Задача 6

Масленников Андрей

14.11.2016

Половинный угол. В этом разделе мы хотим узнать каким образом появляется половинный угол при повороте состояния со спином $\frac{1}{2}$ вокруг некороторой оси.

Известно, что такой поворот не должен влиять на наблюдаемые явления, так что изменяться может только фазовый множитель:

$$A_1 = e^{i\lambda(\theta)}A \tag{1}$$

Заметим, что каждый поворот можно рассматривать как последовательность маленьких поворотов. Отсюда получаем линейность:

$$\lambda(a\theta) = a\lambda(\theta) \tag{2}$$

Если $\lambda(\theta) = \theta$ то поворот на 180° просто домножает амплитуду на -1, это означает, что изменение нельзя обнаружить (квадрат амплитуды не изменится). Получаем, что такой поворот эквивалентен повороту на 0°.

Но наименьшим поворотом сохраняющим физическое состояние должен быть поворот на 360°. Таким образом:

$$\lambda(\theta) = \frac{1}{2}\theta \tag{3}$$

Обмен частиц эквивалентен повороту на 360°, поэтому интерференция происходит со знаком минус.

Воздействие на колебательную систему. В этой части мы хотим рассмотреть воздействие на частицу. Но сперва рассмотрим более простой случай воздействия на колебательную систему. Пусть мы имеем гармоническое воздействие.

$$\ddot{A}(t) + \omega_0^2 A(t) = f_0 e^{i\Omega t} \tag{4}$$

Решение:

$$A(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t} \tag{5}$$

Перейти к случаю с произвольным воздействием не сложно - т.к. почти любую функцию можно представить интегралом Фурье по частотам, а решение для отдельной частоты Ω у нас уже есть. Посмотрим как будет вести себя система при воздействии, описывающимся дельта-функцией:

$$\delta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Omega t} d\Omega \tag{6}$$

Подставляем при $A(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega) d\Omega$:

$$\ddot{F}(\Omega) + \omega_0^2 F(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Omega t} \tag{7}$$

Отсюда:

$$A(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_0 e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} d\Omega + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)\sqrt{2\pi}} e^{i\Omega t} d\Omega \tag{8}$$