FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA, NOVI SAD, 28.VI 2023.

ZADACI ZA PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA STUDIJSKE PROGRAME: Energetika, elektronika i telekomunikacije; Računarstvo i automatika; Primenjeno softversko inženjerstvo; Merenje i regulacija; Softversko inženjerstvo i informacione tehnologije; Biomedicinsko inženjerstvo; Inženjerstvo informacionih sistema; Informacioni inženjering; Mehatronika i Animacija u inženjerstvu

1. Dat je kompleksan broj $w = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Odrediti $|w|$ i $\arg(w) \in (-\pi, \pi]$.

b) Napisati kompleksne brojeve w i $\overline{w}$ u trigonometrijskom obliku.

c) Izračunati $\operatorname{Im}\left(\dfrac{2w}{1-i} + 3w \cdot \overline{w}\right)$.

Rešenje:

a) $|w| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, a kako je w u prvom kvadrantu, to je $\arg(w) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

b) U trigonometrijskom obliku je $w = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\overline{w} = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

c) Kako je $w \cdot \overline{w} = |w|^2$ realan broj, sledi

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2w}{1-i} + 3w \cdot \overline{w}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{2w}{1-i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{2+2i\sqrt{3}}{1-i}\right) = \operatorname{Im}\left(1 - \sqrt{3} + \left(1+\sqrt{3}\right)i\right) = 1 + \sqrt{3}.$$

2. Data je kvadratna jednačina $x^2 + (4m - 24)x + 4m - 4 = 0$.

a) Odrediti sve vrednosti realnog parametra m za koje je jedno rešenje jednačine tri puta veće od drugog.

b) Za koje vrednosti realnog parametra m je $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 0$, gde su x_1 i x_2 rešenja date jednačine?

Rešenje: Na osnovu Vijetovih formula je $x_1 + x_2 = -4m + 24$ i $x_1x_2 = 4m - 4$.

a) Po uslovu zadatka $x_1 = 3x_2$ i iz Vijetovih formula sledi $x_1 + x_2 = 4x_2 = -4m + 24$, tj. $x_2 = -m + 6$. Slično, $x_1x_2 = 3x_2^2 = 3(-m+6)^2 = 3(m^2 - 12m + 36) = 3m^2 - 36m + 108$, pa je $3m^2 - 36m + 108 = 4m - 4$, tj. $3m^2 - 40m + 112 = 0$, odakle je $m = 4 \vee m = \frac{28}{3}$.

b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{-4m+24}{4m-4}$. Uz uslov $m \neq 1$ važi da je $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 0 \Leftrightarrow -4m + 24 = 0 \Leftrightarrow m = 6$.

3. Date su funkcije f sa $f(x) = \log_3(2x - 11) - \log_3(x^2 - 5x + 4)$ i g sa $g(x) = \log_3 \dfrac{1}{x}$.

a) Odrediti oblast definisanosti funkcije f.

b) Odrediti oblast definisanosti funkcije g.

c) Odrediti sva rešenja jednačine $f(x) = g(x)$.

Rešenje:

a) Funkcija f je definisana ako je $2x - 11 > 0$ i $x^2 - 5x + 4 > 0$.
Kako je $x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ i $2x - 11 > 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{11}{2}, \infty)$, funkcija f je definisana za $x \in (\frac{11}{2}, \infty)$.

b) Funkcija g je definisana ako je $\frac{1}{x} > 0$, tj. za $x \in (0, \infty)$.

c) Za $x \in (\frac{11}{2}, \infty)$ je

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \log_3(2x-11) - \log_3(x^2 - 5x + 4) = \log_3 \frac{1}{x} \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-11}{x^2-5x+4} = \log_3 \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2x-11}{x^2-5x+4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 3 + \sqrt{13} \ \vee \ x = 3 - \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Kako $3 - \sqrt{13} \notin \left(\dfrac{11}{2}, \infty\right)$, jedino rešenje date jednačine je $3 + \sqrt{13}$.

4. Rešiti nejednačinu $81\cdot 2^{x^2-3}-2\cdot 3^{x^2}\geq 0$.

Rešenje: $$81\cdot 2^{x^2-3}-2\cdot 3^{x^2}\geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3^4\cdot 2^{x^2}}{2^3}\geq 2\cdot 3^{x^2}\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^4\Leftrightarrow x^2\leq 4$$
$$\Leftrightarrow\; (x-2)(x+2)\leq 0\Leftrightarrow x\in[-2,2].$$

5. Data je funkcija f sa $f(x)=2-7\sin x+2\cos^2 x$.

a) Odrediti nule funkcije f.

b) Odrediti nule funkcije f koje zadovoljavaju nejednakost $\cos x\geq 0$.

