

מטלת מנחה 15 - אינפי 2

328197462

31/01/2023

שאלה 1

סעיף א1

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x^2 + 2y^2) + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$$

כי מתקיים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} = [t = 2x^2 + 2y^2 \rightarrow 0^+] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t/2} = 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 2$$

וכן, לפי כלל הסנדוויץ':

$$0 \leq \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = |y| \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |y| \cdot \frac{y^2}{y^2} = |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

ולכן $0 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$ לסיכום נקבל:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x^2 + 2y^2) + y^3}{x^2 + y^2} = 2 + 0 = 2$$

סעיף א2

$$0 \leq \left| x \arctan \left(\frac{x}{x^2 + (y-2)^2} \right) \right| = |x| \left| \arctan \left(\frac{x}{x^2 + (y-2)^2} \right) \right| \leq |x| \cdot \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,2)} 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

ולכן מתקיים $0 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,2)} x \arctan \left(\frac{x}{x^2 + (y-2)^2} \right)$

סעיף ב1

עלינו לבדוק האם קיים הגבול $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1$

נכתוב את הפונקציה בדרך נוחה יותר. לכל $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{e^{|x|+|y|} - 1}{|x| + |y|} \cdot \ln(|xy| + e)$$

מתקיים:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{|x|+|y|} - 1}{|x| + |y|} = [t = |x| + |y| \rightarrow 0^+] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} \stackrel{\text{לופיטל}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t}{1} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(|xy| + e) = [p = |xy| \rightarrow 0^+] = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(t + e) = \ln(e) = 1$$

ולכן $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 \cdot 1 = 1$ והפונקציה רציפה.

סעיף ב2

הפונקציה לא רציפה בנקודה, כי לא מתקיים הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 1$.

ניקח למשל $P_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$, ונקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{2}{n^4}} = 0$$

לכן, לפי היינה, לא מתקיים $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 1 = g(0,0)$ והפונקציה לא רציפה בנקודה.

שאלה 2

סעיף א

עלינו לבדוק האם הפונקציה בשני משתנים $f(x, y) = (x^{1/3} + y^{1/3})^3$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

נחשב נגזרות חלקיות בנקודה $p_0 = (0, 0)$

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^{1/3} + 0)^3 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0 + h^{1/3})^3 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

כעת עלינו לבדוק את קיום הגבול $\epsilon(x, y) = \frac{r(x, y)}{d((x, y), (0, 0))} = \frac{f(x, y) + f_x(0, 0) \cdot x + f_y(0, 0) \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$ ניקח למשל $P_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ונקבל:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(P_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - 1 \cdot \frac{1}{n} - 1 \cdot \frac{1}{n}}{((\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2)^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((\frac{1}{n})^{1/3} + (\frac{1}{n})^{1/3})^3 - 2 \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{2}{n^2})^{1/2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(\frac{1}{n})^{1/3})^3 - 2 \cdot \frac{1}{n}}{(2 \cdot \frac{1}{n^2})^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \frac{1}{n} - 2 \cdot \frac{1}{n}}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \neq 0 \end{aligned}$$

לכן לפי הגדרת היינה לא מתקיים הגבול והפונקציה לא דיפרנציאבילית.

סעיף ב

נציין כי הפונקציה $f(x, y) = 3x^2 - y^2$ דיפרנציאבילית כפולינום רב-משתנים בכל המישור. עלינו למצוא נקודה במשטח $(a, b, f(a, b))$ שהמישור המשיק לה מקביל למישור $6x + 4y + z + 5 = 0$. לפי הגדרה 7.64, בכל נקודה במישור מצורה זו, משוואת המישור המשיק למשטח יהיה:

$$z = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

נחשב נגזרות חלקיות:

$$\begin{aligned} f_x &= 6x \quad f_y = -2y \\ z &= 3a^2 - b^2 + 6a(x - a) - 2b(y - b) \\ -6ax + 2by + z &= 3a^2 - b^2 - 6a^2 + 2b^2 \\ -6ax + 2by + z &= -3a^2 + b^2 \end{aligned}$$

על מנת שהמישור יהיה מקביל למישור הנתון, מקדמי שלוש המשתנים צריכים להיות פרופורציונליים. במילים אחרות, קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש $(-6a, 2b, 1) = \lambda(6, 4, 1)$ נסיק $\lambda = 1$ ונקבל:

$$\begin{cases} -6a = 6 & \Rightarrow a = -1 \\ 2b = 4 & \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

ואכן, נציב ונקבל כי המישור המשיק בנקודה $(-1, 2, f(-1, 2))$ יהיה:

$$6x + 4y + z - 1 = 0$$

מישור זה מקביל למישור הנתון ולא מתלכד איתו (אין פרופורציה באיבר החופשי $-1 \neq \lambda \cdot 5$).

