

מטלת מנחה 13 - אלגברה לינארית 2

328197462

28/04/2023

שאלה 1

לאורך שאלה זו נשתמש בתכונות הבאות של תבנית ההעתקה: $\text{tr}(A^t) = \text{tr } A$ וכן $\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$.

סעיף א

נוכיח כי f סימטרית אם ורק אם M סימטרית.
כיוון ראשון: נניח כי M סימטרית ונוכיח כי f סימטרית. לכל $A, B \in V$ נקבל אם כן:

$$f(A, B) = \text{tr}(A^t MB)$$

$$f(B, A) = \text{tr}(B^t MA) = \text{tr}((B^t MA)^t) = \text{tr}(A^t M^t B) \stackrel{M^t=M}{=} \text{tr}(A^t MB) = f(A, B)$$

כיוון שני: נניח כי f סימטרית. בפרט נבחר $A = I, B = (M - M^t)^t$ ונקבל $f(A, B) = f(B, A)$

$$f(A, B) = \text{tr}(I^t M(M - M^t)^t) = \text{tr}(M(M - M^t)^t)$$

$$f(B, A) \stackrel{\text{פיתוח לעיל}}{=} \text{tr}(I^t M^t(M - M^t)^t) = \text{tr}(M^t(M - M^t)^t)$$

על פי השוויון, נסיק $f(A, B) - f(B, A) = 0$ ולכן:

$$f(A, B) - f(B, A) = \text{tr}(M(M - M^t)^t) - \text{tr}(M^t(M - M^t)^t) = \text{tr}((M - M^t)(M - M^t)^t) = \|M - M^t\|^2$$

ומתכונת החיוביות של המכפלה הפנימית, השוויון $\|M - M^t\| = 0$ גורר $M - M^t = 0$ ולכן $M = M^t$.

סעיף ב

נסמן את הבסיס הסטנדרטי של V ב $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, וכן נסמן $M = [m_{ij}]$.
נשים לב כי $(E_{ij})^t = E_{ji}$. נרצה לחשב בצורה כללית כל אחת מ-16 המכפלות.

סעיף ג

ניזכר בטענה חשובה מלינארית 1: מרחב המטריצות הממשיות מסדר $n \times n$ הוא סכום ישר של מרחב המטריצות הסימטריות עם מרחב המטריצות האנטיסימטריות מאותו סדר. לכן, קיימות יחידות M_1 סימטרית ו M_2 אנטיסימטרית כך ש $M_1 + M_2 = M$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \text{ ולכן ניקח } M = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

הוכחנו כי $f_1(A, B) = \text{tr}(A^t M_1 B)$ תבנית סימטרית. נוכיח באותו האופן כי $f_2(A, B) = \text{tr}(A^t M_2 B)$ אנטיסימטרית:

$$f_2(B, A) = \text{tr}(B^t M_2 A) = \text{tr}((B^t M_2 A)^t) = \text{tr}(A^t M_2^t B) = -\text{tr}(A^t M_2 B) = -f_2(A, B)$$

ומקבלים:

$$\begin{aligned} f(A, B) &= \text{tr}(A^t MB) = \text{tr}(A^t (M_1 + M_2)B) = \text{tr}(A^t M_1 B + A^t M_2 B) = \\ &= \text{tr}(A^t M_1 B) + \text{tr}(A^t M_2 B) = f_1(A, B) + f_2(A, B) \end{aligned}$$

שאלה 2

כיוון ראשון: נניח כי f ניתנת להצגה כמכפלה של שתי תבניות לינאריות, ונוכיח כי $\rho(f) = 1$.
יהא אפוא $(w) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ בסיס ל- V עבורו f מקבלת את הצורה הנתונה. נמצא את $[f]_{(w)}$.
לכל j , i מקבלים $[w_j]_{(w)} = e_j$, $[w_i]_{(w)} = e_i$. לכן:

$$f(w_i, w_j) = (b_1 \cdot 0 + \dots + b_i \cdot 1 + \dots + b_n \cdot 0)(c_1 \cdot 0 + \dots + c_j \cdot 1 + \dots + c_n \cdot 0) = b_i c_j$$

ומקבלים $[f]_{(w)} = [b_i c_j]_{ij}$.
נסמן $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. שורות המטריצה $[f]_{(w)}$ הם כולם כפל בסקלר של וקטור זה. לכן, מרחב השורות של $[f]_{(w)}$ מוכל ב- $\text{Sp}(\{c\})$, ונקבל $\rho([f]_{(w)}) \leq \text{Sp}(\{c\}) \leq 1$.
מנגד, מהנתון $f \neq 0$ נסיק $\rho(f) > 0$, וקיבלנו $\rho(f) = 1$.

