20.8.2021

מטלת מנחה 14

שאלה 1

עבור $A = \{1,2, \dots n\}$ ועבור $1 \le k \le n$:

סעיף א

ראשית, נמצא את מספר המקומות במחרוזת בהם 1 יכול להופיע. אין חשיבות לסדר בין המקומות, לכן מספר המקומות הוא $\binom{n}{k}$.

נותרו $(n-k)$ מקומות. עבור כל אחד מהם – 2 אפשרויות (0 או 2) עם חזרות. לכן עבור המקומות הנותרים ישנם 2^{n-k} אפשרויות.

סך הכל:

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$

סעיף ב

מספר הזוגות העונות על תנאי השאלה, שקול למספר המחרוזות העונות על התנאים בסעיף א, כי הפונקציה המתאימה לכל זוג $< B, C >$ את המחרוזת בה הספרה 1 מופיעה אך ורק במקומות במחרוזת השייכים לקבוצה B (יש k כאלה, כי $B \subseteq A$ ו $|B| = k$), והספרה 0 מופיעה אך ורק במקומות במחרוזת השייכים לקבוצה C (הדבר מוגדר היטב כי $B \cap C = \phi$ ו $C \subseteq A$), היא פונקציה חח"ע ועל. עבור זוגות שונים – בלפחות אחד מהמקומות במחרוזת תימצא ספרה שונה ולכן המחרוזות המותאמות אליהם יהיו שונות (לכן הפונקציה חח"ע), ועבור כל מחרוזת קיים זוג שייצג אותה (ולא – במחרוזת אין k ספרות 1, לכן הפונקציה על).

מאחר ומתקיימת שקילות, גם מספר הזוגות $< B, C >$ הוא כלהלן:

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$

סעיף ג

עבור $n = 7, k = 3$:

עלינו למצוא את מספר ה**קבוצות** ולא הזוגות המקיימים את התנאים בסעיף ב.
כלומר, כאשר $|B| = |C| = 3$, יש לספור אפשרות זו פעם אחת ולא פעמיים.

מספר האפשרויות הכולל בסעיף א עבור k ו-n אלו: $\binom{7}{3} \cdot 2^4 = 560$

מתוכן, על מנת למצוא מספר האפשרויות בהן 0 מופיע 3 פעמים גם, נשבץ את 3 ה-1-ים במקומות כלשהם במחרוזת, יש $\binom{7}{3}$ אפשרויות שיבוץ. מתוך ארבעת המקומות הנותרים, נשבץ את שלושת האפסים שלנו בשלושה מהם ללא תלות בסדר. סך הכל: $\binom{4}{3}$ אפשרויות. במקום הנותר אנחנו מוכרחים לשבץ את הספרה 2 על מנת לא לפגוע בהגדרת המחרוזת. יש רק אפשרות אחת לשבץ את הספרה – במקום שנותר. סך האפשרויות: $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} = 140$.

כל האפשרויות עבורן 0 לא מופיע 3 פעמים, זרות לאפשרויות בהן הוא כן מופיע. לכן לפי עיקרון החיבור, מספר האפשרויות בהן 0 לא מופיע 3 פעמים (כלומר, מספר הקבוצות העונות על תנאי הסעיף) – הוא $560 - 140 = 420$.

20.8.2021

שאלה 2א

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1^k + (-1)^k}{2} \cdot \binom{n}{k} 4^k = \frac{5^n + (-3)^n}{2}$$

נוכיח את השוויון בצורה אלגברית, כאשר נפתח את הביטוי משמאל:

אנחנו מכפילים בקבוע בתוך הסכום, לכן $\sum_{k=0}^{\mathrm{n}} \frac{1^k+(-1)^k}{2} \cdot \binom{n}{k} 4^k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(1^k + (-1)^k\right) \binom{n}{k} 4^k$

ניתן להפריד את הסכום בסוגריים לשני סכומים ולקבל $= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} 1^k \binom{n}{k} 4^k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 4^k\right)$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^k \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k 1^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^k 1^{n-k} \right) =$$

לפי נוסחת הבינום, $= \frac{1}{2} \left((4+1)^n + (-4+1)^n\right) = \frac{5^n + (-3)^n}{2}$

שאלה 2ב

נוכיח כי הביטוי הוא סכום כל המספרים בעלי אינדקס זוגי מתוך $a_0, a_1, \dots a_n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1^k + (-1)^k\right)}{2} \cdot a_k =$$

$$= \frac{(1^0 + (-1)^0)}{2} \cdot a_0 + \frac{(1^1 + (-1)^1)}{2} \cdot a_1 + \cdots + \frac{(1^n + (-1)^n)}{2} \cdot a_n =$$

$$1 \cdot a_0 + 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + \cdots \frac{(1^n + (-1)^n)}{2} \cdot a_n =$$

$= a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2i}$ כאשר $\frac{n-1}{2} \le i \le \frac{n}{2}$ טבעי.