שאלה 3

סעיף א

נסמן בשאלה את $x(t), y(t)$ ואת הגדלים של שתי הצלעות הנתונות בס"מ והזווית (ברדיאנים) שביניהן בנקודת זמן מסוימת (בשניות), בהתאמה. נתון בשאלה כי בנקודת זמן מסוימת t_0 מתקיים $\alpha(t_0) = \frac{\pi}{6}$, $x(t_0) = 4$, $y(t_0) = 3$ וכמו כן ערכי הנגזרות x', y' המייצגות את קצב השינוי לשנייה מקיימים $x'(t_0) = y'(t_0) = 1$. עלינו למצוא את $\alpha'(t_0)$.

מנתוני השאלה, שטח המשולש בזמן t_0 הוא (לפי נוסחה ידועה) $3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{6}$. נתון כי שטח המשולש נשאר קבוע, ולכן בכל נקודת זמן t מתקיים:

$$\frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \sin(\alpha(t)) = 3$$

ומכאן נקבל $\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{6}{x(t) \cdot y(t)}\right)$ בכל נקודת זמן t .

אז נסמן $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{6}{x \cdot y}\right)$. כאן נדרש $x \cdot y > 6$ וכן מהעובדה ש x, y מייצגים אורכים חיוביים של צלעות נסיק $x, y > 0$. נחשב נגזרות חלקיות לפי הכלל בעמוד 68:

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{6}{xy}\right)^2}} \cdot \frac{6}{y} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 y^2 - 36}} \cdot \frac{6}{y} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-6}{x \sqrt{x^2 y^2 - 36}}$$

$$f_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{6}{xy}\right)^2}} \cdot \frac{6}{x} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)' = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 y^2 - 36}} \cdot \frac{6}{x} \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-6}{y \sqrt{x^2 y^2 - 36}}$$

$$f_y(4, 3) = \frac{-6}{3\sqrt{108}} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ וכן } f_x(4, 3) = \frac{-6}{4\sqrt{108}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$$

אי לכך, לפי כלל השרשרת 7.66 עבור $\alpha(t) = f(x(t), y(t))$ מקבלים:

$$\alpha'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

ובפרט עבור $t = t_0$ מקבלים:

$$\begin{aligned} \alpha'(t_0) &= f_x(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0) = \\ &= f_x(4, 3) \cdot 1 + f_y(4, 3) \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{9} = -\frac{7\sqrt{3}}{36} = -0.3367 \end{aligned}$$

כלומר ברגע זה קצב גדילתה של הזווית הוא -0.3367 רדיאנים בשנייה.

סעיף ב

תהא פונקציה $f(x, y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2 בכל המישור, ומגדירים $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = u - v$ כמו כן מגדירים $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ אז לפי חוקי הגזירה מאתר הקורס מתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= z_u = f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u = f_x \cdot 1 + f_y \cdot 1 = f_x(u - v, u + v) + f_y(u - v, u + v) \\ z_{uv} &= (f_{xx} \cdot x_v + f_{xy} \cdot y_v) + (f_{yx} \cdot x_u + f_{yy} \cdot y_u) = f_{xx} \cdot 1 + f_{xy} \cdot (-1) + f_{yx} \cdot 1 + f_{yy} \cdot (-1) \stackrel{7.71 \text{ נתון}}{=} \\ &= f_{xx} - f_{xy} + f_{xy} - f_{yy} = 0 \end{aligned}$$

קיבלנו כי $\frac{\partial}{\partial v}(z_u)$ זהותית 0 בכל המישור, לכן הפונקציה z_u אינה מושפעת מערך המשתנה v .

מכאן נסיק כי קיימת פונקציה במשתנה אחד $g(t)$ כך ש $z_u(u, v) \equiv g(u)$. באופן דומה להוכחה שלנו, z_v אינה תלויה ב u ולכן קיימת פונקציה נוספת $h(t)$ במשתנה אחד כך ש $z_v(u, v) \equiv h(v)$. נדגיש כי g, h רציפות (סכום של נגזרות חלקיות רציפות) ולכן אינטגרביליות לפי u, v בהתאמה.

סעיף ג

תהא $h(r)$ פונקציה במשתנה אחד גזירה פעמיים ותהא $f(x, y) \equiv h(r)$ עבור $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

נוכיח את טענת העזר הבאה: לכל פונקציה גזירה $g(r)$ ולכל פונקציה בשני משתנים $k(u, v) \equiv g(r)$ כך ש $r(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$ מקבלים $k_u = g'(r) \cdot \frac{u}{r}$.

