מטלת מנחה 15 - אינפי 1

שאלה 1

תהא הפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor \tan\frac{\pi x}{2}$

טענת עזר: $\tan\frac{\pi x}{2}$ רציפה לכל $a \notin \mathbb{Z}$

הוכחה: יהא $a \notin \mathbb{Z}$.

ברור כי לכל $k \in \mathbb{Z}$, $2k + 1 \in \mathbb{Z}$ לפי סגירות כפל וחיבור שלמים, ולכן בהכרח $a \neq 2k + 1$.

לכן, $\frac{\pi}{2}(1 + 2k) \neq \frac{\pi}{2} \cdot a \Leftarrow \frac{\pi}{2} + \pi k \neq \frac{\pi a}{2}$ ולכן $\tan\frac{\pi a}{2}$ מוגדר.

לפי 5.13, $\tan$ רציפה בכל תחום ההגדרה שלה, והפונקציה הלינארית $\frac{\pi x}{2}$ רציפה לכל מספר ממשי ובפרט עבור $x = a$. לכן, ההרכבה $\tan\frac{\pi x}{2}$ רציפה גם היא ב $x = a$.

טענה: $f(x) = \lfloor x \rfloor \tan\frac{\pi x}{2}$ רציפה לכל $a \notin \mathbb{Z}$.

הוכחה: יהא $a \notin \mathbb{Z}$. אז לפי שאלה 5.4, $\lfloor x \rfloor$ רציפה עבור a, ולפי טענת העזר $\tan\frac{\pi x}{2}$ רציפה ב-a.

לכן, $f(x)$ רציפה ב-a כמכפלה של פונקציות רציפות.

טענת עזר: לכל $a \in \mathbb{Z}$ זוגי, $\tan\frac{\pi x}{2}$ רציפה ב$x = a$ וכן $\lim_{x\to a} \tan\frac{\pi x}{2} = \tan\frac{\pi a}{2} = 0$

הוכחה: יהא $a \in \mathbb{Z}$ כך שקיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש $a = 2m$.

ברור כי לכל $k \in \mathbb{Z}$, $m \neq k + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Leftarrow a = 2m \neq 2k + 1$.

לכן, $\frac{\pi}{2}(1 + 2k) \neq \frac{\pi}{2} \cdot a \Leftarrow \frac{\pi}{2} + \pi k \neq \frac{\pi a}{2}$ ולכן $\tan\frac{\pi a}{2}$ מוגדר.

לפי 5.13, $\tan$ רציפה בכל תחום ההגדרה שלה, והפונקציה הלינארית $\frac{\pi x}{2}$ רציפה לכל מספר ממשי ובפרט עבור $x = a$. לכן, ההרכבה $\tan\frac{\pi x}{2}$ רציפה גם היא ב $x = a$.

כמו כן, לפי רציפות ומחזוריות $\tan$, $\lim_{x\to a} \tan\frac{\pi x}{2} = \tan\frac{\pi a}{2} = \tan m\pi = 0$ וסיימנו.

טענה: $f(x) = \lfloor x \rfloor \tan\frac{\pi x}{2}$ רציפה לכל $a \in \mathbb{Z}$ זוגי.

הוכחה: נחשב גבולות חד-צדדיים:

<u>גבול מימין:</u> בסביבה הימנית $(a, a + 1)$ של a מתקיים $\lfloor a \rfloor = a$,

ולכן לפי מקומיות הגבול $\lim_{x\to a^+} \lfloor x \rfloor = a$.

כעת, לפי אריתמטיקה + טענת העזר, $\lim_{x\to a^+} \lfloor x \rfloor \tan\frac{\pi x}{2} = a \cdot 0 = 0$.

<u>גבול משמאל:</u> בסביבה השמאלית $(a - 1, a)$ של a מתקיים $\lfloor a \rfloor = a - 1$,

ולכן לפי מקומיות הגבול $\lim_{x\to a^-} \lfloor x \rfloor = a - 1$.

כעת, לפי אריתמטיקה + טענת העזר, $\lim_{x\to a^-} \lfloor x \rfloor \tan\frac{\pi x}{2} = (a - 1) \cdot 0 = 0$.

