

## מטלת מנחה 11 - אלגברה לינארית 2

328197462

31/03/2023

### שאלה 1

#### סעיף א

נוכיח ישירות לפי הגדרה כי לכל  $A, B \in M_{n \times n}^{\mathbb{C}}$  מתקיים  $(T_P A, B) = (A, T_{P^*} B)$ .  
אכן, יהיו  $A, B$  מטריצות ונקבל:

$$\begin{aligned} (T_P A, B) &\stackrel{\text{הגדרה}}{=} \text{tr}(B^* P^{-1} A P) \\ (A, T_{P^*} B) &\stackrel{\text{הגדרה}}{=} \text{tr}(((P^*)^{-1} B P^*)^* A) \stackrel{2.1.4}{=} \text{tr}(P B^* P^{-1} A) \stackrel{*}{=} \text{tr}(B^* P^{-1} A P) = (T_P A, B) \end{aligned}$$

נימוק ל(\*): לפי לינאריות,  $\text{tr}(CD) = \text{tr}(DC)$ .

#### סעיף ב

איברי הבסיס הסטנדרטי הם  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
כידוע מסעיף א,  $(T_P)^* = T_{P^*}$ . המטריצה  $P^* = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$   
נחשב את המטריצה ההופכית  $(P^*)^{-1}$ :

$$\begin{aligned} (P^* | I) &= \left( \begin{array}{cc|cc} -i & -1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow iR_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -i & i & 0 \\ 1 & i & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -i & i & 0 \\ 0 & 2i & -i & 1 \end{array} \right) \\ &\dots \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}iR_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -i & i & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + iR_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{array} \right) = (I | (P^*)^{-1}) \end{aligned}$$

נחשב את תמונות ההעתקה  $T_{P^*}$  עבור איברי הבסיס הסטנדרטי.

$$\begin{aligned} (T_{P^*})E_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ (T_{P^*})E_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}i \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \\ (T_{P^*})E_{21} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ -\frac{1}{2}i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix} \\ (T_{P^*})E_{22} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}i \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן נקבל:

$$[T_{P^*}]_E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ -i & -1 & -1 & i \\ i & -1 & -1 & -i \\ 1 & -i & i & 1 \end{pmatrix}$$

## שאלה 2

נשים לב כי:

$$U^* = (P + iQ)^* \stackrel{2.1.4}{=} P^t - iQ^t \qquad D^t = \begin{pmatrix} P^t & Q^t \\ -Q^t & P^t \end{pmatrix}$$

### סעיף א

נניח כי  $U = U^*$ , כלומר  $P + iQ = P^t - iQ^t$ .  
נשווה חלק ממשי וחלק מדומה. מקבלים  $P = P^t$ ,  $Q = -Q^t$ , ולכן:

$$D^t = \begin{pmatrix} P^t & Q^t \\ -Q^t & P^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} = D$$

ובכך השלמנו את ההוכחה.

### סעיף ב

נניח כי  $U$  אוניטרית. כלומר:

$$I = U \cdot U^* = (P + iQ)(P^t - iQ^t) \stackrel{\text{פילג}}{=} PP^t - iPQ^t + iQP^t + QQ^t = (PP^t + QQ^t) + i(QP^t - PQ^t)$$

נשווה חלק ממשי וחלק מדומה ונקבל  $PP^t + QQ^t = I$ ,  $QP^t - PQ^t = 0$ . לכן:

$$D \cdot D^t = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^t & Q^t \\ -Q^t & P^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PP^t + QQ^t & PQ^t - QP^t \\ QP^t - PQ^t & QQ^t + PP^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & O_{n \times n} \\ O_{n \times n} & I_{n \times n} \end{pmatrix} = I_{2n \times 2n}$$

ולכן  $D$  אורתוגונלית.



## שאלה 4

ראשית:

$$H^* = (I - 2ww^*)^* \stackrel{2.1.4}{=} I - 2(w^*)^* w^* = I - 2ww^* = H$$

$$HH^* = (I - 2ww^*)(I - 2ww^*) = I - 4ww^* + 4(ww^*)^2$$

נדרוש  $I = HH^*$ . נקבל  $0 = 4(ww^*)^2 - 4ww^* = 0$  ולכן  $ww^* = (ww^*)^2$ . נשים לב כי:

$$(ww^*)^2 = (ww^*)(ww^*) = w(w^*w)w^* = w||w||^2w^* = ||w||^2ww^*$$

נציב את שתי המסקנות האחרונות שלנו ביחד, ונקבל  $ww^* = ||w||^2ww^*$ , כלומר  $||w||^2 = 1$  ולכן  $||w|| = 1$  מתכונת החיוביות.

מצאנו תנאי הכרחי עבור  $w$ : אם  $H$  אוניטרית, אז  $||w|| = 1$ . נוכיח כי זהו תנאי מספיק. עבור  $||w|| = 1$ ,

$$HH^* = I - 4ww^* + 4(ww^*)^2 = I - 4ww^* + 4||w||^2ww^* \stackrel{||w||=1}{=} I$$

נוכיח את תכונת השיקוף.

$$Hw = (I - 2ww^*)w = Iw - 2ww^*w = w - 2||w||^2w = -w$$

יהא  $v \in w^\perp$ . אז  $0 = w^*v = \langle v, w \rangle$ , ומקבלים:

$$Hv = (I - 2ww^*)v = Iv - 2ww^*v = v - 2w \cdot 0 = v$$

## שאלה 5

נסמן  $U = \text{Sp}(w_1, w_2)$ . ברור כי  $w_1, w_2$  בסיס אורתונורמלי ל- $U$ .  
ההעתקה  $P_U(v) = (v, w_1)w_1 + (v, w_2)w_2$  היא ההיטל האורתונוגלי של  $v$  על  $U$  לכל  $v \in V$  על פי 1.5.6.  
אז ההעתקה  $T$  שהגדירו היא אינה אלא  $T = I - 2P_U$ .

### סעיף א

נראה כי  $T$  צמודה לעצמה:

$$T^* = (I - 2P_U)^* \stackrel{2.1.4}{=} I^* - 2P_U^* \stackrel{\text{דוגמה 2.2}}{=} I - 2P_U = T$$

אוניטריות: יהא  $v \in V$ , אז קיימים  $u \in U, u' \in U^\perp$  כך ש  $v = u + u'$ . נקבל:

$$P_U^2(v) = P_U(P_U(v)) \stackrel{\text{הגדרה}}{=} P_U(u) \stackrel{\text{הגדרה}}{=} u = P_U(v)$$

מכאן נקבל  $P_U^2 = P_U$ . אי-לכך,

$$TT^* = (I - 2P_U)(I - 2P_U) \stackrel{\text{פילוג}}{=} I - 4P_U + 4P_U^2 \stackrel{P_U^2=P_U}{=} I$$

ולכן  $T$  אוניטרית לפי 2.1.1.

### סעיף ב

נשים לב כי:

$$Tw_1 = (I - 2P_U)w_1 = w_1 - 2w_1 = -w_1$$

קיבלנו ש  $\lambda = -1$  ע"ע של  $T$ , ולכן לפי שאלה 2.4.2 ב נקבל ש  $T$  אינה אי-שלילית.