מטלת מנחה 14 - אלגברה לינארית 1

328197462

15/01/2023

שאלה 1

יהיו U, W_1, W_2 תתי-מרחבים לינאריים של מרחב לינארי V.

סעיף א

יהא $v \in (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$ ועלינו להוכיח $v \in U \cap (W_1 + W_2)$.
מהגדרת החיבור, קיימים $v_1 \in U \cap W_1, v_2 \in U \cap W_2$ כך ש $v = v_1 + v_2$.
אי לכך, $v_1, v_2 \in U$ ומסגירות החיבור הוקטורי במרחב הלינארי נסיק $v = v_1 + v_2 \in U$.
כמו כן, מאחר ו $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$ נקבל מהגדרת החיבור כי $v = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$.
הראינו שייכות לשתי הקבוצות $U, W_1 + W_2$ ולכן נסיק $v \in U \cap (W_1 + W_2)$

סעיף ב

עבור $V = \mathbb{R}^2$ נגדיר:

$$U = \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \quad W_1 = \mathsf{Sp}(\{(1,0)\}) \quad W_2 = \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})$$

אז לפי סעיף א של שאלה זו מתקיים $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2)$.

ניקח $v = (1,1)$ ונראה כי $v \in U \cap (W_1 + W_2)$ וגם $v \notin (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$.
נחשב:

$$\begin{aligned} U \cap (W_1 + W_2) &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap (\mathsf{Sp}(\{(1,0)\}) + \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})) \underset{\text{שאלה 7.6.8}}{=} \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap (\mathsf{Sp}(\{(1,0),(0,1)\})) = \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap \mathbb{R}^2 = \\ &= \mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \ni (1,1) = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U \cap W_1) + (U \cap W_2) &= (\mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) \cap \mathsf{Sp}(\{(1,0)\})) + (\mathsf{Sp}(\{(1,1)\}) + \mathsf{Sp}(\{(0,1)\})) = \\ &= \{\underline{0}\} + \{\underline{0}\} = \\ &= \{\underline{0}\} \not\ni (1,1) = v \end{aligned}$$

ולכן מתקיימת הכלה חזקה בין תתי-המרחבים.

שאלה 2