Rešenje:

a) Iz $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, sledi da je $f(x)=0\Leftrightarrow -2\sin^2 x-7\sin x+4=0$. Smenom $\sin x=t$ dobija se kvadratna jednačina $-2t^2-7t+4=0$ čija su rešenja -4 i $\frac{1}{2}$. Kako je $|\sin x|\leq 1$, jednačina $\sin x=-4$ nema rešenja. Rešenja jednačine $\sin x=\frac{1}{2}$ su $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ili $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Dakle, skup svih nula funkcije f je $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Na osnovu rezultata pod a) i kako za svako x iz skupa $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ važi $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$, a za svako x iz skupa $\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ važi $\cos x=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$, sledi da je skup svih nula funkcije f koje zadovoljavaju datu nejednakost $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ dijagonale AC i BD su uzajamno normalne i seku se u tački O. Neka je $|\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ i $|\overrightarrow{OD}|=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

a) Izračunati $|\overrightarrow{AB}|$ i $|\overrightarrow{DC}|$.

b) Odrediti ugao između vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$.

Rešenje.

a) Kako su trouglovi ΔABO i ΔDOC pravougli, to je

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2}=\sqrt{12+1}=\sqrt{13},$$
$$|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2}=\sqrt{\frac{49}{3}+1}=\sqrt{\frac{52}{3}}=2\sqrt{\frac{13}{3}}.$$

b) Skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ dat je sa

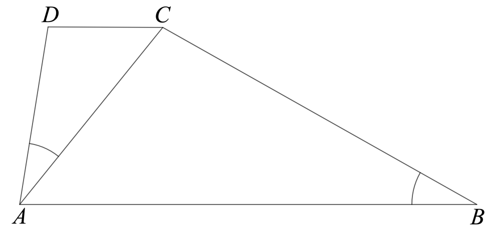
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{DC}|\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{\frac{13}{3}}\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=\frac{26\sqrt{3}}{3}\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}).$$

Kako je $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OD}$, to je $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=0$. Dalje, $\sphericalangle(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD})=\sphericalangle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\pi$, pa je $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD})=\cos\sphericalangle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=-1$, te se skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ može predstaviti i kao

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$$
$$=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OD}|+|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|=\frac{7\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}=\frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

Sledi da je $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=\dfrac{\frac{13\sqrt{3}}{3}}{\frac{26\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{1}{2}$. Dakle, $\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=\dfrac{\pi}{3}$.

7. Dat je trapez $ABCD$ čije su osnovice $AB = 8$ i $CD = 2$. Ako je u datom trapezu $\sphericalangle DAC$ jednak uglu kod temena B, odrediti dužinu dijagonale AC.



Rešenje: Kako je $\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB$ (naizmenični uglovi), sledi da su trouglovi ABC i CAD slični. Stoga je

$$AB : AC = AC : CD, \quad \text{tj.} \quad 8 : AC = AC : 2,$$

odakle je $AC = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$.

8. Poluprečnik r, visina H i izvodnica s prave kupe tim redom čine tri uzastopna člana aritmetičke progresije. Ako je zapremina kupe 768π, odrediti površinu osnog preseka.

Rešenje: Na osnovu Pitagorine teoreme $r^2 + H^2 = s^2$, koristeći da je $H = r + d$ i $s = r + 2d$, $d > 0$, sledi da je $r^2 + (r+d)^2 = (r+2d)^2$, tj. $r^2 - 2rd - 3d^2 = 0$.

Kako je $r^2 - 2rd - 3d^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 + rd - 3rd - 3d^2 = 0 \Leftrightarrow (r-3d)(r+d) = 0 \Leftrightarrow r = 3d \vee r = -d$ i $d > 0$, sledi $r = 3d$ i $H = 4d$. Kako je $V = 768\pi$, iz formule za zapreminu kupe je

$$V = \frac{1}{3} r^2 H \pi \;\Leftrightarrow\; 768\pi = \frac{1}{3} \cdot 9d^2 \cdot 4d \cdot \pi \;\Leftrightarrow\; d^3 = 64 \;\Leftrightarrow\; d = 4.$$

Konačno, kako je je $r = 12$, $H = 16$, površina osnog preseka kupe je $r \cdot H = 192$.

9. Data je funkcija f sa $f(x) = \dfrac{5x}{9 - x^2}$.

a) Odrediti oblast definisanosti funkcije f.
b) Odrediti intervale monotonosti funkcije f.
c) Izračunati površinu oblasti ograničene grafikom funkcije f, $x-$osom i pravama $x = 1$ i $x = 2$.

