מטלת מנחה 11 - קורס 20417

השאלות שהגשתי: שאלות 1, 2 ו-4.

שאלה 1

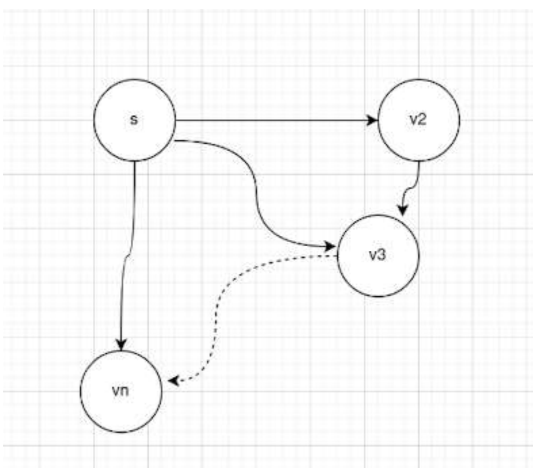
יהא גרף <u>מכוון</u> $G = (V,\ E)$, ותהא $s \in V$ צומת בגרף.

א. הטענה נכונה

נניח בשלילה כי קיימות שתי הרצות שונות של אלגוריתם הBFS המייצרות עצים בעומקים שונים T_{BFS} ו-T'_{BFS} . נניח ללא הגבלת הכלליות כי T'_{BFS} עמוק יותר, וניקח צומת צומת $u \in V$ הנמצאת בשכבה העמוקה ביותר בעץ. היות ובעץ T_{BFS} יש פחות שכבות, והיות ו $u \in T_{BFS}$, נסיק כי הצומת נמצאת בשכבה קרובה יותר לשורש s.

כעת, נתבונן במסלול (המכוון) מ s ל u בעץ T_{BFS}: הוא בהכרח קצר יותר מהמסלול בין שתי הצמתים בעץ T'_{BFS}, כלומר קיים מסלול קצר יותר מהשורש לu מהמסלול המוצג ב T'_{BFS}, בסתירה לתכונות עץ ה BFS!

ב. הטענה שגויה



דוגמה נגדית: ניקח גרף (מכוון) $G = (V, E)$ בגודל n צמתים כך ש $V = \{s,\ v_2,\ v_3,\ ...,\ v_n\}$. נרצה שתהיה קשת המחברת בין s לבין כל שאר צמתי הגרף, ובנוסף שתהיה לכל $2 \le i \le n - 1$ הקשת $(v_i,\ v_{i+1})$.

ניצור את העצים: יהא T_{DFS} העץ הנוצר מבחירתו של v_2 להיות הצומת הראשונה שחוקרים. ברור כי עץ זה הוא שרוך בעומק n . יהא T'_{DFS} העץ הנוצר מבחירת הצמתים לחקירה בסדר ההפוך: החל מ v_n ועד ל v_2. העץ T'_{DFS} הוא עץ בעומק 2.

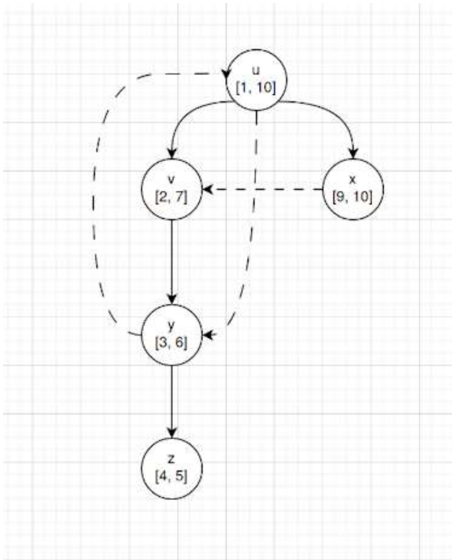
מצאנו דוגמה נגדית ולכן הטענה המוצגת בסעיף זה שגויה.

שאלה 2

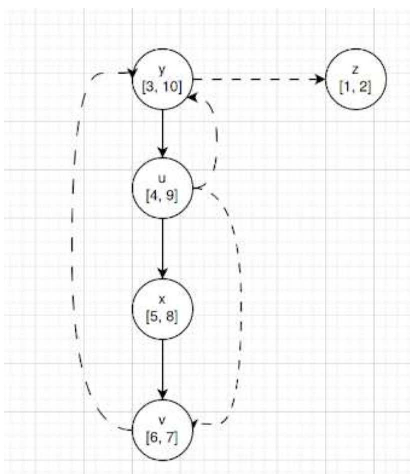
נריץ הרצות שונות על הגרף בהתאם להוראות. ליד כל צומת נסמן ב $[B,\ F]$ את זמן הגילוי וזמן העזיבה שלה.

הרצה א - התקבל עץ יחיד.

