

## Научно-исследовательский семинар для студентов 2 курса

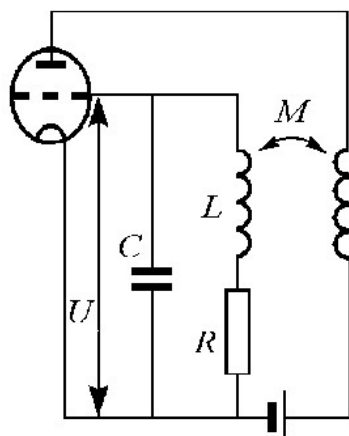
Участникам семинара будет предложена длительная работа над научно-исследовательскими проектами по теоретической и математической физике. Для начала предлагается выбрать одну из приведенных ниже “затравочных” задач. Задачи предлагаются для самостоятельного решения, а первые несколько семинаров будут посвящены обсуждению продвижений и формулировке новых вопросов. В процессе дальнейшей работы постоянным и серьезно настроенным участникам семинара на основе их продвижений будут поставлены задачи для дальнейшей работы с выходом на современные научные вопросы. Участники семинара также могут предлагать свои собственные темы для исследования.

Семинар будет проходить **по понедельникам с 11.00 до 17.00** в ИТЭФ (ул. Большая Черемушнская, 25), корп. 180, ауд. 201. О первом занятии будет объявлено дополнительно.

Для участия в семинаре нужно написать на адрес **itepyouthseminar@gmail.com**. Письмо должно содержать ФИО, место учебы и выбранную “затравочную” задачу. Также приветствуется (хотя и не является обязательным) краткий конспект первых продвижений. Кроме того, для оформления прохода на территорию ИТЭФ необходимо сообщить **полные данные российского паспорта**: ФИО, дата и место рождения, серия и номер, когда и кем выдан, данные о постоянной регистрации.

### Список “затравочных” задач

1. **Исследование автоколебательной системы.** На рисунке показана схема простейшего лампового генератора – устройства, выдающего устойчивый периодический сигнал при приложении постоянного напряжения. Устройство состоит из колебательного (L–C) контура и лампы с одной сеткой (триода) – элемента с тремя трех выводами: катодом (сверху), анодом (снизу) и сеткой (пунктирная линия посередине). Обратная связь между колебательным контуром и триодом осуществляется посредством двух катушек индуктивности с общим сердечником. В рабочем режиме сеточный ток много меньше анодного, а разность потенциалов катода и сетки много меньше разности потенциалов сетки и анода, причем первая разность зависит только от анодного тока:  $U = U(I_a)$ .



- (a) Рассмотрите работу системы качественно и подберите параметры схемы, при которых справедливы указанные выше предположения, и генератор будет работать.

- (b) В простейшем приближении лампа работает как линейный элемент: анодный ток связан с напряжением на лампе законом  $U = I_{a0} + S_0 \cdot I_a$ . Можно ли описать процесс возбуждения колебаний в генераторе, все время оставаясь в рамках этого приближения?
- (c) Покажите, что в простейшем *нелинейном* приближении – при учете кубического члена в вольт-амперной характеристике лампы:  $U = I_{a0} + S_0 \cdot I_a + S_1 \cdot I_a^3$  работа генератора (при сделанных выше предположениях), описывается уравнением Ван дер Поля:

$$\ddot{U} + \gamma \dot{U} + \alpha U^2 \dot{U} + \omega^2 U + f = 0, \quad (1)$$

Вычислите коэффициенты этого уравнения для подобранных вами ранее параметров контура. Какие условия необходимо наложить на коэффициенты, чтобы уравнение описывало процесс возбуждения колебаний и каковы соответствующие условия на параметры контура?

- (d) Путем численного решения уравнения (1) постройте фазовые портреты системы – кривые зависимости тока в колебательном контуре от напряжения на этом контуре при работе цепи –  $I(U(t))$  – при различных значениях начального напряжения  $U_0 = U(0)$ . Как изменяется фазовый портрет в зависимости от параметров системы? Как отличить работоспособный генератор от неработоспособного по его фазовому портрету?
- (e) Как Вы думаете, почему в простейшем нелинейном приближении предлагается учесть *кубический*, а не *квадратичный* члены в вольт-амперной характеристике лампы?
- (f) Соберите действующую модель устройства и исследуйте его фазовый портрет с помощью осциллографа. Сравните результат с результатом численного моделирования.