כי לכל k אי זוגי, הביטוי $\frac{(1^k+(-1)^k)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$ ולכן הסכום מוציא החוצה את כל האיברים בסדרה שהאינדקס שלהם אי-זוגי!

20.8.2021

שאלה 2ג

על מנת לפתור את השאלה, נסמן: לכל $0 \le k \le n$, a_k הוא מספר המחרוזות בעלות n תווים המורכבות מ $\{A, B, C, D, E\}$, בהן התו A מופיע k פעמים.

נחשב את מספר המחרוזות בהן A מופיע k פעמים. על מנת ליצור מחרוזת כזו, יש לבחור את k המקומות השונים בהם יופיע התו, ללא חשיבות לסדר שלהם. יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לעשות כן. ב$n-k$ המקומות הנותרים במחרוזת, אפשר לשבץ (עם חזרות) כל אחד מארבעת התווים B, C, D, E. יש 4^{n-k} אפשרויות לעשות כך. לכן, לפי עיקרון הכפל, $a_k = \binom{n}{k} \cdot 4^{n-k}$.

אנחנו מעוניינים לסכום את a_k בעלי האינדקסים הזוגיים, כלומר סכום כל המחרוזות בהם A מופיע מספר זוגי של פעמים. לפי סעיף ב, סכום זה שווה ל

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1^k + (-1)^k\right)}{2} \cdot a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1^k + (-1)^k\right)}{2} \cdot \binom{n}{k} \cdot 4^{n-k} =$$

בביצוע פעולות זהות לחלוטין לפעולות שבוצעו בסעיף א, ניתן לפתח את הביטוי לביטוי הבא:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^{n-k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{n-k} 1^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^{n-k} 1^k\right) =$$

לפי נוסחת הבינום, ביטוי זה שווה לביטוי $\frac{1}{2}\left((4+1)^n + (-4+1)^n\right) = \frac{5^n + (-3)^n}{2}$

לכן, מספר המחרוזות בהן A מופיע מספר זוגי של פעמים הוא $\frac{5^n + (-3)^n}{2}$.

20.8.2021

שאלה 3

נחשב לפי משפט ההכלה וההפרדה המורחב מעמוד 99:

נתייחס לפונקציות בשאלה כמספר המחרוזות בעלות 4 ספרות מהספרות $\{1,2,3,4\}$, ונגדיר עבורן את 4 התכונות P_i: הספרה i מופיעה במחרוזת i פעמים, עבור כל $1 \le i \le 4$.

עלינו למצוא את $E(0)$ – מספר המחרוזות שלא מקיימות אף אחת מהתנאים. לפי משפט ההכלה וההפרדה:

$$E(0) = W(0) - \binom{1}{0}W(1) + \binom{2}{0}W(2) - \binom{3}{0}W(3) + \binom{4}{0}W(4)$$

$$= \mathrm{W}(0) - \mathrm{W}(1) + \mathrm{W}(2) - \mathrm{W}(3) + \mathrm{W}(4)$$

$W(0)$ הוא, כמובן, מספר המחרוזות המקיימות לפחות 0 מהתנאים, כלומר כל המחרוזות. מספר המחרוזות הכולל הוא חליפה עם חזרות של 4 איברים מתוך 4, כלומר $4^4 = 256$.

נמצא את מספר המחרוזות המקיימות $W(1)$. עבור כל $1 \le k \le 4$, נמצא את מספר המחרוזות המקיימות P_k:

מספר השיבוצים במחרוזת לספרה k הוא $\binom{4}{k}$. עבור כל אחד מ $4-k$ התווים הנותרים, יש שלושה שיבוצים אפשריים (עם חזרות) שהן כל הספרות שאינן k.

