(x) + S_{n-2}$$

$$S_n = -\frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}S_{n-2}$$

ובכך הוכחנו את הנוסחה הראשונה.

נעבור לנוסחה השנייה ונחזור על התהליך בקצרה.

$$C_n = C_{n-2} - \int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2}(x)dx$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2}(x)dx = \begin{bmatrix} u = \sin x & v' = \sin x \cdot \cos^{n-2}(x) \\ u' = \cos x & v = \frac{-1}{n-1} \cdot \cos^{n-1}(x) \end{bmatrix} = \frac{-1}{n-1}\sin x \cdot \cos^{n-1}(x) + \frac{1}{n-1}C_n$$

$$\frac{n-1}{n-1}C_n = C_{n-2} + \frac{1}{n-1}\sin x \cdot \cos^{n-1}(x) - \frac{1}{n-1}C_n$$

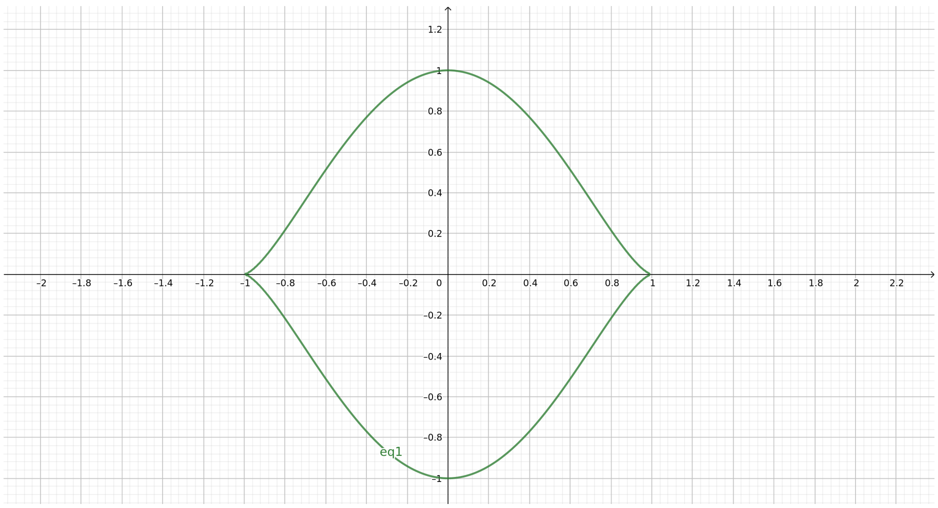
$$\frac{n}{n-1}C_n = -\frac{1}{n-1}\sin x \cdot \cos^{n-1}(x) + C_{n-2}$$

$$C_n = \frac{1}{n}\sin x \cdot \cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}C_{n-2}$$

שאלה 5

נרצה לחשב את השטח המוגבל על ידי העקומה $y^2 = (1-x^2)^3$.
ראשית, על מנת שהעקומה תהא מוגדרת, נדרוש $(1-x^2)^3 \geq 0$. נקבל $1-x^2 \geq 0$, ולכן $-1 \leq x \leq 1$

לכל $x \in [-1,1]$, נקבל שני ערכי y, והם $y = \pm\sqrt{(1-x^2)^3}$. השטח המוגבל שנרצה לחשב ייראה כך:



נשים לב כי השטח סימטרי ביחס לציר ה x. אכן, לכל $x \in [-1,1]$ נקבל:

$$y(-x) = \pm\sqrt{(1-(-x)^2)^3} = \pm\sqrt{(1-x^2)^3} = y(x)$$

על כן, השטח שלנו יהיה, לפי דוגמה 1.17:

$$S = \int_{-1}^{1}(\sqrt{(1-x^2)^3} - (-\sqrt{(1-x^2)^3}))dx = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}dx = [\text{משיקולי סימטריה}] = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}^3 dx$$

כעת נציב $x = \sin t$, אז $dx = \cos t dt$ ונקבל:

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}^3 dx = \begin{bmatrix} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=\pi/2 \end{bmatrix} = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}^3 \cdot \cos t dt = \begin{bmatrix} \text{בתחום המבוקש מתקיים} \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} \end{bmatrix} = 4\int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt$$