לכן, לפי 4.48, $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = 0$

נוסף על כך, $\tan\frac{\pi x}{2}$ רציפה ב$x = a$ לפי טענת העזר (ולכן מוגדרת ב $x = a$), וכן $\tan\frac{\pi a}{2} = 0$
כמו כן, ידוע כי $\lfloor x\rfloor$ מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ ובפרט עבור $x = a$. נשים לב כי $\lfloor a\rfloor = a \Leftarrow a \in \mathbb{Z}$.
לכן, $f(a) = \lfloor a\rfloor \tan\frac{\pi a}{2} = a \cdot 0 = 0$.
כלומר, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$ ולכן $f(x)$ רציפה ב$x = a$ וסיימנו.

טענת עזר: לכל $a \in \mathbb{Z}$ אי-זוגי, $\tan\frac{\pi x}{2}$ לא מוגדר ב$x = a$ וכן $\lim_{x\to a^+} \tan\frac{\pi x}{2} = -\infty$.

הוכחה: יהא $a \in \mathbb{Z}$ אי-זוגי, אז קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $a = 2k + 1$.
לכן, $\frac{\pi a}{2} = \frac{\pi}{2}(2k + 1) = \pi k + \frac{\pi}{2}$ ולכן $\tan\frac{\pi a}{2}$ לא מוגדר.
לפי רציפות, $\lim_{x\to a^+} \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi(2k+1)}{2} = \pi k + \frac{\pi}{2}$
לכן, לפי אריתמטיקה, $\lim_{x\to a^+} \frac{\pi x}{2} - \pi k = \pi k + \frac{\pi}{2} - \pi k = \frac{\pi}{2}$.
כמו כן, בסביבה ימנית של a, $x > a = 2k + 1$ ולכן $\frac{\pi x}{2} - \pi k > \frac{\pi}{2} \Leftarrow \frac{\pi x}{2} > \pi k + \frac{\pi}{2}$.
ידוע כי $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$. לכן, לפי גבול של הרכבה (4.39), $\lim_{x\to a^+} \tan(\frac{\pi x}{2} - \pi k) = -\infty$.
כמו כן, לפי מחזוריות הטנגנס, $\tan(\frac{\pi x}{2} - \pi k) = \tan\frac{\pi x}{2}$,
ולכן לפי מקומיות הגבול $\lim_{x\to a^+} \tan\frac{\pi x}{2} = -\infty$ וסיימנו.

טענה: לכל $a \in \mathbb{Z}$ אי-זוגי, ל-$f(x)$ יש אי-רציפות ממין שני ב$x = a$.
הוכחה: יהא $a \in \mathbb{Z}$ אי-זוגי.
בנקודה $x = a$, לפי טענת העזר, $\tan\frac{\pi x}{2}$ לא מוגדר ולכן הפונקציה אינה מוגדרת ובהכרח אינה רציפה.
<u>נחשב גבול מימין:</u> בסביבה הימנית $(a, a + 1)$, $\lfloor a\rfloor = a$
ולכן לפי מקומיות הגבול $\lim_{x\to a^+} \lfloor x\rfloor = a$.
כעת, לפי אריתמטיקה וטענת העזר, $\lim_{x\to a^+} \lfloor x\rfloor \tan\frac{\pi x}{2} = a \cdot "-\infty" = -\infty$.

מאחר וקיבלנו גבול חד-צדדי שאינו סופי, לא יכול להיות שתתקבל נקודת אי-רציפות סליקה או ממין ראשון, ולכן קיבלנו נקודת אי-רציפות ממין שני.

שאלה 2

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0 ממשי כלשהו.

א. שלילת הפסוק: f רציפה ב x_0.

ניסוח בלשון $\epsilon - \delta$:

נשלול את הפסוק $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x,\ |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

שלילת הפסוק: $\exists\epsilon > 0,\ \forall\delta > 0,\ \exists x,\ |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

ובמילים:

קיים $\epsilon > 0$, כך שלכל $\delta > 0$ קיים x המקיים $|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$

ניסוח בלשון סדרות:

נשלול את הפסוק $\forall(x_n)_{n=1}^{\infty},\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

שלילת הפסוק: $\exists(x_n)_{n=1}^{\infty},\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$

ובמילים:

קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ וגם $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.

תהא g פונקציה הרציפה ב$x = x_0$, ותהא $D(x)$ פונקציית דיריכלה.

נגדיר $f(x) = g(x) \cdot D(x)$ לכל x ממשי.

ב. טענה: אם $g(x_0) = 0$ אז $f(x)$ רציפה ב$x = x_0$.

