328197462 13.11.22

מטלת מנחה 11 - אלגברה לינארית 1

שאלה 1

סעיף א

נחשב ב $\mathbb{Z}_{11}$: $\alpha = 2 \cdot 4 - 3 \cdot \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$.

$2 \cdot 6 \equiv_{11} 12_{mod11} \equiv_{11} 1 \Rightarrow 2^{-1} \equiv_{11} 6$

$3 \cdot \frac{1}{2} \equiv_{11} 3 \cdot 2^{-1} \equiv_{11} 3 \cdot 6 \equiv_{11} 18_{mod11} \equiv_{11} 7$

$\alpha = 2 \cdot 4 - 3 \cdot \frac{1}{2} \equiv_{11} 8 - 7 \equiv_{11} 1$

ומכאן $\alpha = 1$

$3 \cdot 4 \equiv_{11} 12_{mod11} \equiv_{11} 1 \Rightarrow 3^{-1} \equiv_{11} 4,\ 4^{-1} \equiv_{11} 3$

$\frac{2}{3} \equiv_{11} 2 \cdot 3^{-1} \equiv_{11} 2 \cdot 4 \equiv_{11} 8$

$\frac{3}{4} \equiv_{11} 3 \cdot 4^{-1} \equiv_{11} 3 \cdot 3 \equiv_{11} 9$

$\beta = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \equiv_{11} 8 - 9 \equiv_{11} (-1)_{mod11} \equiv_{11} 10$

ומכאן $\beta = 10$

סעיף ב

נפתור ב $\mathbb{Z}_7$:

1) $3x^2 = 6$

$3 \cdot 5 \equiv_7 15_{mod7} \equiv_7 1 \Rightarrow 3^{-1} \equiv_7 5$

נכפול משמאל ב 3^{-1}. נקבל לפי קיבוציות: $3^{-1} \cdot 3x^2 \equiv_7 1 \cdot x^2 \equiv_7 x^2$, וכן:

$x^2 = 3^{-1} \cdot 6 \equiv_7 5 \cdot 6 \equiv_7 30_{mod7} \equiv_7 2$

יש למצוא $x \in \mathbb{Z}_7$ כך ש $x \cdot_7 x = 2$. נבדוק את כל ערכי $\mathbb{Z}_7$:

$0 \cdot_7 0 = 0$

$1 \cdot_7 1 = 1$

$2 \cdot_7 2 = 4$

$3 \cdot_7 3 = 9_{mod7} \equiv_7 2$

$4 \cdot_7 4 = 16_{mod7} \equiv_7 2$

$5 \cdot_7 5 = 25_{mod7} \equiv_7 4$

$6 \cdot_7 6 = 36_{mod7} \equiv_7 1$

פתרונות המשוואה: $\{3, 4\}$.

$6x^2 + \frac{1}{2} = 0$ .2

$2\cdot_7 4 = 8_{mod7} \equiv_7 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \equiv_7 4$

המשוואה: $6x^2 + 4 = 0$.

$4 +_7 3 = 7_{mod7} \equiv_7 0 \Rightarrow (-4) \equiv_7 3$

נוסיף מימין $3 = (-4)$. נקבל לפי קיבוציות $6x^2 + 4 + (-4) = 6x^2 + 0 = 6x^2$.

$6x^2 = 3$

$6\cdot_7 6 = 36_{mod7} \equiv_7 1 \Rightarrow 6^{-1} \equiv_7 6$

נכפול משמאל ב $6 = 6^{-1}$. נקבל לפי קיבוציות $6^{-1} \cdot 6x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2$.

$x^2 = 6^{-1} \cdot 3 \equiv_7 6 \cdot 3 \equiv_7 18 \equiv_7 4$

נמצא $x \in \mathbb{Z}_7$ עבורו $x \cdot_7 x = 4$. לפי החישובים במשוואה הקודמת, הפתרונות הם $\{2, 5\}$.

3) $5x + 4y + z = 0$.

זוהי משוואה לינארית ב-3 משתנים. המשוואה שקולה ל $z = -5x - 4y$.

מאחר ו $-5 \equiv_7 2, \ -4 \equiv_7 3$, נסיק כי המשוואה שקולה ל $z = 2x + 3y$.

המשתנה z קשור והמשתנים x, y חופשיים, לכן יש יותר מפתרון אחד והפתרון הכללי הוא השלשה $(a, b, 2a + 3b)$ כאשר $a, b \in \mathbb{Z}_7$.

