TREĆA GLAVA

3. KOMBINATORIKA

3.1 PREBROJAVANJE KONAČNIH SKUPOVA

Svako preslikavanje skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ na sebe samog je *permutacija* tog skupa.

Skup od n elemenata ima $1 \cdot 2 \cdots n = n!$ permutacija (čita se "en faktorijel").

Ako među elementima $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ima α jednakih među sobom, $\alpha \in N$, onda imamo *permutacije s ponavljanjem.* Njih ima $\dfrac{n!}{\alpha!}$.

Ako od n elemenata ima više grupa jednakih, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \leq n)$ broj permutacija je $\dfrac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \ldots \alpha_k!}$.

Svaki neprazan podskup skupa $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ je *kombinacija* elemenata ovog skupa.

Kombinacije skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ koje se sastoje od k elemenata, $k \leq n$, nazivaju se kombinacijama k-te klase od n elemenata. Njih ima $\dbinom{n}{k}$, čita se: "*en nad ka*", a to iznosi: $C_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Izraz $\dbinom{n}{k}$ je tzv. *binomni koeficijent* i važi jednakost $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.

Permutovanjem kombinacija dobijamo *varijacije bez ponavljanja.* Njih ima $V_n = \dbinom{n}{k} \cdot k! = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Permutacije, kombinacije i varijacije se nazivaju i *rečima* od elemenata skupa.

Varijacije k-te klase u kojima svaki elemenat može da se pojavi najviše k puta, nazivaju se varijacije *k-te klase s ponavljanjem.* Varijacija s ponavljanjem k-te klase od n elemenata ima: n^k.

Dva rasporeda za "okruglim stolom" su različiti ako makar jedan učesnik ima različitog levog ili desnog suseda.

Oko "okruglog stola" n osoba se mogu rasporediti na $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$ načina.

△ **116.** Načiniti sve permutacije od:
a) reči *RAK*; b) reči *RODA*; c) cifara 0, 1, 2, 3.

△ **117.** Koliko se četvorocifrenih brojeva sa različitim ciframa može načiniti od cifara: a) 1, 2, 3, 4; b) 0, 1, 2, 3; c) 0, 1, 2, 3, 4?.

△ **118.** Po dnevnom školskom rasporedu danas su predviđeni sledeći časovi: engleski jezik, istorija, matematika, fizika i biologija. Na koliko različitih načina je moguće načiniti dnevni raspored, ako je za danas predviđeno:
a) jedan čas matematike; b) dva časa matematike?

□ **119.** Koliko permutacija od elemenata 1, 2, 3, 4, 5, 6, počinje sa:
a) 5, b) 123; c) tri parne cifre?

△ **120.** U koliko se permutacija elemenata a, b, c, d, e elementi a i e nalaze na krajevima (na prvom i na poslednjem mestu)?

□ **121.** Tri bele kuglice (numerisane sa 1, 2, 3) i četiri crne (numerisane sa 4, 5, 6, 7) treba nanizati, tako da se boje slažu naizmenično. Na koliko se načina to može učiniti?

□ **122.** Po pet različito numerisanih belih, plavih, crvenih i žutih kuglica treba nanizati, tako da bilo koje četiri uzastopne kuglice budu različite boje. Na koliko načina je ovo moguće izvesti?

□ **123.** Napisati sve permutacije od elemenata $a\ a\ b\ b\ c$.

△ **124.** Napisati sve šestocifrene brojeve sa ciframa 111222.

△ **125.** Koliko različitih petocifrenih brojeva možemo napisati od cifara 1, 2, 2, 2, 3?

□ **126.** Na koliko raznih načina možemo rasporediti za okruglim stolom 4 dečaka i 4 devojčice, tako da svaka dva suseda budu različitih polova?

□ **127.** Koliko ima sedmocifrenih brojeva napisanih ciframa 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3?

□ **128.** Koliko permutacija od elemenata 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4 počinje sa:
a) 22; b) 313; c) 1234?

□ **129.** Na koliko načina se mogu rasporediti u niz 4 crvene i 4 plave kuglice, tako da ne postoje tri uzastopne kuglice iste boje?

△ **130.** Načiniti sve kombinacije sa tri člana, čiji su elementi samoglasnici.

