KALKULUS II

Tri Utomo
Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan

July 18, 2025

DAFTAR ISI

1 Teknik Pengintegralan **1**

1.1 Pendahuluan 1
1.2 Integral Substitusi Dasar 2
1.3 Integral Parsial 2
1.4 Integral Fungsi Trigonometri 4
1.5 Integral Substitusi yang Merasionalkan 4
1.6 Integral Fungsi Rasional 4
1.7 Strategi Pengintegralan 6
1.8 Latihan Soal 6
1.9 Soal Latihan 6

BAB 1

Teknik Pengintegralan

1.1 Pendahuluan

Pada bagian ini dijelaskan beberapa cara yang dapat digunakan untuk menentukan atau menghitung integral, diantaranya yaitu teknik substitusi dasar, integral parsial, integral fungsi trigonometri, teknik substitusi yang merasionalkan, dan integral fungsi rasional. Selain itu diberikan strategi dalam menentukan metode mana yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan integral.

sebelum dibahas satu-persatu teknik pengintegralan, berikut diberikan bentuk-bentuk integral fungsi dasar yang akan membantu dalam kasus-kasus yang lebih kompleks, yaitu fungsi konstan, fungsi pangkat, fungsi eksponen, fungsi aljabar, fungsi trigonometri, dan fungsi hiperbolik.

Catatan Beberapa Bentuk Anti Turunan Fungsi Dasar

- $\int k\,dx = kx + C$
- $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \neq 1, a > 0$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
- $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
- $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
- $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{|x|}{a} + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$
- $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
- $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

1.2 Integral Substitusi Dasar

Tujuan dari teknik ini adalah mentransformasikan permasalahan ke bentuk integral fungsi dasar dengan melakukan substitusi. Teknik ini didasarkan pada aturan rantai turunan. Misalkan suatu fungsi $f(x) = \sin(3x^2+1)$ dan diminta menghitung turunan f terhadap x yaitu $f'(x)$. Jelas bahwa kasus ini memerlukan aturan rantai untuk menyelesaikannya, yaitu dengan melakukan permisalan $f(u) = \sin(u)$ dan $u(x) = 3x^2+1$ dan didapatkan turunan f terhadap u yaitu $\frac{df}{du} = f'(u) = \cos(u)$ dan turunan u terhadap x yaitu $u'(x) = \frac{du}{dx} = 6x$, atau dapat ditulis juga sebagai $du = 6xdx$ (diferensial u terhadap x). Sehingga didapatkan turunan f terhadap x yaitu $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = \cos(u)(6x) = \cos(3x^2+1)6x$. Kebalikan dari langkah-langkah di atas merupakan permasalahan pengintegralan, yaitu $\int \cos(3x^2+1)6xdx = \int \cos(u)du = \sin(u) + C = \sin(3x^2+1) + C$. Pada langkah pertama disubtitusikan u sebagai pengganti $3x^2+1$ dan $du = 6xdx$. Subtitusi ini menjadikan bentuk integral menjadi lebih sederhana. Pada langkah terakhir disubtitusikan balik $3x^2+1$ sebagai pengganti u, sehingga didapatkan hasil akhir dalam variabel x.

Teknik integral substitusi digunakan ketika suatu bentuk integran dapat disederhanakan dengan memisalkan sebagian integran sehingga diferensialnya termuat di sisa bagian lainnya. Misal untuk integral $\int f(g(x))g'(x)\,dx$, kita bisa memisalkan $u = g(x)$ sehingga $du = g'(x)dx$ dan integral berubah menjadi $\int f(u)\,du$.

Permasalahan utama: menentukan mana yang seharusnya dimisalkan sebagai u dan mana yang seharusnya dimisalkan sebagai du.

Contoh 1.1. Tentukan $\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx$

Misal $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}du = x\,dx$

Maka:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{x}{\cos^2 u}\,du = \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du = \frac{1}{2}\tan u + C = \frac{1}{1}\tan x^2 + C$$

1.3 Integral Parsial

Metode integral parsial digunakan berdasarkan aturan turunan dari perkalian dua fungsi:

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

Bentuk umum yang digunakan:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Contoh 1.2. Tentukan $\int xe^{3x}\,dx$
Ambil $u = x \Rightarrow du = dx$, dan $dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$
Maka:

$$\int xe^{3x}\,dx = x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

Contoh 1.3. Tentukan $\int x\cos x\,dx$
Ambil $u = x \Rightarrow du = dx$, dan $dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$
Maka:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

Contoh 1.4. Tentukan $\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx$
Langkah pertama: $u = x^2,\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow du = 2x\,dx,\ v = \sin x$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$$

Langkah kedua: $u = 2x,\ dv = \sin x\,dx \Rightarrow du = 2\,dx,\ v = -\cos x$

$$\int 2x\sin x\,dx = -2x\cos x + 2\int \cos x\,dx = -2x\cos x + 2\sin x$$

Gabungkan:

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

Contoh 1.5. Tentukan $\int e^x\cos x\,dx$
Langkah pertama: $u = e^x,\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow du = e^x\,dx,\ v = \sin x$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx$$

Langkah kedua: $u = e^x,\ dv = \sin x\,dx \Rightarrow du = e^x\,dx,\ v = -\cos x$

$$\int e^x\sin x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx$$

Gabungkan:

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx$$

Pindahkan ruas kanan:

$$2\int e^x\cos x\,dx = e^x(\sin x + \cos x) \Rightarrow \int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$$

Contoh 1.6. Tentukan $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

Ambil $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$, dan $dv = \sqrt{x}dx = x^{1/2}dx \Rightarrow v = \frac{2}{3}x^{3/2}$
Maka:

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx = \frac{2}{3}x^{3/2} \ln x - \int \frac{2}{3}x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} \ln$$

Contoh 1.7. Tentukan $\int \ln x \, dx$
Ambil $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$, dan $dv = dx \Rightarrow v = x$
Maka:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

1.4 Integral Fungsi Trigonometri

belum

1.5 Integral Substitusi yang Merasionalkan

belum

1.6 Integral Fungsi Rasional

Integral fungsi rasional adalah integral dari fungsi dalam bentuk $\frac{f(x)}{g(x)}$, di mana $f(x)$ dan $g(x)$ adalah polinomial dan derajat $f(x) <$ derajat $g(x)$. Jika derajat pembilang lebih besar atau sama, lakukan pembagian terlebih dahulu. Langkah-langkah umum:

1. Ubah bentuk ke dalam pecahan parsial
2. Hitung masing-masing suku menggunakan teknik yang sesuai

Faktor Linear Berbeda

Contoh 1.8. Tentukan $\int \frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}dx$
Pecahan parsial:

$$\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

Kalikan silang dan samakan pembilang:

$$3x - 1 = A(x-3) + B(x+2)$$

Substitusi:

$$x = 3 \Rightarrow 8 = 5B \Rightarrow B = \frac{8}{5}$$

$$x = -2 \Rightarrow -7 = -5A \Rightarrow A = \frac{7}{5}$$

Maka:

$$\int \frac{3x-1}{(x+2)(x-3)}dx = \frac{7}{5}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{8}{5}\int \frac{1}{x-3}dx$$
$$= \frac{7}{5}\ln|x+2| + \frac{8}{5}\ln|x-3| + C$$

Faktor Linear Berulang

Contoh 1.9. Tentukan $\int \frac{3x-1}{(x+2)^2}dx$
Gunakan pecahan parsial:

$$\frac{3x-1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

Samakan pembilang:

$$3x-1 = A(x+2)+B \Rightarrow x=-2 \Rightarrow -7=B, \quad x=0 \Rightarrow -1=2A+B \Rightarrow A=3$$

Maka:

$$\int \frac{3x-1}{(x+2)^2}dx = \int \frac{3}{x+2}dx + \int \frac{-7}{(x+2)^2}dx$$
$$= 3\ln|x+2| + \frac{7}{x+2} + C$$

Faktor Kuadrat

Contoh 1.10. Tentukan $\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}dx$
Gunakan:

$$\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Samakan pembilang:

$$6x^2-3x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(4x+1)$$

Substitusi:

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = 2$$
$$x = 0 \Rightarrow 1 = A + C \Rightarrow C = -1$$
$$x = 1 \Rightarrow 4 = 2(2) + 5B - 5 \Rightarrow B = 1$$

Sehingga:

$$\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}dx = \int \frac{2}{4x+1}dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}dx$$

Pisah:

$$\int \frac{2}{4x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|4x+1| \int \frac{x-1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1}(x)$$

Gabungkan:

$$\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\ln|4x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1}(x) + C$$

1.7 Strategi Pengintegralan

Secara umum strategi dalam melakukan pengintegralan fungsi yaitu sebagai berikut:

1. Periksa apakah bentuknya langsung diketahui antiturunannya
2. Jika tidak, tentukan apakah dapat digunakan substitusi
3. Jika berupa perkalian, cek apakah sesuai untuk integral parsial
4. Jika berbentuk fungsi rasional, gunakan pecahan parsial
5. Jika tidak ada yang berhasil, pertimbangkan transformasi fungsi

1.8 Latihan Soal

1. Tentukan hasil dari $\int (2x+5)^3\,dx$
2. Tentukan hasil dari $\int xe^{x^2}\,dx$
3. Tentukan hasil dari $\int x^2 \cos x\,dx$
4. Tentukan hasil dari $\int \frac{x^2+3}{(x-1)(x+2)}dx$
5. Tentukan hasil dari $\int \ln x\,dx$

1.9 Soal Latihan

1. Tentukan integral berikut menggunakan metode substitusi:

   a) $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx$

   b) $\displaystyle\int 5\cos(3x)\,dx$

   c) $\displaystyle\int x\exp(1-3x^2)\,dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x}\,dx$

   e) $\displaystyle\int \cos(x)\exp(\sin(x))\,dx$

2. Tentukan integral berikut menggunakan integral parsial:

   a) $\displaystyle\int x\sin(2x)\,dx$

   b) $\displaystyle\int t\sqrt{t+1}\,dt$

   c) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \ln^2(z)\,dz$

f) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$

g) $\displaystyle\int \ln^3(x)\,dx$

h) $\displaystyle\int x\ln(x)\,dx$

3. Tentukan integral berikut menggunakan integral fungsi rasional:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-2)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-2}{x^2(x+2)}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2+x}{(x+1)^2(x+2)}\,dx$

4. Gunakan Strategi Pengintegralan untuk menentukan integral berikut:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int (x+\sqrt{x})e^x\,dx$

c) $\displaystyle\int x\ln(x^2+1)\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2+2x+5}\,dx$

Penutup

Dengan memahami berbagai teknik pengintegralan seperti substitusi, parsial, dan fungsi rasional, mahasiswa diharapkan dapat menyelesaikan berbagai bentuk integral yang kompleks. Penguasaan teknik ini sangat penting sebagai dasar untuk mata kuliah lanjutan seperti kalkulus lanjut dan persamaan diferensial.

Halo dunia! Ini PDF pertama dari GitHub Actions.