2ª Prova de Fundamentos Matemáticos para Computação

Ítalo Epifânio de Lima e Silva*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN

2019

Questão 01

01 - Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções injetivas. A função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ é injetiva? (Aqui $+$ denota a usual adição entre números reais)

A função $h(x)$ não é injetiva. Mostremos um contra-exemplo:

Seja g e f definidas por $g(x) = -x$ e $f(x) = x$.

Note que ambas são injetivas.

Dessa forma $h(x) = -x + x$ e, portanto, $h(x) = 0$

Uma função constante e não injetiva, pois existem dois (nesse caso todos) elementos do domínio de h que apontam para mais de um elemento do contradomínio.

Mostrando a injetividade de f e g:

Demostrando que f e g são injetivas:

Seja $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y)$, logo $x = y$, portanto f é injetiva.

Seja $w, z \in \mathbb{R}$ tal que $g(w) = g(z)$, logo $-z = -w$ e $z = w$, portanto g é injetiva.

Questão 02

Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ funções totais (H1), e tais que $f \circ g = Id_B$ (H2), mas $g \circ f \neq IdA$ (H3).

(2a) Demonstre que a função f não pode ser injetiva.

(2b) Demonstre que a função g não pode ser sobrejetiva.

2a)

Suponha que f é injetora.

Seja $a, b \in A$ tal que $f(a) = f(b)$

Note que $f(a), f(b) \in B$, logo $(f \circ g)(f(a)) = Id_A(f(a))$ e $(f \circ g)(f(b)) = Id_A(f(b))$

Pela definição de identidade: $(f \circ g)(f(a)) = f(a)$ e $(f \circ g)(f(b)) = f(b)$

Logo, $(f \circ g)(f(a)) = f(a) = f(b) = (f \circ g)(f(b))$

Pela definição de composição: $f(g(f(a))) = f(a) = f(b) = f(g((f(b)))$

Logo, $g(f(a)) = a = b = g(f(b))$

Note que, $g(f(a)) = Id_A(a) = Id_A(b) = g(f(b))$, pela definição de identidade

Entretanto, isso contradiz (H3), portanto f não pode ser injetiva.

Lema 1

O lema 1 diz que:

Suponha $f\colon A \to B$

1. Se existe uma função $g\colon B \to A$ tal que $g \circ f = Id_A$ então f é injetiva
2. Se existe uma função $g\colon B \to A$ tal que $f \circ g = Id_B$ então f é sobrejetiva

1 - Suponha $g\colon B \to A$ e $g \circ f = Id_A$