מספר הפתרונות: $7^2 = 49$ בהתאם למספר האפשרויות לבחירת a, b.

שאלה 2

סעיף א

נגדיר $A = \{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ולכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x,1) \oplus (y,1) = (x+y,1)$$
$$(x,1) * (y,1) = (xy,1)$$

נראה כי עבור $(A, \oplus, *)$ מתקיימות כל אקסיומות השדה, ולכן מהווה שדה.

<u>סגירות החיבור והכפל</u>

יהיו $(x,1), (y,1) \in A$ כך ש $x, y \in \mathbb{R}$,

ידוע שהחיבור והכפל סגורות במספרים הממשיים, ולכן $x+y, xy \in \mathbb{R}$. אי לכך:

$$(x,1) \oplus (y,1) = (x+y,1) \in A$$
$$(x,1) * (y,1) = (xy,1) \in A$$

<u>קיבוציות החיבור והכפל</u>

יהיו $(x,1), (y,1), (z,1) \in A$ כך ש $x, y, z \in \mathbb{R}$. ידוע שהחיבור והכפל קיבוציות במספרים ממשיים, ולכן $x + (y+z) = (x+y) + z,\ x(yz) = (xy)z$. אי לכך:

$$((x,1) \oplus (y,1)) \oplus (z,1) = (x+y,1) \oplus (z,1) = ((x+y)+z,1) =$$
$$= (x+(y+z),1) = (x,1) \oplus (y+z,1) = (x,1) \oplus ((y,1) \oplus (z,1))$$

וכן,

$$((x,1) * (y,1)) * (z,1) = (xy,1) * (z,1) = ((xy)z,1) =$$
$$= (x(yz),1) = (x,1) * (yz,1) = (x,1) * ((y,1) * (z,1))$$

<u>חילופיות החיבור והכפל</u>

יהיו $(x,1), (y,1) \in A$ כך ש $x, y \in \mathbb{R}$.

ידוע שהחיבור והכפל חילופיות במספרים הממשיים, ולכן $x+y = y+x, xy = yx$. אי לכך:

$$(x,1) \oplus (y,1) = (x+y,1) = (y+x,1) = (y,1) \oplus (x,1)$$
$$(x,1) * (y,1) = (xy,1) = (yx,1) = (y,1) * (x,1)$$

<u>קיום איבר ניטרלי ביחס לחיבור בA</u>

האיבר $(0,1) \in A$ הוא איבר ניטרלי ביחס לחיבור, זאת משום שלכל $(x,1) \in A$, נקבל:

$$(x,1) \oplus (0,1) = (x+0,1) = (x,1)$$

וכן לפי חילופיות גם $(0,1) \oplus (x,1) = (x,1)$.

<u>נראה כי קיים איבר ניטרלי ביחס לכפל בA</u>

האיבר $(1,1) \in A$ הוא איבר ניטרלי ביחס לכפל, זאת משום שלכל $(x,1) \in A$, נקבל:

$$(x,1) * (1,1) = (x \cdot 1,1) = (x,1)$$

וכן לפי חילופיות מתקיים גם $(1,1) * (x,1) = (x,1)$.

<u>שני הניטרליים אכן שונים:</u> $(0,1) \neq (1,1)$

<u>פילוג הכפל מעל החיבור</u>

יהיו $(x, 1), (y, 1), (z, 1) \in A$ כך ש $x, y, z \in \mathbb{R}$.

ידוע שכפל ממשיים מתפלג מעל החיבור, ולכן $x(y + z) = xy + xz$. אי לכך,

$$(x, 1) * ((y, 1) \oplus (z, 1)) = (x, 1) * (y + z, 1) = (x(y + z), 1) =$$
$$= (xy + xz,\ 1) = (xy, 1) \oplus (xz, 1) = ((x, 1) * (y, 1)) \oplus ((x, 1) * (z, 1))$$

<u>תכונת האיבר נגדי ביחס לחיבור</u>

יהא $(x, 1) \in A$ כך ש $x \in \mathbb{R}$. ברור כי $-x \in \mathbb{R}$, לכן קיים האיבר $(-x, 1) \in A$, ונקבל:

$$(x, 1) \oplus (-x, 1) = (x + (-x), 1) = (0, 1)$$

ולפי חילופיות מתקיים גם $(-x, 1) \oplus (x, 1) = (0, 1)$.

