# מטלת מנחה 15

## שאלה 1

תהי קבוצה $A$, $|A| = n$, פונקציה $f: A \to A$, ואיבר $a \in A$.

נוכיח כי:

**א. קיימים $1 \leq i < j \leq n + 1$ כך ש $f^i(a) = f^j(a)$**

נפעיל את עיקרון שובך היונים על מנת להוכיח טענה זו. בבעיה זו –

<u>השובכים:</u> איברי A, כלומר התמונות האפשריות של איבר כלשהו בA. יש $n$ שובכים כי $|A| = n$.

<u>היונים:</u> הפעלות של $f$. בבעיה זו יש $n + 1$ הפעלות, כי $i, j$ חסומים מלמעלה ע"י $n + 1$.

כך למשל $f(a)$ יחולק לשובך אחד, $f^2(a)$ לשובך כלשהו נוסף (אולי אותו אחד, ואולי לא), והלאה עד $f^{n+1}(a)$.

לפי עיקרון שובך היונים, קיים שובך אחד לפחות ובו $\left\lceil \frac{n+1}{n} \right\rceil = 2$ יונים. לפי ההגדרות שלנו, משמעות הדבר היא שקיים $t \in A$ כלשהו ושני טבעיים <u>שונים</u> $i, j$ בין 1 ו $n + 1$, כך ש $f^i(a) = f^j(a) = t$.

אין משמעות לסדר האיברים (ניתן לבחור הפוך את $i$ ו$j$), לכן נקבע כי $j > i$.
לכן קיימים $1 \leq i < j \leq n + 1$ כך ש $f^i(a) = f^j(a)$.

**ב. אם $f$ חח"ע, אז קיים $k > 1$ כך ש $f^k(a) = a$**

לפי סעיף א, קיימים $1 \leq i < j \leq n + 1$ כך ש $f^j(a) = f^i(a)$.

כלומר, $f\left(f^{j-1}(a)\right) = f\left(f^{i-1}(a)\right)$.
לפי ההנחה $f$ חח"ע, ולכן לפי הגדרת חח"ע $f^{j-1}(a) = f^{i-1}(a)$ .

נחזור על תהליך זה עוד $i - 2$ פעמים.
נקבל כי $f^{j-i+1}(a) = f\left(f^{j-i}(a)\right) = f(a)$. (הביטויים מוגדרים כי $i < j$)
מהיותה של $f$ חח"ע נקבל כי $f^{j-i}(a) = a$, לכן קיים $k$ כך ש $f^k(a) = a$.

כמו כן, ניתן לקבוע בוודאות כי $k > 1$, כי $j > i \Rightarrow j - i > 0$. אנחנו מתעסקים במספרים טבעיים בלבד, לכן $j - i \geq 1$. אילו $j - i = 1$, אז מתקיים $f(a) = a$ ולכן גם $f^2(a) = f(f(a)) = f(a) = a$ והטענה נכונה עבור $k = 2 > 1$.בכל מקרה אחר, הטענה נכונה עבור $k = j - i > 1$.

01.09.2021

## שאלה 2

על מנת שמספר יתחלק ב-3 (כלומר – ייספר ב$a_n$ כלשהו), סכום הספרות שלו צריך להתחלק ב-3.

על מנת שמספר ייספר ב $b_n$ או ב$c_n$ כלשהם, שארית החלוקה של סכום הספרות שלו ב-3 צריכה להיות 1 או 2, בהתאמה.

נמצא את:

**א. $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$**

נמנה את המספרים החד-ספרתיים שספרותיהם 1 ו-2 בלבד. אלו הם 1 ו-2. שארית החלוקה של 1 ב-3 היא 1, לכן 1 נספר ב $b_1$. שארית החלוקה של 2 ב-3 היא 2, לכן 2 נספר ב $c_1$. נציין כי לא ספרנו אף איבר ב $a_1$. לכן:

$$a_1 = |\phi| = 0, b_1 = |\{1\}| = 1, c_1 = |\{2\}| = 1.$$

נמנה את כל המספרים הדו-ספרתיים שספרותיהם 1 ו-2 בלבד. אלו הם 11,12,21,22.

$3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ (שארית החלוקה היא 2), לכן 11 נספר ב $c_2$.

$4 = \frac{12}{3}$ (שארית החלוקה היא 0), לכן 12 נספר ב $a_2$.

$7 = \frac{21}{3}$ (שארית החלוקה היא 0), לכן 21 נספר ב$a_2$.

$7\frac{1}{3} = \frac{22}{3}$ (שארית החלוקה היא 1), לכן 22 נספר ב $b_2$.

