הרצאה 6

29 באפריל 2019

1 חבורות ציקליות - סיום

נזכיר כי הגדרנו את החבורה הציקלית להיות חבורה $G = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ כך ש-$g^n = e$ ואנו אומרים ש-g הוא היוצר של G.

הערה 1. תת חבורה של חבורה ציקלית, היא ציקלית.

לדוגמה, למדנו כי אם $H < \mathbb{Z}$, כלומר תת חבורה של השלמים, אז היא מהצורה $k\mathbb{Z}$, כלומר עבור $k = 5$ נקבל כי $H = \{\ldots, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$.

הוכחה. ניתן להניח כי $G = \mathbb{Z}_n$ (כי ראינו שכל חבורה ציקלית היא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_n$, ולכן הן למעשה אותו דבר וההוכחה שקולה).

תהא $H < \mathbb{Z}_n$. יהא k האיבר המינימאלי ב-H ששונה מ-0 . נראה ש-k יוצר של H.

ברור שמתקיים: $0, k, k+k, k+k+k, \ldots$ כולם בתוך H, שכן היא תת חבורה ולכן סגורה לפעולה (חיבור במקרה שלנו כי אנחנו תת חבורה של $\mathbb{Z}_n$).

אם נראה שכל איבר $h \in H$ הוא מהצורה $m \cdot k$, פירושו שכל איבר h נוצר על ידי k.

נרשום: $h = m \cdot k + r$ כאשר $r < k$. נרצה להראות שהשארית r שווה ל-0. נניח בשלילה כי $r > 0$. אזי מתקיים $r = h - m \cdot k$, ולכן מסגירות לפעולה $r \in H$. אך זו סתירה לכך ש-k היה מינימאלי, שונה מ-0 ב-H.

לכן $r = 0$ וk הוא באמת יוצר כנדרש. ■