מטלת מנחה 14 - אלגברה לינארית 1

328197462

15/01/2023

שאלה 1

יהיו U, W_1, W_2 תתי-מרחבים לינאריים של מרחב לינארי V.

סעיף א

יהא $v \in (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$ ועלינו להוכיח $v \in U \cap (W_1 + W_2)$.
מהגדרת החיבור, קיימים $v_1 \in U \cap W_1, v_2 \in U \cap W_2$ כך ש $v = v_1 + v_2$.
אי לכך, $v_1, v_2 \in U$ ומסגירות החיבור הוקטורי במרחב הלינארי נסיק $v = v_1 + v_2 \in U$.
כמו כן, מאחר ו $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$ נקבל מהגדרת החיבור כי $v = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$.
הראינו שייכות לשתי הקבוצות $U, W_1 + W_2$ ולכן נסיק $v \in U \cap (W_1 + W_2)$

סעיף ב

עבור $V = \mathbb{R}^2$ נגדיר:

$$U = \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \quad W_1 = \mathsf{Sp}(\{(1,0)\}) \quad W_2 = \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})$$

אז לפי סעיף א של שאלה זו מתקיים $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2)$.

ניקח $v = (1,1)$ ונראה כי $v \in U \cap (W_1 + W_2)$ וגם $v \notin (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$.
נחשב:

$$\begin{aligned}
U \cap (W_1 + W_2) &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap (\mathsf{Sp}(\{(1,0)\}) + \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})) \underset{\text{7.6.8 שאלה}}{=} \\
&= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap (\mathsf{Sp}(\{(1,0),(0,1)\})) = \\
&= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap \mathbb{R}^2 = \\
&= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \ni (1,1) = v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(U \cap W_1) + (U \cap W_2) &= (\mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap \mathsf{Sp}(\{(1,0)\})) + (\mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) + \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})) = \\
&= \{\underline{0}\} + \{\underline{0}\} = \\
&= \{\underline{0}\} \not\ni (1,1) = v
\end{aligned}$$

ולכן מתקיימת הכלה חזקה בין תתי-המרחבים.

שאלה 2

יהיו $U=\text{Sp}\{u_1,u_2\}$, $W=\text{Sp}\{w_1,w_2\}$ תתי-מרחבים לינאריים של V כך שהקבוצות הפורשות אותם הן בסיסים.
מניחים כי $A=\{u_1,u_2,w_1\}$ תלויה לינארית.

סעיף א

נראה כי $w_1\in U$ בדרך השלילה.
נניח בשלילה כי $w_1\notin \text{Sp}\{u_1,u_2\}$. מאחר והקבוצה $\{u_1,u_2\}$ היא בסיס ולכן בלתי תלויה לינארית, נסיק לפי שאלה 8.1.8 כי $A=\{u_1,u_2\}\cup\{w_1\}$ בלתי תלויה לינארית, בסתירה לנתון!

כעת, מאחר ו$W=\text{Sp}\{w_1,w_2\}\ni w_1=1\cdot w_1+0\cdot w_2$, נקבל $w_1\in U\cap W$.

סעיף ב

ניזכר במשפט המימדים 8.3.6

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

לשני תתי-המרחבים U,W יש בסיסים בגודל 2 ומכאן $\dim U=\dim W=2$. עלינו למצוא את מימד תת-המרחב $U\cap W$.

לפי משפט $3.8.4$, עבור $U\cap W\subseteq U,W$ נסיק $\dim(U\cap W)\leq 2$.
בנוסף, אם $\dim(U\cap W)=2$, אז נסיק את השוויון $U\cap W=U=W$ בסתירה לנתון כי U,W תתי-מרחבים שונים.
מכאן נובע אי-השוויון $\dim(U\cap W)\leq 1$. מאחר ו $w_1\neq \underline{0}\in U\cap W$ (הוקטור נמצא בקבוצה בלתי תלויה לינארית), נסיק $\dim(U\cap W)\geq 1$ ובסך הכל $\dim(U\cap W)=1$.

נציב במשפט המימדים ונקבל $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)=2+2-1=3$.

הקבוצה $\{u_1,u_2,w_2\}$ בעלת 3 וקטורים ומוכלת ב $U+W$. נראה כי הקבוצה בת"ל, כלומר $w_2\notin U$.
נניח כי $w_2\in U$. מסעיף א של שאלה זו נקבל $\{w_1,w_2\}\subseteq \text{Sp}\{u_1,u_2\}$, ולפי שאלה $7.5.16$ נסיק:

$$W=\text{Sp}\{w_1,w_2\}\subseteq \text{Sp}\{u_1,u_2\}=U$$

משוויון המימדים נובע, לפי משפט $3.8.4$, כי $U=W$ וזאת בסתירה לנתון! מצאנו $w_2\notin U$ ולכן לפי שאלה 8.1.8 הקבוצה בת"ל.

מצאנו כי $\{u_1,u_2,w_2\}$ בת"ל ובעלת 3 וקטורים ולכן קבוצה היא בסיס ל$U+W$.

שאלה 3

יהיו תתי המרחבים הבאים של $V = \mathbb{R}_4[x]$

$$U = \mathsf{Sp}\{u_1 = x^3 + 4x^2 - x + 3, \quad u_2 = x^3 + 5x^2 + 5, \quad u_3 = 3x^3 + 10x^2 + 5\}$$
$$W = \mathsf{Sp}\{w_1 = x^3 + 4x^2 + 6, \quad w_2 = x^3 + 2x^2 - x + 5, \quad w_3 = 2x^3 + 2x^2 - 3x + 9\}$$

נסמן בשאלה את הבסיס הסטנדרטי הסדור של V ב $E = (x^3, x^2, x, 1)$.

