

האוניברסיטה הפתוחה

20218

**מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות**  
**חוברת הקורס-קיץ 2023**

כתב: ד"ר עופר הדס

יולי 2023 - סמסטר קיץ - תשפ"ג

**פנימי – לא להפצה.**

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

## תוכן העניינים

א	שלום וברכה
ב	לוח זמנים ופעילויות
ג	התנאים לקבלת 3 נקודות זכות
ג	פירוט המטלות ומשקליהן
1	ממ"ח 01
5	ממ"ן 11
7	ממ"ח 02
13	ממ"ן 12
15	ממ"ח 03
19	ממ"ן 13



## שלום וברכה,

חוברת זאת כוללת פרטים שיש להכיר, כדי לבצע את הנדרש ולסיים בהצלחה את לימוד הקורס מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות. פרטים חשובים נוספים כלולים בחוברת "השלמות לחוברת הקורס", שניתן לצפות בתוכנה באתר הקורס באינטרנט.<sup>1</sup>

**עם קבלת חומר הלימוד בקורס יש להתחיל בלימוד עצמי,** בקצב המותאם ללוח הזמנים שבהמשך חוברת זאת. בזמנים המומלצים בלוח הזמנים ללימוד כל יחידת לימוד כלול גם הזמן הנדרש לפתרון והגשת המטלה הקשורה אליה. חשוב לתכנן לוח זמנים אישי שיאפשר את לימוד החומר ופתרון והגשת המטלות במועדי ההגשה שנקבעו. מפגשי ההנחיה מתוכננים לפי לוח הזמנים וחשוב לעיין בחומר הלימוד המתאים לפני כל מפגש.

**אתר הקורס באינטרנט** מהווה ערוץ תקשורת עיקרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטיות וסטודנטים אחרים בקורס. זה המקום המתאים להעלות בו לדיון כל רעיון או שאלה בנושאי הלימוד.

**הודעות, עדכונים ותיקונים למטלות, אם יהיו כאלה, יתפרסמו באתר הקורס.**

אופי הקורס דורש **תרגול רב**. חשוב להקדיש זמן לתרגול חומר הלימוד על ידי פתרון מגוון בעיות. המטלות להגשה שבחוברת זאת כוללות מגוון שאלות מתאימות, אך אין די בהן. ספרי הלימוד כוללים שאלות רבות וחשוב לנסות לפתור אותן לפני קריאת פתרון שבספר. **באתר הקורס** באינטרנט יש חומרי למידה נוספים.

צוות הקורס מעוניין לעזור לך בלימודים. לכן, אם התעוררה בעיה או שאלה במהלך הלימוד, חשוב לא להסס ולפנות אלינו בהקדם. עומדות לרשותך דרכי ההתקשרות הבאות:







- קבוצת דיון באתר הקורס.
- דואר אלקטרוני למרכז ההוראה בכתובת [oferh@openu.ac.il](mailto:oferh@openu.ac.il).
- טלפון למרכז ההוראה בקורס, ד"ר עופר הדס, בימי ב' בין השעות 11:00–13:00.
- טלפון למנחה בשעת ההנחיה הטלפונית המפורטת יחד עם לוח המפגשים.
- פניה למנחה בדואר אלקטרוני.
- פניה למנחה במפגש ההנחיה.
- **שאלתא** – לפניית בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאלתא (לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות).

נאחל לכולנו סמסטר מהנה ומוצלח.

בברכה, צוות הקורס.

<sup>1</sup> פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס יש באתר שה"ם בכתובת: <http://www.openu.ac.il/shoham>  
מידע על שירותי הספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותך יש באתר הספרייה בכתובת: <http://www.openu.ac.il/Library>

לוח זמנים ופעילויות (20218 \ 2023 ג)

מפגשי הנחיה *	מועדי משלוח המטלות	יחידת הלימוד המומלצת (כולל פתרון המטלות בנושא)	תאריכי שבוע הלימוד	שבוע לימוד
	<b>01</b> הגישו את <b>ממ"ח</b>  בשאלת"א עד 25.7.2023 <b>11</b> הגישו את <b>ממ"ן</b>  למנחה עד 30.7.2023	פרק 1	14.7.2023–9.7.2023	1
			21.7.2023–16.7.2023	2
			28.7.2023–23.7.2023 (ה צום ט' באב)	3
	<b>02</b> הגישו את <b>ממ"ח</b>  בשאלת"א עד 15.8.2023 <b>12</b> הגישו את <b>ממ"ן</b>  למנחה עד 20.8.2023	פרק 2	4.8.2023–30.7.2023	4
			11.8.2023–6.8.2023	5
		פרק 3	18.8.2023–13.8.2023	6
	<b>03</b> הגישו את <b>ממ"ח</b>  בשאלת"א עד 4.9.2023 <b>13</b> הגישו את <b>ממ"ן</b>  למנחה עד 8.9.2023	פרק 4	25.8.2023–20.8.2023	7
			1.9.2023–27.8.2023	8
		חזרה	8.9.2023–3.9.2023	9

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

## התנאים לקבלת 3 נקודות זכות

- כדי לקבל 3 נקודות זכות בקורס זה עליך :
- א. להגיש מטלות במשקל של 10 נקודות לפחות.
- ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
- ג. לקבל בציון הסופי של הקורס 60 לפחות.

