מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

31/01/2023

שאלה 1

סעיף א1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

כי מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)}{x^2+y^2} = [t=2x^2+2y^2\to 0^+] = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t/2} = 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 2$$

וכן, לפי כלל הסנדוויץ':

$$0 \le \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = |y|\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2} \le |y|\cdot\frac{y^2}{y^2} = |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

ולכן $0 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{y^3}{x^2+y^2}$. לסיכום נקבל:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)+y^3}{x^2+y^2} = 2+0=2$$

סעיף א2

$$0 \le \left|x\arctan\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)\right| = |x|\left|\arctan\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)\right| \le |x|\cdot\frac{\pi}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} 0\cdot\frac{\pi}{2}=0$$

ולכן מתקיים $0 \xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{} x\arctan\left(\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\right)$

סעיף ב1

עלינו לבדוק האם קיים הגבול $1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(x,y)$.

נכתוב את הפונקציה בדרך נוחה יותר. לכל $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{e^{|x|+|y|}-1}{|x|+|y|}\cdot\ln(|xy|+e)$$

מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{|x|+|y|}-1}{|x|+|y|} = [t=|x|+|y|\to 0^+] = \lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{t} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{e^t}{1} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(|xy|+e) = [p=|xy|\to 0^+] = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(t+e) = \ln(e) = 1$$

ולכן $1\cdot 1 = 1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f(x,y)$ והפונקציה רציפה.

סעיף ב2

הפונקציה לא רציפה בנקודה, כי לא מתקיים הגבול $1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} g(x,y)$.

ניקח למשל $P_n=(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n})$, ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty} g(P_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{\frac{2}{n^4}}=0$$

לכן, לפי היינה, לא מתקיים $1=g(0,0) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} g(x,y)$ והפונקציה לא רציפה בנקודה.

שאלה 2

סעיף א

עלינו לבדוק האם הפונקציה בשני משתנים $f(x,y)=(x^{1/3}+y^{1/3})^3$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

נחשב נגזרות חלקיות בנקודה $p_0=(0,0)$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^{1/3}+0)^3-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h^{1/3})^3-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

כעת עלינו לבדוק את קיום הגבול $\epsilon(x,y)=\frac{r(x,y)}{d((x,y),(0,0))}=\frac{f(x,y)+f_x(0,0)\cdot x+f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.
ניקח למשל $P_n=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\epsilon(P_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})-1\cdot\frac{1}{n}-1\cdot\frac{1}{n}}{((\frac{1}{n})^2+(\frac{1}{n})^2)^{1/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{((\frac{1}{n})^{1/3}+(\frac{1}{n})^{1/3})^3-2\cdot\frac{1}{n}}{(\frac{2}{n^2})^{1/2}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2(\frac{1}{n})^{1/3})^3-2\cdot\frac{1}{n}}{(2\frac{1}{n^2})^{1/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\cdot\frac{1}{n}-2\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}\neq 0$$

לכן לפי הגדרת היינה לא מתקיים הגבול והפונקציה לא דיפרנציאבילית.

סעיף ב

נציין כי הפונקציה $f(x,y)=3x^2-y^2$ דיפרנציאבילית כפולינום רב-משתנים בכל המישור.
עלינו למצוא נקודה במשטח $(a,b,f(a,b))$ שהמישור המשיק לה מקביל למישור $6x+4y+z+5=0$.
לפי הגדרה 7.64, בכל נקודה במישור מצורה זו, משוואת המישור המשיק למשטח יהיה:

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

נחשב נגזרות חלקיות:

$$\begin{aligned}&f_x=6x\quad f_y=-2y\\&z=3a^2-b^2+6a(x-a)-2b(y-b)\\&-6ax+2by+z=3a^2-b^2-6a^2+2b^2\\&-6ax+2by+z=-3a^2+b^2\end{aligned}$$

על מנת שהמישור יהיה מקביל למישור הנתון, מקדמי שלוש המשתנים צריכים להיות פרופורציונליים.
במילים אחרות, קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש $(-6a,2b,1)=\lambda(6,4,1)$
נסיק $\lambda=1$ ונקבל:

$$\begin{cases}-6a=6 & \Rightarrow a=-1\\ 2b=4 & \Rightarrow b=2\end{cases}$$

ואכן, נציב ונקבל כי המישור המשיק בנקודה $(-1,2,f(-1,2))$ יהיה:

$$6x+4y+z-1=0$$

מישור זה מקביל למישור הנתון ולא מתלכד איתו (אין פרופורציה באיבר החופשי $-1\neq\lambda\cdot 5$).

