מטלת מנחה 12 - אינפי 1

א. טענה: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}} = 2$

הוכחה בלשון ϵ, N:

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} + 1 \rfloor$ ואז לכל $n > N$ טבעי:

$$|\sqrt{\frac{4n+1}{n}} - 2| = |(\sqrt{\frac{4n+1}{n}} - 2)\frac{\sqrt{\frac{4n+1}{n}}+2}{\sqrt{\frac{4n+1}{n}}+2}| =$$

$$=_{(1)} |\frac{\frac{4n+1}{n}-4}{\sqrt{\frac{4n+1}{n}}+2}| = |\frac{\frac{4n+1-4n}{n}}{\sqrt{\frac{4n+1}{n}}+2}| = \frac{|\frac{1}{n}|}{|\sqrt{\frac{4n+1}{n}}+2|} =$$

$$=_{(2)} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{4n+1}{n}}+2} \le_{(3)} \frac{\frac{1}{n}}{2} <_{(4)} \frac{1}{n} <_{(5)} \frac{1}{N} <_{(6)} \epsilon$$

מעברים:

(1) לפי נוסחאת הכפל המקוצר $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

(2) מונה: $n > 0$ טבעי ולכן $\frac{1}{n} > 0$ מנה של מספרים חיוביים.

מכנה: תוצאת שורש היא תמיד אי-שלילית, נוסיף 2 ונקבל $\sqrt{\frac{4n+1}{n}} + 2 \ge 2 > 0$.

(3) ע"י הקטנת המכנה או אי-שינויו (חיסור המספר האי-שלילי $\sqrt{\frac{4n+1}{n}}$), הגדלנו את הביטוי או שלא שינינו אותו.

(4) כאמור, $\frac{1}{n} > 0$ ולכן אם נכפול ב $\frac{1}{2}$ נקבל $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} > 0$. נוסיף $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ ונקבל $\frac{1}{n} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$.

(5) לפי הגדרת n, מתקיים $n > N$.

(6) מתכונות הערך השלם (1.64), $\frac{1}{\epsilon} = (\frac{1}{\epsilon} + 1) - 1 < \lfloor \frac{1}{\epsilon} + 1 \rfloor = N$, על כן $\frac{1}{N} < \epsilon$.

ב1. הגדרה: לכל סדרה (a_n) ומספר ממשי L,

$\lim_{n\to\infty} a_n \ne L$ אם"ם קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל N טבעי קיים $n > N$ טבעי המקיים $|a_n - L| \ge \epsilon$.

ב2. הגדרה: לכל סדרה (a_n),

הסדרה <u>מתבדרת</u> אם לכל $L \in \mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n \ne L$. כלומר -

לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל N טבעי קיים $n > N$ טבעי המקיים $|a_n - L| \ge \epsilon$.

ג. טענה: הסדרה $a_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+2}$ מתבדרת.

הוכחה בלשון N, ϵ:

יהי $L \in \mathbb{R}$. נבחר $\epsilon = \frac{1}{2}$ ואז לכל N טבעי:

אילו $L < 0$, נבחר $n = 2N > N$ ומתקיים:

$$|a_n - L| = |\frac{(-1)^n n+1}{n+2} - L| =$$

$$=_{(1)} |\frac{n+1}{n+2} - L| =_{(2)} \frac{n+1}{n+2} - L >_{(3)} \frac{n+1}{n+2} >_{(4)} \frac{1}{2} = \epsilon$$

מעברים:

(1) לפי הבחירה, n זוגי ולכן $(-1)^n = 1$.

(2) המנה $\frac{n+1}{n+2}$ היא מנה של שני מספרים חיוביים $n+1, n+2 > n > 0$, ולכן חיובית.

בחיסור מספר שלילי $L < 0$, נקבל את אי-השוויון $0 < \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+1}{n+2} - L$,

ובפרט לפי טרנזיטיביות $\frac{n+1}{n+2} - L > 0$.

(3) לפי אי השוויון במעבר (2).