## פירוט המטלות ומשקליהן

בקורס "מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות" שלוש מטלות מנחה ושלוש מטלות מחשב. בטבלה שלהלן מופיעה רשימת המטלות, ומשקליהן.

משקל המטלה	המטלה
5	ממ"ן 11
5	ממ"ן 12
4	ממ"ן 13
2	ממ"ח 01
2	ממ"ח 02
2	ממ"ח 03
סה"כ 20 נקודות	

חובה להגיש מטלות שמשקלן הכולל לפחות 10 נקודות .

## **הערות חשובות לתשומת לבכם!**

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

**עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.**

**אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית  
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.**



# מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20218 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר: 2023  
 חומר הלימוד למטלה: פרק 1 משקל המטלה: 2 נקודות  
 מספר השאלות: 13 מועד אחרון להגשה: 25.7.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלתא בכתובת [www.openu.ac.il/sheilta](http://www.openu.ac.il/sheilta)

## שאלה 1

$$\begin{cases} y' - 4y = x \\ y\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

פתרו את בעיית ההתחלה:

אם  $y$  הוא פתרון בעייה זאת אז:

$y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$ . ד	$y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$ . ג	$y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ . ב	$y\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ . א
--	--	---	-------------------------------------

## שאלה 2

הפתרון של המשוואה  $\int_0^x y(t) dt = y + 1$  הוא:

(שימו לב: האות  $C$  מסמנת קבוע שרירותי, שלכל ערך שלו הפונקציה מהווה פתרון)

$y = e^x + C$ . ג	$y = 1 - 2e^x$ . ב	$y = 1 + Ce^x$ . א
$y = Ce^x$ . ו	$y = -e^x$ . ה	$y = e^x + 1$ . ד

## שאלה 3

$$\begin{cases} y = x(y' - x \cos x) \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

פתרון בעיית ההתחלה

הוא:

$y = \sin x$ . ד	$y = x + \pi \sin x$ . ג	$y = x\left(\frac{1}{\pi} + \sin x\right)$ . ב	$y = \pi x + \sin x$ . א
------------------	--------------------------	--	--------------------------

## שאלה 4

יהי  $y(x)$  פתרון המשוואה  $e^x dx - (1 + e^x) y dy = 0$ . אם  $y(0) = 1$  אז:

$y(1) = \sqrt{4 + 2 \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$ . ד	$y(1) = \sqrt{1 + 2 \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$ . ג	$y(1) = 0$ . ב	$y(1) = 1$ . א
ה. בין א-ד אין תשובה נכונה.			

## שאלה 5

יהי  $y(x)$  פתרון המשוואה  $y' = y(x + y^2)$ . אם  $y(0) = -2$  אז:

א. $y(3) = 1$	ב. $y(-3) = 3$	ג. $y(3) = -3$	ד. $y(8) = 2$	ה. $y(0) = 0$
ו. בין א-ה אין תשובה נכונה. ז. בין א-ה יש יותר מתשובה נכונה אחת.				

## שאלה 6

פתרון בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} (2 - 9xy^2)dx + (4y^2 - 6x^3)dy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

הוא:

א. $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = 0$	ב. $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = -1$
ג. $x^4 - 3x^2y^3 + y^2 = 0$	ד. $x^4 - 3x^2y^3 + y^2 = -1$

## שאלה 7

הפתרון הכללי של המשוואה  $ydx + \left(\frac{e^x}{y} - 1\right)dy = 0$  הוא:

א. $y \ln y - e^x = C$	ב. $\ln y  + ye^x = C$	ג. $\ln y  - ye^{-x} = C$	ד. $\ln x  + ye^y = C$
------------------------	------------------------	---------------------------	------------------------

## שאלה 8

פתרון בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = y(1 + xy^4) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

הוא:

א. $\frac{1}{y} = \sqrt[4]{\frac{1}{4} - x + \frac{3}{4}e^{-4x}}$	ב. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$
ג. $\frac{1}{y} = \sqrt[4]{\frac{5}{4}e^{-4x} - \frac{1}{4} - x}$	ד. $y = \frac{1}{4} - x + \frac{3}{4}e^{-4x}$
ה. $\frac{1}{y} = \sqrt[4]{\frac{1}{4} + x + \frac{3}{4}e^{-4x}}$	ו. אין פתרון לבעיית ההתחלה.

## שאלה 9

$$\begin{cases} (y')^2 = |4y| \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

נתונה בעיית ההתחלה :

סמנו את הטענה היחידה שאינה נכונה :

א. הפונקציה $y = (x+1)^2$ היא פתרון של הבעיה הנתונה.
ב. הפונקציה $y = (3-x)^2$ היא פתרון של הבעיה הנתונה.
ג. הפונקציה $y = (x+1) \cdot  x+1 $ היא פתרון של הבעיה הנתונה.
ד. הפונקציה $y \equiv 0$ היא פתרון סינגולרי של הבעיה הנתונה.
ה. הפונקציה $y = (3-x) \cdot  3-x $ היא פתרון של הבעיה הנתונה.

