Задача 6

Масленников Андрей

31.10.2016

Формализм Дирака. В квантовой механике состояние системы может описываться вектором из Гильбертова пространства $\mathbb{H}$ (расширение Евклидова пространства до бесконечных размерностей). Такой вектор называется вектором состояния и являет собой набор математических величин, полностью описывающих систему. В классической механике аналогом может служить вектор фазового пространства.

Вектор состояния обозначается: $|a\rangle$ для каждого векотора в сопряженном пространстве есть соответствующий: $\langle a|$

Тогда их скалярное произведение ни что иное как амплитуда вероятности перехода из одного состояния в другое:

$$A_{a\to b} = \langle b|a\rangle \tag{1}$$

Эти векторы обладают рядом свойств:

1. Амплитуда перехода из a в b комплексно сопряжена с амплитудой обраного перхода:

$$\langle b|a\rangle = \overline{\langle a|b\rangle} \tag{2}$$

2. При действии некоторым оператором $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$:

$$(\langle b|\, A)\, |a\rangle = \langle b|\, (A\, |a\rangle) = \langle b|A|a\rangle \tag{3}$$

Тождественные частицы. При рассмотрении опытов по рассеянию тождественных (неразличимых) частиц было обнаружено, что существует два типа: для одних амплитуды рассеяния с обменом частиц и без обмена (мы не знаем какую из двух частиц зарегестрировал детектор) интерферируют со знаком $+$, а для других со знаком - .

Первые - бозе-частицы (например фотоны). Вторые - ферми-частицы (например электроны).

Ферми-частицы. Рассмторим амплитуду попадания двух таких частиц a и b в близкие состояния 1 и 2:

$$A = \langle 1|a\rangle\, \langle 2|b\rangle - \langle 2|a\rangle\, \langle 1|b\rangle \tag{3}$$

Что произойдет если сделать состояния 1 и 2 одним и тем же состоянием. В понятие состояния, разумеется входит направление спина. Поэтому в данном случае частицы будут иметь одинаково направленые спины, а амплитуда будет равна 0.

Таким образом получаем, что две ферми-частицы не могут находиться в одном и том же состоянии. Это правило носит название принципа запрета Паули.

Но заметим, что если бы частицы имели спины разных направлений, то поместить их в "одно"состояние вполне возможно.

Бозе-частицы. Рассмотрим вероятность попадания двух бозе-частиц в близкие состояния, если частицы различимы:

$$P = |\, \langle 1|a\rangle\, \langle 2|b\rangle\, |^2 + |\, \langle 2|a\rangle\, \langle 1|b\rangle\, |^2 \tag{4}$$

В одно состояние:

$$P = 2|\, \langle 1|a\rangle\, \langle 1|b\rangle\, |^2 \tag{5}$$

Аналогичные формулы для неразличимых частиц:

$$P = |\, \langle 1|a\rangle\, \langle 2|b\rangle + \langle 2|a\rangle\, \langle 1|b\rangle\, |^2 \tag{6}$$

$$P = 4|\, \langle 1|a\rangle\, \langle 1|b\rangle\, |^2 \tag{7}$$

Получаем, что обнаружить две идентичные частицы в одном состоянии вдвое более вероятно, чем если бы они были различимы! Это можно интерпретировать по другому: если у нас одна из идентичных бозе-частиц попала в одно состояние, то вероятность попадания туда второй больше в 2 раза.

Путем несложных математических вычислений можно получить формулу для n частиц:

$$P_{n+1} \sim (n+1)P_n \tag{8}$$