<u>תכונת האיבר הופכי ביחס לכפל פרט ל$(0, 1)$.</u>

יהא $(x, 1) \in A$ כך ש $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. אז ברור כי המנה $\frac{1}{x}$ מוגדרת היטב ומהווה מספר ממשי, ולכן קיים האיבר $(\frac{1}{x}, 1) \in A$, ונקבל:

$$(x, 1) * (\frac{1}{x}, 1) = (x \cdot \frac{1}{x}, 1) = (1, 1)$$

וכן לפי חילופיות מתקיים גם $(\frac{1}{x}, 1) * (x, 1) = (1, 1)$.

סעיף ב

על $\mathbb{R}$ נגדיר את הפעולה $*$, כך שלכל $a, b \in \mathbb{R}$, $a * b = a + b - 2$.

<u>נראה כי מתקיימת חילופיות</u>

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$.

ידוע כי פעולת חיבור מספרים ממשיים היא חילופית, לכן

$$a * b = a + b - 2 = b + a - 2 = b * a$$

<u>נראה כי מתקיימת קיבוציות</u>

יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$.

ידוע כי פעולת חיבור מספרים ממשיים היא קיבוצית וחילופית. אי לכך, נקבל:

$$(a * b) * c = (a + b - 2) * c = (a + b - 2) + c - 2 = a + b - 2 + c - 2 =$$
$$= a + b + c - 2 - 2 = a + (b + c - 2) - 2 = a + (b * c) - 2 = a * (b * c)$$

<u>נראה כי קיים איבר ניטרלי</u>

האיבר $2 \in \mathbb{R}$ הוא איבר ניטרלי ביחס לפעולה, כי לכל $a \in \mathbb{R}$ נקבל:

$$a * 2 = a + 2 - 2 = a$$

וכן לפי חילופיות נקבל גם $2 * a = a$.

סעיף ג

עלינו להוכיח כי הקבוצה $\mathbb{Z}_9$, בצירוף הפעולות $+_9, \cdot_9$ אינה שדה. ניעזר בהדרכה.

<u>הטענה בשאלה 1.2.3</u>: יהא F שדה, אז לכל $a, b \in F$, אם $ab = 0_F$ אז $a = 0_F$ או $b = 0_F$.

בהתאם, נניח בשלילה כי הקבוצה $\mathbb{Z}_9$ מהווה שדה. האיבר $0 \in \mathbb{Z}_9$ הוא האיבר ניטרלי ביחס לחיבור, זאת משום שלכל $a \in \mathbb{Z}_9$, נקבל $a +_9 0 = (a + 0)_{mod9} = a$, וכן $0 +_9 a = (0 + a)_{mod9} = a$.

כעת, ניקח $3, 3 \in \mathbb{Z}_9$, ונחשב: $3 \cdot_9 3 = 9_{mod9} = 0$

ולכן לפי הטענה בשאלה 1.2.3, $3 = 0$ או $3 = 0$ וזו סתירה! ברור כי 3, 0 הם איברים שונים ב$\mathbb{Z}_9$.

שאלה 3

נשתמש בשיטת החילוץ של גאוס. נרצה לדרג את מטריצת המקדמים, אותה נסמן בA.

א. נפתור ב $\mathbb{R}$ ע"י דירוג מטריצת המקדמים A:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1, R_4\to R_4-2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1- & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3+R_2, R_4\to R_4+3r_2]{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4-4R_3]{R_1\to R_1+3R_3, R_2\to R_2-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) = B \xrightarrow[R_4\to \frac{1}{3}\cdot R_4]{R_3\to -R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_4]{R_1\to R_1+2R_4, R_2\to R_2-R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת ריבועית מסדר 4, בת 4 איברים פותחים, ולכן כל המשתנים קשורים.
כלומר, למערכת פתרון יחיד והוא $(x, y, z, t) = (5, -2, -1, 1)$.

ב. ב$\mathbb{Z}_3$, הפיתוח זהה עד לקבלת המטריצה B, זאת משום שלפניה לא חילקנו ב$3 \equiv_3 0$ אף שורה.
ב$\mathbb{Z}_3$, מטריצת המקדמים תהיה:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי t משתנה חופשי, לכן יש יותר מפתרון אחד.
לכל $t \in \mathbb{Z}_3$ נקבל: $x - 2t = 0,\ y + t = 2,\ -z - t = 0$, כלומר $x = 2t, y = 2 - t, z =- t$,
והפתרון הכללי הוא $(x, y, z, t) = (2a, 2 - a, - a, a)$ לכל $a \in \mathbb{Z}_3$ (סה"כ 3 פתרונות).

