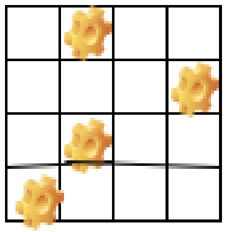
# הרצאה 2

5 במאי 2019

## 1 אלגוריתם DFS

דוגמה: רובוט סורק אזור מסויים במטרה לגלות מוקשים.

- נייצר את אזור הסריקה על ידי סריג (מטריצה)
- הרובוט יכול להתרדם בכל צעד ימינה, שמאלה, למעלה ולמטה.


לדוגמה:

גישה טבעית לסריקת האיזור היא התקדמות עד גילוי מוקש, סימון המשבצת וחזרה אחורה עד למשבצת שממנה ניתן להתקדם.

זו גישה שנקראת "חיפוש לעומק".

### 1.1 אלגוריתם חיפוש לעומק (Depth-First-Search) - DFS

מנסה להתקדם כמה שיותר לעומק בגרף.

כאשר נבקר בצומת $v \in V$ אם יש קשת $(v,u) \in E$ אל צומת $u$ שעוד "לא התגלה" נחצה את הקשת ונמשיך את הסיור מהצומת $u$.

<u>מטרה</u>: יש לגלות את כל הצמתים בגרף.

פורמאלית:

<u>סימונים</u>: נסמן ב$d[v]$ את זמן הגילוי של $v$ וכן ב-$\Pi[v]$ את הצומת שגרם ל-$v$ "להתגלות".

**Algorithm 1.** **Input**: a directed graph $G=(V,E)$, a starting vertex $s \in V$

**Output**: for all $v \in V$, it's time of discovery

**(1) for** all $v \in V$ **do**

1.1 $d[v] \leftarrow 0$, $\pi[v] \leftarrow null$

1.2 mark all edges "unused".$i \leftarrow 0, v \leftarrow s$

**.1.3** $i \leftarrow i+1, d[v] \leftarrow i$

**.3 while** there are unused out-edges from $v$ **do**:

3.1 choose unused edge $(v,u)$ mark it as "used".

**3.2 if** $d[u]=0$ then **do**:

3.2.1 $\pi[u] \leftarrow v, v \leftarrow u, i \leftarrow i+1, d[v] \leftarrow i$

**.4 if** $\pi[v] \neq null$ then **do**

4.1 $v \leftarrow \pi[v]$

**4.2 goto** (3)
**.5 else if** there is $u \in V$ with $d[u] = 0$ then **do**:
5.1 $v \leftarrow u$
**5.2 goto** (2)
**6 stop**

### 1.2 נשים לב:

1. בהרצות שונות של האלגוריתם נוכל לקבל פלטים שונים אבל בכולם נקבל "יער" שבו כל צומת מופיע באיזשהו עץ מכוון.
2. האלגוריתם לא בהכרח מוצא מרחקים קצרים

## 2 אלגוריתם DFS בצורה רקורסיבית

סימונים:
נסמן ב-$color[u]$ - צבע של צומת $u$ מתוך הקבוצה $\{white, gray\}$
נסמן ב-$f[u]$ - זמן הנסיגה מצומת $u$
$Adj[u]$ - אוסף השכנים של $u$.

**Algorithm 2.** **Input**: a directed graph $G = (V, E)$
**Output**: for all $v \in V$, it's time of discovery $d[u]$ and it's time of retreat $f[u]$.
$DFS(G = (V, E))$ :
**for** each $u \in V$ **do**: $color[u] \leftarrow white, \pi[u] \leftarrow null$
**do** $i \leftarrow 0$
**for** each $u \in V$ **do**
**if** $color[u] = white$ then **do**:
$DFS - VISIT(u)$

**אלגוריתם 3.** $DFS - VISIT(u \in V)$:

**Algorithm 4.** $color[u] \leftarrow gray$
$i \leftarrow i + 1$
$d[u] \leftarrow i$
**for** each $v \in Adj(u)$ **do**
**if** $color[v] = white$ then **do**:
$\pi[v] \leftarrow u$
$DFS - VISIT(u)$
$i \leftarrow i + 1$
$f[u] \leftarrow i$

### 2.1 ניתוח זמן הריצה

זמן הריצה של לולאת האתחול $\Theta(|V|)$.
נסמן ב$T(|DFS - VISIT|)$ את מס' הפעולות המבוצעות בקריאה לפרוצדורה $DFS - VISIT$ עבור הצומת $u$. נשים לב כי $DFS - VISIT$ נקראת בדיוק פעם אחת עבור צומת $u$ כאשר $u$ צומת "לבן". מיד בכניסה לפרוצדורה, $u$ נצבע ב"אפור".

