מטלת מנחה 14 - אלגברה לינארית 1

328197462

15/01/2023

שאלה 1

יהיו U, W_1, W_2 תתי-מרחבים לינאריים של מרחב לינארי V.

סעיף א

יהא $v \in (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$ ועלינו להוכיח $v \in U \cap (W_1 + W_2)$.
מהגדרת החיבור, קיימים $v_1 \in U \cap W_1, v_2 \in U \cap W_2$ כך ש $v = v_1 + v_2$.
אי לכך, $v_1, v_2 \in U$ ומסגירות החיבור הוקטורי במרחב הלינארי נסיק $v = v_1 + v_2 \in U$.
כמו כן, מאחר ו $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$ נקבל מהגדרת החיבור כי $v = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$.
הראינו שייכות לשתי הקבוצות $U, W_1 + W_2$ ולכן נסיק $v \in U \cap (W_1 + W_2)$

סעיף ב

עבור $V = \mathbb{R}^2$ נגדיר:

$$U = \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \quad W_1 = \mathsf{Sp}(\{(1,0)\}) \quad W_2 = \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})$$

אז לפי סעיף א של שאלה זו מתקיים $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2)$.

ניקח $v = (1,1)$ ונראה כי $v \in U \cap (W_1 + W_2)$ וגם $v \notin (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$.
נחשב:

$$\begin{aligned} U \cap (W_1 + W_2) &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap (\mathsf{Sp}(\{(1,0)\}) + \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})) \underset{\text{שאלה 7.6.8}}{=} \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap (\mathsf{Sp}(\{(1,0),(0,1)\})) = \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap \mathbb{R}^2 = \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \ni (1,1) = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U \cap W_1) + (U \cap W_2) &= (\mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap \mathsf{Sp}(\{(1,0)\})) + (\mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) + \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})) = \\ &= \{\underline{0}\} + \{\underline{0}\} = \\ &= \{\underline{0}\} \not\ni (1,1) = v \end{aligned}$$

ולכן מתקיימת הכלה חזקה בין תתי-המרחבים.

שאלה 2

יהיו $U = \text{Sp}\{u_1, u_2\}$, $W = \text{Sp}\{w_1, w_2\}$ תתי-מרחבים לינאריים של V כך שהקבוצות הפורשות אותם הן בסיסים.
מניחים כי $A = \{u_1, u_2, w_1\}$ תלויה לינארית.

סעיף א

נראה כי $w_1 \in U$ בדרך השלילה.
נניח בשלילה כי $w_1 \notin \text{Sp}\{u_1, u_2\}$. מאחר והקבוצה $\{u_1, u_2\}$ היא בסיס ולכן בלתי תלויה לינארית, נסיק לפי שאלה 8.1.8 כי $A = \{u_1, u_2\} \cup \{w_1\}$ בלתי תלויה לינארית, בסתירה לנתון!

כעת, מאחר ו$W = \text{Sp}\{w_1, w_2\} \ni w_1 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$, נקבל $w_1 \in U \cap W$.

סעיף ב

ניזכר במשפט המימדים 8.3.6

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

לשני תתי-המרחבים U, W יש בסיסים בגודל 2 ומכאן $\dim U = \dim W = 2$. עלינו למצוא את מימד תת-המרחב $U \cap W$.

לפי משפט $3.8.4$, עבור $U \cap W \subseteq U, W$ נסיק $\dim(U \cap W) \leq 2$.
בנוסף, אם $\dim(U \cap W) = 2$, אז נסיק את השוויון $U \cap W = U = W$ בסתירה לנתון כי U, W תתי-מרחבים שונים.
מכאן נובע אי-השוויון $\dim(U \cap W) \leq 1$. מאחר ו $w_1 \neq \underline{0} \in U \cap W$ (הוקטור נמצא בקבוצה בלתי תלויה לינארית), נסיק $\dim(U \cap W) \geq 1$ ובסך הכל $\dim(U \cap W) = 1$.

נציב במשפט המימדים ונקבל $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$.

הקבוצה $\{u_1, u_2, w_2\}$ בעלת 3 וקטורים ומוכלת ב $U + W$. נראה כי הקבוצה בת"ל, כלומר $w_2 \notin U$.
נניח כי $w_2 \in U$. מסעיף א של שאלה זו נקבל $\{w_1, w_2\} \subseteq \text{Sp}\{u_1, u_2\}$, ולפי שאלה $7.5.16$ נסיק:

$$W = \text{Sp}\{w_1, w_2\} \subseteq \text{Sp}\{u_1, u_2\} = U$$

משוויון המימדים נובע, לפי משפט $3.8.4$, כי $U = W$ וזאת בסתירה לנתון! מצאנו $w_2 \notin U$ ולכן לפי שאלה 8.1.8 הקבוצה בת"ל.

מצאנו כי $\{u_1, u_2, w_2\}$ בת"ל ובעלת 3 וקטורים ולכן קבוצה היא בסיס ל$U + W$.

שאלה 3

שאלה 4

יהיו U,W תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$, $\dim U > \dim W$.
נתון כי $(0,0,1,0) \notin U+W$, וכן $U \cap W = \text{Sp}\{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(-1,0,1,2)\}$
עלינו למצוא את המימד של $U+W$ וכן בסיס לW.

מאחר ו$U+W \subseteq \mathbb{R}^4$ מתקיים, לפי משפט $8.3.4$, $\dim(U+W) \leq 4$.
אם נניח בשלילה כי $\dim(U+W) = 4$, נקבל מחלקו השני של המשפט $U+W = \mathbb{R}^4$, בסתירה לנתון $(0,0,1,0) \notin U+W$.
לכן, $\dim(U+W) \leq 3$.

המרחב הנפרש ע"י קבוצת היוצרים הנתונה ל$U \cap W$ הוא מרחב השורות של המטריצה להלן.
לפי שאלה $7.5.12$, למטריצות שקולות שורה אותו מרחב שורות, ולכן נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שתי השורות הראשונות במטריצה הם בלתי תלויות לינארית ולכן מהווים בסיס ל$U \cap W$, ומכאן $\dim(U+W) = 2$.

כעת, היות ו$U \subseteq U+W$ ו$U \cap W \subseteq W$, נקבל לפי משפט 8.3.4 והנתון:

$$2 = \dim(U \cap W) \leq \dim W < \dim U \leq \dim(U+W) \leq 3$$

האפשרות היחידה לפתרון היא $\dim(U \cap W) = \dim W = 2$, $\dim U = \dim(U+W) = 3$.
לכן, לפי חלקו השני של המשפט, נקבל $U \cap W = W$.
אי לכך, מאחר ו $\{(1,2,3,4),(0,1,2,3)\}$ בסיס ל$U+W$ הקבוצה מהווה בסיס לW.