תרגול 8

20 במאי 2019

1 תזכורת

1. בעיית SSSP - נתונים גרף G, פונקציית משקל $w : E \to \mathbb{R}$ וכן צומת מקור $s \in V$. צריך למצוא מסלול קל ביותר מהצומת s לכל צומת $v \in V$.
2. אלגוריתם $Dijkstra$ - זמן ריצה $O(V + ElogV)$. הנחה: אין משקל שלילי.
3. אלגוריתם $Bellman - Ford$ - זמן ריצה: $O(V \cdot E)$ - עובד עם משקלים שליליים אך יותר איטי.

2 בעיית All Pairs Shortest Path - APSP

בעיה 1. נתונים גרף $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w : E \to \mathbb{R}$.
יש למצוא מסלול קל ביותר מכל $u \in V$ לכל $v \in V$.

2.1 פתרון הבעיה באמצעות האלגוריתמים שאנו מכירים

נשים לב כי אנו כבר יודעים לפתור בעיה זו בהתבסס על אלגוריתמי SSSP.

אלגוריתם 1. 1. לכל צומת $s \in V$ בצע:

(א) הרץ $Dijkstra$ מהצומת s.

באלגוריתם זה אנו מניחים כי אין משקלים שליליים.
זמן ריצה: $O\left(V^2 + E \cdot V \cdot logV\right)$.

אלגוריתם 2. מבוסס $Bellman - Ford$

1. לכל צומת $s \in V$ בצע:

(א) הרץ $Bellman - Ford$ מהצומת s.

זמן ריצה: $O\left(V^2 \cdot E\right)$.

2.2 פתרון יעיל יותר

מטרה: אלגוריתם עם זמן ריצה $O\left(V^2 + E \cdot V \cdot logV\right)$ שעובד עם משקלים שליליים.
רעיון: נגדיר פונקציית משקל w' כך ש:

1. w' היא אי-שלילית.
2. לכל מסלול p: p קל ביותר לפי w' $\iff$ p קל ביותר לפי w.

2.2.1 מציאת w'

1. נגדיר "הרבה" (אינסוף) פונקציות משקל שמקיימות את דרישה 2.
2. מבין הפונקציות הנ"ל נמצא אחת שהיא אי-שלילית.

שלב 1 :
ניקח פונקציה $h:V\to\mathbb{R}$ ונגדיר : $w_h\left(u\to v\right)=w\left(u\to v\right)+h\left(u\right)-h\left(v\right)$.

טענה 1. לכל $h:V\to\mathbb{R}$ הפונקציה w_h מקיימת את דרישה 2.

נגדיר $h_{min}\left(u\right)$ - המשקל המינימלי של מסלול שמסתיים ב-u.

טענה 2. עבור h_{min} הנ"ל מתקיים כי w_h אי שלילית. כלומר לכל $uv\in E$ מתקיים : $w\left(uv\right)+h_{min}\left(u\right)-h_{min}\left(v\right)\geq0$ או לחילופין $w\left(uv\right)+h_{min}\left(u\right)\geq h_{min}\left(v\right)$.

הוכחה. ההוכחה די טריוואלית. □

הבעיה היותר מעניינת היא איך למצוא את $h_{min}\left(u\right)$ הנ"ל.

אלגוריתם 3. למציאת h_{min} :

1. נוסיף לגרף צומת חדש s ונחבר קשת ממנו לכל צומת במשקל 0.
2. נריץ $Bellman-Ford$ מהצומת s וכך נמצא את המסלול המינימלי.

2.2.2 סיבוכיות

מציאת פונקציה אי שלילית תיקח $O\left(E\cdot V\right)$ כסיבוכיות $Bellman-Ford$.
הרצת $Dijkstra$ על כל הצמתים תיקח כמו שראינו $O\left(V^{2}+E\cdot V\cdot logV\right)$.

3 צביעת גרפים

3.1 הגדרות

הגדרה 1. יהיא $G=\left(V,E\right)$ גרף לא מכוון.

1. צביעת צמתים חוקית של G היא פונקציה $c:V\to\mathbb{Z}^{+}$ כך שלכל $uv\in E$ מתקיים $c\left(u\right)=c\left(v\right)$.
2. צביעה c תיקרא k - צביעה אם לכל $v\in V$ $c\left(v\right)\leq k$.
3. G יקרא k - צביע אם קיימת k - צביעה של G.
4. המספר הכרומטי של G הוא ה-k מינימלי כך ש-G הוא k - צביע. נסמן אותו ב- $\chi\left(G\right)$.

3.2 הבחנות

נשים לב למס' תכונות מעניינות :

1. G הוא 1 צביע $\iff$ G חסר קשתות.
2. G הוא 2 צביע $\iff$ G דו-צדדי.
3. G הוא בהכרח $\left|V\right|$ - צביע.

3.3 אלגוריתם חמדן למציאת המספר הכרומטי של G

אלגוריתם 4. מציאת המספר הכרומטי:

1. לכל $v \in v$ בצע:

   (א) השם ב-$c\left(v\right)$ את הצבע המינימלי שלא נמצא בשימוש ע"י שכן של v.

2. החזר את c.

טענה 3. הצביעה המתקבלת היא חוקית.

טענה 4. הצביעה המתקבלת היא $\left(1+\triangle\right)$ - צביעה כאשר $\triangle$ היא הדרגה המקסימלית של צומת בגרף.

3.4 תרגיל

הציעו אלגוריתם פולינומי שמקבל גרף לא מכוון $G=\left(V,E\right)$ ומכריע האם G הוא 3 - צביע. (רמז: בעיה לא פתירה בענף מדעי מחשב)