РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Глава I – Логика и скупови

1. Тачне су формуле: а), г), ђ).

2. а), б), в), г), д) и е) су искази, од којих су а) и в) тачни; ђ) - није исказ.

3. а) $\perp$; б) $\top$; в) $\perp$; г) $\top$; д) $\perp$; ђ) $\top$; е) $\top$; ж) $\perp$; з) $\top$; и) $\perp$.

4. а) $\tau(p) = \perp, \tau(q) = \top, \tau(F) = \top$; б) $\tau(p) = \top, \tau(q) = \perp, \tau(F) = \top$;

5. а) $\Leftrightarrow$; б) $\Leftarrow$; в) $\Leftrightarrow$; г) $\Leftrightarrow$; д) $\Leftrightarrow$; ђ) $\Leftrightarrow$; е) $\Rightarrow$; ж) $\Rightarrow$; з) $\Leftrightarrow$; и) $\Leftrightarrow$; ј) $\Leftarrow$; к) $\Leftrightarrow$.

6. а) неопходно, довољно; б) довољно; в) довољно; г) неопходно.

7. а) $x \in \{1, 2, 3\}$; б) $x \in \{1, 2, 3\}$; в) $x \in \{3, 4, ..., 9\}$; г) $x \in \{2, 3, ..., 9\}$; д) $x \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$; ђ) $x \in \{2, 3, ..., 9\}$; е) $x \in \{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$; ж) $x = 3$; з) $x \in \{2, 3, 4, 5\}$; и) $x \in \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$.

8. а)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$

б), в) су таутологије

г)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \Rightarrow \neg q)$	$(q \Rightarrow \neg p)$	$\Leftrightarrow$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

9.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p \Leftrightarrow q$	$\neg p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$

а) Ако је $p \Rightarrow q$ тачно, а $p \Leftrightarrow q$ лажно, тада p мора бити $\perp$, а q-$\top$, па је $q \Rightarrow p$ - лажно.
б) Из таблице се види да ако је $p \Leftrightarrow q$ тачно, тада је $\neg p \Leftrightarrow q$ - лажно, а $q \Rightarrow p$ - тачно, док $\neg p \Rightarrow q$ може бити тачно или лажно.

10. Таутологије су формуле: в), ђ) и е).

11. Таутологије су формуле: б), в), г), и е).

13. а) Формула има вредност $\perp$ само ако је $\tau(p \wedge (p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r))) = \top$ и $\tau(q \Rightarrow (s \vee t)) = \perp$, одакле је $\tau(q) = \top$, $\tau(s) = \tau(t) = \perp$, $\tau(p) = \top$, $\tau(p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r)) = \top$. Ово је немогуће јер из $\tau(q) = \top$, $\tau(p) = \top$, следи $\tau(p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r)) = \perp$. Дакле, формула је таутологија.

14. Да је дата формула таутологија лако се доказује применом таблице. Означимо, сада, са p исказ: "a^2 је паран број" и са q исказ: "a је паран број". Очигледно је да $\neg q \Rightarrow \neg p$ (ако је a непаран број, онда је и a^2 непаран број). На основу таутологије ће, дакле, бити тачно $p \Rightarrow q$.

15. Упутство: применити таутологију $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, при чему је p: "$x + y \neq 5$", а q: "$x \neq 1 \vee x \neq 4$". Тада ће $\neg q$ бити исказ $\neg(x \neq 1 \vee x \neq 4) \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = 4$. (Примена таутологије $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$).

16. б) $x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq 1$

18. Таква је, на пример формула $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$.

19. а) На пример $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ или само $\neg q$.
б) На пример $\neg[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$ или $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$ или само q.

20. Све такве формуле x су еквивалентне формули $p \Leftrightarrow q$ јер је $(p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)) \Leftrightarrow q$.

21. а) Тачно; б) тачно; в) нетачно; г) тачно; д) нетачно; ђ) нетачно; е) нетачно; ж) тачно.

22. а) Формула има значење: од сваког природног броја постоји већи и тачна је; б) тачно; в) нетачно; г) тачно; д) тачно.

23. а) Нетачно - на пример за $x = 0$, $y \neq 0$; б) нетачно - на пример за $x = y = 0$; в),г),д) су тачне формуле; ђ) је нетачна формула.

24. а) $(\exists x)(x \neq 0)$; б) $(\forall x)(x^2 \geq 0)$; в) $(\exists x)(x \cdot 0 \neq 0)$; г) $\neg(\exists x)(x \in \mathbf{Z} \wedge x + 5 > 0) \Leftrightarrow (\forall x)\neg(x \in \mathbf{Z} \wedge x + 5 > 0) \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin \mathbf{Z} \vee x + 5 \leq 0) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x + 5 \leq 0)$; д) $(\forall x)(x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \leq 0)$; ђ) $(\exists x)(x \in \mathbf{N} \wedge x \notin \mathbf{Z})$.

25. а) $x|z \ \wedge\ y|z \ \wedge (\forall u)(x|u \ \wedge y|u \ \Rightarrow\ z|u)$; б) $(\exists y)(y \in \mathbf{Z} \ \wedge\ x = y^2)$;
в) $\neg(\exists x)(\exists y)(x^2 = 0 \ \wedge\ y^2 = 0 \ \wedge\ x \neq y)$, или $(\forall x)(\forall y)(x^2 = 0 \ \wedge\ y^2 = 0 \ \Rightarrow\ x = y)$;
г) $(\exists x)(x^2 = 0 \ \wedge (\forall y)(y^2 = 0 \ \Rightarrow\ x = y)$;
е) $(\forall x \in \mathbf{Q})(\forall y \in \mathbf{Q})(\exists z \in \mathbf{Q})(x \neq y \ \Rightarrow (x < z < y \ \vee\ y < z < x))$.

26. $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$, $A \cap B = \{a, c\}$, $A \setminus B = \{b, d\}$.

27. а) $\{m, p, q\}$; б) $\{m, n, p, q, r\}$, в) $\emptyset$.

28. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D = \{2, 3, 5, 7\}$. а) $\{-2, -1, 0\}$; б) $\{-2, -1, 0, 1, 4, 6, 12\}$; в) $\{1\}$; г) $\emptyset$; д) $\{1, 2, 3\}$; ђ $\{-4, -3, 3, 4\}$; е) $\{1\}$; ж) $\{4\}$.

29. Пошто елементи d, h и i припадају скупу $B \cap X$, а не припадају скупу B, то они морају припадати скупу X. Елементи c и d припадају скупу $A \cup X$, па морају припадати скупу X. Дакле, $X = \{c, d, h, i\}$. Очигледно је да, осим ових елемената скуп X не садржи ниједан други елемент.

30. $X = \{3, 4, 6\}$.

31. $A = (-\infty, 1)$, $B = [3, +\infty)$, $A \cap \mathbf{N} = \emptyset$, $B \cap \mathbf{N} = \{3, 4, 5, ...\}$.

32. а) $(1, 3]$; б) $(-5, 4)$; в) $(-\infty, 3)$; г) $(-2, -1)$; д) $(-2, -1) \cup (1, 2)$; ђ) $(0, 4] \cup (7, 9]$; е) $(-5, 5]$; ж) $[-1, 0] \cup (2, 3)$.

33. а) $P(A) = \{\emptyset, A\}$; б) $P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, B\}$;
в) $P(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, C\}$.

34. а) $x = 1$, или $x = \{1\}$, или $x = \{1, \{1\}\}$;
б) $x = \emptyset$, или $x = \{1\}$, или $x = \{\{1\}\}$, или $x = \{\{1, \{1\}\}\}$, или $x = \{1, \{1\}\}$, или $x = \{1, \{1, \{1\}\}\}$, или $x = \{\{1\}, \{1, \{1\}\}\}$, или $x = a$.

35. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A \cap B = \{1\}$, $B \setminus C = \emptyset$, $B \cup C = C$, $(B \cap C) \cup (A \setminus C) = \{-1, 0, 1, 3, 4, 5, 6\}$.

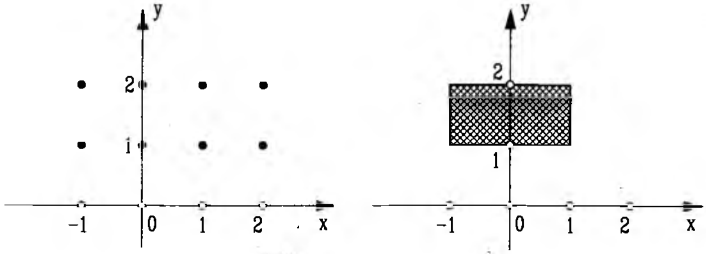
36. а) $x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A$ - користили смо таутологију $p \vee p \Leftrightarrow p$.
е) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - користили смо таутологију $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, при чему је p - $x \in A$, q - $x \in B$ и r - $x \in C$.
л) $x \in A \cap A' \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A' \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A) \Leftrightarrow \bot \Leftrightarrow x \in \emptyset$;

њ) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B$.

37. а) Најпре треба доказати таутологију $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$, па ће на основу ње бити $x \in A \cup (A' \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee (\neg(x \in A) \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B$.

38. а) $x \in \emptyset \setminus A \Leftrightarrow x \in \emptyset \wedge x \notin A \Leftrightarrow \perp \Leftrightarrow x \in \emptyset$;
в) Доказати таутологију $p \wedge \neg(q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg r)$;
е) Доказати таутологију $(p_1 \vee p_2) \wedge \neg(q_1 \vee q_2) \Rightarrow (p_1 \wedge \neg q_1) \vee (p_2 \wedge \neg q_2)$.

39. $A \times B = \{(a,\, x), (a,\, y), (b,\, x), (b,\, y), (c,\, x), (c,\, y)\}$,
$B \times A = \{(x,\, a), (x,\, b), (x,\, c), (y,\, a), (y,\, b), (y,\, c)\}$,
$A \times A = \{(a,\, a), (a,\, b), (a,\, c), (b,\, a), (b,\, b), (b,\, c), (c,\, a), (c,\, b), (c,\, c)\}$,
$B \times B = \{(x,\, x), (x,\, y), (y,\, x), (y,\, y)\}$.



Сл. уз зад. 40

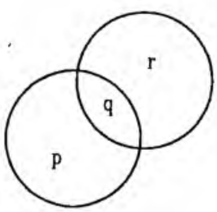
40. Види слику.

41. $A = \{m,\, n,\, p\}$, $B = \{0,\, 1\}$.

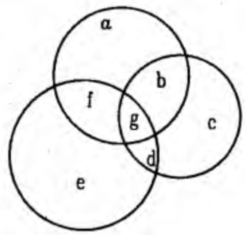
42. а) $E_1 \cap E_2 = \{(x,\, y) | x,\, y \in \mathbf{N}, x+2y = 10 \wedge x+y = 3\} = \{(x,\, y) | x,\, y \in \mathbf{N}, x = -4 \wedge y = 7\} = \emptyset$,
$E_1 \cup E_2 = \{(x,\, y) | x,\, y \in \mathbf{N}, x+2y = 10 \vee x+y = 3\} = \{(2,\, 4), (4,\, 3), (6,\, 2), (8,\, 1), (1,\, 2), (2,\, 1)\}$,
$E_1 \times E_2 = \{(2,\, 4,\, 1,\, 2), (2,\, 4,\, 2,\, 1), (4,\, 3,\, 1,\, 2), (4,\, 3,\, 2,\, 1), (6,\, 2,\, 1,\, 2), (6,\, 2,\, 2,\, 1), (8,\, 1,\, 1,\, 2),$
$(8,\, 1,\, 2,\, 1)\}$;
б) $E_1 = \{(2,\, 2)\}$, $E_2 = \{(1,\, 2), (3,\, 1)\}$ итд.

43. а) $(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow (x,\, y) \in A \times C \,\vee\, (x,\, y) \in B \times C$. Овде смо користили таутологију $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$. Слично се доказују и тврђења б)-ђ).

44. Означимо са p број елемената првог скупа, који не припадају другом, са q број елемената у пресеку и са r број елемената другог скупа, који не припадају првом. Тада је (в. сл.) $p+q+r = 15$ и $p+q = 8$, одакле је $r = 7$, а број елемената другог скупа је $r+q = 12$.



Сл. уз зад. 44



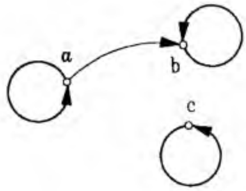
Сл. уз зад. 45

45. Ако означимо са a број преводилаца, који говоре само руски, c - само француски, e - само енглески, b - руски и француски, f - руски и енглески, d - енглески и француски и g - сва три језика, имаћемо (в. сл.) $a+b+c+d+e+f+g = 52$, $a+b+g+f = 20$, $b+c+g+d = 19$, $f+g+d+e = 35$, $f+g = 11$, $g+b = 7$, $g+d = 9$, одакле се налази
а) $g = 5$; б) $a = 7$.

46. 480.

47.

ρ	a	b	c
a	$\top$	$\top$	$\perp$
b	$\perp$	$\top$	$\perp$
c	$\perp$	$\perp$	$\top$



48. Није, јер није рефлексивна.

49. Како је $x\rho y \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 1$ на одговарајућем месту у таблици је $\top$, а на свим осталим местима $\perp$.

50. $\rho = \{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Ова релација није ни рефлексивна, ни симетрична, ни транзитивна.

51. а) симетричност; б) антисиметричност.

52. а) симетричност; б) рефлексивност, транзитивност.

53. а)

ρ	0	1	2	3
0	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
1	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
2	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Релација ρ није рефлексивна, јесте симетрична, није антисиметрична (на пр. $1\rho 0 \wedge 0\rho 1 \wedge 0 \neq 1$)) и није транзитивна (на пр. $1\rho 0 \wedge 0\rho 1 \wedge \neg(1\rho 1)$). б), в), г) релације су симетричне, нису ни рефлексивне, ни антисиметричне, ни транзитивне.

54. а), б) ρ је антисиметрична и транзитивна, није ни рефлексивна, ни симетрична.

55. Класе еквиваленције су: $C_{x+2=0} = \{x+2=0,\ 2x+4=0,\ 2x+2=-2\}$, $C_{x+1=0} = \{x+1=0,\ \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}\}$, $C_{x^2=4} = \{x^2=4\}$,

56. Класе еквиваленције су $C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{1, -1\}$, $C_2 = \{2, -2\}$, $C_3 = \{3, -3\}$, $C_4 = \{4, -4\}$, $C_5 = \{5, -5\}$.

57. а) јесу;
б) $f(f(a)) = f(b) = a$, $f(f(b)) = f(a) = b$, $f(f(f(d))) = f(f(c)) = f(d) = c$, $g(f(g(a))) = g(f(c)) = g(d) = d$, $g(g(c)) = g(a) = c$;
в) $x = b$.

58. а) $f(1) = 5$, $f(2) = 8$, $g(1) = 3$, $g(2) = 4$, $f(g(1)) = f(3) = 11$, $g(f(1)) = g(5) = 7$;
в) $f(2x) = 2 + 6x$, $g(3x) = 2 + 3x$, $g(f(x)) = 2 + 2 + 3x = 4 + 3x$, $f(g(x)) = 2 + 3(2 + x) = 8 + 3x$.

59. а) -1; б) $f(\frac{5}{6}) = \frac{2}{3}$; в) $f(2) = 3$; г) $f(\frac{7}{16}) = -\frac{1}{7}$; д) $f(\frac{16}{25}) = \frac{7}{25}$; ђ) $f(-\frac{1}{2}) = -2$; е) $f(x+1) = 2(x+1) - 1 = 2x + 1$; ж) $2x - 3$; з) $4x - 1$.

60. Пресликавања скупа $\{a, b\}$ у скуп $\{1, 2, 3\}$ су: $f_1 : \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f_2 : \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f_3 : \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f_4 : \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f_5 : \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $f_6 : \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f_7 : \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_8 : \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f_9 : \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
Пресликавања скупа $\{1, 2, 3\}$ у скуп $\{a, b\}$ има 8.

61. f је НА, али није 1-1.

62. а) $f(5) = 5$, $f(12) = 3$, $f(253) = 10$, $f(f(253)) = 1$;
б) решења има бесконачно много, то су сви природни бројеви, чији је збир цифара 5, на пример: 5, 104, 4001, 1002200, 32 итд ...
в) f је НА, али није 1-1.

63. а) Јесте и 1-1 и НА; б) није ни 1-1, ни НА; в) јесте и 1-1 и НА; г) није ни 1-1, ни НА; д) јесте и 1-1 и НА; ђ) није ни 1-1, ни НА.

