15.09.2021

מטלת מנחה 16 – מתמטיקה בדידה

שאלה 1

עבור העץ $T=(V,E)$, כאשר $|V|=n\geq 5$ ויש בדיוק 3 עלים בT.

נוכיח כי:

טענת עזר: לא קיים צומת מדרגה הגדולה מ3

T עץ, לכן לפי משפט 2.5 מתקיים $|E|=|V|-1=n-1$.

לכן, לפי הגדרה, סכום הדרגות בעץ הוא $2|E|=2n-2$.

בעץ קיימים 3 עלים, לכן סכום הדרגות של כל הצמתים שאינם עלים הוא $2n-2-3=2n-5$. $n\geq 5$ ולכן סכום הדרגות מוגדר היטב. אלו צריכים להתחלק בין $n-3$ צמתים.

אילו היה קיים צומת בין הצמתים שדרגתו גדולה מ3, (כלומר: לפחות 4), אז סכום $n-4$ הצמתים הנותרים הוא לכל היותר $2n-5-4=2n-9$

אבל סכום $n-4$ הצמתים הנותרים, שדרגתם היא לפחות 2 (כי אינם עלים ועץ הוא קשיר), הוא לכל הפחות $2(n-4)=2n-8$. סתירה! $2n-9<2n-8$ ולכן לא קיים אף מספר הקטן מ$2n-9$ וגדול מ$2n-8$!

א. קיים צומת יחיד בעל דרגה 3.

לפי טענת העזר, סכום הדרגות של כל הצמתים שאינם עלים הוא $2n-5$, ואלה מתחלקים בין $n-3$ צמתים.

לכן, לפי עיקרון שובך היונים, קיים צומת שדרגתו $\left\lceil\frac{2n-5}{n-3}\right\rceil$. מאחר ו $3=\frac{3n-9}{n-3}<\frac{2n-5}{n-3}<\frac{2n-6}{n-3}=2$ (כי $n\geq 5$), מתקיים כי $\left\lceil\frac{2n-5}{n-3}\right\rceil=3$ ולכן קיים צומת שדרגתו לפחות 3. דרגת צומת זה, לפי טענת העזר, לא יכולה להיות גדולה מ-3 ולכן היא בוודאות 3.

נותר להוכיח כי צומת זה הוא יחיד.
נניח בשלילה כי קיימים 2 צמתים שונים $u,v\in V$, כך ש $\deg_T(u)=\deg_T(v)=3$. לכן סכום הדרגות של $n-3-2=n-5$ הצמתים שנותרו, יהיו $2n-5-2\cdot 3=2n-11$.

דרגת כל אחת מן הצמתים שנותרו חייבת להיות 2 או גדולה מ-2 (אחרת הצומת היא עלה), לכן סכום הדרגות של הצמתים שנותרו הוא לכל הפחות $2(n-5)=2n-10$.

אבל $2n-11<2n-10$! סתירה!

הוכחנו כי קיים צומת יחיד שדרגתו 3.

ב. לכל $v\in V$, אם $deg_T(v)\neq 1,3$ אז $deg_T(v)=2$

תהי v צומת. לפי טענת העזר $\deg_T(v)\leq 3$. לפי ההנחה דרגת הצומת אינה 3 ולכן $\deg_T(v)\leq 2$.

מאחר וv אינו עלה, ודרגתו בוודאות אינה 0 כי עץ הוא קשיר, דרגתו היא לפחות 2. כמו כן, לפי ההנחה דרגתו אינה 3. לכן דרגת הצומת היא בוודאות 2.

ג. הגרף המשלים $\bar{T}$ אינו אוילרי

נחשב את דרגות הצמתים ב$\bar{T}$, המשלים של T ביחס ל K_n, שהוא $n-1$ רגולרי.

עבור שלושת העלים ב-T, דרגותיהם ב$\bar{T}$ הם $n-1-1=n-2$.
עבור הצומת מדרגה 3, דרגתו ב$\bar{T}$ היא $n-1-3=n-4$.
עבור שאר הצמתים, שדרגותיהם T, דרגותיהם ב$\bar{T}$ הם $n-1-2=n-3$

לכן ב $\bar{T}$ יש צומת אחד מדרגה $n-4$, שלושה צמתים מדרגה $n-2$, ו$n-4$ צמתים מדרגה $n-3$.

