

תרגול 6

5 במאי 2019

1 תרגיל

צריך למצוא עץ MST "צהוב ביותר" - כמו מהתרגול הקודם.

1.1 אלגוריתם

כמו האלגוריתם של $Kruskal$, אך במיון נעדיף קשתות צהובות מאותו משקל על פני קשתות לא צהובות מאותו משקל.

1.2 נכונות

נסמן: F_k - קבוצת הקשתות שהאלגוריתם בחר לקחת מבין k הקשתות הראשונות במיון. \bar{F}_k - קבוצת הקשתות שהאלגוריתם לא לקח מבין k הקשתות הראשונות במיון. נוכיח כי לכל k , קיים MST צהוב ביותר שמכיל את כל הרשתות ב- F_k ולא מכיל אף קשת מ- \bar{F}_k . נוכיח זאת באינדוקציה על k :

- בסיס - עבור $k = 0$, כל פתרון אופטימלי מקיים את הדרוש.
- צעד - נניח שקיים MST צהוב ביותר שנקרא לו OPT כך שמכיל את כל הקשתות ב- F_k ולא מכיל אף קשת מ- \bar{F}_k .
 - אם OPT מסכים עם האלגוריתם על הקשת e_{k+1} אזי OPT מסכים עם F_{k+1}, \bar{F}_{k+1} (הכוונה במסכים - אם OPT לקח את הקשת אז גם האלגוריתם לקח אותה, ואם OPT לא לקח אז גם האלגוריתם לא לקח).
 - נניח ש- OPT לא מסכים עם האלגוריתם על הקשת e_{k+1} . נפריד למקרים:
 - * האלגוריתם בחר לא לקחת את e_{k+1} - האלגוריתם לא לוקח קשת כלשהי כאשר היא לא מחברת בין רכיבי קשירות שונים (כלומר נמצאת בתוך רכיב קשירות, ויוצרת מעגל). אם OPT לא מסכים איתנו, אזי הוא לקח את הקשת הזאת וזה לא הגיוני כי יהיה לו מעגל.
 - * האלגוריתם בחר לקחת את e_{k+1} - נוסיף ל- OPT את הקשת e_{k+1} . נקבל עץ עם עוד קשת חדשה ולכן יוצר מעגל C . לא יכול להיות שכל הקשתות במעגל C הן קשתות שבחרנו, ולכן C מכיל לפחות קשת אחרת e' שלא שייכת ל- F_k . e' לא שייכת ל- \bar{F}_k כי OPT לא מכיל אף קשת מ- \bar{F}_k . על כן, e' נמצאת אחרי e_{k+1} במיון.

נסיר את e' מ- OPT ונקבל עץ פורש $'$. בעץ זה לא פגענו במשקל העץ שכן e_{k+1} לפני e' במיון, ולכן OPT' הוא MST צהוב ביותר, שמסכים איתנו עם F_{k+1}, \bar{F}_{k+1} .

2 תרגיל 2

נתונים גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ פונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ וקשת $e \in E$. יש להכריע האם קיים MST שמכיל את e .

2.1 רעיון

נצבע את הקשת e בצהוב, ונמצא MST צהוב ביותר. אם ה- MST מכיל את e , נחזיר "כן" ואחרת נחזיר "לא". זמן ריצה: $O(E \log(V))$.

2.2 אלגוריתם

הסר מהגרף את כל הקשתות שמשקלן $w(e)$ או יותר. יהא G' הגרף המתקבל.
 נסמן: $e = uv$
 אם ב- G' u ו- v נמצאים ב-2 רכיבי קשירות שונים, החזר "כן". אחרת החזר "לא".