64. $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$, $h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$;

$$j^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad k^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad l^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

65. а) Докажимо најпре да је f 1-1 пресликавање. Из $f(x_1) = f(x_2)$, тј. $7x_1 - 1 = 7x_2 - 1$ после додавања јединице и дељења две стране једнакости са 7, следи $x_1 = x_2$. Нека је сада y произвољан реални број. Из $y = 7x - 1$ следи $x = \dfrac{y+1}{7}$, па је тачна формула $(\forall y)(\exists x)(y = f(x))$. Пошто је f 1-1 и НА, то постоји инверзна функција f^{-1}. Да бисмо је одредили уочимо да треба да буде $f^{-1}(f(x)) = x$, тј. $f^{-1}(7x-1) = x$. Ако означимо $7x - 1 = t$, добијамо $x = \dfrac{t+1}{7}$, односно $f^{-1}(t) = \dfrac{t+1}{7}$. Дакле, инверзна функција функције f може се дефинисати са $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{7}$;

б) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$; в) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+2}{5}$; г) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{10}$; д) $f^{-1}(x) = 3x + \dfrac{1}{4}$; ђ) $f^{-1}(x) = 3x - 2$.

66. а) $f(x) = (x+1)^2$. Како је $f(x) \geq 0$ то функција није НА, а како је на пример $f(-2) = f(0) = 1$, то функција није ни 1-1. б) није НА, али јесте 1-1; в) није ни НА, ни 1-1.

67. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x+5) = 2(2x+5) + 5 = 4x + 15$, $(f \circ g)(x) = 10x + 11$, $(g \circ f)(x) = 10x + 28$, $(g \circ g)(x) = 25x + 18$.

68. $(f \circ g)(x) = 3 + 2x^2$, $(g \circ f)(x) = 2 + 4x + 4x^2$, $(g \circ g)(x) = 2 + 2x^2 + x^4$, $g^3(x) = 5 + 8x^2 + 8x^4 + 4x^6 + x^8$, $(f \circ g^3)(x) = 11 + 16x^2 + 16x^4 + 8x^6 + 2x^8$.

69. а) $(f \circ g)(0) = -1$, $(g \circ f)(1) = 0$, $(f \circ g)(x) = |x| - 1$, $(g \circ f)(x) = |x - 1|$, $(f \circ f)(x) = x - 2$, $(g \circ g)(x) = ||x|| = |x|$.

71. За $x = 2$ добијамо $f(2) + 3f(\frac{1}{2}) = 4$, а за $x = \frac{1}{2}$, добијамо $f(\frac{1}{2}) + 3f(2) = \frac{1}{4}$. Ако другу једначину помножимо са 3 и одузмемо од прве, добићемо $f(2) = -\dfrac{13}{32}$.

72. а) Нека је $\dfrac{3x-1}{x} = t$, одакле је $x = \dfrac{1}{3-t}$, $t \neq 3$, па је $g(t) = \dfrac{2}{3-t}$, тј. $g(x) = \dfrac{2}{3-x}$ $x \neq 3$; б) $f(x) = 2 - x$; в) $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

73. а) Уведимо смену $t = \dfrac{x}{2} - 3$. Тада је $x = 2t + 6$, па је $f(t) = 2t + 6 + 1 = 2t + 7$. Дакле, $f(x) = 2x + 7$. б) $f(x) = 3x - 5$; в) $f(x) = 5x - 1$; г) $f(x) = 7x + 2$;

74. а) Испред тројке може се налазити било који двоцифрени број, а њих има деведесет. б) 180.

75. 15.

76. Десет: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE и DE.

77. Осам.

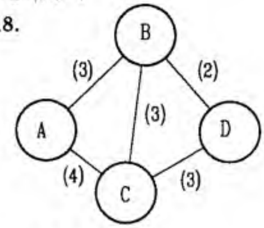
78. Првих четири путника могу се распоредити на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ начина, следећих троје на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ начина, а преосталих троје на $3 \cdot 2 = 6$ начина. Према томе, број могућих распореда једнак је $120 \cdot 60 \cdot 6 = 43200$. *Напомена.* Овај као и још неки задаци, могу се урадити применом формуле за број варијација без понављања k–те класе од n елемената: $V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. Тако је број распореда прва четири путника $V_5^4 = 120$, следећих троје $V_5^3 = 60$ и преосталих $V_3^2 = 6$.

79. Означимо са n број тачака. Под овим условима оне одређују $\dfrac{n(n-1)}{2}$ правих, па је $\dfrac{n(n-1)}{2} = 2n$, одакле налазимо да је $n = 0$ или $n = 5$. *Напомена.* У овом задатку, као и у неким сличним, може се применити формула за број комбинација (без понављања) k–те класе од n елемената: $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k!}$. Овде је број правих које одређују n тачака једнак $C_n^2 = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

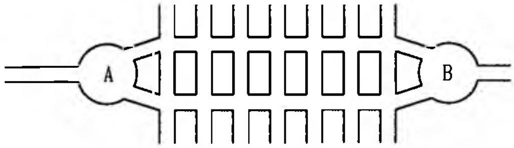
80. а) Двоцифрени завршеци могу бити 25 или 75 јер се цифре не могу понављати, па троцифрени завршеци могу бити само 025 или 075. У свакој од ових могућности "искоришћене" су по три цифре - преостају још седам цифара које се могу распоредити на 7! начина. Резултат: $2 \cdot 7!$

б) $3 \cdot 6 \cdot 6! + 2 \cdot 7!$.

81. $6 \cdot 3 = 18$.



Сл. уз зад. 82



Сл. уз зад. 83

82. Мрежа путева од A до D изгледа као на слици. Ако се иде путем $A-B-D$ тад има 6 путева, путем $A-C-D$ има 12 путева, ако се иде путем $A-B-C-D$ има $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, а $A-C-B-D$ $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ пута. Укупан број путева је $6 + 12 + 27 + 24 = 69$.

83. Почевши од трга A (в. сл.) и сваки пут када једносмерном улицом стигне на раскрсницу, возач може да бира два пута. Укупан број могућности је $2^8 = 256$.

84. Означимо са $|C|$ број елемената скупа C. Тада је $\max(|A|, |B|) \leq |A \cup B| \leq m + n$, $0 \leq |A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$, $0 \leq |A \setminus B| \leq n$; $0 \leq |B \setminus A| \leq m$, $|A \times B| = mn$.

85. 2^6 начина.

86. Први топ се може поставити на произвољно поље на $8^2 = 64$ начина. Други топ се може поставити на $7^2 = 49$ начина (на било које поље које није у истој врсти или колони у којој је први топ). Трећи топ се може поставити на $6^2 = 36$ начина итд. Тражени број начина је $8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2$.

87. Како је $2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$, сваки делилац броја 2400 је облика $2^x 3^y 5^z$, где је $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$. Пошто постоји 6 могућности за x, 2 за y и 3 за z, то постоји $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ различитих делилаца броја 2400.

88. $9 \cdot 10^3 = 9000$. **89.** $30^2 \cdot 10000 = 9 \cdot 10^6$. **90.** $6^3 = 216$. **91.** $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. **92.** 24.

93. Од 12 плавих тачака може се конструисати $\dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$ дужи и свака од њих се може комбиновати са 9 црвених тачака, тако да добијамо $66 \cdot 9 = 594$ троугла чија су два темена плава и једно црвено. Слично имамо $\dfrac{9 \cdot 8}{2} \cdot 12 = 432$ троугла чија су два темена црвена, а једно плаво. Дакле, укупан број троуглова код којих темена нису исте боје је $594 + 432 = 1026$.

94. Највише троуглова има ако су сваке три тачке са разних правих неколинеарне. Тада се троуглови добијау тако да им је основица на једној правој, а врх нека од преосталих десет тачака (таквих троуглова има $3 \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2} \cdot 10 = 300$) или тако да су им темена на различитим правим (таквих троуглова има $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$). Дакле, највећи могући број троуглова је $125 + 300 = 425$.

95. $\dfrac{12 \cdot 11}{2} \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 660$.

96. Квадратну мрежу 8×8 образује 9 хоризонталних и 9 вертикалних линија. Две хоризонталне и две вертикалне линије одређују правоугаоник. Дакле, правоугаоника има $\dfrac{9 \cdot 8}{2} \cdot \dfrac{9 \cdot 8}{2} = 1296$.

97. а) Столице "бирају" ђаке на $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$ начина; б) ђаци бирају столице на $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 19958400$ начина.

98. а) $5 \cdot 6^3 = 1080$; б) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$; в) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 360$; г) Ако је нула на последњем месту таквих бројева има $5 \cdot 4 \cdot 3$, а ако је на последњем месту петица $4 \cdot 4 \cdot 3$. Укупно, $5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 108$. *Напомена.* У примеру а) може се применити формула за број варијација са понављањем k–те класе од n елемената $\overline{V}_n^k = n^k$. Свих четвороцифрених бројева (укључујући и оне који почињу нулом) има $\overline{V}_6^4 = 6^4$, а од тог броја треба одузети оне који почињу нулом – њих има $\overline{V}_6^3 = 6^3$. Тражени број је $\overline{V}_6^4 - \overline{V}_6^3 = 6^4 - 6^3 = 1080$. Слично се може резоновати и у задатку 100, као и неким другим задацима.

99. Кандидати за прву цифру су 2, 4, 6 и 8, за другу 1, 3, 5, 7 и 9, за трећу 0, 3, 6 и 9, за четврту 2, 3, 5 и 7, за пету 4, 6, 8 и 9 и за шесту 0 и 5. Према томе, оваквих бројева има $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 2560$.

100. $2 \cdot 3^{99}$.

101. Долази у обзир 6 слова: А, Е, Ј, К, М и Т. Број могућности за таблице је $6 \cdot 1000000 = 6000000$.

102. Прва цифра се може изабрати на четири начина (2, 4, 6 или 8), друга на десет, а трећа на пет начина, па оваквих бројева има $4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$.

103. Књиге на руском се могу распоредити на $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ начина, на енглеском на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ и на француском на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ начина. Како има 6 могућих распореда по језицима (РЕФ, РФЕ, ЕРФ, ЕФР, ФРЕ, ФЕР), укупан број распореда је $5040 \cdot 6 \cdot 120 \cdot 6 = 21772800$.

104. Када се распореде парне цифре, три преостале непарне цифре се могу распоредити на $3! = 6$ начина. Постоји $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ могућности да се распореде парне цифре на прва три места (нула не може бити на првом месту), а по $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ могућности да се распореде од другог до четвртог, трећег до петог, или четвртог до шестог места. Стога је тражени број $6(4 + 6 + 6 + 6) = 132$.

105. а) Ако формула не би била таутологија, тада би за неке вредности искасних слова p, q, r морала имати истинитосну вредност $\perp$, а то је могуће само ако је $\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) = \top$ (1) и $\tau((r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)) = \perp$ (2).

Из (2) следи да је $\tau(r \Rightarrow p) = \top$ (3) и $\tau(q \Rightarrow p) = \perp$ (4),

а из (4) да је $\tau(p) = \perp$ и $\tau(q) = \top$.

Како је $\tau(p) = \perp$ из (3) следи да је $\tau(r) = \perp$, па је

$\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) = \tau((\perp \Rightarrow \top) \Rightarrow \perp) = \tau(\top \Rightarrow \perp) = \perp$,

што је у супротности са (1). Дакле, не постоје вредности за које би ова формула била нетачна, па је она таутологија.

ђ) Ако претпоставимо да формула није таутологија морало би бити $\tau(p_1 \Rightarrow p_2) = \tau(p_2 \Rightarrow p_3) = \cdots \tau(p_{n-1} \Rightarrow p_n) = \top$ (1) и $\tau(p_1 \Rightarrow p_n) = \perp$ (2). Из (2) следи да је $\tau(p_1) = \top$ и $\tau(p_n) = \perp$, а због тога из (1) имамо да мора бити $\tau(p_2) = \tau(p_3) = \cdots = \tau(p_n) = \top$. Пошто је немогуће да p_n у исто време има и вредност $\top$ и $\perp$, претпоставка да формула није таутологија је погрешна.

106. а) Ако је $\tau(p) = \top$ формула је еквивалентна формули $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n) \Leftrightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n)$, а ако је $\tau(p) = \perp$ лева и десна страна формуле су тачне.

в) Ако је $\tau(p) = \top$ лева и десна страна формуле су тачне, а ако је $\tau(p) = \perp$ добијамо таутологију $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n) \Leftrightarrow \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \neg p_n$.

107. Решење је ($x = 0$ и $y = 0$), или ($y = 0$ и $z = 0$), или ($z = 0$ и $x = 0$), односно да су бар две од променљивих x, y, z једнаке нули.

108. Ако уведемо операцију $\veebar$ - "ексклузивна дисјункција", која је одређена таблицом:

p	q	$p \veebar q$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

може се доказати да је $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in A \veebar x \in B$, па се особине а) - з) могу доказивати тако што се пре свега докажу одговарајуће таутологије, на пример за:
а) $p \veebar q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$; г) $(p \veebar q) \veebar r \Leftrightarrow p \veebar (q \veebar r)$;
ж) $(p_1 \vee p_2) \veebar (q_1 \vee q_2) \Rightarrow (p_1 \veebar q_1) \vee (p_2 \veebar q_2)$.

109. а) $X = \{a, d, e\}$; б) $X = \{a, b, e\}$.

110. а) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;
б) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$;
в) $x \in P(A \cap B) \Leftrightarrow x \subset A \cap B \Leftrightarrow x \subset A \wedge x \subset B \Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B) \Leftrightarrow x \in P(A) \cap P(B)$;
г) $x \in P(A) \cup P(B) \Leftrightarrow x \in P(A) \vee x \in P(B) \Leftrightarrow x \subset A \vee x \subset B \Rightarrow x \subset A \cup B \Leftrightarrow x \in P(A \cup B)$.
Да не важи обрнута импликација, види се на следећем примеру:

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, X = \{2, 3, 4\}.$$

Тада је $X \subset A \cup B$, али није ни $X \subset A$, ни $X \subset B$.

111. Претпоставимо супротно, тј. да није $A \subset B$, ни $B \subset A$. Тада постоји $x \in A$ и $x \notin B$ и постоји $y \in B$ и $y \notin A$. За скуп $S = \{x, y\}$ важи да је $S \subset A \cup B$, али није ни $S \subset A$, ни $S \subset B$, што је контрадикција!

112. а) Нема решења; б) $X_1 = \{3\}$, $X_2 = \{1, 3\}$, $X_3 = \{2, 3\}$, $X_4 = \{1, 2, 3\}$;
в) решење је било који скуп X који садржи елементе 1 и 2, а не садржи елемент 3.

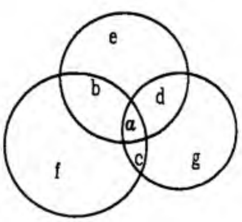
113. а) X је било који подскуп скупа $\{0, 1, 2\}$ – укупно има 8 оваквих скупова. б) X је било који подскуп скупа $\{1, 2, 3\}$ – укупно има 8 оваквих скупова.

114. а) Није, на пример $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, $C = \{\{\emptyset\}\}$.
б) Није, на пример $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{\{1, 2\}\}$.

115. Не постоје. Нека $x \in A \cap B$; тада $x \notin C$. На тај начин $x \in (A \cap B) \setminus C$.

116. Како ова релација важи за све подскупове $X \subset C$, важиће и када је $X = \emptyset$ и када је $X = C$. У тим случајевима, добијамо: $\emptyset \cap A = \emptyset \cup B$ и $C \cap A = C \cup B$, тј, $A = C$ и $B = \emptyset$.

117. Уз ознаке као на слици имамо:



$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+g+h &= 20, \\ a+b+d+e &= 16, \\ a+b+c+f &= 15, \\ a+c+d+g &= 17. \end{aligned}$$

Ако прву једначину помножимо са -2 и саберемо са остале три добијамо $a-(e+f+g+2h) = 8$, одакле је $a \geq 8$, јер је $e \geq 0$, $f \geq 0$, $g \geq 0$ и $h \geq 0$.

118. а) $(a, b)\rho_1(c, d) \Leftrightarrow a - b = c - d$. Сваком целом броју одговара једна класа еквиваленције.
б) $(a, b)\rho_2(c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Рефлексивност: $(a, b)\rho_2(a, b) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \top$.