## שאלה 10

$$\begin{cases} xy' = y - xe^{\frac{y}{x}} \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

יהי  $u(x)$  הפתרון של בעיית ההתחלה :

אז :

א. $u(e^e) = e^e$	ב. $u(e^e) = 2^e$	ג. $u(e^e) = -e^e$	ד. $u(e^e) = e^2$	ה. $u(e^e) = e^{-e}$
-------------------	-------------------	--------------------	-------------------	----------------------

## שאלה 11

$$\begin{cases} y' = \frac{x-y-1}{x-y-2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

יהי  $y(x)$  פתרון של בעיית ההתחלה :

אז :

א. $y(6) = -10$	ב. $y(6) = 0$	ג. $y(6) = 2$
ד. $y(6) = 4$	ה. $y(6) = 6$	ו. $y(6) = 8$

## שאלה 12

תהי  $f$  היא פונקציה בעלת נגזרת רציפה בכל נקודה ב־ $\mathbf{R}$ . יהי  $c$  מספר ממשי.

נתון שהפונקציה  $u(x)$  היא פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית  $y' = f(y)$ .

סמנו את הטענה היחידה שאינה נכונה (כלומר אינה נובעת מהנתונים):

א. הפונקציה $v(x) = u(x + c)$ היא פתרון של המשוואה $y' = f(y)$ .
ב. אם $u'(c) = 0$ אז $u(x)$ היא פונקציה קבועה.
ג. אם $u(x)$ אינה פונקציה קבועה אז היא פונקציה מונוטונית: עולה־ממש או יורדת־ממש.
ד. אם גם $v(x)$ פתרון של המשוואה $y' = f(y)$ ומתקיים $u(c) < v(c)$ אז $u(x) < v(x)$ לכל $x$ שבו שניהם מוגדרים.
ה. הפתרון הכללי של המשוואה $y' = f(y)$ הוא $y = u(x + C)$ .

הערה: הפונקציה  $u(x)$  היא עולה־ממש אם לכל  $a$  ו־ $b$  שבהם היא מוגדרת,  $a < b$ , מתקיים גם  $u(a) < u(b)$ .

היא יורדת־ממש אם לכל  $a$  ו־ $b$  שבהם היא מוגדרת,  $a < b$ , מתקיים גם  $u(a) > u(b)$ .

## שאלה 13

תהיינה  $a(x)$  ו־ $b(x)$  פונקציות רציפות ב־ $\mathbf{R}$ , שאינן פונקציות קבועות.

יהיו  $u(x)$  ו־ $v(x)$  פתרונות שונים של המשוואה  $y' + a(x)y = b(x)$  ויהי  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

סמנו את הטענה היחידה שאינה נכונה:

א. הפתרון הכללי של המשוואה הוא $y = u(x) + C(v(x) - u(x))$ .
ב. הפתרון הכללי של המשוואה הוא $y = u(x) + C(u(x) - v(x))$ .
ג. אם $y(x) = \alpha u(x) - v(x)$ פתרון של המשוואה אז $\alpha = 2$ .
ד. הפונקציה $y(x) = \frac{v(x)}{u(x)}$ היא פתרון של המשוואה $y' + a(x)y = 1$ .
ה. הפונקציה $y(x) = u(x) + v(x)$ היא פתרון של המשוואה $y' + a(x)y = 2b(x)$ .

▶▶▶ סוף המטלה

# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20218 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר: ג' 2023

חומר הלימוד למטלה: פרק 1 משקל המטלה: 5 נקודות

מספר השאלות: 9 מועד אחרון להגשה: 30.7.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

## שאלה 1 (12 נקודות)

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה  $y' = \sqrt{\frac{4y}{1-x^2}}$ . רשמו אותו בצורה מפורשת ( $y(x) = \dots$ ).

כמה פתרונות של המשוואה מקיימים את תנאי ההתחלה  $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ ?

איך מתיישב הדבר עם משפט הקיום והיחידות?

## שאלה 2 (12 נקודות)

מצאו לפחות ארבעה פתרונות שונים של בעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = 3x \cdot y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

הסבירו איזה תנאי של משפט הקיום והיחידות אינו מתקיים בבעייה זאת.

(הערה: לבעייה יש תשעה פתרונות שונים בכל סביבה של 0).

## שאלה 3 (12 נקודות)

נניח  $y_0 \neq 0$ . נתונה בעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = (1 - \cos(xy)) e^{\sin(xy)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

הראו שיש לבעייה זאת פתרון יחיד המוגדר באיזשהו קטע פתוח  $I$  המכיל את הנקודה  $x_0$ ,

ושפתרון זה הוא פונקציה עולה-ממש (כלומר: אם  $x_1, x_2 \in I$  ו- $x_1 < x_2$  אז  $y(x_1) < y(x_2)$ ).

