הרצאה 9

איתי ווייסמן

27 במאי 2019

1 תזכורת

למדנו לאחרונה 2 נושאים: חבורות מנה והומומורפיזם. אמרנו כי למעשה, הם מייצגים את אותו הדבר.

ניזכר בהגדרת הומומורפיזם:

הגדרה 1. $\Phi : G \to H$ נקראת הומומורפיזם אם $\Phi\left(xy\right) = \Phi\left(x\right)\Phi\left(y\right)$.

דוגמה 1. עבור $G = S_n$ וכן $H = \left(\mathbb{Z}_2, +\right)$. נגדיר:

$$\Phi\left(\pi\right) = \begin{cases} 0 & \exists n \in \mathbb{Z} : \pi = 2n \\ 1 & \exists n \in \mathbb{Z} : \pi = 2n+1 \end{cases}$$

יהיו $\alpha, \beta \in S_n$, $\alpha\beta$ זוגיים אם $\alpha, \beta \in A_n$ או $\alpha, \beta \notin A_n$.

ניזכר בהגדרת גרעין:

הגדרה 2. נגדיר את הגרעין להיות:

$$Ker\phi = \left\{g \in G : \phi\left(g\right) = e_H\right\}$$

משפט 1. $Ker\phi \lhd G$. כלומר הגרעין הוא תת חבורה נורמלית של G.

הוכחה. נוכיח ראשית כי $Ker\phi$ היא חבורה:

1. סגירות לכפל - יהיו $g_1, g_2 \in Ket\phi$ נרצה להראות כי $\phi\left(g_1g_2\right) = e_H$. מתקיים: $\phi\left(g_1g_2\right) = \phi\left(g_1\right)\phi\left(g_2\right) = e_He_H = e_H$.
2. סגירות להיפוך - יהא $g \in Ker\phi$. נרצה להראות כי $g^{-1} \in Ker\phi$. מתקיים: $\phi\left(g^{-1}\right) = \left(\phi\left(g\right)\right)^{-1} = \left(e_H\right)^{-1} = e_H$ ולכן $g^{-1} \in Ker\phi$.

■

הגדרה 3. הגדרת $K \lhd G$: אם לכל $g \in K$ מתקיים $Kg = gK$. כלומר: כל איבר ב-Kg שייך ל-gK ולהיפך. כלומר כל $k \in K$ מקיימם $kg \in gK$, כלומר קיים $k' \in K$ כלשהו כך ש-$kg = gk'$. כלומר בהצמדה $g^{-1}kg \in K$.

לסיכום: $K \lhd G$ אם $g^{-1}Kg = K$.

הוכחה. כעת נוכיח כי $Ker\phi$ היא תת חבורה נורמלית של G בהתבסס על ההגדרה לעיל:

נרצה להוכיח כי אם $k \in Ker\phi$ וכן $g \in G$ אזי $g^{-1}kg \in Ker\phi$ כלומר: $g^{-1}kg = e_H$. מתקיים:

$$\begin{aligned}\phi\left(g^{-1}kg\right) &= \phi\left(g^{-1}\right)\phi\left(k\right)\phi\left(g\right) = \phi\left(g^{-1}\right)e_H\phi\left(g\right) \\ &= \phi\left(g^{-1}\right)\phi\left(g\right) = \phi\left(g^{-1}g\right) = \phi\left(e_H\right) = e_H\end{aligned}$$

■

1.1 הקשר בין הגרעין להומומורפיזם

יהי הומומורפיזם $\Phi : G \to H$ וכן נסמן $K = Ker\phi \triangleleft G$.

למה 1. לכל $x, y \in G$ מתקיים $\Phi(x) = \Phi(y) \iff Kx = Ky$.
(במילים: כל קוסט נשלח לאותו איבר, Kx נשלח ל-$\Phi(x)$.)

הוכחה. ניזכר כי $Kx = Ky$ אם ורק אם $x \in Ky$ אם ורק אם $y \in Kx$ אם ורק אם $yx^{-1} \in K$ אם ורק אם $xy^{-1} \in K$.
לכן מתקיים $Kx = Ky$ אם ורק אם $xy^{-1} \in K$ אם ורק אם $\phi(x)\phi(y^{-1}) = \phi(xy^{-1}) = e_H$ ולכן $\phi(x) = \phi(y)$ כנדרש. ■

נגדיר את התמונה של ההומומורפיזם:

הגדרה 4. התמונה של הומומורפיזם ϕ:

$$Im\phi = \{h \in H : \exists x \in G : h = \phi(x)\}$$

משפט 2. משפט האיזומורפיזם - ההעתקה $\tilde{\Phi} : G/K \to H$ המוגדרת על ידי $\tilde{\phi}(Kx) = \phi(x)$, היא הומומורפיזם חד חד ערכי.
(במילים: מעתיקים כל קוסט לתמונה של כל איבריו)

נשים לב שההגדרה אינה תלויה בבחירת הנציג x, שכן אם $Kx = Ky$ אזי $\phi(x) = \phi(y)$ (זוהי הלמה שהוכחנו). ולכן ההגדרה טובה.

