מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

20/01/2023

שאלה 1

נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{nx}{e^x+n+x}$ המוגדרות (ורציפות) ב$[0,\infty)$.
נחשב את הפונקציה הגבולית. לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^x+n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{e^x \cdot \frac{1}{n} + 1 + x \cdot \frac{1}{n}} = \frac{x}{1} = x$$

כמו כן, מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [0,\infty)$:

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{nx}{e^x+n+x} - x| = |\frac{nx - x(e^x+n+x)}{e^x+n+x}| = |\frac{-x^2 - xe^x}{e^x+n+x}| = \frac{x^2+xe^x}{e^x+n+x}$$

סעיף א

ניקח את הסדרה $x_n = n$. מתקיים:

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n^2+ne^n}{e^n+2n} = \frac{\frac{n^2}{e^n}+n}{1+2\cdot\frac{n}{e^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

מכאן, לפי למה 6.3, נסיק כי (f_n) לא מתכנסת במידה שווה לf.

סעיף ב

יהיו $0 \leq a < b$ כלשהם.
נדגיש כי מתקיים $[a,b] \subseteq [0,\infty)$ והפונקציה הגבולית f נשארת זהה.
נבחר את הסדרה $\mu_n = \frac{b^2+be^b}{e^a+n+a}$. לכל $x \in [a,b], n \in \mathbb{N}$ נקבל:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2+xe^x}{e^x+n+x} \underset{a\leq x\leq b}{\leq} \frac{b^2+be^b}{e^a+n+a} = \mu_n$$

מתקיים $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (a,b קבועים) ולכן לפי שאלה 7 ביחידה 6 נסיק כי (f_n) מתכנסת במ"ש לf.
לכן, לפי משפט 6.8 נקבל

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 2

מגדירים פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, וכן לכל n טבעי מגדירים $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $f_n(x)=f(x^n)$.
נגדיר $g(x)\equiv f(0)$ פונקציה קבועה.

סעיף א

יהא $0<a<1$ כלשהו.
נראה תחילה התכנסות נקודתית לפונקציה g. לכל $x\in[0,a]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^n)\underset{t=x^n\to 0^+}{=}\lim_{t\to 0^+} f(t)\underset{f \text{ רציפות}}{=} f(0)$$

נוכיח התכנסות במידה שווה לפי הגדרה. יהא $\epsilon_0>0$.
הפונקציה $\delta(x)=|f(x)-f(0)|$ היא פונקציה רציפה ב$[0,1]$ כהפרש והרכבה של פונקציות רציפות.
לכן, לפי אינפי 1, יש לה ערך מקסימלי בקטע $[0,1]$. נסמן ערך זה ב$x_\Delta\in[0,1]$.
עבור $\epsilon_0>\delta(x_\Delta)$, לכל n טבעי ולכל $x\in[0,a]$ מתקיים $x^n\in[0,1]$ ולכן $|f_n(x)-f(0)|<|f(x_\Delta)-f(0)|<\epsilon_0$.
בפרט, כאשר $x_\Delta=0$ נקבל $\delta(x_\Delta)=0$ ולכן $\epsilon_0>\delta(x_\Delta)$.
נוכיח עבור שארית המקרים - $\epsilon_0<\delta(x_\Delta)$ וכן $x_\Delta\in(0,1]$.

מרציפות פונקציית המרחק ואי-השוויון $\delta(0)=0<\epsilon_0<\delta(x_\Delta)$, קיים לפי משפט ערך הביניים מאיפני 1 $x_\epsilon\in[0,1]$ כלשהו כך ש $\delta(x_\epsilon)=\epsilon_0$. לא ייתכן $x_\epsilon=0$ כי $\delta(x_\epsilon)>\delta(0)=0$.
נרצה לבחור את הנקודה x_ϵ השמאלית ביותר האפשרית, כלומר, אילו קיים $x'\in(0,x_\epsilon)$ כך ש $\delta(x')>\epsilon_0$, משפט ערך הביניים מבטיח לנו קיומו של $x_\epsilon\in(0,x')$ נוסף כך ש $\delta(x_\epsilon)=\epsilon_0$. בחירה זו מבטיחה לנו כי לכל $x\in[0,x_\epsilon)$ מתקיים $\delta(x)<\epsilon_0$

לכן, מהגבול הידוע מאינפי 1 $\sqrt[n]{x_\epsilon}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ נסיק כי עבור $\epsilon=1-a>0$, החל מ $N\in\mathbb{N}$ כלשהו נקבל:

$$|\sqrt[n]{x_\epsilon}-1|<1-a\underset{\sqrt[n]{x_\epsilon}\le 1}{\Rightarrow}1-\sqrt[n]{x_\epsilon}<1-a\Rightarrow\sqrt[n]{x_\epsilon}>a$$

נבחר N זה. לכל $n>N$ נקבל בקטע $[0,a]$ כי הפונקציה x^n מונוטונית עולה,
ולכן לכל $0\le x\le a<\sqrt[n]{x_\epsilon}$ מקבלים $0\le x^n\le a^n<x_\epsilon\Rightarrow x\in[0,x_\epsilon)$. אי לכך,

$$|f_n(x)-f(0)|=|f(x^n)-f(0)|=\delta(x^n)\underset{x^n\in[0,x_\epsilon)}{<}\epsilon_0$$

