הרצאה 7

איתי ווייסמן

13 במאי 2019

1 תזכורת - האלגוריתם של Dijkstra

אלגוריתם 1. האלגוריתם של Dijkstra

1. אתחול: $d(s) \leftarrow 0$ ולכל $v \neq s$: $d(s) \leftarrow \infty$. $Q \leftarrow V$.
2. כל עוד $Q \neq \emptyset$:
   (א) יהי u הצומת בעל $d(u)$ הקטן ביותר ב-Q.
   (ב) לכל קשת $(u \to v) \in E$, אם $d(v) > d(u) + w(u \to v)$ אז $d(v) \leftarrow d(u) + w(u \to v)$.
   (ג) מוציאים את u מ-Q.

הוכחה. נוכיח נכונות.
ניתן להיעזר בנכונות השיטה הגנרית, מספיק להראות שכשהאלגוריתם של Dijkstra עוצר, כל קשת $(u \to v) \in E$ מקיימת: $d(v) \leq d(u) + w(u \to v)$.
הראנו בשיעור הקודם והוכחנו את המסקנה באה:

מסקנה 2. נניח כי v יצא מ-Q באיטרציה מאוחרת מהאיטרציה ש-u יצא מ-Q. אזי: $d(u) \leq d(v)$.

בנוסף הראנו והוכחנו את המסקנה הנוספת הזאת:

מסקנה 3. לכל צומת u, $d(u)$ לא מתעדכן אחרי הוצאת u מ-Q.

נזכיר כי הוכחנו את המסקנה הזו על דרך השלילה וקיבלנו סתירה למסקנה הקודמת.
נרצה בהתבסס 2 המסקנות הללו להראות את הטענה הבאה:

טענה 4. בסיום ריצת האלגוריתם של Dijkstra לכל $(u \to v) \in E$ מתקיים: $d(v) \leq d(u) + w(u \to v)$.

נסתכל על קשת $u \to v$. יכול לקרות אחד מהבאים:

1. v יצא מ-Q לפני u.
   בסיום האיטרציה בה u יצא מ-Q, בהכרח מתקיים $d(v) \leq d(u) + w(u \to v)$
   לפי מסקנה 2, עד סיום ריצת האלגוריתם $d(u)$ לא משתנה וכן $d(v)$ יכול רק לקטון.
   ולכן בסיום ריצת האלגוריתם $d(v) \leq d(u) + w(u \to v)$.

2. u יצא אחרי v מ-Q.
לפי מסקנה 1 מתקיים: $d\left(v\right)\leq d\left(u\right)$.
לפי מסקנה 2 אי שוויון זה יתקיים גם כשהאלגוריתם עוצר.
בנוסף, בגלל שמשקלי הקשתות אי שליליים, מתקיים: $d\left(v\right)\leq d\left(u\right)\leq d\left(u\right)+w\left(u\rightarrow v\right)$.

וסיימנו בזאת את ההוכחה. ■

שאלה מעניינת לשאול היא מה קורה כאשר יש משקלים שליליים בגרף?
האלגוריתם של Dijkstra יכול להיכשל גם כשיש אפילו קשת אחת שלילית בגרף ואין מעגלים שליליים.

2 אלגוריתם שמתמודד עם קשתות שליליות

הרעיון - האלגוריתם יתקדם בפאזות ובכל פאזה נעבור על כל הקשתות הגרף בסדר כלשהו ונבדוק הפרה של אי שוויון המשולש ביחס ל-d.

אלגוריתם 5. האלגוריתם של Bellman-Ford

1. אתחול: $d\left(s\right)\leftarrow 0$, לכל $v\neq s$ נגדיר $d\left(s\right)\leftarrow\infty$.
2. מבצעים $n-1$ פעמים:
   (א) עוברים על כל הקשתות פעם אחת ולכל קשת $\left(u\rightarrow v\right)\in E$:
      i. אם $d\left(v\right)>d\left(u\right)+w\left(u\rightarrow v\right)$ אז: $d\left(v\right)\leftarrow d\left(u\right)+w\left(u\rightarrow v\right)$.

<u>זמן הריצה:</u> $O\left(V\cdot E\right)$.

טענה 6. אם קיים מסלול קל ביותר מ-s ל-v שמכיל k קשתות, אז בסיום הפאזה ה-k: $d\left(v\right)=\delta\left(s,v\right)$.

