הרצאה 6

איתיווייסמן

5 במאי 2019

1 תזכורת - מסלולים קלים ביותר

נתון לנו גרף מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w : E \to \mathbb{R}$. נתון לנו צומת $s \in V$ שממנו נתחיל לחפש.
המטרה היא למצוא לכל צומת $u \in V$את המסלול הקל ביותר מ-sל-u. (אורך מסלול P הוא סך משקלי השקתות ב-P).

הגדרה 1. נגדיר את $\delta(u, v)$ להיות אורך המסלול הקל ביותר מ-u ל-v.

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \infty & \text{no path from u to v exists} \\ -\infty & \text{there exists a negative circle from u and v is in the circle} \\ min\left\{w(P) : \text{P is a path from u to v}\right\} & \text{else} \end{cases}$$

טענה. אם Pמסלול קל ביותר מ-u ל-v אזי כל תת מסלול של P גם הוא קל ביותר.

טענה. **אי שוויון המשולש** - (בהנחה שאין מעגלים שליליים ב-G) לכל קשת מכוונת $(u, v) \in E$ מתקיים: $\delta(s, v) \le \delta(s, u) + w(u \to v)$.

הוכחה. אם אין מסלול בין s ל-u אזי $\delta(s, u) = \infty$ ואי השוויון מתקיים.
אחרת, נניח שיש מסלול מ-s ל-u ב-G ולכן $\delta(s, u)$ סופי. נשרשר למסלול הקל ביותר מ-s ל-u את הקשת (u, v). אורך המסלול הזה שווה ל- $\delta(s, u) + w(u, v)$.
$\delta(s, v)$ זה אורך המסול הקל ביותר מ-s ל-v וראינו שיש מסלול מסוים מ-s ל-v שאורכו: $\delta(s, u) + w(u \to v)$ ∎

1.1 פיתוח אלגוריתם מהטענות

הרעיון: לבדוק הפרות של אי-שוויון המשלולש ולתקן כל עוד יש הפרה.

1.1.1 השיטה הגנרית:

אלגוריתם 2. 1. אתחול: $d(s) \leftarrow 0$, לכל $u \neq s$: $d[u] \leftarrow \infty$.
2. כל עוד קיימת קשת $(u, v) \in E$ כך ש: $d(v) > d(u) + w(u, v)$ נבצע: $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$.

משפט 3. אם אין מעגלים שליליים בגרף G אז:
א. לכל צומת $u \in V$ ולכל שלב של השיטה הגנרית: $d(u) \ge \delta(s, u)$.
ב. לכל צומת $u \in V$, כשהשיטה הגנרית עוצרת אז $d(u) = \delta(s, u)$.

הוכחה. נתחיל מהוכחת סעיף א באינדוקציה על צעדי השיטה הגנרית.

בסיס: בשלב 1, כלומר באתחול, מתקיים: $d(s) = 0$, אבל אין לנו מעגלים שליליים ב-G ולכן $\delta(s,s) = 0$. עבור צומת $u \neq s$: מתקיים $\delta(s,u) \leq d(u) = \infty$.

צעד: תהי $(u,v) \in E$ הקשת עבורה ביצענו עדכון באיטרציה הנוכחית. נראה שאחרי העדכון $d(v)$ עדיין יתקיים $d(v) \geq \delta(s,v)$.

העדכון מבצע: $d(v) = d(u) + w(u,v)$ מהנחת האינדקוציה עבור u, מתקיים $d(u) + w(u,v) \geq \delta(s,u) + w(u,v)$ ומאי שוויון מהשולש $\delta(s,u) + w(u,v) \geq \delta(s,v)$.

נוכיח את סעיף ב.

בהינתן סעיף א, מספיק שנראה שכשהשיטה הגנרית עוצרת מתקיים: $d(v) \leq \delta(s,v)$. נניח בשלילה שקיים צומת (בסיום האלגוריתם) כך ש: $d(v) > \delta(s,v)$.

יהי p מסלול קל ביותר מ-s ל-v:

$$p = s = v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{k-1} \to v_k = v$$

עבור $s = v_0$ מתקיים: $d(v) = \delta(s,s)$.

עבור $v_k = v$ מתקיים: $d(v) > \delta(s,v)$.

נסתכל על הפעם הראשונה ב-p בה השיטה הגנרית "מפספסת כלפי מעלה" כלומר: $d(v_{i-1}) = \delta(s,v_{i-1})$ וגם $d(v_i) < \delta(s,v_i)$.

לפי טענה 1 מתקיים

$$d(v_i) > \delta(s,v_i) = \delta(s,v_{i-1}) + w(v_{i-1},v_i) = d(v_{i-1}) + w(v_{i-1},v_i)$$

וזו סתירה לכך שהשיטה הגנרית עצרה. ■

1.2 איך ניתן למצוא מסלול קל ביותר ולא רק את האורך של המסלול הקל ביותר?