△ **131.** U razredu ima 28 učenika. Treba izabrati 3 učenika u rukovodstvo razredne zajednice. Na koliko načina je moguće izvršiti izbor rukovodstva?

△ **132.** U razredu ima 18 dečaka i 10 devojčica. Treba izabrati 2 dečaka i 1 devojčicu u rukovodstvo razredne zajednice. Na koliko je načina moguće izabrati rukovodstvo?

□ **133.** Na jednoj proslavi svih 20 učesnika rukovali su se međusobno. Koliko je bilo ukupno rukovanja?

□ **134.** Dušan je slavio rođendan i pozvao drugove i drugarice. Svi gosti su se rukovali sa Dušanom i međusobno. Jedan od gostiju prebrojao je sva rukovanja i utvrdio da je bilo 120 rukovanja. Koliko je gostiju imao Dušan?

△ **135.** Koliko se različitih trouglova može dobiti spajanjem temena proizvoljnog sedmougla?

□ **136.** Škola je raspisala konkurs za prijem 2 profesora matematike i 2 profesora engleskog jezika i za 3 radnika u računovodstvu. Na konkurs su se prijavili: 4 profesora matematike, 5 profesora engleskog jezika i 7 ekonomista za rad u računovodstvu. Na koliko različitih načina škola može izvršiti izbor radnika po konkursu?

○ **137.** Na polici su složene 4 plave, 3 crvene i 5 žutih knjiga, i to tako da su knjige iste boje jedna do druge. Na koliko načina se mogu rasporediti ove knjige?

○ **138.** U stroju su raspoređena 4 dečaka i 3 devojčice, ali tako da devojčice ne budu jedna do druge. Koliko se različitih rasporeda može izabrati?

○ **139.** Raspolažemo sa 6 različitih osnovnih boja. Ove boje možemo mešati uzimajući jednake količine osnovnih boja. Na taj način dobijamo još izvestan broj novih boja. Može li se ovim bojama premazati šahovska tabla, tako da svako njeno polje bude različito obojeno?

□ **140.** Od 10 ljudi treba izabrati delegaciju za kongres. Na koliko različitih načina to možemo učiniti?

○ **141.** Koliko različitih delilaca ima broj:
a) 20; b) 36; c) 210; d) $p_1 \cdot p_2 \dots p_k$, gde su $p_1, p_2, \dots, p_k$ različiti prosti brojevi.

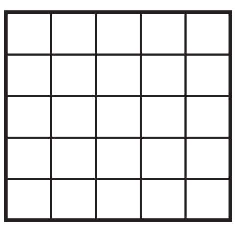
○ **142.** Od 20 karata za igru 4 su dame. Na koliko načina možemo prepoloviti ovaj špil karata i da pri tome u svakoj polovini karata budu po 2 dame?

△ **143.** Učionica ima pet prozora. Redari su zaduženi da otvaraju prozore radi provetravanja, svakog dana na drugi način. Svakog dana otvoren je najmanje jedan prozor. Koliko dana uzastopno je moguće otvarati prozore, a da se ne ponovi neka ranija kombinacija?

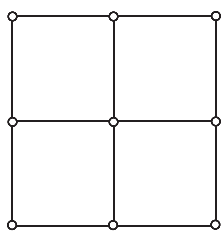
□ **144.** Dvoje filatelista menjaju marke. Prvi je spreman da menja četiri marke, od kojih svaka vredi 20 din. Drugi je spremio za menjanje pet maraka i svaka vredi po 10 din. Za svaku marku, dakle, prvi filatelista dobija u zamenu dve marke od drugog. Na koliko načina oni mogu da se menjaju?

□ **145.** a) Kvadrat stranice 5 cm podeljen je na kvadratne centimetre, sl. 17. Koliko pravougaonika možemo uočiti na ovoj slici? Koliko je među njima kvadrata?

b) Koliko se kvadrata može uočiti na šahovskoj tabli (sa 64 polja)?



Sl. 17



Sl. 18

○ **146.** Paralelogram je presečen sa dva skupa od po m pravih. Jedan skup je paralelan dvema stranicama, a drugi je paralelan drugim dvema stranicama paralelograma. Koliko se različitih paralelograma može uočiti na dobijenoj slici?

