

# Лабораторная работа № 1

## Часть 1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (АДУ)

АДУ как класс моделей находят широчайшее применение в имитационном моделировании. Процесс исследования модели включает разработку модели в виде системы алгебро-дифференциальных уравнений, преобразование модели в форму, допускающую ввод ее в ЭВМ (в данном случае это уравнения в нормальной форме), решение уравнений, вывод и содержательная интерпретация результатов.

### Цели работы

1. Изучение на примерах решений уравнений первого и второго порядка.
2. Освоение алгоритма приведения системы уравнений к нормальной форме и решения ее в системе AnyLogic.

### Порядок выполнения работы:

1. Проанализируйте свойства решений заданных уравнений первого и второго порядка, используя теорию ОДУ (задания по вариантам находятся в файле **Варианты заданий АДУ**, номер своего варианта см. в файле **Распределение вариантов для лабораторной работы 1**).
2. Приведите уравнения к нормальной форме (подготовьте их к виду, который будете задавать в программе, то есть к виду  $\frac{dx}{dt} = \dots$ ). При необходимости определяйте новые переменные. Задайте параметры уравнений и их значения.
3. Постройте графики и исследуйте решения уравнений при различных значениях коэффициентов.
4. Анимлируйте модель. Нарисуйте структуру системы, описываемой заданными уравнениями, установите индикаторные диаграммы и слайдеры, позволяющие наблюдать переменные и изменять параметры. Проследите за изменением характера переходных процессов при изменении параметров схемы. Убедитесь в правильности полученных результатов, опираясь на установившиеся значения и характер переходных процессов и сравнивая с полученными теоретическими результатами.

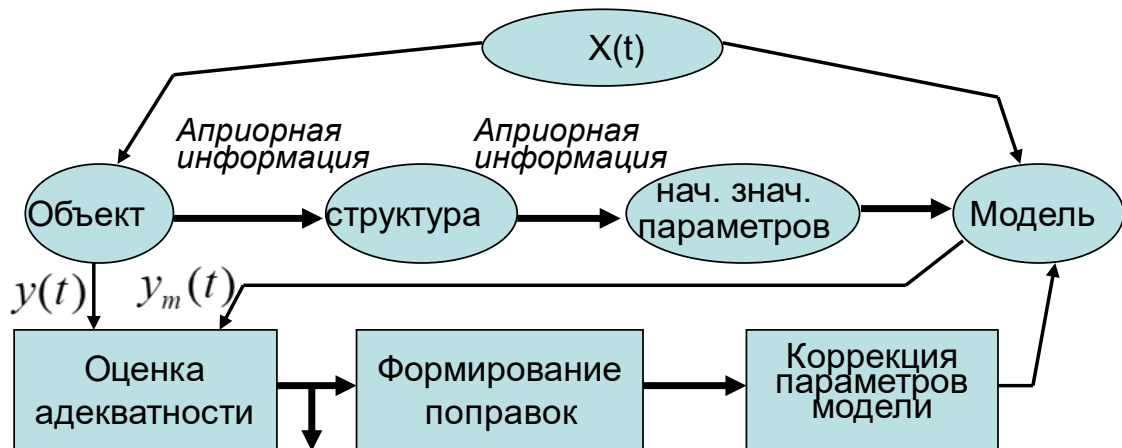
## Часть 2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

### Цели работы

Идентификация модели по экспериментальным данным предполагает:

- Выбор, в соответствии с особенностями объекта и условиями решаемой задачи, класса моделей, в котором будет строиться модель данного объекта, и критерия адекватности.
- Определение параметров модели, обеспечивающих наилучшие значения выбранного критерия адекватности (наилучшее совпадение выходных сигналов модели и объекта при одинаковых входных воздействиях).

Предполагается, что эксперт, обладая определенной априорной информацией о свойствах объекта, выдвигает гипотезу о структуре модели и задает начальные значения параметров. Затем на объект и модель подаются одинаковые входные воздействия, сравниваются их выходные сигналы и оценивается критерий адекватности. Параметры модели корректируются до получения приемлемых значений критерия адекватности (см. схему ниже). Если имеющейся априорной информации недостаточно, то организуются дополнительные исследования объекта.



Настоящая работа предполагает, что в качестве объекта используется структурная схема с неизвестными параметрами (выбираем объект из библиотеки bloki согласно своему номеру варианта, номер своего варианта см. в файле **Распределение вариантов для лабораторной работы 1**).

Так как из теории систем известно, что системы высокого порядка ведут себя в области низких частот как системы 2-3 порядка, то в качестве модели предлагается использовать систему второго порядка.