הוכחה: ראשית, ברור כי $f(x)$ מוגדרת בx_0, כי הפונקציה $g(x)$ רציפה בה (ולכן מוגדרת), ותחום ההגדרה של פונקציית דיריכלה הוא $\mathbb{R}$.

אם $x_0 \in \mathbb{Q}$, אז $D(x_0) = 1$ ולכן $f(x_0) = g(x_0) \cdot D(x_0) = 0 \cdot 1 = 0$.

אחרת, $D(x_0) = 0$ ולכן $f(x_0) = g(x_0) \cdot D(x_0) = 0 \cdot 0 = 0$.

קיבלנו שבשני המקרים $f(x_0) = 0$.

כעת, נחשב את $\lim_{x\to x_0} f(x)$, אם קיים.

ברור כי $D(x)$ חסומה (1 הוא חסם מלעיל שלה, ו-0 הוא חסם מלרע שלה),

ו$g(x)$ אפסה ב-$x = x_0$. לכן לפי היינה + 2.22 (חסומה × אפסה), $\lim_{x\to x_0} g(x)D(x) = 0$.

כעת, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ וסיימנו.

ג. טענה: אם $g(x_0) \neq 0$ אז $f(x)$ אינה רציפה ב-$x = x_0$.

הוכחה בלשון $\epsilon - \delta$: נבחר $\epsilon = \frac{|g(x_0)|}{2} > 0$, ונפצל לשני מקרים:

אילו $x_0 \in \mathbb{Q}$, אז $f(x_0) = g(x_0) \cdot D(x_0) = g(x_0) \neq 0$

ואז לכל $\delta > 0$, לפי צפיפות האי-רציונליים ב-$\mathbb{R}$ (שאלה 1.62),
קיים מספר אי-רציונלי $r \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. נבחר $x = r$, אז $|x - x_0| < \delta$,
ומאי-רציונליות x נקבל $f(x) = g(x) \cdot D(x) = g(x) \cdot 0 = 0$.
כעת, $g(x_0) \neq 0 \Leftarrow |g(x_0)| > 0$, ונקבל:

$\epsilon = \frac{|g(x_0)|}{2} < |g(x_0)| = |0 - g(x_0)| = |f(x) - f(x_0)|$ וסיימנו.

אילו $x_0 \notin \mathbb{Q}$, $f(x_0) = g(x_0) \cdot D(x_0) = g(x_0) \cdot 0 = 0$.

לפי רציפות g ב $x = x_0$, עבור ϵ קיים $\delta' > 0$ כך שלכל x המקיים $|x - x_0| < \delta'$,

מתקיים $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon = \frac{|g(x_0)|}{2}$.

לפי שאלה 1.39, $||g(x)| - |g(x_0)|| \leq |g(x) - g(x_0)| < \frac{|g(x_0)|}{2}$,

ולכן $-\frac{|g(x_0)|}{2} < |g(x)| - |g(x_0)| < \frac{|g(x_0)|}{2}$, כלומר $\frac{|g(x_0)|}{2} < |g(x)| < 3\frac{|g(x_0)|}{2}$

ובפרט $|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{2}$ לכל $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$.

אז לכל $\delta > 0$, לפי צפיפות המספרים הרציונליים ב $\mathbb{R}$ (משפט 1.66), קיים מספר רציונלי $q \in (x_0 - min\{\delta, \delta'\}, x_0 + min\{\delta, \delta'\})$. נבחר $x = q$.

אז ברור כי $x_0 - \delta \leq x_0 - min\{\delta, \delta'\} < x < x_0 + min\{\delta, \delta'\} < x_0 + \delta$,

ולכן $|x - x_0| < \delta$ כנדרש.

כעת, נשים לב ש $x_0 - \delta' \leq x_0 - min\{\delta, \delta'\} < x < x_0 + min\{\delta, \delta'\} < x_0 + \delta'$,

ולכן $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta') \Rightarrow |g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{2}$.

מרציונליות x, $f(x) = g(x) \cdot D(x) = g(x)$.
כעת,

$\epsilon = \frac{|g(x_0)|}{2} < |g(x)| = |g(x) - 0| = |f(x) - f(x_0)|$ וסיימנו.

הוכחה בלשון סדרות: עבור x_0, לפי למה 5.9, קיימות סדרות $(x_n), (y_n)$ השואפות ל-x_0,
כל שלכל n טבעי, $x_n \in \mathbb{Q}$ ו-$y_n \notin \mathbb{Q}$.

