

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

22.12 - ELECTRÓNICA III

Trabajo Práctico N°1

Grupo 4

BERTACHINI, Germán	58750
DIEGUEZ, Manuel	56273
GALDEMAN, Agustín	59827
LAGUINGUE, Juan Martín	57430

Profesores:

DEWALD, Kevin

WUNDES, Pablo



PRESENTADO EL 5 DE SEPTIEMBRE DE 2019

Índice

1. Algebra booleana y compuertas lógicas	2
1.1. Primera Expresión: suma de productos	2
1.1.1. Simplificación mediante álgebra booleana	2
1.1.2. Simplificación mediante mapas de Karnaugh	4
1.1.3. Implementación mediante compuertas AND, OR y NOT . .	8
1.1.4. Implementación mediante compuertas NAND	8
1.2. Segunda expresión: producto de sumas	8
1.2.1. Simplificación mediante álgebra booleana	8
1.2.2. Simplificacioón mediante mapas de Karnaugh	9
1.2.3. Implementación mediante compuertas AND, OR y NOT . .	9
1.2.4. Implementación mediante compuertas NAND	10
2. Implementación de módulos en verilog	10
2.1. Demultiplexor de 4 salidas	10
2.2. Codificador de 4 entradas	11
3. Ejercicio 4 - Conversor a codigo de Gray	12

1. Álgebra booleana y compuertas lógicas

En el álgebra booleana se conoce como término canónico de una función lógica a todo producto o suma en la cual aparecen todas las variables en su forma directa o inversa. Cualquier función lógica puede expresarse de forma canónica utilizando los conceptos de min y maxtérminos. El primero, se refiere a todas las filas para las cuales la función lógica es igual a uno en la tabla de verdad correspondiente, mientras que el segundo se corresponde con todos los valores para los cuales la función es igual a cero.

En el siguiente ejercicio se simplificarán dos funciones lógicas aplicando ambos conceptos. Luego se utilizarán mapas de Karnaugh para llegar a la misma expresión. A continuación se dibujará el circuito lógico resultante utilizando compuertas AND, OR y NOT, y por último, se usarán compuertas NAND exclusivamente.

1.1. Primera Expresión: suma de productos

1.1.1. Simplificación mediante álgebra booleana

La expresión de la cual se parte está dada por la siguiente fórmula:

$$f(e, d, c, b, a) = \sum m(0, 2, 4, 7, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28) \quad (1)$$

La ecuación 1 nos indica cuales entradas en la tabla de verdad son iguales a uno. A partir de ella podemos plantear la siguiente ecuación, la cual se trabajará para llegar a su respectiva expresión canónica.

$$\begin{aligned} & \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a + \bar{e} \cdot d \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot d \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot d \cdot c \cdot b \cdot a + \\ & e \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a + e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot c \cdot b \cdot a \end{aligned} \quad (2)$$

La expresión anterior puede parecer complicada en un principio, pero esta ordenada según cada mintermino correspondiente. Para comenzar el proceso de simplificación, gracias a la ley de idempotencia se puede sumar términos ya presentes en la ecuación anterior. So procederá a duplicar los minterminos 2, 18 y 26 y a ordenar la fórmula para facilitar la simplificación.

$$\bar{e} \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \quad (3)$$

$$\bar{e} \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \quad (4)$$

$$\bar{e} \cdot \bar{d} \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{e} \cdot d \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot \bar{d} \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \quad (5)$$

$$e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot a + e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot \bar{c} \cdot b \cdot a \quad (6)$$

$$e \cdot \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a + \bar{e} \cdot \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a \quad (7)$$

Las sumas de productos anteriores pueden trabajarse si se factorizan por los términos apropiados:

$$\bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot \bar{b} + \bar{e} \cdot b + e \cdot \bar{b} + e \cdot b) \quad (8)$$

$$\bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot b + e \cdot d + \bar{e} \cdot \bar{d} + e \cdot \bar{d}) \quad (9)$$

$$c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot \bar{d} + \bar{e} \cdot d + e \cdot \bar{d} + e \cdot d) \quad (10)$$

$$e \cdot d \cdot c \cdot (\bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot a + b \cdot \bar{a} + b \cdot a) \quad (11)$$

$$\bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a \cdot (\bar{e} + e) \quad (12)$$