שאלה 4

נדרג את מטריצת המקדמים A.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & a & -3-a\\ 1 & (2-a) & -1 & 2-a\\ a & a & 1 & 7\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-aR_1]{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & a & -3-a\\ 0 & -a & -1-a & 5\\ 0 & -a & 1-a^2 & a^2+3a+7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & a & -3-a\\ 0 & -a & -1-a & 5\\ 0 & 0 & -a^2+a+2 & a^2+3a+2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & a & -3-a\\ 0 & a & a+1 & -5\\ 0 & 0 & (a+1)(2-a) & (a+1)(a+2)\end{array}\right)=B$$

על מנת שיתקבל למערכת פתרון יחיד, נדרוש שכל המשתנים יהיו קשורים, כלומר שכל איברי האלכסון יהיו שונים מאפס. נקבל $a\neq 0,-1,2$.

עבור $a\neq 0,-1,2$: כל המשתנים קשורים ולכן נקבל פתרון יחיד.

עבור $a=0$, נקבל:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right)$$

שתי השורות האחרונות מהוות סתירה - $z=-5$ וגם $z=1$ בו זמנית!
לכן אין פתרון.

עבור $a=-1$, נקבל:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & -3\\ 0 & -1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\to R_1+2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -13\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

המשתנה z חופשי, ונקבל $x-z=-13$, $y=5$, כלומר $x=z-13$, $y=5$ והפתרון הכללי הוא $(x,y,z)=(t-13,5,t)$ לכל t ממשי, סה"כ אינסוף פתרונות.

עבור $a=2$, נקבל:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & -3-a\\ 0 & -2 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 12\end{array}\right)$$

השורה האחרונה מהווה סתירה $(0=12)$ ולכן אין פתרון למערכת.

לסיכום: פתרון יחיד: $a\neq 0,-1,2$
אינסוף פתרונות: $a=-1$
אין פתרון: $a=0,2$

שאלה 5

שוב, נדרג את מטריצת המקדמים A:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & a & a & (a-b) & b+1\\ 1 & (a+1) & (a+b) & (2a-b) & a+b+1\\ 3 & 3a & (3a+b) & (3a-b) & 4b+3\\ 1 & a & a & 0 & 2b\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1,\,R_4\to R_4-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & a & a & (a-b) & b+1\\ 0 & 1 & b & a & a\\ 0 & 0 & b & 2b & b\\ 0 & 0 & 0 & b-a & b-1\end{array}\right)=B$$

נדון במספר האיברים הפותחים:

עבור $a, 0 \neq b$ נקבל 4 איברים פותחים.

כל המשתנים קשורים ואין שורת סתירה, לכן נקבל **פתרון יחיד**.

עבור $a = b$ נקבל כי ארבעת המקדמים בשורה האחרונה מתאפסים. נחלק למקרים:

עבור $a = b \neq 1$, השורה הרביעית תהווה שורת סתירה ולכן **אין פתרון**.

עבור $a = b = 1$, נקבל:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

כלומר w משתנה חופשי, נקבל $x + w = 1,\ y - w = 0, z + 2w = 1$,

כלומר $x = 1 - w,\ y = w,\ z = 1 - 2w$. קיבלנו **אינסוף פתרונות** מהצורה

$(x, y, z, w) = (1 - t, t, 1 - 2t, t)$ כאשר t מספר ממשי.

עבור $a \neq 0 = b$ (המקרה היחיד שנותר) נקבל:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & a & a & a & 1\\ 0 & 1 & 0 & a & a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -a & -1\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & a & 0 & a-a^2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-1\\ 0 & 0 & 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

כלומר z משתנה חופשי, נקבל $x + az = a - a^2$, $y = a - 1$, $aw = 1$,

כלומר $x = a - a^2 - az$, $y = a - 1$, $w = \frac{1}{a}$. קיבלנו **אינסוף פתרונות** מהצורה

$(x, y, z, w) = (a - a^2 - at, a - 1, \frac{1}{a}, t)$ כאשר t מספר ממשי.

לסיכום: פתרון יחיד יתקבל עבור $a, 0 \neq b$

אינסוף פתרונות יתקבלו עבור $a = b = 1$ ועבור $a \neq 0 = b$

לא יתקבלו פתרונות עבור $a = b \neq 1$.