○ **147.** Od 12 srećaka lutrije, među kojima 4 dobijaju, kupujemo 6. Na koliko načina možemo u ovih 6 srećaka izvući bar jedan dobitak?

○ **148.** Trideset ljudi treba podeliti na tri grupe po deset ljudi. Koliko može biti različitih sastava grupa?

○ **149.** Četiri učenice su kupile osam bluza, svaka po dve. Na koliko su načina mogle da obave kupovinu ovih osam bluza?

○ **150.** Devet različitih predmeta treba podeliti na tri lica, i to jednom 2 predmeta, drugom 3 predmeta i trećem 4 predmeta. Na koliko raznih načina to možemo učiniti?

○ **151.** Lift u kom se nalaze jedan čovek, jedna žena i jedno dete može da se zaustavi na deset nivoa. Svaki od putnika izlazi na različitim spratovima. Na koliko se raznih načina može isprazniti lift? (Redosled zaustavljanja lifta je proizvoljan).

$*$ **152.** Na polici se nalazi 15 knjiga. Na koliko načina je moguće izabrati 6 knjiga, tako da nikoje dve od izabranih nisu na polici bile jedna do druge? Nije dozvoljeno menjati prvobitni raspored knjiga na polici.

$*$ **153.** U ravni je dato 9 tačaka koje su raspoređene kao na sl. 18. Koliko postoji trouglova kojima je jedno teme fiksiramo, a ostala dva biramo među osam preostalih tačaka?

△ **154.** Koliko se četvorocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ako:

a) u svakom broju sve su cifre različite;

b) mogu da se ponavljaju cifre.

△ **155.** Pomoću cifara: 0, 1, 2, 3, 6, 8, 9, treba napisati sve četvorocifrene brojeve u čijem zapisu postoje tačno dve nule, zapisane jedna do druge (na primer 2006, 8400 i sl.). Koliko ima takvih brojeva?

□ **156.** Od cifara 1, 2, 3, 4, 5 treba sastaviti sve petocifrene brojeve sa različitim ciframa kod kojih se cifre 1, 2, 3 nalaze jedna uz drugu:

a) poređane po veličini; b) u proizvoljnom rasporedu.

Koliko ima ovakvih brojeva? Koliko je među njima takvih brojeva, kod kojih se cifre 4 i 5 nalaze ispred ostalih?

△ **157.** Na koliko načina mogu istovremeno šest lica da se smeste na šest, od devet pričvršćenih stolica?

△ **158.** Od cifara 0, 1, 3, 5, 7, 9 načinjeni su petocifreni brojevi sa pet različitih cifara koji nisu deljivi sa 10. Koliko ima takvih brojeva?

□ **159.** Koliko ima šestocifrenih brojeva sa različitim ciframa kojima su tri cifre parne, a tri neparne?

○ **160.** Koliko različitih desetocifrenih brojeva možemo napisati pomoću cifara 1, 2, 3, a da se cifra 3 upotrebi ravno dva puta?

△ **161.** Koliko se trocifrenih brojeva završava cifrom 4?

△ **162.** Koliko četvorocifrenih brojeva počinje cifrom 9?

△ **163.** Koliko petocifrenih brojeva ima zbir cifara 3?

△ **164.** Koliko se četvorocifrenih, a koliko petocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara 0, 3, 6?

△ **165.** Koliko šestocifrenih brojeva počinje cifrom 7, a završava se cifrom 2? Koliko je među njima brojeva sa šest različitih cifara?

□ **166.** Od cifara 0, 1, 3, 5, 7 načinjeni su četvorocifreni brojevi sa različitim ciframa. Koliko je među njima deljivih sa 5?

□ **167.** Koliko različitih trocifrenih brojeva možemo sastaviti izostavljajući jednu od cifara: 1, 2, 2, 3 i permutovanjem preostalih?