אילו n אי-זוגי: אז ב$\bar{T}$ יש 4 צמתים מדרגה אי-זוגית, אלו הם שלוש הצמתים מדרגה $n-2$ והאחד מדרגה $n-4$. על מנת שT יהיה אוילרי דרגות כל הצמתים צריכות להיות זוגיות, ולכן $\bar{T}$ אינו אוילרי במקרה זה.

אילו n זוגי: אז ב$\bar{T}$ יהיו $n-4$ צמתים ($n\geq 5$, לכן בוודאות יהיו צמתים כאלה) מדרגה $n-3$, שהיא דרגה אי-זוגית. מאחר ולא כל הדרגות זוגיות, הגרף $\bar{T}$ אינו אוילרי.

ד. ב $\bar{T}$ יש מסלול אוילר אם ורק אם $n=6$

נבחן ארבעה מקרים, ונוכיח שרק באחד מהם $\bar{T}$ יש מסלול אוילר: (1) $n<6$ (לכן $n=5$ כי נתון $n\geq 5$), (2) $n>6$ ואי-זוגי, (3) $n>6$ וזוגי, (4) $n=6$

מקרה 1: לפי הסעיף הקודם עבור $n=5$, ב$\bar{T}$ יש צומת אחד מדרגה 1, שלושה צמתים מדרגה 3, וצומת אחד מדרגה 2. כלומר – יש 4 צמתים מדרגה אי-זוגית, לכן אין מסלול אוילר ב$\bar{T}$ כי אילו היה אז ב$\bar{T}$ היו 0 או 2 צמתים מדרגה אי-זוגית.

מקרה 2: לפי הסעיף הקודם עבור n אי-זוגי, ב$\bar{T}$ יש 4 צמתים מדרגה אי-זוגית, ו לכן אין מסלול אוילר ב$\bar{T}$ כי אילו היה אז ב$\bar{T}$ היו 0 או 2 צמתים מדרגה אי-זוגית.

מקרה 3: לפי הסעיף הקודם עבור n זוגי, ב$\bar{T}$ יהיו $n-4$ צמתים מדרגה $n-3$, שהיא דרגה אי-זוגית.
$n>6 \Leftarrow n-4>2$ ולכן יש יותר משני צמתים בעלי דרגה אי-זוגית, מה שגורר בהכרח את הקביעה כי ב$\bar{T}$ אין מסלול אוילר

מקרה 4: לפי הסעיף הקודם ועבור $n=6$, ב$\bar{T}$ יש שלושה צמתים מדרגה 4, צומת אחד מדרגה 2, ו2 צמתים מדרגה 3. כלומר – מספר הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית הוא בדיוק 2, ולכן קיים ב$\bar{T}$ מסלול אוילר.

ה. לכל $n\geq 7$, $\bar{T}$ המילטוני

יהיו $u,v\in V$ צמתים שונים כלשהם מ$\bar{T}$. נראה כי בכל מקרה $\deg_{\bar{T}}(u)+\deg_{\bar{T}}(v)\geq n$.

נמנה את המקרים:
(1) דרגת שני הצמתים היא $n-2$
(2) דרגת צומת אחד היא $n-4$, ודרגת הצומת השני היא $n-2$
(3) דרגת צומת אחד היא $n-3$, ודרגת הצומת השני היא $n-2$
(4) דרגת שני הצמתים היא $n-3$
(5) דרגת צומת אחד היא $n-4$, ודרגת הצומת השני היא $n-3$

מבין חמשת המקרים, סכום הדרגות עקטן ביותר יתקבל במקרה 5, כאשר שני המחוברים הם המינימליים ביותר האפשריים. לכן, בכל מקרה מתקיים $\deg_{\bar{T}}(u)+\deg_{\bar{T}}(v)\geq n-4+n-3=2n-7$

מאחר ו$n\geq 7 \Leftarrow n-7\geq 0 \Leftarrow 2n-7\geq n$ ולכן לפי טרנזיטיביות $\deg_{\bar{T}}(u)+\deg_{\bar{T}}(v)\geq n$.

אי-השוויון נכון גם בפרט עבור u,v כלשהם שאינם שכנים, לכן לפי משפט אור נקבל כי $\bar{T}$ המילטוני.

15.09.2021

שאלה 2

א. נפתח את סדרות הפרופר. לשם הנימוק, נפרט את הערכים ברשימות העלים $L(V_1)$ ו$L(V_2)$, את ערכי הסדרה ואת קבוצת הקשתות בכל איטרציה ובסוף נצייר את העץ.

