תרגול 4

5 במאי 2019

1 תזכורת

1. מיון טופולוגי: $O(|V|+|E|)$
2. אלגוריתמים BFS/DFS: $O(|V|+|E|)$
3. משפט המסלול הלבן: עבור הרצת DFS על גרף ושני צמתים u,v: u צאצא של v $\iff$ בזמן $d(v)$ קיים מסלול לבן מ-v ל-u.

2 שורש של גרף

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון. יהא $r\in V$. נאמר כי r שורש אם לכל $v\in V$ קיים מסלול מ-r ל-v.

2.1 דוגמאות

סימון: R_G - קבוצת השורשים בגרף G.

2.1.1 דוגמה 1 - גרף שרוך

$A\to B\to C\to D$. בגרף זה מתקיים כי $R_G=\{A\}$.

2.1.2 דוגמה 2 - גרף מעגלי

$A\to B\to C\to A$

בגרף זה מתקיים $R_G=V$ כי כולם מקיימים את הגדרת השורש.

3 תרגיל 1

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ הוכיחו כי בכל ריצת DFS על G, כל השורשים נמצאים בעץ ה-DFS האחרון.

3.1 פתרון

יהא r שורש, ונניח בשלילה ש-r לא שייך לעץ ה-DFS האחרון. יהא $v \in V$ צומת כלשהו בעץ ה-DFS האחרון. מכיוון ש-r שורש, קיים מסלול מ-r ל-v. נסמן ב-u את הצומת הראשון במסלול ששייך לעץ האחרון, וב-w את הצומת במסלול שנמצא בדיוק לפני u. בזמן $d(w)$ הקשת $w \rightarrow u$ מהווה מסלול לבן מ-w ל-u ולכן u צאצא של w. אבל u ו-w נמצאים בעצים שונים ולכן לא יכולים להיות עם יחס אב-בן ולכן סתירה.

4 תרגיל 2

נתון גרף $G = (V, E)$, הציעו אלגוריתם המוצא שורש ב-G, או מודיע כי לא קיים שורש כזה.

4.1 פתרון

1. נריץ DFS על G.
2. ניקח את עץ ה-DFS האחרון, ונבחר את השורש שלו u.
3. נבדוק אם הוא שורש על ידי הרצת DFS (או BFS), כלומר נבדוק האם כל הצמתים ישיגים מ-u.
4. אם כן - החזר את u, אחרת החזר כי לא קיים שורש.

סיבוכיות: $O(|V| + |E|)$.

5 אלגוריתם למציאת כל שורשי גרף

הרץ DFS על G.

1. יהא u שורש העץ האחרון.
2. בדוק האם קיים צומת שאינו ישיג מ-u על ידי הרצת DFS (או BFS)
   (א) אם כן - החזר קבוצה ריקה
   (ב) אחרת - החזר את הקבוצה $\{x \in V | \text{there exists a path from } x \text{ to } u\}$:
      i. צור גרף חדש בו כל כיווני הקשתות הפוכות.
      ii. בצע אלגוריתם DFS.

6 רכיבים קשירים היטב

6.1 הגדרה

יהא $G = (V, E)$ גרף מכוון. תהא $U \subseteq V$ קבוצת צמתים. נאמר כי U קשירה היטה אם לכל $u, v \in U$ קיים מסלול מ-u ל-v וגם להיפך. בנוסף נאמר כי V רכיב קשיר היטב אם U קשירה היטב ולכל $x \in V/U$ הקבוצה $V \cup \{x\}$ לא קשירה היטב.

6.2 הגדרה שקולה (פחות נוחה, אך פורמאלית)

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון. רכיב קשיר היטב ב-G הוא מחלקת שקילות של היחס:
$R=\{(u,v) | \text{there exists a path from } u \text{ to } v \text{ and from } v \text{ to } u\}$.

6.3 גרף הרכיבים הקשירים היטב

יהא $G=(V,E)$ גרף מכוון. גרף הרכיבים הקשירים היטב של G הוא גרף מכוון שמסומן
$G^{SCC}=(V^{SCC},E^{SCC})$
מוגדר:

$$V^{SCC}=\{U\subseteq V | \text{U is strongly connected}\}$$
$$E^{SCC}=\{U\rightarrow U' | \text{there exists an edge } u\rightarrow u', \text{where } u\in U \text{ and } u'\in U'\}$$

6.3.1 טענה

לכל גרף מכוון G הגרף G^{SCC} חסר מעגלים.

6.3.2 טענה מההרצאה

קיים אלגוריתם שמקבל גרף מכוון $G=(V,E)$ ומחזיר את G^{SCC} בזמן $O(|V|+|E|)$.

7 תרגיל

יהיא $G=(V,E)$ גרף מכוון ויהא V רכיב קשיר היטב. הוכיחו כי בכל ריצת DFS על G כל צמתי V נמצאים באותו עץ DFS.

7.1 פתרון

בתרגול הבא.