שאלה 3

סעיף א

נסמן את צלעות המשולש המשתנות בx, y ואת הזווית ביניהן בα. נרצה להביע את הזווית כפונקציה של הצלעות $\alpha = f(x, y)$. נסתמך על העובדה ששטח המשולש נשאר קבוע. לפי נוסחה טריגונומטרית ידועה, שטח המשולש יהיה:

$$\frac{1}{2} \cdot xy \cdot \sin(f(x,y)) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 3$$

מקבלים $f(x,y) = \arcsin(\frac{6}{xy})$. כמו כן נתון קצב ההשתנות $f_x(3,4) = 1, f_y(3,4) = 1$.
נקבל $\nabla f(3,4) = (1,1), ||\nabla f(3,4)|| = \sqrt{2}$ ולכן גרדיאנט מנורמל יהיה $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

סעיף ב

תהא פונקציה $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2 בכל המישור, ומגדירים $x(u,v) = u+v, y(u,v) = u-v$.
כמו כן מגדירים $z(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ אז לפי חוקי הגזירה מאתר הקורס מתקיים:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} = z_u &= f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 1 = f_x(u-v, u+v) + f_y(u-v, u+v) \\
z_u v &= (f_{xx} \cdot x_v + f_{xy} \cdot y_v) + (f_{yx} \cdot x_v + f_{yy} \cdot y_v) = f_{xx} \cdot 1 + f_{xy} \cdot (-1) + f_{yx} \cdot 1 + f_{yy} \cdot (-1) \underset{\text{נתון}+7.71}{=} \\
&= f_{xx} - f_{xy} + f_{xy} - f_{xx} = 0
\end{aligned}$$

קיבלנו כי $\frac{\partial}{\partial v}(z_u)$ זהותית 0 בכל המישור, לכן הפונקציה z_u אינה מושפעת מערך המשתנה v.

מכאן נסיק כי קיימת פונקציה במשתנה אחד $g(t)$ כך ש $z_u(u,v) \equiv g(u)$. באופן דומה להוכחה שלנו, z_v אינה תלויה בu ולכן קיימת פונקציה נוספת $h(t)$ במשתנה אחד כך ש $z_v(u,v) \equiv h(v)$. נדגיש כי g, h רציפות (סכום של נגזרות חלקיות רציפות) ולכן אינטגרביליות לפי u, v בהתאמה.

סעיף ג

תהא $h(r)$ פונקציה במשתנה אחד גזירה פעמיים ותהא $f(x,y) \equiv h(r)$ עבור $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

נוכיח את טענת העזר הבאה: לכל פונקציה גזירה $g(r)$ ולכל פוקנקציה בשני משתנים $k(u,v) \equiv g(r)$ כך ש$r(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$ מקבלים $k_u = g'(r) \cdot \frac{u}{r}$.
אכן, לפי עמוד 68 בכרך ג נקבל $k_u = g'(r) + r_u$, ומתקיים $r_u = \frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u}{r}$.
בנקל נוכל להוכיח טענה זהה עבור v.

כמו כן נשים לב כי מתקיים:

$$r_{uu} = (\frac{u}{r})' = \frac{1 \cdot r - u \cdot r_u}{r^2} = \frac{r - u \cdot \frac{u}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - u^2}{r^3} = \frac{v^2}{r^3}$$

וכן טענה דומה ניתן להוכיח עבור r_{vv}

יהי $r > 0$ מספר ממשי. אז ניקח את הנקודות $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ המקיימות $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ובפרט $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\begin{aligned}
f_x &= h'(r) \cdot \frac{x}{r} \\
f_{xx} &= (h'(r))_x \cdot \frac{x}{r} + h'(r) \cdot (\frac{x}{r})_x = (h''(r) \cdot \frac{x}{r}) \cdot \frac{x}{r} + h'(r) + h'(r) \cdot \frac{y^2}{r^3} = \\
&= h''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + h'(r) \cdot \frac{y^2}{r^3} = \frac{x^2+y^2}{r^3} \cdot (rh''(r) + h'(r)) = \frac{1}{r} \cdot (rh''(r) + h'(r))
\end{aligned}$$

באופן דומה מתקיים $f_y = h'(r) \cdot \frac{y}{r}$ וכן $f_{yy} = \frac{1}{r} \cdot (rh''(r) + h'(r))$.
נקבל לפי הנתון $f_{xx} + f_{yy} = 2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rh''(r) + h'(r)) = 0$ ומכאן, היות ו$r \neq 0$, $rh''(r) + h'(r) = 0$