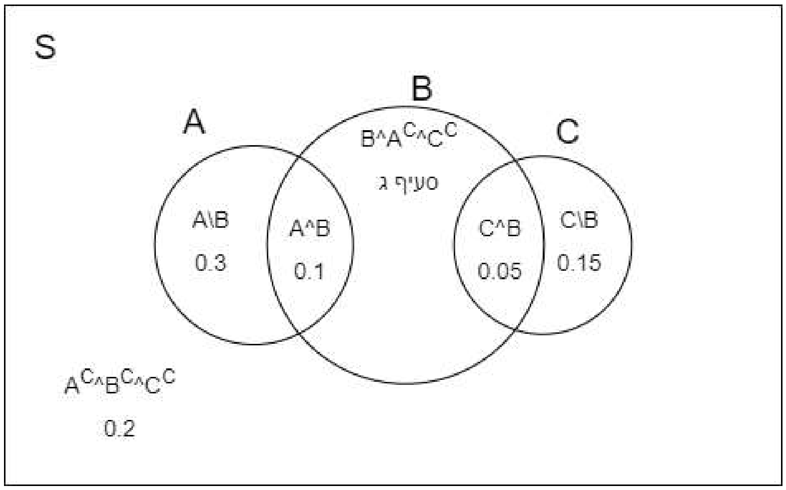
מטלת מנחה 11 - הסתברות למדמ"ח

שאלה 1



א. הסברים למילוי ההסתברויות החלקיות:

נתון כי A, C מאורעות זרים. אז $A, C, A^C \cap C^C$ חלוקה של מרחב המדגם, ולפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B^C) = P(B^C \cap A) + P(B^C \cap C) + P(B^C \cap A^C \cap C^C) =$$
$$= 0.3 + 0.15 + 0.2 = 0.65$$

לכן $P(B) = 0.35$.

נתון בנוסף: $P(B|C) = P(B|A) = 0.25$. אז:

$$\frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)-P(C\cap B^C)}{P(C)} = 1 - \frac{0.15}{P(C)} = 0.25$$

מקבלים $\frac{0.15}{P(C)} = 0.75$ ולכן $P(C) = 0.2$ ו $P(B \cap C) = 0.05$.

באותו האופן, $1 - \frac{0.3}{P(A)} = 0.25$, אז $\frac{0.3}{P(A)} = 0.75$ ולכן $P(A) = 0.4$ ו $P(B \cap A) = 0.1$.

נחסר על מנת לקבל את חלקי ההסתברויות $A\backslash B,\ C\backslash B$.

ב. ע"פ נוסחת דה-מורגן:

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A^C \cap B^C \cap C^C) = 1 - 0.2 = 0.8$$

ג. ניעזר בדיאגרמת הוון:

$$P(A^C \cap B \cap C^C) = P(B) - P(A \cap B) - P(C \cap B) =$$
$$= 0.35 - 0.1 - 0.05 = 0.2$$

ד. נפתור:

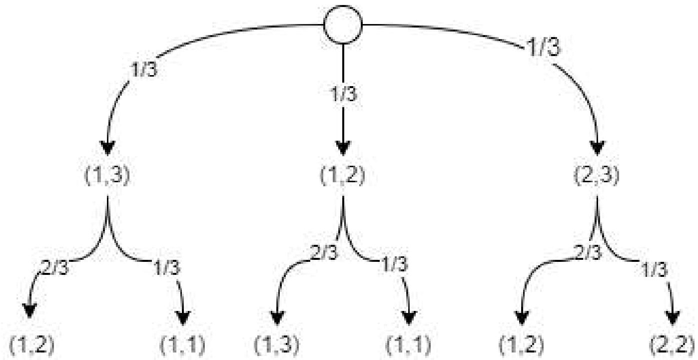
$$P(B|A \cup C) = \frac{P(B\cap(A\cup C))}{P(A\cup C)}$$

נטפל במונה תחילה. ע"פ נוסחת הכפל, והיות A ו C מאורעות זרים:

$$P(B \cap (A \cup C)) = P(A \cup C|B) \cdot P(B) =$$
$$= (P(A|B) + P(C|B)) \cdot 0.35 =$$
$$= (\frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(C\cap B)}{P(B)}) \cdot 0.35 =$$
$$= (\frac{0.1+0.05}{0.35}) \cdot 0.35 = 0.15$$

