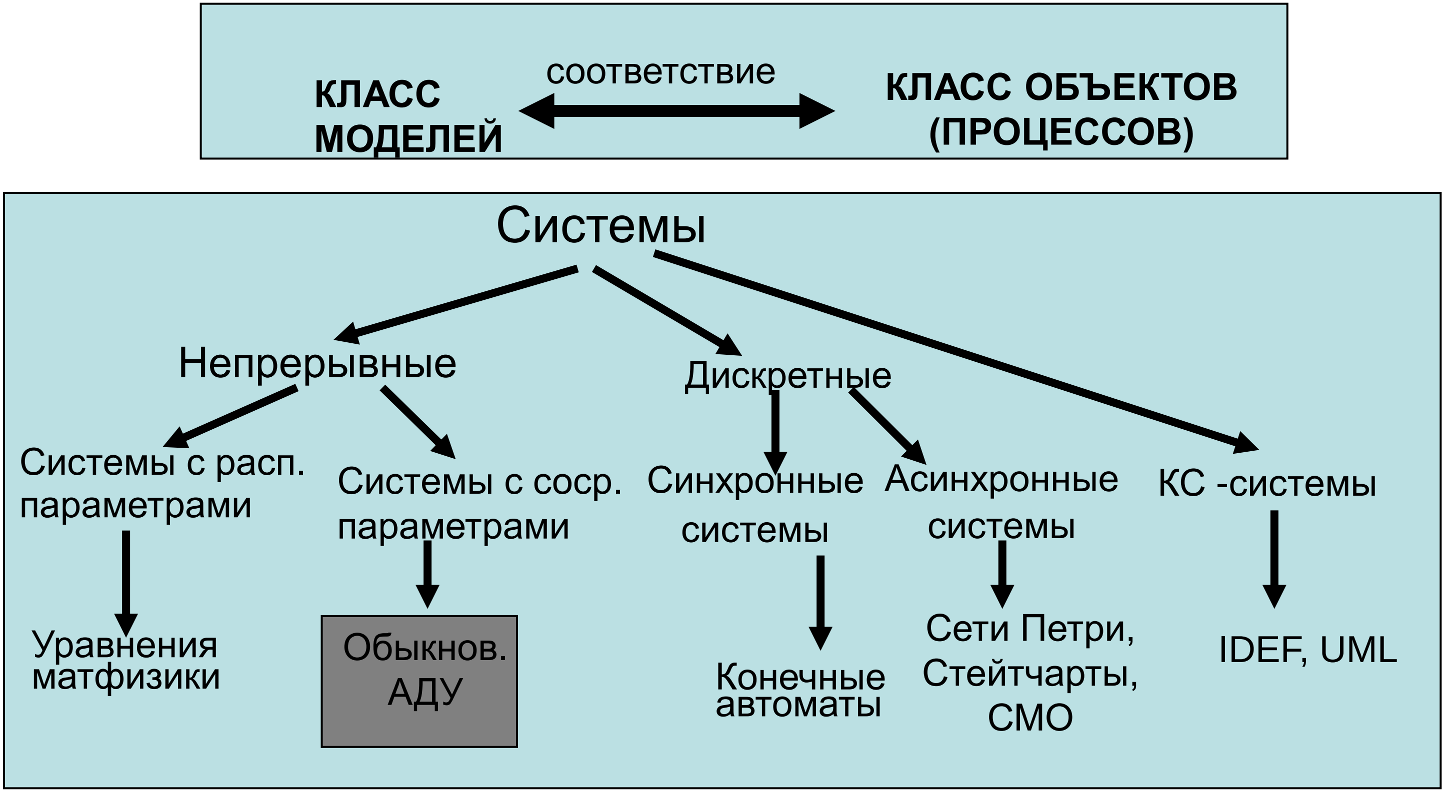
Системы и модели



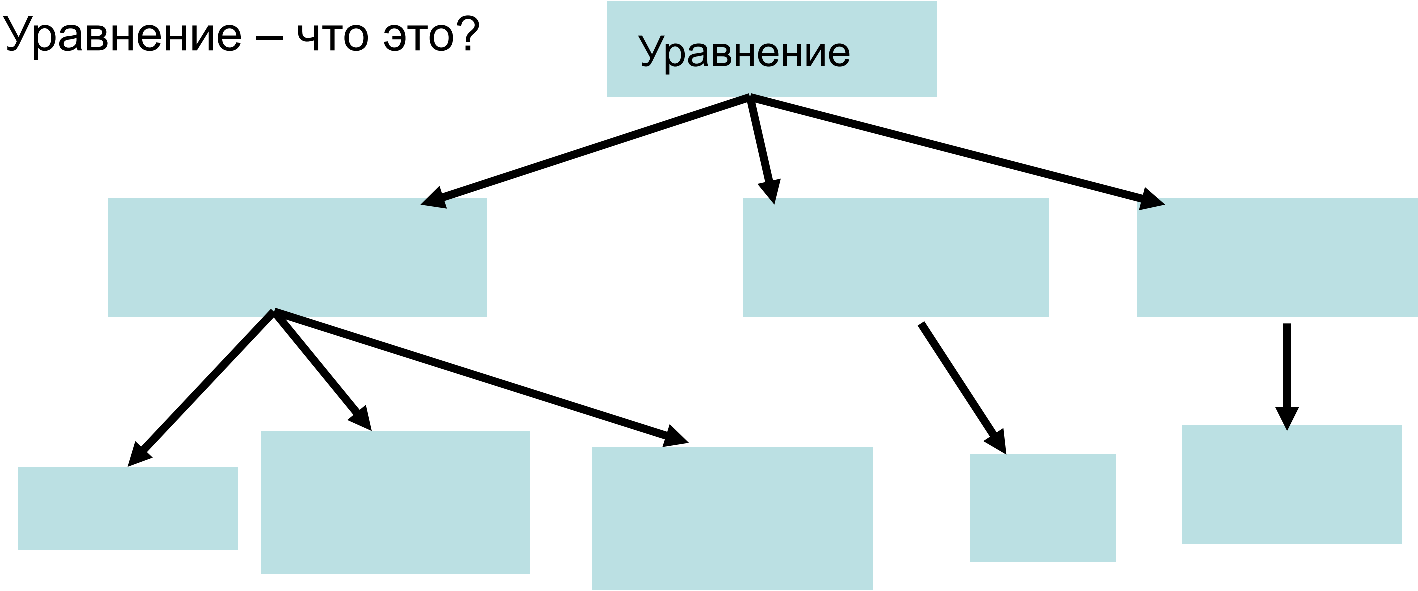
Последовательность операций создания модели:

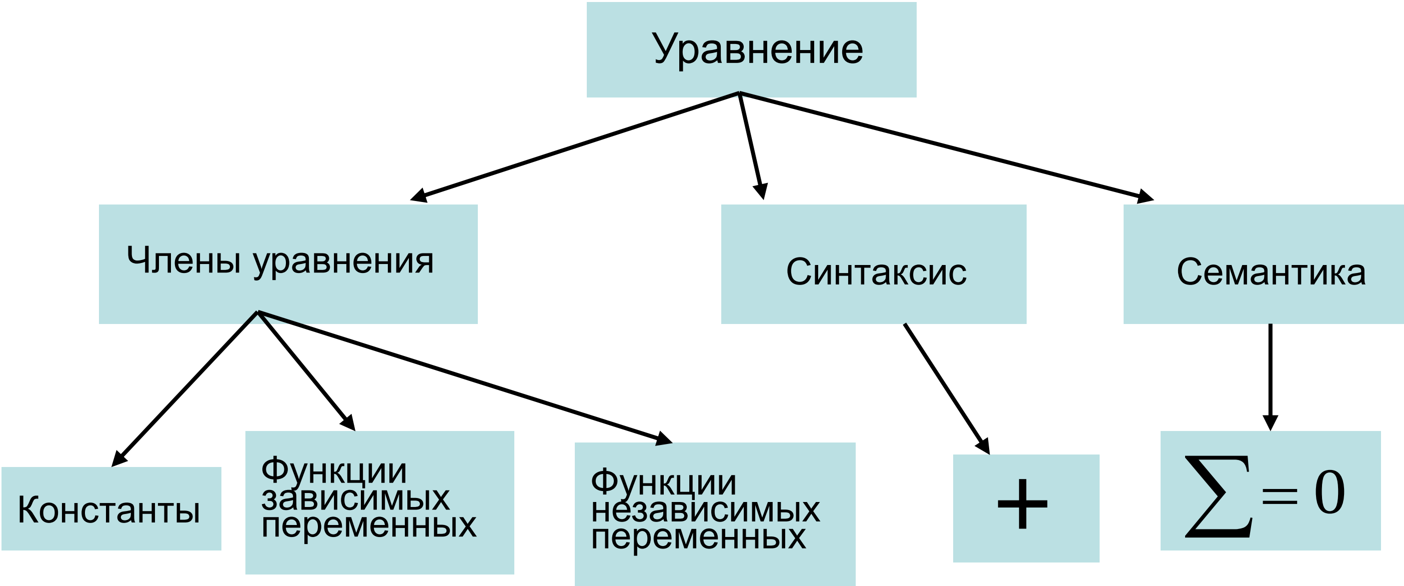
1. Анализ свойств объекта и выбор, с учетом особенностей решаемой задачи, класса, в котором будет строиться модель объекта.
2. Декомпозиция объекта в соответствии с концептуальной моделью класса моделей.
3. Представление его подсистем и связей средствами выбранного класса моделей.
4. Формализация описания элементов и связей.
5. Описание полученной реализации средствами соответствующего языка.

