תרגול 4 - תתי חבורות וסדר של איבר

26 באפריל 2019

1 תזכורות

תהי G חבורה.

הגדרה 1. תת חבורה היא קבוצה $H \subseteq G$ אם היא חבורה ביחס לאותה פעולה.

משפט. טענה 4: $H \subseteq G$ היא חבורה אם ורק אם:
1. $H \neq \emptyset$
2. לכל $a, b \in H$ מתקיים $ab^{-1} \in H$ (סוג של סגירות לחילוק).

הגדרה 2. סדר של איבר שנסמנו $g \in G$. אם קיים מסק טבעי $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$g^n = e$ אז ה-n המינימאלי שעושה זאת נקרא הסדר של g. נסמנו ב- $o(g)$.
אחרת, אם אין כזה, אז נגדיר את הסדר של g להיות ∞ ונכתוב $o(g) = \infty$.

1.1 הערות

1. סדר של איבר הוא 1 $\iff$ האיבר הוא האיבר האדיש.
2. אם מתקיים $g^k = e$ אז הסדר של g הוא מחלק את k: $o(g)|k$.
3. (מתרגיל 4, בתרגול 3). תהי G חבורה אבלית (בהמשך נראה גם על חבורות כלליות) והסדר שלה $|G| = n$ וכן $g \in G$ אזי $g^n = e$.
4. הערה 3 והערה 2 שימושיות שכן ניתן להסיק כי סדר של איבר מחלק את סדר החבורה, כלומר $o(g)||G|$.
לדוגמה: לחבורה מסדר 10, סדרי האיברים השונים מהאדיש, יכולים להיות 2 או 5 או 10

2 תרגיל 2

נתונה חבורה אבלית G.

2.1 סעיף א'

נגדיר $H_1 = \{g \in G | g^2 = e\}$. הוכיחו $H_1 \leq G$.

2.1.1 פתרון

נראה קיום טענה 4:

1. קיום אדיש ב-H_1: האדיש ב-G מקיים $e^2 = e$ ולכן $e \in H_1$.
2. יהיו $a, b \in H_1$ כלומר $a^2 = b^2 = e$. אזי מתקיים:

$$(ab^{-1})^2 = ab^{-1}ab^{-1} = a^2(b^{-1})^2 = eb^2 = e^2 = e \Rightarrow ab^{-1} \in H_1$$

ולכן מתקיים התנאי השני.

2.2 סעיף ב'

נגדיר: $H_2 = \{g \in G | \exists n \in \mathbb{N} : g^n = e\}$. הוכיחו כי $H_2 \leq G$.

2.2.1 פתרון

נפתור עם טענה 4.

1. $e^1 = e$ ולכן עבור $n = 1$ מתקיים כי $e \in H_2$.
2. יהיו $a, b \in H_2$ כלומר קיימים $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש-$a^n = b^m = e$. אזי:

$$(ab^{-1})^{mn} = a^{mn}b^{-mn} = (a^n)^m(b^m)^{-n} = ee = e \Rightarrow ab^{-1} \in H_2$$

ולכן מתקיימת טענה 4.

2.3 סעיף ג'

עבור $G = \mathbb{C}^*$ מצאו את:

$$H_2 = \{g \in G | \exists n \in \mathbb{N} : g^n = e\}$$

למעשה אנו מסתכלים על חבורת שורשי היחידה. כלומר למעשה כתוב לנו:

$$H_2 = \{g \in \mathbb{C}^* | \exists n \in \mathbb{N} : g^n = 1\} = \{cis(\frac{360k}{n}) | n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1\}$$

3 תרגיל 3

חשבו את הסדר של האיבר הנתון בחבורה הנתונה.

3.1 סעיף א'

$6 \in \mathbb{Z}_{21}$.

מהתזכורת, כיוון ש-$\mathbb{Z}_{21}$ אבלית, הסדר יכול להיות רק אחד מהמחלקים, כלומר או 3 או 7 או 21.

מתקיים $6^3 = 18 \neq 0$ ולכן הסדר אינו 3.

עם זאת כן מתקיים: $6^7 = 42 = 0$ ולכן מתקיים $o(6) = 7$.

3.2 סעיף ב'

עבור $5 \in \mathbb{Z}_7^*(=U_7)$
ניזכר: $\mathbb{Z}_7^* = \{1,2,3,4,5,6\}$. ולכן $|\mathbb{Z}_7^*| = 6$ ולכן שוב מתזכורת 3 הסדר יכול להיות רק 2 או 3 או 6. מבדיקה מהירה מתקיים $o(5) = 6$.

4 תרגיל 4

4.1 תזכורת - חבורות ציקליות

תהי G חבורה. $g \in G$. נאמר כי תת החבורה הנוצרת על ידי g היא:

$$< g >= \{g^n | n \in \mathbb{Z}\} = \{e, g, g^2 ..., g^n\}$$

אם מתקיים $G =< g >$ אז G נקראת חבורה ציקלית וכן g הוא היוצר שלה.

4.2 התרגיל

אילו מהחבורות הבאות ציקליות? אם החבורה ציקלית מצא את כל יוצריה.

4.2.1 עבור $G = U_5$

מתקיים $U_5 = \{1,2,3,4\}$. נמצא את סדרי האיברים. איבר הוא יוצר אם ורק אם הסדר שלו כסדר החבורה. במקרה שלנו 4.
נבדוק את 2 (1 לא מעניין כל כך): $2^2 = 4 \neq e$. נשים לב כי זו חבורה אבלית ולכן הסדר חייב להיות או 2 או 4 (המחלקים של 4). ולכן בהכרח $o(2) = 4$.
נבדוק את 3: $3^2 = 9 = 4 \neq 1$ ולכן $o(3) = 4$.
נבדוק את 4: $4^2 = 16 = 1$ ולכן U_5 ציקלית ויוצריה הם 2 ו-3.

4.2.2 עבור $G = U_9$

מתקיים: $U_9 = \{1,2,4,5,7,8\}$ ולכן $|U_9| = 6$. נסיק כי סדר איבריה הוא או 2 או 3 או 6.
נבדוק עבור 2: $2^2 \neq e, 2^3 \neq e \Rightarrow o(2) = 6$ ולכן 2 יוצר.
נבדוק עבור 4: $4^2 \neq 16, 4^3 = 1 \Rightarrow o(4) = 3$ ולכן 4 לא יוצר.
נבדוק עבור 5: $o(5) = 6$ מחישוב דומה ולכן 5 יוצר.
באופן דומה 7 אינו יוצר וכך גם 8 אינו יוצר.
לסיכום, U_9ציקלית ויוצריה הם 2 ו-5.