הקשתות שאינן חלק מעץ הDFS:
- הקשת (u,y) - קשת קדימה
- הקשת (x,v) - קשת חוצה
- הקשת (y,u) - קשת אחורה

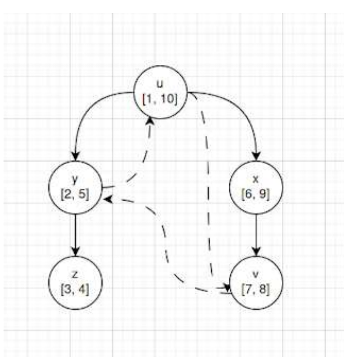


הרצה ב - התקבלו 2 עצי DFS נפרדים.



הקשתות שאינן חלק מעץ הDFS:
- הקשת (y,z) - קשת חוצה
- הקשת (u,y) - קשת אחורה
- הקשת (u,v) - קשת קדימה
- הקשת (v,y) - קשת אחורה

הרצה ג - התקבל עץ יחיד.



הקשתות שאינן חלק מעץ הDFS:
- הקשת (u,v) - קשת קדימה
- הקשת $(v,\ y)$ - קשת חוצה
- הקשת (y,u) - קשת אחורה

שאלה 4

נתרגם את הבעיה לגרף בעזרת הטענה הלוגית הבאה: $(p \vee q) \equiv (\neg p \to q) \wedge (\neg q \to p)$.
בעזרת טענה לוגית זו, ניתן לתרגם תנאי CNF בעלת n ליטרלים ו-m פסוקיות לצורה המורכבת מ $2m$ יחסי "תלות" המתוארים לעיל. משמעות החץ - אם אגף שמאל בעל ערך T, אז בהכרח גם אגף ימין יהיה בעל הערך T.

ניתן ליצור מן הבעיה גרף בעל $2n$ צמתים המייצגים את ערכי הליטרלים $x_1, x_2, ..., x_n$ ואת הנגדיים להם. כל קשת היא "יחס תלות" המתורגם לעיל. יצירת הגרף תתבצע ע"י תרגום כל פסוקית $p \vee q$ ל-2 קשתות $(\neg p, q), (\neg q, p)$ כמתואר לעיל. הדבר מוביל לנכונותה של טענה (α):

טענה (α): אם יש מסלול $x, u_1, u_2, ..., u_k, y$ מ x ל y בגרף, אז יש מסלול מ $\neg y$ ל $\neg x$ בגרף.
הוכחה: ע"פ הדרך בה בנינו את הגרף, הקשת (u_k, y) קיימת אם ורק אם $(\neg y, \neg u_k)$ קיימת, וכן יחס דומה מתקיים בין זוגות הקשתות (u_{k-1}, u_k) ו- $(\neg u_k, \neg u_{k-1})$, ..., (x, u_1) ו- $(\neg u_1, \neg x)$. לכן, קיים המסלול $\neg y, \neg u_k, ..., \neg u_1, \neg x$ ובפרט קיים מסלול מ $\neg y$ ל $\neg x$ בגרף.

טענה (β): בהינתן מסלול $p, u_1, u_2, ..., u_k, \neg p$ מליטרל p לליטרל $\neg p$, אך ורק ההשמה "$p \leftarrow F, \neg p \leftarrow T$" עלולה לספק את הנוסחא.
הוכחה: נתבונן בהשמה ההפוכה "$p \leftarrow T, \neg p \leftarrow F$". היות ויש מסלול מp לליטרל הנגדי לו, אז מערכו של p נסיק כי גם ערכו של הליטרל u_1 מוכרח להיות T, וכך הלאה - כל הצמתים במסלול זה מוכרחים להיות T ע"פ היחסים המוגדרים ביניהם על מנת שההשמה תספק את הנוסחא. כך גם עבור $\neg p$, אבל השמתו היא F ולכן הנוסחה אינה ספיקה.

טענה (γ): אם יש שני ליטרלים באותו רק"ח (כלומר קיים מסלול מ $\neg p$ ל p ולהפך), אז הנוסחא אינה ספיקה.
הוכחה: ע"פ טענה (β), קיומו של המסלול מp לנגדי לו גורר שההשמה "$p \leftarrow T, \neg p \leftarrow F$" אינה מספקת את הנוסחא. מנגד, ע"פ אותה טענה, קיומו של המסלול מהנגדי לp גורר שההשמה "$p \leftarrow F, \neg p \leftarrow T$" אינה מספקת את הנוסחא. היות ואלו 2 האפשרויות היחידות להשמה, נסיק כי הנוסחה אינה ספיקה.

ע"י נתינת אלגוריתם למציאת ההשמה, נראה כי אם אף ליטרל לא נמצא באותו רק"ח עם הנגדי לו, אז קיימת השמה המספקת את הנוסחא.

האלגוריתם:

- לכל ליטרל x שטרם סופק:
  - נסרוק לעומק בעזרת DFS את רכיב הקשירות המתחיל בליטרל ונסמנו C_x.
  - אם $\neg x \notin C_x$, אז נבצע השמת "T" לכל הליטרלים ב C_x והשמת "F" לכל הליטרלים המנוגדים להם.
  - אחרת, $\neg x \in C_x$, נבצע סריקת DFS המושרשת ב $\neg x$.
    - אם $x \in C_{\neg x}$, נחזיר תוצאה - הנוסחה אינה ספיקה.
    - אחרת, נבצע השמת "T" לכל הליטרלים ב $C_{\neg x}$ והשמת "F" לכל הליטרלים המנוגדים להם.