Rešenje:

a) Funkcija f je definisana za $9 - x^2 \neq 0$, tj. oblast definisanosti funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

b) Izvod funkcije je $f'(x) = \dfrac{5(9-x^2) - 5x(-2x)}{(9-x^2)^2} = \dfrac{5x^2 + 45}{(9-x^2)^2} > 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.
Funkcija f je monotono rastuća po intervalima $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ i $(3, \infty)$.

c) Kako je funkcija f pozitivna na intervalu $[1, 2]$, to je

$$P = \int_1^2 \frac{5x}{9-x^2} dx = -\frac{5}{2} \ln|9 - x^2| \Big|_1^2 = -\frac{5}{2}(\ln 5 - \ln 8) = -\frac{5}{2} \ln \frac{5}{8} = \frac{5}{2} \ln \frac{8}{5}.$$

10. Na koliko različitih načina se može rasporediti 5 kuglica u 3 kutije tako da je svaka kuglica u nekoj kutiji i u svakoj kutiji je bar jedna kuglica, ako se:

a) kuglice **ne razlikuju** i kutije **ne razlikuju**,
b) kuglice **ne razlikuju** i kutije **razlikuju**,
c) kuglice **razlikuju** i kutije **ne razlikuju**,
d) kuglice **razlikuju** i kutije **razlikuju**.

Rešenje:

a) Postoje samo dve mogućnosti:

$$\underline{|\,0\,0\,0\,|}\;\underline{|\,0\,|}\;\underline{|\,0\,|} \qquad \text{i} \qquad \underline{|\,0\,0\,|}\;\underline{|\,0\,0\,|}\;\underline{|\,0\,|}.$$

b) **Prvi način:** Označimo 3 kutije koje se razlikuju sa P, Q i R. Postavimo u niz 5 kuglica koje se ne razlikuju. Zatim se na 4 moguća mesta između svake dve susedne kuglice postavlja najviše jedna od ukupno dve pregrade, tako da su kuglice levo do prve pregrade u kutiji P, kuglice između prve i druge pregrade su u kutiji Q i kuglice desno od druge (poslednje) pregrade su u kutiji R, tj.

$$o|o|ooo, \qquad o|oo|oo, \qquad o|ooo|o, \qquad oo|o|oo, \qquad oo|oo|o, \qquad ooo|o|o.$$

Od 4 mesta između susednih kuglica dva mesta se mogu odabrati na $\binom{4}{2}=6$ načina. To su kombinacije bez ponavljanja od 4 elementa druge klase.

Drugi način: To su kombinacije sa ponavljanjem od tri elementa P,Q i R pete klase u kojima se svaki element pojavljuje bar jednom, tj.

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\PQRRR\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\PQQRR\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\PQQQR\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\PPQRR\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\PPQQR\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\PPPQR\end{pmatrix}\quad \text{i ima ih 6.}$$

Treći način: Neka je p broj kuglica u kutiji P, q broj kuglica u kutiji Q i r broj kuglica u kutiji R. Tada po uslovu zadatka važi

$$\Big(p,q,r\in\{1,2,3,4,5\}\wedge p+q+r=5\Big)\Leftrightarrow(p,q,r)\in\{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}=M.$$

Kako je $|M|=6$ broj elemenata skupa M, to rezultat u ovom slučaju jeste 6.

c) Rezultat je broj svih particija skupa $A=\{1,2,3,4,5\}$ na tri neprazna podskupa, tj. broj svih tročlanih skupova čiji elementi su neprazni podskupovi skupa od 5 elemenata koji su međusobno disjunktni i čija unija je jednaka skupu A, koji se zove Stirlingov broj S_3^5. Postoje samo dva tipa ovih particija prema broju elemenata u podskupovima i to su 113 i 122. Prvih ima 10, a drugih 15, tj. $S_3^5=\binom{5}{3}+\binom{5}{2}\binom{3}{2}\frac{1}{2!}=10+15=25$. Te particije su:

$\Big\{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\Big\},\Big\{\{1\},\{3\},\{2,4,5\}\Big\},\Big\{\{1\},\{4\},\{2,3,5\}\Big\},\Big\{\{1\},\{5\},\{2,3,4\}\Big\},$
$\Big\{\{2\},\{3\},\{1,4,5\}\Big\},\Big\{\{2\},\{4\},\{1,3,5\}\Big\},\Big\{\{2\},\{5\},\{1,3,4\}\Big\},$
$\Big\{\{3\},\{4\},\{1,2,5\}\Big\},\Big\{\{3\},\{5\},\{1,2,4\}\Big\},$
$\Big\{\{4\},\{5\},\{1,2,3\}\Big\},$
$\Big\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\Big\},\Big\{\{1\},\{2,4\},\{3,5\}\Big\},\Big\{\{1\},\{2,5\},\{3,4\}\Big\},$
$\Big\{\{2\},\{1,3\},\{4,5\}\Big\},\Big\{\{2\},\{1,4\},\{3,5\}\Big\},\Big\{\{2\},\{1,5\},\{3,4\}\Big\},$
$\Big\{\{3\},\{1,2\},\{4,5\}\Big\},\Big\{\{3\},\{1,4\},\{2,5\}\Big\},\Big\{\{3\},\{1,5\},\{2,4\}\Big\},$
$\Big\{\{4\},\{1,2\},\{3,5\}\Big\},\Big\{\{4\},\{1,3\},\{2,5\}\Big\},\Big\{\{4\},\{1,5\},\{2,3\}\Big\},$
$\Big\{\{5\},\{1,2\},\{3,4\}\Big\},\Big\{\{5\},\{1,3\},\{2,4\}\Big\},\Big\{\{5\},\{1,4\},\{2,3\}\Big\}.$

