מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

31/01/2023

שאלה 1

סעיף א1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

כי מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)}{x^2+y^2} = [t=2x^2+2y^2\to 0^+] = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t/2} = 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 2$$

וכן, לפי כלל הסנדוויץ':

$$0 \le \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = |y|\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} \le |y|\cdot\frac{y^2}{y^2} = |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

ולכן $0 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{y^3}{x^2+y^2}$. לסיכום נקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)+y^3}{x^2+y^2} = 2+0 = 2$$

סעיף א2

$$0 \le \left|x\arctan\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)\right| = |x|\left|\arctan\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)\right| \le |x|\cdot\frac{\pi}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} 0\cdot\frac{\pi}{2} = 0$$

ולכן מתקיים $0 \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} x\arctan\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)$

סעיף ב1

עלינו לבדוק האם קיים הגבול $1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(x,y)$.

נכתוב את הפונקציה בדרך נוחה יותר. לכל $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{e^{|x|+|y|}-1}{|x|+|y|}\cdot\ln(|xy|+e)$$

מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{|x|+|y|}-1}{|x|+|y|} = [t=|x|+|y|\to 0^+] = \lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{t} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{e^t}{1} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(|xy|+e) = [p=|xy|\to 0^+] = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(t+e) = \ln(e) = 1$$

ולכן $1\cdot 1 = 1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(x,y)$ והפונקציה רציפה.

סעיף ב2

הפונקציה לא רציפה בנקודה, כי לא מתקיים הגבול $1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} g(x,y)$.

ניקח למשל $P_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$, ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty} g(P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{2}{n^4}} = 0$$

לכן, לפי היינה, לא מתקיים $1 = g(0,0) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} g(x,y)$ והפונקציה לא רציפה בנקודה.