הרצאה 9

איתיווייסמן

27 במאי 2019

1 תכנון דינאמי

טכניקה שמאפשרת לפרק בעיה באופן רקורסיבי לתתי-בעיות קטנות מאותו סוג.

1.1 שיבוץ משימות ממושקלות

דוגמה 1. נתונים: n אינטרבליסף כאשר כל אינטרבל נתון על ידי זמן התחלה s_i וזמן סיום f_i. לאינטרוול ה-i נתון רווח $w_i \geq 0$.

מטרה: למצוא אוסף אינטרוולים S כך שכל שני אינטרוולים ב-S לא נחתכים, שממקסם את $\Sigma_{j\in S} w_j$.

ראינו בשיעור הקודם שלא קיים כלל חמדן שפותר לנו את הבעיה הזו. נרצה להשתמש בתכנון דינאמי.

נזכר שמיינו את האינטרוולים: $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$.

עבור האינטרוול I_j נסמן ב- $p(j)$ את האינדקס הכי גדול כך ש- $f_{p(j)} \leq s_j$ (כלומר אינטרוול $I_{p(j)}$ לא נחתך עם האינטרוול I_j). אם לא קיים אינטרוול שכזה, אזי $p(j)$ יוגדר להיות 0.

שאלה: מהן תתי הבעיות שנרצה?

תתי הבעיות שיעניינו אותנו יהיו רישאות של המיון. כלומר לכל $1 \leq j \leq n$ הרישא ה-j תכיל את $\{I_1, I_2 \ldots, I_j\}$.

הגדרה 1. נסמן ב- $A(j)$ את ערך פתרון אופטימלי עבור תת הבעיה ה-j .

שאלה: האם יש קשר רקורסיבי בין $A(0), A(1) \ldots A(n)$?

טענה 1. מתקיים:

$$A(j) = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ max\left\{A(j-1), w_j + A(p(j))\right\} & 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

ו-$A(0), \ldots, A(n)$ מקיימים את הנוסחה הרקורסיבית לעיל.

הוכחה. אם $j = 0$ אזי $A(0)$ הוא ערך פתרון אופטימלי עבור קלט ריק לפי ההגדרה. כלומר $A(0) = 0$ וזה בדיוק הגדרת נוסחת הרקורסיה.

נניח ש-$1 \leq j \leq n$. נניח כי קיים פתרון אופטימלי לבעיה ה-j ונסמנו ב-S_j^* איזשהו פתרון אופטימלי לתת הבעיה $\{I_1, \ldots, I_j\}$.

- אם $I_j \notin S_j^*$ אז S_j^* הוא בהכרח פתרון אופטימלי לתת הבעיה ה-$j-1$ (כי אחרת S_j^* לא היה פתרון אופטימלי לת הבעיה ה-j).
  לכן בהכרח $\Sigma_{i\in S_j^*} w_i = A(j-1)$ (מההגדרה).
  זולכן בהכרח $A(j) = A(j-1)$.

האם ייתכן כי מתקיים $\sum_{i\in S_j^*} w_i < w_j + A(p(j))$? לא, כי אז היה פתרון טוב יותר מ-S_j^* לתת ההבעיה j.

- אם $I_j \in S_j^*$, אזי $S_j^* \setminus \{I_j\}$ הוא פתרון אופטימלי לתת הבעיה $p(j)$ (כי אחרת S_j^* לא היה פתרון אופטימלי לתת הבעיה j).
לכן בהכרח $\sum_{i \in S_j^*} w_j = w_j + A(p(j))$
לכן בהכרח $A(j) = w_j + A(p(j))$.
האם ייתכן שמתקיים: $A(j-1) > w_j + A(p(j))$? לא.

לכן $A(0) \dots A(n)$ מקיימת את נוסחת הרקורסיה. ■

שאלה 1. האם ניתן לחשב את $A(n)$ במהירות בעזרת נוסחת הרקורסיה?