אכן, לפי עמוד 68 בכרך ג נקבל $k_u = g'(r) + r_u$ ומתקיים $r_u = \frac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u}{r}$ בנקל נוכל להוכיח טענה זהה עבור v .

כמו כן נשים לב כי מתקיים:

$$r_{uu} = \left(\frac{u}{r}\right)' = \frac{1 \cdot r - u \cdot r_u}{r^2} = \frac{r - u \cdot \frac{u}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - u^2}{r^3} = \frac{v^2}{r^3}$$

וכן טענה דומה ניתן להוכיח עבור r_{vv}

יהי $r > 0$ מספר ממשי. אז ניקח את הנקודות $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ המקיימות $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ובפרט $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$f_x = h'(r) \cdot \frac{x}{r}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (h'(r))_x \cdot \frac{x}{r} + h'(r) \cdot \left(\frac{x}{r}\right)_x = (h''(r) \cdot \frac{x}{r}) \cdot \frac{x}{r} + h'(r) + h'(r) \cdot \frac{y^2}{r^3} = \\ &= h''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + h'(r) \cdot \frac{y^2}{r^3} = \frac{x^2 + y^2}{r^3} \cdot (rh''(r) + h'(r)) = \frac{1}{r} \cdot (rh''(r) + h'(r)) \end{aligned}$$

באופן דומה מתקיים $f_{yy} = \frac{1}{r} \cdot (rh''(r) + h'(r))$ וכן $f_y = h'(r) \cdot \frac{y}{r}$. נקבל לפי הנתון $0 = f_{xx} + f_{yy} = 2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rh''(r) + h'(r))$ ומכאן, היות $r \neq 0$, $rh''(r) + h'(r) = 0$.

שאלה 4

סעיף א

נחשב נגזרות חלקיות לפונקציה $f(x, y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y)$:

$$f_x = -\sin x - \sin(x + y) \quad i$$

$$f_y = -\sin y - \sin(x + y) \quad ii$$

עלינו למצוא נקודות $(x, y) \in D$ בהן $f_x = f_y = 0$. נפתור את מערכת המשוואות:

$$-\sin x - \sin(x + y) = -\sin y - \sin(x + y) = 0$$

$$\sin x = \sin y$$

$$x = y + 2\pi k \text{ או } x = \pi - y + 2\pi k$$

נציב כל אחת מן האפשרויות במשוואה השנייה. עבור $x = y + 2\pi k$ מקבלים:

$$-\sin y - \sin(2y + 2\pi k) = 0$$

$$-\sin y - 2\sin y \cos y = 0$$

$$-\sin y(1 + 2\cos y) = 0$$

נקבל שתי אפשרויות - באפשרות הראשונה $\sin y = 0$ ולכן $y = \pi k$ ובתחום הנתון מקבלים $(x, y) = (0, 0)$.
באפשרות השנייה מקבלים $\cos y = -\frac{1}{2}$ ולכן $y = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$ - לא בתחום!
כמו כן, עבור $x = \pi - y + 2\pi k$ מקבלים:

$$-\sin y - \sin(\pi + 2\pi k) = 0$$

$$-\sin y = 0$$

ושב מקבלים $y = \pi k$, ועבור $y = 0$ בתחום הנתון נקבל את הנקודות $(\pi + 2\pi k, 0) \notin D$
לסיכום - קיבלנו נקודה חשודה לקיצון יחידה $(0, 0) \in D$

נחשב נגזרות מסדר שני:

$$f_{xy}(0, 0) = -1 \Leftarrow f_{xy} = -\cos(x + y) \quad i$$

$$f_{xx}(0, 0) = -2 \Leftarrow f_{xx} = -\cos x - \cos(x + y) \quad ii$$

$$f_{yy}(0, 0) = -2 \Leftarrow f_{yy} = -\cos y - \cos(x + y) \quad iii$$

מתקיימים תנאי משפט 7.72 ועבור הנקודה המדוברת מתקיים $D = (-1)^2 - (-2)(-2) = -3 < 0$ ולכן לפי 7.72 זוהי נקודת מקסימום מקומי.
אין נקודות חשודות נוספות ולכן תם החישוב.