**Литература:** [1], [2], [3].

## 2. Исследование параметрического резонанса.

- (a) i. Покажите, что динамика человека, раскачивающегося на качелях, приближенно описывается уравнением Матьё:

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + h \cos(\Omega t))x = 0. \quad (2)$$

Каков физический смысл входящих в уравнение параметров  $h$ ,  $\omega$  и  $\Omega$ , и при каком соотношении на эти параметры верно использованное вами приближение?

- ii. Исследуйте уравнение (2) по теории возмущений: ищите решение в виде ряда

$$x = x^{(0)} + hx^{(1)} + h^2x^{(2)} + \dots \quad (3)$$

по глубине модуляции  $h$ . При каких значениях параметров найденное таким образом решение имеет особенности, и каков их физический смысл? Можете ли Вы сформулировать принципиальную разницу между свойствами решения в первом и последующих порядках теории возмущений? Удастся ли учесть бесконечное число порядков – просуммировать ряд?

- iii. Какой динамике отвечает решение, найденное Вами в предыдущем пункте? Описывает ли оно раскачку качелей?
- iv. Исследуйте уравнение (2) численно. При каких условиях справедлива построенная Вами теория возмущений? Когда качели действительно будут раскачиваться? А тормозиться?
- (b) i. Пара качелей на параллельных подвесах связана пружиной. Исследуйте всевозможные режимы движения такой системы.
- ii. Исследуйте различные случаи поведения такой пары качелей, если два человека одновременно попытаются на них раскачаться.

- iii. Изготовьте действующую модель описанной системы, и сравните ее экспериментально наблюдаемое поведение с результатами проведенного вами теоретического исследования.

**Литература:** [4], [3].

### 3. Мультипольное разложение в электро/магнетостатике и теория представлений.

- (a) Исследуйте различные случаи зависимости электрических сил от направления, записав в сферических координатах  $(R, \theta, \varphi)$  потенциал  $\phi$  и электрическое поле  $\vec{E}$ , которые создают на большом расстоянии от себя локализованные в пространстве следующие системы зарядов:
- Электрический диполь: два точечных электрических заряда величин  $q$  и  $-q$  на расстоянии  $a \ll R$  друг от друга;
  - Электрический квадруполь: четыре точечных электрических заряда в углах квадрата со стороной  $a \ll R$ , заряды на одной диагонали имеют величину  $q$ , а заряды на противоположной диагонали – величину  $-q$ .

Сравните ответы с потенциалом точного заряда. Предложите опыт(-ы), с помощью которого(-ых) наблюдатель, находящийся на большом расстоянии  $R$  от системы зарядов, смог бы определить, имеет ли ее потенциал один из трех этих видов. Какие выводы позволяют сделать эти опыты о расположении зарядов в пространстве?

- (b) Исследуйте различные случаи зависимости магнитных сил от направления, записав в сферических координатах  $(R, \theta, \varphi)$  векторный потенциал  $\vec{A}$  и магнитное поле  $\vec{H}$ , которые создают в пространстве следующие системы токов:
- Магнитный диполь: рамка с током величины  $I$  в форме квадрата со стороной  $a \ll R$ ;
  - Магнитный квадруполь: две рамки с токами величины  $I$  и  $-I$  в форме двух квадратов стороной  $a \ll R$ , стороны рамок попарно параллельны, расстояние между центрами равно  $b \ll R$ .

Ответьте на те же вопросы, что и в предыдущем пункте задачи.

