תרגול 7

5 במאי 2019

1 תרגיל

נתונים גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$, ופונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$ וקשת $e=uv\in E$.
יש להוכריע האם קיים MSTשל G שמכיל את e.

1.1 רעיון

אלגוריתם 1. 1. מצא MST צהוב ביותר כאשר e צהובה, ושאר הקשתות לא צהובות.
2. אם העץ המתקבל מכיל את e החזר "כן", אחרת החזר "לא".

1.1.1 זמן ריצה בעייתי

זמן הריצה של האלגוריתם הזה הוא $O(ElogV)$. מה שגורם ל-$ElogV$ הוא השלב הראשון.
כדי לשפר את זמן הריצה נפרוט את האלגוריתם לא בתור קופסה שחורה ונשפר כל שלב (עשינו בתרגול הקודם).

1.2 פישוט הרעיון המקורי

אחרי הפישוט הגענו לאלגוריתם משופר:

אלגוריתם 2. 1. הסר מהגרף את כל הקשתות שמשקלן $w(e)$ או יותר (כולל e).
2. יהא G' הגרף המתקבל.
3. אם ב-G' u,v , צמתי הקשת e, בשני רכיבי קשירות שונים, החזר "כן" אחרת החזר "לא".

זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(V+E)$.

1.2.1 הוכחת נכונות

הוכחה. נרצה להוכיח:
1. אם קיים MST שמכיל את e, האלגוריתם יחזיר "כן".
2. אם לא קיים MSTשמכיל את e, האלגוריתם מחזיר "לא".

<u>הוכחת 1:</u>
נניח שקיים MST שמכיל את e, נסמנו T. נניח בשלילה כי האלגוריתם מחזיר "לא".
אזי מהגדרת האלגוריתם ב-G' מתקיים ש-u ו-v הם באותו רכיב קשירות.
אזי ב-G' קיים מסלול p בין u ל-v.
מאופן הבניה של G', המסלול p מכיל רק קשתות שמשקלן קטן ממש מ-$w(e)$.

נסיר מ-T את הקשת e ונקבל שני רכיבי קשירות, אחד מכיל את u והשני מכיל את v.
p בהכרח מכיל קשת כלשהי e' שמחברת בין 2 רכיבי הקשירות.
על פי ההנחה $w(e') < w(e)$ ולכן אם נוסיף את e' לעץ נקבל עץ פורש במשקל קטן ממשקל T.
אך T הוא MST ולכן זו סתירה.
הוכחת 2: מאוד דומה להוכחת 1. ■

תרגיל 1. תרגיל לבית - נתונים גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w : E \to \mathbb{R}$ וקשת $e = uv \in E$. יש להכריע האם כל MST של G מכיל את e.

מסקנה 1. לכל MST קיימת הרצה של $Kruskal$ שמחזירה אותו.

הוכחה. נצבע את קשתות ה-MST בצהוב, ונמצא MST צהוב ביותר כמו שראינו. קיים רק MST צהוב ביותר אחד, ולכן מובטח שהאלגוריתם החזיר אותו (קצת בניפנוף ידיים) ■

2 פונקציות משקל משמרות

הגדרה 1. יהא גרף $G = (V, E)$ לא מכוון ותהיינה $w_1, w_2 : E \to \mathbb{R}$ פונקציות משקל.
נאמר כי w_1, w_2 משמרות סדר אם לכל $e_1, e_2 \in E$ מתקיים:

$$w_1(e_1) \leq w_1(e_2) \iff w_2(e_1) \leq w_2(e_2)$$

טענה 1. יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וקשיר ותהיינה $w_1, w_2 : E \to \mathbb{R}$ פונקציות משקל משמרות סדר. אזי לכל עץ פורש T מתקיים:

$$\text{T is MST by } w_1 \iff \text{T is MST by } w_2$$

הוכחה. יהא T עץ MST לפי w_1. מהמסקנה קיים מיון kruskal שמחזיר את T:

$$w_1(e_1) \leq w_1(e_2) \ldots \leq w_1(e_{|E|})$$

מכיוון ש-w_1, w_2 משמרות סדר:

$$w_2(e_1) \leq w_2(e_2) \ldots \leq w_2(e_{|E|})$$

לכן קיימת הרצה של kruskal לפי w_2 שמחזירה את T ומכאן ש-T הוא MST לפי w_2. ■

טענה 2. יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וקשיר. תהא $w : E \to \mathbb{R}$ פונקציית משקל. אזי לכל $x \in \mathbb{R}$, בכל MST של G יש אותו מספר של קשתות שמשקלן בדיוק x.

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$. יהיו T, T' שני MST ויהיו s, s' מספר הקשתות במשקל x ב-T, T' בהתאמה. נגדיר:

$$w'(e) = \begin{cases} x - \epsilon & w(e) = x \\ w(e) & w(e) \neq x \end{cases}$$

כאשר ϵ קטן מההפרש המינימלי בין שני משקלים שונים.
w, w' משמרות סדר ולכן T, T' הם MST לפי w'.
T, T' הם MST לפי w ולכן:

$$w(T) = w(T')$$

ובאופן דומה:
$$w'(T) = w'(T')$$
מהגדרת w' מתקיים:
$$w'(T) = w(T) - s \cdot \epsilon$$
$$w'(T') = w(T') - s' \cdot \epsilon$$
לכן בהכרח $s = s'$ וזה מוכיח מה שרצינו. ■

3 בוחן אמצע

מה צריך לדעת:

1. כל השאלות מתרגילי בית 1 ו-2.
2. למדנו שישה אלגוריתמים:
   (א) מיון טופולוגי - זמן לינארי
   (ב) BFS ו-DFS - זמן לינארי.
   (ג) בניית גרף הרכיבים הקשירים היטב - זמן לינארי.
   (ד) מציאת עץ פורש מינימאלי - $Prim$ ו-$Kruskal$ - זמן $O(ElogV)$.
3. שימוש באלגוריתמים הללו:
   (א) האם גרף נתון הוא דו-צדדי - $O(E+V)$.
   (ב) מציאת מסלול באורך זוגי קצר ביותר מאיזשהי צומת s לכל $v \in V$ - $O(V+E)$
   (ג) מציאת כל השורשים בגרף -$O(V+E)$.
   (ד) הכרעה האם גרף הוא קשיר למחצה (לכל uv קיים מסלול מ-$\underline{u}$ ל-v או ההפך)
   (ה) מציאת MST צהוב ביותר - $O(ElogV)$.
   (ו) בהינתן $e \in E$ האם קיים MSTשמכיל או לא מכיל את e ב-$O(V+E)$.