מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

20/01/2023

שאלה 1

נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{nx}{e^x+n+x}$ המוגדרות (ורציפות) ב$[0,\infty)$.
נחשב את הפונקציה הגבולית. לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^x+n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{e^x \cdot \frac{1}{n} + 1 + x \cdot \frac{1}{n}} = \frac{x}{1} = x$$

כמו כן, מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}, x \in [0,\infty)$:

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{nx}{e^x+n+x} - x| = |\frac{nx - x(e^x+n+x)}{e^x+n+x}| = |\frac{-x^2 - xe^x}{e^x+n+x}| = \frac{x^2+xe^x}{e^x+n+x}$$

סעיף א

ניקח את הסדרה $x_n = n$. מתקיים:

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n^2+ne^n}{e^n+2n} = \frac{\frac{n^2}{e^n}+n}{1+2\cdot\frac{n}{e^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

מכאן, לפי למה 6.3, נסיק כי (f_n) לא מתכנסת במידה שווה לf.

סעיף ב

יהיו $0 \leq a < b$ כלשהם.
נדגיש כי מתקיים $[a,b] \subseteq [0,\infty)$ והפונקציה הגבולית f נשארת זהה.
נבחר את הסדרה $\mu_n = \frac{b^2+be^b}{e^a+n+a}$. לכל $x \in [a,b], n \in \mathbb{N}$ נקבל:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2+xe^x}{e^x+n+x} \underset{a\leq x\leq b}{\leq} \frac{b^2+be^b}{e^a+n+a} = \mu_n$$

מתקיים $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (a,b קבועים) ולכן לפי שאלה 7 ביחידה 6 נסיק כי (f_n) מתכנסת במ"ש לf.
לכן, לפי משפט 6.8 נקבל

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

ובכך סיימנו את ההוכחה.

שאלה 2

מגדירים פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, וכן לכל n טבעי מגדירים $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $f_n(x)=f(x^n)$.
נגדיר $g(x)\equiv f(0)$ פונקציה קבועה.

סעיף א

יהא $0<a<1$ כלשהו.
נראה תחילה התכנסות נקודתית לפונקציה g. לכל $x\in[0,a]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^n)\underset{t=x^n\to 0^+}{=}\lim_{t\to 0^+} f(t)\underset{f\text{ רציפות}}{=}f(0)$$

נוכיח התכנסות במידה שווה לפי הגדרה. יהא $\epsilon_0>0$.
הפונקציה $\delta(x)=|f(x)-f(0)|$ היא פונקציה רציפה ב$[0,1]$ כהפרש והרכבה של פונקציות רציפות.
לכן, לפי אינפי 1, יש לה ערך מקסימלי בקטע $[0,1]$. נסמן ערך זה ב$x_\Delta\in[0,1]$.
עבור $\epsilon_0>\delta(x_\Delta)$, לכל n טבעי ולכל $x\in[0,a]$ מתקיים $x^n\in[0,1]$ ולכן $|f_n(x)-f(0)|<|f(x_\Delta)-f(0)|<\epsilon_0$.
בפרט, כאשר $x_\Delta=0$ נקבל $\delta(x_\Delta)=0$ ולכן $\epsilon_0>\delta(x_\Delta)$.
נוכיח עבור שארית המקרים - $\epsilon_0<\delta(x_\Delta)$ וכן $x_\Delta\in(0,1]$.

מרציפות פונקציית המרחק ואי-השוויון $\delta(0)=0<\epsilon_0<\delta(x_\Delta)$, קיים לפי משפט ערך הביניים מאיפני 1 $x_\epsilon\in[0,1]$ כלשהו כך ש $\delta(x_\epsilon)=\epsilon_0$. לא ייתכן $x_\epsilon=0$ כי $\delta(x_\epsilon)>\delta(0)=0$.
נרצה לבחור את הנקודה x_ϵ השמאלית ביותר האפשרית, כלומר, אילו קיים $x'\in(0,x_\epsilon)$ כך ש $\delta(x')>\epsilon_0$, משפט ערך הביניים מבטיח לנו קיומו של $x_\epsilon\in(0,x')$ נוסף כך ש $\delta(x_\epsilon)=\epsilon_0$. בחירה זו מבטיחה לנו כי לכל $x\in[0,x_\epsilon)$ מתקיים $\delta(x)<\epsilon_0$

