

מטלת מנחה 12 - אלגברה לינארית 2

328197462

14/04/2023

שאלה 1

סעיף א

המטריצה A_1 צמודה לעצמה, ובפרט נורמלית.

$$\begin{aligned} A_2^* &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}, A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix} \\ A_2 A_2^* &= \begin{pmatrix} 5 & * \\ * & * \end{pmatrix}, A_2^* A_2 = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix} \\ A_3 A_3^* &= \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix} = A_3^* A_3 \end{aligned}$$

לכן A_2 לא נורמלית ו A_3 נורמלית. נמצא מטריצות אוניטריות המלכסנות את A_1, A_3 .

$$\begin{aligned} p_1(x) &= |xI - A_1| = \begin{vmatrix} x & -i \\ i & x \end{vmatrix} = x^2 - (-i)i = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \\ p_3(x) &= (xI - A_3) = \begin{vmatrix} x-1 & -i \\ -1 & x-(2+i) \end{vmatrix} = (x-1)(x-(2+i)) - (-i)(-1) = \\ &= x^2 - (2+i)x - x + 2 + i - i = x^2 - (3+i)x + 2 \end{aligned}$$

עבור A_1 , נמצא בסיסים אורתונורמליים למרחבים העצמיים $V_{\lambda=1}, V_{\lambda=-1}$.

• עבור $V_{\lambda=1}$ מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $B_{\lambda=1} = \{ \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \}$ ננרמל ונקבל $V_{\lambda=1} = \text{Sp}(\{(i, 1)\})$

• עבור $V_{\lambda=-1}$ מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$-I - A = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 + iR_1} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $B_{\lambda=-1} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \}$ ננרמל ונקבל $V_{\lambda=-1} = \text{Sp}(\{(1, i)\})$

מטריצה אוניטרית המלכסנת את A_1 תהיה $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ומקבלים $Q^* A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
עבור A_3 , שורשי הפולינום האופייני יהיו: $\frac{(3+i) \pm \sqrt{(3+i)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{(3+i) \pm \sqrt{6i}}{2} = \frac{-(3+i) \pm \sqrt{3}(1+i)}{2}$:
נסמן $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$ המרחבים העצמיים יהיו:

• עבור V_{λ_1} מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i & -i \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $B_1 = \{(0.325 + 0.325i, 0.888)\}$ ו $V_{\lambda_1} = \text{Sp}\{(0.366 + 0.366i, 1)\} = \text{Sp}\{\frac{1}{1.126}(0.366 + 0.366i, 1)\}$

• עבור V_{λ_2} מדובר במרחב האפס של המטריצה:

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i & -i \\ -1 & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \\ -1 & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל $B_2 = \{(-0.628 - 0.628i, 0.4597)\}$ ו $V_{\lambda_2} = \text{Sp}\{(-1.366 - 1.366i, 1)\} = \text{Sp}\{\frac{1}{2.1753}(-1.366 - 1.366i, 1)\}$ א"נ V_{λ_2}

מטריצה אוניטרית המלכסת את A_3 תהיה $P = \begin{pmatrix} 0.325 + 0.325i & -0.628 - 0.628i \\ 0.888 & 0.4597 \end{pmatrix}$ ונקבל $P^* A P = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$

סעיף ב

תנאי הכרחי לחיוביות (לחלוטין) של מטריצות הוא היותן צמודות לעצמן. המטריצות C_3, C_4, C_6 אינן צמודות לעצמן:

$$C_3^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq C_3 \quad C_4^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq C_4 \quad C_6^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq C_6$$

המטריצות C_1, C_2, C_5 צמודות לעצמן ובפרט נורמליות. תנאי הכרחי ומספיק להיותן חיוביות (לחלוטין) נתון לנו לפי משפט 3.3.2: המטריצות חיוביות (לחלוטין) אם ורק אם ערכיהם העצמיים אי-שליליים (חיוביים). נחשב פ"א:

$$p_1(x) = |xI - C_1| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1 - 1 = x(x-2)$$

$$p_2(x) = |xI - C_2| = \begin{vmatrix} x & -i \\ i & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$p_5(x) = |xI - C_5| = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

עבור C_1 נקבל ע"ע $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$, והמטריצה אי-שלילית (אך לא חיובית לחלוטין).
עבור C_2 נקבל ע"ע $\lambda = -1$, קיומו של ע"ע שלילי מצביע על כך שהמטריצה לא חיובית (וגם לא לחלוטין). עבור C_5 נקבל ע"ע $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$, והמטריצה חיובית (לחלוטין).

שאלה 2

תהא T נורמלית במרחב מכפלה פנימית מממד סופי.

נזכיר:

(i) נזכיר בעזרת הכלה דו-כיוונית:

יהא $v \in \ker T$.

$$0 = (Tv, Tv) \stackrel{\text{תכונות צמוד}}{=} (v, T^*Tv) \stackrel{TT^* = T^*T}{=} (v, TT^*v) = (T^*v, T^*v)$$

ומתכונת החיוביות נסיק $T^*v = 0$. ההכלה בכיוון השני שקולה לחלוטין.

(ii) נזכיר בעזרת הכלה ושוויון מימדים. יהא $u \in \operatorname{Im} T, v \in \ker T$. עבור u , קיים $w \in V : Tw = u$. נקבל:

$$(u, v) = (Tw, v) = (w, T^*v) \stackrel{(i)}{=} (w, 0) = 0$$

קיבלנו $\operatorname{Im} T \subseteq (\ker T)^\perp$. אולם, מלינארית 1 ידוע לנו כי $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim V = \dim \ker T + \dim (\ker T)^\perp$.
קיבלנו שוויון מימדים ולכן $\operatorname{Im} T = (\ker T)^\perp$.