(4) לפי הבחירה, n טבעי ולכן $n > 0$

נוסיף לאי-השוויון $(n+2)$ ונקבל $2(n+1) = 2n+2 > n+2$.

כעת, נוכל לחלק ב $n+2 > n > 0$ וב2 ונקבל $\frac{n+1}{n+2} > \frac{1}{2}$.

אילו $L \geq 0$, נבחר $max\{2N+1, 5\}$ ומתקיים:

$$|a_n - L| = |\frac{(-1)^n n+1}{n+2} - L| =$$

$$=_{(5)} |\frac{-n+1}{n+2} - L| =_{(6)} L - \frac{-n+1}{n+2} = L + \frac{n-1}{n+2} > \frac{n-1}{n+2} >_{(7)} \frac{1}{2} = \epsilon$$

מעברים:

(5) לפי הבחירה, n אי-זוגי ולכן $(-1)^n = -1$.

(6) לפי הבחירה, $n \geq 5$ ולכן $-n \leq -5$. נוסיף 1 לאי-השוויון ונקבל

$-n+1 \leq -4 < 0$. כמו כן, $n+2 \geq 7 > 0$.

לכן, המנה $\frac{-n+1}{n+2}$ היא מנה של מספר שלילי ומספר חיובי ולכן $\frac{-n+1}{n+2} < 0$

בחיסור מספר אי-שלילי L, נקבל את אי-השוויון $\frac{-n+1}{n+2} - L < \frac{-n+1}{n+2} < 0$,

ובפרט לפי טרנזיטיביות $\frac{-n+1}{n+2} - L < 0$.

(7) לפי הבחירה, $n \geq 5 > 4$.

נוסיף לאי-השוויון $(n-2)$ ונקבל $2(n-1) = 2n-2 > n+2$.

כעת, נוכל לחלק ב $n+2 > n > 0$ וב2 ונקבל $\frac{n-1}{n+2} > \frac{1}{2}$.

שאלה 2

א. חישוב: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+(-1)^n}-n$

פתרון: נסמן $a_n=\sqrt{n^2+(-1)^n}-n$ ונחשב:

$$a_n=(\sqrt{n^2+(-1)^n}-n)\cdot\frac{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}=\frac{n^2+(-1)^n-n^2}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}$$

כעת,

$$|a_n|=\frac{|(-1)^n|}{|\sqrt{n^2+(-1)^n}+n|}=_{(1)}\frac{1}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}\to_{n\to\infty_{(2)}}\frac{1}{"\infty"}=_{(3)}0$$

מעברים:

(1) מונה: $|(-1)^n|=|\pm1|=1$

מכנה: $\sqrt{n^2+(-1)^n}+n\geq n>0$

(2) כאמור, לכל n טבעי $\sqrt{n^2+(-1)^n}+n\geq n$.

לפי 2.37 $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$ ולכן לפי 2.45 מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+(-1)^n}+n=\infty$

סך הכל, לפי אריתמטיקה של גבולות עבור המכנה שגבולו אינו אפס ניתן לחשב את גבול המנה.

(3) לפי כלל "1 חלקי אינסוף", משפט 2.43

כעת, לפי שאלה 2.20, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ וסיימנו.

ב. חישוב: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^6-1}{n^4-\pi n^5+5n}$

פתרון: נחשב:

$$\frac{3n^3-2n^6-1}{n^4-\pi n^5+5n}=\frac{n^6}{n^5}\cdot\frac{3(\frac{1}{n})^3-2-(\frac{1}{n})^6}{(\frac{1}{n})^2-\pi+5(\frac{1}{n})^4}=n\cdot\frac{3(\frac{1}{n})^3-2-(\frac{1}{n})^6}{(\frac{1}{n})^2-\pi+5(\frac{1}{n})^4}\to_{n\to\infty_{(1)}}"\infty"\cdot\frac{3\cdot0^3-2-0^6}{0^2-\pi+5\cdot0^4}=$$

$$="\infty"\cdot\frac{-2}{-\pi}="\infty"\cdot\frac{2}{\pi}=_{(2)}\infty$$

מעברים:

(1) גבול הטור (n) לפי 2.37, וגבול הטור $(\frac{1}{n})$ לפי 2.10.

