מטלת מנחה 15 - אלגברה לינארית 2

328197462

02/06/2023

שאלה 1

סעיף א

סעיף ב

תהא T העתקה כמוגדר. יהא $U \subseteq V$ תת-מרחב של V ממימד 1. על פי הנתון, U תת-מרחב T-שמור.
כלומר, קיים $u_0 \in U$ כך שלכל $u \in U$ מתקיים $Tu = \lambda u_0$. בפרט, $Tu_0 = \alpha u_0$ עבור $\alpha \in \mathbb{F}$ כלשהו.

נבחר ערך α זה ונוכיח כי $T = \alpha I$.
עבור $u \in U$ מקבלים $Tu = T(\lambda u_0) = \lambda T u_0 = \alpha \cdot \lambda u_0 = \alpha u$.
נבחר אם כן $v \in V - U$ ונוכיח כי $Tv = \alpha v$.
נתבונן בתת-המרחב $W = \mathrm{Sp}\{v\}$. תת-מרחב זה הוא T-שמור, לכן $Tv = \beta v$.
נתבונן בתת-המרחב $W' = \mathrm{Sp}\{u_0 + v\}$. שוב, מתקיים $T(u_0 + v) = \gamma \cdot (u_0 + v) = \gamma u_0 + \gamma v$.
מצד שני, $T(u_0 + v) = Tu_0 + Tv = \alpha u_0 + \beta v$.
הוקטורים u_0, v בלתי-תלויים לינארית (אינם פרופורציוניים), לכן לוקטור $T(u_0 + v)$ יש הצגה יחידה כקומבינציה לינארית של u_0 ו-v.
מכאן נסיק $\alpha = \gamma = \beta$ ולכן $Tv = \alpha v$ והשלמנו את מלאכת ההוכחה.

שאלה 2

סעיף א

נסמן ב $m(x)$ את הפולינום המינימלי של T_W, וב$M(x)$ את הפולינום המינימלי של T. עלינו להוכיח כי m מחלק את M.
על פי הגדרה, T מאפסת את M. מכאן שלכל $v \in V$, $M(T)v = 0$, ובפרט עבור $v \in W$. כמו כן, לכל $v \in W$ מקבלים $T_W v = Tv$, ולכן $M(T_W)v = 0$.
קיבלנו כי M מאפסת את T_W. לכן, משאלה 9.9.1א, m מחלק את M.

כעת נניח כי ההעתקה T לכסינה. לפי 10.2.11 בהתאמה למטריצות, נקבל כי $M(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$ כאשר הסקלארים λ_i שונים זה מזה.
היות וm מחלק את M, m הוא מכפלת חלק או כל הגורמים הלינאריים $x-\lambda_i$ השונים זה מזה ומחלקים את M, ולכן לפי 10.2.11 ההעתקה T_W לכסינה.

סעיף ב

שאלה 4

עלינו למצוא פירוק של הפולינום המינימלי של $T|_W$, שנסמנו M_W, ל k פולינומים זרים בזוגות $P_1, P_2, ..., P_k$ כך שלכל i, $\ker P_i(T|_W) = W \cap W_i$.
כמו כן, על פי שאלה 2 במטלה זו, הפולינום המינימלי של $T|_W$ מחלק את $M(t)$. היות והפולינומים $M_1, M_2, ..., M_k$ זרים בזוגות, המשמעות היא שכל גורם בכל פירוק של M_W יחלק אחד בדיוק מבין סדרת פולינומים אלו (אחרת, יהיה להם מחלק משותף שאינו 1).
נסמן אפוא ב $M_W = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$ את הפירוק המקסימלי של M_w, ונבחר את P_i להיות מכפלת כל הפולינומיים האי-פריקים p_j המחלקים את M_i. ברור כי כל פולינום אי-פריק p_j יהיה גורם במכפלה אחת בדיוק, ולכן $M_W = P_1 \cdot P_2 \cdot ... \cdot P_k$.

נסמן $U_i = \ker P_i(T_W)$. לפי הפירוק הפרימרי, $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$.
נוכיח כי $U_i \subseteq W \cap W_i$. יהא $w \in U_i$. ברור כי $w \in W$, שכן $U_i \subseteq W$. עלינו להראות כי $w \in W_i = \ker M_i(T)$.
נניח בשלילה כי $M_i(T)w = M_i(T_W)w \neq 0$. היות ו$P_i$ מחלק את M_i, נקבל גם $P_i(T_W)w \neq 0$ ולכן $w \notin U_i$ וזו סתירה!

נקבל מצד אחד כי $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k \subseteq (W \cap W_1) + (W \cap W_2) + \cdots + (W \cap W_k)$.
מצד שני, $(W \cap W_1) + (W \cap W_2) + \cdots + (W \cap W_k) \subseteq W$ ולכן מתקיים שוויון.
נוסיף כי הקבוצות $(W \cap W_1), (W \cap W_2), ...$ זרות: אם יש איבר משותף בין שתי קבוצות כלשהן בסכום, אז בפרט קיימים i, j כך ש $W_i \cap W_j \neq \{0\}$, בסתירה לסכום הישר בפירוק הפרימרי של V! אי-לכך המרחב W הוא סכום ישר של המרחבים $(W \cap W_i)$.

שאלה 5

תהא T העתקה נורמלית במרחב אוניטרי ויהא W תת-מרחב T-שמור.
לפי משפט הלכסון האוניטרי, ההעתקה T לכסינה, ולפי שאלה 2 בממן זה גם הצמצום שלה T_W מהווה העתקה לכסינה.
אי-לכך, קיים בסיס $(w) = (w_1, w_2, ..., w_k)$ של W המורכב מוקטורים עצמיים.
וקטורים אלה, על פי למה 3.2.5, הם גם וקטורים עצמיים של $^* T_W$, השייכים לערכים העצמיים $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$.