- (c) Сравните зависимость плотности энергии поля  $\mathcal{E}(R, \theta, \phi)$  от направления и расстояния до системы для всех рассмотренных в задачах случаев. Возможно ли из этих систем составить пары электрическая система – магнитная система так, что функции  $\mathcal{E}(R, \theta, \phi)$  у систем пары одинаковы?
- (d) Какие выводы о распределении потенциалов и полей в пространстве позволяют сделать соображения симметрии для описанных электрических и магнитных систем?
- (e) Почему некоторые из описанных выше источников электрического и магнитного полей называются скалярными, некоторые – векторными, а некоторые – тензорными? К каким из описанных источников применимо каждое из этих определений? Может ли источник поля иметь в этом плане иной – более сложный тип? Отрицательный ответ поясните, а в случае положительного приведите пример такого источника. Можно ли построить систему точечных электрических зарядов, для которой электрическая сила относится к новому, предложенному вами типу?

**Литература:** [5], [6], [7].

4. **Коллективные возбуждения многочастичной системы.** В рамках простейшей модели элементарное коллективное возбуждение однородного кристалла можно представить как монохроматическую продольную волну, бегущую в длинной цепочке (из  $N \gg 1$ ) шариков (атомов) массы  $m$  каждый, связанных пружинами жесткости  $k$  каждая (моделирующими взаимодействия между атомами).

- (a) Найдите для такого элементарного возбуждения закон дисперсии – зависимость волнового вектора  $\vec{k}$  от частоты колебаний  $\omega$ .
- (b) Для описанных плоских волн вычислите плотность энергии  $\epsilon(\omega, \vec{k})$  и поток импульса  $\vec{\pi}(\omega, \vec{k})$  колебаний шариков как функции частоты колебаний и волнового вектора.
- (c) С какой скоростью будет перемещаться по цепочке широкий волновой пакет – колебание, имеющее вид плоской волны в некоторой области и быстро спадающее до нуля за ее пределами? Сформулируйте условия на ширину волнового пакета и скорость падения амплитуды на его краях, при которых справедливо предложенное вами решение.
- (d) Для рассмотренного волнового пакета определите, как ведут себя плотность энергии и поток импульса колебаний, а также скорость распространения пакета в пределе  $\omega \rightarrow 0$ .
- (e) Ответьте на те же вопросы для цепочки шариков, массы которых чередуются: равны  $m$  для четных позиций и  $M$  для нечетных.

**Литература:** [8], [9].

- 5. **"Квантово-механические ЭВМ"**. Прочтите текст [10] и напишите краткий (не более 1 стр.) конспект той части материала, которая вам покажется интересной и посильной для понимания.
- 6. **"Почему существуют античастицы?"** Прочтите текст [11] и напишите краткий (не более 1 стр.) конспект той части материала, которая вам покажется интересной и посильной для понимания.

## Список литературы

- [1] Сивухин Д. В. Общий курс физики. III. Электричество. — Москва : Физматлит, 2015.
- [2] Феномен уравнения Ван-дер-Поля / А. П. Кузнецов, Е. С. Селиверстова, Д. И. Трубецков, Л. В. Тюрюкина // Обзоры актуальных проблем нелинейной динамики. — 2014. — Т. 22.
- [3] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — Москва : Наука, 1989.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. — Москва : Наука, 1988. — Т. 1. Механика.
- [5] Фейнман Р. П., Лейтон Р. Б., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — Москва : Мир, 1967. — Т. 5. Электричество и магнетизм.
- [6] Фейнман Р. П., Лейтон Р. Б., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — Москва : Мир, 1966. — Т. 6. Электродинамика.
- [7] Фейнман Р. П., Лейтон Р. Б., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — Москва : Мир, 1967. — Т. 7. Физика сплошных сред.
- [8] Фейнман Р. П., Лейтон Р. Б., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — Москва : Мир, 1967. — Т. 4. Кинетика. Теплота. Звук.
- [9] Сивухин Д. В. Общий курс физики. V. Атомная и ядерная физика. — Москва : Наука, 2008.
- [10] Фейнман Р. Ф. Квантово-механические ЭВМ // УФН. — 1986. — Vol. 149. — P. 671–688.
- [11] Фейнман Р. Ф. Почему существуют античастицы? // УФН. — 1989. — Vol. 157. — P. 163–183.