## שאלה 4 (10 נקודות)

הראו שלבעיית ההתחלה הזאת יש פתרון יחיד, ומצאו אותו:

$$\begin{cases} \left(2x + \frac{y}{1+x^2y^2}\right) dx = \left(2y - \frac{x}{1+x^2y^2}\right) dy \\ y(1) = \sqrt{3} \end{cases}$$

(מוותר להשאיר את הפתרון בצורה סתומה)

### שאלה 5 (10 נקודות)

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x+3y-1} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

פתרו את בעיית ההתחלה :

רשמו את המשוואה עבור הפונקציה ההפוכה  $x(y)$ . את הפתרון רשמו בצורה מפורשת:  $y(x) = \dots$

### שאלה 6 (10 נקודות)

$$\left(x - \frac{\sin x}{e^{2y}}\right)dx + x^2 dy = 0$$

פתרו את המשוואה :

רשמו את הפתרון הכללי בצורה מפורשת ( $y(x) = \dots$ )

### שאלה 7 (10 נקודות)

$$\begin{cases} y' = y(y^2 e^{-x} + 3) \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

פתרו את בעיית ההתחלה :

רשמו את הפתרון בצורה מפורשת ( $y(x) = \dots$ )

### שאלה 8 (12 נקודות)

הראו שלמשוואה  $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$  יש גורם אינטגרציה מהצורה  $\mu(xy)$

ופתרו את המשוואה. רשמו את הפתרון הכללי בצורה מפורשת ( $y(x) = \dots$ ).

### שאלה 9 (12 נקודות)

$$(2x^2y + xy^2)y' = 2xy^2 + y^3 + x^4 \cos x \cdot e^{-\frac{y}{x}}$$

פתרו את המשוואה בעזרת ההצבה  $z = \frac{y}{x}$  :

האם זאת משוואה הומוגנית?

(מותר להשאיר את הפתרון הכללי בצורה סתומה)

▶▶▶ סוף המטלה

## מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20218 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר: 2023  
חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו-3 משקל המטלה: 2 נקודות  
מספר השאלות: 14 מועד אחרון להגשה: 15.8.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאילתא בכתובת [www.openu.ac.il/sheilta](http://www.openu.ac.il/sheilta)

### שאלה 1

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

יהי  $y(x)$  פתרון של בעיית ההתחלה

אז  $y(\pi)$  שווה ל-

א. 0	ב. $\frac{\pi}{2}$	ג. $-\frac{\pi}{2}$	ד. $\frac{\pi}{4}$	ה. $-\frac{\pi}{4}$
------	--------------------	---------------------	--------------------	---------------------

### שאלה 2

$$\begin{cases} y''' + 2xy'' = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases}$$

פתרון בעיית ההתחלה

הוא:

א. $y = 2e^{-x^2}$	ב. $y = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 1$	ג. $y = e^{\sqrt{2}x}$	ד. $y = x + 2$
--------------------	-----------------------------------	------------------------	----------------

### שאלה 3

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 3e^{-x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

יהי  $y(x)$  פתרון של בעיית ההתחלה

אז  $y(1)$  שווה ל-

א. $-3e^{-1} + 6e^{-2}$	ב. $3e^{-1} - 6e^{-2}$	ג. $3e^{-1}$	ד. $6e^{-2}$
-------------------------	------------------------	--------------	--------------

#### שאלה 4

הפונקציות  $p(x)$  ו- $q(x)$  רציפות בקטע  $(0, \infty)$  והפונקציות  $x^2$  ו- $x^3$  הן פתרונות של המשוואה

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = x - 1 \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

סמנו את הטענה היחידה שאינה נכונה :

א. $u(e^{-2}) = -4e^{-6}$	ב. $u(e^{-1}) = -3e^{-3}$	ג. $u(e) = e^2(3 - e)$
ד. $u(e^2) = 4e^4$	ה. $u'(e^2) = e^2(9 + e^2)$	

#### שאלה 5

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x} \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

יהי  $y(x)$  פתרון של בעיית ההתחלה

סמנו את הטענה היחידה שאינה נכונה :

א. $y(2) = \frac{\ln 4 - 1}{e^2}$	ב. $y(e) = e^{-e}$	ג. $y'(\frac{1}{2}) = y(\frac{1}{2})$	ד. $y'(2) = \frac{1 - \ln 2}{e^2}$	ה. $y'(e) = 0$
-----------------------------------	--------------------	---------------------------------------	------------------------------------	----------------

#### שאלה 6

$$\begin{cases} y''y = (y')^2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$

יהי  $y(x)$  פתרון של בעיית ההתחלה

אז  $y(\ln 3)$  שווה ל-

א. 1	ב. 3	ג. 6	ד. 9	ה. אין בין א-ד תשובה נכונה.
------	------	------	------	-----------------------------

#### שאלה 7

$$\begin{cases} 4y''\sqrt{y} = 9 \\ y(0) = 1, y'(0) = 3 \end{cases}$$

יהי  $y(x)$  פתרון של בעיית ההתחלה

אז  $y(\frac{28}{9})$  שווה ל-

א. 14	ב. 15	ג. 16	ד. 17	ה. אין בין א-ד תשובה נכונה.
-------	-------	-------	-------	-----------------------------