נכונות האלגוריתם:

טענה (δ): בכל איטרציה של האלגוריתם ה"מטפלת" בצומת מסוים z, השמה $T \leftarrow x$ משמעותה כי קיים מסלול מ z ל x.
הוכחה: נחלק למקרים. אילו $\neg z \notin C_z$, אזי ההשמה של הערך "T" בצומת x מחייבת קיום מסלול מהצומת z לצומת זו.
אחרת, השמת "T" תתבצע לליטרלים ברכיב $C_{\neg z}$, כלומר קיים מסלול מ $\neg z$ לצומת x, וע"י "שרשור" המסלול מ z ל $\neg z$ נקבל מסלול מ z ל x.

טענה (ϵ): השמה היא קבועה, כלומר לכל ליטרל x שקיבל את ערכו ב"טיפול" בליטרל מסוים z, לא יכול להיות שטיפול בצומת אחר y ייתן השמה הסותרת את ההשמה ב z.
הוכחה: נניח בה"כ כי x קיבל את הערך T במהלך האיטרציה של הצומת z. אז קיים מסלול מz לx, זאת ע"פ טענה (δ).
כעת, נניח בשלילה כי איטרציה זו מחייבת השמת F עבור צומת זו. כלומר, לפי (δ), קיים מסלול מ y ל $\neg x$.
לפי (α), קיום מסלול כזה מבטיח את קיומו של המסלול מ x ל $\neg y$.
לכן, קיים מסלול מ z ל $\neg y$ (שוב נשרשר מסלולים) והדבר מבטיח כי "טיפלנו" כבר בצומת y באיטרציה קודמת וזו סתירה!

טענה (ζ): אם $x, \neg x$ שני צמתים באותו רק"ח, אז הם לא יעברו השמה באיטרציה ה"מטפלת" בליטרל אחר z
הוכחה: תהא איטרציה כזו המטפלת בצומת z ונרצה שיהיה קיים מסלול מ z ל x על מנת שתתבצע השמה.
היות ו $x, \neg x$ באותו רק"ח, קיים ביניהם מסלול, ומטענה (α) קיים מסלול ל $\neg x$ ל $\neg z$. נשרשר של שלוש המסלולים ונסיק כי קיים מסלול מ z ל $\neg z$ ולכן $\neg z \in C_z$.
מסיבה זו, על מנת שהאלגוריתם יבצע השמה, אחד מן הצמתים $x, \neg x$ צריך להיות ב $C_{\neg z}$, והיות ושני צמתים אלו שייכים לאותו רק"ח, שייכותו של אחד ל $C_{\neg z}$ תגרור גם את שייכותו של השני.
נתבונן במסלול מ $\neg z$ ל $\neg x$. קיומו גורר, לפי (α), את קיומו של מסלול מ x ל z. שוב, נשרשר את שלוש המסלולים ונקבל כי $z \in C_{\neg z}$, האלגוריתם יודיע כי הנוסחא אינה ספיקה ולא תתבצע השמה.

ניגש להוכחת הנכונות, ונחלק למקרים:
אם ישנם שני צמתים $\neg x$ ו- x באותו רק"ח, אז לפי (γ) הנוסחא אינה ספיקה, ואכן, האלגוריתם שלנו מזהה זאת: ע"פ טענה (ζ), שני צמתים אלה לא יעברו השמה באיטרציה המטפלת בצומת אחר, ובעת הטיפול באחד מן הצמתים האלה, ע"פ נכונות סריקת ה DFS, נזהה כי $\neg x \in C_x$ וכי $x \in C_{\neg x}$ והאלגוריתם אכן יודיע כי הנוסחה אינה ספיקה.

אחרת, האלגוריתם ייתן ערך יחיד לכל צומת, זאת ע"פ טענה (ϵ). השמה זו מספקת את הנוסחא משום שאין בה סתירות: כל סתירה נוצרת מקיומה של קשת $p \rightarrow q$ כך ש $T \leftarrow p$ ו-$F \leftarrow q$, אך הצבה זו אינה אפשרית כי בכל השמה $T \leftarrow p$ האלגוריתם מבצע גם $T \leftarrow q$.

סיבוכיות האלגוריתם:
עבור קלט בן m פסוקיות ו n ליטרלים, בניית הגרף על כל צמתיו וקשתותיו תתבצע ב $O(n + m)$.
בנוסף, העץ מבצע סריקות DFS ובכל מפגש עם צומת מבצע השמה (בזמן קבוע). היות ומספר האיטרציות הוא כמספר הצמתים שלא עברו השמה, ובכל איטרציה עוברים לכל היותר פעמיים על רכיב הקשירות הנוכחי, נעבור לכל היותר פעמיים על צמתיו וקשתותיו של העץ, וחלק זה של האלגוריתם ירוץ גם הוא ב $O(n + m)$.
סה"כ - $O(n + m)$.