Алгебро-дифференциальные уравнения

как класс моделей

Уравнение – что это?



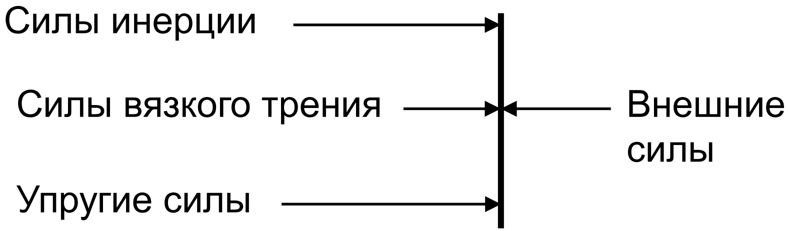


Чем обеспечивается равенство суммы нулю?

Что такое зависимая переменная?

Что такое независимая переменная?

Как построить модель в виде уравнения?
Например, используя законы физики:



$$m\ddot{y} + k_d\,\dot{y} + wy = mg$$

Что ещё можем задать?

«Исходное положение»?

Начальные условия: $y(0) = ?\ \dot{y}(0) = ?$

Движение основания:

$$m\ddot{y} + k_d\dot{y} + w(y - y_{осн}) = mg$$

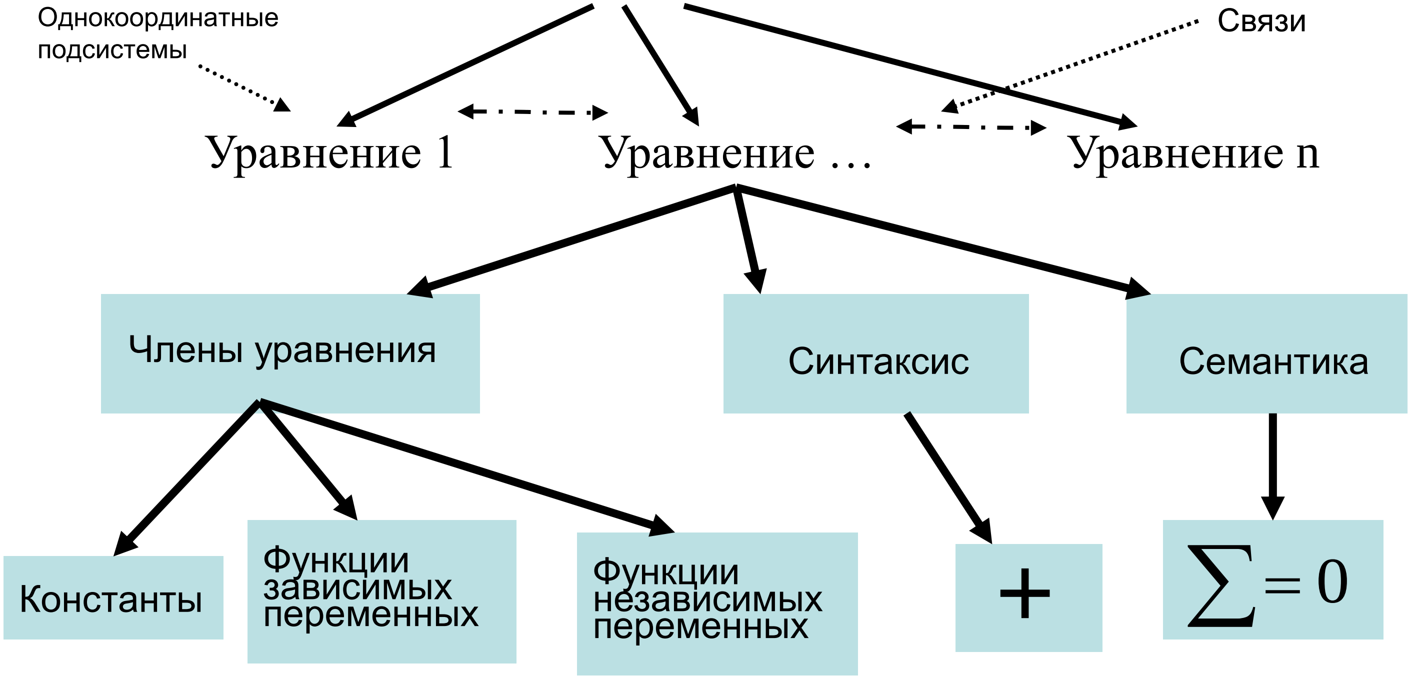
Режим заданного движения?