לכן, מהגבול הידוע מאינפי 1 $\sqrt[n]{x_\epsilon}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ נסיק כי עבור $\epsilon=1-a>0$, החל מ $N\in\mathbb{N}$ כלשהו נקבל:

$$|\sqrt[n]{x_\epsilon}-1|<1-a\underset{\sqrt[n]{x_\epsilon}\le 1}{\Rightarrow}1-\sqrt[n]{x_\epsilon}<1-a\Rightarrow\sqrt[n]{x_\epsilon}>a$$

נבחר N זה. לכל $n>N$ נקבל בקטע $[0,a]$ כי הפונקציה x^n מונוטונית עולה,
ולכן לכל $\sqrt[n]{x_\epsilon}>a\ge x\ge 0$ מקבלים $0\le x^n\le a^n<x_\epsilon\Rightarrow x\in[0,x_\epsilon)$. אי לכך,

$$|f_n(x)-f(0)|=|f(x^n)-f(0)|=\delta(x^n)\underset{x^n\in[0,x_\epsilon)}{<}\epsilon_0$$

סעיף ב

הפונקציה f רציפה ולכן אינטגרבילית, וכמו כן הפונקציות f_n רציפות ולכן אינטגרביליות כהרכבה של פונקציות רציפות.
נוכיח לפי הגדרת הגבול, בהשראת הוכחת משפט 6.8. אם כן, יהא $\epsilon>0$ ועלינו להוכיח שהחל מ$N\in\mathbb{N}$ מסוים מתקיים:

$$\left|\int_0^1 f_n(x)dx-f(0)\right|<\epsilon$$

נשים לב כי מאחר ו$f(0)$ פונקציה קבועה ורציפה ולכן אינטגרבילית, נקבל לפי שאלה 51 ביחידה 1:

$$f(0)=(1-0)\cdot f(0)\le\int_0^1 f(0)\le(1-0)\cdot f(0)=f(0)$$

ואכן נקבל לכל N טבעי:

$$\left|\int_0^1 f_n(x)dx-\int_0^1 f(0)dx\right|\underset{1.24}{=}\left|\int_0^1(f_n(x)-f(x))dx\right|\underset{\text{שאלה }1.50}{\le}\int_0^1|f_n(x)-f(x)|dx\underset{3.3}{=}\lim_{a\to 1^-}\int_0^a|f_n(x)-f(x)|dx$$

לכל $0<a<1$, לפי סעיף א, מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}$ החל מN מסוים. לכן, לפי 1.26 ואינפי 1:

$$\lim_{a\to 1^-}\int_0^a|f_n(x)-f(x)|dx\le\lim_{a\to 1^-}\int_0^a\frac{\epsilon}{2}=\lim_{a\to 1^-}a\cdot\frac{\epsilon}{2}=\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$$

ובזאת סיימנו את ההוכחה.

שאלה 3

סעיף א

לפנינו טור חזקות מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, כאשר לכל n טבעי נקבל $a_n = \frac{n!}{(2n)!} > 0$
נמצא רדיוס התכנסות לפי למה 6.11:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot (2n)! \cdot (2n+1)(2n+2)}{(2n)! \cdot n! \cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)} = \infty$$

ותחום ההתכנסות הוא $\mathbb{R}$.

סעיף ב

לפנינו טור חזקות מהצורה $\sum_{k=10}^{\infty} a_k (x-1)^k$ כאשר לכל k טבעי נקבל:

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{5n}}{n \ln n \cdot 5^n} & k = 5n \\ 0 & k \neq 5n \end{cases}$$

רדיוס ההתכנסות נתון לנו ע"י משפט 6.10 - $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$
תתי הסדרות (a_{5n}), $m \neq 5n$: (a_m) מכסות את (a_k) ומאחר ו(a_m) סדרת אפסים נקבל $\sqrt[m]{|a_m|} = 0 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.
הגבול עבור תת-הסדרה a_{5n} יהיה:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[5n]{\left| \frac{(-1)^{5n}}{n \ln n \cdot 5^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5n]{n \ln n} \cdot \sqrt[5]{5}} \underset{*}{=} \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$$

