תרגול 3

26 באפריל 2019

1 חבורות ותתי חבורות

הגדרה 1. הגדרה: חבורה היא קבוצה G עם פעולת כפל $(\cdot)$ מקיימת את התנאים הבאים

1. סגירות: לכל $g, h \in G$ מתקיים $g \cdot h \in G$
2. אסוציאטיביות: לכל $g, h, k \in G$ מתקיים $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$
3. קיום אדיש כפלי: קיים $e \in G$ כך שלכל $g \in G$ מתקיים: $e \cdot g = g \cdot e = g$.
4. קיום הופכי: לכל $g \in G$ קיים $g^{-1} \in G$ כך ש-$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

2 שאלה 1

2.1 סעיף א

הוכיחו כי לכל $g, h, k \in G$ מתקיים: $g \cdot h = g \cdot k \Rightarrow h = k$ וגם $h \cdot g = k \cdot g \Rightarrow h = k$.

נוכיח צמצום משמאל:

$$g \cdot h = g \cdot k \Rightarrow g^{-1} \cdot g \cdot h = g^{-1} \cdot g \cdot k \Rightarrow h = k$$

הוכחת צמצום מימין באופן דומה.

2.2 סעיף ב

מצאו את כל טבלאות הכפל האפשריות של חבורות מסדר 4.

נתחיל מהמקרה בו כל איבר בריבוע הוא e.

	e	g	h	k
e	e	g	h	k
g	g	e	k	h
h	h	k	e	g
k	k	h	g	e

נשים לב שמתקיימת תכונה מעניינת: $\forall x \in G : x^2 = e$ ויש סימטריות בטבלה. זו חבורה אבלית ולה שם מיוחד ונקראת חבורת קליין.

אם לא כל איבר בריבוע שווה ל-e. אז בה"כ מתקיים $g^2 = h$ ונקבל:

k	h	g	e	
k	h	g	e	e
e	k	h	g	g
g	e	k	h	h
h	g	e	k	k

נשים לב כי מהטבלה מתקיים:

$$e = g^0, g = g^1, h = g^2, k = h \cdot g = g^2 \cdot g = g^3$$

החבורה הזאת נוצרת על ידי g ונקראת החבורה הציקלית מסדר 4. לכן נקרא ל-g האיבר היוצר את החבורה.
גם בטבלה זו יש סימטריה על האלכסון, ולכן גם היא אבלית.

2.3 סעיף ג

תזכורת: U_n היא חבורת ההפיכים מודולו n, כלומר האיברים בI_n שזרים ל-n יחד עם פעולת הכפל מודולו n.
אפיינו את 2 החבורות מסדר 4 בתור U_n עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו.
נביט בחבורה U_5:
$U_5 = \{1, 2, 3, 4\}$.
נבדוק מה קורה כאשר מעלים את האיברים בריבוע: $2^2 = 4 \neq 1$. זה כבר אומר לנו שהחבורה U_5 אינה חבורת קליין, נמצא איבר יוצר:
$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 3$.
לכן 2 (ולמעשה גם ההופכי $2^{-1} = 3$) יוצר את U_5 אז היא החבורה הציקלית מסדר 4.
כעת נרצה למצוא עוד חבורה, שהיא איזומורפית לחבורה הציקלית. U_6, U_7 לא יעבדו לנו (למה?). נבדוק את U_8:
$U_8 = \{1, 3, 5, 7\}$. נבדוק את ריבועי איברי הקבוצה ונשים לב כי מתקיימית תכונת חבורת קליין:
$1^2 = 1, 3^2 = 1, 5^2 = 1, 7^2 = 1$.
לכן זו חבורת קליין

3 שאלה 2

בהינתן שתי חבורות G_1, G_2 נגדיר את הסכום הישר:

$$G_1 \oplus G_2 := \{(g_1, g_2) | g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$
$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

3.1 סעיף א

הוכיחו כי הסכום הישר $G_1 \oplus G_2$ הוא חבורה.

1. סגירות - מתקיימת מהגדרת הקבוצה.
2. אסוציאטיביות - מתקיים:

$$\begin{aligned}((g_1,g_2)\cdot(h_1,h_2))\cdot(k_1,k_2)&\\ &=(g_1h_1,g_2h_2)(k_1,k_2)\\ &=(g_1h_1k_1,g_2h_2k_2)\\ &=(g_1,g_2)(h_1k_1,h_2k_2)\\ &=(g_1,g_2)((h_1,h_2)(k_1,k_2)\end{aligned}$$

3. קיום איבר אדיש: $(g_1,g_2)(e_1,e_2)=(g_1,g_2)$.

4. קיום הופכי: מידי כמעט כמו אדיש.

3.2 סעיף ב

נתון לנו כי: $|G_1|=n,|G_2|=m$. מצאו את $|G_1\oplus G_2|P$.
יש לנו n אופציות לבחור את $g_1\in G_1$ ויש לנו m אופציות לבחור את $g_2\in G_2$ ולכן סך הכל נקבל כי $|G_1\oplus G_2|=n\cdot m$.

3.3 סעיף ג

נתונה לנו $G=U_6\oplus U_{10}$. חשבו את:

1. $|G|$
2. $(5,3)\cdot(5,7)$
3. $(5,7)^{-1}$

תזכורת: פונקציית אויילר $\varrho(n)$ מחזירה את כמות המספרים בין 1 ל-n שזרים ל-n. כלומר זהו למעשה $|U_n|$.
נחשב את $|G|$:
$$|U_6|=|\{1,5\}|=2,|U_{10}|=|\{1,3,7,9\}|=4\Rightarrow|G|=2\cdot4=8$$
נחשב את $(5,3)\cdot(5,7)$:
$$(5,3)(5,7)=(25,21)=(1,1)$$
נחשב את $(5,7)^{-1}$:
מהחישוב הוקדם ניתן לראות כי בהכרח מתקיים $(5,7)^{-1}=(5,3)$.

4 שאלה 3

הוכיחו כי אם G חבורה אבלית מסדר n, אז לכל $g\in G$ מתקיים $g^n=e$.
נסמן: $h:=g_1\cdot g_2\cdots g_n$ ונרצה להראות כי $g^n\cdot h=h$.
מתקיים:
$$g^n\cdot h=g^n\cdot g_1\cdots g_n=(gg_1)(gg_2)\cdots(gg_n)$$
ניעזר בכלל הצמצום, ונקבל כי כל האיברים במכפלה לעיל הם n איברים שונים בחבורה.
לכן אלו כל איברי החבורה, ומקומטטיביות נוכל לקבל אותם בתור המכפלה $h=g_1\cdots g_n$.
הוכחנו כי $g^n\cdot h=h$ ולכן: $g^nh=h=eh\Rightarrow g^n=e$ כנדרש.