## שאלה 8

$$\begin{cases} 2y'' + (y')^3 = 0 \\ y(0) = 7, y'(0) = 0 \end{cases}$$

נתונה בעיית ההתחלה :

סמנו את הטענה הנכונה היחידה :

א. לבעיית ההתחלה הזאת אין פתרון בסביבה של 0.
ב. לבעיית ההתחלה הזאת פתרון יחיד בסביבה של 0.
ג. לבעיית ההתחלה הזאת יש בדיוק שני פתרונות בסביבה של 0.
ד. לבעיית ההתחלה הזאת יש אינסוף פתרונות בסביבה של 0.
ה. אין בין טענות א-ד טענה נכונה.

## שאלה 9

פונקציה  $f(x)$  נקראת פונקציה מחזורית אם יש מספר חיובי  $\tau$  כך ש- $f(x+\tau) = f(x)$  לכל מספר ממשי  $x$ . יהיו  $a$  ו- $b$  מספרים ממשיים. תנאי הכרחי ומספיק לכך שכל הפתרונות של המשוואה  $y'' + ay' + by = 0$  הם פונקציות מחזוריות הוא :

א. $a = 0$ וגם $b > 0$	ב. $a^2 - 4b > 0$	ג. $a^2 - 4b < 0$	ד. $a^2 - 4b \leq 0$
ה. $a = 0$ וגם $b \geq 0$	ו. אף אחד מהתנאים האלה.		

## שאלה 10

סמנו את הטענה הנכונה היחידה :

א. יש משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר שני שמקדמיה רציפים בקטע הפתוח $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ שהפונקציות $x$ ו- $\sin x$ הן פתרונות שלה.
ב. יש משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר שני שמקדמיה רציפים בקטע הפתוח $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ שהפונקציות $x$ , $x^2$ ו- $x(x+2)$ הן פתרונות שלה.
ג. יש משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר שני שמקדמיה רציפים בקטע הפתוח $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ שהפונקציה $x^2$ היא פתרון שלה.
ד. יש משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר שני שמקדמיה קבועים ושהפונקציות $x$ , $x^2$ ו- $x(x+2)$ הן פתרונות שלה בקטע הפתוח $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .
ה. יש משוואה דיפרנציאלית לינארית אי-הומוגנית מסדר שני שמקדמיה רציפים בקטע הפתוח $(0, 2)$ שהפונקציות $x$ , $x^2$ ו- $x^3$ הן פתרונות שלה.

## שאלה 11

הפונקציות  $y_1(x)$  ו- $y_2(x)$  הן פתרונות של המשוואה  $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y = 0$  בקטע  $(0, \infty)$ .

$$y_1(1) = 5.5 \quad y_2(1) = 3.5$$

$$y_1'(1) = 3.3 \quad y_2'(1) = 2.1$$

נתון שמתקיימים התנאים האלה:

בעזרת נתונים אלה קבעו, אם אפשר, אם הפונקציות  $y_1(x)$  ו- $y_2(x)$  תלויות לינארית או בלתי-

תלויות לינארית בקטע  $(0, \infty)$ .

א. הן תלויות.	ב. הן בלתי-תלויות.
ג. לא ניתן לקבוע תלות לינארית בכל הקטע על סמך נתונים בנקודה אחת בלבד.	

## שאלה 12

הפונקציות  $y_1(x)$  ו- $y_2(x)$  הן פתרונות של משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני בקטע  $I$ .

יהיו  $\alpha_1$  ו- $\alpha_2$  מספרים ממשיים. קבעו אילו מהתנאים הבאים הוא תנאי הכרחי ומספיק לכך

שהפונקציה  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$  גם היא פתרון של אותה משוואה:

א. המשוואה היא הומוגנית.
ב. הפונקציות $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$ תלויות לינארית.
ג. הפונקציות $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$ בלתי-תלויות לינארית.
ד. $\alpha_1 = \alpha_2$ .
ה. $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ .
ו. $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ .
ז. $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ או שהמשוואה היא הומוגנית.
ח. אין בין א-ז תנאי מתאים.
ט. יותר מאחד מהתנאים א-ז הוא תנאי הכרחי ומספיק.

משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית  $x^2 y'' + ax y' + by = 0$  (עם  $a, b \in \mathbb{R}$ ) נקראת **משוואת אוילר** מסדר שני. משוואת אוילר מסדר  $n$  היא משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית כזאת:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

עם קבועים ממשיים  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ . יש מספר גישות לפתרון משוואות אוילר בקטע  $(0, \infty)$ .