Симетричност: $(a,\, b)\rho_2(c,\, d) \Leftrightarrow (\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}) \Leftrightarrow (c,\, d)\rho_2(a,\, b)$.
Транзитивност:
$(a,\, b)\rho_2(c,\, d) \wedge (c,\, d)\rho_2(e,\, f) \Leftrightarrow (\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} = \frac{e}{f}) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow (a,\, b)\rho_2(e,\, f)$. $C_{(a,b)} = \{(x,y) \mid \frac{a}{b} = \frac{x}{y}\}$. Дакле, сваком рационалном броју $\frac{p}{q}$, где су p и q узајамно прости бројеви одговара једна класа еквиваленције.

119. Класа еквиваленција има m: $C_0, C_1, \dots, C_{m-1}$. У некој од њих, на пример C_i налазе се сви цели бројеви који при дељењу са m дају остатак i.

121. а) Пошто дати услов важи за све $x, y, z \in A$, важиће и када је $z = x$. Дакле, $x\rho x \wedge y\rho x \Rightarrow x\rho y$. Међутим ρ је рефлексивна, па важи $x\rho x$, дакле $(\forall x,\, y)\ (y\rho x \Rightarrow x\rho y)$; б) Пошто је ρ симетрична, важи $y\rho z \Leftrightarrow z\rho y$, па је $x\rho z \wedge y\rho z \Leftrightarrow x\rho z \wedge z\rho y \Rightarrow x\rho y$, а то је управо услов транзитивности.

122. а) Нека је $\dfrac{2x-3}{x} = t$. Тада је $x = \dfrac{3}{2-t}$, па је $f(t) = \dfrac{4 \cdot \dfrac{3}{2-t} - 9}{2 \cdot \dfrac{3}{2-t} - 3} = \dfrac{9t-6}{3t} = 3 - \dfrac{2}{t}$.

Значи да је и $f(x) = 3 - \dfrac{2}{x}$. Докажимо да је f 1-1 пресликавање. Нека је $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in R \setminus \{0\}$. Тада је $\dfrac{2}{x_1} \neq \dfrac{2}{x_2}$ и $3 - \dfrac{2}{x_1} \neq 3 - \dfrac{2}{x_2}$. Дакле, важи $f(x_1) \neq f(x_2)$. Функција f није НА пресликавање, јер не постоји x тако да је $f(x) = 3$. б) $f(x) = 4 - \dfrac{3}{x}$, јесте 1-1, није НА. в) $f(x) = 5 + \dfrac{4}{x}$, јесте 1-1, није НА. г) $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$, јесте 1-1, није НА.

123. а) Најпре доказујемо а је f 1-1. Нека $x_1, x_2 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Из $x_1 + 1 = x_2 + 1$ следи $x_1 = x_2$. Ако $x_1, x_2 \in [0,1]$ из $x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$ следи $x_1^2 = x_2^2$, а одатле $x_1 = x_2$ (због $x_1, x_2 \geq 0$). Најзад, ако је $x_1 \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, а $x_2 \in [0,1]$ није могуће $x_1 + 1 = x_2^2 + 1$, јер $x_2^2 \in [0,1]$, а $x_1 \notin [0,1]$. Да је f НА закључујемо на следећи начин: ако је $1 \leq y \leq 2$, из $y = x^2 + 1$ следи $x = \sqrt{y-1}$, а ако $y < 1$ или $y > 2$, из $y = x + 1$ следи $x = y - 1$. Дакле,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1,\, x < 1 \vee x > 2 \\ \sqrt{x-1},\, 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1,\, x < -1 \vee x > 0 \\ \sqrt{x+1},\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

124.

$$\text{а) } (f \circ f)(x) = \begin{cases} f(0),\, x < 0 \\ f(x),\, x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0,\, x < 0 \\ x,\, x \geq 0 \end{cases};$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} f(0),\, x < 0 \\ f(-x^2),\, x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0,\, x < 0 \\ 0,\, x \geq 0 \end{cases} = 0;$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} g(0),\, x < 0 \\ g(x),\, x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0,\, x < 0 \\ -x^2,\, x \geq 0 \end{cases};$$

$$(g \circ g)(x) = \begin{cases} g(0),\, x < 0 \\ g(-x^2),\, x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0,\, x < 0 \\ 0,\, x \geq 0 \end{cases} = 0;$$

$$\text{б) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2,\, x \leq 0 \\ 0,\, x > 0 \end{cases};$$

$$(g\circ g)(x)=\begin{cases} x, x\le 0\\ 0, x>0\end{cases};$$

$(f\circ f)(x)=(g\circ f)(x)=0.$

125. Нека су, најпре, f и g 1-1 пресликавања. Тада је за $x_1\neq x_2$, $x_1,x_2\in A$ $g(x_1)=y_1\neq g(x_2)=y_2$, а $f(y_1)\neq f(y_2)$, па је $(f\circ g)(x_1)\neq(f\circ g)(x_2)$ што значи да је $f\circ g$ 1-1 пресликавање. Нека су, сада, f и g НА пресликавања. Тада за свако $z\in C$ постоји $y\in B$ тако да је $f(y)=z$, а за то $y\in B$ постоји $x\in A$ тако да је $g(x)=y$, па је за дато $z\in C$ $(f\circ g)(x)=z$, тј. $f\circ g$ јесте НА пресликавање.

126. Означимо ли $\dfrac{x}{x-1}$ са t и $\dfrac{x-1}{x}$ са $\dfrac{1}{t}$, имаћемо $f(t)-2f(\frac{1}{t})=0$ (1). Ако у (1) заменимо t са $\frac{1}{t}$ добићемо $f(\frac{1}{t})-2f(t)=0$ (2). Ово је могуће јер релација (1) важи за свако $t\neq 0$, $t\neq 1$. Ако (2) помножимо са 2 и затим саберемо са (1), добијамо $-3f(t)=0$, осим за $t=0$, $t=1$, односно $f(x)=0$, осим можда за $x=0$, $x=1$.

127. а) Означимо $\dfrac{x-2}{x+1}=z$. Тада ће бити $x=\dfrac{z+2}{1-z}$, $\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{1}{z}$. Нрема томе важи $f(\frac{1}{z})+2f(z)=\dfrac{z+2}{1-z}$ (1). У (1) заменимо z са $\frac{1}{z}$. Имаћемо $f(z)+2f(\frac{1}{z})=\dfrac{\frac{1}{z}+2}{1-\frac{1}{z}}=\dfrac{1+2z}{z-1}$ (2). Из (1) и (2), добија се $f(x)=\dfrac{4x+5}{3(1-x)}$, осим, можда за $x=0$, $x=1$. Нровером се утврђује да овај услов важи за $x=0$!

б) $f(x)=\dfrac{5x+7}{8(1-x)}$, $x\neq 2$, $x\neq 1$, $x\neq -1$.

128. а) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=1$, $(f\circ g)(x)=1$, $(g\circ f)(x)=1$;

б) $f(\dfrac{x}{x-1})=\dfrac{3}{2}x$, $g(2x+1)=\dfrac{x}{2}$. Сменом $\dfrac{x}{x-1}=p$ и $2x+1=q$ добија се $x=\dfrac{p}{p-1}$ и $x=\dfrac{q-1}{2}$, па је $f(p)=\dfrac{3p}{2(p-1)}$ и $g(q)=\dfrac{q-1}{4}$. Одатле је $(f\circ g)(x)=\dfrac{3}{2}\dfrac{x-1}{x-5}$; $(g\circ f)(x)=\dfrac{x+2}{8(x-1)}$.

129. Има девет четвороцифрених бројева који се записују једном цифром. Испитајмо сада колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу две цифре. Нрва цифра у таквом броју може бити једна од цифара 1, 2, 3, …, 9. Од преосталих девет цифара треба изабрати једну и уписати је једном, два или три пута. То се може урадити на седам начина. Дакле, тражених бројева има $9+9\cdot 9\cdot 7=576$.

130. Седмоцифрених бројева има $9\cdot 10^6$. Ноловина од њих има паран, а половина непаран збир цифара. Дакле, седмоцифрених бројева чији је збир цифара паран има $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10^6=45\cdot 10^5$.

131. а) Ако је број улица у насељу једнак n, онда из услова да се сваке две улице секу добијамо $\dfrac{n(n-1)}{2}=21$, одакле следи да је $n=7$.

б) Нретпоставимо да се улице у насељу изграђују једна за другом. Изградњом сваке нове улице (после прве) број стамбених четврти, са свих страна ограничених улицама, повећава се за број који је за један мањи од броја новодобијених раскрсница. Зато је тражени број $0+1+2+3+4+5=15$.

132. Ако се три пута појављује нула, она је на месту јединица, десетица или стотина. На месту хиљада може бити било која од цифара 1, 2, …, 9, па таквих бројева има 9. Ако се три пута појављује цифра k, $k\neq 0$ онда четврта цифра може бити нула (ако је на првом месту добијају се троцифрени бројеви) или цифра l, $l\neq 0$, $l\neq k$. Број свих таквих бројева је $9 \cdot 9 \cdot 4 = 324$, јер четврта цифра (различита од претходних) може стајати на неком од четири места. Према томе са наведеним својством има $324 + 9 = 333$ броја.

Глава II – Реални бројеви

133. а) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $2100 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, па је НЗД$(180, 2100) = 60$, НЗС$(180, 2100) = 6300$.
б) 23 и 276; в) 154 и 355740; г) 1 и 128700.

134. а) 90; б) НЗС$(24, 18) = 72$; в) НЗД$(360, 504) = 72$.

135. $5880 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Најмањи тражени бројеви су: а) $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; б) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1575$.

136. Како је $m^3 - m = (m-1)m(m+1)$, а производ три узастопна цела броја је дељив и са 2 и са 3, то је и $m^3 - m$ дељиво са 6.

137. Упутство: $m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m^2+1)(m-1)(m+1)$.

138. а) $2n^3 - 3n^2 + n = n(2n^2 - 2n - n + 1) = n(n-1)(2n-1)$. Од бројева $n, n-1$ један је дељив са 2. Ако бројеви n и $n-1$ нису дељиви са 3, онда је број $n+1$ дељив са 3, па је и број $2n - 1 = 2(n+1) - 3$ дељив са 3. б) $n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)$.

139. а) 1; б) било који прост број; в) било који квадрат простог броја.

140. Упутство: Број 1995 је дељив са три, а није дељив са 9.

141. Приметимо да је $7^1 = 7, 7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401$, последња цифра броја 7^5 је 7, броја 7^6 је 9, броја 7^7 је 3, 7^8 је 1 итд. Видимо да се последња цифра броја $7^n, n \in \mathbf{N}$ периодично, са периодом 4, понавља.
а) Како је број 77 облика $4k+1$, то је последња цифра броја 7^{77} - цифра 7. Истом цифром се мора завршавати и број 77^{77}; б) 7.

142. Последња цифра броја 9^n је 1, ако је n паран природан број, а последња цифра броја 4^m је 4, ако је m непаран природан број. Због овога се број $9^{44} + 4^{99}$ завршава цифром 5.

144. а) Нека је n тражени број. Непосредно се установљава да је број $n+1$ дељив са 2 и са 3 и са 4 и са 5 и са 6, а пошто је $NZS(2,3,4,5,6) = 60$, то је $n + 1 = 60$ и $n = 59$; б) 238.

145. Представимо један такав број у облику $\overline{xyz}$. Тада је $x + y + z = 14$, а пошто су x, y, z цифре, може бити $-7 \leq x - y + z \leq 18$, односно $x - y + z = 11$ или $x - y + z = 0$. У првом случају би било $2(x+z) = 25$, што је немогуће, а у другом се добија $y = 7$ и $x + z = 7$. Сви тражени бројеви су: 176, 275, 374, 473, 572, 671 и 770 и има их седам.

147. $n \in \{-11, -1, 1, 7\}$.

148. а) $-6\frac{1}{2}$; б) $2\frac{3}{7}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $136\frac{16}{27}$.

149. Пошто је $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{30}{120}$ и $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{40}{120}$, могу се узети, на пример, бројеви: $\frac{31}{120}, \frac{32}{120}, \frac{33}{120}, \ldots, \frac{39}{120}$.

150. $\frac{7}{9} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8} < \frac{8}{9}$.

151. а) $\frac{58}{100} = \frac{29}{50}$; б) $\frac{23}{10}$; в) $-\frac{345}{100} = -\frac{69}{20}$; г) $-\frac{2071}{1000}$.

152. $1 = 1,000\ldots$; $-\frac{1}{6} = -0,1666\ldots$; $\frac{1}{2} = 0,5000\ldots$; $\frac{4}{9} = 0,111\ldots$; $\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots$

153. а) Нека је $x = 0,2(3)$. Тада је $10x = 2,(3)$, па је $10x - x = 2,1$, $x = \frac{2,1}{9} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{149}{30}$; г) Нека је $x = 0,(45)$. Тада је $100x = 45,(45)$, па је $99x = 45$ и $x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$; д) $-\frac{2209}{990}$; ђ) $\frac{1559}{9900}$; е) $\frac{29090}{999}$; ж) $\frac{1}{7}$.

154. Претпоставимо да је $b \neq d$. Тада би било $a - c = \sqrt{2}(d - b)$, па је $\sqrt{2} = \dfrac{a-c}{d-b} \in \mathbf{Q}$, што је нетачно. Дакле $b = d$. Из дате једнакости сада непосредно следи да је и $a = c$.

155. $a = \dfrac{4}{\sqrt{5}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{4} = \sqrt{5}+1$. Пошто је $2 < \sqrt{5} < 3$, то је $3 < a < 4$.

156. а) Претпоставимо супротно, да постоји рационалан број такав да је $(\dfrac{p}{q})^2 = 2$ и да су p и q узајамно прости природни бројеви. Тада је $p^2 = 2q^2$, па је p^2 паран број, одакле произилази и да је p паран број, $p = 2k, k \in \mathbf{N}$. Сада из $p^2 = 2q^2$ следи $q^2 = 2k^2$, значи да је и q паран број, па p и q нису узајамно прости. г) Нека је $\sqrt{2}+\sqrt{3} = r \in \mathbf{Q}$. Тада је $\sqrt{3} = r - \sqrt{2}$, па је $3 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2$, тј. $2r\sqrt{2} = r^2 - 1$, односно $\sqrt{2} = \dfrac{r^2-1}{2r} \in \mathbf{Q}$, што је немогуће; ђ) $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Претпоставимо супротно, да је $3 + 2\sqrt{2} = r \in \mathbf{Q}$. Тада би било $\sqrt{2} = \dfrac{r-3}{2} \in \mathbf{Q}$, што је нетачно.

157. а) $a + b$ може бити рационалан, на пример $\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2$ или ирационалан, на пример $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin Q$. б) Број $a+r$ је ирационалан, јер би у противном било $a+r = r_2 \in \mathbf{Q}$, па је $a = r_2 - r \in \mathbf{Q}$. в) Ирационалан. г) Рационалан или ирационалан. д) Рационалан или ирационалан. ђ) За $r \neq 0$ ирационалан, за $r = 0$ $a \cdot 0 = 0 \in \mathbf{Q}$. е) Ирационалан. ж)Ирационалан.

158. Упутство: $a - b = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

160. а) Како је $b = 4a - a^2 - 3 + \sqrt{3}(4 - 2a)$ мора бити $4 - 2a = 0$, тј. $a = 2$. Тада је $b = 1$; б) $a = -\dfrac{11}{4}$, $b = \dfrac{3}{2}$.

161. а) $(3a + \sqrt{2})(a + \sqrt{2}) = 3a^2 + 2 + 4a\sqrt{2}$. Како је $a \neq 0$, број $4a\sqrt{2}$ је ирационалан, а збир рационалног броја $3a^2 + 2$ и ирационалног је ирационалан.

162. Ограничени су скупови B и C. Једна мајоранта скупа B је $b = 1000$, а скупа C број $c = 0$.

163. $\sup M_1 = \dfrac{1}{2}$, $\sup M_4 = 1$, $\sup M_5 = \dfrac{1}{2}$, $\sup M_6 = 1$, $\sup M_7 = 0$. Скупови M_2 и M_3 нису ограничени одозго и немају супремум.

164.

$$\text{а)}\frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}; \quad \text{б)}\frac{x-|x|}{2} = \begin{cases} 0, x \geq 0 \\ x, x < 0 \end{cases}; \quad \text{в)}\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}.$$

165. а) $-1 < x < 1$; б) $-3 \leq x < -\dfrac{1}{3}$, или $\dfrac{1}{3} < x \leq 3$; в) $-\infty < x \leq -2$, или $2 \leq x < +\infty$; г) $1 < x < 3$.

