מטלת מנחה 14 - קורס 20245

שאלה 1

השאלה עוסקת בשלוש הטענות הנוגעות לפונקציה יוצרת מומנטום של סכום משתנים מקריים בלתי תלויים, ועל תוצאה שלה בנוגע לסכום משתנים מקריים נורמליים בלתי תלויים. נגדיר מספר משתנים מקריים הקשורים לשאלה:

נסמן ב $G_i \sim N(100,\ 10^2)$ את המשקל בגרמים של התפוח הירוק ה-i שיעל בחרה לכל $i\ =\ 1, 2, 3, 4, 5$,
ובאופן דומה יהא $R_i \sim N(150,\ 20^2)$ משקלו בגרמים של התפוח האדום ה i שיעל בחרה. על פי הנתונים, כל המשתנים המקריים $R_i,\ G_i$ בלתי-תלויים.

נגדיר משתנה מקרי נוסף $X'\ =\ \sum_{i=1}^{5} G_i\ +\ \sum_{i=1}^{5} R_i$ להיות המשקל **בגרמים** של שקית התפוחים של יעל. על פי תוצאה 4 מתוצאות המשפטים על פונקציה יוצרת מומנטים - סכום של משתנים נורמליים בלתי-תלויים הוא נורמלי בעצמו ומתקיים:

$$X'\ \sim\ N(\sum_{i=1}^{5} 100\ +\ \sum_{i=1}^{5} 150,\ \sum_{i=1}^{5} 10^2\ +\ \sum_{i=1}^{5} 20^2)\ =\ N(1250,\ 50^2)$$

כמו כן, הפונקציה יוצרת המומנטים של X' תהיה $M_{X'}(t)\ =\ e^{1250t+1250t^2}$.

המשתנה המקרי שהוגדר בשאלה X מסמל את משקל השקית בק"ג ולכן מקיים $X\ =\ \frac{1}{1000}X'$. בנוסף, נגדיר משתנה מקרי $Y\ =\ 6X$ שיסמל את מחיר השקית בשקלים.
משהגדרנו משתנים מקריים אלה, נחשב:

א. נקבל, לפי רציפות המשתנה X', כי:

$$P\{X\ <\ 1.3\}\ =\ P\{X'\ <\ 1300\}\}\ =\ P\{X'\ \leq\ 1300\}\ ==\ P\{X'\ -\ 1250\ \leq\ 50\}\ =$$
$$=\ P\{\frac{X'-1250}{50}\ \leq\ 1\}\ =\ \Phi(1)\ =\ 0.8413$$

ב. על פי טענה 1 בטענות של פונקציה יוצרת מומנטים, נקבל:

$$M_X(t)\ =\ M_{0.001X'}(t)\ =\ M_{X'}(0.001t)\ =\ e^{1.25t+0.00125t^2}$$

ג. ובאופן דומה:

$$M_Y(t)\ =\ M_{6X}(t)\ =\ M_X(6t)\ =\ e^{7.5t+0.045t^2}$$

שאלה 2

השאלה עוסקת בסכום מקרי של משתנים גיאומטריים. נגדיר משתנים מקריים על מנת לפתור את השאלה.

ראשית, יהא X מספר הכדור שהוצא. על פי הנתון, $X \sim U[1, 10]$ שכן הכדור הוצא באקראי. לכן מתקיים $E[X] = 5.5,\ Var(X) = \frac{99}{12} = 8.25$.

שנית, לכל i טבעי יהא $P_i \sim Geo(0.5)$ מספר ההטלות שהאדם ה i הטיל עד לקבלת H בפעם הראשונה. על פי תכונות ההתפלגות הגיאומטרית, $E[P_i] = 2,\ Var(P_i) = \frac{0.5}{0.25} = 2$.