$$m\ddot{y} + k_d\dot{y} + wy - mg = Q_{вн}$$

Что является зависимой переменной в последнем уравнении?

Чему равно число уравнений в системе?

Модель в классе АДУ



-*Зависимая переменная – принимает значения, обеспечивающие равенство суммы нулю.*

- *Независимая переменная – задается независимо, извне; отражает влияние других подсистем или среды.*

Создание моделей в классе АДУ:

1. Разбить объект на однокоординатные подсистемы.
2. В каждой из подсистем выделить зависимую и независимые переменные.
3. В каждой из подсистем определить набор величин, сумма которых равна нулю.
4. Описать каждую из величин и просуммировать их, приравняв сумму нулю.

Дифференциальное уравнение

Нелинейное: коэффициенты зависят от координат

Линейное: коэффициенты не зависят ни от координат, ни от времени

Параметрическое: коэффициенты зависят от времени

Принцип суперпозиции: реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из них!

Относительная простота решения, наличие широкого набора методов и средств исследования и решения, в том числе и аналитических.

Формы записи линейных уравнений:

$$\frac{dY}{dt} = AY + F$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \ldots.. + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ -------------- \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \ldots.. + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases}$$

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_0 y = b_m x^m + \ldots + b_0 x$$

Как перейти от одной формы записи к другой??

Переменные Х и У в уравнениях – чем они отличаются??

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМ

Дано:

$$a_n y^n + \ldots + a_0 y = b_m x^m + \ldots + b_0 x$$

$$y(0), \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}, \quad \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_{t=0} \cdots \left(\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right)_{t=0}$$

Решение:

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{уст}(t),$$

$$y_{св}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t},$$

Это линейная система?

Сколько однокоординатных подсистем в системе, описываемой этим уравнением?

Как будет двигаться система при отсутствии внешних воздействий и нулевых начальных условиях??

СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x$$

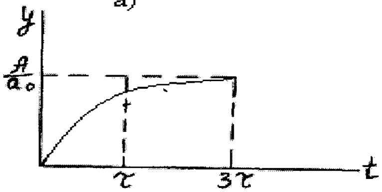
$$\tau p + 1 = 0; \tau = a_1 / a_0;$$

$$a_1 p + a_0 = 0;$$

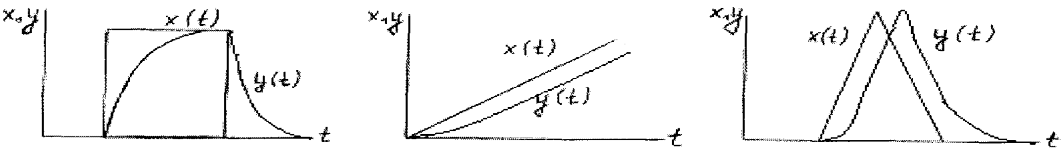
$$p = -\frac{1}{\tau},$$

$$\boxed{y = \frac{A}{a_0}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

а)



б) в) г)



СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t) \qquad a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0;$$

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2},$$

$$\omega_0^2 = a_0 / a_2; \qquad \delta = \frac{a_1}{2a_2}; \quad d = \delta / \omega_0 = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}};$$

При каких условиях переходный процесс будет колебательным? апериодическим?

Поясните физический и математический смысл перехода от колебательного движения к апериодическому и обратно??

СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

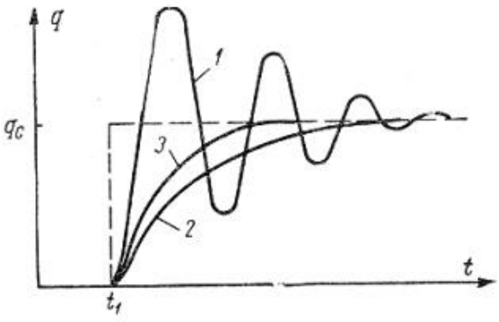
Нулевые начальные условия и ступенчатый входной сигнал:

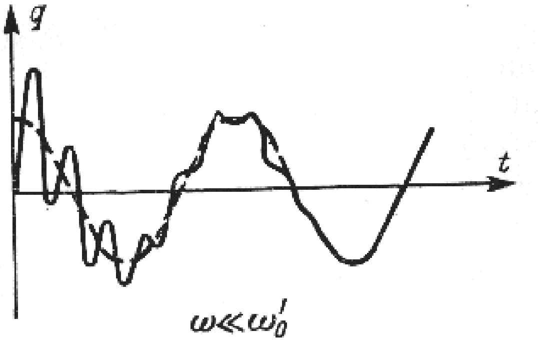
$$y = y_{уст}\left[1 - e^{-\delta t}\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,t + arctg\sqrt{\frac{{\omega_0}^2 - \delta^2}{\delta^2}}\right)\right]$$

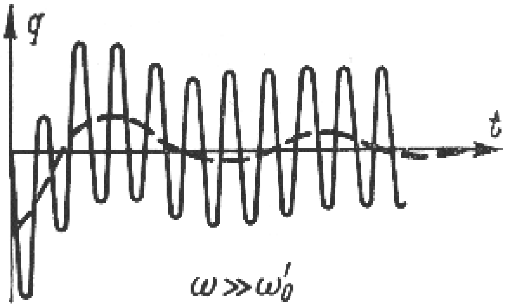
$$y = y_{уст}\left[1 - e^{-\delta t}\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0 - \delta^2}}\,sh\left(\sqrt{\omega_{0^2} - \delta^2}\,t + arcth\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{\delta^2}\right)\right]$$

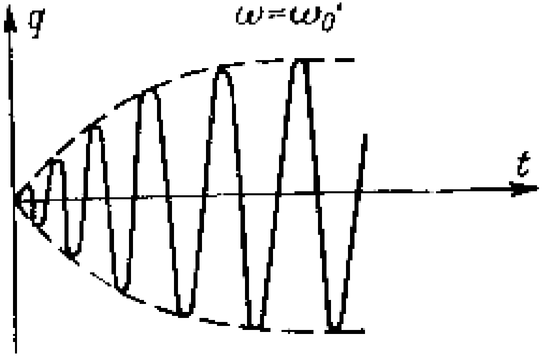
Какие члены уравнения обеспечивают наблюдаемый вид переходного процесса?

СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА









Решение уравнений

Аналитические методы

Численные методы

Приведение к унифицированной форме:

ОДУ+алгебраические уравнения

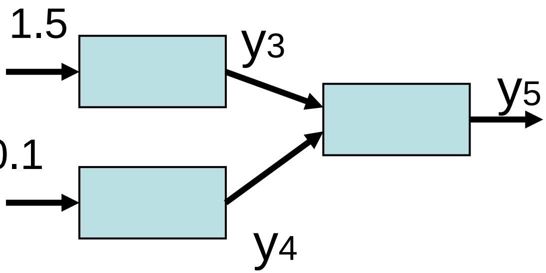
Использование нормальной формы:

- модель в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка и алгебраических уравнений

$$
\begin{cases}
k1y_3 + k2\dfrac{dy_3}{dt} + k3\dfrac{d^2y_3}{dt^2} - 1{,}5 = 0 \\
k4\dfrac{dy_4}{dt} + y_4 = 0{,}1 \\
y_3 = y_5 - y_4
\end{cases}
$$

Пример

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_3}{dt} = z \\
\dfrac{dz}{dt} = (1.5 - k_2 z - k_1 y_3)/k_3 \\
\dfrac{dy_4}{dt} = (0.1 - y_4)/k_4 \\
y_5 = y_4 - y_3
\end{cases}
$$



Пример

$$\begin{cases} k1y_3 + k2\dfrac{dy_3}{dt} + k3\displaystyle\int y_3 dt = 1{,}5 \\ k4\dfrac{dy_4}{dt} + y_4 = 0{,}1 \\ y_3 = y_5 - y_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_3}{dt} = (1.5 - Q - k1y_3)/k2 \\ \dfrac{dQ}{dt} = k3y_3 \\ \dfrac{dy_4}{dt} = (0.1 - y_4)/k4 \\ y_5 = y_4 - y_3 \end{cases}$$