הרצאה 4

איתיווייסמן

5 במאי 2019

1 בעיות אופטימזציה ורשתות

1.1 דוגמה

נתונה לנו רשת התקשורת הבאה:

– להשלים תמונת רשת –

נניח כי הצומת a מעוניין להפיץ הודעה לכל הצמתים האחרים במחיר מינימלי. $\Leftarrow$יש למצוא תת"ק של קשתות ברשת שעליהן ההודעה תעבור כך שתגיע לכל הצמתים.

היות ונרצה להשיג מחיר מינימלי, לבטח הגרף שיתקבל מבחירת הקשתות יהיה חסר מעגלים.

1.2 בעיית עץ פורש מינימום

נתון גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$ שבו לכל קשת (v, u) יש משקל $\omega(v, u)$. יש למצוא עץ פורש של הגרף שסה"כ משקל הקשתות בו מינימלי.

1.3 אלגוריתם חמדן (Greedy) לפתרון הבעיה

נגדיר תחילה אלגוריתם גנרי.

1.3.1 רעיון

נבנה קשת אחר קשת, על ידי הוספת הקשתות עם משקל נמוך והשמתת הקשתות עם משקל גבוה. האלגוריתם יתקדם על ידי צביעת קשתות כך שקשתות שיצבעו בכחול יופיעו בעץ וקשתות שייצבעו באדום יושמטו.

האלגוריתם יקיים בכל שלב את שמורת הצבע: קיים עץ פורש מינימלי שמכיל את כל הקשתות הכחולות ואף אחת מהקשתות האדומות.

משמורת הצבעת נובע כי כאשר כל הקשתות ב-G נצבעות הכחולות יוצרות עץ פורש מינימלי.

מושג מרכזי בתיאור האלגוריתם: חתך (cut) בגרף $G = (V, E)$ הינו חלוקה של קבוצות הצמתים לשתי תתי קבוצות X ו-$\overline{X} = V/X$. קשת חוצה את החתך אם קצה אחד שלה ב-X והקצה האחר ב-$\overline{X}$.

למשל בדוגמה שלנו נגדיר חתך $X = \{a, b, c\}$ וכן $\overline{X} = \{e, d\}$. הקשתות החוצות הן הקשתות $(a, e), (a, d), (b, e), (b, d), (c, d)$.

לפעמים נתייחס לחתך כאל קבוצת הקשתות החוצות.

2 האלגוריתם - גנרי למציאת עפ"מ

אלגוריתם 1. הכלל הכחול: מצא חתך שאין בו קשת כחולה. צבע בכחול את הקשת הקלה ביותר שאינה צבועה.
הכלל האדום: מצא מעגל שאין בו אף קשת אדומה. צבע באדום את הקשת הכבדה ביותר שאינה צבועה.
אלגוריתם חמדן: הפעל את הכללים לעיל עד שכל הקשתות צבועות. הקשתות הכחולות הן עץ פורש מינימלי.

2.1 משפט 1: האלגוריתם הגנרי צובע את כל הקשתות של גרף קשיר G ומקיים את "שמורת הצבע".

הוכחה:

1. נראה תחילה כי האלג' מקיים את השמורה באינדוקציה על מס' האיטרציות (דהיינו, הפעלות של הכלל הכחול או האדום).

   (א) בסיס: בתחילה אף קשת לא צבועה לכן כל עץ פורש מינימלי מקיים את השמורה באופן ריק.

   (ב) צעד: נטפל לכוד ב-2 מקרים.

   i. נניח כי השמורה מתקיימת לפני הפעלה של הכלל הכחול. תהי e הקשת שנצבעת כעת בכחול ויהי T עץ פורש מינימלי שמקיים את השמורה לפני הפעלת הכלל הכחול על e. בהפרדה למקרים:

   א'. אם הקשת e שייכת לעץ T, אזי העץ T מקיים את השמורה אחרי שהקשת e נצבעת בכחול.

   ב'. אם הקשת e אינה שייכת לעץ T. נסתכל על החתך X ו-$\overline{X}$ עליו הפעלנו את הכלל הכחול. קיים בעץ T מסלול שמחבר בין הצמתים u, v שהם הקצוות של הקשת e. היות וe היא קשת חוצה בחתך, קיימת על המסלול הנ"ל בין v ל-u קשת e' שחוצה את החתך. מהנחת האינדוקציה, לבטח אין ב-T קשת אדומה. לכן e' לא צבועה באדום. מהכלל הכחול נובע גם כי e' לא צבועה בכחול, שכן היא נמצאת בחתך שנבחר כך שאין בו קשתות כחולות. ולכן הקשת 'eאינה צבועה.
   מעבר לזאת, בגלל הכלל הכחול אנו יודעים כי $\omega(e) < \omega(e')$.
   בשל כך, ניתן להשמיט מהעץ T את e' ולהוסיף את e. נשים לב כי אם המסלול היחיד בין שני צמתים בעץ T עבר קודם דרך e', אזי כעת הוא יעבור דרך e. על ידי שינוי זה יצרנו עץ T' המכיל רק קשתות כחולות ולא אדומות, מכיל את e והוא מינימלי כי מהשינוי המשקל לא עלה. לכן T' מקיים את שמורת הצבע.

   ii. נניח כי השמורה מתקיימת לפני הפעלה של הכלל האדום. תהי e קשת שנצבעת כעת באדום, ויהי T עץ פורש מינימלי שמקיים את השמורה לפני שהקשת e נצבעת. נפריד לתתי מקרים:

   א'. אם הקשת e לא היתה בעץ T, אזי עדיין T מקיים את השמורה.

