הרצאה 8

איתי ווייסמן

13 במאי 2019

1 בעיית $SSSP$ - Single Source Shortest Path

נתונים גרף $G=(V,E)$, פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$, צומת $s\in V$.
יש למצוא מסלול במשקל מינימלי מ-s לכל צומת $v\in V$ ישיג מ-s.

צורת רישום 1. $d_s\left(v\right)$ - משקל מסלול מינימלי מ-s ל-v.

דוגמה. לא תמיד קיים מסלול במשקל מינימלי, למשל אם יש משקלים שליליים עלול להיווצר מסלול ממשקל $-\infty$. למשל: $s\to a\to b\to s$ (מסלול מעגלי עם נשים לו משקלים שליליים)

הנחה 1. לכן מעתה נניח כי אין מעגל בגרף במשקל שלילי.

הערה 1. כל תת מסלול של מסלול קל ביותר הוא מסלול קל ביותר.

הערה 2. אי שוויון המשולש: $d_u\left(v\right)\leq d_u\left(w\right)+d_w\left(v\right)$.

הערה 3. אם v ישיג מ-s אזי קיים מסלול קל ביותר מ-s ל-v שלא מכיל מעגל.

1.1 אלגוריתם $Dijkstra$

<u>זמן ריצה</u>: $O\left(E+ElogV\right)$
<u>הנחה</u>: כל המשקלים אי שליליים.

1.2 אלגוריתם Bellman-Ford

<u>זמן ריצה</u>: $O\left(V\cdot E\right)$.
<u>הנחות</u>: עובד עם משקלים שליליים + מוצא מעגל שלילי אם קיים.

2 תרגיל 1

נתונים גרף מכוון $G=(V,E)$, פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$ וצצומת מקור $s\in V$.
נתון כי כל המשקלים אי שליליים פרט לקשת אחת $a\to b$ שמשקלה שלילי.
יש לחשב $d_s\left(V\right)$ לכל $v\in V$ ישיג מ-s.
רעיון: נוסיף את משקל הקשת $-w\left(a\to b\right)$ (ערך מוחלט של המשקל) לכל מהשקלים של שאר הקשתות ונריץ $Dijkstra$ מ-s.

בעיה: הרעיון לא יעבוד שכן יכול להיות מצב ששני מסלולים קלים ביותר יהיו עם מס' קשתות שונה ואז אנו "מחלישים" מסלול אחד יותר מהשני.

רעיון #2: נחשב מסלול קל ביותר מ-s ל-a וכן מסלול קל ביותר מ-b ל-v ונחשב אורך מסלול כולל הקשת. נחשב גם מסלול קל ביותר מ-s ל-v כרגיל וניקח את המינימום.

2.1 אלגוריתם

אלגוריתם 1. 1. הסר את הקשת $a \to b$ מהגרף, יהא G' הגרף המתקבל.
2. הרץ אלגוריתם $Dijkstra$ על G' החל מ-s. נסמן ב-$d'_s(v)$ את המרחקים המתקבלים.
3. הרץ $Dijkstra$ על G' החל מ-b. נסמן ב-$d'_b(v)$ את המרחקים המתקבלים.
4. לכל $v \in V$ החזר: $d(v) = min\left\{d'_s(v), d'_s(a) + w(a \to b) + d'_b(v)\right\}$.

זמן ריצה: $O(V + ElogV)$.

נכונות: בבית.

3 תרגיל 2 - איך להרוויח מ-arbitrage (שער המרה)

נתונה מטריצה $A_{n\times n}$שמייצגת שערי המרה בין n סוגי מטבעות: תמורת יחידה אחת של מטבע i אפשר לקנות $A_{i,j}$ יחידות של מטבע j.

יש למצוא סדרת המרות שמתחילה ביחידה אחת של מטבע כלשהו ומסתיימת ביותר מיחידה אחת של אותו מטבע.

סדרת המרות תיראה כך:

$$i_1 \Leftarrow i_k \Leftarrow \ldots \Leftarrow i_3 \Leftarrow i_2 \Leftarrow i_1$$

ואם ננתח את ההמרה, נקבל בכל שלב המרה:

$$\begin{aligned} i_2 \cdot A_{i_1,i_2} &\Leftarrow i_1 \cdot 1 \\ i_3 \cdot A_{i_2,i_3} &\Leftarrow i_2 \cdot A_{i_1,i_2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

3.1 ניסוח על ידי גרפים (סוג של רדוקציה):

נגדיר גרף $G = (V, E)$ כך ש- V קבוצת הצמתים כ-n סוגי המטבעות. E- כל הקשתות $i \to j$ ממשקל $-log(A_{i,j})$.

המטרה - למצוא מעגל כך שסכום משקלי הקשתות שלו קטן ממש מ-0.

הסבר:

- למה להשתמש ב-log? - משום שהאלגוריתם שאנו מכירים יודע רק לסכום ולא לכפול, ותמיד כשיש מכפלה ניתן להפוך אותה לסכום על ידי שימוש בlog.
  - נשים לב שזה דורש מאיתנו לבדוק שהסכום גדול ממש מ-0 ולא מ-1.
- למה להפוך את סימן הלוגריתם? - משום שהאלגוריתם שאנו מכירים יודע למצוא רק מעגלים שליליים.

אלגוריתם 2. 1. בנה גרף $G=(V,E)$ כך ש:

$$V=\{1,2,\ldots,n\}$$

$$E=\{i\to j:i,j\in V,i\neq j\}$$

והגדר פונקציית משקל:

$$w\left(i\to j\right)=-log\left(A_{i,j}\right)$$

.

2. הרץ אלגוריתם Belmman-Ford מצומת כלשהו.
3. אם נמצא מעגל במשקל שלילי, החזר אותו. אחרת החזר שאין פתרון.

<u>זמן ריצה:</u> $O\left(n^3\right)$.