שאלה 2

נצייר עץ הסתברות עבור 2 ההוצאות הראשונות:



הסבר להסתברויות:

נסמן ב $A_{(j,k)}$ את מאורע הוצאת כדורים בעלי מספרים (j,k) בשלב הראשון. בשלב הראשון (3 כדורים שוני מספר), ההסתברות להוציא את הכדורים (j,k) תהיה:

$$P(A_{(j,k)}) = \frac{n(A_{(j,k)})}{n(S)} = \frac{2\cdot 1}{3\cdot 2} = \frac{1}{3}$$

בשלב השני יהיו 2 כדורים שווי-מספר (נניח n) וכדור יחיד בעל מספר שונה (נניח m). נסמן ב $\overline{A}_{(j,k)}$ את מאורע הוצאת כדורים בעלי מספרים (j,k) מהקופסה בשלב זה. ההסתברות להוציא את 2 הכדורים שווי-המספר. ניעזר בחלוקה $\overline{A}_{(n,?)}, \overline{A}_{(m,?)}$ של מרחב המדגם (הוצאת הכדור הראשון) ובנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(\overline{A}_{(n,n)}) = P(\overline{A}_{(n,n)} \mid \overline{A}_{(n,?)}) \cdot P(\overline{A}_{(n,?)}) + P(\overline{A}_{(n,n)} \mid \overline{A}_{(m,?)}) \cdot P(\overline{A}_{(m,?)}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

$$P(\overline{A}_{(n,m)}) = P(\overline{A}_{(n,m)} \mid \overline{A}_{(n,?)}) \cdot P(\overline{A}_{(n,?)}) + P(\overline{A}_{(m,n)} \mid \overline{A}_{(m,?)}) \cdot P(\overline{A}_{(m,?)}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

אי-לכך, ע"פ נוסחת הכפל וחיבור מאורעות זרים, נקבל:

$$P(\text{א}) = P((A_{(1,3)} \cap \overline{A}_{(1,2)}) \cup (A_{(1,2)} \cap \overline{A}_{(1,3)})) =$$

$$= P(A_{(1,3)} \cap \overline{A}_{(1,2)}) + P(A_{(1,2)} \cap \overline{A}_{(1,3)}) =$$

$$= P(\overline{A}_{(1,2)} | A_{(1,3)}) \cdot P(A_{(1,3)}) + P(\overline{A}_{(1,3)} | A_{(1,2)}) \cdot P(A_{(1,2)}) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

ב. צריך לחשב: $P(\text{א} | A_{(1,2)}^{\ C})$

$$P(\text{א} | A_{(1,2)}^{\ C}) = \frac{P(\text{א} \cap A_{(1,2)}^{\ C})}{P(A_{(1,2)}^{\ C})} = \frac{P((A_{(1,3)} \cap \overline{A}_{(1,2)}))}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

שאלה 3

הערה: נניח כי הטלת קוביה אחת בלתי-תלויה בהטלות קוביה קודמות.

א. על בסיס הנחה זו,

$$P(א) = P(\{4,5,6\} \mid \{2,4,6\})^4 = (\frac{P(\{4,5,6\} \cap \{2,4,6\})}{P(\{2,4,6\})})^4 = (\frac{P(\{4,6\})}{P(\{2,4,6\})})^4 = (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81} = 0.198$$

ב. צריך לחשב: $P(at\ least\ 1\ six \mid at\ least\ 2\ even)$

נחשב את המשלים: $P(no\ sixes \mid at\ least\ 2\ even)$.

חישוב המכנה - נתבסס על כך שהטלות הן ב"ת והסיכוי להטלת מספר זוגי\אי-זוגי הוא $\frac{1}{2}$.

$$P(2\ even) = \binom{4}{2} \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 0.375$$

$$P(3\ even) = \binom{4}{3} \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})^1 = 0.25$$

$$P(4\ even) = (\frac{1}{2})^4 = 0.0625$$

לכן $P(at\ least\ 2\ even) = 0.6875$ ע"פ חיבור מאורעות זרים.

