שאלה 2

1. נתון שני גרעינים ואלידיים $K_i\left(x,x'\right)=\left\langle \phi_i\left(x\right),\phi_i\left(x'\right)\right\rangle$ עבור $i\in\{1,2\}$

1.1 עבור $K_3\left(x,x'\right)=K_1\left(x,x'\right)+K_2\left(x,x'\right)$

מתקיים $K_3\left(x,x'\right)=\left\langle \phi_3\left(x\right),\phi_3\left(x'\right)\right\rangle=\left\langle \phi_1\left(x\right),\phi_1\left(x'\right)\right\rangle+\left\langle \phi_2\left(x\right),\phi_2\left(x'\right)\right\rangle$

אזי לכל קבוצת נק' $x_1,...,x_m\in R^d$ תוגדר מטריצת גראם

$G_{i,j}^3=K_3\left(x_i,x_j\right)=\left\langle \phi_1\left(x_i\right),\phi_1\left(x_j\right)\right\rangle+\left\langle \phi_2\left(x_i\right),\phi_2\left(x_j\right)\right\rangle$

ולמעשה $G_{i,j}^3=G_{i,j}^1+G_{i,j}^2$ וסה"כ $G^3=G^1+G^2$.

שני הגרעינים הראשונים ואלידיים ולכן לכל וקטור $0\neq z\in\mathbb{R}^m$ מתקיים

$z^TG^1z\geq0$ וגם $z^TG^2z\geq0$ אזי

$z^TG^3z=z^T\left(G^1+G^2\right)z=z^TG^1z+z^TG^2z\geq0$ אזי K_3 גרעין ואלידי.

1.2 בצורה דומה מתקיים

$K_4\left(x,x'\right)=\left\langle \phi_4\left(x\right),\phi_4\left(x'\right)\right\rangle=f\left(x\right)f\left(x'\right)\left\langle \phi_1\left(x\right),\phi_1\left(x'\right)\right\rangle$

אזי $\left\langle \phi_4\left(x\right),\phi_4\left(x'\right)\right\rangle=f\left(x\right)f\left(x'\right)\left\langle \phi_1\left(x\right),\phi_1\left(x'\right)\right\rangle$

לכל קבוצת נק' $x_1,...,x_m\in\mathbb{R}^d$ תוגדר מטריצת גראם

$G_{i,j}^4=K_4\left(x_i,x_j\right)=f\left(x_i\right)f\left(x_j\right)\left\langle \phi_1\left(x_i\right),\phi_1\left(x_j\right)\right\rangle=f\left(x_i\right)f\left(x_j\right)G_{i,j}^1$

G^1 סימטרית ולכן $G_{i,j}^1=G_{j,i}^1$

2.1

$$G=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ v_{1,2}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\},\ \lambda_{1,2}=\{3,-1\}$$

2.2

$$\mathcal{L}_{SVM}\left(c\cdot v\right)=\lambda\left(c\cdot v\right)^TG\left(c\cdot v\right)+\frac{1}{2}\sum_{i\in\{1,2\}}max\left\{0,1-y_i\left[G\left(c\cdot v\right)\right]_i\right\}$$

הרכיב השני תמיד אי שלילי, נבחן את הראשון

$\lambda\left(c\cdot v\right)^TG\left(c\cdot v\right)=\lambda c^2\cdot v^T\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}v$ אזי למשל עבור $v=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

מתקיים $v^T\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}v=-2$ ומכאן $\lambda\left(c\cdot v\right)^TG\left(c\cdot v\right)\underset{c\rightarrow\infty}{\longrightarrow}-\infty$

וסה"כ $\underset{c\rightarrow\infty}{lim}\mathcal{L}_{SVM}\left(c\cdot v\right)=-\infty$

2.3.1 עבור G שהיא מטריצה PSD מתקיים לכל $\alpha\in\mathbb{R}^m$: $\alpha^TG\alpha\geq0$

ומכיוון ש $\lambda\geq0$, וכמו שראינו הרכיב השני של $\mathcal{L}_{SVM}$ חסום מלמטה ב0

אזי לכל $\alpha\in\mathbb{R}^d$ ובפרט $\underset{\alpha}{min}\mathcal{L}_{SVM}\left(\alpha\right)\geq0$.

2.3.2 נניח בשלילה $\underset{\alpha}{min}\mathcal{L}_{SVM}\left(\alpha\right)>1$ אזי לכל $\alpha\in\mathbb{R}^d$ ולכל $\lambda\geq0$ מתקיים

$\lambda\alpha^TG\alpha+\frac{1}{m}\sum\limits_{i\in[1,m]}max\left\{0,1-y_i\left[G\alpha\right]_i\right\}>1$

עבור $\alpha=0$ מתקיים

עבור הרכיב הראשון $\lambda\alpha^TG\alpha=0$

עבור הרכיב השני, לכל i מתקיים $1-y_iG\alpha_i=1$ אזי

$\frac{1}{m}\sum\limits_{i\in[1,m]}max\left\{0,1-y_i\left[G\alpha\right]_i\right\}=1$ וסה"כ $\mathcal{L}_{SVM}\left(0\right)=1\ngtr1$

בסתירה להנחה $\underset{\alpha}{min}\mathcal{L}_{SVM}\left(\alpha\right)>1$ אזי $\underset{\alpha}{min}\mathcal{L}_{SVM}\left(\alpha\right)\leq1$