סעיף ב

נבדוק את שפות התחום:

$$x = \frac{\pi}{2}, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad i$$

מקבלים את הפונקציה $f(y) = 0 + \cos y + \cos(y + \frac{\pi}{2}) = \cos y - \sin y$ ונגזרתה $f'(y) = -\sin y - \cos y$ מתאפסת כאשר:

$$\sin y = -\cos y = \cos(\pi - y)$$

$$\sin y = \sin(y - \frac{\pi}{2})$$

$$y = y - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ או } y = \frac{3\pi}{2} - y + 2\pi k$$

$$2y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

$$y = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

נקבל נקודה לבדיקה $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$

ii $x = -\frac{\pi}{2}, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ מקבלים את הפונקציה $g(y) = 0 + \cos y + \cos(y - \frac{\pi}{2}) = \cos y + \sin y$ שנגזרתה $g'(y) = -\sin y + \cos y$ מתאפסת כאשר:

$$\sin y = \cos y$$

$$\tan y = 1$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

נקבל נקודה לבדיקה $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

iii $y = \frac{\pi}{2}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ מקבלים את הפונקציה $f(x) = \cos x + 0 + \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x - \sin x$ שנגזרתה מתאפסת כאשר $x = -\frac{\pi}{4}$. נקבל נקודה לבדיקה $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

iv $y = -\frac{\pi}{2}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ באופן דומה, מקבלים נקודה לבדיקה $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$

כמובן יש לבדוק את הקצוות $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. סה"כ עלינו לבדוק 8 נקודות קצה ונקודת קיצון פנימית. נחשב:

$$\begin{array}{lll} f(0, 0) = 3 & f(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} & f(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \\ f(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} & f(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} & f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -1 \\ f(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1 & f(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) = 1 & f(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) = -1 \end{array}$$

נקבל ערך מינימלי -1 וערך מקסימלי 3 $f(0, 0) = 3$.

שאלת רשות

תהא $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בכל המישור ויהיו $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$. נסמן $u = p_2 - p_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ אז $v = \frac{u}{\|u\|}$ וקטור היחידה בכיוון מ p_1 ל p_2 . צריך להוכיח כי קיימת $p_0 \in [p_1, p_2]$ כך ש $f(p_2) - f(p_1) = (D_v f)(p_0) \cdot \|p_2 - p_1\|$

נגדיר פונקציה במשתנה יחיד $h(t)$ המוגדרת בתחום $[0, \|u\|]$ כך:

$$h(t) = f(p_1 + t \cdot v) = f(p_1 + t \cdot \frac{p_2 - p_1}{\|p_2 - p_1\|}) = f((1 - \frac{t}{\|p_2 - p_1\|})p_1 + \frac{t}{\|p_2 - p_1\|}p_2)$$

בפרט $h(0) = f(p_1), h(\|p_2 - p_1\|) = f(p_2)$. מטעמי נוחות נסמן:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - \frac{t}{\|p_2 - p_1\|})x_1 + \frac{t}{\|p_2 - p_1\|}x_2 \\ y(t) &= (1 - \frac{t}{\|p_2 - p_1\|})y_1 + \frac{t}{\|p_2 - p_1\|}y_2 \end{aligned}$$

ומקבלים $h(t) = f(x(t), y(t))$.

הפונקציה גזירה בקטע זה כיוון שמייצגת "מסלול" בפונקציה דיפרנציאבילית בשני משתנים. בפרט, נגזרת הפונקציה בקטע לכל t תהיה, לפי כלל השרשרת 7.66,

$$\begin{aligned} h'(t) &= f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = \\ &= f_x(x(t), y(t)) \cdot (-\frac{x_1}{\|p_2 - p_1\|} + \frac{x_2}{\|p_2 - p_1\|}) + f_y(x(t), y(t)) \cdot (-\frac{y_1}{\|p_2 - p_1\|} + \frac{y_2}{\|p_2 - p_1\|}) = \\ &= \frac{1}{\|p_2 - p_1\|} \cdot (f_x(x(t), y(t)) \cdot (x_2 - x_1) + f_y(x(t), y(t)) \cdot (y_2 - y_1)) = \\ &= \frac{1}{\|p_2 - p_1\|} \cdot \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (p_2 - p_1) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \frac{p_2 - p_1}{\|p_2 - p_1\|} = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot v \stackrel{7.67}{=} (D_v f)(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

היות והפונקציה גזירה, נקבל לפי לגראנז' מאינפי 1 כי קיים $t_0 \in [0, \|p_2 - p_1\|]$ כך שמתקיים:

$$h'(t_0) = \frac{h(\|p_2 - p_1\|) - h(0)}{\|p_2 - p_1\| - 0} = \frac{f(p_2) - f(p_1)}{\|p_2 - p_1\|}$$

נבחר $p_0 = (x(t_0), y(t_0)) \in [p_1, p_2]$ ונקבל:

$$f(p_2) - f(p_1) = h'(t_0) \cdot \|p_2 - p_1\| = (D_v f)(p_0) \cdot \|p_2 - p_1\|$$

ובכך סיימנו את ההוכחה.