(iii) נזכיר בעזרת התכונות שהוכחנו קודם:

$$\operatorname{Im} T \stackrel{(ii)}{=} (\ker T)^\perp \stackrel{(i)}{=} (\ker T^*)^\perp \stackrel{(ii)}{=} \operatorname{Im} T^*$$

שאלה 3

נבודד את T^* מהשוויון הנתון:

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{1}{2}(T + T^*) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}T^* &= T^2 - \frac{1}{2}T \Leftrightarrow \\ T^* &= 2T^2 - T \end{aligned}$$

נראה כי T מתחלפת עם הצמודה לה:

$$\begin{aligned} TT^* &= T(2T^2 - T) = 2T^3 - T^2 \\ T^*T &= (2T^2 - T)T = 2T^3 - T^2 = TT^* \end{aligned}$$

הוכחנו כי T נורמלית. נראה כי T צמודה לעצמה: יהא λ שורש (ממשי או מרוכב) כלשהו של הפולינום האופייני של T . נזכיר כי בהכרח λ ממשי. יהא B בסיס א"נ כלשהו של V , ותהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה כך ש $[T]_B = A$. משוויון הפולינומים האופייניים של T ו- A נסיק כי λ שורש של הפולינום האופייני של A . בגלל ש A מרוכבת, λ ערך עצמי של A . לפי לינארית 1, v וקטור עצמי של A^2 השייך ל λ^2 . נפעיל את ההעתקה $[\cdot]_B$ על השוויון שמצאנו לעיל:

$$A^* \stackrel{2.1.3}{=} [T^*]_B = [2T^2 - T]_B = 2[T]_B^2 - [T]_B = 2A^2 - A$$

לכן, $A^*v = (2A^2 - A)v = (2\lambda^2 - \lambda)v = (\lambda^2 - \lambda - \bar{\lambda})v = 0$. בנוסף, לפי למה 3.2.5 בתרגום למטריצות, $A^*v = \bar{\lambda}v$. נשווה ונקבל $(\lambda^2 - \lambda - \bar{\lambda})v = 0$. היות $v \neq 0$, בהכרח מקבלים $\lambda^2 - \lambda - \bar{\lambda} = 0$. נראה כי ממשיותו של λ הכרחית לקיום שוויון זה. נסמן אפוא $\lambda = x + iy$.

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - \bar{\lambda} &= (x + iy)^2 - (x + iy) - (x - iy) = \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 - x - iy - x + iy = \\ &= (x^2 - 2x - y^2) + (2xy)i = 0 \\ &\rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

מהשוויון השני, בהכרח $x = 0$ או $y = 0$. נניח כי $x = 0$ ונציב בשוויון הראשון. נקבל $-y^2 = 0$ ובשני המקרים $y = 0$ ו λ מספר ממשי. אי-לכך, ממשפט 3.3.1 מקבלים ש T צמודה לעצמה, ולכן:

$$T^2 = \frac{1}{2}(T + T^*) = \frac{1}{2}(T + T) = T$$

שאלה 4

תהא מטריצה H ממשית סימטרית. לפי משפט הלכסון האורתוגונלי, H לכסינה אורתוגונלית, ונסמן ב Q מטריצה אורתוגונלית המלכסנת אותה. נסמן את עמודות Q ב $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. אלו n וקטורים עצמיים של H , ולכל אחד מהם נסמן $Hv_i = \lambda_i v_i$.
ע"פ משפט 2.3.6, B בסיס אורתונורמלי ל \mathbb{R}^n . יהא $v \in \mathbb{R}^n$ כן ש $\|v\| = 1$. נציג את v כצירוף לינארי של וקטורי B :

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad H v = \sum_{i=1}^n H a_i v_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i v_i$$

נחשב:

$$1 = \|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{i=1}^n a_i v_i \right\rangle \stackrel{\text{לינאריות}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \langle v_i, v_j \rangle \stackrel{\substack{\langle v_i, v_j \rangle = 0 \\ \langle v_i, v_i \rangle = 1}}{=} \sum_{i=1}^n a_i^2$$

$$v^t H v = \langle H v, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i v_i \right\rangle \stackrel{\text{לינאריות}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle \stackrel{\substack{\langle v_i, v_j \rangle = 0 \\ \langle v_i, v_i \rangle = 1}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 = \lambda \sum_{i=1}^n a_i^2 = \lambda$$

שאלה 5

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix} \text{ מקבילים } A^* = \begin{pmatrix} 2+i & -1 & 0 \\ -1 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix} \text{ נחשב: עבור}$$

$$A A^* = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = A^* A$$

ולכן A נורמלית.

נסמן ב $E = (e_1, e_2, e_3)$ את הבסיס הסטנדרטי ל $V = \mathbb{C}^3$ ונגדיר את ההעתקה $T_A : V \rightarrow V$ כך שלכל $v \in V$, $T_A(v) = Av$. אז E בסיס א"נ ומתקיים $[T_A]_E = A$.
לכן לפי שאלה 3.1.4, A נורמלית $\Leftrightarrow T_A$ נורמלית.
ההעתקה T_A נורמלית מעל \mathbb{C} , לכן ניתן להשתמש במשפט הפירוק הספקטרלי 3.4.2. נמצא את הפולינום האופייני של T_A :

$$p(x) = \det(xI - [T_A]_E) = \begin{vmatrix} x - (2-i) & 1 & 0 \\ 1 & x - (1-i) & -1 \\ 0 & -1 & x - (2-i) \end{vmatrix}$$