2ª Prova de Fundamentos Matemáticos para Computação

Ítalo Epifânio de Lima e Silva*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN

2019

Questão 01

01 - Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções injetivas. A função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ é injetiva? (Aqui $+$ denota a usual adição entre números reais)

A função $h(x)$ não é injetiva. Mostremos um contra-exemplo:

Seja g e f definidas por $g(x) = -x$ e $f(x) = x$.

Note que ambas são injetivas.

Dessa forma $h(x) = -x + x$ e, portanto, $h(x) = 0$

Uma função constante e não injetiva, pois existem dois (nesse caso todos) elementos do domínio de h que apontam para mais de um elemento do contradomínio.

Mostrando a injetividade de f e g:

Demostrando que f e g são injetivas:

Seja $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y)$, logo $x = y$, portanto f é injetiva.

Seja $w, z \in \mathbb{R}$ tal que $g(w) = g(z)$, logo $-z = -w$ e $z = w$, portanto g é injetiva.

Questão 02

02 - Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ funções totais (H1), e tais que $f \circ g = Id_B$ (H2), mas $g \circ f \neq IdA$ (H3).

2a) Demonstre que a função f não pode ser injetiva.

2b) Demonstre que a função g não pode ser sobrejetiva.

2a)

Suponha que f é injetora.

Por (H3) existem $(a, a') \in A$, com $a \neq a'$ e $(a, a') \in g \circ f$

Pela definição de composição, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$ e $(b, a') \in g$

Por (H2), $(f \circ g)(b) = Id_B(b)$, pela definição de identidade e composição $f(g(b)) = b$

Note que $g(b) = a'$, logo $f(a') = b$

Note que, $f(a) = b$, logo $f(a) = f(a')$

Como f é injetiva, então $a = a'$, o que contradiz (H3), portanto f não é injetiva.

2b)

Por 2a) f não é injetiva e portanto, existem $a, a' \in A$ tal que $f(a) = f(a')$ e $a \neq a'$

Suponha que g é sobrejetiva

Pela definição de sobrejetividade, existem $(b, b') \in B$ tal que $g(b) = a$ e $g(b') = a'$

Note que $b \neq b'$, por g ser função total

Note que $(f \circ g)(b)$, pela definição de composição $f(g(b))$ e como $g(b) = a$, então $f(g(b)) = f(a)$ (I)

Note que $(f \circ g)(b')$, pela definição de composição $f(g(b'))$ e como $g(b') = a'$, então $f(g(b')) = f(a')$ (II)

Por (H2) $(f \circ g)(b) = Id_B(b)$, pela definição de identidade e composição $f(g(b)) = b$ e por (I) $f(g(b)) = b = f(a)$

Por (H2) $(f \circ g)(b') = Id_B(b')$, pela definição de identidade e composição $f(g(b')) = b'$ e por (I) $f(g(b')) = b' = f(a')$

Como $f(a) = b$ e $f(a') = b'$, então $b = b'$, o que contradiz g ser função total, portanto, g não é sobrejetiva.

Questão 03

Seja $f\colon A \to B$ uma função total (H1) e $R \subseteq A \times A$ uma relação transitiva (H2). Seja a relação $S \subseteq B \times B$ definida da forma seguinte: $S = \{(x, y) \in B \times B | (\exists a, b \in A)[f(a) = x, f(b) = y, (a, b) \in R]\}$. Mostre que a relação S pode não ser transitiva. Qual seria uma condição suficiente para S ser transitiva? (Demonstre)

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{u, v, w\}$, $f = (1, u), (2, v), (3, v), (4, w)$ e $R = (1, 2), (3, 4)$

Note que os R é transitiva.

$(u, v) \in S$, pois $(1, 2) \in R$

Similarmente, $(v, w) \in S$, pois $(3, 4) \in R$

Entretanto, $(u, w) \notin S$ pois $(1, 4) \notin R$, logo S não é transitiva.

Para ser transitiva no exemplo anterior f teria de ser injetiva. Provemos então para o caso de f injetiva:

Suponha f injetiva.

Se $(a, b), (b, c) \in S$, então existe $x, y, z, t \in A$ tal que $f(x) = a$, $f(y) = b$, $f(z) = b$ e $f(t) = c$, pela definição de S.

Como $y = z$, pois $f(y) = b$ e $f(z) = b$, então $(x, y), (z, t) \in R$, pela definição de S

Pela transitividade de R, $(x, t) \in R$ e pela definição de S, $(a, c) \in S$

Questão 04

04 - Seja $A = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. O conjunto A é contável?
Pode assumir que $\mathbb{R}$ não é contável (H1) e que $\mathbb{Z}$ é contável

Lema: se A e B então $A \cup B$ é incontável:

Se A e B são contáveis existe $f\colon A \to \mathbb{N}$ e $g\colon B \to \mathbb{N}$ injetivas, ou seja, se $f(x) = f(y)$ então $x = y$ e se $g(x) = g(y)$ então $x = y$. Definimos a função $h\colon A \cup B \to \mathbb{Z}$ tal que:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \in A \\ -g(x), \text{ se } x \notin A \end{cases}$$

Tome que $f(x) = f(y)$. Se $h(x) = h(y) \geq 0$ então $h(x) = f(x)$ e $h(y) = f(y)$ logo $h(x) = h(y)$. Pela injetividade de f, $x = y$. Se $g(x) = g(y)$ e $h(x) = h(y) \leq 0$ então $h(x) = -g(x) = -g(y) = h(y)$. Pela injetividade de g $x = y$. Logo h é injetivo com $\mathbb{Z}$, ou seja $A \cup B \sim \mathbb{Z}$. Entretanto, $\mathbb{Z}$ é contável $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, logo, pela transitividade de $\sim$ $A \cup B \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

Demonstrando a questão:

Suponha que A é contável, logo temos A e $\mathbb{Z}$ contáveis e pelo lema demonstrado $A \cup \mathbb{Z}$ também é contável, ou seja, $(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Z}$ é contável.

Note que $(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Z} = \mathbb{R}$ logo $\mathbb{R}$ é contável, o qe contradiz (H1). Logo $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ não é contável.