אילו $x_0 \notin \mathbb{Q}$, אז $f(x_0) = g(x_0) \cdot D(x_0) = 0$. ניקח את (x_n) השואפת ל-x_0.

אז נחשב: לכל n טבעי, $f(x_n) = g(x_n) \cdot D(x_n) = g(x_n) \cdot 1 = g(x_n)$.

לפי הנתון, $g(x)$ רציפה ב-x_0 ולכן לפי היינה עבור x_0, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$

לכן, לפי יחידות הגבול,

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) \neq 0 = f(x_0)$ וסיימנו.

אחרת, אילו $x_0 \in \mathbb{Q}$, אז $f(x_0) = g(x_0) \cdot D(x_0) = g(x_0) \neq 0$. ניקח את (y_n) השואפת לx_0.

אז נחשב: $f(y_n) = g(y_n) \cdot D(y_n) = g(y_n) \cdot 0 = 0$, ולכן:

$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 0 \neq f(x_0)$ וסיימנו

הוכחה בדרך השלילה: נניח בשלילה כי $f(x)$ רציפה ב x_0.

לפי ההנחה $g(x_0) \neq 0$, ולכן המנה $\frac{f}{g}$ של פונקציות רציפות בx_0 רציפה גם היא ב$x = x_0$.

אבל לפי הגדרת f, $D(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ולכן רציפה ב$x = x_0$, בסתירה למשפט 5.10, לפיו פונקציית דיריכלה אינה רציפה באף נקודה ובפרט ב $x = x_0$.

שאלה 3

תהא f רציפה ב $[0,\infty)$, כך שלכל $x > 0$ מתקיים $|f(x)| > x$.

טענת עזר: לכל $x > 0$, $f(x) \neq 0$.
הוכחה: יהא $x > 0$, אז לפי הנתון וטרנזיטיביות, $|f(x)| > x > 0 \Leftarrow |f(x)| > 0$.
אילו $f(x) = 0$, אז $|f(x)| = 0$ ונקבל סתירה.

טענת עזר: f חיובית לכל $x > 0$ או f שלילית לכל $x > 0$.
הוכחה: נניח בשלילה כי קיימים $a, b > 0$ כך ש $f(a) < 0$ ו-$f(b) > 0$.
נניח ללא הגבלת הכלליות כי $a < b$.
אז לפי משפט ערך הביניים עבור הקטע $[a, b] \subseteq [0,\infty)$ ועבור $f(a) \leq 0 \leq f(b)$,
קיים $c \in [a, b]$ כך ש $f(c) = 0$.
נשים לב: $c \in [a, b] \Leftarrow c \geq a > 0 \Leftarrow c > 0$ לפי טרנזיטיביות.
לכן בפרט, קיים $c > 0$ כך ש $f(c) = 0$, בסתירה לטענה הקודמת!

טענה: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ או $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

הוכחה: מהטענה הקודמת, f חיובית לכל $x > 0$ או f שלילית לכל $x > 0$. נפריד למקרים:
אילו f חיובית, אז $f(x) = |f(x)| > x$ לכל x.
לכן לפי היינה + 2.45 עבור $\lim_{x\to\infty} x = \infty$, מתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

אילו f שלילית, אז $-f(x) = |f(x)| > x$ לכל x, ולכן $-x >- f(x)$.
לפי אריתמטיקה, $\lim_{x\to\infty} - x =- \infty$,

ולכן לפי היינה + 2.45 מתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x) =- \infty$.

שאלה 4

תהא f רציפה בקטע $[0,\infty)$, כך ש $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

א. טענה: אם f מקבלת מינימום בקטע $[0,\infty)$, אז קיים $x_0 \geq 0$ כך ש $f(x_0) \leq L$.

הוכחה: נסמן בx_0 את המינימום בקטע $[0,\infty)$.

לפי ההגדרה, לכל $x \in [0,\infty)$, ובפרט x בסביבה $(0,\infty)$ של ∞, מתקיים $f(x_0) \leq f(x)$.

לכן, לפי משפט 4.41 (הכללה עבור גבול באינסוף), מתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x_0) \leq \lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

ברור כי הפונקציה $y = f(x_0)$ היא קו ישר, לכן מרציפות $\lim_{x\to\infty} f(x_0) = f(x_0)$.

נקבל $f(x_0) \leq L$ וסיימנו.

