Fundamentos de contagem

Ítalo Epifânio de Lima e Silva* and Andressa Elna Mesquita Belém*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN

2018

Introdução

Princípio fundamental da contagem

Na análise combinatória, o princípio fundamental da contagem (PFC) é um dos procedimentos utilizado para contar o número de possibilidades que uma tarefa pode ser realizada sem que seja necessário realizar essa contagem manualmente. Neste princípio, considerando uma tarefa dividida em duas etapas, se tivermos ***n*** escolhas para a primeira etapa e ***m*** escolhas para a segunda etapa, então tarefa completa pode ser executada de ***n.m*** maneiras, considerando que as escolhas são independentes (Dantas, 2013).

Por exemplo, considerando um homem que decide ir para Europa de avião e voltar de barco. Se há cinco linhas aéreas diferentes disponíveis para ele e sete companhias de barco, então ele poderia fazer essa viagem de 5.7 ou 35 formas diferentes. Esse princípio pode ser extendido para escolhas além de duas etapas, para três etapas, quatro ou mais.

Formulando essa definição em termos de eventos temos que se um evento pode ocorrer de ***n*** maneiras, e um segundo evento pode ocorrer independentemente do primeiro de ***m*** maneiras, então os dois eventos podem ocorrer em ***n.m*** maneiras (Niven, 1965).

Exemplo 1: Quantos inteiros entre 100 e 999 possuem dígitos diferentes?

Nesse caso, não podemos apenas considerar o número de permutações dos 10 dígitos existentes (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) tomados três a três, pois 052, por exemplo, não é um número entre 100 e 999. Assim, não podemos utilizar o dígito 0 para ocupar o primeiro espaço, restando nove opções para o dígito das centenas. Para o segundo espaço também temos nove opções, pois agora podemos utilizar o 0 ou qualquer um dos outros dígitos que não tenha sido utilizado ainda. De forma similar, para o último espaço teremos 8 opções. Então, utilizando o princípio fundamental da contagem temos

$$9.9.8 = 648 \;\; inteiros \;\; entre \;\; 100 \;\; e \quad 999 \;\; com \;\; dígitos \;\; diferentes$$

Exemplo 2: Dos 648 inteiros do problema anterior, quantos são ímpares?

Para o número ser ímpar ele precisa terminar em 1, 3, 5, 7 ou 9, assim, para o dígito das unidades, teremos 5 opções. Para o dígito das centenas não podemos começar com 0, já que estes inteiros estão entre 100 e 999, logo, restam os outros oito dígitos não nulos. Por fim, para o dígito das dezenas temos ainda 8 opções, pois agora pode ser utilizado o 0 ou um dos outros sete dígitos não nulos. Assim, pelo PFC temos

$$8.8.5 = 320 \ \ inteiros \ \ ímpares \ \ entre \ \ 100 \ \ e \quad 999 \ \ com \ \ dígitos \ \ diferentes$$

Permutações simples

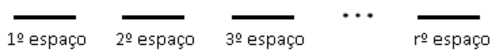
Permutações são arranjamentos ordenados de objetos.

De quantas formas diferentes 4 letras A, B, C, D podem ser escritas PROBLEM 2.1 In how many different orders can the four letters A, B, C, D be written, no letter being repeated in anyone arrangement? This is the same as asking how many permutations there are on four letters, taken four at a time. The number of such permutations is denoted by the symbol P(4, 4).

Arranjos

Arranjo é uma denominação utilizada para uma permutação de ***n*** objetos tomados ***r*** a ***r***, com ***r*** *menor* do que ***n*** (***r*** $\leq$ ***n***), ou seja, é uma escolha de ***r*** entre esses ***n*** objetos na qual a ordem importa.

Para obter uma fórmula para A(n,r), temos ***r*** diferentes espaços onde os ***n*** objetos podem ser colocados.



Assim, A(n,r) pode ser considerado a quantidade de maneiras de colocar ***n*** objetos distintos em ***r*** espaços.

Supondo primeiramente que o número de objetos é igual ao número de espaços (***n***=***r***), teríamos n objetos para ocupar o primeiro espaço, n-1 para o segundo, n-3 para o terceiro e assim por diante, de forma que ao chegar no último espaço teremos apenas um objeto para escolher. Logo, pelo princípio fundamental da contagem descrito anteriormente temos

$$A(n,n) = n \ \ . \ \ (n-1) \ \ . \ \ (n-2) \ \ . \ \ (n-3) \ \ ... \ \ 1$$

que é a definição de fatorial, ou seja, o produto de todos os inteiros de ***n*** até 1 (Niven, 1965). Assim,

$$A(n,n) = n!$$

Por exemplo,

$$A(4,4) = 4 \ \ . \ \ 3 \ \ . \ \ 2 \ \ . \ \ 1 \ \ = \ \ 4!$$

Isso também pode ser aplicado para um A(n,r), ou seja, para o caso em que o número de espaços é menor que o número de objetos. Por exemplo,

$$A(10,4) = 10 \;.\; 9 \;.\; 8 \;.\; 7$$

Generalizando, podemos dizer que

$$A(n,r) \;=\; n \;.\; (n-1) \;.\; (n-2) \;.\; (n-3), ..., (n-(r-1))$$

ou

$$A(n,r) \;=\; n \;.\; (n-1) \;.\; (n-2) \;.\; (n-3) \;...\; (n-r+1)$$

multiplicando por $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$, podemos reescrever A(n,r) como

$$\begin{aligned} A(n,r) &= n \;.\; (n-1) \;.\; (n-2) \;.\; (n-3) \;...\; (n-r+1) \;.\; \tfrac{(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \tfrac{n \;.\; (n-1) \;.\; (n-2) \;.\; (n-3) \;...\; (n-r+1) \;.\; (n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \tfrac{n \;.\; (n-1) \;.\; (n-2) \;.\; (n-3) \;...\; (n-r+1) \;.\; (n-r) \;...\; 3 \;.\; 2 \;.\; 1}{(n-r)!} \\ &= \tfrac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

pois, como descrito anteriormente, sabemos que no fatorial vamos subtraindo uma unidade de n até alcançar o 1

$$n! \;=\; n \;.\; (n-1) \;.\; (n-2) \;.\; (n-3) \;...\; (n-r+1) \;.\; (n-r) \;...\; 3 \;.\; 2 \;.\; 1$$

Dessa forma, chegamos a fórmula de arranjo

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1}$$

Exemplo 1: Em certo país as placas dos automóveis tem letras, e não números,que as distinguem. Precisamente quatro letras são usadas. Quantas placas podem ser feitas se contamos com um alfabeto de 26 letras? E se não fosse permitido usar letras repetidas em uma placa?

Para a primeira letra da placa teremos 26 opções, para a segunda também teremos 26 opções, e assim por diante. Se há 4 posições possíveis para alocar essas letras, então teremos 26^4 possibilidades de escolha.

Se não utilizarmos letras repetidas, ficamos com 26.25.24.23 ou $\frac{26!}{22!}$ possibilidades de escolha

Exemplo 2: Quantos inteiros entre 100 e 999 inclusivo consiste de dígitos ímpares distintos?

Os dígitos ímpares são 1, 3, 5, 7 e 9, logo n=5. Além disso, os número serão formados por 3 dígitos, logo r=3. Assim podemos dizer que vamos realizar uma permutação de 5 objetos tomados 3 a 3, ou seja, A(5,3).

$$A(5,3) = \tfrac{5!}{(5-3)!} = \tfrac{5!}{2!} = \tfrac{5.4.3.2!}{2!} = 5.4.3 = 60$$

Combinações

Permutação com elementos repetidos