### Порядок выполнения работы:

1. Наблюдая переходный процесс в объекте при единичном входном воздействии, определить параметры модели (см. приложение 1):
  - Коэффициент передачи на нулевой частоте  $K = b_0/a_0$ .
  - Частоту собственных колебаний.
  - Показатель затухания. Для этого можно выполнить серию экспериментов – наблюдать переходный процесс в системе второго порядка при различных значениях показателя затухания и сравнить их с переходным процессом в вашем объекте.
2. Задавшись значением одного из параметров, определить остальные параметры модели (рекомендуется задаться значением параметра  $b_0$ ).
3. Построить структурную схему процесса оптимизации параметров (см. приложение 2).
4. Сравнить переходные процессы объекта и модели, зафиксировать накопленную погрешность при неоптимальных значениях параметров.
5. Реализовать процедуру оптимизации параметров (см. приложение 3).

6. На каждом этапе проводить вычислительные эксперименты и анализировать их результаты. Получить графики переходных процессов объекта и модели и сравнить их при оптимальных значениях параметров. Сравнить результаты, полученные до и после оптимизации (накопленные ошибки).

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Оценка параметров модели.

Дифференциальное уравнение системы второго порядка имеет вид:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x(t). \quad (1)$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0,$$

откуда

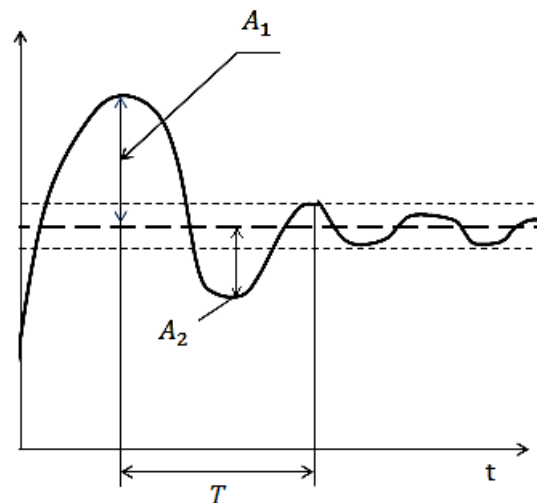
$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \text{ где } \delta = \frac{a_1}{2a_2}; \omega_0^2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

В случае, когда  $\delta^2 - \omega_0^2 > 0$ , корни характеристического уравнения действительные и переходный процесс оказывается аperiодическим, иначе – колебательным. При этом  $\delta$  - показатель затухания, а  $\omega_0$  - собственная частота колебаний. Период затухающих колебаний определяется формулой  $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , если показатель затухания мал по сравнению с собственной частотой, для получения начальной оценки им можно пренебречь и считать, что  $T \approx 2\pi/\omega_0$ . При увеличении показателя затухания период колебаний растет. Надо заметить, что понятие «периода» для затухающих колебаний не совпадает с обычным определением периода, поскольку система при наличии затухания не возвращается в исходное состояние. Слово «период» для затухающих колебаний используется лишь условно, по графику его можно определить как минимальный промежуток времени между двумя максимумами (или нулями, проходимыми в одном направлении). При большой частоте колебаний оценку периода можно усреднить (взять промежуток времени не между соседними экстремумами, а через один (два, три...) и разделить его на два (три, четыре...)).

Показатель затухания по графику реакции системы на единичный сигнал можно оценить числом  $\frac{2}{T} \ln \frac{A_1}{A_2}$ , где величины  $A_1$  и  $A_2$  измеряются относительно установившегося значения  $\frac{b_0}{a_0}$  (см. рисунок).

Другой способ оценить показатель затухания – заметить, что за промежуток времени  $\tau = 1/\delta$  амплитуда колебаний уменьшается в  $e \approx 2.7$  раз.

Наряду с показателем затухания  $\delta$  часто используется ещё одна величина – коэффициент успокоения (показатель успокоения)  $\beta$ :

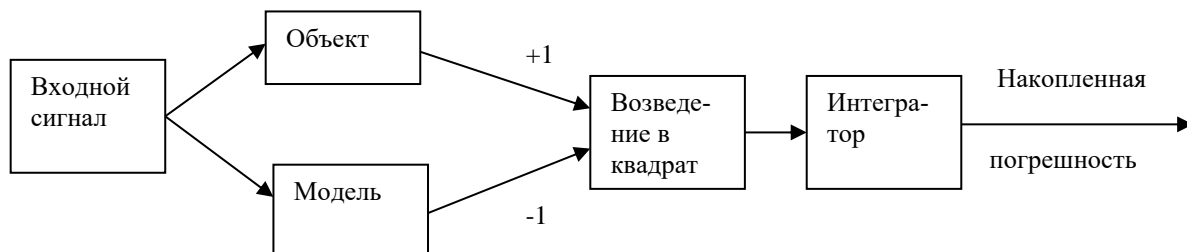


$$\beta = \delta/\omega_0 = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}.$$

Коэффициент передачи на нулевой частоте равен  $K = b_0/a_0$ . Определить его можно экспериментально как отношение сигналов на выходе и входе объекта в установившемся режиме. После этого, задавшись значением  $b_0$ , можно найти  $a_0$  (или наоборот).