(1) עבור הסדרה $(\mathbf{5},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{7},\mathbf{8},\mathbf{8})$

$$L = 1,2,3,4,9,10, \quad S = (5,5,6,6,7,7,8,8), E = \phi$$

$$L = 2,3,4,9,10, \quad S = (5,6,6,7,7,8,8), \quad E = \{v_1v_5\}$$

$$L = 3,4,9,10,5 \quad S = (6,6,7,7,8,8), \quad E = \{v_1v_5, v_2v_5\}$$

$$L = 4,9,10,5 \quad S = (6,7,7,8,8), \quad E = \{v_1v_5, v_2v_5, v_3v_6\}$$

$$L = 9,10,5,6 \quad S = (7,7,8,8), \quad E = \{v_1v_5, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_6\}$$

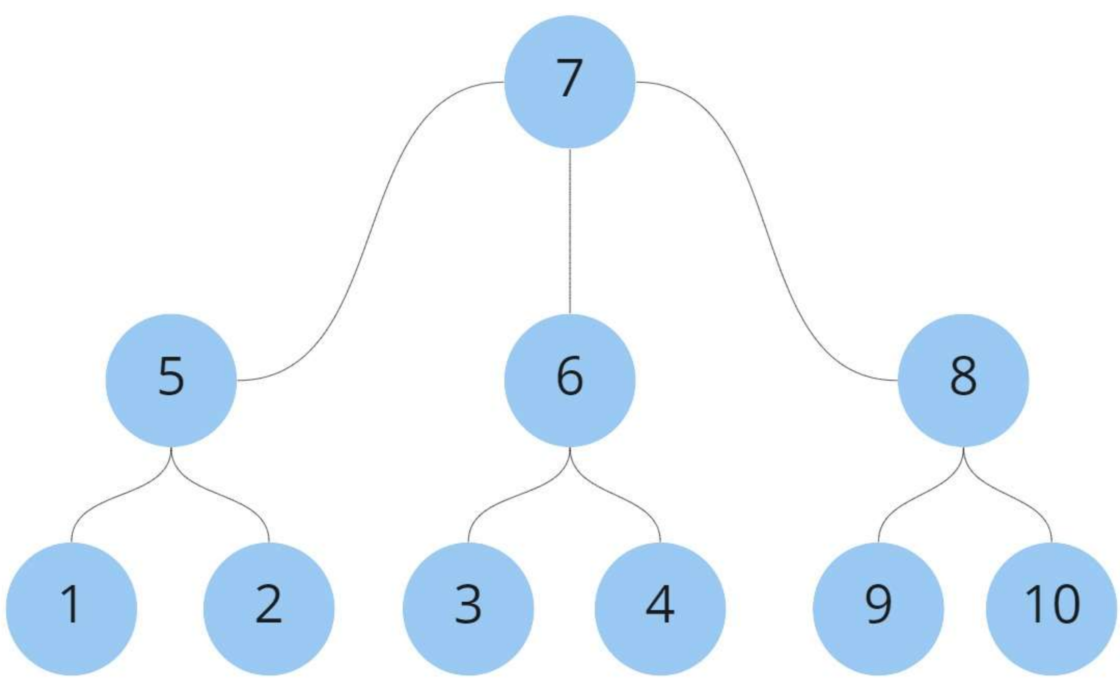
$$L = 9,10,6 \quad S = (7,8,8), \quad E = \{v_1v_5, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_6, v_5v_7\}$$

$$L = 9,10,7 \quad S = (8,8), \quad E = \{v_1v_5, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_6, v_5v_7, v_6v_7\}$$

$$L = 9,10 \quad S = (8), \quad E = \{v_1v_5, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_6, v_5v_7, v_6v_7, v_7v_8\}$$

$$L = 10,8 \quad S = (), \quad E = \{v_1v_5, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_6, v_5v_7, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9\}$$

$$E = \{v_1v_5, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_6, v_5v_7, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_8v_{10}\}$$



15.09.2021

(2) עבור הסדרה $\mathbf{(5,6,7,8,9,10,9,8)}$

$$L = 1,2,3,4,\ \ S = (5,6,7,8,9,10,9,8),\ \ E = \phi$$

$$L = 2,3,4,5\ \ \ S = (6,7,8,9,10,9,8),\ \ E = \{v_1v_5\}$$

$$L = 3,4,5,6\ \ \ S = (7,8,9,10,9,8),\ \ E = \{v_1v_5, v_2v_6\}$$

$$L = 4,5,6,7\ \ \ S = (8,9,10,9,8),\ \ E = \{v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7\}$$

$$L = 5,6,7\ \ \ S = (9,10,9,8),\ \ E = \{v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8\}$$