d) **Prvi način:** Rešićemo pomoću formule uključenja-isključenja koja glasi:

$$|B_1\cup B_2\cup B_3|=|B_1|+|B_2|+|B_3|-|B_1\cap B_2|-|B_1\cap B_3|-|B_2\cap B_3|+|B_1\cap B_2\cap B_3|,$$

tj. pomoću njenog specijalnog slučaja za

$$|B_1|=|B_2|=|B_3|=a_1,\qquad |B_1\cap B_2|=|B_1\cap B_3|=|B_2\cap B_3|=a_2,\qquad |B_1\cap B_2\cap B_3|=a_3.$$

Dakle,

$$|B_1\cup B_2\cup B_3|=3a_1-3a_2+a_3=\binom{3}{1}a_1-\binom{3}{2}a_2+\binom{3}{3}a_3.$$

Neka je $\{1,2,3,4,5\}$ skup kuglica, $\{P,Q,R\}$ skup kutija i neka je B_1 skup raspoređivanja u kojima je kutija P prazna, B_2 skup raspoređivanja u kojima je kutija Q prazna, a B_3 skup raspoređivanja u kojima je kutija R prazna. Tada je $B_1\cup B_2\cup B_3$ skup raspoređivanja u kojima je bar jedna kutija prazna, a komplement tog skupa, $\overline{B_1\cup B_2\cup B_3}$ je skup svih raspoređivanja u kojim nijedna kutija nije prazna, tj. skup raspoređivanja u kojima nema praznih kutija.
S obzirom na to da je

$$|B_1|=|B_2|=|B_3|=a_1=2^5,\qquad |B_1\cap B_2\cap B_3|=a_3=0,\qquad |B_1\cap B_2|=|B_1\cap B_3|=|B_2\cap B_3|=a_2=1,$$

a broj svih mogućih raspoređivanja bez ikakvih ograničenja je 3^5, sledi da je

$$|\overline{B_1\cup B_2\cup B_3}|=3^5-|B_1\cup B_2\cup B_3|=3^5-3a_1+3a_2-a_3=3^5-3\cdot 2^5+3\cdot 1=150.$$

Drugi način: Posmatrajmo sve tročlane particije skupa $\{1,2,3,4,5\}$ navedene u rešenju dela zadatka pod c). U svakoj od tih 25 particija, svakom podskupu je pridružena jedna od kutija P,Q,R, tj. u kutiji P se nalaze kuglice iz podskupa koji joj je pridružen, itd. Kako se kutije razlikuju, to je redosled pridruživanja tih podskupova kutijama P,Q,R bitan, pa za svaku od 25 mogućnosti postoji $3! = 6$ raspoređivanja kutija, tj.

$$PQR, \quad PRQ, \quad QPR, \quad QRP, \quad RPQ, \quad RQP.$$

Prema tome, traženi broj je

$$25 \cdot 6 = S_3^5 \cdot 3! = \left(\binom{5}{3} + \binom{5}{2}\binom{3}{2}\frac{1}{2!} \right) 3! = (10+15)\cdot 3! = 150.$$

Treći način: Traženi broj je broj svih sirjektivnih funkcija skupa kuglica $A = \{1,2,3,4,5\}$ na skup kutija $B = \{P,Q,R\}$, a to su sve permutacije sa ponavljanjem od sledećih 6 navedenih rasporeda:

$$PQRPP, \quad PQRQQ, \quad PQRRR, \quad PQRPQ, \quad PQRPR, \quad PQRQR$$

kojih redom ima

$$\frac{5!}{3!}, \quad \frac{5!}{3!}, \quad \frac{5!}{3!}, \quad \frac{5!}{2!2!}, \quad \frac{5!}{2!2!}, \quad \frac{5!}{2!2!},$$

čiji zbir je $3 \cdot \frac{5!}{3!} + 3 \cdot \frac{5!}{2!2!} = 150$. Svaki od elemenata P,Q,R je morao da se pojavi u svakoj permutaciji bar jednom.

Svaki zadatak vredi maksimum 6 bodova. **KATEDRA ZA MATEMATIKU**