**גישה אחת** היא למצוא על ידי הצבה פתרונות מהצורה  $y = x^\lambda$  (הקבוע  $\lambda$  יכול להיות גם מספר מרוכב  $\lambda = \alpha + \beta i$  ובמקרה זה  $x^\lambda = e^{\lambda \ln x} = e^{\alpha \ln x + i \beta \ln x} = x^\alpha (\cos \beta \ln x + i \sin \beta \ln x)$ ). אם בגישה זאת מוצאים די פתרונות בלתי-תלויים, מתקבל הפתרון הכללי. אם לא, אפשר להשתמש בשיטת הורדת הסדר בעזרת פתרון ידוע, ולקבל עוד פתרונות.

**גישה אחרת** היא להחליף את המשתנה התלוי: מציבים  $x = e^t$  ומסמנים  $u(t) = y(x(t)) = y(e^t)$ . תוכלו לבדוק שאז למשל  $xy'(x) = u'(t)$  ו-  $x^2 y''(x) = u''(t) - u'(t)$ . בדרך זאת אפשר לקבל משוואה דיפרנציאלית לינארית במקדמים קבועים עבור הפונקציה  $u(t)$ . בשאלות הבאות תפתרו משוואות אוילר.

### שאלה 13

הפתרון הכללי של המשוואה  $x^2 y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$  בקטע  $(0, \infty)$  הוא:

א. $y = C_1 e^x + C_2 x^{-\frac{1}{2}}$	ב. $y = C_1 x + C_2 x^{-\frac{1}{2}}$	ג. $y = C_1 x^{\frac{1}{2}} + C_2 x^{-\frac{1}{2}}$
ד. $y = C_1 x^{-\frac{1}{2}} + C_2 x$	ה. התשובות א-ד אינן נכונות.	

### שאלה 14

הפתרון הכללי של המשוואה  $x^2 y'' - xy' + y = 4x^2$  בקטע  $(0, \infty)$  הוא:

א. $y = x^3 + x \ln x + C_1$	ב. $y = x^3 + C_1 x + C_2$	ג. $y = x^3 + x(C_1 + C_2 \ln x)$
ד. $y = x(C_1 + C_2 \ln x + 4x)$	ה. התשובות א-ד אינן נכונות.	

▶▶▶ סוף המטלה



# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20218 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר: 2023  
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 2 ו-3 משקל המטלה: 5 נקודות  
 מספר השאלות: 8 מועד אחרון להגשה: 20.8.2023

<p><b>קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן).</li> <li>באמצעות מערכת המטלות המקוונת.</li> </ul>
--

## שאלה 1 (12 נקודות)

פתרו כל אחת מבעיות ההתחלה:

$$\begin{cases} xy'' = 3y'^2 - 4xy' \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} xy'' = 3y'^2 - 4xy' \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} xy'' = 3y'^2 - 4xy' \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

## שאלה 2 (12 נקודות)

תהינה  $p(x)$ ,  $q(x)$  ו- $r(x)$  פונקציות רציפות בקטע  $(-a, a)$ . הראו שלפחות אחת מהפונקציות  $u(x) = x^2 e^x$  ו- $v(x) = \sin^2 x$  אינה פתרון של המשוואה  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$  בקטע זה.

## שאלה 3 (14 נקודות)

א. הסבירו מדוע אין משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר 2 שמקדמיה רציפים בכל הישר הממשי ואשר הפונקציות  $u(x) = x$  ו- $v(x) = \sin x$  פתרונות שלה בכל הישר הממשי.  
 ב. הסבירו מדוע אין משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר 3 שמקדמיה קבועים (ממשיים) ואשר הפונקציות  $u(x) = x$  ו- $v(x) = \sin x$  פתרונות שלה בכל הישר הממשי.

## שאלה 4 (14 נקודות)

יהי  $b$  מספר ממשי. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה  $y'' + y' + by = e^{bx}$ .  
 חלקו את התשובה לחלקים, בהתאם לערכים שונים של המספר  $b$ .

## שאלה 5 (12 נקודות)

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה:

$$y'' - 4y' + 5y = \left( \frac{e^x}{\sin x} \right)^2$$

## שאלה 6 (12 נקודות)

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה:

$$2xy'' + 4y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

עצה: ראשית מצאו למשוואה ההומוגנית המתאימה פתרון שצורתו  $x^\alpha$ .

### שאלה 7 (12 נקודות)

$$y^{(3)} - y' = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה :

### שאלה 8 (12 נקודות)

מצאו פונקציה שגזירה בכל הישר הממשי ומקיימת  $f'(x) + 2 \int_0^x f(t) dt = \sin x + 3f(x)$  וגם

$f(0) = 0$ , והוכיחו שאין פונקציה נוספת שמקיימת תנאים אלה.

▶▶▶ סוף המטלה

## מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20218 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר: 2023

חומר הלימוד למטלה: פרק 4 משקל המטלה: 2 נקודות

מספר השאלות: 12 מועד אחרון להגשה: 4.9.2023

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלתא בכתובת [www.openu.ac.il/sheilta](http://www.openu.ac.il/sheilta)

### שאלה 1

הפתרון של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5 \cos t \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

המקיים את התנאים  $x(0) = -1$  ו-  $y(0) = 3$  הוא:

א. $x(t) = -2 \sin t - \cos t$ $y(t) = \sin t + 3 \cos t$	ב. $x(t) = e^{-t} + e^{2t}$ $y(t) = -e^{-t} + 2e^{2t}$	ג. $x(t) = \sin t$ $y(t) = \cos t$
ד. תשובות א-ג אינן נכונות.		