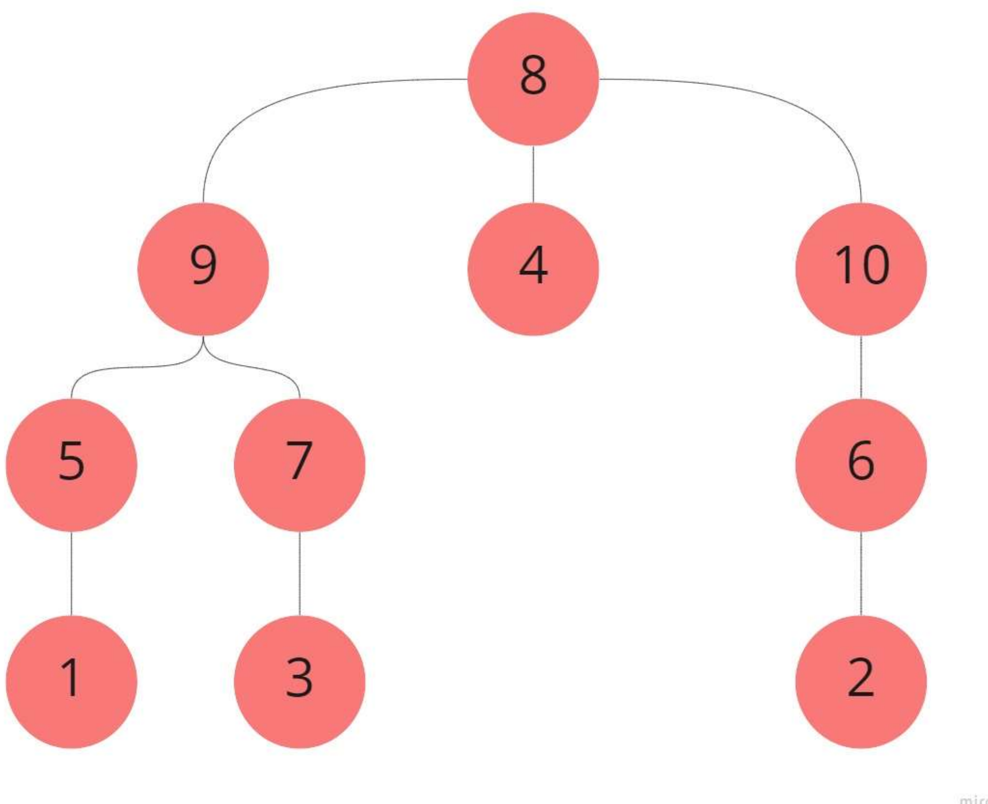
$$L = 6,7\ \ \ S = (10,9,8),\ \ E = \{v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8, v_5v_9\}$$

$$L = 7,10\ \ \ S = (9,8),\ \ E = \{v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8, v_5v_9, v_6v_{10}\}$$

$$L = 10,9\ \ \ S = (8),\ \ E = \{v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8, v_5v_9, v_6v_{10}, v_7v_9\}$$

$$L = 10,8\ \ \ S = (),\ \ E = \{v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8, v_5v_9, v_6v_{10}, v_7v_9, v_8v_9\}$$

$$E = \{v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8, v_5v_9, v_6v_{10}, v_7v_9, v_8v_9, v_8v_{10}\}$$



נמצא את:

ב. מספר העצים המקיימים את תנאי השאלה

לכל עץ על 10 צמתים קיימת סדרת פרופר יחידה מאורך 8, לפי הגדרת סדרת פרופר. התאמה זו היא הפיכה. לכן, מספר העצים המקיימים את תנאי השאלה שקול למספר סדרות הפרופר של איברים מקבוצת התגים של העץ T, מאורך 8, בהם התגים 1,2,3,4 לא מופיעים (ולכן הם עלים).

מספר סדרות הפרופר הללו, בהם בכל אחד מ-8 המקומות ניתן לשבץ אחד מ-6 התגים שאינם מייצגים צומת שהיא עלה, הוא $6^8 = 1{,}679{,}616$.

ג. מספר העצים, שבהם העלים הם 1,2,3,4 בלבד

על מנת להבטיח כי 1,2,3,4 הם העלים היחידים, עלינו להבטיח כי כל תג 5,6,...10 יופיע לפחות פעם אחת בסדרה, ואז לפי תכונות סדרת פרופר דרגתו תהיה לפחות 2.