לכן מספר המחרוזות המקיימות P_k הוא $\binom{4}{k} \cdot 3^{4-k}$, ומספר המחרוזות המקיימות $W(1)$ הוא:

$$\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k} \cdot 3^{4-k} = \binom{4}{1} \cdot 3^3 + \binom{4}{2} \cdot 3^2 + \binom{4}{3} \cdot 3^1 + \binom{4}{4} \cdot 3^0 = 4 \cdot 27 + 6 \cdot 9 + 4 \cdot 3 + 1 = 175$$

נמצא את מספר המחרוזות המקיימות $W(2)$, כלומר קיימים $1 \le i < j \le 4$ כך ש $W(P_iP_j)$.

נשבץ את i הספרות שערכן i במקומות כלשהן במחרוזת. יש $\binom{4}{i}$ אפשרויות לעשות כן.

מתוך $4-i$ הספרות הנותרות, נשבץ את j הספרות שערכן j במקום כלשהו במחרוזת. יש $\binom{4-i}{j}$ אפשרויות לעשות כך. ב$4-i-j$ המקומות הנותרים, יש לנו 2 אפשרויות שיבוץ – 2 הספרות שאינן i וj.

לכן, מספר המחרוזות המקיימות $W(P_iP_j)$ הוא $\binom{4}{i}\binom{4-i}{j}2^{4-i-j}$.

יש לשים לב שכאשר $j > 4-i$, מספר המחרוזות המקיימות $W(P_iP_j)$ אינו מוגדר, לכן נוסיף את התנאי $j \le 4-i$ לסכום שלנו. אם כן, מספר המחרוזות המקיימות $W(2)$ הוא:

$$\sum_{\substack{1 \le i < j \le 4 \\ j \le 4-i}} \binom{4}{i}\binom{4-i}{j}2^{4-i-j} = \binom{4}{1}\binom{3}{2}2^1 + \binom{4}{1}\binom{3}{3}2^0 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 28$$

כמו כן, $W(3) = W(4) = 0$, כי במקרה הטוב לא אפשרי שתהיה מחרוזת באורך 4 בה ספרה 1 שערכה 1, 2 ספרות שערכן 2 ו-3 ספרות שערכן 3 – ובכל מקרה אחר מספר התווים במחרוזת יעלה על 6, בסתירה להגדרת המחרוזת!.

ולכן,

$$\mathrm{E}(0) = 256 - 175 + 28 - 0 + 0 = 109$$

שאלה 4

נסמן את ששת התאים השונים ב $A_1 \dots A_6$. נחשב את מספר הפיזורים המקיימים:

א. בשלושת התאים הראשונים יש לפחות 10 כדורים.

ראשית, נמצא את מספר הפיזורים בהם בשלושת הראשונים יהיו k כדורים.

פיזור k כדורים כלשהם לשלושת התאים הראשונים, ניתן לעשות ב $D(3,k)$ אופנים.
לאחר מכן, את $13-k$ הכדורים הנותרים ניתן לפזר בשלושת התאים הנותרים ב $D(3,13-k)$ אופנים.
מתקיים קשר לוגי של "וגם" בין שני הפיזורים (לדוגמה: 10 כדורים התא הראשון וגם 3 כדורים/ בתא הרביעי).
לכן, יש $D(3,k)\cdot D(3,13-k)$ אופנים לפזר את הכדורים, כך שבשלושת התאים הראשונים יהיו k כדורים.

לפי דרישות השאלה, עלינו לסכום את מספר הפיזורים בהם $k=10$, $k=11$, $k=12$ או $k=13$.
מספר הפיזורים האפשריים:

$$\sum_{k=10}^{13} D(3,k)\cdot D(3,13-k) =$$

$$= D(3,10)\cdot D(3,3) + D(3,11)\cdot D(3,2) + D(3,12)\cdot D(3,1) + D(3,13)\cdot D(3,0) =$$

$$= \binom{12}{10}\cdot\binom{5}{3} + \binom{13}{11}\cdot\binom{4}{2} + \binom{14}{12}\cdot\binom{3}{1} + \binom{15}{13}\binom{2}{0} =$$

$$= 66\cdot 10 + 78\cdot 6 + 91\cdot 3 + 105\cdot 1 =$$

$$= 1506.$$

ב. אין באף תא 3 כדורים בדיוק.