לכן –

$$a_2 = |\{12,21\}| = 2, b_2 = |\{22\}| = 1, c_2 = |\{11\}| = 1$$

לכל $n \geq 2$, נביא את:

**ב. (1) $\mathrm{a_n}$ באמצעות $b_{n-1}, c_{n-1}$.**

עבור כל מספר $n$-ספרתי שהספרה המשמעותית ביותר שלו (הספרה השמאלית ביותר) היא 1, על מנת שהוא ייספר ב$a_n$ סכום הספרות שלו צריך להתחלק ב-3.

כלומר – שארית החלוקה של סכום שאר הספרות ב-3 צריכה להיות 2, ואם נוסיף לשאר הספרות את הספרה 1 משמאל נקבל סכום ספרות שמתחלק ב-3. מספר המספרים ה $(n-1)$-ספרתיים שסכום ספרותיהם יוצר שארית חלוקה של 2 בחלוקה ב-3, הוא $c_{n-1}$. לכל מספר כזה, נוסיף את הספרה 1 משמאל ונקבל מספר המתחלק ב-3.

עבור כל שאר המספרים ה$n$-ספרתיים, הספרה המשמעותית ביותר שלהם היא 2. על מנת שהם ייספרו ב$a_n$, סכום שאר הספרות צריך ליצור שארית חלוקה של 1 בחלוקה ב-3, כך שכאשר נוסיף לסכום את הספרה 2 יתקבל סכום המתחלק ב-3. מספר המספרים ה $(n-1)$-ספרתיים שסכום ספרותיהם יוצר שארית חלוקה של 1 בחלוקה ב-3 הוא $b_{n-1}$. לכל מספר כזה, אם נוסיף לו משמאל את הספרה 2 נקבל מספר המתחלק ב-3.

לכן, לפי עיקרון החיבור –

$$a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$

**(2) $b_n$ באמצעות $a_{n-1}, c_{n-1}$.**

באופן דומה לדרך שבה מצאנו את $a_n$, נסכום את:

1. כמות המספרים שסכום $n-1$ הספרות האחרונות שלהם (משמאל) מתחלק ב-3, והספרה הראשונה שלהם היא 1. יש $a_{n-1}$ מספרים כאלה.
2. כמות המספרים שסכום $n-1$ הספרות האחרונות שלהם (משמאל) יוצר שארית חלוקה של 2 בחלוקה עם 3, והספרה הראשונה שלהם היא 2. יש $c_{n-1}$ מספרים כאלה.

לכן –

$$b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$$

**(3) $c_n$ באמצעות $a_{n-1}, b_{n-1}$.**

באופן דומה לדרך שבה מצאנו את $a_n, b_n$, נסכום את:

1. כמות המספרים שסכום $(n-1)$ הספרות האחרונות שלהם (משמאל) יוצר שארית חלוקה של 1 בחלוקה ב-3, והספרה הראשונה שלהם היא 1. יש $b_{n-1}$ מספרים כאלה.
2. כמות המספרים שסכום $(n-1)$ הספרות האחרונות שלהם (משמאל) מתחלק ב-3, והספרה הראשונה שלהם היא 2. יש $a_{n-1}$ מספרים כאלה.

לכן –

$$c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

**ג. (1) נוסחת נסיגה ל$a_n$**

בכלל שהוכחנו בסעיף ב1, נציב $n+1$ במקום $n$ ונקבל $a_{n+1} = b_n + c_n$

נציב במחוברים באגף ימין את הכללים שהוכחנו בסעיפים ב2 וב3, ונקבל:

$$a_{n+1} = a_{n-1} + c_{n-1} + a_{n-1} + b_{n-1} = b_{n-1} + c_{n-1} + 2a_{n-1}$$

במקום שני המחוברים הראשונים באגף ימין, נציב את $a_n$ לפי הכלל בסעיף ב1.

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$$

נציב $n-1$ בכלל זה (הדבר מחייב $n \geq 3$, כי הכללים נכונים רק עבור $n \geq 2$):

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ לכל $n \geq 3$.

**(2) נוסחת נסיגה ל $b_n$**

באופן דומה,

$$b_{n+1} = a_n + c_n = 2b_{n-1} + c_{n-1} + a_{n-1} = 2b_{n-1} + b_n$$

ולכן עבור $n \geq 3$:

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$$

**(3) נוסחת נסיגה ל $c_n$**

באופן דומה,

$$c_{n+1} = a_n + b_n = 2c_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1} = 2c_{n-1} + c_n$$

ולכן עבור $n \geq 3$:

$$c_n = c_{n-1} + 2c_{n-2}$$

בהינתן שלושה יחסי נסיגה בעלי משוואה אופיינית זהה, נפתור פעם אחת את המשוואה האופיינית ונמצא נוסחה מפורשת עבור שלוש הסדרות:

**ד. (1) נפתור את המשוואה האופיינית**

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$$

**(2) נמצא נוסחה מפורשת עבור $a_n$:**

נציב בתבנית:

$$a_n = A2^n + B(-1)^n$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$a_1 = 2A - B = 0 \Rightarrow B = 2A$$

$$a_2 = 4A + B = 4A + 2A = 6A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

בהינתן $A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{3}$:

$$a_n = \frac{2^n}{3} + \frac{2 \cdot (-1)^n}{3} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$$

נבדוק עבור $a_3 = a_2 + 2a_1 = 2 + 0 = 2$:

$$a_3 = \frac{8-2}{3} = 2$$

**(3) נמצא נוסחאות מפורשות עבור $b_n$ ו-$c_n$, להם אותם תנאים תחיליים**

נפתור עבור $b_n$, אך הפתרון זהה לחלוטין עבור $c_n$. נציב בתבנית את שורשי המשוואה האופיינית:

$$b_n = A2^n + B(-1)^n$$

נציב במערכת המשוואות:

$$b_1 = 2A - B = 1 \Rightarrow B = 2A - 1$$

$$b_2 = 4A + B = 4A + 2A - 1 = 6A - 1 = 1 \Rightarrow 6A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

בהינתן $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}$:

$$b_n=\frac{2^n}{3}-\frac{(-1)^n}{3}=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

נבדוק עבור $b_3=b_2+2b_1=1+2=3$:

$$b_3=\frac{8-(-1)}{3}=3$$

באופן דומה,

$$c_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

נמצא את כל המספרים ה-$n$-ספרתיים בעלי הספרות 1 ו-2. בכל אחת מן $n$ הספרות, יש 2 אפשרויות להצבת ספרה – 1 או 2. זוהי חליפה עם חזרות של $n$ איברים מתוך 2 ולכן מספר האפשרויות $2^n$.

**ה. נוודא $a_n+b_n+c_n=2^n$**

$$a_n+b_n+c_n=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}+\frac{2^n-(-1)^n}{3}+\frac{2^n-(-1)^n}{3}=$$

$$=\frac{2^n+2(-1)^n+2^n-(-1)^n+2^n-(-1)^n}{3}=\frac{3\cdot 2^n+0\cdot(-1)^n}{3}=\frac{3}{3}\cdot 2^n=2^n$$

01.09.2021

# שאלה 3

נתונה המשוואה הבאה:

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 20$$

נמצא את:

**א. הפונקציה היוצרת עבור מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה**

ראשית, נרצה להחליף את כל הנעלמים עם מקדם בנעלמים ללא מקדם. נסמן:

$y_i = 3x_i$ עבור $i = 1,3,5,7$. $y_i$ מתחלק ב-3.
$y_i = 2x_i$ עבור $i = 2,4,6$. $y_i$ זוגי.

פתרון הבעיה שקול לפתרון המשוואה $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 20$.

לכן, נכתוב את הפונקציה היוצרת לפתרונות משוואה זו, תוך התחשבות בתנאים של $y_i$ לכל $1 \le i \le 7$:

$$f(x) = (1 + x^3 + x^6 + \cdots)^4(1 + x^2 + x^4 + \cdots)^3$$

כאשר ארבעת הגורמים הראשונים הם הטורים המייצגים את $y_i$ כאשר $1 = 1,3,5,7$, ושלושת הגורמים הנותרים הם הטורים המייצגים את $i$ כאשר $i = 2,4,6$.

ניעזר בנוסחה לסכום טור אינסופי בחזקת $n$, כאשר בפעם הראשונה נציב $x = x^3$ ובפעם השנייה $x = x^2$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D(4,k)x^{3k} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} D(3,i)x^{2i}$$

**ב. מספר הפתרונות של המשוואה**

מספר הפתרונות של המשוואה הוא המקדם של $x^{20}$ בפונקציה היוצרת, שאיברה הכללי:

$$D(4,k)x^{3k} \cdot D(3,i)x^{2i} = D(4,k) \cdot D(3,i) \cdot x^{3k+2i}$$

נדרוש $3k + 2i = 20$. טבלת ערכי $k$ ו-$i$ האפשריים:

| i | k |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 4 | 4 |
| 7 | 2 |
| 10 | 0 |

לכן, המקדם של $x^{20}$ הוא:

$$D(4,6)D(3,1) + D(4,4)D(3,4) + D(4,2)D(3,7) + D(4,0)D(3,10) =$$

$$= \binom{9}{6}\binom{3}{1} + \binom{7}{4}\binom{6}{4} + \binom{5}{2}\binom{9}{7} + \binom{3}{0}\binom{12}{10} =$$

$$= 84 \cdot 3 + 35 \cdot 15 + 10 \cdot 36 + 1 \cdot 66 = 1203.$$

**ג. מספר הפתרונות של המשוואה, כאשר לפחות אחד מהנעלמים אי-זוגי.**

פתרון הבעיה שקול לפתרון המשלים של מספר הפתרונות של המשוואה, כאשר כל הנעלמים זוגיים, ביחס ליקום, שהוא מספר הפתרונות הכולל של המשוואה. $|U| = 1203$.