* כי החל מN מסוים מתקיים אי-השוויון הבא וממנו נובע כלל הסנדוויץ' $\sqrt[5n]{n \ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5n]{n} \leq \sqrt[5n]{n \ln n} \leq \sqrt[5n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^{\frac{2}{5}}$$

לסיכום, רדיוס ההתכנסות יתקבל לפי $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \max\{0, \frac{1}{\sqrt[5]{5}}\} = \frac{1}{\sqrt[5]{5}} \Rightarrow R = \sqrt[5]{5}$

נבדוק קצוות. בקצה $x = 1 + \sqrt[5]{5}$ נקבל את טור המספרים $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{5n} \cdot (\sqrt[5]{5})^{5n}}{n \ln n \cdot 5^n}$.
טור זה הוא טור לייבניץ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \lambda_n$ כאשר הסדרה $\lambda_n = \frac{1}{n \ln n}$ חיובית, אפסה, ומונוטונית יורדת כי לכל n טבעי מקבלים:

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \frac{1}{n \ln(n+1)} \underset{\text{עולה } \ln}{\leq} \frac{1}{n \ln n} = \lambda_n$$

אי-לכך, לפי משפט 5.20 נסיק את התכנסות טור המספרים $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.
בקצה $x = 1 - \sqrt[5]{5}$ יתקבל טור המספרים $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{5n} \cdot (-\sqrt[5]{5})^{5n}}{n \ln n \cdot 5^n}$. טור זה מתבדר לפי שאלה 27א ביחידה 5.

לסיכום, נקבל כי תחום ההתכנסות הוא $(1 - \sqrt[5]{5}, 1 + \sqrt[5]{5}]$.

סעיף ג

לפנינו טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n$ כאשר $d(n)$ הוא מספר המחלקים של n.
רדיוס ההתכנסות נתון לנו, לפי 6.10, ע"י הגבול $R = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{d(n)}$.
מאחר ולכל n טבעי מתקיים $1 \leq d(n) \leq n$, ולכן $1 \leq \sqrt[n]{d(n)} \leq \sqrt[n]{n} \to 1$, נסיק מכלל הסנדוויץ' כי $\sqrt[n]{d(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$,
ובפרט $R = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{d(n)} = 1$.

נבדוק התכנסות בקצוות. יתקבלו טורי המספרים $\Sigma(\pm 1)^n d(n)$ בהתאמה.
היות ולא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות טורים $d(n) \to 0(-1)^n d(n) \to 0$, נסיק כי הטורים מתבדרים.

לסיכום, תחום ההתכנסות של טור החזקות הוא $(-1, 1)$

שאלה 4

סעיף א

הטענה נכונה.

נסמן לכל n טבעי, $u_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה כך שלכל x ממשי $u_n(x) = \frac{x}{4+n^4x^2}$. נוכיח את ההתכנסות במ"ש של $f(x) = \Sigma u_n(x)$ בעזרת מבחן ויירשטראס.

נבחר $\alpha_n = \frac{1}{4n^2}$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ נקבל:

$$\begin{aligned}
u_n'(x) &= \frac{1(4+n^4x^2) - x(2n^4x)}{(4+n^4x^2)^2} = \\
&= \frac{4+n^4x^2-2n^4x^2}{(4+n^4x^2)^2} = \\
&= \frac{4-n^4x^2}{(4+n^4x^2)^2}
\end{aligned}$$

נקבל נקודות החשודות לערכי קיצון מקומיים כאשר $u_n'(x) = 0$, כלומר עבור $x = \pm\frac{2}{n^2}$.

