

## מטלת מנחה 13

שאלה 1 – סעיף א

$$F(a, b, c, d) = \sum (5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

מאחר NEWI הוא תוצאת מכפלת סכומים, נפשט את הפונקציה לצורת מכפלת סכומים. ניצור מפה של הפונקציה ונסמן בכחול את התאים שערכם 1

| cd \ ab | 00      | 01      | 11      | 10      |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 00      | 0 0000  | 1 0001  | 3 0011  | 2 0010  |
| 01      | 4 0100  | 5 0101  | 7 0111  | 6 0110  |
| 11      | 12 1100 | 13 1101 | 15 1111 | 14 1110 |
| 10      | 8 1000  | 9 1001  | 11 1011 | 10 1010 |

לאחר שהקפנו אפסים, המפה תיראה כך:

| cd \ ab | 00      | 01      | 11      | 10      |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 00      | 0 0000  | 1 0001  | 3 0011  | 2 0010  |
| 01      | 4 0100  | 5 0101  | 7 0111  | 6 0110  |
| 11      | 12 1100 | 13 1101 | 15 1111 | 14 1110 |
| 10      | 8 1000  | 9 1001  | 11 1011 | 10 1010 |

| מכפלה  | ערך d | ערך c | ערך b | ערך a | ערכים במלבן |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| $a'b'$ | משתנה | משתנה | 0     | 0     | 0,1,3,2     |
| $a'd'$ | 0     | משתנה | משתנה | 0     | 0,2,4,6     |
| $b'c'$ | משתנה | 0     | 0     | משתנה | 0,1,8,9     |

$$F' = a'b' + a'd' + b'c'$$

לכן לפי דה-מורגן

$$F = (a + b)(a + d)(b + c)$$

$$= \text{NEW}(a + b, a + d, b, c)$$

נביע כל אחד מהערכים  $a + b, a + d$  בעזרת שער NEW.

$$a + b = 1 \cdot 1 \cdot (a + b) = \text{NEW}(1, 1, a, b)$$

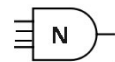
$$a + d = 1 \cdot 1 \cdot (a + d) = \text{NEW}(1, 1, a, d)$$

לכן

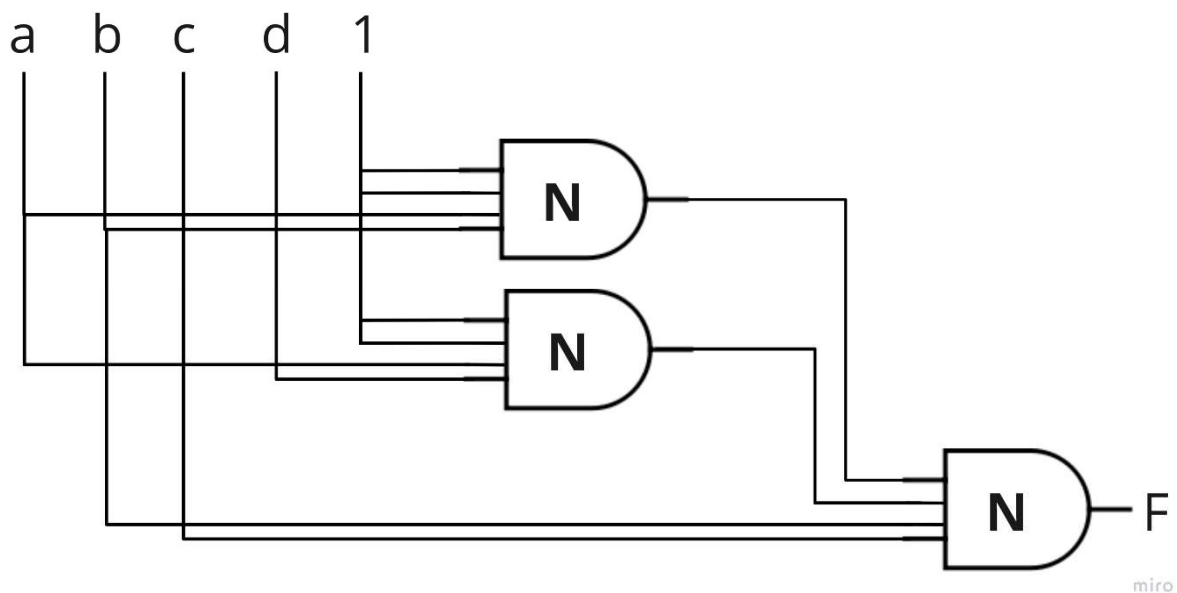
$$F = \text{NEW}(\text{NEW}(1, 1, a, b), \text{NEW}(1, 1, a, d), b, c)$$

הבענו את הפונקציה F בעזרת שלושה שערי NEW בדיוק.

המעגל, כאשר השער החדש NEW יסומן ב



יהיה:



## סעיף ב

שער NEW אינו אוניברסלי.

עם שכבת שערים אחת שלו עבור  $x$  כלשהו:

$$NEW(x, x, x, x) = x \cdot x \cdot (x + x) = x \cdot x = x.$$

לא קיבלנו שום דבר חדש, על כן השער אינו אוניברסלי.

