

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

22.12 - ELECTRÓNICA III

Trabajo Práctico N°1

Grupo 4

BERTACHINI, Germán	58750
DIEGUEZ, Manuel	56273
GALDEMAN, Agustín	59827
LAGUINGUE, Juan Martín	57430

PROFESORES

DEWALD, Kevin

WUNDES, Pablo



PRESENTADO EL 5 DE SEPTIEMBRE DE 2019

Índice

1. Álgebra booleana y compuertas lógicas	2
1.1. Primera Expresión: suma de productos	2
1.1.1. Simplificación mediante álgebra booleana	3
1.1.2. Simplificacioón mediante mapas de Karnaugh	3
1.1.3. Implementación mediante compuertas AND, OR y NOT . .	3
1.1.4. Implementación mediante compuertas NAND	3
1.2. Segunda expresión: producto de sumas	3
1.2.1. Simplificación mediante álgebra booleana	3
1.2.2. Simplificacioón mediante mapas de Karnaugh	3
1.2.3. Implementación mediante compuertas AND, OR y NOT . .	3
1.2.4. Implementación mediante compuertas NAND	3
2. Ejercicio 4 - Conversor a código de Gray	3

1. Álgebra booleana y compuertas lógicas

En el álgebra booleana se conoce como término canónico de una función lógica a todo producto o suma en la cual aparecen todas las variables en su forma directa o inversa. Cualquier función lógica puede expresarse de forma canónica utilizando los conceptos de min y maxtérminos. El primero, se refiere a todas las filas para las cuales la función lógica es igual a uno en la tabla de verdad correspondiente, mientras que el segundo se corresponde con todos los valores para los cuales la función es igual a cero.

En el siguiente ejercicio se simplificarán dos funciones lógicas aplicando ambos conceptos. Luego se utilizarán mapas de Karnaugh para llegar a la misma expresión. A continuación se dibujará el circuito lógico resultante utilizando compuertas AND, OR y NOT, y por último, se usarán compuertas NAND exclusivamente.

1.1. Primera Expresión: suma de productos

1.1.1. Simplificación mediante álgebra booleana

La expresión de la cual se parte está dada por la siguiente fórmula:

$$f(e, d, c, b, a) = \sum m(0, 2, 4, 7, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28) \quad (1)$$

La ecuación 1 nos indica cuales entradas en la tabla de verdad son iguales a uno. A partir de ella podemos plantear la siguiente ecuación, la cual se trabajará para llegar a su respectiva expresión canónica.

$$\begin{aligned} & \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a + \bar{e} \cdot d \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot d \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot d \cdot c \cdot b \cdot a + \\ & e \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a + e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot c \cdot b \cdot a \end{aligned} \quad (2)$$

La expresión anterior puede parecer complicada en un principio, pero esta ordenada según cada mintermino correspondiente. Para comenzar el proceso de simplificación, gracias a la ley de idempotencia se puede sumar términos ya presentes en la ecuación anterior. Se procederá a duplicar los minterminos 2, 18 y 26 y a ordenar la fórmula para facilitar la simplificación.

$$\bar{e} \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \quad (3)$$

$$\bar{e} \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \quad (4)$$

$$\bar{e} \cdot \bar{d} \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot d \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \quad (5)$$

$$e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot c \cdot b \cdot \bar{a} \quad (6)$$

$$e \cdot \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a \quad (7)$$

Las sumas de productos anteriores pueden trabajarse si se factorizan por los términos apropiados:

$$\bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot \bar{b} + \bar{e} \cdot b + e \cdot \bar{b} + e \cdot b) \quad (8)$$

$$\bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot b + e \cdot d + \bar{e} \cdot \bar{d} + e \cdot \bar{d}) \quad (9)$$

$$c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot \bar{d} + \bar{e} \cdot d + e \cdot \bar{d} + e \cdot d) \quad (10)$$

$$e \cdot d \cdot c \cdot (\bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot a + b \cdot \bar{a} + b \cdot a) \quad (11)$$

$$\bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a \cdot (\bar{e} + e) \quad (12)$$