נבחר 6 מקומות בסדרה לשבץ בהם את ששת התגים. ניתן לעשות זאת ב$\binom{8}{6}$ אופנים.

נשבץ את ששת התגים בשש מקומות אלו. ניתן לעשות זאת ב$6!$ אופנים.

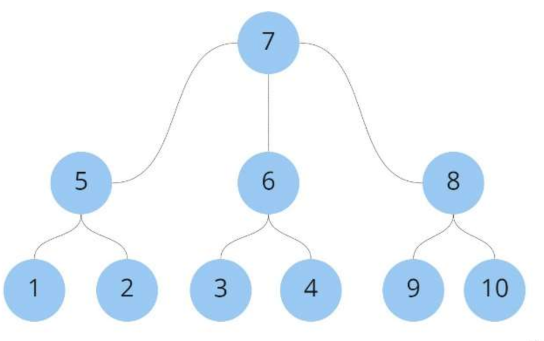
בשני המקומות שנותרו, נשבץ תג כלשהו מבין ה-6. יש 6^2 אפשרויות לשבת כך.

סך הכל-

$$\binom{8}{6} \cdot 6! \cdot 36 = 28 \cdot 720 \cdot 36 = 725{,}760$$

נוכיח כי:

ד. בעץ שסדרת הפרופר שלו היא $(5,5,6,6,7,7,8,8)$ אין זיווג מושלם



נעתיק את העץ פעם נוספת לשם נוחות.

נניח בשלילה כי קיים זיווג מושלם M בעץ זה. לכן גם הצומת 1 מזווג ע"י M. מאחר והצומת 1 מחובר לקשת יחידה המחברת אותו עם 5, הקשת v_1v_5 חייבת להופיע בזיווג.

נתבונן בצומת 2. גם הצומת 2 מחובר לקשת יחידה המחברת אותו עם 5, ולכן, מאחר והוא מזווג ע"י M, הקשת v_2v_5 חייבת להופיע בזיווג.

אבל אז הצומת 5 מזווג פעמיים, בסתירה להגדרת הזיווג!

15.09.2021

שאלה 3

יהי G גרף דו-צדדי מלא, מישורי ושקיים בו מסלול אוילר על 7 צמתים.

טענת עזר: $G = K_{2,5}$

G גרף דו צדדי מלא על 7 צמתים, לכן הוא שווה לאחד מ-3 הגרפים הדו-צדדים המלאים הבאים: $K_{1,6}, K_{2,5}, K_{3,4}$.

הגרף הדו-צדדי המלא $K_{3,4}$ מכיל בתוכו כתת-גרף את הגרף הדו-צדדי המלא $K_{3,3}$, לכן לפי משפט קורטובסקי הוא אינו מישורי.

בגרף הדו-צדדי המלא $K_{1,6}$ יש 6 צמתים שדרגתם 1 (ששת הצמתים המתחברים לצומת היחידה בצד אחד של הגרף). לכן, לא יכול להיות בו מסלול אוילר שכן אילו היה קיים מסלול אוילר היו לכל היותר 2 צמתים מדרגה אי-זוגית.

לכן שני הגרפים $K_{3,4}, K_{1,6}$ אינם עונים על תנאי השאלה, ובהכרח $G = K_{2,5}$

נמצא את:

א. מספר הקשתות של *G*

שני הצמתים של G בצד אחד של הגרף הם מדרגה 5, כי הם מחוברים כל אחד לחמש הצמתים מעברו השני של הגרף. חמשת הצמתים האחרים של G הם מדרגה 2, כי הם מחוברים כל אחד לשני הצמתים מעברו הראשון של הגרף.

לכן, לפי הגדרת גרף,

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 20 = 2|E|$$

ולכן $|\mathrm{E}| = 10$.

ב. מספר הפאות של G

לפי נוסחת אוילר $f = |E| - |V| + 2 = 10 - 7 + 2 = 5$

ג. מספר הצביעה של G

לפי עמוד 66, גרף דו"צ שבו לפחות קשת אחת הוא בעל מספר הצביעה 2.