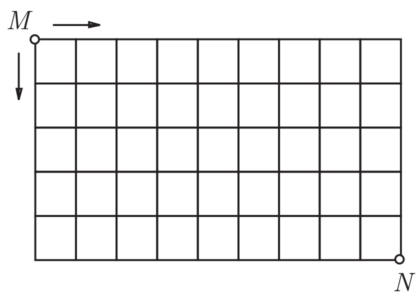
∗ **168.** Igraju se četiri košarkaške utakmice (utakmica se u košarci uvek završava pobedom jednog tima. U svakoj koloni listića sportske kladionice predviđaju se ishodi sve četiri utakmice. Koliko kolona najmanje treba popuniti da bi se sigurno bar u jednoj koloni pogodilo ne manje od tri ishoda?

∗ **169.** Poznato je da krokodil ima 68 zuba. Dokazati da među 16^{17} krokodila ne moraju da postoje dva sa istim rasporedom zuba.

○ **170.** Na koliko različitih načina možemo obojiti 6 strana kocke sa 6 raznih boja? Bojenje dveju kocki smatramo različitim, ako obrtanjem jedne kocke ne možemo dobiti raspored obojenih stranice istovetan sa drugom kockom.

∗ **171.** Za okrugli sto seli su 1. januara 5 državnika iz pet zemalja. Dogovarali su se o važnim stvarima i zasedali su svakog dana, ali svaki put u drugom rasporedu. Savetovanje je završeno onog dana, kada su iscrpene sve mogućnosti različitog raspoređivanja državnika. Kada je to bilo?

∗ **172.** Iz tačke M u tačku N, na sl. 19, može se stići idući po horizontalnim i vertkalnim linijama u smeru strelice. Na koliko načina je to moguće izvesti?



Sl. 19

○ **173.** Goran je dužan da u toku tri dana zasadi deset stabala, tako da svakog dana zasadi bar jedno drvo. Na koliko načina Goran može da rasporedi posao?

○ **174.** U pekari se prodaju pogačice, kifle, đevreci i krofne. Na koliko načina možemo kupiti sedam komada peciva?

○ **175.** Za okruglim stolom kralja Artura sedi 12 vitezova. Svaki od njih je u svađi sa svojim susedom. Treba izabrati 5 vitezova, da oslobode zarobljenu princezu. Na koliko se načina to može učiniti, tako da su među izabranim vitezovima svi među sobom u slozi?

○ **176.** Ogrlica u obliku zatvorenog lanca, načinjena je od numerisanih alki, i to 5 srebrnih i 5 platinskih. Ove alke su povezane naizmenično, tako da su svake dve uzastopne alke od različitih metala.

a) Na koliko raznih načina može biti načinjena ova ogrlica?

b) Koliko je različitih ogrlica ako alke nisu numerisane?

c) Koliko je različitih ogrlica ako ima 20 srebrnih i 20 platinskih nenumerisanih alki. (Nenumerisane alke od istog metala se ne razlikuju međusobno).

$*$ **177.** Mreža autobuskih linija u gradu formirana je na sledeći način: 1° Od svake stanice do ma koje druge stanice može se doći bez presedanja. 2° Ma za koji par linija A i B postoji jedna stanica na kojoj se može preći s jedne linije na drugu. 3° Na svakoj liniji postoje tačno tri stanice. Koliko linija ima u gradu?

$*$ **178.** Na jednom takmičenju učestvuje pet lica: A, B, C, D, E. Jedno lice je unapred dalo prognozu plasmana: $ABCDE$, ali nije pogodilo mesto ni jednog učesnika, niti je pogodilo međusobni poredak bilo koje dvojice učesnika koji su zauzeli dva uzastopna mesta. Drugo lice je prognoziralo plasman $DAECB$ i tačno je pogodilo mesta dvojice učesnika i za dva para učesnika pogodilo je njihov međusobni poredak. Kakav je bio tačan redosled takmičara?

$*$ **179.** Svaki grad u nekoj državi je povezan direktnim avionskim linijama sa tri druga grada. Iz svakog grada se može leteti u bilo koji drugi grad sa najviše jednim presedanjem. Koliko najviše gradova može biti u toj državi?

○ **180.** Grad ima 2000 raskršća, a u svakom od njih sastaju se po tri ulice. Postoji autobuska linija, koja prolazi kroz svako raskršće tačno jedanput. Odlučeno je da se u svakoj ulici zasade stabla samo jedne od ovih vrsta drveća: kesten, breza i lipa. Dokazati da je to moguće učiniti tako da se u svakom raskršću sastaju tri drvoreda različitih vrsta.