תרגול 5

5 במאי 2019

1 עץ פורש מינימאלי - Minimum Spanning Tree

1.1 תכונות עץ פורש (לאו דווקא מינימאלי)

יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר, ויהא $T=(V,F)$ עץ פורש של G.

1. אם נוסיף ל-T קשת כלשהי $e\in E\backslash F$ נקבל ב-T מעגל יחיד c. אם נסיר מ-c קשת כלשהי נקבל עץ פורש T'.
2. אם נסיר מ-T קשת כלשהי נקבל בדיוק 2 רכיבי קשירות. אם נוסיף קשת כלשהי שמחברת בין שני הרכיבים, נקבל עץ פורש T'.

1.2 מציאת עפ"מ או MST

תזכורת: מציאת עץ פורש, ניתן לעשות על ידי הרצת DFS על הגרף. אך אנו רוצים למצוא את העץ הפורש בעל המשקל המינימאלי.
נתון לנו גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ ונתונה פונקציית משקל: $w:E\rightarrow\mathbb{R}$. יש למצוא עץ פורש של G שסכום משקל הקשתות שלו מינימלי.

1.2.1 אלגוריתם - מציאת עץ פורש

התחלת מ-$s\in V$ כלשהו. כל עוד לא עץ פורש, הוסף קשת מצומת בעץ לצומת שלא בעץ.

1.2.2 אלגוריתם 2 - מציאת עץ פורש

התחל מגרף חסר קשתות. כל עוד לא עץ פורש, הוסף קשת מגרף הקלט בין שני רכיבי קשירות שונים.

1.2.3 אלגוריתם 1 - מציאת עץ פורש במשקל מינימאלי (Prim)

כמו האלגוריתם המקורי, אחד בחירת הקשת היא הקשת במשקל מינימאלי.
זמן ריצה $O(|E|\cdot log(|V|))$.

1.2.4 אלגוריתם 2 - מציאת עץ פורש במשקל מנימאלי (Kruskal)

כמו האלגוריתם המקורי, רק כעת בחירת הקשת היא הקשת במשקל מינמאלי.
זמן ריצה $O(|E|\cdot log(|V|))$.

1.2.5 הערות

למעשה, פשוט הוספנו לשני האלגוריתמים הגבלה על בחירת הקשת, "התאמנו" את האלגוריתם הכללי למטרה שאנו צריכים. האלגוריתמים האלה נקראים "אלגוריתמיים חמדניים" או Greedy.

1.2.6 מימוש אלגוריתם Kruskal

אלגוריתם 1. $F \leftarrow \emptyset$
מיין את הקשתות לפי משקלן בסדר עולה. יהא $e_1, e_2, ..., e_n$ המיון המתקבל.
לכל i מ-1 ועד n: אם e_i מחברת בין שני רכיבי קשירות שונים בגרף: $F \leftarrow F \cup \{e_i\}$
החזר את $T = (V, F)$

1.3 תרגיל

נתונים: גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$, ופונקציית משקל $w : E \to \mathbb{R}$, וקבוצת הקשתות $Y \subseteq E$ ("קשתות צהובות").
יש למצוא עפ"מ של G שמכיל מספר מקסימלי של קשתות ב-Y.
הרעיון: נשנה את פונקציית המשקל על מנת שהאלגוריתם שכבר הצגנו "יעדיף" את הקשתות מ-Y.

1.3.1 פתרון

נשתמש באלגוריתם של Kruskal אך כאשר יש לנו קשתות מאותו משקל, בשלב המיון נמקם את הצהובות לפני הקשתות הלא הצהובות.
זמן ריצה $O(|E| \cdot log(|V|))$.

1.3.2 הוכחת נכונות לאלגוריתם חמדן - הוכחה גנרית שנציג על התרגיל הנ"ל

נוכיח שלכל i קיים פתרון אופטימלי (במקרה שלנו - עץ פורש במשקל מינימאלי עם כמה שיותר צמתים מ-Y), שמסכים עם i הבחירות הראשונות של האלגוריתם.
נוכיח באינדוקציה.

1. בסיס: עבור $i = 0$, כל פתרון אופטימלי מקיים את הנדרש.

2. צעד: יהא Opt פתרון אופטימלי שמסכים עם i הבחירות הראשונות. יש 2 אפשרויות:

   (א) אם OPT מסכים עם הבחירה ה-$i + 1$ אז סיימנו.

   (ב) אחרת OPT לא מסכים עם הבחירה ה-$i + 1$, נבצע שינוי ב-OPT כך שנקבל פתרון OPT' שהוא אופטימלי שכן מסכים עם $i + 1$ הבחירות הראשונות.
   אצלנו - השינוי יהיה הוספת קשת אחרת (ומהתכונות נקבל מעגל בגרף שלנו) ולאחר מכן נסיר קשת על מנת לקבל פתרון אופטימלי כנדרש.

לבסוף אחרי האינדוקציה נקבל בצעד האחרון כי קיבלנו פתרון אופטימלי לכל הצמתים.