סה"כ לפי אריתמטיקה של גבולות, כאשר מכנה המנה $0^2-\pi+5\cdot0^4=-\pi\neq0$.

(2) לפי 2.43, כלל "אינסוף כפול מספר חיובי".

ג. חישוב: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4}$

פתרון: נסמן $b_n = \frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4}$, $a_n = 0, c_n = \frac{\sqrt{3}}{n^2}$.

נשים לב כי לכל n טבעי:

$$a_n = 0 \ <_{(1)} \frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4} \ \leq_{(2)} \frac{\sqrt{3}n^2}{n^4} = \frac{\sqrt{3}}{n^2} = c_n$$

ברור ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

ולפי אריתמטיקה של גבולות + 2.10 מתקיים $c_n = \sqrt{3}\cdot(\frac{1}{n})^2 \to_{n\to\infty} \sqrt{3}\cdot 0^2 = 0$

לכן לפי משפט הסנדוויץ' עבור $a_n \leq b_n \leq c_n$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ וסיימנו.

מעברים:

(1) $n^2 \geq 1$, לכן $\sqrt{3}n^2 \geq \sqrt{3}$ ובהתאם $\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor \geq \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1 > 0$.

לכן $\frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4}$ מנה של מספרים חיוביים ומתקיים $\frac{\lfloor\sqrt{3}n^2\rfloor}{n^4} > 0$.

(2) לפי תכונות החלק השלם (1.64)

ד. חישוב: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}}$

פתרון: נסמן $a_n = \frac{2n-1}{2n}$. נשים לב כי $a_n > 0$ לכל n טבעי, משום שכל n טבעי מקיים

$n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq 2 > 0 \Rightarrow 2n - 1 \geq 1 > 0$ ומכאן ש a_n מנה של שני מספרים חיוביים.

אז עבור סדרת הממוצעים ההנדסיים של הסדרה, $c_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}$, מתקיים:

$$c_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}} = \sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}}$$

גבול הסדרה a_n הוא, לפי החישוב הבא:

$$a_n = \frac{n}{n}\cdot\frac{2-\frac{1}{n}}{2} = \frac{2-\frac{1}{n}}{2} \to_{n\to\infty_{(1)}} \frac{2-0}{2} = 1$$

לכן, לפי משפט 2.52, מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}}$ וסיימנו.

מעברים:

(1) לפי אריתמטיקה של גבולות עבור מנה בה גבול המכנה $2 \neq 0$, ומשפט 2.10.

שאלה 3

יהיו $(a_n), (b_n)$ כך ש $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \infty$

א. טענה: אם כמעט כל איברי $(a_n), (b_n)$ חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

הפרכה: הטענה לא נכונה עבור הסדרות:

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{n is odd} \\ n & \text{n is even} \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} n & \text{n is odd} \\ 1 & \text{n is even} \end{cases}$$

ברור שכל איברי $(a_n), (b_n)$ חיוביים, ולפי 2.37 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$,

אבל $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \infty$ כי עבור $M = 2$ לכל N טבעי קיים $n = 2N > N$ זוגי כך ש $a_n = 1 < 2 = M$. באופן דומה, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq \infty$ כי לכל N טבעי קיים $n = 2N + 1 > N$ אי זוגי כך ש $b_n = 1 < 2 = M$. על כן אף אחת מהסדרות אינה שואפת לאינסוף וסיימנו.

ב. טענה: אם כמעט כל איברי (a_n) חיוביים, אז כמעט כל איברים (b_n) חיוביים.

הוכחה: נניח בשלילה שלכל N טבעי קיים $n > N$ כך ש$b_n \le 0$.

לפי ההנחה קיים N_1 טבעי כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $a_n > 0$.