Luego aplicando la propiedad de combinación en todos los productos:

$$\bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot \bar{b} + \bar{e} \cdot b + e \cdot \bar{b} + e \cdot b) \quad (13)$$

$$\bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot b + e \cdot d + \bar{e} \cdot \bar{d} + e \cdot \bar{d}) \quad (14)$$

$$c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} \cdot \bar{d} + \bar{e} \cdot d + e \cdot \bar{d} + e \cdot d) \quad (15)$$

$$e \cdot d \cdot c \cdot (\bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot a + b \cdot \bar{a} + b \cdot a) \quad (16)$$

$$\bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a \cdot (\bar{e} + e) \quad (17)$$

En 13, 14, 15 y 16 se puede aplicar la propiedad de combinación, mientras que en 12 se utiliza la ley del complemento:

$$\bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} + e) \quad (18)$$

$$\bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \cdot (d + \bar{d}) \quad (19)$$

$$c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} + e) \quad (20)$$

$$e \cdot d \cdot c \cdot (\bar{b} + b) \quad (21)$$

$$\bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a \quad (22)$$

Sumando 18, 19, 20, 21 y 22:

$$\bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} + e) + \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} \cdot (d + \bar{d}) + c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} \cdot (\bar{e} + e) + e \cdot d \cdot c \cdot (\bar{b} + b) + \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a \quad (23)$$

Finalmente se aplica nuevamente la ley del complemento en los cuatro primeros productos y se llega a la expresión final:

$$\boxed{\bar{d} \cdot \bar{c} \cdot \bar{a} + \bar{c} \cdot b \cdot \bar{a} + c \cdot \bar{b} \cdot \bar{a} + e \cdot d \cdot c + \bar{d} \cdot c \cdot b \cdot a} \quad (24)$$

1.1.2. Simplificación mediante mapas de Karnaugh

		\overline{C}		D		
		DC	00	01	11	10
A	BA	00	1	1	1	1
	00		0000	0100	1100	1000
	01		0001	0101	1101	1001
	11		0011	0111	1111	1011
B	10		1	0	0	1
			0010	0110	1110	1010

$\underline{\overline{B}\overline{A}} + \underline{\overline{D}\overline{C}B\overline{A}}$

		\overline{D}		E		
		ED	00	01	11	10
B	CB	00	1	1	1	1
			0000	0100	1100	1000
	01		1	1	1	1
			0001	0101	1101	1001
C	11		0	0	0	0
			0011	0111	1111	1011
	10		1	1	1	1
			0010	0110	1110	1010

$A = 0/\overline{B} + \overline{C}$

		D		E	
		ED			
		00	01	11	10
CB	00	0	0	1	0
		0000	0100	1100	1000
	01	0	0	1	0
		0001	0101	1101	1001
B	11	1	0	0	1
		0011	0111	1111	1011
C	10	0	0	0	0
		0010	0110	1110	1010

$$A = 1/\underline{CB\bar{D}} + \underline{ED\bar{C}}$$

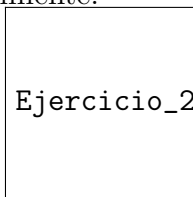
(0,2,8,10,16,18,24,26)	$\bar{C}\bar{E}$
(0,4,8,12,16,20,24,28)	$\bar{D}\bar{E}$
(24,25,26,27)	$AB\bar{C}$
(7,23)	$\bar{B}CDE$

	$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	$D\bar{E}$	DE
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	1	0	0	1
$\bar{A}\bar{B}C$	1	0	1	0
$\bar{A}B\bar{C}$	1	0	0	0
$\bar{A}BC$	1	0	0	1
$A\bar{B}\bar{C}$	1	0	0	1
$A\bar{B}C$	1	0	1	0
$AB\bar{C}$	1	0	0	0
ABC	1	1	1	1

	$\bar{D}\bar{E}$	$\bar{D}E$	$D\bar{E}$	DE
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0	1	3	2
$\bar{A}\bar{B}C$	4	5	7	6
$\bar{A}BC$	12	13	15	14
$\bar{A}B\bar{C}$	8	9	11	10
$A\bar{B}\bar{C}$	16	17	19	18
$A\bar{B}C$	20	21	23	22
ABC	28	29	31	30
$AB\bar{C}$	24	25	27	26