פתרון 1. בדומה לחישוב של סדרת פיבונאצ'י ניתן לשלם בזכרון ולחשב את $A(n)$ בזמן לינארי.

אלגוריתם 1. האלגוריתם הסופי

1. מחשבים את $p(1), p(2) \dots p(n)$
2. עבור $j = 0$ עד n:
   (א) מחשבים את $A(j)$ לפי נוסחת הרקורסיה.
3. מחזירים את $A(n)$.

סיבוכיות: $O(n)$ - בהנחה שלא צריך למיין את האינטרוולים $f_1 \leq \dots \leq f_n$)

1.2 סדר ביצוע כפל מטריצות

נתון: תרגיל כפל מטריצות: $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ כאשר A_i במימדים $p_{i-1} \times p_i$.
מטרה: למצוא סדר לביצוע התרגיל שממזער את מספר הכפלים האריתמטיים.
הערה: כפל של $A \cdot B$ כאשר A במימדים $p \times q$ ו-B במימדים $q \times r$ לוקח pqr כפלים)

דוגמה 2. עבור המטריצות: $A_1\ (10 \times 100), A_2\ (100 \times 5), A_3\ (5 \times 50)$.
אם נכפול בסדר הבא: $(A_1 A_2) A_3$ נקבל כי מספר פעולות הכפל יהיו: $10 \cdot 100 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 50 = 7500$
אם נפכפול בסדר הבא:ף $A_1 (A_2 A_3)$ נקבל כי מספר פעולות הכפל יהיו 75000.
על כן נעדיף את הסדר הראשון.

שאלה 2. כמה אפשרויות יש לביצוע תרגיל באורך n? $p(n)$ - נסמן את מסז' האפשרויות לשים סוגריים על תרגיל באורך n. מתקיים:

$$p(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} p(k)\, p(n-k) & else \end{cases}$$

הפתרון הזה הוא מספרי קטלן. כלומר $p(n) = C(n-1)$.
ניזכר כי מתקיים: $C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \Omega\left(\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$
לכן לא ניתן לעבור באופן יעיל על כל האפשרויות (זהו מספר מאוד גדול).

נגדיר תת בעיה: לכל תת-סדרה של התרגיל, כלומר $1 \leq i \leq j \leq n$ את הבעיה $A_i A_{i+1} \dots A_j$.

הגדרה 2. נסמן ב- $M(i,j)$ את מס' הכפלים האריתמטיים הקטן ביותר שצריך בשביל לפתור את $A_i A_{i+1} \dots A_j$.

נראה קשר רקורסיבי:

$$M(i,j) = \begin{cases} 0 & i = j \\ min_{i \leq k < j} \{M(i,k) + M(k+1,j) + p_{i-1} p_k p_j\} & else \end{cases}$$

טענה 2. $M\left(i,j\right)$ מקיים את נוסחת הרקורסיה.

שאלה 3. איך לחשב באופן מהיר את נוסחת הרקורסיה?

$$M=\left(\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & \ldots & n\\
1 & 0 & & & ?\\
2 & X & 0\\
\vdots & X & \ddots & \ddots\\
n & X & X & X & 0
\end{array}\right)$$

אנו מחפשים את הערך של ? במטריצה.
נשים לב שאם מייצגים את M כמטריצה:

- תנאי העצירה נותן את ערכי האלכסון
- מעניינים רק מבשולש העליון של המטריצה
- לפי נוסחת הרקורסיה $M\left(i,j\right)$ תלוי בתאים במטריצה שהם משמאלו ומתחתיו.

  קיימים הרבה סדרים בהם ניתן לחשב את המטריצה M כך שברגע שמחשבים את $M\left(i,j\right)$ כל התאים במרטיצה שהוא תלוי בהם כבר חושבו.

סיבוכיות: בכל סדר חישוב שכזה חישוב תא $M\left(i,j\right)$ לוקח זמן של $O\left(j-i\right)$. במקרה הגרוע זה $O\left(n\right)$ ולכן זמן ריצה זה: $O\left(n^{3}\right)$.