### שאלה 2

הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

הוא:

א. $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ $y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$	ב. $x(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t$ $y(t) = C_2 e^{2t} \cos t - C_1 e^{2t} \sin t$	ג. $x(t) = C_1 \cos t + C_2$ $y(t) = -C_1 \sin t + C_2$
ד. תשובות א-ג אינן נכונות.		

### שאלה 3

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t} \end{cases}$$

אם  $x(0) = -1$  ו-  $y(0) = -1$  אז:

א. $x(1) = -e^2$ $y(1) = -e^2$	ב. $x(1) = e^2$ $y(1) = e^{-2}$	ג. $x(1) = -e^2$ $y(1) = e^2$
ד. תשובות א-ג אינן נכונות.		

#### שאלה 4

אם  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = -2x - z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y + 2z \end{cases}$  המקיים  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  אז:

א. $\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \\ z(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^2 - 2e \\ -6e^2 + 8e \\ 6e^2 - 6e \end{pmatrix}$	ב. $\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \\ z(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix}$	ג. $\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \\ z(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ e^{-2} \\ e^{-3} \end{pmatrix}$
ד. תשובות א-ג אינן נכונות.		

#### שאלה 5

אם  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 3y + 4z - 3t \\ \frac{dy}{dt} = -6x + 7y + 6z + 1 - 7t \\ \frac{dz}{dt} = x - y + z + t \end{cases}$  המקיים  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  אז:

א. $\begin{pmatrix} x(\ln 2) \\ y(\ln 2) \\ z(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\ln 2 - 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	ב. $\begin{pmatrix} x(\ln 2) \\ y(\ln 2) \\ z(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 2e - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	ג. $\begin{pmatrix} x(\ln 2) \\ y(\ln 2) \\ z(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 + \ln 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
ד. תשובות א-ג אינן נכונות.		

#### שאלה 6

נתונה המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

אם  $x(t)$  הוא פתרון המערכת  $x' = Ax$  המקיים  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  אז  $x(2)$  שווה ל-

א. $\begin{pmatrix} e^4 \\ 0 \\ e^4 \end{pmatrix}$	ב. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^4 \end{pmatrix}$	ג. $\begin{pmatrix} 0 \\ e^4 \\ 0 \end{pmatrix}$
ד. תשובות א-ג אינן נכונות.		



## שאלה 7

יהיו  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . נתונה מטריצה  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

סמנו תנאי מספיק לכך שכל הפתרונות של המערכת  $x' = Ax$  יהיו מחזוריים.

(הערה: הפתרון הוא מחזורי אם יש מספר חיובי  $p$  כך ש-  $x(t+p) = x(t)$  לכל  $t$  ממשי.)

א. $ A  = 0$
ב. כל הערכים העצמיים של $A$ שווים זה לזה.
ג. הפולינום האופייני של $A$ הוא מהצורה $\lambda^2 + \alpha^2$ כאשר $\alpha$ הוא מספר ממשי שונה מאפס.
ד. תשובות א-ג אינן נכונות.

## שאלה 8

יהיו  $a$  ו- $b$  מספרים ממשיים. נתונה המערכת:

$$\begin{cases} x' = ax + ay \\ y' = ax - (a + 2b)y \end{cases}$$

סמנו את התנאי השקול לכך שכל פתרון  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  של המערכת מקיים  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ :

א. $a^2 + b^2 > 0$	ב. $a, b > 0$	ג. $-b < a < 0$	ד. $a > 0 > b$
ה. תשובות א-ד אינן נכונות.			

## שאלה 9

תהי  $x' = Ax$  מערכת משוואות דיפרנציאליות לינאריות במקדמים קבועים כאשר  $A$  היא

מטריצה  $3 \times 3$  שיש לה בדיוק שני ערכים עצמיים ממשיים שונים.

סמנו את הטענה היחידה שנובעת מהנתונים:

א. למערכת אין מערכת בסיסית של פתרונות שכל איבריה מהצורה $e^{\lambda t} v$ , כאשר $\lambda$ הוא מספר ממשי ו- $v$ וקטור של מספרים ממשיים.
ב. למערכת יש מערכת בסיסית של פתרונות שכל איבריה מהצורה $e^{\lambda t} v$ , כאשר $\lambda$ הוא מספר ממשי ו- $v$ וקטור של מספרים ממשיים.
ג. למערכת יש פתרון שאינו מהצורה $e^{\lambda t} v$ , כאשר $\lambda$ הוא מספר ממשי ו- $v$ וקטור של מספרים ממשיים.
ד. למערכת יש פתרון שכל שלושת רכיביו שואפים ל- $\infty$ או ל- $-\infty$ כאשר $t \rightarrow \infty$ , או שיש לה פתרון שכל שלושת רכיביו שואפים ל- $\infty$ או ל- $-\infty$ כאשר $t \rightarrow -\infty$ .