ב. טענה: אם קיים $x_0 \geq 0$ כך ש $f(x_0) < L$ אז f מקבלת מינימום ב $[0,\infty)$.

הוכחה: נפצל לתחומים.

ראשית, מהגדרת הגבול עבור $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, לכל $\epsilon > 0$,

ובפרט עבור $0 < \frac{L-f(x_0)}{2} = \epsilon$ (הרי לפי ההנחה $f(x_0) < L$), יש $M \geq 0$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$.

מהגדרת הערך המוחלט, $|f(x) - L| = max\{f(x) - L, L - f(x)\}$.

לכן, $L - f(x) \leq |f(x) - L| < \epsilon = \frac{L-f(x_0)}{2}$, ואז $-f(x) < \frac{-L-f(x_0)}{2}$ ולכן $f(x) > \frac{L+f(x_0)}{2}$.

כעת, מאחר ו $f(x_0) < L$, $f(x) > \frac{L+f(x_0)}{2} > \frac{2\cdot f(x_0)}{2} = f(x_0)$.

לכן, לכל $x > M$ מתקיים $f(x) > f(x_0)$.

נתבונן בתחום $[0,M]$. לפי הנתון f רציפה בקטע $[0,\infty)$ ובפרט בתת-הקטע $[0,M]$.

לכן, לפי 5.37 עבור קטע זה, f תקבל מינימום ב$[0,M]$, ונסמן אותו ב x_{min}.

מאחר ו-$0 \leq x_0 \leq M$, אז בפרט לפי הגדרת המינימום מתקיים $f(x_0) \geq f(x_{min})$.

כעת, יהא $x \in [0,\infty)$ כלשהו.

אילו $x \in [0,M]$, אז לפי הגדרת המינימום מתקיים $f(x) \geq f(x_{min})$.

אחרת, $x > M$ ומתקיים $f(x) > f(x_0)$, לכן לפי טרנזיטיביות $f(x) > f(x_{min})$.

לכן x_{min} נקודת מינימום בקטע $[0,\infty)$ וסיימנו.

ג. טענה: אם קיים $x_0 \geq 0$ כך ש $f(x_0) = L$, אז f מקבלת מינימום ב $[0,\infty)$.

הוכחה: אילו לכל $x \geq 0$ מתקיים $f(x) \geq L = f(x_0)$, אז לפי הגדרה x_0 מינימום ב$[0,\infty)$ וסיימנו.

אחרת, קיים $x' \geq 0$ המקיים $f(x') < L$ ולכן לפי סעיף ב' f מקבלת מינימום וסיימנו.

שאלה 5

תהא הפונקציה $f(x) = \frac{(2x+\sin x)\arctan x}{x^2}$. נרצה לבדוק האם היא מקבלת מינימום בקטע $(0,\infty)$.

על מנת להיעזר בשאלה 4, נרצה להרחיב את הפונקציה לתחום $[0,\infty)$. לשם כך, נחשב גבול מימין בנקודה $x = 0$.

טענה: $\lim_{x\to0^+} f(x) = 3$

חישוב: נחשב:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{(2x+\sin x)\arctan x}{x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x+\sin x}{x} \cdot \frac{\arctan x}{x}$$

לפי אריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{2x+\sin x}{x} \cdot \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x+\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to0^+} \frac{\arctan x}{x}$$

נחשב את הגבול $\lim_{x\to0^+} \frac{\arctan x}{x}$. נסמן $t = \arctan x$, אז $x = \tan t$.

מרציפות פונקציית הטנגנס בנקודה $x = 0$ שבתחום הגדרתה (לפי 5.13),

ולפי משפט 4.48, מתקיים $\lim_{t\to0^+} \tan t = \lim_{t\to0} \tan t = 0$. כמו כן, בסביבה הימנית $(0,\frac{\pi}{4})$ של $t = 0$ מתקיים $\tan t > 0$ כנדרש. לכן, לפי הכללת גבול של הרכבה (4.39) עבור גבול חד-צדדי, מתקיים:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t\to0^+} \frac{t}{\tan t} =_{(1)} \lim_{t\to0^+} \frac{t}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \lim_{t\to0^+} \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t =_{(2)} 1 \cdot 1 = 1$$

מעברים:

(1) לפי הזהות הטריגונומטרית הידועה $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) לפי אריתמטיקה 4.48 + 4.45+ רציפות פונקציית הקוסינוס (5.13)

כעת, נחשב את הגבול $\lim_{x\to0^+} \frac{2x+\sin x}{x}$. לפי אריתמטיקה + 4.45 + 4.48:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{2x+\sin x}{x} = \lim_{x\to0^+} (2 + \frac{\sin x}{x}) = 2 + 1 = 3$$

לסיכום, $\lim_{x\to0^+} f(x) = 3 \cdot 1 = 3$.