כעת, נסמן ב $Y = \sum_{i=1}^{X} P_i$ את מספר ההטלות הכולל שנעשה בניסוי. המשתנה המקרי Y הוא סכום מקרי של משתנים שווי התפלגות ובלתי תלויים, ולפי תכונות הסכום המקרי נקבל:

א. נחשב:

$$E[Y] = E[X] \cdot E[P_i] = 5.5 \cdot 2 = 11$$

ב. כמו כן,

$$Var(Y) = E[X]\, Var(P_i) + (E[P_i])^2\, Var(X) = 5.5 \cdot 2 + 2^2 \cdot 8.25 = 44$$

שאלה 3

השאלה עוסקת באינדיקטורים ובשימוש שלהם על מנת לחשב את ערכם של משתנים מקריים מורכבים. נגדיר על מנת לפתור את השאלה מספר משתנים מקריים:

לכל אחד מ-44 הקלפים בחפיסה שאינם מלך או מלכה, נגדיר אינדיקטור X_i שיסמן האם קלף מספר i, $1 \leq i \leq 44$, נחשף לפני שמונת הקלפים הרצויים.
נחשב: מספר האפשרויות לסדר של חשיפת תשעת הקלפים הוא !9, ומתוכן !8 האפשרויות בהן 8 המלכים והמלכות נחשפים לפני הקלף שלנו אינן "רצויות". נקבל:

$$P\{X_i = 1\} = \frac{9!-8!}{9!} = \frac{8!(9-1)}{9!} = \frac{8}{9}$$

ולכן לפי תכונות האינדיקטור, $E[X_i] = \frac{8}{9}$, $Var(X_i) = \frac{8}{81}$, וכן עבור 2 אינדיקטורים X_i, X_j נקבל באופן דומה:

$$P\{X_i = 1 \mid X_j = 1\} = \frac{9}{10}$$

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = P\{X_i = 1 \mid X_j = 1\} \cdot P\{X_j = 1\} = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$Cov(X_i, X_j) = \frac{4}{5} - \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{405}$$

נוסף על כך, נגדיר משתנה מקרי X המסמן את מספר הקלפים שיש להפוך בסך הכל, כולל קלפי המלך והמלכה, עד שמתגלים כל המלכים והמלכות. מתקיים:

$$X = 8 + \sum_{i=1}^{44} X_i$$

שכן נהפוך בדיוק את 8 קלפי המלכים והמלכות, נוסף על כל קלף שיש להפוך לפני חשיפת כולם.

נפתור:

א. על פי תכונות לינאריות התוחלת,

$$E[X] = E[8 + \sum_{i=1}^{44} X_i] = 8 + \sum_{i=1}^{44} E[X_i] = 8 + 44 \cdot \frac{8}{9} = 47.111$$

ב. על פי תכונות השונות:

$$Var(X) = Var(8 + \sum_{i=1}^{44} X_i) = \sum_{i=1}^{44} Var(X_i) + \sum_{1 \leq i,j \leq 44} Cov(X_i, X_j) =$$

$$44 \cdot \frac{8}{81} + 44 \cdot 43 \cdot \frac{4}{405} = 23.0321$$

שאלה 4

השאלה עוסקת ביישומו של אי-שוויון צ'בישב עבור משתנה מקרי בינומי.
יהא $X \sim Bin(50,\ 0.7)$ מספר הערבים בהם ערן צפה בטלוויזיה מתוך 50 ערבים.

על פי תכונות ההתפלגות הבינומית, $\mu = E[X] = 35,\ \sigma^2 = Var(X) = 10.5$ ומקבלים:

$$P\{27 \le X \le 43\} = P\{-8 \le X - 35 \le 8\} = P\{|X - \mu| \le 8\}$$

מאחר ו X משתנה בדיד, אי-השוויונות $|X - 35| \le 8$ ו- $|X - 35| < 9$ שקולים, והמאורע המשלים יהיה $P\{|X - \mu| \ge 9\}$.

על פי אי-שוויון צ'בישב נקבל:

$$P\{|X - \mu| \ge 9\} \le \frac{\sigma^2}{9^2} = \frac{10.5}{81} = \frac{7}{54} = 0.1296$$

ולכן:

$$P\{27 \le X \le 43\} = P\{|X - \mu| < 9\} = 1 - P\{|X - \mu| \ge 9\} \ge \frac{47}{54} = 0.870$$

שאלה 5

השאלה עוסקת בסכום מקרי של אינדיקטורים. נגדיר מספר משתנים מקריים על מנת לפתור את השאלה:

ראשית, יהא $N \sim U[1, 6]$ מספר הפרסומות המשודרות בטלוויזיה בתוכנית כלשהי בערב המדובר. על פי תכונות המשתנה המקרי המיוחד, $E[X] = 3.5,\ Var(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2.9167$.