Luego aplicando la propiedad de combinacion en todos los productos:

$$\bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot \bar{b} + \bar{e} \cdot b + e \cdot \bar{b} + e \cdot b) \quad (13)$$

$$\bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot b + e \cdot d + \bar{e} \cdot \bar{d} + e \cdot \bar{d}) \quad (14)$$

$$c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot \bar{d} + \bar{e} \cdot d + e \cdot \bar{d} + e \cdot d) \quad (15)$$

$$e \cdot d \cdot c \cdot (\bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot a + b \cdot \bar{a} + b \cdot a) \quad (16)$$

$$\bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a \cdot (\bar{e} + e) \quad (17)$$

En ??, ??, ?? y ?? se puede aplicar la propiedad de combinación, mientras que en ?? se utiliza la ley del complemento:

$$\bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} + e) \quad (18)$$

$$\bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \cdot (d + \bar{d}) \quad (19)$$

$$c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} + e) \quad (20)$$

$$e \cdot d \cdot c \cdot (\bar{b} + b) \quad (21)$$

$$\bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a \quad (22)$$

Sumando ??, ??, ??, ?? y ??:

$$\bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} + e) + \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \cdot (d + \bar{d}) + c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} + e) + e \cdot d \cdot c \cdot (\bar{b} + b) + \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a \quad (23)$$

Finalmente se aplica nuevamente la ley del complemento en los cuatro primeros productos y se llega a la expresión final:

$$\boxed{\bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} + \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot c + \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a} \quad (24)$$

1.1.2. Simplificaci33n mediante mapas de Karnaugh

1.1.3. Implementaci33n mediante compuertas AND, OR y NOT

La expresi33n obtenida en ?? puede ser implementada mediante compuertas l33gicas facilmente:

1.1.4. Implementaci33n mediante compuertas NAND

1.2. Segunda expresi33n: producto de sumas

1.2.1. Simplificaci33n mediante 33lgebra booleana

Para la segunda parte del ejercicio, se comienza a partir del siguiente producto de sumas:

$$f(d, c, b, a) = \prod M_0, M_2, M_4, M_7, M_8, M_{10}, M_{12} \quad (25)$$

A a partir de ?? se define la siguiente expresi33n:

$$(d+c+b+a) \cdot (d+c+\bar{b}+a) \cdot (d+\bar{c}+b+a) \cdot (d+\bar{c}+\bar{b}+\bar{a}) \cdot (\bar{d}+c+b+a) \cdot (\bar{d}+c+\bar{b}+a) \cdot (\bar{d}+\bar{c}+b+a) \quad (26)$$

En este caso se usa nuevamente la propiedad de idempotencia, en este caso para un producto, para duplicar el mintermino n33mero 8 y 0 y as33 facilitar el trabajo algebraico. Luego se separan los productos en tres grupos para su posterior factorizaci33n:

$$(d+c+b+a) \cdot (d+c+\bar{b}+a) \cdot (\bar{d}+c+b+a) \cdot (\bar{d}+c+\bar{b}+a) \quad (27)$$

$$(d+c+b+a) \cdot (d+\bar{c}+b+a) \cdot (\bar{d}+c+b+a) \cdot (\bar{d}+\bar{c}+b+a) \quad (28)$$

$$(d+\bar{c}+\bar{b}+\bar{a}) \quad (29)$$

Tanto en ?? como en ?? es posible usar la propiedad de combianci33n para el producto entre los primeros dos y los 33ltimos dos t33rminos para simplificar las expresiones. ?? esta expresado en forma can33nica.