נראה כי f רציפה ב$(0,\infty)$.

טענה: f רציפה ב $(0,\infty)$.

הוכחה: הפונקציות $2x,\ x^2, \sin x, \arctan x$ כולן פונקציות רציפות ידועות (פולינומים + טריגו')

לכן, הפונקציה $(2x + \sin x)\arctan x$ רציפה כסכום\מכפלה של פונקציות רציפות.

בתחום $(0,\infty)$, מתקיים $x^2 \neq 0$ ולכן $f(x)$ רציפה כמנה של פונקציות רציפות (מכנה אינו אפס) וסיימנו.

כמו כן, נרצה להראות קיום גבול סופי ב $x \to \infty$.

טענה: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

חישוב: לפי אריתמטיקה (הכללה עבור גבול במובן הרחב):

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\frac{2}{x} + (\frac{1}{x})^2 \cdot \sin x) \cdot \arctan x$$

נחשב את הגבולות הבאים:

בסביבה $(1, \infty)$ של ∞, מתקיים $x \neq 0$,

ולכן לפי אריתמטיקה $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot "\frac{1}{\infty}" = 2 \cdot 0 = 0$

וכן $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})^2 = 0^2 = 0$

ברור כי בסביבה $(1, \infty)$ מתקיים גם $|\sin x| \leq 1$, ולכן לפי היינה + 2.22 (חסומה × אפסה),

מתקיים $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})^2 \cdot \sin x = 0$.

לסיכום, $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} + (\frac{1}{x})^2 \cdot \sin x = 0$

נעבור לחישוב הגבול $\lim_{x\to\infty} \arctan x$. ברור כי לכל x מתקיים $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$,

ואז שוב, לפי היינה + 2.22 (חסומה × אפסה) עבור $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} + (\frac{1}{x})^2 \cdot \sin x = 0$, מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\frac{2}{x} + (\frac{1}{x})^2 \cdot \sin x) \cdot \arctan x = 0$$

כמו כן, נוכיח טענה חשובה:

טענה: לכל $x \in (0, \infty)$, $f(x) > 0$.

הוכחה: נחסום מלמטה את המונה.

בתחום $[0, \pi)$, מתקיים $\sin x \geq 0$ וכן $2x > 0$ ולכן $2x + \sin x > 0$.

כמו כן, בתחום (π, ∞) מתקיים $\sin x \geq -1$ וכן $2x > 2\pi$ ולכן $2x + \sin x > 2\pi - 1 > 0$.

קיבלנו שלכל $x > 0$ הביטוי $2x + \sin x$ חיובי.

כעת, לפי הגדרת פונקציית ה $\arctan$, לכל $x > 0$ מתקיים $\arctan x > 0$ ולכן מונה הפונקציה חיובי לכל $x > 0$ כמכפלה של ביטויים חיוביים.

המכנה x^2 חיובי גם הוא, ולכן $f(x) > 0$ כמנה של ביטויים חיוביים וסיימנו.

כעת, נגדיר $h: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ כך שלכל $x \geq 0$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

ניעזר בפונקציה זו ובשאלה 4.

טענה: h רציפה ב$[0, \infty)$, ו $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$

הוכחה: בתחום $(0, \infty)$, מתקיים $h(x) = f(x)$ ומאחר ו-f רציפה בתחום זה, גם h רציפה בו.

כמו כן, ממקומיות הגבול, $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} = 0$.

כעת, נוכיח כי h רציפה מימין ב$x = 0$. בסביבה מימין של 0 מתקיים $x > 0$,

ולכן $h(x) = f(x)$. לכן, ממקומיות הגבול, $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 3 = h(0)$ וסיימנו.

לכן, h מקיימת את התנאים הנדרשים בשאלה 4. משאלה 4 נסיק כי h מקבלת מינימום בקטע $[0,\infty)$ אם ורק אם קיים $x_0 \geq 0$ כך ש $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0 < h(x_0)$.

