Задача 6

Масленников Андрей

14.11.2016

Преобразования при повороте. В этом разделе мы хотим рассмотреть преобразования вектора состояния со спином $\frac{1}{2}$ при повороте вокруг некороторой оси ($\vec{e}$ - направляющий вектор оси, θ - угол поворота):

$$A' = R(\vec{e}, \theta)A \tag{1}$$

При этом такое представление обладает свойствами:

1. При композиции поворотов матрицы перемножаются.
2. Данное преобразование оставляет вектор в том же пространстве.
3. Поворот на 2π оставляет вектор колинеарным себе.

Рассмотрим подробнее свойство 3 - оно подразумевает, что "полный"поворот на 2π не вносит изменений в вероятность перехода, т.к. домножив каждую амплитуду на одинаковый фазовый множитель мы ничего не изменим. Заметим, что тогда матрицы можно привести к стандартному виду:

$$R_{st} = \frac{R}{\sqrt{DetR}} \tag{2}$$

Отсюда получаем, что матрица поворота на 2π будет иметь вид:

$$R_{st}(\vec{e}, 2\pi) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Заметим, что поворот на 2π должен быть наименьшим поворотом, который обладает такими свойствами. Далее отталкиваясь от этого получаем:

$$R_{st}(\vec{e}_z, \theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$R_{st}(\vec{e}_y, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$R_{st}(\vec{e}_x, 2\pi) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\theta}{2}) & isin(\frac{\theta}{2}) \\ isin(\frac{\theta}{2}) & cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Таким набором мы можем записать любой поворот как композицию:

$$R = R(\vec{e}_z, \alpha)R(\vec{e}_{x'}, \beta)R(\vec{e}_{z''}, \gamma) \tag{7}$$

Воздействие на колебательную систему. Рассмотрим воздействие на покоющуюся систему дельта-функции:

$$\ddot{A}(t) + \omega_0^2 A(t) = \delta(t) \tag{8}$$

Начальные условия: $A(t) = 0$ и $\dot{A}(t) = 0$ при $t < 0$

Решение будет складываться из общего решения однородного и частного решения неоднородного. Частное решение можно представить в виде:

$$A(t) = \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{(\omega_0)^2 - \Omega^2}) = \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{2\omega_0}(\delta(\omega_0 + \Omega) + \delta(\omega_0 - \Omega) + \frac{1}{\omega_0 - \Omega} + \frac{1}{\omega_0 + \Omega})) \tag{9}$$

Откуда получаем полное решение:

$$A(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} + \frac{1}{\omega_0}\theta(t) sin(\omega_0 t) \tag{10}$$

С учетом начальных условий:

$$A(t) = \frac{1}{\omega_0}\theta(t) sin(\omega_0 t) \tag{11}$$