166. а) $|x - 3| = 5 \Leftrightarrow x - 3 = -5 \vee x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 8$; б) $x = -\dfrac{5}{2} \vee x = \dfrac{3}{2}$; в) $x = \dfrac{1}{5} \vee x = 1$; г) $6 + 2x = 8 \vee 6 + 2x = -8 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -7$; д) $-8 \leq 6 + 2x \leq 8 \Leftrightarrow -14 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 1$; ђ) $6 + 2x \geq 8 \vee 6 + 2x \leq -8 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -7$; е) $-2 \leq x \leq 8$; ж) $x < -1 \vee x > 2$; з) $1 < x < \dfrac{4}{3}$; и) $x < -\dfrac{2}{9} \vee x > \dfrac{2}{3}$; ј) $-2 \leq |x| - 1 \leq 2$, тј. $-1 \leq |x| \leq 3$, $|x| \leq 3$, $-3 \leq x \leq 3$; к) $x < -4 \vee -2 < x < 1 \vee x > 3$.

167. а) Нека је $x \geq y$. Тада је $|x - y| = x - y$, па је $\dfrac{1}{2}(|x-y| + x + y) = \dfrac{1}{2}(x - y + x + y) = x$. Слично се добија и у случају $x < y$.

168. а) 1° Ако су a и b позитивни бројеви, онда је $|a| = a$, $|b| = b$ и $|a \cdot b| = a \cdot b$. Одавде је: $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b| \Rightarrow |ab| = |a||b|$.
2° Ако су a и b негативни бројеви онда је $|a| = -a$, $|b| = -b$ и $|a \cdot b| = a \cdot b$, јер је производ негативних бројева позитиван број. Сада је: $|a \cdot b| = a \cdot b = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.
3° Ако је $a > 0$ и $b < 0$, онда је $|a| = a$, $|b| = -b$ и $|a \cdot b| = -ab$, јер је производ позитивног и негативног броја негативан број. Сада је: $|a \cdot b| = -ab = a| - b| = |a||b|$.

4° Ако је $a<0$, $b>0$, онда је $|a\cdot b|=|ba|=|b||a|=|a||b|$.
5° Ако је бар један од бројева a,b једнак нули, онда је њихов производ нула, па је лева и десна страна једнака нули.

б) Применом доказа под а) имамо $|b|\cdot|\frac{1}{b}|=1$, јер је $b\cdot\frac{1}{b}=1$. А како је $|\frac{1}{b}|=\frac{1}{|b|}$, даље је $|\frac{a}{b}|=|a\cdot\frac{1}{b}|=|a|\cdot\frac{1}{|b|}=\frac{|a|}{|b|}$.

169. а) $|2\cdot(-7)|=|-14|=14$; $|2|=2, |-7|=7$, па је $|2||-7|=2\cdot 7=14=|2\cdot(-7)|$; б) $|\frac{2}{-7}|=|-\frac{2}{7}|=\frac{2}{7}$; $\frac{|2|}{|-7|}=\frac{2}{7}$, па је $\frac{|2|}{|-7|}=\frac{2}{7}=|\frac{2}{-7}|$.

170. а) 2,65; б) 0,68; в) 5,36; г) 8,16; д) 29,17.

171. а) 2,7; 2,72; 2,716; 2,7158; 2,71582; б) 2,6; 2,65; 2,646; 2,6458; 2,64576.

172. 3,48; 3,481; 3,4806; 3,48056; 3,480562; 3,4805616.

173. а) $\Delta(x')=0,01$, $\delta(x')=0,04166$.

174. $\Delta(x')=10$, $\Delta(y')=10$, $\delta(x')=\frac{10}{35000}=0,0002857$, $\delta(y')=\frac{10}{72000}=0,0001388$.

175. Релативна грешка првог мерења је $\delta(x')=\frac{0,02}{2,34}=0,0085$, а другог $\delta(y')=\frac{0,01}{1,23}=0,0081$, па је друго мерење тачније.

176. а) $6,40\pm 0,03$; б) $8,53\pm 0,05$; в) $9,69\pm 0,06$; г) $-9,32\pm 0,05$; д) $-8,71\pm 0,1$; ђ) $3,11\pm 0,05$.

177. а) Приближна вредност је 25,23, а грешка је мања од 0,2.
б) Приближна вредност је 64,45, а грешка је мања од 0,03.
в) Приближна вредност је 2,07, а грешка је мања од 0,02.

178. Може се узети да је $c=7,375\pm 0,075$, па је $\Delta(x')=\Delta(a')+\Delta(b')+\Delta(c')=0,05+0,1+0,075<0,5$ и како је $13,5-5,8+7,375=15,075$, то је $x=15,075\pm 0,5$.

179. $x=7,0$, $\Delta(x')<0,05=\frac{1}{2}\cdot 0,1$.

180. Како је $2,3\le a\le 2,5$ и $3,6\le b\le 3,8$, то је $5,9\le a+b\le 6,3$, а како је $O=2(a+b)$, то је $11,8\le O\le 12,6$. Приближна вредност за обим је $\frac{11,8+12,6}{2}=12,2$, а граница апсолутне грешке $\frac{12,6-11,8}{2}=0,4$. Слично добијамо за $P=a\cdot b: 8,28\le a\cdot b\le 9,50$. Приближна вредност за површину је 8,89, а граница апсолутне грешке је 0,61.

181. Како је $5,7\le a\le 5,9$ и $2,3\le b\le 2,5$, то је $\frac{5,7}{2,5}\le\frac{a}{b}\le\frac{5,9}{2,3}$, тј. $2,28<\frac{a}{b}<2,57$. Ако је $\frac{a}{b}\approx 2,425$, онда грешка није већа од 0,145.

182. Означимо са $g(a)$ и $G(a)$ најмању, односно највећу вредност величине a. Може се формирати таблица:

	g	G
x	$3,20$	$3,26$
y	$1,77$	$1,78$
$3y$	$5,31$	$5,34$
$x+3y$	$8,51$	$8,60$
$x-y$	$1,42$	$1,49$
$y(x-y)$	$2,5134$	$2,6522$
u	$3,2086$	$3,4217$

За приближну вредност за u природно је узети аритметичку средину бројева $g(u)$ и $G(u)$, тј. 3,3152, а $\Delta(u')=0,1065$. Уочимо да је, на пример, $g(x+y)=g(x)+g(y)$, $G(x-y)=G(x)-g(y)$ и сл.

183. Тачна вредност аргумента је $x = \sqrt{2}$, приближна $x' = 1,41$. Тачна вредност функције је $y(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3$, а приближна вредност функције $y(x') = 1,41^3$. Апсолутна грешка аргумента је $\sqrt{2} - 1,41$, а функције $\sqrt{2}^3 - 1,41^3$. Граница апсолутне грешке за аргумент је $0,0043 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$, а за функцију $2\sqrt{2} - 1,41^3 = 2,828427\ldots - 2,803221 = 0,025206 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$.

184. а) Ако је p прост број различит од 3, онда је p облика $3k \pm 1$, $k \in \mathbf{N}$. Тада је $8p^2 + 1 = 8(3k \pm 1)^2 + 1 = 72k^2 \pm 48k + 9$ - број дељив са 3, па је једино могуће да је $p = 3$. Тада је $8p^2 + 1 = 73$ - такође прост број. б) $p = 3$.

186. а) Како је $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ и p прост број већи од 3, то су бројеви $p-1$ и $p+1$ два узастопна парна броја и један од њих је дељив са 4, па је призвод $(p-1)(p+1)$ дељив са 8. Од бројева $p-1, p+1$ један је дељив са 3 јер су $p-1, p, p+1$ три узастопна природна броја, а p није дељиво са 3. Дакле, производ $(p-1)(p+1)$ је дељив са 3, па и са 24. б) $p^2 - q^2 = p^2 - 1 - (q^2 - 1)$. Применити резултат а).

187. а) Број $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ је непаран, па не може бити дељив парним бројем 1994.
б) Ако је n облика 3к или $3k - 1$, $k \in \mathbf{N}$, онда је $n(n+1)$ дељиво бројем 3, а број $n^2 + n + 2 = n(n+1) + 2$ није дељив са 3, па ни са 1995. Ако је $n = 3k + 1$, онда је $n^2 + n + 2 = (3k+1)(3k+2) + 2 = 3m + 1$, $m \in \mathbf{N}$, па ни тада број није дељив са 3, дакле, ни са 1995.

188. а) Од бројева $n, n+2, n+4$ тачно један је дељив са 3, па, како 2^n није дељиво са 3, то ни број a није дељив са 3, па ни са 1995, јер је 1995 дељиво са 3.

189. а) Нека је a цео број. Тада је $a = 3k$, $a = 3k+1$ или $a = 3k+2$, $k \in \mathbf{Z}$. У првом случају је $a^2 = 9k^2$, у другом $a^2 = (3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$, а у трећем $a^2 = (3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)$. Дакле, ни у једном случају a^2 не даје остатак 2 при дељењу са 3.
б) $x^2 = 20 + 3y = 3(y+6) + 2$. Ово је немогуће, на основу а).

190. Упутство - погледати решење претходног задатка.

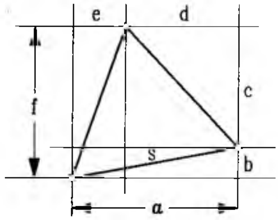
191. а) Једначина је еквивалентна једначини $2(x+y) = xy$, односно $(x-2)(y-2) = 4$. Пошто се број 4 може написати као производ целих бројева само на следеће начине: $1 \cdot 4$, $2 \cdot 2$, $4 \cdot 1$, $(-1) \cdot (-4)$, $(-2) \cdot (-2)$ и $(-4) \cdot (-1)$ решења су: $(x,y) \in \{(3,6),(4,4),(6,3),(1,-2),(-2,1)\}$.
б) Једначина се може написати у облику $(x-3)(y+1) = 11$. Решења су: $(x,y) \in \{(14,0),(4,10),(2,-12),(-8,-2)\}$.
в) Једначина се може написати у облику $(x-5)(y-5) = 25$. Решења су: $(x,y) \in \{(30,6),(10,10),(6,30),(-20,4),(0,0),(4,-20)\}$.
г) Пошто је $x^2 + 2xy - 3y^2 = (x-y)(x+3y)$, решења су $(x,y) \in \{1,0),(-1,0)\}$.

192. а) Збир два ненегативна цела броја једнак је 2 ако и само ако су ти бројеви једнаки 1 и 1 или 2 и 0. Пошто су x^2 и y^2 потпуни квадрати, долази у обзир само први случај, па су решења: $(x,y) \in \{(-1,-1),(1,1),(-1,1),(1,-1)\}$.
б) Једначина се може написати у облику $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$. Решења су $(x,y) \in \{(2,0),(2,-2),(1,-1),(3,-1)\}$.
в) Једначина се може написати у облику $x^2 + (x+y)^2 + y^2 = 2$. Решења су: $(x,y) \in \{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0),(1,-1),(-1,1)\}$.
г) Једначина је еквивалентна једначини $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 12$. Решења су $(x,y,z) \in \{(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$.

193. Како је $a = \dfrac{p_2p_3\cdots p_n + p_1p_3\cdots p_n + \cdots + p_1p_2\cdots p_{n-1}}{p_1p_2\cdots p_n}$ види се да број a није цео, јер бројилац броја a није дељив са p_1 (први сабирак у том бројиоцу није дељив са p_1, а сви остали јесу).

194. а) Нека је $a, b \in \mathbf{Q}, a < b$. Тада је $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ и $\dfrac{a+b}{2} \in \mathbf{Q}$.

б) Претпоставимо да је $a, b \in \mathbf{Q}$ и $a < b$ и да између a и b постоји само коначан број рационалних бројева: $a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b$. То је немогуће, јер на основу а) између рационалних бројева a и a_1 мора постојати рационалан број итд.



Сл. уз зад. 194

195. Претпоставимо да такав троугао постоји (в. сл.). Тада су a, b, c, d, e и f цели бројеви. Површина троугла је $af - \dfrac{ab + cd + ef}{2} = \dfrac{s^2\sqrt{3}}{4}$. Међутим за страницу s троугла важи $s^2 = a^2 + b^2$, па је $\sqrt{3} = \dfrac{2(2af - ab - cd - ef)}{2(a^2 + b^2)} \in \mathbf{Q}$, што је немогуће.

196. Ако заменимо број $1 + \sqrt{3}$ у једначини добијамо $(4a + b + 42) + (2a + b + 18)\sqrt{3} = 0$ па мора бити $4a + b + 42 = 0$ и $2a + b + 18 = 0$, јер је $\sqrt{3}$ ирационалан број. Из овог система једначина налазимо да мора бити $a = -12, b = 6$.

197. а) Претпоставимо супротно, да је $\sqrt{2} + \sqrt{17} - \sqrt{19} = r \in \mathbf{Q}$. Тада је $\sqrt{2} + \sqrt{17} = r + \sqrt{19}$. После квадрирања добијамо $2\sqrt{34} = r^2 + 2r\sqrt{19}$, одакле, после још једног квадрирања, имамо $\sqrt{19} = \dfrac{136 - r^4 - 76r^2}{4r^3} \in \mathbf{Q}$, што је нетачно јер је $\sqrt{19}$ ирационалан број.

198. $a = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{2 - 1} + \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \cdots + \dfrac{\sqrt{100} - \sqrt{99}}{100 - 99} = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 9.$

199. Дата једначина еквивалентна је једначини $4(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$, па се непосредно закључује да је $(x, y) = (1, -1)$ њено јединo решење.

Глава III – Пропорционалност

200. 1° $\quad a : b = c : d \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{a} = \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{d}{a} \Leftrightarrow a : c = b : d;$

У свакој пропорцији могу мењати места:

а) унутрашњи чланови,
б) спољашњи чланови,
в) спољашњи и унутрашњи,
г) спољашњи са унутрашњим и унутрашњи са спољашњим.

$$3^\circ \quad a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{k}{k} \Leftrightarrow ak : bk = c : d;$$

$$5^\circ \quad (a + b) : (c + d) = a : c \Leftrightarrow (a + b) : a = (c + d) : c$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{d}{c} \Leftrightarrow b : a = d : c \Leftrightarrow a : b = c : d.$$

201. 1° Следи из 5° и 6° из претходног задатка.

2° Из $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ следи $a = kb$ и $c = kd$; Множењем прве од тих релација са x, а друге са y и сабирањем добијамо $ax + cy = k(bx + dy)$, тј.

$$\frac{ax + cy}{bx + dy} = k = \frac{a}{b}.$$

202. а) $x = 6$; б) $x = \frac{7}{4}$; в) $x = \frac{5}{2}$;

203. а) Применом релације $(a + b) : (c + d) = a : c$ имамо $(x + y) : (2 + 3) = x : 2$. Како је $x + y = 10$, то је $10 : 5 = 2 \Rightarrow x = 4, y = 6$;
б) $x = 15, y = 9$; в) $x = \frac{2a(a+b)}{2a+b}, y = \frac{b(a+b)}{2a+b}$; г) $x = 21, y = 20$.

204. а) Дате релације се могу довести на облик

$$\frac{a}{b} = \frac{9}{12}, \quad \frac{b}{c} = \frac{12}{10}, \quad \frac{c}{d} = \frac{10}{15},$$

па је $a : b : c : d = 9 : 12 : 10 : 15$. б) $12 : 18 : 21 : 77$; в) $18 : 24 : 20 : 21$; г) $32 : 132 : 210 : 119$.

205. а) Релација $(a - x) : (x - b) = a : b$ еквивалентна је са

$$x = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \text{ односно } \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$

б) Ако је y геометријска средина аритметичке средине $A = \frac{a+b}{2}$ и хармонијске средине $H = \frac{2ab}{a+b}$ бројева a и b, онда је $y^2 = A \cdot H = ab$, тј. y је геометријска средина бројева a и b.

206. $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = a_4 : b_4 = k$. Како је: $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, $a_3 = kb_3$, $a_4 = kb_4$ сабирањем добијамо $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = k(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$ одакле је $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) : (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = k = a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = a_4 : b_4$.

207. а) Из $1 : 250000 = 2 : x$ добијемо да је $x = 500000cm = 5km$.
б) Из $2 : 80000 = x : 250000$ имамо да је $x = 6,25cm$.

208. У овом задатку величине - број боца и њихова запремина су обрнуто пропорционалне, па је смер стрелица у табели супротан:

100 boca	$\uparrow$	0.75l	$\downarrow$
x boca		0.8l	

Добијамо пропорцију $x : 160 = 0,75 : 0,8$, одакле је $x = 150$ боца.

209. У овом задатку ради се о директно сразмерним величинама. Шему за решавање правимо у следећем облику:

10kg	$\uparrow$	18m	$\uparrow$
35kg		x	

Редослед чланова пропорције одређен је смером стрелица: $x : 18 = 35 : 10$, тј. $x = \frac{18 \cdot 35}{10}$, па је $x = 63m$.