שנית, עבור כל הטלה i (i מספר טבעי), יהא X_i אינדיקטור שערכו 1 אם תוצאת ההטלה ה i היה עץ, ו-0 אחרת. המטבע הוגן, ולכן $P\{X_i = 1\} = 0.5$. על פי תכונות האינדיקטור מתקיים $E[X_i] = 0.5\ ,\ Var(X_i) = 0.25$.

כעת, נגדיר משתנה מקרי $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ המסמל את מספר העצים שיוסי הטיל. משתנה זה הוא סכום מקרי של משתנים שווי התפלגות ובלתי תלויים. על פי תכונות הסכום המקרי, מתקיים:

$$E[X] = E[N] \cdot E[X_i] = 3.5 \cdot 0.5 = 1.75$$

$$Var(X) = E[N] \cdot Var(X_i) + (E[X_i])^2 \cdot Var(N) =$$

$$= 3.5 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot \frac{35}{12} = \frac{77}{48} = 1.604$$

לבסוף, נגדיר מ"מ Y המסמל את מספר הדקות שיוסי הלך על ההליכון בערב זה. על פי הנתונים מתקיים $Y = 4X$, ולכן על פי לינאריות התוחלת ותכונות השונות נקבל:

$$E[Y] = E[4X] = 4E[X] = 7$$

$$Var(Y) = Var(4X) = 4^2 Var(x) = 25.667$$

שאלה 6

השאלה עוסקת במשפט הגבול המרכזי של ההסתברות ובמציאת קירוב בעזרתה.

נמצא את התוחלת והשונות של המשתנים X_i. פונקציה יוצרת המומנטום של משתנה בינומי שלילי עם פרמטרים 2 ו- $\frac{1}{5}$ תהיה:

$$M(t) = (\frac{0.2e^t}{1-0.8e^t})^2 = (\frac{e^t}{5-4e^t})^2 = M_X(t)$$

היות ופונקציה יוצרת מומנטים קובעת ביחידות התפלגות, נסיק כי $X_i \sim NB(2,\ 0.2)$ לכל $i = 1, 2, ..., 200$
ומכאן נסיק $\mu = E[X_i] = \frac{2}{0.2} = 10,\ \sigma^2 = Var(X_i) = \frac{2\cdot 0.8}{0.2^2} = 40$.

על פי משפט הגבול המרכזי, הסכום $\sum_{i=1}^{200} X_i$ מתפלג בקירוב כמו $Z \sim N(200\mu,\ 200\sigma^2)$. נמצא קירוב בעזרת הערכת ההסתברות עבור Z ותיקון רציפות:

$$P\{1,910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2,050\} \approx P\{1,909.5 \le Z \le 2049.5\} =$$

$$= P\{-90.5 \le Z - 2000 \le 49.5\} = P\{-1.01182 \le \frac{Z-2000}{\sqrt{8000}} \le 0.553427\} =$$

$$= \Phi(0.553527) - \Phi(-1.01182) = \Phi(0.553527) + \Phi(1.01182) - 1$$

נמצא את התמונות הדרושות בעזרת אינטרפולציה לינארית:

$$\Phi(0.553527) = \Phi(0.55) + \frac{0.003527}{0.01}[\Phi(0.56) - \Phi(0.55)] =$$

$$= 0.7088 + 0.3426 \cdot [0.7123 - 0.7088] = 0.709999$$

$$\Phi(1.01182) = \Phi(1.01) + \frac{0.00182}{0.01}[\Phi(1.02) - \Phi(1.01)] =$$

$$= 0.8438 + 0.182 \cdot [0.8461 - 0.8438] = 0.8442188$$

נקבל את הקירוב:

$$P\{1,910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2,050\} \approx 0.709999 + 0.8442188 - 1 = 0.55422$$

בדיקה: פונקציית יוצרת המומנטים של הסכום תהא $M_\Sigma(t) = (\frac{e^t}{5-4e^t})^{400}$ המתאימה להתפלגות $NB(400,\ 0.2)$. חישוב בעזרת מנוע מתמטי יניב:

$$P\{1,910 \le \sum_{i=1}^{200} X_i < 2,050\} = \sum_{i=1910}^{2049} \binom{i-1}{399} 0.8^{i-400} \cdot 0.2^{400} = 0.558391$$