Собственную частоту системы и показатель затухания можно оценить по переходному процессу во временной области; по их экспериментальным оценкам затем находятся значения остальных параметров модели.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2.** При оптимизации параметров рекомендуется использовать среднеквадратичный критерий адекватности модели и объекта. На входы модели и объекта подается один и тот же сигнал, на выходе сигналы вычитаются, разность возводится в квадрат и подается на интегратор. На выходе интегратора мы получаем накопленную погрешность, которая *минимизируется* в процессе оптимизации. Для этого используется встроенная процедура оптимизации.



Структуру модели считаем заданной в виде звена второго порядка. Коэффициенты следует ввести в символьном виде:  $b_0$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Не забудьте задать их численные значения, определенные по результатам эксперимента с объектом.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 3.** Оптимизация параметров в среде AnyLogic.

Оптимизационный эксперимент в AnyLogic позволяет найти такие значения параметров модели, при которых обращается в минимум или максимум некоторая определенная пользователем целевая функция. Значение целевой функции подсчитываются в AnyLogic каждый раз по окончании очередного выполнения модели, и алгоритм оптимизации автоматически выбирает новые значения параметров для очередного запуска модели. Оптимизация в AnyLogic реализована с использованием пакета *OptQuest* фирмы *OptTek*. Для оптимизации пользователь должен в соответствующих окнах задать функционал, который следует минимизировать либо максимизировать, задать параметры и ограничения их диапазона, в которых должна выполняться оптимизация, а также указать ограничения, определяющие класс допустимых решений. Задав все это, пользователь может запустить оптимизацию, и пакет OptQuest после некоторого числа проб автоматически выберет наилучший метод оптимизации для данной модели среди тех методов, которые находятся в его библиотеке, и будет следовать выбранному оптимизационному алгоритму. Интерфейс AnyLogic позволяет пользователю также использовать свой алгоритм оптимизации.

Многие модели в бизнесе, науке и технике включают существенные нелинейности, комбинаторные зависимости и неопределенность, которые легко представимы в имитационных моделях, но являются слишком сложными для представления наборами математических формул. Это препятствует непосредственному применению классических методов для решения проблемы оптимизации в таких системах. Цель пакета *OptQuest* как раз и является оптимизация таких систем, которые не могут быть представлены как математические модели и оптимизация в которых не может быть выполнена с помощью классических алгоритмов. В пакете реализованы современные мощные алгоритмы оптимизации (см.: M.Laguna, R.Marti. *The OptQuest Callable Library*, in: *Optimization Software Class Libraries*, S Voss and D. Woodruff, eds. Kluwer Academic Publisher, Boston, 2003).

Подсистема оптимизации *OptQuest* использует подход "черного ящика" для вычисления значений целевой функции. OptQuest в AnyLogic использует имитационную модель, которая по набору входных параметров возвращает значение целевой функции, и эти значения далее используются подсистемой оптимизации для управления поиском оптимальных значений параметров.

Кликните кнопку «Новый эксперимент» на панели инструментов, и в появившемся окне выберите новый Оптимизационный эксперимент. В появившемся окне свойств эксперимента из выпадающего меню установите имя переменной, выбранной в качестве целевого функционала (это у нас накопленная погрешность). Выберите тип задачи – минимизацию или максимизацию целевого функционала. Выберите также из выпадающего меню изменяемые параметры. Установите условие останова одного прогона —число единиц времени, число прогонов для нахождения оптимального значения целевого функционала, поэкспериментируйте с методом решения дифференциального уравнения (в дополнительных свойствах **Optimization**, в строке **Дифференциальные уравнения**): попробуйте разные варианты для параметров и сравните результаты.

Сделайте этот эксперимент текущим, выбрав соответствующую команду в контекстном меню (его название в этом случае станет жирным). Запустите модель. Оптимизационный эксперимент найдет наилучшее значение целевого функционала.

Качество полученного результата оцените по изменению величины накопленной ошибки и визуально, сравнивая графики, полученные в простом эксперименте для объекта и модели.

Для получения наилучшего результата можно провести оптимизационный эксперимент несколько раз, выбирая найденный на предыдущем шаге оптимальный набор параметров в качестве следующей стартовой точки.