נשנה את השיטה כך שלכל צומת u נוסיף לשיטה הגנרית $\pi[u]$.

אלגוריתם 4. 1. באתחול נוסיף: $\pi[u] \leftarrow NULL$ לכל צומת $u \in V$.
2. בעדכון של קשת $(u,v) \in E$: $\pi(v) \leftarrow u$.

1.2.1 מבנה מסלולים קלים ביותר מ-s

הגדרה 5. עץ מסלולים קלים ביותר מ-s עבור גרף $G = (V,E)$ הוא תת גרף $G' = (V',E')$ כך ש:

1. V' זהו אוסף הצמתים הישגים מ-s ב-G.
2. G' הוא עץ מכוון שהשורש שלו הוא s.
3. לכל צומת u ב-V' מתקיים שהמסלול היחיד מ-s ל-u ב-G' הוא מסלול קל ביותר מ-s ב-G.

משפט 6. בהנחה שאין מעגלים שליליים ב-G אז כשהשיטה הגנרית עוצרת, אזי הגרף הנ"ל:

$$\begin{aligned} G' &= \{V',E'\} \\ V' &\triangleq \{u : \pi(u) \neq NUL\} \cup \{s\} \\ E' &\triangleq \{(u,v) : \pi(v) = u\} \end{aligned}$$

הוא עץ מסלולים קלים ביותר מ-s ב-G.

הוכחה. א. בכל שלב של הריצה בשיטה הגנרית G' לא מכיל מעגלים מכוונים.

ב. צריך להוכיח גם כי בסיום הריצה של השיטה הגנרית V' זה אוסף כל הצמתים הישיגים מ-s.

ג. בסיום הריצה של השיטה הגנרית לכל צומת $u \in V'$, המסלול (היחיד) מ-s ל-v ב-G' הוא מסלול קל ביותר מ-s ל-u ב-G. ■

1.3 כיצד ניתן לחלץ מהשיטה הגנרית אלגוריתמים מהירים?

בהנחה שכל מהשקלים הם אי שליליים, כלומר $w : E \to \mathbb{R}^+$.

1.3.1 האלגוריתם של Dijkstra

אלגוריתם 7. 1. אתחול: $d(s) \leftarrow 0$, ולכל $u \neq s$: $d(u) \leftarrow \infty$ ונאתחל $Q \leftarrow V$.
2. כל עוד $Q \neq \emptyset$:
א. יהיה uהצומת ב- Q בעל $d(u)$ קטן ביותר.
ב. לכל קשת $(u,v) \in E$ אם: $d(v) > d(u) + w(u,v)$ אז: מוציאים את u מ-Q.

זמן ריצה: בדומה ל-Prim אם נשתמש בערימה האלגוריתם רץ בזמן $O(Elog(V))$.

1.3.2 הוכחת נכונות

מספיק להראות, מנכונות השיטה הגנרית, כשכשהאגלוריתם של Dijkstra עוצר כל קשת (u,v) מקיימת: $d(v) \leq d(u) + w(u,v)$.

טענה 8. נניח ש-v יצא מ-Q באיטרציה עוקבת שבה u הוציא מ-Q.
אזי: $d(u) \leq d(v)$ (כאשר $d(u)$ זה ברגע הוצאת u, ו-$d(v)$זה ברגע הוצאת v).

הוכחה. במהלך האיטרציה הזאת, אם $d(v)$ קטן, אז יש קשת $(u \to v)$ וביצענו עדכון $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \to v)$ ועדיין התנאי $d(u) \leq d(v)$. אם לא ביצענו עדכון עדיין אז התנאי מתקיים באופן טריוואלי. ■

מסקנה 9. הטענה מתקיימת גם אם v יוצא מ-Q מס' כלשהו של איטרציות אחרי מ-Q.

מסקנה 10. לכל צומת $u \in V$, $d(u)$ לא מתעדכן אחרי הוצאת u מ-Q.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים צומת v כך ש: $d(v)$ עודכן אחרי ש-v יצא מ-Q. נסתכל על הפעם הראשונה שבה $d(v)$ עודכן לאחר הוצאת v מ-Q.
נניח באיטרציה הזו u הוצא מ-Q והייתה קיימת קשת מ-u ל-v כך ש- $d(v) > d(u)+w(u,v)$ (u יוצא אחרי v אך משקלו קטן מזה של v) זו סתירה למסקנה הראשונה כי $w(u \to v) \geq 0$. ■

טענה זו היא בדיוק מה שאנחנו רוצים להוכיח כי למעשה ממנה נובע שבסיום האלגוריתם לכל קשת $(u,v) \in E$ יתקיים: $d(v) \leq d(u) + w(u,v)$.