תרגול 10

26 במאי 2019

1 כיסוי צמתים - vertex cover

הגדרה 1. יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. תהא $U \subseteq V$ קבוצת צמתים. נאמר כי U היא vertex-cover (מסמנים VC) אם לכל קשת $uv \in E$ מתקיים $u \in U$ או $v \in U$ (או גם וגם).

1.1 מציאת VC

נרצה למצוא עץ פורש לגרף ועליו למצוא VC מינימלי.

תרגיל 1. הציעו אלגוריתם שמקבל עץ לא מכוון $T = (V, E)$, ומחזיר VC של T שגודלו מינימלי.

1.1.1 פתרון

אלגוריתם 1. מציאת VC לעץ $T = (V, C)$.

1. $C \leftarrow \emptyset$
2. כל עוד קיימת קשת ב-T:
   (א) מצא עלה u. יהא v השכן של u.
   (ב) $C \leftarrow C \cup \{v\}$
   (ג) הסר מ-T את כל הקשתות הנוגעות ב-v.
3. החזר את C.

1.1.2 הוכחת נכונות

זהו אלגוריתם חמדן, נוכיח בהתבסס על השיטה שלמדנו בתרגולים הקודמים להוכחת אלגוריתם חמדן.

הוכחה. תהא C_i הקבוצה C לאחר i איטרציות. יהיו u_i, v_i הצמתים שנבחרו באיטרציה ה-i.
נוכיח שלכל i, קיים פתרון אופטימלי (כלומר VC מינימלי) שנסמנו OPT כך ש-$C_i \subseteq OPT$.
נוכיח באינדוקציה על i.
<u>בסיס:</u> עבור $i = 0$ מתקיים $C_i = \emptyset$ ולכן $C_i \subseteq OPT$ לכל OPT.
<u>צעד:</u>
נניח שקיים OPT כך ש- $C_i \subseteq OPT$ ונוכיח שקיים OPT' כך ש-$C_{i+1} \subseteq OPT'$.
מתקיים: $C_{i+1} = C_i \cup \{v_{i+1}\}$. בחלוקה למקרים:

- אם $v_{i+1} \in OPT$ אזי $OPT' = OPT$ מקיים את הדרוש.

- אם $v_{i+1} \notin OPT$ אזי בהכרח $u_{i+1} \in OPT$ שכן זהו פתרון אופטימלי, כלומר הוא VC וחייב לכסות את הקשת $u_{i+1}v_{i+1}$.
נגדיר $OPT' = OPT\setminus\{u_{i+1}\} \cup \{v_{i+1}\}$.
טענה: OPT' הוא VC בגודל מינימלי שמכיל את C_{i+1} (ולכן מסכים איתו).
OPT' מכיל את C_i מכך ש-OPT מכיל את C_i ולא הסרנו צמתים ב-C_i ובנוסף OPT' מכיל את v_{i+1} מהגדרתו ולכן בסך הכל מתקיים $C_{i+1} \subseteq OPT'$.
כמו כן $|OPT| = |OPT'|$ ולכן OPT' בגודל מינימלי.
כל הקשתות שהוסרו על תחילת האיטרציה ה-$i+1$, מכוסות על ידי C_i. מתקיים $C_i \subseteq OPT'$ ולכן כל הקשתות הנ"ל מכוסות על ידי OPT'.
בנוסף, הקשת $u_{i+1}v_{i+1}$ מוכסה על ידי v_{i+1}. כל הקשתות האחרות מכוסות על ידי $OPT\setminus\{u_{i+1}\}$ ולכן על ידי OPT.
בסה"כ מתקיים כי OPT' הוא VC מינימלי שמכיל את C_{i+1} כנדרש.

□

2 תרגיל (להוכיח כי $P = NP$)

נתון גרף $G = (V, E)$ לא מכוון, ומספר $k \in \mathbb{N}$.
יש להכריע בזמן פולינומי האם קיים VC של G בגודל k.

3 קידוד Huffman

המטרה: העברת מידע דרך ערוץ תקשורת בינארי תוך שימוש במספר מינימלי של ביטים.

הגדרה 2. יהא Σ א"ב. קוד פרפיקס בינארי מעל Σ הוא פונקציה $\Phi : \Sigma \to \{0,1\}^*$, כך שלכל $a, b \in \Sigma$ מתקיים $\Phi(a)$ הוא לא רישא של $\Phi(b)$.

בעיה 1. נתון א"ב Σ, ונתונה התפלגות P מעל Σ (לכל $\phi \in \Sigma$ נתון p_ϕ, התדירות של ϕ). יש למצוא קוד פרפיקס בינארי Φ שעבורו הסכום $\Sigma_{\phi\in\Sigma} p_\phi \cdot |\Phi(\phi)|$ מינימלי.

אלגוריתם $Huffman$ מוצא קוד מתאים כזה (כמו שנלמד בהרצאה) על ידי בניית עץ ובכל שלב איחוד שני האיברים המינימלים.

3.1 תרגיל

נתון א"ב Σ ותדירויות p_ϕ. כך שלכל $\phi \in \Sigma$ מתקיים $p_\phi < \frac{1}{3}$. הוכיחו כי לא קיימת בקוד $Huffman$ מילת קוד באורך 1.

הוכחה. מניחים בשלילה כי קיימת מילה בקוד $Huffman$ שאורכה 1. מניחים שקיים עץ $Huffman$ אופטימלי, ומראים שבמקרה כזה, ניתן לבנות עץ $Huffman$ יותר קטן מהעץ שלנו. □