15.09.2021

שאלה 4

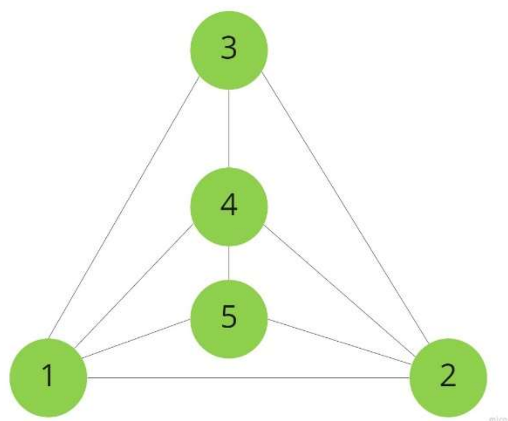
יהי גרף מישורי פשוט $G = (V, E)$ שקיים בו מסלול אוילר באורך 9 וקיימים בו שני צמתים שאינם שכנים ואם נחברם בקשת הגרף לא יהיה מישורי.

במסלול אוילר כל קשת מופיעה בדיוק פעם אחת ולכן ניתן להסיק $|E| = 9$.

נוכיח כי:

א. קיים גרף על 5 צמתים המקיים את תנאי השאלה

והוא - $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4, v_4v_5\})$



שרטוט אפשרי שלו הוא כלהלן. ברור כי הגרף פשוט וכי אכן יש בו 9 קשתות.

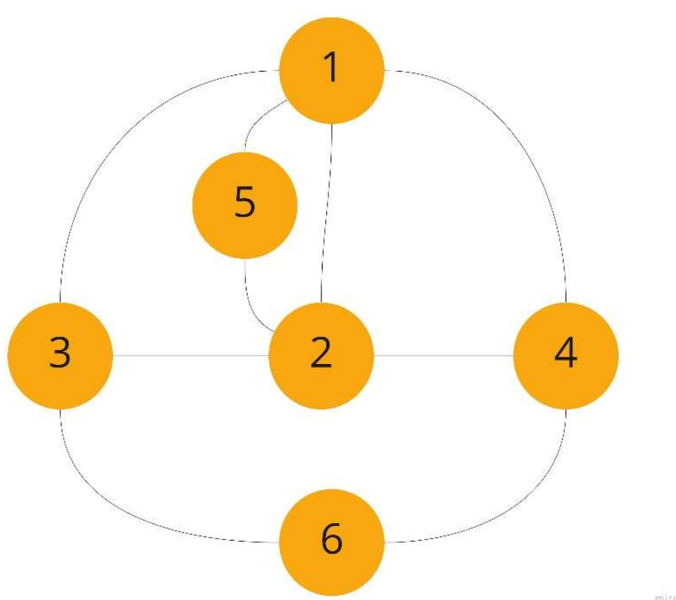
<u>הוכחת מישוריות:</u> ניתן לצייר אותו ללא הצטלבות קשתות, כמתואר בדוגמה.

<u>הוכחת קיום מסלול אוילר:</u> הצמתים v_1, v_2, v_4 הם מדרגה 4 ולכן דרגתם זוגית. הצמתים v_3, v_5 הם מדרגה 3 ולכן דרגתם אי-זוגית. קיימים בדיוק שני צמתים בעלי דרגה אי-זוגית ולכן קיים מסלול אוילר בגרף.

<u>הוכחת התכונה הנוספת:</u> אם נחבר את הצמתים v_3, v_5 – אז נקבל את הגרף K_5 שאינו מישורי.

ב. קיים גרף על 6 צמתים המקיים את תנאי השאלה

והוא - $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_6\})$



שרטוט אפשרי שלו הוא כלהלן. ברור כי הגרף פשוט ואכן יש בו 9 קשתות.

<u>הוכחת מישוריות:</u> ניתן לצייר אותו ללא הצטלבות קשתות, כמתואר בדוגמה

<u>הוכחת קיום מסלול אוילר:</u> הצמתים v_1, v_2 הם מדרגה 4 ולכן דרגתם זוגית. הצמתים v_5, v_6 הם מדרגה 2 ולכן דרגתם זוגית. הצמתים v_3, v_4 הם מדרגה 3 ולכן דרגתם אי-זוגית. קיימים בדיוק שני צמתים בעלי דרגה אי-זוגית ולכן קיים מסלול אוילר בגרף.

<u>הוכחת התכונה הנוספת:</u> אם נחבר את הצמתים v_5, v_6, אז נקבל כתת-גרף את הגרף הדו-צדדי המלא $K_{3,3}$ (צד אחד – 1,2,6, צד שני – 3,4,5). לכן, לפי משפט קורטובסקי, הגרף לא יהיה מישורי.