בנוסף, מס' הפעולות בלולאת ה"for" של הפרצדורה הוא לינארי במס' השכנים של $u$ ב-$G$.
לכן סיבוכיות הקריאות ל$DFS-VISIT$ הוא:
$$\sum_{u\in V} T(DFS-VISIT(u)) = \sum_{u\in V} \Theta(|Adj(u)|) = \Theta(|E|)$$
ולכן סך זמן ריצה האלגוריתם הוא $\Theta(|V|+|E|)$.

## 2.2 תכונות האלגוריתם

### 2.2.1 תכונה בסיסית

בסיום הריצה נקבל יער של עצי DFS אשר המבנה שלהם משקף את הקריאות הרקורסיביות ל-$DFS-VISIT$.

### 2.2.2 צבעים

$v$ הוא צאצא של $u$ בעץ DFS אם$v$ התגלה כאשר $u$ היה אפור (ולפני שקבענו ערך ל-$f[u]$).

### 2.2.3 תכונת הסוגריים

**משפט 1:** משפט הסוגריים. בכל חיפוש לעומק של גרף מכוון או לא מכוון, $G$, לכל שני צמתים $u,v\in V$ מתקיים אחד משלושת התנאים הבאים:

1. האינטרוולים $(d[u],f[u])$ ו-$(d[v],f[v])$ זרים לחלוטין ואין קשר של אב קדמון-צאצא בין הצמתים.
2. האינטרוול $(d[u],f[u])$ מוכל ממש באינטרוול $(d[v],f[v])$ ו$u$ צאצא של $v$ בעץ DFS.
3. האינטרוול $(d[v],f[v])$ מוכל ממש באינטרוול $(d[u],f[u])$ ו-$v$ צאצא של $u$ בעץ DFS.

**הוכחה:**
נבחין בין שני מקרים:

1. במקרה בו $d[u]<d[v]$, נבחין בין שני תתי מקרים.
   (א) $d[v]<f[u]$ - אזי $v$ התגלה כאשר $u$ היה אפור ולפני הנסיגה מ-$u$. ולכן $v$ הוא צאצא של $u$, ולכן $f[v]<f[u]$ ונקבל כי $(d[v],f[v])\subset(d[u],f[v])$.
   (ב) $d[v]>f[u]$ - אזי נקבל כי מאופן התקדמות האלגוריתם, יתקיים $d[u]<f[u]<d[v]<f[v]$ ולכן האינטרוולים זרים לחלוטין. היות ו$v$ התגלה אחרי הנסיגה מ-$u$ אין בינהם קשר של אב קדמון-צאצא.
2. $d[v]<d[u]$, באופן דומה מבחינים בין שני תתי מקרים באופן סימטרי למקרה 1.

■

### 2.2.4 תכונה של צאצאים ביער DFS

**משפט 2:** (המסלול הלבן)
ביער DFS של גרף $G$ (מכוון\לא מכוון), צומת $v$ הוא צאצא של צומת $u$ אם ורק אם בזמן $d[u]$ הזמן בו $u$ התגלה, ניתן להגיע ממנו ל-$v$ על מסלול שמורכב כולו מצמתים לבנים.
**הוכחה:**

1. כיוון ראשון - נניח ש$v$ צאצא של $u$, יהיה $w$ צומת על המסלול בין $u$ ל-$v$ בעץ DFS כך ש-$w$ צאצא של $\underline{u}$. לכן ממשפט 1, אנו למדים כי $d[u]<d[w]$ ולכן $w$ היה לבן בזמן $d[u]$.

2. כיוון הפוך - נניח בשלילה שיש מסלול לבן מ$u$ ל-$v$ בזמן $d[u]$ אבל $v$ לא נהיה צאצא של $u$ בעץ DFS ונניח ש-$v$ הוא הצומת הראשון על המסלול הלבן שאינו הופך לצאצא של $u$. יהיה $w$ הצומת שלפני $v$ על המסלול הלבן כך ש-$w$ הופך לצאצא של $u$ (יתכן כי $w = u$). ממשפט 1 אנו למדים כי מתקיים $f[w] \leq f[u]$. נשים לב כי $v$ חייב להתגלות אחרי $u$ אבל לפני הנסיגה מ-$w$, כלומר $d[u] < d[v] < f[w] \leq f[u]$. ממשפט 1, נקבל כי $(d[v], f[v]) \subset (d[u], f[u])$ ולכן $v$ צאצא של $u$ בעץ DFS. $\lightning$ סתירה.

■