יהי $M > 0$. אז לכל N טבעי קיים $n > max\{N, N_1\}$ כך ש $a_nb_n < 0 < M$.

במילים אחרות, לא מתקיימת הטענה (כמעט לכל n מתקיים $a_nb_n > M$)

בסתירה לנתון $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \infty$ המחייב קיום טענה זו!

ג. טענה: $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

הפרכה: הטענה לא נכונה עבור $a_n = n^2, b_n = \frac{1}{n}$.

לפי משפט 2.37, $a_nb_n = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n \to_{n\to\infty} \infty$,

אבל לפי משפט 2.10 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$!

ד. טענה: קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $b_n \neq 0$.

הוכחה: נניח בשלילה שלכל N טבעי קיים $n > N$ כך ש $b_n = 0$.

אז לכל N טבעי קיים $n > N$ כך ש $a_nb_n = a_n \cdot 0 = 0$.

יהי $M > 0$ ממשי. אז לכל N טבעי קיים $n > N$ כך ש $a_nb_n = 0 < M$.

אבל לפי ההנחה $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \infty$ ולכן קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ יתקיים $a_nb_n > M$.

סתירה! ולכן הטענה נכונה.

ה. טענה: אם $\lim_{n\to\infty} b_n = 5$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

הוכחה: לכל n טבעי, אם $b_n \neq 0$ מתקיים $a_n = \frac{a_nb_n}{b_n}$. לפי סעיף ד' כמעט לכל n $b_n \neq 0$, לכן

הסדרה a_n מתקבלת מהסדרה $\frac{a_nb_n}{b_n}$ על ידי שינוי מספר סופי של איברים.

לכן, לפי 2.44, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{b_n}$

לפי ההנחות $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$ ו $\lim_{n\to\infty} b_n = 5 \neq 0$,

ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות + כלל "אינסוף כפול מספר חיובי" במשפט 2.43 עבור $\frac{1}{5}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \frac{"\infty"}{5} = \infty$$

ו. טענה: אם $a_n > b_n$ כמעט לכל n, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

הפרכה: הטענה לא נכונה עבור $a_n = \frac{-1}{n}, b_n = -n$.

לפי משפט 2.37, $a_n b_n = (-n) \cdot \frac{-1}{n} = n \to_{n\to\infty} \infty$,

כמו כן, לכל $n > 1$ מתקיים $\frac{1}{n} < 1 < n$ ובפרט לפי טרנזיטיביות $n > \frac{1}{n}$.

נכפול ב(-1) ונקבל שלכל $n > 1$ מתקיים $-n < \frac{-1}{n}$, כלומר $a_n > b_n$ כמעט לכל n.

אבל לפי אריתמטיקה של גבולות + 2.10 $a_n = -1 \cdot \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} -1 \cdot 0 = 0 \neq \infty$!

ז. טענה: אם $a_n > b_n > 0$ כמעט לכל n, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

טענת עזר: אם $a_n > 0$ כמעט לכל n ו$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \infty$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

הוכחת טענת העזר: יהי $M > 0$ ממשי.

לפי ההנחה עבור M^2 ממשי, מתקיים $a_n^2 > M^2$ כמעט לכל n.

כלומר, קיים N_1 טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n^2 > M^2$.

כמו כן, לפי ההנחה קיים N_2 טבעי כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $a_n > 0$.

נבחר $N = max\{N_1, N_2\}$. אז לכל $n > N$ מתקיים $a_n^2 > M^2$ ולכן $|a_n| > |M|$.

מאחר ו $M, a_n > 0$ מתקיים $a_n > M$ וסיימנו.

הוכחת הטענה: לפי טרנזיטיביות, $a_n > 0$ כמעט לכל n.

לכן, אם נכפול ב- a_n את אי-השוויון, נקבל $a_n^2 > a_n b_n$ כמעט לכל n.

לכן משפט 2.45 עבור הנתון $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \infty$.

לכן לפי טענת העזר $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ וסיימנו.