חישוב המונה: שוב נתבסס על כך שהטלות בלתי-תלויות אחת בשנייה, והסיכוי להטלת מספר זוגי שאינו 6 בקוביה בודדת הוא $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

$$P(no\ sixes \cap 2\ even) = \binom{4}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{6}$$

$$P(no\ sixes \cap 3\ even) = \binom{4}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{1}{2})^1 = \frac{2}{27}$$

$$P(no\ sixes \cap 4\ even) = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$$

לכן $P(no\ sixes \cap at\ least\ 2\ even) = \frac{41}{162} = 0.253$.

נסכם:

$$P(no\ sixes \mid at\ least\ 2\ even) = \frac{P(no\ sixes \cap at\ least\ 2\ even)}{P(at\ least\ 2\ even)} = \frac{0.253}{0.6875} = 0.368$$

ולכן $P(at\ least\ 1\ six \mid at\ least\ 2\ even) = 0.632$.

שאלה 4

נסמן מאורעות:

C_i - ההסתברות שמתג i סגור. $P(C_i) = 0.7$

F - ההסתברות שמתג i סגור.

נציין כי המתגים פועלים באופן בלתי תלוי, לכן פעולותיהם של מספר מתגים לא ישפיעו על פעולותיו של מתג נוסף.

א. אם מתג 3 פתוח, הדרך היחידה שבה יכול לעבור זרם היא באחד משני המסלולים $1, 2$ או $4, 5$.

$$P(F \mid {C_3}^C) = \frac{P({C_3}^C \cap ((C_1 \cap C_2) \cup (C_4 \cap C_5)))}{P({C_3}^C)} = \frac{P({C_3}^C) \cdot P((C_1 \cap C_2) \cup (C_4 \cap C_5))}{P({C_3}^C)} = P((C_1 \cap C_2) \cup (C_4 \cap C_5))$$

ההסתברות ש-2 מתגים שונים פועלים במקביל היא:

$$P(C_i \cap C_j) = P(C_i) \cdot P(C_j) = 0.7^2$$

כמו כן, פעולותיהם של 4 המתגים במקביל קורית בהסתברות 0.7^4.

לפי כלל ההכלה וההפרדה:

$$P((C_1 \cap C_2) \cup (C_4 \cap C_5)) = 0.7^2 + 0.7^2 - 0.7^4 = 0.7399$$

ב. אם מתג 3 סגור, על מנת שיעבור זרם נידרש לפעולותם של **לפחות אחד** מן המתגים 1 ו-4 **ולפחות אחד** מן המתגים 2 ו-5.

ההסתברות שלפחות אחד מבין 2 מתגים בלתי-תלויים פועל היא, לפי הכלה והפרדה:

$$P(C_i \cup C_j) = P(C_i) + P(C_j) - P(C_i) \cdot P(C_j) = 0.7 + 0.7 - 0.7^2 = 0.91$$

המתגים 1 או 4 ו2 או 5 פועלים באופן בלתי תלוי. לכן,

$$P(F \mid C_3) = \frac{P((C_1 \cup C_4) \cap C_3 \cap (C_2 \cup C_5))}{P(C_3)} = \frac{0.91 \cdot 0.7 \cdot 0.91}{0.7} = 0.828$$

ג. נפתור:

ע"פ נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(F) = P(F|{C_3}^C) \cdot P({C_3}^C) + P(F|C_3) \cdot P(C_3) = 0.7399 \cdot 0.3 + 0.828 \cdot 0.7 = 0.802$$

ד. צריך לחשב: $P(3\ closed\ switches \mid F^C)$

$$P(3\ closed\ switches \mid F^C) = \frac{P(F^C \cap 3\ closed\ switches)}{P(F^C)}$$

נדון במונה. האפשרות שלא יעבור זרם ובדיוק 3 מתגים יהיו סגורים מתרחשת אם ורק אם שליישת המתגים היא 1,3,4 או 2,3,5. ההסתברות ששלישייה מסויימת של מתגים תהא סגורה היא בדיוק $0.7^3 \cdot 0.3^2$.

מקבלים:

$$P(3\ closed\ switches \mid F^C) = \frac{P(F^C \cap 3\ closed\ switches)}{P(F^C)} = \frac{2 \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2}{1 - 0.802} = \frac{0.06174}{0.198} = 0.3118$$