אולם, לכל $x > 0$, לפי טענות קודמות, $h(x) = f(x) > 0$, וכן $h(0) = 3 > 0$, ולכן לא קיים x כנדרש ו-$h(x)$ לא מקבלת מינימום ב$[0,\infty)$.

כלומר: לכל $x \geq 0$, קיים $x' \geq 0$ כך ש $h(x) < h(x')$.

טענה: $f(x)$ לא מקבלת מינימום ב$(0,\infty)$.
הוכחה: יהא $x \in (0,\infty)$.
אז קיים $x' \in [0,\infty)$ כך ש $f(x) = h(x) > h(x')$.
מאחר ולא קיים ל-h מינימום ב $[0,\infty)$, אז בפרט עבור 0 קיים $x'' \in [0,\infty)$
כך ש $h(0) > h(x'')$.
לכן ברור כי $x'' \neq 0$ (אחרת היה מתקיים שוויון) ולכן $x'' > 0 \Leftarrow h(x'') = f(x'')$

אילו $x' = 0$, אז כאמור x'' מקיים $f(x) > h(0) > h(x'') = f(x'')$.
אחרת, $x' > 0$ ולכן $h(x') = f(x')$, ולכן x' מקיים $f(x) > f(x')$.
בשני המקרים נקבל כי x אינו מינימום של f ב $(0,\infty)$ וסיימנו.

שאלה 6

א. טענה: $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ רציפה במידה שווה ב $[0, \infty)$

טענת עזר: לכל $x, y \geq 1$ מתקיים $0 < \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}} \leq 2$

הוכחת טענת העזר: יהיו $x, y \geq 1$.

אז מתקיים $x > 0 \Leftarrow x^2 > 0 \Leftarrow x^2 + x > x^2 > 0 \Leftarrow x > 0 = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + x}$,

ובאופן דומה $\sqrt{y^2 + y} > y > 0$.

ומכאן, $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{y^2 + y} \geq x + y > 0$.

כמו כן, $x + y + 1 \geq 3 > 0$.

לכן, נקטין את מונה הביטוי (מונה ומכנה חיוביים), ונקבל:

$$0 < \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}} < \frac{x+y+1}{x+y} < 1 + \frac{1}{x+y}$$

נשים לב כי $x + y \geq 1 + 1 = 2$, ולכן $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{2} \Leftarrow 2 > \frac{3}{2} \geq 1 + \frac{1}{x+y}$,

ולפי טרנזיטיביות נקבל:

$$0 < \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}} \leq 2$$

וסיימנו.

הוכחת הטענה: נוכיח לפי הגדרה כי f רב"ש ב$[1, \infty)$.

יהא $\epsilon > 0$ ואז נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, ולכל $x, y \in [1, \infty)$ המקיימים $|x - y| < \delta$, נחשב:

$$f(x) - f(y) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{y^2 + y} =_{(1)} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{y^2 + y}) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}} =$$

$$= \frac{(x^2+x)-(y^2+y)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}} = \frac{x^2-y^2+x-y}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}} =_{(2)} \frac{(x-y)(x+y+1)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}} = (x - y) \cdot \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}}$$

כעת,

$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |\frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}}| <_{(3)} \delta \cdot 2 =_{(4)} \epsilon$ וסיימנו.

מעברים:

(1) כפל בצמוד. $x > 0 \Leftarrow x^2 + x > x^2 > 0 \Leftarrow$ הביטוי $\sqrt{x^2 + x}$ מוגדר וחיובי.
באופן דומה $\sqrt{y^2 + y}$ מוגדר וחיובי ולכן הסכום $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{y^2 + y}$ מוגדר וחיובי,ולכן המכנה מוגדר.

(2) $x^2 - y^2 + (x - y) = (x - y)(x + y) + (x - y) = (x - y)(x + y + 1)$

(3) מההנחה על x, y, $|x - y| < \delta$.
מטענת העזר $0 < \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}} \leq 2$, ולכן $|\frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}}| = \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}} \leq 2$.

(4) לפי בחירת δ.

כעת, נוכיח כי f רב"ש ב $[0, 1]$. בקטע $[0, 1]$, f רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות (פולינומים לפי 5.12, ופונקציית שורש בתת-קטע של $[0, \infty)$ לפי 5.5 ו-5.17). לכן, לפי משפט קנטור (5.48), f רציפה במידה שווה בקטע זה.

קיבלנו כי f רציפה במידה שווה בשני קטעים החופפים בנק' $x = 1$. לכן, לפי שאלה 49 ביחידה 5, f רציפה באיחוד הקטעים $[0, \infty)$.