הערה - נכונות האלגוריתם נובעת מטענה זו ומהתכונה של השיטה הגנרית שאומרת שבכל שלב של ריצת השיטה הגנרית אין פספוס כלפי מטה. כלומר:

$$d\left(v\right)\geq\delta\left(s,v\right)$$

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על k:
<u>בסיס:</u> עבור $k=0$, רק עבור s יש מסלול קל ביותר מ-s ל-s שמכיל אפס קשתות (כי אין מעגלים שליליים). ואכן מהגדרת האלגוריתם באתחול $d\left(s\right)=0=\delta\left(s,s\right)$.
<u>צעד:</u>
נניח של-v יש מסלול קל ביותר P מ-s אליו שמכיל $k+1$ קשתות:

$$P:s=v_0\rightarrow v_1\rightarrow\ldots\rightarrow v_k\rightarrow v_{k+1}=v$$

לכן הרישא של P מ-s ל-v_kהיא מסלול קל ביותר שמכיל k קשתות.
ולפי הנחת האינדוקציה על v_k בסיום הפאזה מובטח ש-$d\left(v_k\right)=\delta(s,v_k)$.
ולכן במהלך הפאזה ה-$k+1$ בוחנים את הקשת $v_k\rightarrow v_{k+1}$ ואז מובטח כי בסיום הפאזה ה-$k+1$:

$$d\left(v_{k+1}\right)\leq d\left(v_k\right)+w\left(v_k\rightarrow v_{k+1}\right)=\delta\left(s,v_k\right)+w\left(v_k\rightarrow v_{k+1}\right)=\delta\left(s,v_{k+1}\right)$$

ולפי התכוה של השיטה הגנרית נקבל בהכרח ש-$d\left(v_{k+1}\right)=\delta\left(s,v_{k+1}\right)$ ■

3 אלגוריתמים חמדניים

הרעיון: הצגת גישה לפתרון בעיה בה האלגוריתם בוחר בכל צעד את האפשרות הטובה ביותר כרגע.

דוגמה 7. נתונות n משימות, וכל משימה i מיוצגת על ידי זמן התחלה s_iוזמן סיום f_i. יש מכונה בודדת שיכולה להריץ את המשימות. המטרה היא לחבור אוסף משימות גדול ביותר כך שכל שתי משימות שנבחרו לא נחתכות.

הערה 8. בעיה זו למעשה נקראת "**גרף אינטרוולים**". כל צומת מייצג אינטרוול, ויש קשת בין צמתים אם ורק אם האינטרוולים נחתכים. המטרה היא למצוא קבוצה בלתי תלויה גדולה ביותר (תת קבוצה של הצמתים כך שבין כל שנים בתת הקבוצה אין קשת).

אלגוריתם 9. תיאור האלגוריתם החמדן:

1. ממיינים את האינטרוולים לפי זמני סיום: $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$. $X \leftarrow \emptyset$.
2. עבור $j = 1$ עד n:
   (א) אם I_jלא נחתך עם אף אינטרוול ב-X אז $X \leftarrow X \cup \{I_j\}$.
3. החזר את X.

זמן ריצה: $O(nlogn)$.

טענה 10. לכל k מ-0 עד n, בסיום האיטרציה ה-k, קיים פתרון אופטימלי X^*כך ש:

$$\forall 1 \leq j \leq k : I_j \in X \iff I_j \in X^*$$

במילים פשוטות, קיים פתרון אופטמלי שמסכים עם הפתרון בצעד הנוכחי על האיברים שנכנסו לפתרון ועל האיברים שלא נכנסו לפתרון.

מסקנה 11. אם נבחר $k = n$ נקבל כי קיים פתרון אופטמלי שזהה לפלט האלגוריתם.

הוכחה. באינדוקציה על k.
בסיס: עבור $k = 1$. אזי נשים לב כי תמיד $I_1 \in X$, כלומר האלגוריתם בוחר את האינטרוול הראשון.
יהי X^* פתרון אופטימלי כלשהו.
אם $I_1 \in X^*$אז סיימנו.
אחרת, $I_1 \notin X^*$. לכן קיים $I_r \in X^*$ האינטרוול בעל זמן הסיום הקטן ביותר שנחתך עם I_1.
(אם אין I_rשכזה, אז $X^* \cup \{I_i\}$פתרון חוקי וזו סתירה לאופטימליות של X^*, לכן בהכרח קיים כזה).
נטען ש: $X^* \backslash \{I_r\} \cup \{I_1\}$ פתרון חוקי (אם זה נכון, סיימנו. זאת משום שזה פתרון חוקי שגם הוא אופטימלי).
בגלל ש-f_1 זהו זמן הסיום הקטן ביותר של כל האינטרוולים (מאופן הבחירה החמדני) אז I_r הוא יחיד, כלומר אין עוד אינטרוול ב-X^*שנחתך עם I_1אחרת X^*לא היה אופטימלי.
לכן: $X^* \backslash \{I_r\} \cup \{I_1\}$ פתרון חוקי.
צעד:
בשיעור הבא. די דומה רק עם חלוקה למקרים - בחרנו להכניס את I_kלתוך X או שבחרנו לא להכניס. ■