210. Посматрајмо таблицу:

$\downarrow$	x	$\uparrow$	4 traktora	$\uparrow$	35 dana	$\downarrow$	3640 ha
	14h		3 traktora		25 dana		1820 ha

$14h$	3 трактора	25 дана	$1820ha$

(Смерови стрелица се одређују увек у поређењу са траженом величином. Стрелицама у истом смеру означавају се директно, а у супротном смеру - обрнуто пропорционалне величине.) Резултат се добија из пропорције $x : 14 = (3 \cdot 25 \cdot 3640) : (4 \cdot 35 \cdot 1820)$, одакле је $x = 15h$.

211. Посматрајмо таблицу:

$\downarrow$ x	$\uparrow$ 16 radnika	$\uparrow$ 15 dana	$\downarrow$ 3600 t
7h	24 radnika	12 dana	3780 t

Одавде је $x : 7 = (24 \cdot 12 \cdot 3600) : (16 \cdot 15 \cdot 3780)$, па је $x = 8h$.

212. Из таблице:

$\uparrow$ 6m	$\downarrow$ 20cm	$\downarrow$ 13cm	$\uparrow$ 260dinara
x	21cm	16cm	280dinara

добијамо $x : 6 = (20 \cdot 13 \cdot 280) : (260 \cdot 21 \cdot 16)$, одакле је $x = 5m$.

213. 15.600 кифли. **214.** Двадесет мишева. **215.** Четири.

216. Преосталих 24 радника ће за x дана завршити посао, који би 33 радника радила $80 - 16 = 64$ дана. Дакле, имамо таблицу

$\uparrow$ 33–9	$\downarrow$ x
33	80–16

Из $x : 64 = 33 : 24$ је $x = 88$ дана. Значи да ће посао бити завршен за $16 + 88 = 104$ дана.

217. Посматрајмо таблицу

$\downarrow$ 4 traktora	$\uparrow$ (36–12)h
(4–1)traktora	x

Биће $x : (36 - 12) = 4 : (4 - 1)$, тј. $3x = 4 \cdot 24$, па је $x = 32h$.

218. $17\frac{1}{2}h$. **219.** 30 дана. **220.** $x = 56kg$. **221.** $x = 9$ дана.

222. Једна плочица димензије $15cm \times 15cm$ има површину $225cm^2$, а плочица димензије $10cm \times 20cm$ има површину $200cm^2$. Према томе ово је обрнута пропорционалност, па је $x : 600 = 225 : 200$, одакле је $x = 675$ плочица.

223. $x = 10l$. **224.** $x = 3$ дана. **225.** 192 зидара.

226. 8 минута и 20 секунди. **227.** $50kg$.

228. 30 радника. **229.** Потребно је још 10 радника.

231. а) $x = \frac{60}{7+3} \cdot 7 = 42$, $y = \frac{60}{7+3} \cdot 3 = 18$; б) $x = 38, y = 57$; в) $x = \frac{35}{2+5} \cdot 5 = 25$, $y = \frac{35}{2+5} \cdot 2 = 10$.

232. *Први начин.*

$$x = \frac{3840}{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}} \cdot \frac{1}{7} = 2048, \qquad y = \frac{3840}{\frac{1}{7} + \frac{1}{8}} \cdot \frac{1}{8} = 1792.$$

Други начин.

$$x = \frac{3840}{7+8} \cdot 8 = 2048, \qquad y = \frac{3840}{7+8} \cdot 7 = 1792.$$

233. а) $x = \dfrac{72}{7+4+1} \cdot 7 = 42$, $y = \dfrac{72}{7+4+1} \cdot 4 = 24$, $z = \dfrac{72}{7+4+1} \cdot 1 = 6$;
б) $x = \dfrac{86}{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+2} \cdot \dfrac{5}{6} = 20$, $y = \dfrac{86}{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+2} \cdot \dfrac{3}{4} = 18$, $z = \dfrac{86}{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+2} \cdot 2 = 48$.

234. $x = 1887,50$ дин, $y = 1510$ дин, $z = 1132,50$ дин.

235. Детерџент$= \dfrac{900}{32+23+45} \cdot 32 = 288$ динара; шећер= 207 динара; брашно= 405 динара.

236. Први радник$= \dfrac{21452}{12000+11500+10500+9000} \cdot 12000 = 5986,60$ динара, други радник= 5737,16 динара, трећи радник= 5238,28 динара, четврти радник= 4489,95 динара.

237. Ученици редом добијају 600, 800, 1000 и 1200 динара.

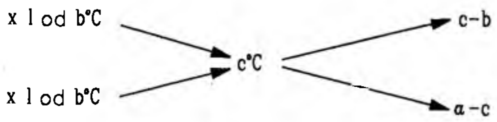
238. Добиће, редом, 6.400, 9.600, 12.000 и 14.000 динара.

239. A – 234 динара, B – 104 динара, C – 585 динара, D – 312 динара.

240. Погони су добили редом: 30600, 30000, 36000 и 39600 килограма воћа.

241. 1950, 1500, 2160, 2400 и 1500.

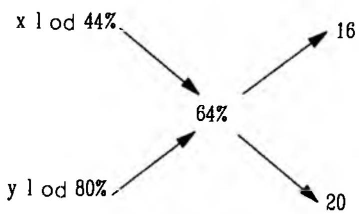
242. Посматрајмо општији задатак - треба помешати воду температуре $a°C$ и воду температуре $b°C$ да би се добила вода температуре $c°C$ ($b < c < a$). Треба узети x литара прве и y литара друге воде - добићемо $x+y$ мешавине. Дакле, важи $ax + by = c(x+y)$. Одавде је $(a-c)x = (c-b)y$, тј. $x : y = (c-b) : (a-c)$. Ово се може приказати и помоћу шеме



$x : y = (c-b) : (a-c)$

При овоме, стрелице указују на величине које се одузимају. У конкретном примеру је $x : y = 5 : 10 = 1 : 2$. Значи, треба помешати један део воде температуре $40°C$ и два дела воде температуре $25°C$.

243. Користимо се шемом као упретходном задатку:



Дакле $x : y = 16 : 20 = 4 : 5$. Значи, треба узети 4 дела прве и 5 делова друге киселине. Нека је $x = 4t, y = 5t$. Из $x + y = 9t = 18l$ следи $t = 2l$, па је $x = 8l$ и $y = 10l$.

244. $3 : 2$.

245. $20l$ и $30l$.

246. $3l$ 40-проц. и $4,5l$ 65-проц. раствора.

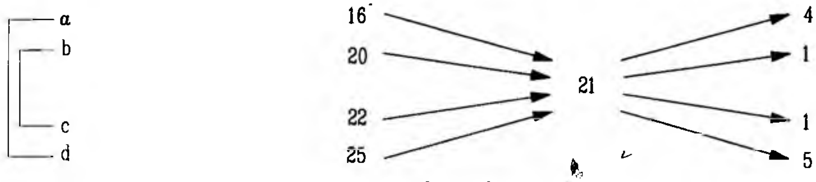
247. $6\frac{3}{5}l$ воде.

248. а) $1 : 2$; б) $20gr$ и $40gr$.

249. $1200kg$ и $400kg$.

250. $136l$ и $85l$.

251. Решење није јединствено - могу се мешати кафе од 16 и 25, а затим 20 и 22 динара или од 16 и 22, па затим од 20 и 25 динара. У првом случају добијамо:



Дакле, кафе се могу мешати у односу $a : b : c : d = 4 : 1 : 1 : 5$.

252. Једно решење је: $6kg, 2kg, 4kg$ и $6kg$. **253.** Једно решење је: $9,1g; 2,1g; 1,4g; 8,4g$.

254. $9 : 35$. **255.** $92l$ воде. **256.** $36l$.

257. $G = 12000, p = 7\%$, $P = \dfrac{12000 \cdot 7}{100} = 840$ динара.

258. $P = \dfrac{16850 \cdot 4,5}{100} = 758,25$ динара. **259.** $P = 160, p = 2,5\%$, $G = \dfrac{160 \cdot 100}{2,5} = 6400kg$.

260. $G = 7500000, P = 450000$, $p = \dfrac{450000 \cdot 100}{7500000} = 6\%$.

261. Алкохола има $83 - 67 = 16l$. У процентима то је $p = \dfrac{16 \cdot 100}{83} = 19.28\%$.

262. План промета је $G = \dfrac{425000 \cdot 100}{8,5} = 5000000$ динара, а како је месечни промет 5750000 динара, онда премашење износи 750000 динара што је у процентима $p = \dfrac{750000 \cdot 100}{5000000} = 15\%$.

263. Нека је првобитна цена прве књиге a, а друге b динара. После повећања цена прве књига је $a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$, а после снижења је $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{4}a$. Цена друге књиге после снижења је $b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b$, а после повећања је $\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b = \frac{3}{4}b$. Из $\frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b = 6$, тј. $\frac{3}{4}(a - b) = 6$ следи да је $a - b = 8$ динара.

264. Нова цена је за 1% нижа од старе. **265.** $61,44$ динара.

266. За 100%. **267.** Површина се смањи за 1%.

268. Из $v_1 t_1 = v_2 t_2$ и $v_2 = \frac{5}{4}v_1$ налазимо да је $t_1 = \frac{5}{4}t_2$, тј. $t_2 = \frac{4}{5}t_1 = 80\% t_1$. Значи да се време путовања смањује за 20%.

269. За 25%.

270. Како свеже печурке садрже 10% суве материје, то се у $22kg$ налази $2,2kg$ суве материје, што представља 88% масе сувих печурки. Из пропорције $2,2 : x = 88 : 100$ налазимо да се из $22kg$ свежих печурки добија $x = 2,5kg$ сувих.

271. Означимо са a цену производа. Тада је $a + \frac{x}{100}a - \frac{y}{100}(a + \frac{x}{100}a) = a$. Одавде, после скраћивања са a налазимо $y = \dfrac{100x}{x + 100}$.

272. Број садница се налази из пропорције $x : 120 = 1000 : 75$ и износи $x = 1600$.

273. Провизија је рачуната од 60000 динара и износи 300 динара.

274. $350000kg$.

275. $K = 15000$, $t = 3$ год, $p = 5\%$, $I = \dfrac{15000 \cdot 3 \cdot 5}{100} = 2250$динара.

276. $K = 42800$ дин, $t = 8$ месеци, $p = 4\%$, $I = \dfrac{42800 \cdot 4 \cdot 8}{1200} = 1141,33$дин.

277. $I = 3505,50$ динара.

278. $K = 100260$, $t = 60$ дана, $p = 4\%$, $I = \dfrac{100260 \cdot 4 \cdot 60}{36500} = 659,24$динара.

279. $I = 10260$ дин, $t = 5$ година, $p = 6\%$, $K = \dfrac{100 \cdot 10260}{5 \cdot 6} = 34200$динара.

280. $K = \dfrac{1200 \cdot 340,65}{6 \cdot 4,5} = 15140$дин.

281. $K = \dfrac{36500 \cdot 17710}{5,5 \cdot 92} = 1277500$динара.

282. Имамо да је $k_5 = 200(1 + \dfrac{20}{100})^5 = 200 \cdot 2,48832 = 497,664$ динара. Слично се добија $k_{10} = 1238,34$ и $k_{15} = 3081,40$ динара.

283. а) $k_3 = 6000 \cdot (1 + \dfrac{5}{100})^3 = 6945,75$; б) 7986; в) 9125,25 динара.

284. 537 динара.

285. Имамо $k_4 = 1000(1 + \dfrac{3}{1200})^4 = 1010$, $k_6 = 1015$, $k_8 = 1020,17$ динара.

286. 48000 динара.

Глава IV – Увод у геометрију

287. а) Треба доказати да постоји раван α таква да су јој a и $\{A\}$ подскупови, а затим да је таква раван јединствена.
(1) На основу аксиоме 1, на правој a постоје две различите тачке B и C. Тачке A, B, C су три неколинеарне тачке и оне по аксиоми 3 одређују раван α. Пошто тачке B и C праве a припадају равни α, то по аксиоми 5 $a \subset \alpha$. Како је и $\{A\} \subset \alpha$, постојање равни чији су a и $\{A\}$ подскупови је доказано.
(2) Претпоставимо да раван α није јединствена. Тада би постојала раван β таква да $a \subset B$ и $\{A\} \subset B$, па би по аксиоми 3 морало бити $\alpha = \beta$.
б) Нека се праве a и b секу у тачки S. На правој a, постоји по аксиоми 1 и тачка $A \neq S$. Сада посматрамо праву b и тачку A и резонујемо као у делу задатка а).

288. Претпоставимо супротно да a и b имају две различите заједничке тачке A и B. Међутим, онда би, по аксиоми 1, било $a = b$, што је супротно услову задатка.

289. Претпоставимо супротно да је $a \cap b = \{S\}$. Тада би било $S \in a \subset \alpha$ и $S \in b \subset \beta$, па би било $S \in \alpha$ и $S \in \beta$, што би значило, по аксиоми 6, да различите равни α и β имају заједничку праву, односно да нису паралелне.

290. Претпоставимо да права p има са равни α две заједничке тачке A и B. Тада по аксиоми 5 права p припада равни α, па и $P \in \alpha$, што је супротно претпоставци задатка.

291. Упутство: Доказати да све ове праве припадају равни одређеној тачком A и правом p.

292. Упутство: Доказати да ако је $\alpha \cap \beta = p$, тада p и γ могу имати највише једну заједничку тачку.

293. Пошто се праве m и n секу, оне одређују једну раван. Сада још треба доказати, применом аксиоме 5, да праве a и b припадају тој равни.

294. Ако је $\alpha = \beta$, тада $a \subset \beta$, па је $a \| \beta$. Ако је $\alpha \cap \beta = \emptyset$, тада због $a \subset \alpha$, важи да је $a \cap \beta = \emptyset$, па је $a \| \beta$.

295. Упутство: Анализирати случајеве: а) $a = b$ и $a \neq b$; б) $\alpha = \beta$, $\alpha \cap \beta = \emptyset$ и $\alpha \cap \beta = p$; б) $\alpha = \beta$ и $\alpha \neq \beta$.

296. Упутство: претпоставимо супротно да праве A_1B_1 и A_2B_2 припадају истој равни.

297. Упутство: на свакој од ових правих изабрати по једну тачку, тако да те три тачке не буду колинеарне, итд ...

298. а) $\dfrac{6\cdot 5}{2} = 15$; б) $\dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2} = 10$. *Напомена.* У задатку се ради о комбинацијама без понављања: а) $C_6^2 = \binom{6}{2} = 15$; б) $C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$. На сличан начин могу се решавати и задаци 299 – 303, као и 316 – 319.

299. Три неколинеарне тачке одређују три праве, а три колинеарне - само једну. Дакле, тачкама датог скупа одређено је укупно $\dfrac{7\cdot 6}{2} - 6\cdot 2 = 9$ правих.

300. $\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} - 6\cdot 3 = 102$.

301. $\dfrac{7\cdot 6}{2} = 21$.

302. Из $\dfrac{n(n-1)}{2} = 3n$ налазимо $n = 7$.

303. Из $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2} = 12\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}$ добијамо $n = 38$.

304. По дефиницији паралелности правих следи да праве a и b припадају некој равни α. Докажимо сада да је та раван јединствена. По аксиоми 1 из 4.1. на правој a постоје две различите тачке A и B и на правој b постоји тачка M. Тачке A, B и M су неколинеарне па (по аксиоми 3 из 4.1.) одређују једну раван β. Раван β садржи праву a (по аксиоми 5 из 4.1.) и праву b по аксиоми паралелности па је β одређена правим a и b. Међутим β садржи и тачке A, B и M, па је $\beta = \alpha$.

305. Претпоставимо супротно, да c не сече b. Пошто су то праве једне равни, значи да је $c\|b$. Нека је $c\cap a = \{M\}$. Сада постоје две праве a и c које садрже тачку M и обе су паралелне правој b. Ово је супротно аксиоми паралелности. Дакле, мора права c сећи и праву b.

306. Видети претходни задатак.

307. а) Ако би било $c\|a$ и $c\|b$, због транзитивности релације $\|$ морало би да буде и $a\|b$. б) Не. в) Не.

308. а) 7; б) 8.

309. $\dfrac{4\cdot 3}{2} = 6$.

310. Пет равни је одређено једном од правих p, q и једном од тачака са друге равни. Две равни одређују ове праве са тачком F, а шест равни одређује тачка F са по једном тачком правих p и q. Дакле, укупно је одређено 13 равни.