1.1.3. Implementación mediante compuertas AND, OR y NOT

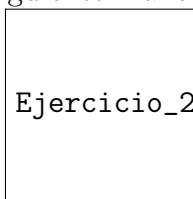
La expresión obtenida en 24 puede ser implementada mediante compuertas lógicas fácilmente:



Ejercicio_2/circuitos/Ej2_parte1_logly.png

1.1.4. Implementación mediante compuertas NAND

A su vez el circuito anterior implementado mediante compuertas nand queda de la siguiente manera:



Ejercicio_2/circuitos/Ej2_parte1_nand_logly.png

1.2. Segunda expresión: producto de sumas

1.2.1. Simplificación mediante álgebra booleana

Para la segunda parte del ejercicio, se comienza a partir del siguiente producto de sumas:

$$f(d, c, b, a) = \prod M_0, M_2, M_4, M_7, M_8, M_{10}, M_{12} \quad (25)$$

A a partir de 25 se define la siguiente expresión:

$$(d+c+b+a) \cdot (d+c+\bar{b}+a) \cdot (d+\bar{c}+b+a) \cdot (d+\bar{c}+\bar{b}+\bar{a}) \cdot (\bar{d}+c+b+a) \cdot (\bar{d}+c+\bar{b}+a) \cdot (\bar{d}+\bar{c}+b+a) \quad (26)$$

En este caso se usa nuevamente la propiedad de idempotencia, en este caso para un producto, para duplicar el mintermino número 8 y 0 y así facilitar el trabajo algebraico. Luego se separan los productos en tres grupos para su posterior factorización:

$$(d+c+b+a) \cdot (d+c+\bar{b}+a) \cdot (\bar{d}+c+b+a) \cdot (\bar{d}+c+\bar{b}+a) \quad (27)$$

$$(d+c+b+a) \cdot (d+\bar{c}+b+a) \cdot (\bar{d}+c+b+a) \cdot (\bar{d}+\bar{c}+b+a) \quad (28)$$

$$(d+\bar{c}+\bar{b}+\bar{a}) \quad (29)$$

Tanto en 27 como en 28 es posible usar la propiedad de combianción para el producto entre los primeros dos y los últimos dos términos para simplificar las expresiones. 29 esta expresado en forma canónica.

$$(d+c+a) \cdot (\bar{d}+c+a) \quad (30)$$

$$(d+b+a) \cdot (\bar{d}+b+a) \quad (31)$$

Luego se utiliza la propiedad de combianción para el producto nuevamente, en ambas ecuaciones:

$$(c+a) \quad (32)$$

$$(b+a) \quad (33)$$

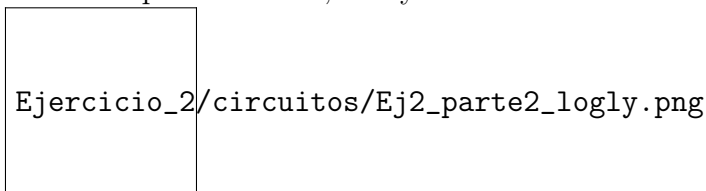
Por último se unen 32, 33 y 29 para llegar a una expresión final:

$$\boxed{(c+a) \cdot (b+a) \cdot (d+\bar{c}+\bar{b}+\bar{a})} \quad (34)$$

1.2.2. Simplificación mediante mapas de Karnaugh

1.2.3. Implementación mediante compuertas AND, OR y NOT

Al igual que con la expresion anterior se implementó la función obtenida en 34 mediante compuertas AND, OR y NOT:



1.2.4. Implementación mediante compuertas NAND

Por último se realizó el circuito anterior solamente con compuertas nand:

Ejercicio_2/circuitos/Ej2_parte2_nand_logly.png

2. Implementación de módulos en verilog

2.1. Demultiplexor de 4 salidas

A continuación, se analiza la tabla de verdad de un multiplexor de 4 salidas:

I	S_1	S_0	A	B	C	D
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1

Tabla 1: Tabla de verdad del Demultiplexor

Cada salida distinta nos permitirá diagramar un mapa de Karnaugh propio, los mismos se presentan a continuación:

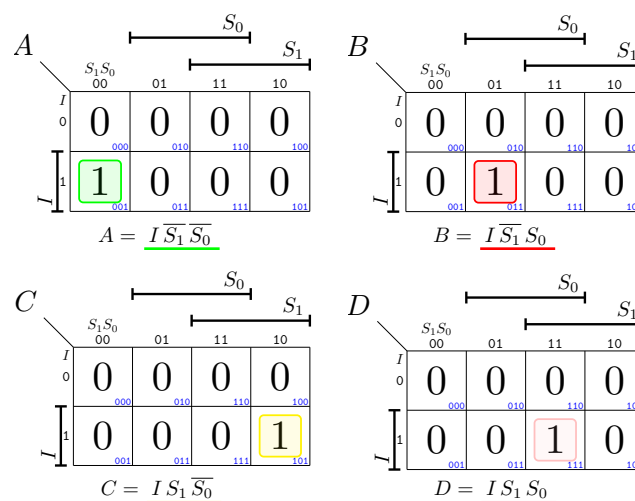


Figura 1: Mapas de Karnaugh de las salidas del Demultiplexor

Se procede a implementar el circuito hallado mediante los mapas:

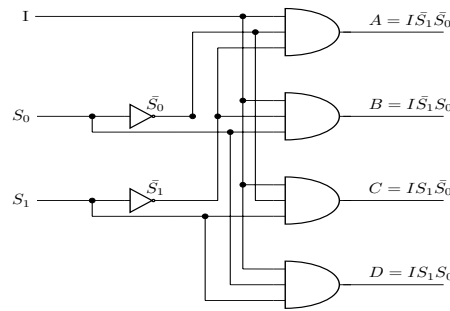


Figura 2: Circuito Demultiplexor de 4 salidas

Respecto del diseño en verilog,

2.2. Codificador de 4 entradas

A continuación, se analiza la tabla de verdad de un codificador de 4 entradas:

A	B	C	D	S_1	S_0	E
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0
X	X	X	X	X	X	1

Tabla 2: Tabla de verdad del Codificador

Cada salida distinta nos permitirá diagramar un mapa de Karnaugh propio. Se contempla el caso de un error cuando las entradas no sean propias a las de un codificador. Los mapas se presentan a continuación:

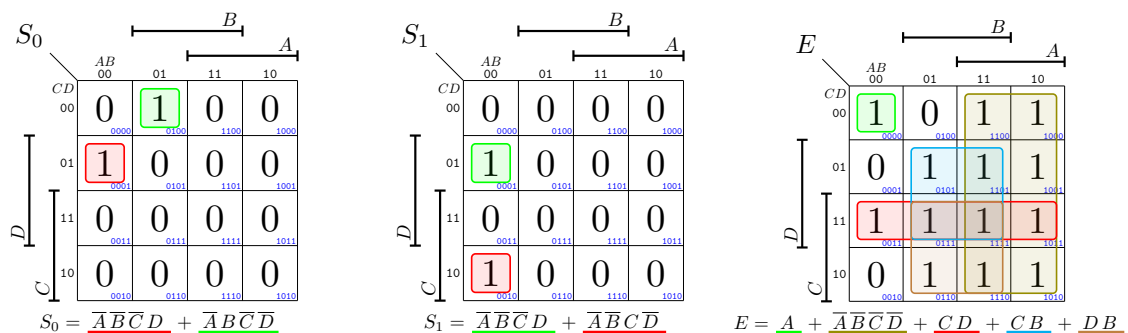


Figura 3: Mapas de Karnaugh de las salidas del Codificador

Por claridad, se coloca, por un lado, el circuito propio al codificador, y por otro, el utilizado para detectar un error. Sin embargo, los mismos podrían estar integrados. Los circuitos propuestos son los siguientes:

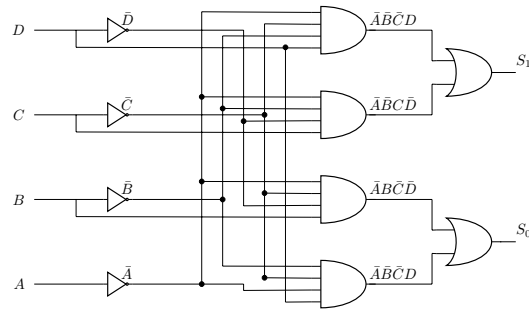


Figura 4: Circuito Codificador de 4 entradas

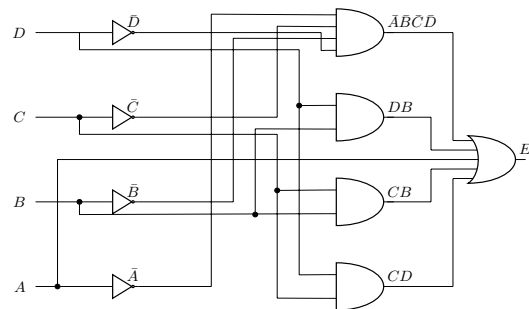


Figura 5: Circuito detector de error - Encoder

3. Ejercicio 4 - Conversor a código de Gray

Para este ejercicio, realizamos el desarrollo de un circuito lógico capaz de convertir un número binario de 4 bits a su equivalente de código de Gray, esto resulta en la siguiente tabla de verdad:

Entrada				Salida			
X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

De la tabla de verdad obtenemos las siguientes ecuaciones en función de los minterminos:

$$\begin{aligned}
 Y_4 &= m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_9 + m_{10} + m_{13} + m_{14} \\
 Y_3 &= m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} \\
 Y_2 &= m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} \\
 Y_1 &= m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15}
 \end{aligned}$$

Que al reemplazar cada mintermino por su correspondiente expresión obtenemos:

$$\begin{aligned}
 Y_4 &= \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \\
 &\quad \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} \\
 Y_3 &= \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4 + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot \\
 &\quad \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4 \\
 Y_2 &= \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + \overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot \\
 &\quad \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4 \\
 Y_1 &= X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot \\
 &\quad X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4} + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4
 \end{aligned}$$

Tenemos unas funciones muy larga y como las tenemos expresadas en minterminos podemos simplificarlas por medio del mapa de Karnaugh. Ésto nos da a lugar a los siguientes mapas de Karnaugh y funciones de salida simplificadas:

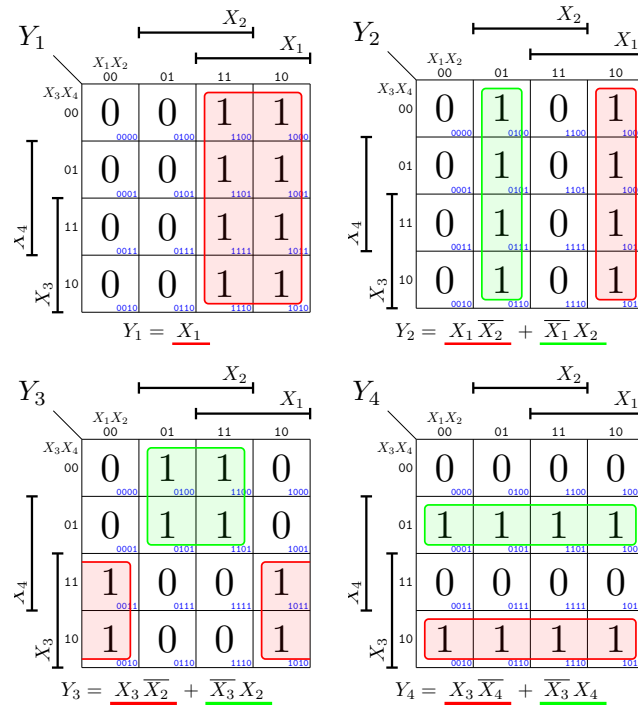


Figura 6: Mapas de Karnaugh de las salidas Y_1 , Y_2 , Y_3 e Y_4

De los valores obtenidos podemos realizar el siguiente circuito conformado por compuertas OR, AND y NOT:

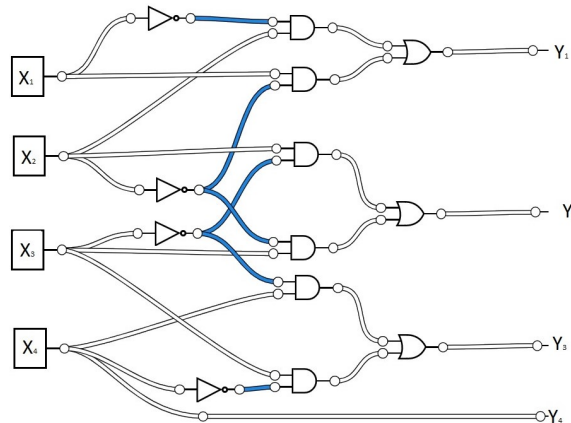


Figura 7: Implementación del convertor a código de Gray