הרצאה 8

20 במאי 2019

1 חבורות מנה

תהי חבורה G ותהי תת חבורה $H < G$.
נסתכל על קבוצת הקוסטים הימניים : $\{Hx : x \in G\}$
נגדיר פעולה על הקוסטים : $Hx \cdot Hy = H \cdot (x \cdot y)$. את הפעולה "נירש" מהחבורה המקורית G.
בנינו חבורה שתיקרא "חבורת המנה".

דוגמה 1. למשל עבור

$$\{\ldots, -10, 0, 10, 20, \ldots\} = 10\mathbb{Z} < (\mathbb{Z}, +)$$

הקוסטים הם :

$$H + 0 = H + 10 = H = \{\ldots, -10, 0, 10, 20, \ldots\} = H + h(h \in H)$$

$$H + 1 = H + 11 = \{\ldots, -19, -9, 1, 11, 21, \ldots\}$$

ואם נבין את העיקרון ניתן להמשיך כך עד שנגיע ל :

$$H + 9 = \{\ldots, -21, -11, -1, 9, 19, 29, \ldots\}$$

נסתכל על הפעלת הקוסטים :

$$(H + 7) + (H + 8) = H + (7 + 8) = H + 15 = H + 5$$

ובאופן כללי :

$$(H + i) + (H + j) = H + (i + j) = H + (i + j)\, mod10$$

הגדרה 1. חבורת המנה G/H.

1. האיברים : הקוסטים.
2. הפעולה : $Hx \cdot Hy = H \cdot (\text{x}\cdot y)$.
3. האדיש : $H = H \cdot e$
4. ההופכי : $(Hx)^{-1} = Hx^{-1}$.

הערה 1. אם G סופית, אז מתקיים $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$ (מס' הקוסטים).

דוגמה 2. $G=S_3$ וכן $H=A_3$. כלומר:

$$G=\left\{I,\left(\begin{array}{cc}1&2\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}1&3\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}2&3\end{array}\right),\left(\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\right),\left(\begin{array}{ccc}1&3&2\end{array}\right)\right\}$$

$$H=A_3=\left\{I,\left(\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\right),\left(\begin{array}{ccc}1&3&2\end{array}\right)\right\}$$

מכיוון ש-G סופית, יש לנו $\frac{6}{3}=2$ איברים בחבורת המנה.
הקוסטים:

$$H\cdot I=\left\{I,\left(\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\right),\left(\begin{array}{ccc}1&3&2\end{array}\right)\right\}$$

$$H\cdot\left(\begin{array}{cc}1&2\end{array}\right)=\left\{\left(\begin{array}{cc}1&2\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}1&3\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}2&3\end{array}\right)\right\}$$

נשים לב כי תכונה מעניינת היא שהקוסט הראשון $H\cdot I$ הוא קבוצת התמורות הזוגיות, בעוד הקוסט השני הוא קבוצת התמורות האי-זוגיות. ולכן נובע מכך כי מתקיים:

$$G/H=\left\{H,H\cdot\left(\begin{array}{cc}1&2\end{array}\right)\right\}\cong\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$$

כלומר חבורת המנה הזו איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2$. האיזומורפיזם:

$$\phi:G/H\to\mathbb{Z}_2$$
$$\phi(x)=\begin{cases}0 & x=H\\ 1 & x=H\cdot\left(\begin{array}{cc}1&2\end{array}\right)\end{cases}$$

1.1 בעיה בהגדרה - הגדרת הפעולה

לעיתים יכול להיות המצב בו $Hx=Hx'$ וכן $Hy=Hy'$ ולפי ההגדרה שלנו יכול להתקיים:

$$Hx'y'=HxHy=Hxy$$

אך מי אמר ש-$x'y'=xy$?

משפט 1. ההגדרה $HxHy=Hxy$ טובה $\iff$ לכל $g\in G$ מתקיים $Hg=gH$ (כלומר הקוסטים הימניים והשמאליים שווים).