311. Нека је $A\in a$, $A\in c$ и $c\|b$. Праве a и c одређују раван α. Због $c\|b$ биће и $b\|\alpha$.

312. Претпоставимо најпре да се праве a и b секу у некој тачки M. Тада $M\in a$, $a\subset\alpha$, па и $M\in\alpha$. Сада две различите тачке B и M праве b припадају равни α, па следи да и $b\subset\alpha$, што је немогуће. Немогуће је и да буде $b\|a$, јер кроз тачку B постоји само једна права паралелна правој a и та је у равни α. Дакле, морају праве a и b бити мимоилазне.

313. Упутство – претпоставити супротно да је $b\|\pi$.

315. Ако је $\alpha = \beta$, онда је и $a = b$, дакле $a\|b$. Ако је $\alpha\neq\beta$, онда је $a\cap b = \emptyset$, а како a и b припадају равни γ, то је $a\|b$.

316. Ако је $a\subset\alpha$, тада је $\pi = \alpha$. Ако је $a\cap\alpha = \emptyset$ тада можемо одредити праву b равни α и тачку A праве a, а затим праву p такву да је $p\|b$ и $A\in p$. Раван одређена правом a и правом p биће тражена раван π.

317. Претпоставимо, супротно тврђењу задатка, да се равни α и β секу по некој правој r. Пошто се праве p и q секу, на основу аксиоме паралелности бар једна од њих мора сећи праву r, што значи да бар једна од њих продире раван α, што противречи претпоставци да је $p\|\alpha$ и $q\|\alpha$. Дакле, равни α и β су паралелне.

318. Размотримо два случаја.
(1) Једна од датих равни сече друге две - на пример $\alpha\cap\beta = c$, $\alpha\cap\gamma = b$. Ако је $b\|c$, тада је права c паралелна са сваком од равни α,β,γ. Ако је $c\cap b = \{A\}$, тада је $\alpha\cap\beta\cap\gamma = \{A\}$.
(2) Свака од датих равни је паралелна са неком од преостале две. У овом случају су све три равни паралелне, па је свака права једне од њих паралелна свим трима равнима.

319. а) $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} + 1$; б) $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3\cdot 2} + 1$.

320. Тачке A, B и C припадају правој $p = \alpha \cap \beta$.

321. Само симетричност.

322. Нека су α и β равни одређене тачком A и правом p, односно q. Пошто $A \in \alpha$ и $A \in \beta$, то се равни α и β секу по некој правој s. Нека је r права која садржи тачку A и не припада ни равни α ни равни β. Права r је мимоилазна са p, јер би, због $A \in r$ и $A \in \alpha$, ако би p и r били у истој равни тада би било и $r \subset \alpha$. На исти начин се доказује да су праве r и q мимоилазне.

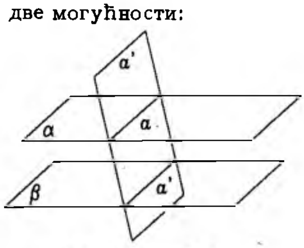
323. Нека је A тачка таква да $A \notin a$ и $A \notin b$ и ниједна од равни одређених тачком A и правом a, односно b није паралелна оној другој правој. Тада постоје праве a' и b' такве да $A \in a'$, $A \in b'$, $a' \| a$ и $b' \| b$. Праве a' и b' се секу, па одређују раван α. Тада је $a \| \alpha$ јер је $a \| a'$ и $a' \subset \alpha$. Исто тако и $b \| \alpha$.

324. У равнима α и β постоје праве a, односно b, такве да је $c \| a$ и $c \| b$. Због транзитивности релације паралелности правих биће и $a \| b$. Сада је $a \| \beta$, па мора бити $a \cap p = \emptyset$. Међутим, праве a и p припадају равни α и оне, дакле, морају бити паралелне. Пошто је $c \| a$ и $a \| p$, то је и $c \| p$.

325. Упутство: Нека је $A \in a$ и $A \in b_1$ тако да је $b_1 \| b$, $B \in b$, $B \in a_1$ и $a_1 \| a$. Нека је α раван одређена правим a и b_1, а β раван одређена правим b и a_1.

326. Праве a и b не могу бити паралелне, јер би тада и због $a \subset \pi$, било $b \| \pi$. Претпоставимо сада да се праве a и b секу у некој тачки M. Тада је $M \neq B$, а како $M \in a$, то и $M \in \pi$, па би (по аксиоми 5 из 4.1.) и права b припадала равни π, што је у супротности са претпоставком задатка. Дакле, праве a и b морају бити мимоилазне.

327. Ако је $a \subset \beta$, тада постоје две могућности:



Сл. уз зад. 327

(1) $\alpha \cap \beta = a$, (2) $\alpha = \beta$.

У првом од тих случајева $(\alpha \cap \beta) \| a$, а у другом је $\alpha \| \beta$. Ако је $a \cap \beta = \emptyset$, онда је или $\alpha \cap \beta = \emptyset$, па је $\alpha \| \beta$, или је $\alpha \cap \beta = a'$, (в. сл.). У овом другом случају све заједничке тачке равни α и β припадају правој a', па пошто је $a \cap \beta = \emptyset$, то се праве a и a' не секу. Обе праве a и a' припадају једној равни α, па је $a \| a'$.

328. Нека је α раван одређена правом a и тачком C, а β раван одређена правом b и тачком C. Тада се равни α и β секу - нека је $\alpha \cap \beta = p$. Ако је $p \| a$ или $p \| b$ тада не постоји ниједна оваква права, а ако p сече и a и b тада је то једина оваква права.

329. Нека је $\gamma \cap \alpha = a$ и $\gamma \cap \beta = \emptyset$. Тада постоје две равни α и γ обе паралелне равни β и такве да садрже праву a. Доказаћемо да је ово немогуће. Нека је $A \in a$, $b \in \beta$, и нека није $b \| a$. Пошто $A \notin b$ то b и A одређују раван π. Раван π сече равни α и γ редом по правим p и q. Обе те праве су паралелне правој b, а различите, што је немогуће по аксиоми паралелности.

330. Упутство. Посматрати неку раван π која садржи дату праву.

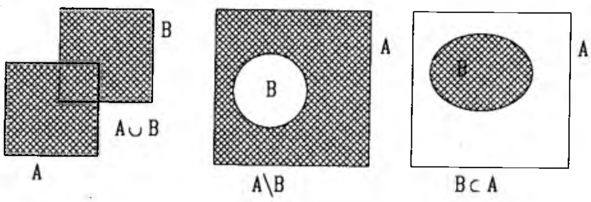
331. Нека је S_1 заједничка тачка дужи a_2 и a_3, S_2 заједничка тачка дужи a_3 и a_1 и S_3 заједничка тачка дужи a_1 и a_2. Тачке S_1, S_2, S_3 припадају једној правој. Ако су бар две од њих истоветне, то је заједничка тачка све три дужи. У противном, мора једна од ове три тачке бити између остале две - на пример: $S_1 - S_2 - S_3$. Како $S_1 \in a_2$ и $S_3 \in a_2$, тада и $S_2 \in a_2$, па тачка S_2 припада свакој од дужи a_1, a_2, a_3.

332. а) 0; б) 1; в) 2.

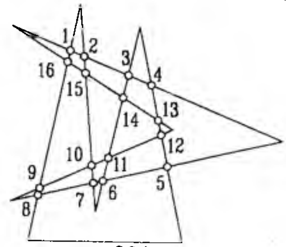
333. а) Нека тачке M и N припадају $A \cap B$. Тада $M, N \in A$ и $M, N \in B$, па како су скупови A и B конвексни и све тачке C такве да је $A - C - B$ припадају скуповима A и B, па и њиховом пресеку. Дакле, $A \cap B$ је конвексан скуп.

б), в), г) Скупови $A \cup B$ и $A \setminus B$, а ни подскуп конвексног скупа не морају бити конвексни, што се види из примера на слици.

д) Нека се скуп A састоји само из једне тачке. Тада је импликација $M, N \in A \Rightarrow (\forall C)(M - C - N \Rightarrow C \in A)$ тачна, јер је за $M \neq N$ исказ $M, N \in A$ нетачан. Дакле, A је конвексан скуп.



Сл. уз зад. 333

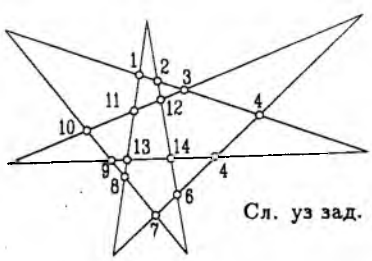


Сл. уз зад. 334

334. Ниједна права не може сећи странице многоугла у непарном броју тачака (у супротном - при кретању по правој у одређеном смеру, ушавши последњи пут унутар многоугла, не бисмо могли напустити његову унутрашњост). Због овога свака страница четвороугла може имати највише четири тачке пресека са контуром петоугла. Одавде следи да укупан број пресечних тачака не може бити већи од $4 \cdot 4 = 16$. Да може бити 16, види се на слици.

335. а) $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (5 - 3) = 5$;

б) На сваком делу не може бити више од четири самопресека, јер дуж не може сећи себе и две суседне дужи. Максималан број самопресека је $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (7 - 3) = 14$. Пример да се овај број може достићи је седмострanична "звезда", (в. сл.).



Сл. уз зад. 335

Глава V – Геометрија

336. а) Шест дужи: AB, BC, CD, AC, BD, AD. б) Сваку од три последње дужи можемо написати као збир, а сваку од првих пет дужи у облику разлике неке две дужи из овог скупа. в) $BC = AD - (AB + CD), BC = AD - AB - CD$.

337. $8cm$ и $24cm$. **338.** $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$. **339.** $9cm$.

340. Растојање средишта је у овом случају једнака $\frac{2}{3}$ дужине сваке од ових дужи, па је та дужина $30cm$.

342. а) не; б) да; в) да; г) не. У случају б) постоји бесконачно много таквих парова, а у случају в) само један пар.

343. Како је $\alpha+\beta=90^\circ$, $\alpha+\gamma=180^\circ$, $\beta+\delta=180^\circ$, биће (из друге и треће једнакости) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$, па је $\gamma+\delta=270^\circ$.

344. α је туп, а β оштар угао, па је $\alpha>\beta$.

345. 135° и 45°.

346. $\frac{3R}{2}, \frac{R}{2}$ и $\frac{3R}{2}$, где је R-прав угао.

347. Четири од преосталих углова су $\frac{7}{5}R$, а три $\frac{3}{5}R$.

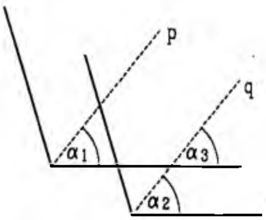
348. а) опружен угао; б) угао од 0°.

349. Како је $\alpha+\beta=180^\circ$, то је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90^\circ$.

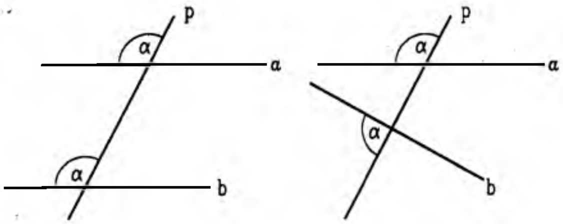
350. а) $\frac{6}{5}R$ и $\frac{4}{5}R$; б) $\frac{6}{13}R$ и $\frac{20}{13}R$; в) $\frac{6}{5}R$ и $\frac{4}{5}R$.

351. $R+\frac{2}{5}R+R-\frac{1}{3}R=\frac{31}{15}R$.

352. У свим случајевима праве су паралелне, ако и само ако су поменути углови одговарајући (напр. сагласни), односно нису паралелне у супртном случају (в. сл.).



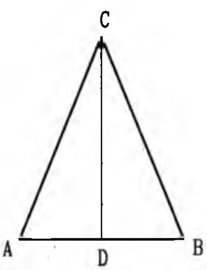
Сл. уз зад. 352



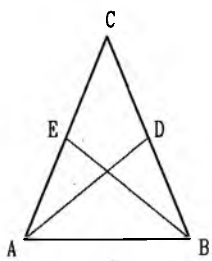
Сл. уз зад. 354

354. Углови α_1 и α_2 су једнаки као половине једнаких углова (в. сл.), углови α_2 и α_3 су једнаки (сагласни трансверзални углови), па су и углови α_1 и α_3 једнаки, одакле следи да су праве p и q - симетрале датих углова паралелне.

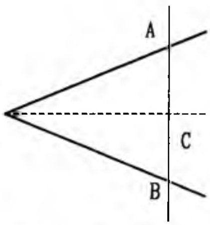
355. а) $\triangle ACD\cong\triangle BCD$ (в. сл.) па је $\sphericalangle ADC=\sphericalangle CDB$, а како су они суплементи, оба су права, па је $CD\perp AB$. Из $AD=DB$ следи да је CD - тежишна дуж.
б) Искористити подударност троуглова ACD и BCD, као код а).
в) Нека су AD и BC симетрале углова $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ (в. сл.). Биће $\triangle ABD\cong\triangle ABE$ јер је AB заједнича страница, $\sphericalangle B=\sphericalangle A$ и $\sphericalangle DAB=\sphericalangle EBA$. Дакле $AD=BE$.



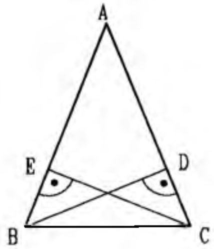
Сл. уз зад. 355а



Сл. уз зад. 355в



Сл. уз зад. 357



Сл. уз зад. 358в

356. Применити резултате претходног задатка.

357. Из подударности троуглова ACO и BCO (в. сл.) следи да је $AO = OB$.

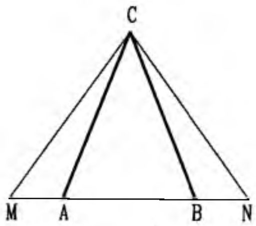
358. в) Подударни су троуглови ABD и ACE (в. сл.), па је $AB = AC$.

359. Троуглови MAC и NBC (в. сл.) су подударни, па је $MC = CN$.

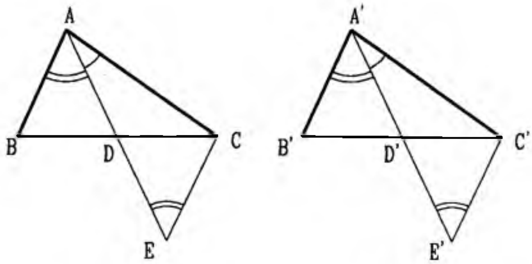
360. Нека је D тачка дужи AB таква да је $ED \| AC$. Тада је троугао BED једнакокраки, па је $ED = EB = AF$. Сада добијамо $\Delta AFM \cong \Delta MDE$, при чему је M пресечна тачка дужи AB и EF.

361. Троугао ABM је једнакокраки, па је $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BAM$. С друге стране $\sphericalangle BAM = \sphericalangle AMN$ (трансверзални углови).

362. в) Троуглови BCC_2 и $B'C'C_2'$ су подударни, па је $\sphericalangle CBC_2 = \sphericalangle C'B'C_2'$ и према томе $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$. Исто тако, троуглови BB_2C и $B'B_2'C'$ су подударни, одакле је $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.
г) Ако су D и D' тачке симетричне тачкама A и A' у односу на A_1, односно A_1', биће $\Delta ACD \cong \Delta A'C'D'$, па је $\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle A_1'A'C'$. Сада је $\Delta AA_1C \cong \Delta A'A_1'C'$, па је $A_1C = A_1'C'$ и, према томе, $BC = B'C'$.



Сл. уз зад. 359



Сл. уз зад. 363д

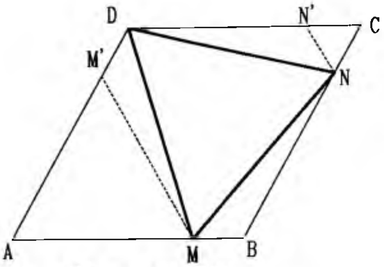
363. Троуглови у примерима а), б) и д) су подударни, а у примерима в) и г) не морају бити подударни. д) Нека је $AD = A'D'$ тежишна дуж и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B'A'D'$, $\sphericalangle CAD = \sphericalangle C'A'D'$ код троуглова ABC и $A'B'C'$. Нека су, даље, E и E' тачке симетричне са A, односно са A, односно A', у односу на D, тј. D'. Биће $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ и $\Delta A'B'D' \cong \Delta E'C'D'$, па је $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DEC$ и $\sphericalangle B'A'D' = \sphericalangle D'E'C'$. Одавде је $\Delta AEC \cong \Delta A'E'C'$, па је $AC = A'C'$ и $CE = C'E'$, а како је $CE = AB$ и $C'E' = A'B'$, биће и $AB = A'B'$.