אילו כל הפתרונות זוגיים, אז לכל $1 \leq i \leq 7$ קיים $q_i \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $x_i = 2q_i$.

ולכן מתקיים השוויון $2 \cdot 3q_1 + 2 \cdot 2q_2 + 2 \cdot 3q_3 + 2 \cdot 2q_4 + 2 \cdot 3q_5 + 2 \cdot 2q_6 + 2 \cdot 3q_7 = 20$

לכן $3q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 2q_4 + 3q_5 + 2q_6 + 3q_7 = 10$. הבעיה דומה לבעיה בסעיפים קודמים, ונותר למצוא את המקדם של $x^{10}$ בפונקציה היוצרת, שאיברה הכללי, לפי סעיף ב, הוא

$$D(4,k) \cdot D(3,i) \cdot x^{3k+2i}$$

נדרוש $3k + 2i = 10$ ונמצא זוגות ערכים אפשריים

| k | i |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 2 | 2 |

לכן, המקדם של $x^{10}$ הוא:

$$D(4,0)D(3,5) + D(4,2)D(3,2) = \binom{3}{0}\binom{7}{5} + \binom{5}{2}\binom{4}{2} = 1 \cdot 21 + 10 \cdot 6 = 81$$

והמשלים שלו, שהוא מספר הפתרונות כאשר לפחות אחד מהנעלמים אי-זוגי, הוא $1203 - 81 = 1122$.

01.09.2021

# שאלה 4

נתונה הפונקציה $h(x)=\frac{(1-x^5)^5}{(1-x)^{10}}$, והמשוואה $x_1+x_2+\cdots+x_{15}=19$,
כאשר לכל $1\le i\le 10$ מתקיים $x_i\le 4$ ולכל $11\le i\le 15$, $x_i$ מתחלק ב-5.

נמצא את:

**א. המקדם של $x^{19}$ בפיתוח של $h(x)$**

נפצל את $h(x)$ למכפלת שני טורים, כך:

$$h(x)=(1-x^5)^5\cdot\frac{1}{(1-x)^{10}}$$

ניעזר בנוסחת הבינום (עבור $x=1, a=-x^5, n=5$) ובנוסחה לפיתוח סכום אינסופי בחזקת $n$:

$$h(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{5}{i}x^{5i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}D(10,k)x^k$$

האיבר הכללי בפיתוח הפונקציה הוא $(-1)^i\binom{5}{i}D(10,k)x^{5i+k}$

נדרוש $5i+k=19$ ונחפש את הערכים האפשריים ל$k$ ו$i$.

| i | k |
|---|---|
| 0 | 19 |
| 1 | 14 |
| 2 | 9 |
| 3 | 4 |

לכן, המקדם של $x^{19}$ הוא:

$$\binom{5}{0}D(10,19)-\binom{5}{1}D(10,14)+\binom{5}{2}D(10,9)-\binom{5}{3}D(10,4)=$$

$$=\binom{5}{0}\binom{28}{19}-\binom{5}{1}\binom{23}{14}+\binom{5}{2}\binom{18}{9}-\binom{5}{3}\binom{13}{4}=$$

$$=1\cdot 6906900-5\cdot 817190+10\cdot 48620-10\cdot 715=3{,}300{,}000.$$

**ב. הפונקציה היוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה**

לפי התנאים של הנעלמים במשוואה,

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{10}(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)^5$$

נפשט את עשרת הגורמים הראשונים לפי סכום טור הנדסי סופי, ואת חמשת הגורמים הנותרים לפי סכום טור אינסופי בחזקת $n$ כאשר מציבים $x = x^5$, $n = 5$. לפי סעיף ב, הפישוט שווה למכפלת הטורים להלן:

$$f(x) = \left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right)^{10}\left(\frac{1}{1 - x^5}\right)^5 = \frac{(1 - x^5)^5}{(1 - x)^{10}} = h(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{5}{i}x^{5i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}D(10, k)x^k$$

**ג. מספר הפתרונות של המשוואה**

מספר הפתרונות של המשוואה הוא המקדם של $x^{19}$ בפונקציה היוצרת של הפונקציה.

לפי סעיף א, מספר זה הוא 3,300,000.