מתקיים: $u_n(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ ולכן:

$$\begin{aligned}
|u_n(x)| &\leq |u_n(\pm\frac{2}{n^2})| = \\
&= |\frac{\pm\frac{2}{n^2}}{4+n^4(\pm\frac{2}{n^2})^2}| = \\
&= \frac{\frac{|\pm 2|}{n^2}}{4+n^4\cdot\frac{4}{n^4}} = \\
&= \frac{\frac{2}{n^2}}{8} = \frac{1}{4n^2} = \alpha_n
\end{aligned}$$

הטור $\Sigma\alpha_n = \Sigma(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^2})$ מתכנס לפי דוגמה 5.8א עבור $\alpha = 2 > 1$ ולפי משפט 5.10 עבור $c = \frac{1}{4} \neq 0$ אי לכך, לפי מבחן ויירשטראס 6.7 נסיק כי טור הפונקציות $\Sigma u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$.

כעת, היות ו u_n פונקציות רציפות ב $\mathbb{R}$ ומתכנסות במ"ש ב$\mathbb{R}$ ל f, נסיק לפי $6.4*$ כי f רציפה ב$\mathbb{R}$.

סעיף ב

הטענה לא נכונה.

גם כאן נסמן $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in [0,1]$ נקבל $u_n(x) = (1-x)x^n = x^n - x^{n+1}$.

נציין כי הפונקציות u_n רציפות ב$\mathbb{R}$ ובפרט ב$[0,1]$.

נמצא התכנסות נקודתית של טור המספרים $\Sigma u_n(x_0)$ עבור $x_0 \in [0,1]$ כלשהו. לכל k נקבל:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{k} x_0^n - x_0^{n+1} \overset{\text{טור טלסקופי}}{=} = x_0 - x_0^{k+1}$$

ולכן:

$$S(x_0) = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} x_0 - x_0^{k+1} = \begin{cases} x_0 & 0 \leq x_0 < 1 \\ 0 & x_0 = 1 \end{cases}$$

אילו היה טור הפונקציות $\Sigma u_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב $[0,1]$, היינו מקבלים לפי $6.4*$ כי הפונקציה $S(x)$ רציפה, בסתירה לכך ש $S(x)$ אינה רציפה בנקודה $x = 1$!

שאלה 5

נגדיר פונקציה f וטור פונקציות להלן:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n!\cdot(n+3)}=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{x^k}{(k-3)!\cdot k}$$

ונרצה לחשב $\frac{1}{27}f(3)$

ראשית נמצא תחום התכנסות.
לפנינו טור חזקות $\Sigma_{k=3}^{\infty}a_kx^k$ כך שלכל $k\geq 3$ נקבל $a_k=\frac{1}{(k-3)!\cdot k}>0$.
רדיוס ההתכנסות יינתן לנו מלמה 6.11:

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{(k-3)!\cdot k}}{\frac{1}{(k-2)!\cdot(k+1)}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k-2)!\cdot(k+1)}{(k-3)!\cdot k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k-2)\cdot(k+1)}{k}=\infty$$

מכאן שהטור מתכנס לכל x ממשי.

לכן לפי 6.12 ניתן לגזור איבר-איבר, ותתקבל פונקציה f' רציפה ב $\mathbb{R}$ וערכה לכל $x\in\mathbb{R}$ יהיה:

$$f'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n!\cdot(n+3)})'\underset{6.12}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^{n+3}}{n!\cdot(n+3)})'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\underset{\text{טור ידוע}}{=}x^2e^x$$

פונקציה זו רציפה לכל אורך הישר ולכן אינטגרבילית. לפי הנוסחה היסודית, נקבל לכל $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt$$

היות ו $f(0)$ טור אפסים ולכן מתכנס לאפס, נקבל בסה"כ כי:

$$f(x)=\int_0^x t^2e^tdt=\begin{bmatrix}u=t^2 & v'=e^t\\ u'=2t & v=e^t\end{bmatrix}=t^2e^t\Big|_0^x-\int_0^x 2te^tdt=x^2e^x-2\int_0^x te^tdt=$$
$$=\begin{bmatrix}u=t & v'=e^t\\ u'=1 & v=e^t\end{bmatrix}=x^2e^x-2(te^t\Big|_0^x-\int_0^x e^tdt)=x^2e^x-2xe^x+2e^t\Big|_0^x=(x^2-2x+2)e^x-2$$

ובפרט,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!\cdot(n+3)}=\frac{1}{27}f(3)=\frac{5e^3-2}{27}$$