בסיס לU

תחילה, וקטורי הקואורדינטות של הקבוצה הפורשת הנתונה של U, לפי הבסיס הסטנדרטי, הם:

$$[u_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad [u_2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad [u_3]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

תת-המרחב $U' = \mathsf{Sp}\{[u_1]_E, [u_2]_E, [u_3]_E\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$. נמצא לו בסיס.
לשם כך, נכתוב את הוקטורים כשורות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{5} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לפי שאלה $7.5.12$, מרחב השורות של המטריצה המדורגת הינו גם U'. כמו כן, שורות המטריצה המדורגת אינן שורות אפס ולכן לפי למה $8.5.1$ בת"ל.
קיבלנו כי הקבוצה הבאה בת"ל ופורשת את $\mathsf{Sp}\{[u_1]_E, [u_2]_E, [u_3]_E\}$, ולכן בסיס לה:

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

וקטורים אלה הם וקטורי הקואורדינטות לפי E של איברי הקבוצה $B = \{x^3 + 4x^2 - x + 3, x^2 + x + 2, x\}$.
כעת, לפי טענה $8.4.12$, מאחר וB' בסיס לU' נסיק כי B בסיס לU, וכן כי $\dim U = 3$

בסיס לW

נשתמש בתהליך זהה. וקטורי הקואורדינטות של הקבוצה הפורשת הנתונה לW:

$$[w_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad [w_2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad [w_3]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

תת-המרחב $W' = \mathsf{Sp}\{[u_1]_E, [u_2]_E, [u_3]_E\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$. נמצא לו בסיס.
לשם כך, נכתוב את הוקטורים כשורות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לפי שאלה $7.5.12$ ולמה $8.5.1$, הקבוצה הבאה בת"ל ופורשת את W' ולכן מהווה בסיס.

$$C' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

וקטורי הקבוצה הם וקטורים הקואורדינטות לפי E של $C = \{x^3 + 4x^2 + 6, 2x^2 + x + 1\}$.
אי לכך, לפי טענה $8.4.12$, מאחר וC' בסיס לW' נסיק כי C בסיס לW, וכן באופן ישיר $\dim W = 2$

בסיס ל$U+W$

היות ו$U=\mathsf{Sp}(B), W=\mathsf{Sp}(C)$, נסיק לפי שאלה $7.6.8$ כי

$$U+W=\mathsf{Sp}(B\cup C)=\mathsf{Sp}\{x^3+4x^2-x+3, x^2+x+2, x, x^3+4x^2+6, 2x^2+x+1\}$$

באופן דומה,

$$U'+W'=\mathsf{Sp}\{(1,4,-1,3),(0,1,1,2),(0,0,1,0),(1,4,0,6),(0,2,1,1)\}$$

נמצא בסיס ל$U'+W'$. לשם כך נחזור על התהליך מהחלקים הקודמים של השאלה:

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\1&4&0&6\\0&2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5\to R_5-2R_2]{R_4\to R_4-R_1}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&1&3\\0&0&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5\to R_5+R_3]{R_4\to R_4-R_3}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to\frac{1}{3}R_4}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5\to R_5+5R_4}\begin{pmatrix}1&4&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לפי שאלה 7.5.12 ולמה 8.5.1 4 השורות הראשונות של המטריצה המדורגת בת"ל ופורשות את $U'+W'$.
שוב, לפי טענה $8.4.12$, 4 הפולינומים שקטורי הקואורדינטות שלהם הם 4 שורות המטריצה מהווים בסיס ל$U+W$. נקבל $\dim(U+W)=4$, והיות ו$U+W\subseteq\mathbb{R}_4[x]$ נקבל ממשפט $8.3.4$ כי $U+V=\mathbb{R}_4[x]$.
ניקח את הבסיס הסטנדרטי למרחב לינארי זה - E שהוגדר בתחילת השאלה.

סעיף ב

שאלה 4

יהיו U,W תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^4$, $\dim W > \dim U$.
נתון כי $(0,0,1,0) \notin U+W$, וכן $U\cap W = \text{Sp}\{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(-1,0,1,2)\}$
עלינו למצוא את המימד של $U+W$ וכן בסיס לW.

מאחר ו$U+W \subseteq \mathbb{R}^4$ מתקיים, לפי משפט 8.3.4, $\dim(U+W) \leq 4$.
אם נניח בשלילה כי $\dim(U+W) = 4$, נקבל מחלקו השני של המשפט $U+W=\mathbb{R}^4$, בסתירה לנתון $(0,0,1,0) \notin U+W$.
לכן, $\dim(U+W) \leq 3$.

המרחב הנפרש ע"י קבוצת היוצרים הנתונה ל$U\cap W$ הוא מרחב השורות של המטריצה להלן.
לפי שאלה 7.5.12, למטריצות שקולות שורה אותו מרחב שורות, ולכן נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שתי השורות הראשונות במטריצה הם בלתי תלויות לינארית ולכן מהווים בסיס ל$U\cap W$, ומכאן $\dim(U+W) = 2$.

כעת, היות ו$U \subseteq U+W$ ו$U\cap W \subseteq W$, נקבל לפי משפט 8.3.4 והנתון:

$$2 = \dim(U\cap W) \leq \dim W < \dim U \leq \dim(U+W) \leq 3$$

האפשרות היחידה לפתרון היא $\dim(U\cap W) = \dim W = 2$, $\dim U = \dim(U+W) = 3$.
לכן, לפי חלקו השני של המשפט, נקבל $U\cap W = W$.
אי לכך, מאחר ו $\{(1,2,3,4),(0,1,2,3)\}$ בסיס ל$U+W$ הקבוצה מהווה בסיס לW.