משאלה 4 נקבל $\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x dx$, כאשר מתקיים

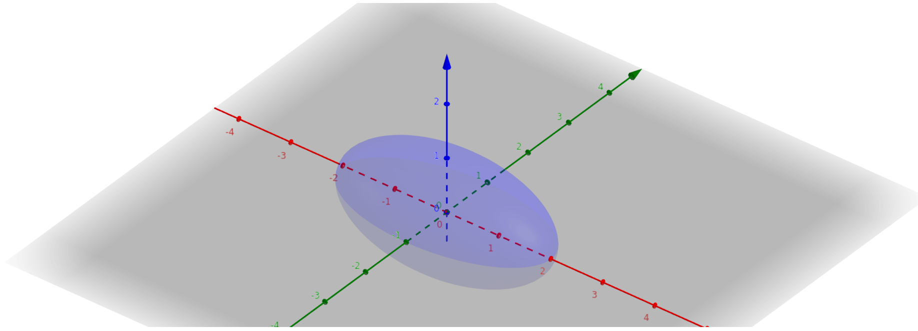
$$\int \cos^2 x dx = \int (\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2})dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$$

לסיכום, נקבל:

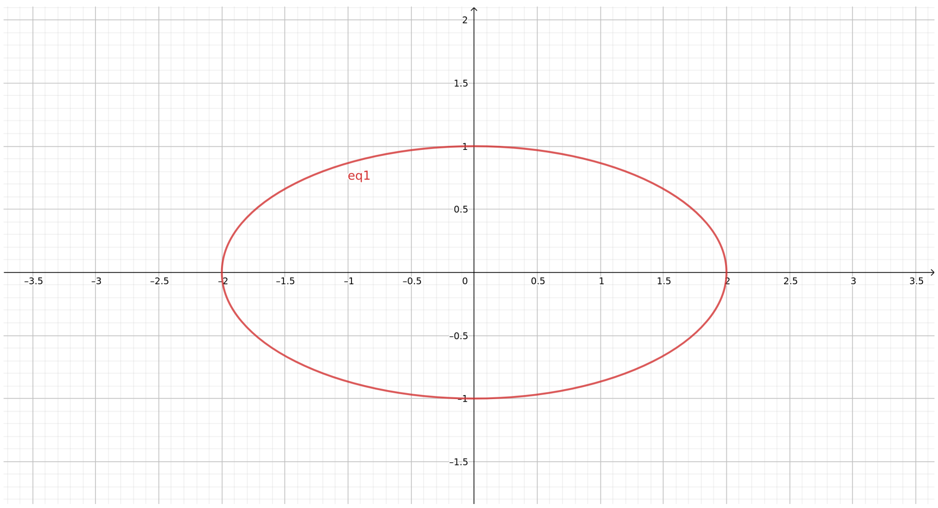
$$S = 4\int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = (\sin t \cdot \cos^3 t)\Big|_0^{\pi/2} + 3\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 0 + 3(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x)\Big|_0^{\pi/2} = 3(\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{3\pi}{4}$$

שאלה 6

הנפח התחום במשוואה הנתונה נראה כך:



על מנת למנצוא מהו התחום אותו מסובבים סביב ציר ה x, נציב $z=0$ במשוואה הנתונה $x^2+4y^2+4z^2 \le 4$.
נקבל $x^2+4y^2 \le 4$, כלומר שטח המוגבל על ידי העקומה $x^2+4y^2=4$ הנראית כך:



הנפח הרצוי מתקבל מסיבוב חצי (מעל או מתחת לציר) משטח זה סביב ציר ה-x
לכל נקודה על קצה שטח זה נקבל $4y^2=4-x^2$, כלומר $2y=\pm\sqrt{4-x^2}$ ולכן $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$.
כאמור, נבחר את החצי העליון ונקבל $y=\sqrt{4-x^2}$. ברור כי השטח מוגדר רק כאשר $-2 \le x \le 2$, ונקבל:

$$V=\int_{-2}^{2}\pi\cdot\sqrt{4-x^2}^2dx=\pi\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\pi(4x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-2}^{2}=\frac{32\pi}{3}$$