ב. טענה: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ רציפה במידה שווה ב $(0, \infty)$.

הוכחה: ראשית, נחשב את הגבול מימין ב-0 של $f(x)$.
לפי אריתמטיקה, לפי רציפות מימין של פונקציית השורש ב $x = 0$ (5.17), הגוררת
$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0^+} = 0$, ומכאן לפי חסומה × אפסה (לפי היינה + 2.22) עבור $|\sin\frac{1}{x}| \le 1$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

כעת נגדיר $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ כך שלכל $x \ge 0$:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ f(x) & x > 0 \end{cases}$$

בתחום $(0,\infty)$, $h(x) = f(x)$. הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $(0,\infty)$ כמכפלה\הרכבה של פונקציות רציפות ידועות (רציונלית כאשר $x > 0$ ולכן מכנה $\neq 0$ לפי 5.12, סינוס לפי 5.7, ופונקציית השורש לפי 5.5). לכן בתחום זה גם $h(x)$ רציפה.
כמו כן, בסביבה הימנית $(0,1)$ של $x = 0$ מתקיים $x > 0 \Leftarrow h(x) = f(x)$, ולכן לפי מקומיות הגבול וחישוב קודם:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = h(0)$$

ולכן h רציפה מימין ב$x = 0$. לסיכום, נסיק כי h רציפה ב $[0,\infty)$.

כעת, נחשב את הגבול של h באינסוף.
בסביבה $(1,\infty)$ של אינסוף מתקיים $x > 0 \Leftarrow h(x) = f(x)$, וכן $x \neq 0$ ולכן $\frac{x}{x} = 1$.
לכן ממקומיות הגבול + אריתמטיקה:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\cdot x\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

נסמן $t = \frac{1}{x}$. כאשר $t \to 0^+$, אז לפי אריתמטיקה וכלל "$\frac{1}{0^+}$" מתקיים $x \to \infty$, וכן עבור $x > 1$ בסביבה המדוברת, מתקיים $\frac{1}{x} > 0$. לכן, לפי החלפת משתנים (4.39), 4.48 ו-4.45:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

כמו כן, לפי הגבול הידוע $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x} = \infty$ וכלל "$\frac{1}{\infty}$", מתקיים $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0\cdot 1 = 0$$

לכן, עבור h הרציפה ב $[0,\infty)$ ובעלת גבול סופי באינסוף, נקבל לפי שאלה 48 ביחידה 5 כי h רציפה במידה שווה ב $[0,\infty)$. בפרט, לפי שאלה 44 ביחידה 5, h רב"ש בתת-התחום $(0,\infty)$. בתת-תחום זה $h(x) = f(x)$ ולכן $f(x)$ רב"ש בתחום $(0,\infty)$.

ג. טענה: הפונקציה $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ לא רציפה במידה שווה ב $(0, 1)$.

טענת עזר: הגבול $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ לא קיים.

הוכחת טענת העזר: נוכיח לפי הגדרת היינה.

נבחר $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ ו-$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$. לפי אריתמטיקה וכלל "$\frac{1}{\infty}$",

כאשר $n \to \infty$ מתקיים $(2\pi n + \frac{\pi}{2}) \to \infty$, $(2\pi n)$ ולכן $x_n, y_n \to_{n\to\infty} 0$ כנדרש.

כעת, לפי מחזוריות פונקציית הסינוס, נקבל:

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = \sin 2\pi n = \sin 0 = 0 \to_{n\to\infty} 0$$

$$f(y_n) = \sin\frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}} = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \to_{n\to\infty} 1$$

מאחר וקיימות שתי סדרות שונות השואפות לאפס, שתמונותיהן בf שואפות לגבולות אחרים, נקבל כי לf אין גבול ב$x = 0$ וסיימנו.

הוכחת הטענה: ראשית, נשים לב כי $\sin\frac{1}{x}$ רציפה ב $(0, 1)$ כהרכבה של פונקציות רציפות ידועות (רציונלית כאשר מכנה $\neq 0$ לפי 5.12, ופונקציית הסינוס לפי 5.7).

לפי טענת עזר, לf אין גבול ב $x = 0$, בפרט לפי 4.48 אין ל-f גבול מימין ב $x = 0$,

ולכן לפי משפט 5.49 f לא רציפה במידה שווה ב $(0, 1)$.