כאשר התנאי הזה מתקיים, קוראים ל-H "תת חבורה נורמלית".
במקרה בו תת חבורה היא לא נורמלית אז פשוט אין חבורת מנה.
מסמנים: $H\lhd G$

הוכחה. <u>כיוון $\Rightarrow$:</u>
צ"ל כי אם $Hx=Hx'$ לכל $x,x'\in H$ וכן $Hy=Hy'$ לכל $y,y'\in H$ אזי $H(xy)=H(x'y')$.
כלומר צ"ל כי $x'y'\in Hxy$ (ממשפט הטענות השקלות).
נתון לנו $x'\in Hx$, כלומר: $x'=h_1x$ (עבור $h_1\in H$ כלשהו)
בנוסף נתון לנו כי $y'\in Hy$, כלומר: $y'=h_2y$ (עבור $h_2\in H$ כלשהו)
ולכן נרצה להראות $x'y'=h_1xh_2y\in Hxy$.
תזכורת: נתון לנו כי $xH=Hx$ (הנורמליות של הקוסט). מכך נסיק כי: $xh_2=h_2'x$ (עבור $h_2'\in H$ אחר).
ולכן נקבל: $x'y'=h_1xh_2y=h_1h_2'xy$ ומכיוון ש$h_1h_2'\in H$ מתקיים $x'y'\in Hxy$.
<u>כיוון $\Leftarrow$:</u>

■

הערה 2. אם G אבלית, כל תת חבורה היא נורמלית.

הערה 3. אם $H<G$ וגם $|H|=\frac{|G|}{2}$ אז $H\triangleleft G$.

הערה 4. $H\triangleleft G$ פירושו: $\{g\cdot h:h\in H\}=gH=Hg=\{hg:h\in H\}$, וזה שקול ל-$g\cdot H\cdot g^{-1}=H$.

דוגמה 3. תת חבורה לא נורמלית של S_3: $H=\left\{I,\left(\begin{array}{cc}1 & 2\end{array}\right)\right\}$.

טענה 1. מתקיים $H\ntriangleleft G$.

נחפש $g\in G$ כך ש- $Hg\neq gH$.

דוגמה 4. דוגמה נוספת לתת חבורה נורמלית:

$G=GL_n$ - חבורת המטריצות הלא סינגולריות (כלומר הפיכות) מסדר $n\times n$ עם פעולת כפל.

$H=SL_n$ - חבורת המטריצות הלא סינגולריות (כלומר הפיכות) מסדר $n\times n$ ועם $det=1$.

טענה 2. מתקיים $H\triangleleft G$.

הוכחה. נרצה להוכיח כי אם $A\in H$ ו-$B\in G$ אזי: $BAB^{-1}\in H$.

כלומר:

$$det\left(BAB^{-1}\right)=det\left(B\right)det\left(A\right)det\left(B^{-1}\right)=det\left(B\right)\cdot1\cdot\frac{1}{det\left(B\right)}=1$$

■

2 הומומורפיזם

הגדרה 2. תהיינה G,H חבורות.

תהי $\phi:G\to H$ תיקרא הומומורפיזם אם לכל $x,y\in G$ יתקיים $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$.

דוגמה 5. דוגמאות מוכרות:

1. טרנספורמציה לינארית.
   (א) $\phi(x)=x$
   (ב) $\phi(x)=e$ לכל x.
2. פונקציה רציפה.
3. דטרמיננטה של מטרצות:
$$\phi:(GL_n,\cdot)\to(\mathbb{R},\cdot)$$
$$\phi(A)=det\left(A\right)$$
4. עוד דוגמה:
$$\phi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^*,\cdot)$$
$$\phi\left(x\right)=e^x$$
מתקיים:
$$\phi\left(x+y\right)=e^{x+y}=e^x\cdot e^y=\phi\left(x\right)\phi\left(y\right)$$
האם זה איזומורפיזם? לא, משום ש-ϕ אינה על. נוכל לתקן על ידי:
$$\phi:(\mathbb{R},+)\to\left(\mathbb{R}^{>0},\cdot\right)$$
5. דוגמה נוספת:
$$\phi:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to\left(\mathbb{R}^{>0},\cdot\right)$$
$$\phi\left(z\right)=|z|$$

2.1 הגרעין של הומומורפיזם

הגדרה 3. תהי $\phi : G \to H$ הומומורפיזם. נסמן:

$$Ker\phi = \{g \in G : \phi(g) = e_H\}$$

ונקרא לקבוצה זו הגרעין של ϕ.

משפט 2. $Ker\phi \triangleleft G$.

הוכחה. נראה שהוא תת חבורה:

1. $e \in Ker\phi$ ולכן הגרעין אינו ריק. זה משום ש-$\phi(e_G) = \phi(e_G e_G) = \phi(e_G)\phi(e_G) =$ e_h.
2. אם $x, y \in Ker\phi$ אזי $xy \in Ker\phi$. מתקיים: $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = e \cdot e = e \in$ $Ker\phi$.
3. טענה: ϕ

■