## שאלה 10

תהי  $A$  מטריצה  $2 \times 2$  שאיבריה פונקציות רציפות בקטע  $(0,1)$ .

ידוע שהפונקציות הוקטוריות  $\begin{pmatrix} t+1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ו-  $\begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix}$  הן פתרונות של המערכת ההומוגנית  $x' = Ax$ .

סמנו את הפונקציה שהיא רכיב שני של אחד הפתרונות של המערכת  $x' = Ax + \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ :

א. $-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$	ב. $\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{3}t^4$	ג. $2t + 4t^2$	ד. $\frac{1}{4}t^4$	ה. תשובות א-ד אינן נכונות.
---------------------------------------	---	----------------	---------------------	----------------------------

## שאלה 11

נתון:  $x_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \end{pmatrix}$   $x_2(t) = \begin{pmatrix} t \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

בדקו אלו מהטענות נכונות:

- הוורונסקיאן  $W(x_1, x_2; t)$  אינו מתאפס באף נקודה ב- $\mathbb{R}$ .
- אין מערכת משוואות  $x' = Ax$  שבה  $A$  היא מטריצה  $2 \times 2$  שרכיביה פונקציות רציפות ב- $\mathbb{R}$  ואשר  $x_1$  ו- $x_2$  הם פתרונות שלה.
- יש מערכת משוואות  $x' = Ax$  שבה  $A$  היא מטריצה  $2 \times 2$  שרכיביה פונקציות רציפות ב- $\mathbb{R}$  ואשר  $x_1$  ו- $x_2$  הם פתרונות שלה.

א. טענה 1 בלבד.	ב. טענה 2 בלבד.	ג. טענה 3 בלבד.
ד. טענות 1 ו-2.	ה. טענות 1 ו-3.	ו. טענות 2 ו-3.
ז. כל שלוש הטענות נכונות.	ח. אין אף טענה נכונה.	ט. תשובות א-ח אינן נכונות.

## שאלה 12

נתון:  $x_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \end{pmatrix}$   $x_2(t) = \begin{pmatrix} t \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

בדקו אלו מהטענות נכונות:

- הוורונסקיאן  $W(x_1, x_2; t)$  אינו מתאפס באף נקודה בקטע  $(0, \frac{\pi}{2})$ .
- אין מערכת משוואות  $x' = Ax$  שבה  $A$  היא מטריצה  $2 \times 2$  שרכיביה פונקציות רציפות בקטע  $(0, \frac{\pi}{2})$  ואשר  $x_1$  ו- $x_2$  הם פתרונות שלה בקטע זה.
- יש מערכת משוואות  $x' = Ax$  שבה  $A$  היא מטריצה  $2 \times 2$  שרכיביה פונקציות רציפות בקטע  $(0, \frac{\pi}{2})$  ואשר  $x_1$  ו- $x_2$  הם פתרונות שלה בקטע זה.

א. טענה 1 בלבד.	ב. טענה 2 בלבד.	ג. טענה 3 בלבד.
ד. טענות 1 ו-2.	ה. טענות 1 ו-3.	ו. טענות 2 ו-3.
ז. כל שלוש הטענות נכונות.	ח. אין אף טענה נכונה.	ט. תשובות א-ח אינן נכונות.

▶▶▶ סוף המטלה

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20218 – מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות סמסטר: 2023  
 חומר הלימוד למטלה: פרק 4 משקל המטלה: 4 נקודות  
 מספר השאלות: 6 מועד אחרון להגשה: 8.9.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

## שאלה 1 (15 נקודות)

האם יש מערכת הומוגנית  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  כאשר  $\mathbf{A}(t)$  היא מטריצה  $3 \times 3$  שרכיביה פונקציות רציפות בקטע  $(-1, 1)$  וששניים מפתרונותיה בקטע זה הם הפונקציות:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \\ 3e^t \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 4e^{-t} \\ 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

## שאלה 2 (15 נקודות)

פתרו את המערכת:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 5e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## שאלה 3 (20 נקודות)

מצאו את הפתרון הכללי של המערכת:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

(ודאו שהפולינום האופייני של המטריצה הוא  $(\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$ .)

## שאלה 4 (20 נקודות)

מצאו את כל הפתרונות של המערכת:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + 2z - e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = 2y + 2z - 2e^{2t} \\ \frac{dz}{dt} = -x + y + 3z \end{cases}$$

## שאלה 5 (15 נקודות)

יהיו  $a$  ו- $b$  מספרים ממשיים. נתונה המערכת:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx + by \end{cases}$$

הוכיחו: כל פתרון  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  של המערכת מקיים  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  אם ורק אם  $a < b < 0$ .

## שאלה 6 (15 נקודות)

מצאו את כל הפתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{7}{2t}x - \frac{t}{2}y - t^3 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2t^3}x - \frac{1}{2t}y - t \end{cases}$$

(רמז : למערכת ההומוגנית המתאימה יש פתרון לא טריוויאלי שבו  $y$  קבוע.)

▶▶▶ סוף המטלה