סעיף ב

הפונקציה f רציפה ולכן אינטגרבילית, וכמו כן הפונקציות f_n רציפות ולכן אינטגרביליות כהרכבה של פונקציות רציפות.
נוכיח לפי הגדרת הגבול, בהשראת הוכחת משפט 6.8. אם כן, יהא $\epsilon>0$ ועלינו להוכיח שהחל מ$N\in\mathbb{N}$ מסוים מתקיים:

$$\left|\int_0^1 f_n(x)dx-f(0)\right|<\epsilon$$

נשים לב כי מאחר ו$f(0)$ פונקציה קבועה ורציפה ולכן אינטגרבילית, נקבל לפי שאלה 51 ביחידה 1:

$$f(0)=(1-0)\cdot f(0)\le\int_0^1 f(0)\le(1-0)\cdot f(0)=f(0)$$

ואכן נקבל לכל N טבעי:

$$\left|\int_0^1 f_n(x)dx-\int_0^1 f(0)dx\right|\underset{1.24}{=}\left|\int_0^1(f_n(x)-f(x))dx\right|\underset{\text{שאלה } 1.50}{\le}\int_0^1|f_n(x)-f(x)|dx\underset{3.3}{=}\lim_{a\to 1^-}\int_0^a|f_n(x)-f(x)|dx$$

לכל $0<a<1$, לפי סעיף א, מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}$ החל מN מסוים. לכן, לפי 1.26 ואינפי 1:

$$\lim_{a\to 1^-}\int_0^a|f_n(x)-f(x)|dx\le\lim_{a\to 1^-}\int_0^a\frac{\epsilon}{2}=\lim_{a\to 1^-}a\cdot\frac{\epsilon}{2}=\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$$

ובזאת סיימנו את ההוכחה.

שאלה 4

סעיף א

הטענה נכונה.
נסמן לכל n טבעי, $u_n(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה כך שלכל x ממשי $u_n(x)=\frac{x}{4+n^4x^2}$. נוכיח את ההתכנסות במ"ש של $f(x)=\Sigma u_n(x)$ בעזרת מבחן ויירשטראס.

נבחר $\alpha_n=\frac{1}{4n^2}$
לכל $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$ נקבל:

$$\begin{aligned}u_n'(x)&=\frac{1(4+n^4x^2)-x(2n^4x)}{(4+n^4x^2)^2}=\\&=\frac{4+n^4x^2-2n^4x^2}{(4+n^4x^2)^2}=\\&=\frac{4-n^4x^2}{(4+n^4x^2)^2}\end{aligned}$$

נקבל נקודות החשודות לערכי קיצון מקומיים כאשר $u_n'(x)=0$, כלומר עבור $x=\pm\frac{2}{n^2}$.
מתקיים: $u_n(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$ ולכן:

$$\begin{aligned}|u_n(x)|\le|u_n(\pm\frac{2}{n^2})|&=\\&=|\frac{\pm\frac{2}{n^2}}{4+n^4(\pm\frac{2}{n^2})^2}|=\\&=\frac{\frac{|\pm2|}{n^2}}{4+n^4\cdot\frac{4}{n^4}}=\\&=\frac{\frac{2}{n^2}}{8}=\frac{1}{4n^2}=\alpha_n\end{aligned}$$

הטור $\Sigma\alpha_n=\Sigma(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^2})$ מתכנס לפי דוגמה 5.8א עבור $\alpha=2>1$ ולפי משפט 5.10 עבור $c=\frac{1}{4}\neq0$ אי לכך, לפי מבחן ויירשטראס 6.7 נסיק כי טור הפונקציות $\Sigma u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$.
כעת, היות ו u_n פונקציות רציפות ב $\mathbb{R}$ ומתכנסות במ"ש ב$\mathbb{R}$ ל f, נסיק לפי $6.4*$ כי f רציפה ב$\mathbb{R}$.

סעיף ב

הטענה לא נכונה.
גם כאן נסמן $u_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[0,1]$ נקבל $u_n(x)=(1-x)x^n=x^n-x^{n+1}$.
נציין כי הפונקציות u_n רציפות ב$\mathbb{R}$ ובפרט ב$[0,1]$.

נמצא התכנסות נקודתית של טור המספרים $\Sigma u_n(x_0)$ עבור $x_0\in[0,1]$ כלשהו. לכל k נקבל:

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}u_n(x_0)=\sum_{n=1}^{k}x_0^n-x_0^{n+1}\overset{\text{טור טלסקופי}}{=}=x_0-x_0^{k+1}$$

ולכן:

$$S(x_0)=\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{k\to\infty}x_0-x_0^{k+1}=\begin{cases}x_0 & 0\le x_0<1\\ 0 & x_0=1\end{cases}$$

אילו היה טור הפונקציות $\Sigma u_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב $[0,1]$, היינו מקבלים לפי $6.4*$ כי הפונקציה $S(x)$ רציפה, בסתירה לכך ש $S(x)$ אינה רציפה בנקודה $x=1$!