364. Троуглови BCD и $B'C'D'$ су подударни, па је $DB = D'B'$, а одатле $AB - DB = A'B - D'B'$, тј. $AD = A'D'$.

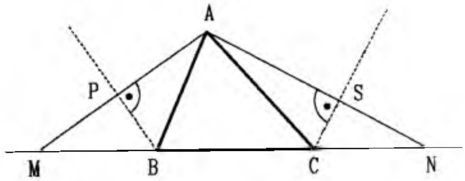
366. Нека су N' и M' тачке на CD и DA такве да су троуглови NCN' и AMM' једнакостранични. Како је (в. сл.) $MB + BN = BC = DA$, то је $MB = NN' = DM'$, одакле следи да су троуглови MDM', NMB и DNN' подударни, па је $DM = MN = ND$.

367. Троуглови ASC и NSC су подударни, па је $AC = CN$ (в. сл.). На исти начин $AB = BM$.

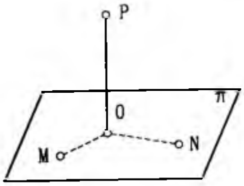
368. а) Не. б) Не. в) Раван.

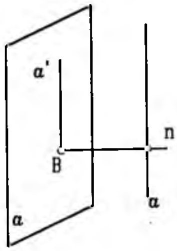


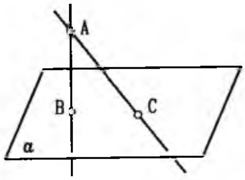
Сл. уз зад. 366



Сл. уз зад. 367







Сл. уз зад. 369

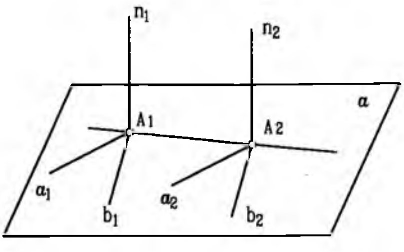
Сл. уз зад. 373

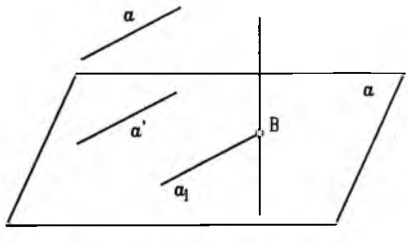
Сл. уз зад. 374

369. Нека је O пројекција тачке P у равни π и M и N две тачке поменутог скупа (в. сл.) Због $\Delta OMP \cong \Delta ONP$, биће $OM = ON$, па је тражени скуп - круг са средиштем у тачки O.

370. Нека су $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ три тачке такве да је $OA = OB = OC$ и $P \neq O$ тачка полуправе Op. Из подударности троуглова AOP, BOP и COP следи $PA = PB = PC$, па по претходном задатку тачке A, B, C припадају кругу са средиштем у подножју нормале из P на α. Међутим, круг има само једно средиште - O, па је $PO \perp \alpha$.

371. Нека су A_1 и A_2 продорне тачке правих n_1 и n_2 у α и a_1, b_1, a_2, $b_2 \subset \alpha$ тако да $A_1 \in a_1, b_1$ и $A_2 \in a_2, b_2$ и $a_1 || a_2, b_1 || b_2$ (в. сл.). Тада је $a_1 \perp n_1, b_1 \perp n_1$, па је и $\sphericalangle(a_2, n_2) = \sphericalangle(b_2, n_2) = \sphericalangle(a_1, n_1) = \sphericalangle(a_2, n_2)$, дакле $n_2 \perp a_2$ и $n_2 \perp b_2$, тј. $n_2 \perp \alpha$.





Сл. уз зад. 371

Сл. уз зад. 372

372. Нека је $b \cap \alpha = \{B\}$ (в. сл.), $a' || a$, $a' \subset \alpha$, $a_1 \subset a'$, $a_1 || a'$, $B \in a_1$. Из $a || a_1$, $b \perp a_1$ следи да је $b \perp a$.

373. Нека је $n \cap \alpha = \{A\}$ (в. сл.). Тачка A и права a одређују раван β, која сече α по правој $a'(A \in a')$. Праве a' и a су паралелне јер припадају истој равни β, а ако би се секле из те пресечне тачке би постајале две нормале на n што је немогуће. Из $a || a'$ следи $a || \alpha$.

374. Нека је $AB \perp \alpha$ и $C \in \alpha$, $C \neq B$ (в. сл.). Тада је у правоуглом ΔABC хипотенуза AC дужа од катете AB.

375. Из датих услова следи да су троуглови ABS и CDS једнакокраки па је $SO \perp AB$ и $SO \perp CD$. Пошто је права SO нормална на две различите праве равни α, то је $SO \perp \alpha$.

376. Круг у равни, која садржи a, чији је пречник једнак одстојању тачке A од праве a.

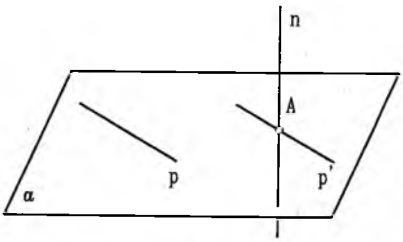
377. Нека је B' тачка симетрична тачки B у односу на α. C је тачка у којој права AB' продире раван α.

378. Из подударности троуглова PAQ и QBP следи да је $AQ = BP$; затим, подударни су троуглови ABP и BAQ, па је $\sphericalangle BAP = \sphericalangle ABQ$.

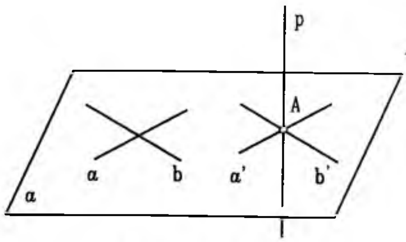
379. Нека је $p = \alpha \cap \beta$ и $C \in p$ тако да је $AC \perp p$. Ако AB не припада β, тада би из тачке A постојале две нормале - AB и AC на раван α.

380. Ако $n \subset \beta$, очигледно је да је $\beta \perp \alpha$. Претпоставимо да права n не припада равни β. Тада постоји права m, таква да је $m \| n$ и $m \subset \beta$. Пошто је $n \perp \alpha$ и $m \| n$, то је $m \perp \alpha$, па раван β садржи праву нормалну на раван α, те је и $\beta \perp \alpha$.

381. Нека је $n \cap \alpha = \{A\}$ (в. сл.) и p произвољна права равни α. Означимо са p' праву равни α која садржи тачку A и паралелна је правој p. Пошто је $n \perp \alpha$, то је $n \perp p'$, а због $p \| p'$, биће и $n \perp p$.



Сл. уз зад. 381



Сл. уз зад. 382

382. Како је $p \perp a$ и $p \perp b$ то постоје у равни α праве a' и b' такве да $A \in a'$, $A \in b'$ ($\{A\} = p \cap \alpha$) и $a' \| a$, $b' \| b$ (в. сл.). Пошто је $p \perp a$, то је $p \perp a'$, а такође из $p \perp b$ следи $p \perp b'$. Сада је права p управна на две праве равни које садрже њену продорну тачку, па је $p \perp \alpha$.

383. Из $CA \perp BA$ и $CA \perp BD$ следи да је права CA нормална на раван α одређена тачкама A, B и D, па и на праву DA те равни. Слично се доказује и да је $AB \perp DA$.

384. Како је $\beta \perp \alpha$ и $\gamma \perp \alpha$, то је и $AS = \beta \cap \gamma \perp \alpha$, па је и $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, тј. троуглови SAB и SAD су правоугли. Пошто је $SA \perp \alpha$ и $AB \perp BC$, то је (теорема о трима нормалама) и $SB \perp BC$. Такође из $SA \perp \alpha$ и $AD \perp DC$ следи $SD \perp DC$.

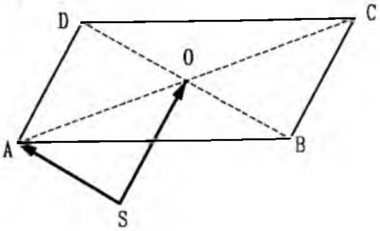
387. Кроз тачке A и B повући праве паралелне полуправим Ox и Oz, па се добија паралелограм $ACBD$. Компоненте су $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

388. Из троугла ACD следи $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ или $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{b}$, а из троугла ASO $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AO}$ (в. сл.). Како је $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$ то је $\overrightarrow{SO} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$.

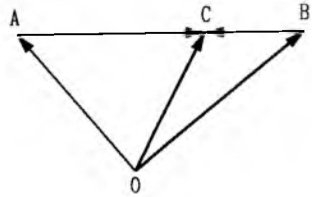
389. Нацртати слику. $\overrightarrow{ED} = \vec{p}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{q}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + \vec{q}$; $\overrightarrow{EF} = -\vec{p} - \vec{q}$.

390. Нацртати слику. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$; $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$; $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; $\overrightarrow{FA} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

391. Из троугла OCA је $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, а из троугла OCB је $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ (в. сл.). Сабирањем наведених једнакости добијамо $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, јер је збир супротних вектора $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ једнак нули.



Сл. уз зад. 388



Сл. уз зад. 391

392. Из наведене једнакости $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ следи једнакост $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, односно $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, одакле закључујемо да су тачке A, B и C колинеарне и дужи AC и BC једнаке.

393. Нека су A_1 и B_1 средишта страница BC и CA троугла ABC. Из троугла B_1A_1C је $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1}$, а из четвороугла ABA_1B_1 је $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$. Сабирањем наведених једнакости добијамо $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, јер су збирови супротних вектора $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{B_1A}$ једнаки нули.

394. (В. сл.) $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{OD})$ и $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{OC})$, па је $\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a}$, односно $\overrightarrow{OD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, одакле је $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{a}$.

395. Одредити средиште D одсечка CB и повући DM. Даље решавати као претходни задатак. Добија се $\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$.

396. Конструисати правилни шестоугао $A_1A_2A_3A_3A_4A_5A_6$ и повући дијагонале A_1A_3, A_2A_4, A_1A_4, A_1A_5, A_4A_6. Тада из паралелограма $A_1A_2A_4A_5$ следи $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_5} = \overrightarrow{A_1A_4}$, а из паралелограма $A_1A_3A_4A_6$ да је $\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_6} = \overrightarrow{A_1A_4}$, па је заиста $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_1A_5} + \overrightarrow{A_1A_6} = 3\overrightarrow{A_1A_4}$.

397. Како је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, то је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

398. $4\overrightarrow{OP} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = 2 \cdot \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + 2 \cdot \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

399. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{M_1M_4} - \overrightarrow{M_2M_3})$.

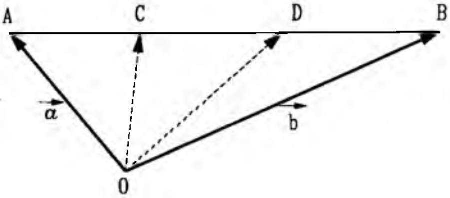
400. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{M_2M_3} + 2\overrightarrow{M_4M_5} + 2\overrightarrow{M_6M_7}$.

401. а) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1}$, па је $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{0}$.

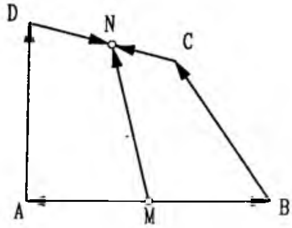
б) Пошто је $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$, то је (на основу а)): $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{0}$.

в) Пошто је $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}$, $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT}$, то је $3\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT}$, одакле се, на основу б), добија: $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

402. Из четвороугла $AMND$ је $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$, а из четвороугла $MBCN$ је $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ (в. сл.). Сабирањем наведених једнакости добијамо да је $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, јер су збирови супротних вектора $\overrightarrow{DN}$ и $\overrightarrow{CN}$, односно $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ једнаких нули.

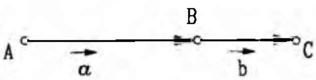


Сл. уз зад. 394

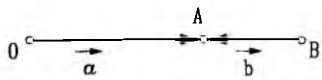


Сл. уз зад. 402

403. Према задатку 391 је $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Сабирањем наведених једнакости добијамо $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, јер су $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CB}$ парови супротних вектора чији су збирови једнаки нули.



Сл. уз зад. 404а



Сл. уз зад. 404б

404. Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ су колинеарни ако су колинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, или ако је један од њих нула вектор (в. сл.). На сл. а) приказани су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ исто усмерени а на сл. б) супротно усмерени ($\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$).

405. Пошто су $\vec{x}$ и $\vec{y}$ колинеарни, то постоји реалан број k такав да је $\vec{x} = k\vec{y}$. То значи да је $2\vec{i} + \vec{j} = ak\vec{i} - k\vec{j}$, тј. $(2 - ak)\vec{i} + (1 + k)\vec{j} = \vec{0}$. Пошто су вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линеарно независни, то је $2 - ak = 0$ и $1 + k = 0$. Решење овог система је $k = -1$, $a = -2$.

б) $a = -\frac{3}{2}$; в) $a = -15$.

406. а) Нека је $\vec{a} = k_1\vec{b} + k_2\vec{c} = k_1(\vec{i} + \vec{j}) + k_2(\vec{i} - \vec{j}) = (k_1 + k_2)\vec{i} + (k_1 - k_2)\vec{j}$. Треба да буде $k_1 + k_2 = 1, k_1 - k_2 = -3$. Решавањем овог система једначина се налази да је $k_1 = -1, k_2 = 2$, па је $\vec{a} = -\vec{b} + 2\vec{c}$.

б) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$; в) $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

407. а) Треба да буде $\vec{x} = k\vec{y}$. Добија се $a = 1, b = 8$. б) $a = -\frac{1}{5}, b = 15$.

408. Одредимо реалне бројеве k_1 и k_2 тако да је $\vec{z} = k_1\vec{x} + k_2\vec{y}$. Релација $4\vec{k} - 2\vec{i} = k_1(3\vec{i} - 4\vec{j}) + k_2(2\vec{j} - 3\vec{i})$, може се написати у облику: $(-2 - 3k_1)\vec{i} + (4k_1 - 2k_2)\vec{j} + (4 + 3k_2)\vec{k} = \vec{0}$, одакле се налази $k_1 = -\frac{2}{3}$ и $k_2 = -\frac{4}{3}$, па је $\vec{z} = -\frac{2}{3}\vec{x} - \frac{4}{3}\vec{y}$ и вектори $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ су компланарни.

б) $\vec{z} = 3\vec{x} + \vec{y}$.

409. Пошто је $\vec{a} + \vec{b} = \lambda\vec{c}$ и $\vec{b} + \vec{c} = \mu\vec{a}$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{R})$, то је $\vec{b} = \lambda\vec{c} - \vec{a}$ и $\vec{b} = \mu\vec{a} - \vec{c}$, па је $\lambda\vec{c} - \vec{a} = \mu\vec{a} - \vec{c}$, одакле је $(\lambda + 1)\vec{c} = (\mu + 1)\vec{a}$, а како су $\vec{a}$ и $\vec{c}$ неколинеарни вектори мора бити $\lambda = \mu = -1$. Из прве једнакости је онда $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$, тј. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

410. $90° + \frac{\alpha}{2}$, $90° + \frac{\beta}{2}$, $90° + \frac{\gamma}{2}$.

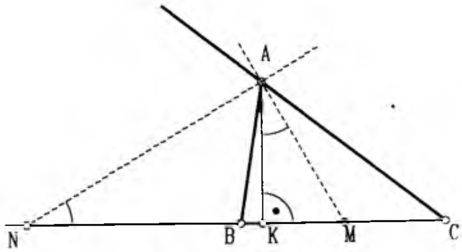
411. $60°$.

412. а) $68°30'$; б) $70°$; в) $58°$; д) $62°30'$.

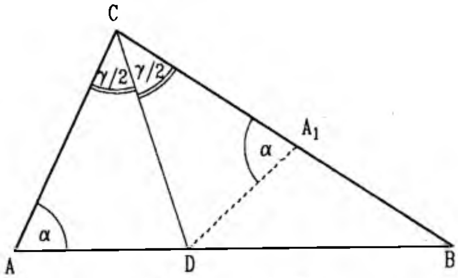
414. Нека је A_1 тачка симерична тачки A у односу на теме C правог угла троугла ABC и $\sphericalangle ABC = 30°$ Тада је $\sphericalangle ABA_1 = 60°$ и троугао ABA_1 је једнакостраничан, па је $AC = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}AB$.

