הרצאה 7

13 במאי 2019

1 זוגיות של תמורות וחילופים

הגדרה 1. חילוף - תמורה מסדר 2, כלומר (i,j) כך ש $i \to j$ ו- $j \to i$.

משפט 1. כל תמונה היא הרכב של חילופים.

למשל עבור:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}$$

הגדרה 2. תמורה תיקרא זוגית אם היא מכפלה של מספר זוגי של חילופים. היא תיקרא אי-זוגית אם היא מכפלה של מספר אי-זוגי של חילופים.

מההגדרה משתמע כי יכולות להיות תמורות שהן לא אי זוגיות ולא זוגיות - ולכן ההגדרה לא שלמה במובן הזה.

משפט 2. כל תמורה היא אי-זוגית או זוגית, ורק אחד מהם.

מסקנה 1. תכונות שימושיות:

1. אם π_1 ו-π_2 זוגיות, אז גם $\pi_1 \cdot \pi_2$ זוגית.
2. באופן דומה: זוגית ואי זוגית יתנו אי זוגית. אי זוגית ואי זוגית יתנו זוגית.
3. אם π זוגית אז π^{-1} זוגית.

הוכחה. ההוכחות כמעט מיידיות ■

טענה 1. מתקיים $|A_n| = \frac{n!}{2} = \frac{|S_n|}{2}$

הוכחה. נסמן את קבוצת האי-זוגיים ב-O_n. נמצא התאמה חח"ע ועל בין A_n ו-O_n ומכך נסיק כי $|A_n| = |O_n|$ ולכן כל אחד חצי מ-S_n. ■

1.1 בדיקה האם תמורה היא זוגית או היא זוגית.

תרגיל 1. האם המעגל $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ זוגי או לא?

פתרון 1. המעגל זוגי. זה משום שמעגל באורך זוגי הוא תמורה אי זוגית ולהיפך. למשל עבור:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

אך אנו לא עובדים על $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ולכן המשפט הנ"ל יעזור לנו:

משפט 3. הצמדה (כלומר $\pi_1 = \alpha \cdot \pi_2 \cdot \alpha^1$) לא משנה זוגיות.

נמשיך את הפתרון:
על מנת להשתמש במשפט, נרצה למצוא α כך ש- $\left(\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{array}\right) = \alpha \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \alpha^{-1}$
(תזכורת: הצמדה היא העברה של תמורה ל"α" התואמת להם.)
במקרה שלנו נבנה את α כך:

$$\alpha = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

נשים לב שעבור הערכים מ-6 עד 8 לא משנה מה נשים שכן הם לא משפיעים על הנוסחה.
הראינו ש-$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{array}\right)$ צמודה ל-$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$. והראינו ש-$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$ זוגית. ולכן גם $\left(\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{array}\right)$ זוגית.

1.2 הוכחת משפט 2

הוכחה. ראשית נגדיר מונח חדש:

הגדרה 3. חילוף סדר בתמורה π היא זוג (i,j) כך ש-$i < j$ וכן $\pi(i) > \pi(j)$.

למשל עבור $\pi = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right)$ חילופי הסדר הם:

$$(3,2), (3,1), (5,4), (5,2), (5,1), (4,2), (4,1), (6,1), (2,1)$$

נשים לב כי מספר חילופי הסדר בדוגמה זו הוא 9, כלומר מס' אי-זוגי. נוכיח משפט:

משפט 4. הזוגיות של תמורה הוא כמו הזוגיות של מס' חילופי הסדר שלה.

משפט 5. (זה גם מראה לנו שהגדרת הזוגיות של תמורה היא חד ערכית כנדרש.)

מסקנה 2. כפל תמורה בחילוף הופך את הזוגיות של מספר חילופי הסדר.

בהנחה שטענה זו נכונה, עבור התמורה הבאה:

$$\pi = (i_1, j_1) \cdot \ldots \cdot (i_k, j_k) \cdot I$$

מכיוון ש-I מזוגיות של 0, כלומר זוגי, אז עבור π הזוגיות היא כמו של מס' חילופי הסדר, דהיינו k. ■

2 חבורות מנה

2.1 תזכורת - קוסטים

אם $H < G$ אז נאמר ש-$H \cdot x$ הוא קוסט ימני ו-$x \cdot H$ הוא קוסט שמאלי.

דוגמה 1. עבור החבור $G = (\mathbb{Z}, +)$ נגדיר $H = 10\mathbb{Z}$. כלומר

$$H = \{\ldots, -10, 0, 10, 20, \ldots\}$$
$$H + 13 = \{\ldots, -17, -7, 3, 13, 23, 33, \ldots\}$$
$$H + 3 = \{\ldots, -7, 3, 13, 23, \ldots\}$$

נזכיר כי מתקיים:

$$Hx = Hy \iff y \in Hx \iff xy^{-1} \in H \iff yx^{-1} \in H$$

2.2 חבורת הקוסטים - חבורת המנה

נגדיר את הפעולה על הקוסטים: $(H+2)+(H+7)=(H+9)$
הגדרה כזאת של חבורה על הקוסטים מאפשרת לנו להגדיר חבורה של הקוסטים

הגדרה 4. תהא $H<G$ מגדירים פעולה על קוסטים: $Hx\cdot Hy=H\cdot xy$.
בדוגמה שלנו