נחשב לפי משפט ההכלה וההפרדה המורחב מעמוד 99. בהתאם לחוקי ההכלה וההפרדה, נסמן: $P_1 \dots P_6$ תכונות – כך שאם מתקיימת התכונה P_i אז בתא A_i יש 3 כדורים בדיוק. (יכולים להיות עוד תאים עם 3 כדורים). עלינו למצוא את $E(0)$ – מספר הפיזורים בהם אין באף תא שלושה כדורים בדיוק.
לפי משפט ההכלה וההפרדה, מתקיים:

$$E(0) = W(0) - \binom{1}{0}W(1) + \binom{2}{0}W(2) - \binom{3}{0}W(3) + \binom{4}{0}W(4) - \binom{5}{0}W(5) + \binom{6}{0}W(6) =$$

$$= \mathrm{W}(0) - \mathrm{W}(1) + \mathrm{W}(2) - \mathrm{W}(3) + \mathrm{W}(4) - \mathrm{W}(5) + \mathrm{W}(6)$$

$W(0)$ הוא, כמובן, מספר כל הפיזורים האפשריים, כי בכל פיזור קיימים לפחות 0 תאים עם 3 כדורים.
לכן $W(0) = D(6,13) = \binom{18}{13} = 8568$.

עבור כל k המקיים $1 \le k \le 4$, נמצא את $W(k)$, מספר הפיזורים בהם קיימים k תאים (לפחות) עם 3 כדורים בדיוק, כך: נבחר את k התאים בהם יהיו 3 כדורים. ניתן לעשות זאת ב$\binom{6}{k}$ אופנים. נותרו לנו $13-3k$ כדורים, אותם יש לפזר בדרך כלשהי ב $6-k$ תאים (יכול להיות שבפיזור זה יהיו עוד תאים עם 3 כדורים – והפיזור עדיין יענה על תנאי $W(k)$).
פיזור זה ניתן לעשות ב$D(6-k,13-3k)$ אופנים. לכן, $\mathrm{W}(k) = \binom{6}{k}\cdot D(6-k,13-3k)$

כמו כן, $W(5) = W(6) = 0$, כי לא יכול להיות שיהיו 5 או 6 תאים עם 3 כדורים בדיוק, שכן מספר הכדורים הכולל הוא 13, הקטן מ-15 ומ-18.

לכן-

$$E(0) = 8568 - \binom{6}{1} \cdot D(5,10) + \binom{6}{2} \cdot D(4,7) - \binom{6}{3} \cdot D(3,4) + \binom{6}{4} \cdot D(2,1) - 0 + 0 =$$

$$= 8568 - \binom{6}{1}\binom{14}{10} + \binom{6}{2}\binom{10}{7} - \binom{6}{3}\binom{6}{4} + \binom{6}{4}\binom{2}{1} =$$

$$= 8568 - 6006 + 1800 - 300 + 30 =$$

$$= 4092$$

ג. סעיף א - כאשר 13 הכדורים שונים זה מזה (כלומר: הכדורים בצבעים שונים)

כאשר יש משמעות לסדר הכדורים בפיזור, אנחנו למעשה מתייחסים לחליפה עם חזרות של 13 איברים מתוך 6. ניתן להתייחס לחליפה זו בתור מחרוזת של הספרות $\{1,2,3,4,5,6\}$, באורך 13.

<u>נמצא את מספר המחרוזות בהן הספרות $1,2,3$ מופיעות k פעמים.</u>

את k המקומות במחרוזת לשיבוץ שלוש הספרות ניתן לבחור ב $\binom{13}{k}$ אופנים.

עבור כל מקום שנבחר במחרוזת, יש לנו 3 ספרות שאפשר לשבץ בו - הספרות 1, 2 ו-3. סך הכל 3^k אפשרויות.

עבור $13 - k$ המקומות שאינם נבחרו, יש לנו 3 ספרות שאפשר לשבץ בהם – הספרות 4, 5 ו. 6. סך הכל 3^{13-k} אפשרויות.

מספר האפשרויות הכולל - $\binom{13}{k} \cdot 3^k \cdot 3^{13-k} = \binom{13}{k} \cdot 3^{13}$ אפשרויות.

לפי דרישות השאלה, עלינו לסכום את מספר הפיזורים בהם $k = 10$, $k = 11$, $k = 12$ או $k = 13$.
מספר הפיזורים האפשריים:

$$\sum_{k=10}^{13} \binom{13}{k} \cdot 3^{13} = \binom{13}{10} \cdot 3^{13} + \binom{13}{11} \cdot 3^{13} + \binom{13}{12} \cdot 3^{13} + \binom{13}{13} \cdot 3^{13} =$$

$$= 3^{13}(286 + 78 + 13 + 1) = 602654094.$$