$$(d+c+a) \cdot (\bar{d}+c+a) \quad (30)$$

$$(d+b+a) \cdot (\bar{d}+b+a) \quad (31)$$

Luego se utiliza la propiedad de combianci33n para el producto nuevamente, en ambas ecuaciones:

$$(c+a) \quad (32)$$

$$(b+a) \quad (33)$$

Por 33ltimo se unen ??, ?? y ?? para llegar a una expresi33n final:

$$\boxed{(c+a) \cdot (b+a) \cdot (d+\bar{c}+\bar{b}+\bar{a})} \quad (34)$$

1.2.2. Simplificación mediante mapas de Karnaugh

1.2.3. Implementación mediante compuertas AND, OR y NOT

1.2.4. Implementación mediante compuertas NAND

2. Ejercicio 4 - Conversor a código de Gray

Para este ejercicio, realizamos el desarrollo de un circuito lógico capaz de convertir un número binario de 4 bits a su equivalente de código de Gray, esto resulta en la siguiente tabla de verdad:

Entrada				Salida			
X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

De la tabla de verdad obtenemos las siguientes ecuaciones en función de los minterminos:

$$\begin{aligned}Y_4 &= m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_9 + m_{10} + m_{13} + m_{14} \\Y_3 &= m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} \\Y_2 &= m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} \\Y_1 &= m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15}\end{aligned}$$

Que al reemplazar cada mintermino por su correspondiente expresión obtenemos:

$$\begin{aligned}Y_4 &= \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + \\&\quad X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} \\Y_3 &= \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4 + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + \\&\quad X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 \\Y_2 &= \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + \\&\quad X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4\end{aligned}$$

$$Y_1 = X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4$$

Tenemos unas funciones muy larga y como las tenemos expresadas en mintérminos podemos simplificarlas por medio del mapa de Karnaugh. Ésto nos da a lugar a los siguientes mapas de Karnaugh y funciones de salida simplificadas:

		X_1X_2			
		00	01	11	10
X_3X_4	00	0	0	0	0
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	0
	10	1	1	1	1

$$Y_4 = X_3 \cdot \overline{X_4} + \overline{X_3} \cdot X_4$$

Mapa de Karnaugh y formula de Y_4

		X_1X_2			
		00	01	11	10
X_3X_4	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	1	0	0	1
	10	1	0	0	1

$$Y_3 = X_2 \cdot \overline{X_3} + \overline{X_2} \cdot X_3$$

Mapa de Karnaugh y formula de Y_3

		X_1X_2			
		00	01	11	10
X_3X_4	00	0	1	0	1
	01	0	1	0	1
	11	0	1	0	1
	10	0	1	0	1

$$Y_2 = X_1 \cdot \overline{X_2} + \overline{X_1} \cdot X_2$$

Mapa de Karnaugh y formula de Y_2

		X_1X_2			
		00	01	11	10
X_3X_4	00	0	0	1	1
	01	0	0	1	1
	11	0	0	1	1
	10	0	0	1	1

$$Y_1 = X_1$$

Mapa de Karnaugh y formula de Y_1

De los valores obtenidos podemos realizar el siguiente circuito conformado por compuertas OR, AND y NOT:

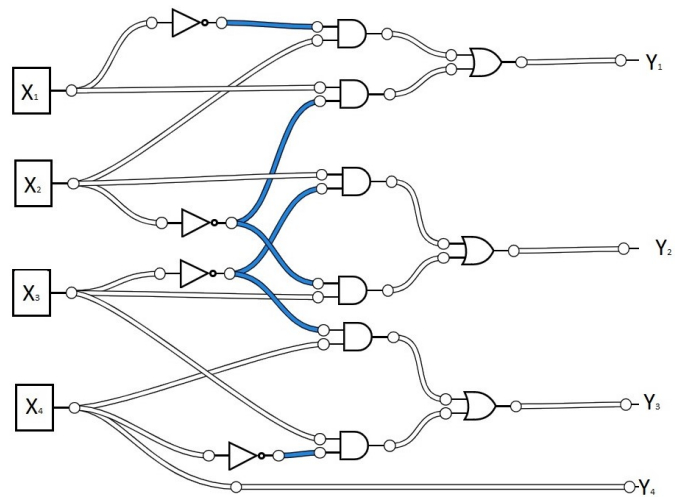


Figura 1: Implementación del conversor a código de Gray