הוכחה. נרצה להוכיח כי מתקיים: $\tilde{\phi}(Kx \cdot Ky) = \tilde{\phi}(Kx)\phi(\tilde{K}y)$
מתקיים:

$$\tilde{\phi}(Kx \cdot Ky) = \tilde{\phi}(Kxy)$$

ומכאן אם נראה כי $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ אזי נראה כי $\tilde{\phi}$ היא הומומורפיזם. זה נכון משום שידוע לנו ש-ϕ היא הומומורפיזם בעצמה, ולכן הטענה נכונה.
נראה כי $\tilde{\phi}$ היא חח"ע, כלומר אם $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(y)$ אזי $Kx = Ky$. כלומר, אם $\phi(x) = \phi(y)$ אזי $Kx = Ky$, וזוהי הלמה שלנו. ■

משפט 3. משפט האיזומורפיזם הקצר: $G/Ker\phi \cong Im\phi$.

דוגמה 2. נציג מספר דוגמאות:

1. עבור $\phi : S_n \to \mathbb{Z}_2$ שהצגנו קודם. מתקיים $Ker\phi = A_n$. ולכן $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$.
2. עבור $\phi : Z \to Z_{10}$ כך ש- $\phi(n) = n\,(mod 10)$. מתקיים: $Ker\phi = 10Z$ ולפי המשפט: $Z/10Z = Z_{10}$.
3. עבור $\phi : (R^*, \cdot) \to (R^*, \cdot)$ כך ש- $\phi(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. זהו הומומורפים (ניתן להראות). מתקיים כי $Ker\phi = R^+$. ולפי המשפט: $R^*/R^+ \cong (\{1, -1\}, \cdot) \cong \mathbb{Z}_2$.
4. עבור $(\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{R}, +)$.
נשים לב כי למשל עבור 1.8 מתקיים כי הקוסטים $\mathbb{Z} + 1.8$ ו-$\mathbb{Z} + 2.8$. זה נכון משום ש- $2.8 - 1.8 = 1 \in (\mathbb{Z}, +)$.
נרצה למצוא בעזרת משפט האיזומורפיזם מיהו $(\mathbb{R}, +) / (\mathbb{Z}, +)$.
נחפש הומומורפיזם $\phi : (\mathbb{R}, +) \to H$ כך ש$Ker\phi = (\mathbb{Z}, +)$. נגדיר: $H = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ כאשר $\phi(x) = e^{2\pi ix}$.
טענה: ϕ הומומורפיזם. נראה על פי ההגדרה:

$$\phi(x + y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi ix}e^{2\pi iy} = \phi(x)\phi(y)$$

הגרעין הוא: $Ker\phi=\left\{x:e^{2\pi ix}=1\right\}$. זאת אומרת שכדי שמס' אויילר הזה יהיה שווה ל-1, נרצה כפולות של 2π על מנת להגיע ל-1 על הציר הממשי ב-$\mathbb{C}$. ולכן בהכרח $x\in\mathbb{Z}$.
לפי משפט האיזומורפיזם: $(R,+)/(Z,+)\cong Im\phi$. מהו $Im\phi$? אם ניזכר באיך מכפילים מספרים מרוכבים (כפל הרדיוסים וחיבור הזוויות, אך הרדיוס תמיד 1), נשים לב שנקבל את מעגל היחידה ב-$\mathbb{C}$.

הערה 1. התמונה של הומומורפיזם $Im\phi$ היא חבורה.

2 חוגים ושדות

דוגמה 3. ניקח לדוגמה את החוג $(\mathbb{Z},+,\cdot)$.

הגדרה 5. **חוג**, הוא קבוצה R עם 2 פעולות: $+,\cdot$ המקיימות את התכונות הבאות:

1. $(R,+)$ היא חבורה, לאדיש קוראים 0.
2. הכפל הוא אסוציאטיבי - $(ab)\,c=a\,(bc)$.
3. יש אדיש לכפל, שיסומן 1.
4. הכפל קומוטטיבי - $ab=bc$.
5. הכפל דיסטריביוטיבי ביחס לחיבור (פילוג) - $x\,(y+z)=xy+xz$.

אם מתקיים $R^*=R\backslash\{0\}$ הוא חבורה ביחס לפעולת הכפל, נקרא ל-R **שדה**.

נביא מספר דוגמאות:

1. השלמים - חוג אך לא שדה
2. הממשיים והקומפלקסים - שדה
3. הרציונליים - שדה
4. $\mathbb{Z}_{\aleph}$- חוג, ואם n ראשוני אז זה שדה
5. $R\,[x]$ - הפולינומיים מעל עם מקדמים מ-R. זהו חוג אך לא שדה. כיצד נבנה שדה? אם F שדה מסמנים ב- $F\,(x)$ את חוג הפונקציות הרציונליות (מנות של פולינומיים - $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$)

2.1 תחומי שלמות

הגדרה 6. יהא $a\in R$ איבר בחוג. a יקרא מחלק 0 אם $a\neq 0$ וקיים $b\neq 0$ כך ש-$ab=0$.

למה 2. $a\cdot 0=0$ לכל $a\in R$.

הוכחה. מתקיים מפילוג ומכך ש- $0+0=0$:

$$a\cdot 0+a\cdot 0=a\,(0+0)=a\cdot 0$$

ולכן:

$$a\cdot 0+a\cdot 0=a\cdot 0$$

ולכן:

$$a\cdot 0=0$$

■

טענה 1. כל שדה הוא תחום שלמות.

הוכחה. ■