כיוון שני: נניח כי $\rho(f) = 1$ ונוכיח כי f ניתנת להצגה כמכפלת שתי תבניות לינאריות.
יהא (w) בסיס כלשהו של V . אז המטריצה $[f]_{(w)}$ היא מדרגה 1 על פי 5.1.4.
תהא אם כן $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in F^n$ שורה כלשהי ב- $[f]_{(w)}$ שאינה אפס. בהכרח קיימת שורה כזו, כי דרגת המטריצה שונה מאפס.
היות ודרגת המטריצה היא 1, השורה i של המטריצה היא בהכרח כפל בסקלר b_i (יכול להיות אפס) של c .
לכל $x, y \in V$ נקבל:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [x]_{(w)}^t [f]_{(w)} [y]_{(w)} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 & \dots & b_1 c_n \\ b_2 c_1 & b_2 c_2 & \dots & b_2 c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n c_1 & b_n c_2 & \dots & b_n c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \sum_{j=1}^n b_i c_j y_j) = \sum_{i=1}^n b_i x_i \cdot \sum_{j=1}^n c_j y_j \end{aligned}$$

ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 3

סעיף א

נוכיח לפי 4.1.5. התבנית f נקבעת ע"י הפולינום הבילינארי:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 4x_2 y_2 = f((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

יתר על כך, $[f]_E$ סימטרית (E הוא הבסיס הסטנדרטי ל \mathbb{R}^2) ולכן f סימטרית על פי 4.2.2 והתבנית הריבועית המוסמכת ל f תהיה:

$$q((x_1, x_2)) = f((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + 4x_1 x_2 + 4x_2^2$$

נמצא ייצוג אלכסוני ל q ול f על פי שיטת לגראנז'. מקבלים באופן מיידי:

$$q((x_1, x_2)) = 1 \cdot (x_1 + 2x_2)^2 + 0 \cdot x_2^2$$

אם כן, עלינו למצוא בסיס (w') כך שלכל $v \in \mathbb{R}^2$, $[v]_{w'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [v]_E$.
אם כן, עלינו למצוא בסיס (w') כך שלכל $v \in \mathbb{R}^2$, $[v]_{w'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [v]_E$.

נקבל שמטריצת המעבר $M_{(w') \rightarrow E}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, וההופכית לה $M_{E \rightarrow (w')} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ מטריצת המעבר מ E ל (w') .

מכאן מקבלים $[f]_{(w')} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו $(w') = ((1, 0), (-2, 1))$.

סעיף ב

נבדוק באופן ישיר על פי משפט 4.5.1. מטריצת המעבר $M_{E \rightarrow (w')} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ומקבלים:

$$[q]_{(w')} = M^t [q]_E M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

נפתור ביחד את סעיפים א + ב על פי טכניקת החפיפה האלמנטרית. ראשית, עבור הבסיס הסטנדרטי E , מקבלים:

$$[q]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ואז:

$$([q]_E | I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[C_1 \rightarrow C_1 - \frac{1}{2}C_2]{R_1 \rightarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2}$$

שאלה 5

סעיף א

תהא $q \neq 0$ תבנית ריבועית שממד מרחב המקור שלה V הוא לכל הפחות 2 כפי שנתון. נסמן $\dim V = n$. היות q תבנית ריבועית, קיים בסיס כלשהו $(w) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ למרחב V כך ש $[q]_{(w)}$ מטריצה אלכסונית. נסמן את הסקלארים באלכסון המטריצה $[q]_{(w)}$ ב $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. מקבלים שלכל $v \in V$, כאשר $[v]_{(w)} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^t$:

$$q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

כעת, נחלק למקרים.

- אילו קיים $\lambda_i = 0$ כלשהו, אז מקבלים עבור $w_i \neq 0$ כי:

$$q(w_i) = \lambda_1 \cdot 0^2 + \dots + \lambda_i \cdot 1^2 + \dots + \lambda_n \cdot 0^2 = \lambda_i = 0$$

- אחרת, אילו אין סקלאר λ_i השווה לאפס, אז בפרט $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ (קיומם מובטח בוודאות כי $n \geq 2$). נבחר אפוא $v = iw_1 + \sqrt{\lambda_1/\lambda_2}w_2 \neq 0$. מקבלים $[v]_{(w)} = (i \ \sqrt{\lambda_1/\lambda_2} \ 0 \ \dots \ 0)^t$ ולכן:

$$q(v) = \lambda_1 \cdot i^2 + \lambda_2 \cdot \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right)^2 + \dots + \lambda_i \cdot 0^2 + \dots + \lambda_n \cdot 0^2 = -\lambda_1 + \lambda_2 \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0$$

בשני המקרים מצאנו $v \neq 0$ כך ש $q(v) = 0$ והטענה נכונה.

סעיף ב

הטענה לא נכונה אילו מרחב המקור V היה מעל \mathbb{R} ושדה הטווח היה \mathbb{R} . ניקח למשל $V = \mathbb{R}^2$ ו q לפי הבסיס הסנדרטי תהא $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = \|(x_1, x_2)\|^2$. מתכונת החיוביות של המכפלה הפנימית, $q(x_1, x_2) = \|(x_1, x_2)\|^2 = 0$ אם ורק אם $(x_1, x_2) = 0$, ולכן לא קיים $v \neq 0$ כך ש $q(v) = 0$.