# הרצאה 5

איתיווייסמן

5 במאי 2019

## 1 המשך עץ פורש מינימום

ראינו אלגוריתם גנרי למציאת עץ פורש מינימום בעזרת שני כללים: הכלל הכחול והכלל האדום.

הכלל הכחול - קיים חתך $(S, \overline{S})$ כך שאין אף קשת כחולה החוצה אותו. מבין הקשתות בחתך, בחר את הקשת בעלת המשקל המינימלי וצבע אותה בכחול.

הכלל האדום - קיים מעגל $C$ שאינו מכיל קשתות אדומות אז ניתן לצבוע באדום את הקשת הכבדה ביותר ב-$C$ מבין הקשתות הלא צבועות.

השיטה הכללית: מאתחלים את כל הקשתות להיות לא צבועות. כל עוד אפשר, מפעילים את אחד הכללים וצובעים קשת.

**משפט.** השיטה הכללית לעולם לא נתקעת - כלומר בסיום האלגוריתם כל הקשתות בגרף צבועות. בנוסף, אוסף הקשתות הצבועות בכחול הוא איזשהו עץ פורש מינימום.

ההוכחה של המשפט הזה מאוד שימושית - הוכחנו למעשה כי אם נבנה אלגוריתם המשתמש באחד מן הכללים באופן חוקי, הוא מידית נכון.

ולכן כעת נציג את המימוש עצמו והוכחת הנכונות נגזרת מהוכחת המשפט הזה.

### 1.1 האלגוריתם של Prim

נבחר צומת התחלתי $s \in V$. נגדיר חתך התחלתי $S = \{s\}$, נבחר את הקשת הכי קלה הנוגעת ב-$s$ ונכניס אותה לחתך שלנו. כל פעם נבחר את הקשת הקלה ביותר ונכניס אותך לחתך שלנו.

למעשה זו הפעלה של הכלל הכחול בכל שלב ולכן הנכונות כמעט מידית.

**אלגוריתם.** 1. יהי צומת $s \in V$ התחלתי.

2. נגדיר $S \leftarrow \{s\}$ וכן $T \leftarrow \emptyset$.

3. כל עוד $S \neq V$:

א. תהי $e = (u, v)$ קשת קלה ביותר שחוצה את $(S, \overline{S})$ (נניח כי $u \in S$ וכן $v \neq S$)

ב. בצע $T \leftarrow T \cup \{e\}$ ובצע $S \leftarrow S \cup \{v\}$

4. החזר את $T$.

#### 1.1.1 כיצד ניתן לממש את האלגוריתם של Prim?

נשמור את צמתי $\overline{S}$ בערימת מינימום. הערך (המפתח) של צומת $r$ בערימה הוא משקל הקשת הקלה ביותר שנוגעת בו ומחברת אותו ל-$S$ (אם לא קיימת קשת כזו אז ערך המפתח יהיה $\infty$.

נאתחל את הערימה: המפתח של הצומת ההתחלתית $s$ יהיה 0. ושל כל צומת אחר יהיה $\infty$.

צעד: ברגע שמוציאים את צומת $u$ מהערימה מעדכנים את המפתחות של השכנים שלו שעדיין בערימה.

## 1.2 האלגוריתם של Kruskal

**אלגוריתם.** 1. מיין את הקשתות: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq ... \leq w(e_m)$. קבע $T \leftarrow \emptyset$
2. עבור מ-$i = 1$ עד $m$:
אם $T \cup \{e_i\}$ לא מכיל מעגלים אז בצע $T \leftarrow T \cup \{e_1\}$.
3. החזר את $T$.

### 1.2.1 הוכחה

יהיה נוח להראות כי זה מימוש נכון של השיטה הכללית ואז הנכונות מידית.

**משפט.** האלגוריתם של Kruskal מחזיר עץ פורש מינימום.

הוכחה. נראה שהאלגוריתם הוא מימוש מסויים של השיטה הכללית. כלומר: אם נצבע בכחול כל קשת שהאלגוריתם מוסיף ל-$T$

ונבצע באדום כל קשת שהאלגוריתם לא מוסיף ל-$T$ נקבל הפעלה טבעית של הכללים.

נחלק ל-2 מקרים:

א. ברגע שהאלגוריתם בוחן את הקשת $e_i$ מתקיים: $T \cup \{e_i\}$ מכיל מעגל, על כן נפרש כי צבע הקשת $e_i$ הוא אדום.

נראה קיום הכלל האדום: קיים מעגל $C$, ובהכרח הקשתות ב-$T$ הן כחולות ולכן גם במעגל $C$ אין קשתות אדומות (כולן כחולות ו$e_i$ לא צבועה).

כל הקשתות חוץ מ-$e_i$ צבועות בכחול, ולכן $e_i$ בהכרח היחידה שלא צבועה ולכן גם היא הכי כבדה מבין אלו שלא צבועות.

ב. ברגע שהאלגוריתם בחן את הקשת $e_i$ מתקיים $T \cup \{e_i\}$ לא נסגר מעגל ולכן נפרש כי צבע הקשת $e_i$ הוא כחול.

נראה קיום הכלל הכחול: נתבונן בחתך $S$ - כל הצמתים כך שקיים מסלול כחול בין $u$ אליהם.

מכיוון שמתקיים $u \in S$ וכן $v \notin S$ אזי $e_i$ חוצה את החתך.

נוכח כי $v \notin S$ בדדך השלילה: נניח בשלילה כי $v \in S$ אזי קיים מסלול כחול ב-$T$ בין $u$ ו-$v$.

לכן $T \cup \{e_i\}$ מכיל מעגל בסתירה.

למה אין אף קשת כחולה שחוצה את $S$? נניח בשלילה כי יש קשת כחולה $(x, y)$ כך ש- $x \in S, y \notin S$. לכן יש מסלול כחול בין $u$ ו-$x$,

נשרשר למסלול זה את הקשת $(x, y)$ וקיבלנו מסלול כחול בין $u$ ו-$y$ בסתירה לכך ש- $y \notin S$.

מדוע אין אף קשת $e$ שחוצה את $S$ והיא אינה צבועה, וגם $w(e) < w(e_i)$? אם זה קורה, $e$ היתה צריכה להצבע באיטרציה קודמת וזו סתירה. ■

## 2 מסלולים קלים ביותר

נתון: גרף מכוון $G = (V, E)$ ופונקצית משלק $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. משקל של מסלול $p$מוגדר להיות סך משקלי הקשתות ב-$p$: $w(p) \equiv \sum_{e \in p} w(e)$.

מטרה: בהינתן שני צמתים $s$ו-$t$ מה הוא המסלול הקל ביותר מ-$s$ ל-$t$?

הערה. אם $p$ מסלול קל ביותר מ-$u$ ל-$v$ אז כל תת-מסלול של $p$ גם הוא קל ביותר.

הוכחה. נסתכל על המסלול $p$: \

$$u = u_0 \rightarrow u_1 ... \rightarrow u_k = v$$

נסתכל על תת-המסלול מ$u_i$ ל-$u_j$ כך ש $i < j$.

מתקיים: $w(p) = w(p') + w(p_i) + w(p_j)$ ■