גם אם נוסיף את הקבועים לשער, עדיין לא נקבל שער אוניברסלי: הפונקציה  $F(x) = x'$  אינה ניתנת למימוש ע"י שער NEW.

נניח כי קיימים  $a, b, c$  קבועים כלשהם שבהצבה כלשהי שלהם בשער NEW עם  $x$ , ערך היציאה יהיה  $x'$ .  
ההצבות האפשריות של  $x$  הן כאשר  $x$  במקום של  $x$  או  $y$  בשער (פעולת AND היא חילופית ולכן אין משמעות למיקום המדויק) או במיקום של  $w$  או  $z$  בשער (פעולת OR היא חילופית ולכן אין משמעות למיקום המדויק).

עבור ההצבה הראשונה:

$$NEW(a, x, b, c) = bx(a + c)$$

אז כאשר  $x = 0$ , ללא תלות בערכי  $a, b, c$ , ערך יציאת השער יהיה 0 ולכן אינו יכול להיות  $x'$ .

עבור ההצבה השנייה:

$$NEW(x, a, b, c) = ab(x + c)$$

כאשר אחד או יותר מערכי  $a$  ו- $b$  הוא 0, יציאת השער תהיה 0 ללא תלות בערך  $x$ . לכן  $a = b = 1$ .

אילו  $c = 1$ , אז יציאת השער תהיה 1 ללא תלות בערך  $x$ . לכן  $c = 0$ .

אילו  $x = 0$ , יציאת השער תהיה 0 ולכן השער לא יחזיר את תוצאת  $x'$ .

קיימת פונקציה שהשער לא יכול לייצג ולכן אינו אוניברסלי.

## שאלה 2

## שלבי פתרון הבעיה:

1. נמצא מהם הדרכים האפשריות מביתו של גוליבר לארמון מלך הגמדים.
2. נמצא את הפונקציה  $Roads$  המקבלת את ערכי החיישנים  $a, e$  ומחזירה 1 אם לא בכל המסלולים יש מספר אי-זוגי של גמדים, כלומר אם קיים מסלול בו מספר זוגי של גמדים.
3. נפשט את הפונקציה
4. נעצב מעגל צירופי כך שיכיל שער AND והכניסות אליו יהיו  $f$  ותוצאת הפונקציה  $Roads$  שפישטנו בסעיפים הקודמים.

## שלב 1

הדרכים האפשריות:

1.  $a \rightarrow b$
2.  $a \rightarrow g \rightarrow h$
3.  $h \rightarrow d$
4.  $b \rightarrow g \rightarrow d$

## שלב 2

במסלול בעל מספר זוגי של גמדים, יש מספר זוגי (0 או 2) חיישנים שערכם 1. לכן, האפשרויות עבור כל מסלול הן:

1.  $a'b' + ab$
2.  $a'c'e' + ace' + ac'e + a'ce$
3.  $d'e' + de$
4.  $b'c'd' + bcd' + bc'd + b'cd$

ולכן הפונקציה היא:

$$Roads = a'b' + ab + a'c'e' + ace' + ac'e + a'ce + d'e' + de + b'c'd' + bcd' + bc'd + b'cd$$

## שלב 3

נכין מפה של הפונקציה, כאשר המשבצות שערך 1 מסומנות באדום

| ab \ cde | 000         | 001         | 011         | 010         | 110         | 111         | 101         | 100         |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 00       | 00000<br>0  | 00001<br>1  | 00011<br>3  | 00010<br>2  | 00110<br>6  | 00111<br>7  | 00101<br>5  | 00100<br>4  |
| 01       | 01000<br>8  | 01001<br>9  | 01011<br>11 | 01010<br>10 | 01110<br>14 | 01111<br>15 | 01101<br>13 | 01100<br>12 |
| 11       | 11000<br>24 | 11001<br>25 | 11011<br>27 | 11010<br>26 | 11110<br>30 | 11111<br>31 | 11101<br>29 | 11100<br>28 |
| 10       | 10000<br>16 | 10001<br>17 | 10011<br>19 | 10010<br>18 | 10110<br>22 | 10111<br>23 | 10101<br>21 | 10100<br>20 |

miro

על מנת לחסוך שער במעגל, נעדיף לפשט את הפונקציה לצורת מכפלת סכומים, ולאחר מכן "לכפול" אותה ב- $f$  – זאת משום שבדרישות השאלה התבקשנו לעצב מעגל בו שני התנאים מתקיימים (יהיה שער AND בין כל התנאים) לא טרחתי להקיף אפסים, כי אין אף קבוצה של אפסים במעגל – אלא ארבע משבצות יחידות. נמצא את המכפלות שלהן.

| מכפלה      | e | d | c | b | a | המלבן |
|------------|---|---|---|---|---|-------|
| $a'bc'd'e$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 9     |
| $a'bcd'e'$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 14    |
| $ab'c'de'$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 18    |
| $ab'cd'e$  | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 21    |

$$Roads' = a'bc'd'e + a'bcd'e' + ab'c'de' + ab'cd'e$$

לכן לפי דה-מורגן

$$z = Roads \cdot f = (a + b' + c + d + e')(a + b' + c' + d' + e)(a' + b + c + d' + e)(a' + b + c' + d + e') \cdot f$$

# שלב 4

קל מאוד לבנות את המעגל כעת.