   ב'. אם הקשת e נמצאת בעץ T. השמטת הקשת e מהעץ T מחלקת את T לשני עצים ומגדירה חלוקה של הצמתים ב-G. נסתכל על המעגל שעליו הפעלנו את הכלל האדום. נשים לב כי בהכרח קיימת קשת e' על המעגל שמחברת בין רכיבי הקשירות שנוצרו לאחר הסרת e. המעגל הזה למעשה מכיל מסלול נוסף בין הקצוות של הקשת e שנסמנם u, v, מסלול זה מכיל קשת e' אשר קצה אחד שלה ב-T_1 וקצה שני ב-T_2. נשים לב כי לא ייתכן ש-e' צבועה באדום בגלל שכך פעל הכלל האדום (בחר מעגל שאין בו קשתות אדומות). בנוסף e' לא צבועה בכחול כי אחרת הייתה בעץ T המקורי ואז הוא לא היה עץ (היה מעגל בעץ). לכן הקשת e' אינה צבועה. בנוסף, מתקיים מהכלל האדום בוודאות $\omega(e') \leq \omega(e)$ שכן בחרנו את e להיות הקשת הכבדה

במעגל. הוספת הקשת e' והשמטת הקשת e ייצור עץ חדש T' המקיים את שמורת הצבע ומשקלו לא גדול יותר ממשקל העץ המקורי T.

2. נראה כי האלגוריתם צובע את כל הקשתות בגרף. נניח בשלילה כי יש קשת e לא צבועה אבל אי אפשר להפעיל אף אחד מהכללים, דהיינו האלגוריתם נתקע. מהכלל הכחול הקשתות הכחולות יוצרות יער שמורכב מעצים כחולים. נבחין בין 2 מקרים:

(א) אם שני הקצוות של e נמצאות באותו עץ כחול, נקבל מעגל, ולכן נוכל להפעיל את הכלל האדום, כלומר מצאנו ב-G מעגל שאין בו קשתות אדומות (כי שאר הקשתות במעגל הן כחולות), ולכן ניתן להפעיל את הכלל האדום. זה בסתירה לכך שהאלגוריתם נתקע.

(ב) אם הקצוות של e הן בעצים כחולים שונים, נסמן ב-X את אוסף הצמתים ב-T_1 וב-$\overline{X}$ את שאר הצמתים. קיבלנו חתך שאין בו קשתות כחולות ולכן ניתן להפעיל על e את הכלל הכחול.

(ג) סך הכל ניתן להפעיל את אחד הכללים על הקשת e ולכן האלגוריתם לא נתקע!

ובזאת הוכחנו את הנדרש $\blacksquare$.

3 אלגוריתמים קלאסיים למציאת עפ"מ

3.1 האלגוריתם של Prim

נפעיל את הכלל הכחול על החתך שמוגדר על ידי העץ שהולך ונבנה, דהיינו בין צומתי העץ ובין שאר הצמתים בגרף.

3.1.1 האלגוריתם

אלגוריתם 2. אתחול: כל הקשתות הלא צבועות $T = \{r\}$

(2) כל עוד $T \neq V$ בצע:

תהי $e = (u, v)$ הקשת המינימאלית בחתך $(T, V/T)$ כך ש-$u \in T$ צבע את e בכחול ובצע $T = T \cup \{u\}$.

3.1.2 ניתוח זמן הריצה במימוש בעזרת מערכים

יהי v צומת שגובל בעץ הכחול T, דהיינו יש קשת (v, u) כך ש-u נמצא בעץ T. עבור כל צומת v שגובל ב-T נגדיר קשת בצבע תכלת, זוהי הקשת הקלה ביותר מבין הקשתות שמחברות את v ל-T. (הקשתות בצבע תכלת מועמדות להפוך לכחולות). כאשר נפעיל את הכלל הכחול, נבחר קשת בצבע תכלת ונהפוך אותה לכחולה. נניח כי הצומת v נוסף לעץ T. נסתכל על כל הקשתות (הלא צבועות) (v, x) כך ש- $x \notin T$. אם אין ל-x קשת תכלת, נצבע את (v, x) בתכלת. אם יש ל-x קשת תכלת, נקרא לה (x, y) כך ש-$y \in T$ והמשקל $\omega(v, x)$ קטן מהמשקל $\omega(x, y)$ אזי נהפוך את (v, x) לתכלת במקום הקשת (x, y).

הסיבוכיות לאלגוריתם זה:

בכל איטרציה של הכלל הכחול הסיבוכיות היא $O(|V|)$ וכיוון שיהיו $|V| - 1$ איטרציות נקבל $O(|V|^2)$.

מבחינת סיבוכיות מקום, האלגוריתם משתמש במערך באורך $O(|V|)$ בצבע תכלת.