416. а) $90° - \gamma$; б) $\frac{\gamma}{2}$.

417. а) $116°, 124°, 120°$.



Сл. уз зад. 419



Сл. уз зад. 420

418. Нека је α угао на основици ΔABC. Из ΔADB добијамо да је $\alpha + \frac{\alpha}{2} + 75° = 180°$, па је $\alpha = 70°$. Следи да је $\sphericalangle ACB = 40°$.

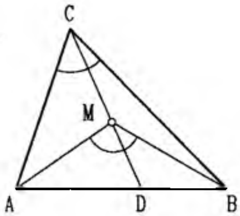
419. Нека су K, M, N редом подножје висине и пресеци симетрала унуташњег и спољашњег угла са правом BC (в. сл.). Претпоставимо да $K \in BM$ (шта ако $K \notin BM$?).

а) $\sphericalangle KAM = \sphericalangle BAM - \sphericalangle BAK = \frac{\alpha}{2} - (90° - \beta) = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

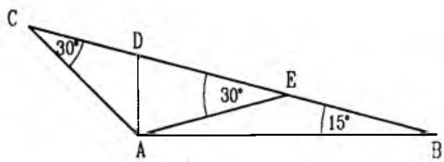
б) $\beta = \sphericalangle BNA + \sphericalangle BAN = \sphericalangle BNA + 90° - \frac{\alpha}{2}$.

420. Нека је CD симетрала угла код темена C ΔABC у коме је $AC < BC$, тј. $\alpha > \beta$ (в. сл.) и A_1 тачка симетрична тачки A у односу на CD. Угао DA_1B троугла BDA_1 једнак је $180° - \alpha$ и већи је од угла β (у противном би било $\alpha + \beta > 180°$) па је $BD > DA_1 = AD$.

421. Продужимо CM до пресека D са страницом AB (в. сл.). Чињеница да је спољашњи угао троугла већи од несуседног унутрашњег даје нам $\sphericalangle AMD > \sphericalangle ACD$. Слично се доказује да је $\sphericalangle BMD > \sphericalangle BCD$.



Сл. уз зад. 421



Сл. уз зад. 424

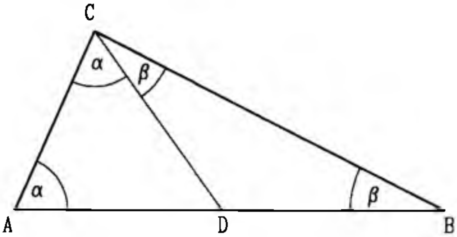
422. У троуглу ABM угао наспрам странице BM је $\frac{\alpha}{2}$, а угао наспрам странице AB је $180° - \beta - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + \gamma > \frac{\alpha}{2}$.

423. Угао код темена P у ΔPBC је туп, па следи $PC < BC$. Слично, угао код Q у ΔQPC је туп, па је $PQ < PC$.

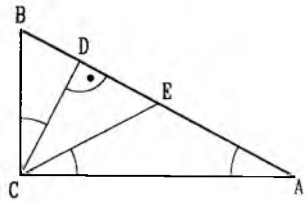
424. Нека је E средиште дужи BD (в. сл.). Тада је $AE = DE = EB$, $\sphericalangle AED = 30°$, ΔAEC једнакокраки и $AE = AC$.

425. а) Нека је у троуглу ABC $AD = DC = BD$ (в. сл.) Пошто су троуглови ADC и BCD једнакокраки, то је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD = \alpha$ и $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DBC = \beta$. Збир углова у троуглу ABC је $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 2(\alpha + \beta) = 180°$, па је $\alpha + \beta = 90°$ и троугао је правоугли.

б) Нека је у троуглу ABC $\sphericalangle C = 90°$ и $AD = DB$. Нека је E тачка таква да је $C - D - E$ и $DE = CD$. Тада је $\Delta ADE \cong \Delta BDC$ (по две једнаке странице и угао између њих). Одавде је $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DEA$, па је $AE \| CB$, па како је $BC \perp AC$, то је и $EA \perp AC$. Правоугли троуглови ABC и ECA су, сада, подударни, па су њихове хипотенузе AB и CE једнаких дужина. Одатле следи да је $CD = \frac{1}{2}AB$.



Сл. уз зад. 425



Сл. уз зад. 426

426. Уз ознаке као на слици имамо да је ΔACE једнакокраки (зашто?), па је $\sphericalangle ECA = \sphericalangle CAE = 90° - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$. Следи да углови ACB и ECD имају заједничку симетралу.

427. Имамо (в. сл.) да је ΔABT једнакокраки и правоугли, па је $CD = 3TD = 3AD = \frac{3}{2}AB$.

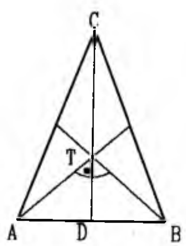
428. Троугао BNM је једнакокраки, па је $\sphericalangle MNB = \sphericalangle MBN = x$. Угао ANB је спољашњи угао троугла BNC, па је једнак збиру два несуседна унутрашња угла, па је $\sphericalangle ACB = x - \alpha$, где је $\alpha = \sphericalangle ABM = \sphericalangle CBN$. Како су углови на основици AB једнаки, то је $\sphericalangle BAC = 2\alpha + x$. Из $2(2\alpha+x)+x-\alpha = 180°$ налазимо $3\alpha+3x = 180°$, па је $\sphericalangle ABN = \alpha + x = 60°$.

429. Како је $\sphericalangle MBC = 40°$, то је $\sphericalangle B = 80°$. Из троугла BMC налазимо $\sphericalangle C = 70°$. На крају $\sphericalangle A = 30°$. (У зависности од распореда тачака A, D, M, C може бити и обрнуто: $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle C = 30°$.)

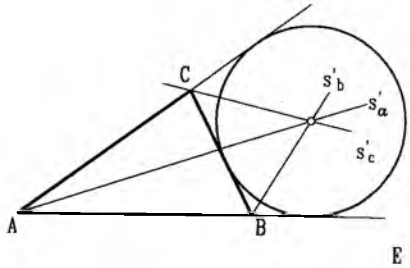
430. $\frac{1}{2}\sphericalangle A + 70° = 90°$ налзимо $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 40°$, тако да је $\sphericalangle C = 100°$.

431. 36°, 36° и 108°. **432.** 40° и 50°. **433.** 15°.

434. Имамо $MQ = \frac{AC}{2}$ (јер је троугао AMC правоугли) и $PR = \frac{AC}{2}$ (средња линија).



Сл. уз зад. 427



Сл. уз зад. 435

435. Означимо са s_a и s'_a симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A и аналогно за остале углове троугла. Свака тачка на s'_b је подједнако удаљена од правих AB и BC; такође, свака тачка на s_c је подједнако удаљена од правих BC и AC. Нека ја P пресечна тачка правих s'_b и s'_C. Следи да је P подједнако удаљена од правих AB и

AC, па зато припада једној од правих s_a или s'_a. Могућност $P \in s'_A$ отпада (зашто?), па имамо $P \in s_a$ (в. сл.).

436. Претпоставимо супротно да је $\alpha - \beta \geq 30°$ и $\beta - \gamma \geq 30°$. Тада је $\alpha - \gamma \geq 60°$, па је $180° = \alpha + \beta + \gamma \geq \beta + 2\gamma + 60°$, тј. $\beta + 2\gamma \leq 120°$. Одавде и из $\beta - \gamma \geq 30°$ следи $\gamma \leq 30°$, односно $\alpha + \beta \geq 150°$. Како је $\alpha - \beta \geq 30°$, добијамо $\alpha \geq 90°$, што противречи услову да је троугао оштроугли.

437. Нека је CO медијана у $\triangle ABC$ и D тачка таква да је $C - O - D$ и $CO = OD$. Из $\triangle BCD$ следи $2CO < CB + BD$, а како је $BD = AC$, то је $CO < \dfrac{AB + BC}{2}$. Из $\triangle AOC$ и $\triangle BOC$ следи: $CO + \dfrac{AB}{2} > AC$, $CO + \dfrac{AB}{2} > BC$. Сабирањем ових неједнакости добијамо $CO > \dfrac{AC + BC}{2} - \dfrac{AB}{2}$.

438. Нека је C' тачка на AB тако да је $CC' \perp AM$. Тада је $MC = MC'$ па је из троугла MBC' $MC' + MB > C'B = C'A + AB$, тј. $MC + MB > AC + AB$, јер је и $AC = AC'$.

439. Нека је S пресек правих CD и AE, а F тачка праве AE таква да је $FD \| BC$. $\sphericalangle AEC$ се лако може израчунати, једнак је $54°$, па је $\triangle CSE$ једнакокраки и $CS = ES$. Једнакокраки је и $\triangle FSD$ ($SF = SD$), па је и $CD = FE$. DF је средња дуж $\triangle ABE$, па је и $AF = FE$.

440. $70°, 110°$.

441. а) Сви добијени троуглови су правоугли и имају једнаке катете.
б) Искористити а).

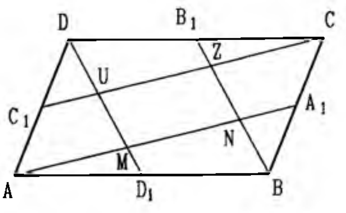
442. а) У сваком паралелограму $ABCD$ симетрале углова код темена A и C су паралелне (зашто?). Центар уписаног круга, ако постоји, мора припадати и једној и другој симетрали, па се оне морају поклапати. Отуда је $\triangle ABC$ једнакокраки, па је $AB = BC$.
б) Центар описаног круга мора бити пресек симетрала дијагонала (зашто?), а то је центар паралелограма. Следи да су дијагонале једнаке.

443. Због $AN \| CL$ и $AN = CL$ биће $ALCN$ паралелограм, па је и $AL \| CN$. На исти начин, $BK \| DM$, и $BK = DM$, $BMDK$ је паралелограм и $DK \| BM$.

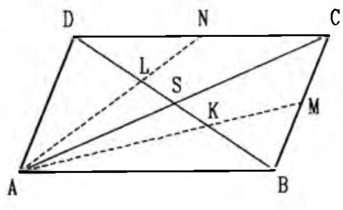
444. $75°$.

445. Из чињенице да је $\sphericalangle BAE : \sphericalangle EAD = 3 : 1$ следи да је $\sphericalangle BAE = \dfrac{3}{4}R$ и $\sphericalangle EAD = \dfrac{1}{4}R$, где је R - прав угао. Даље је $\sphericalangle ADE = \dfrac{3}{4}R = \sphericalangle CAD$, па је $\sphericalangle CAE = \dfrac{3}{4}R - \sphericalangle EAD = \dfrac{1}{2}R$.

446. Нека су U и Z пресеци праве CC_1 са DD_1 и BB_1 (в. сл.). MD_1 је средња дуж троугла ABN, а NA_1 средња дуж $\triangle ZCB$, па је $AM = \dfrac{1}{2}AN$ и $NA_1 = \dfrac{1}{2}CZ$. Троуглови AMD_1 и CZB_1 су подударни, па је $NA_1 = \dfrac{1}{4}AN$, одакле следи $MN = \dfrac{2}{5}AA_1$.



Сл. уз зад. 446



Сл. уз зад. 447

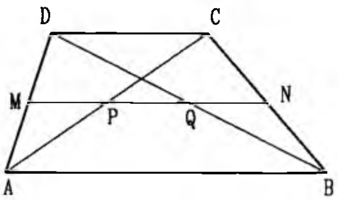
447. Тачке L и K су тежишта троуглова ACD и ABC, па је $DL = LK = KB$.

448. Нека је O пресек дијагонала паралелограма $ABCD$. Тада је $EO = AO - AE = CO - CK = OK$, а како је и $BO = OD$, дијагонале четвороугла $BEDK$ се полове, па је он паралелограм.

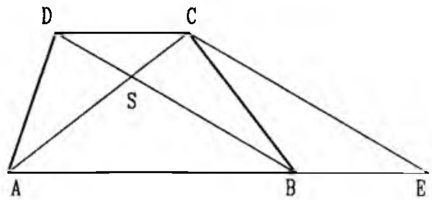
449. Из подударности троуглова NBK и LDM следи $ML = NK$, а из подударности троуглова KCL и NAM следи $KL = MN$.

450. Означимо $\sphericalangle BAC = \varphi$ и $\sphericalangle CAD = \varphi + 20°$. Како је $DE \perp BC$, то је и $AD \perp DH$, па из правоуглог троугла ADH из $\varphi + 20° + 50° + 90° = 180°$ налазимо $\varphi = 20°$. Следи да су углови паралелограма $60°$ и $120°$.

451. Уз ознаке као на слици имамо да су MP и MQ средње линије за ΔCDA и ΔABD, па је $PQ = MQ - MP = \dfrac{AB - CD}{2}$.

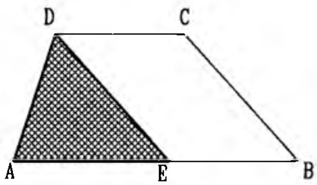


Сл. уз зад. 451

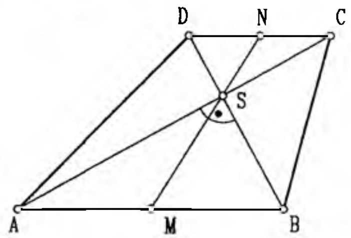


Сл. уз зад. 452

452. Означимо темена трапеза и пресек дијагонала као на слици. Нека је E тачка на продужетку странице AB таква да је $BE = CD$. Како је $BE \| CD$, следи да је $BECD$ паралелограм. Закључујемо да је ΔACE једнакокраки, а потом и да су ΔABS и ΔCDS једнакокраки. Сад из $SA = SB$ и $SC = SD$ следи $\Delta ASD \cong \Delta BSC$.



Сл. уз зад. 453



Сл. уз зад. 456

453. Ако су $ABCD$ и $A'B'C'D'$ дати трапези, нека су E и E' тачке на AB и $A'B'$ такве да је $EB = CD$ и $E'B' = C'D'$. Доказати да је $\Delta AED \cong \Delta\ A'E'D'$, (в. сл.).

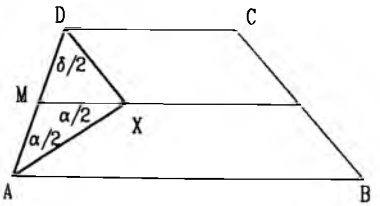
454. Ако је K средиште странице AB и K', A', B' пројекције ових тачака на p, тада је KK' средња линија трапеза $AA'B'B$.

455. Из једнакости тангентних дужи повучених из темена трапеза на уписани круг извести да је крак једнак полузбиру основица.

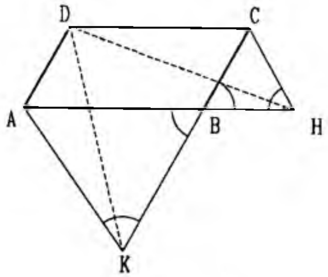
456. Из правоуглих троуглова CSD и ABS (в. сл.) имамо $\sphericalangle NDS = \sphericalangle DSN$ и $\sphericalangle MBS = \sphericalangle MSB$, а како је $\sphericalangle NDS = \sphericalangle MBS$ то је и $\sphericalangle DSN = \sphericalangle MSB$, што значи да тачка S припада дужи MN, па је $MN = MS + SN = AM + CN = \dfrac{AB + CD}{2}$.

457. 5. **458.** 18.5 и 17.5.

459. Да је $\sphericalangle X = 90°$ (в. сл.) следи непосредно из чињенице да су углови $\sphericalangle A = \alpha$ и $\sphericalangle D = \delta$ суплементни, па је $\sphericalangle X = 180° - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2}) = 90°$. Нека је M средиште дужи AD. Тежишна дуж MX правоуглог троугла AXD једнака је половини хипотенузе, па је $MX = MA = MD$, дакле ΔAXM је једнакокраки и $\sphericalangle AXM = \sphericalangle XAM$, одакле следи да је $MX \| AB$, тј. тачка X припада средњој дужи трапеза.



Сл. уз зад. 459

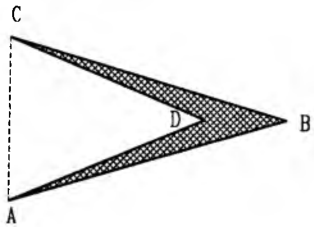


Сл. уз зад. 460

460. Како је $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CBH$, као унакрсни, то једнакокраки троуглови ΔABK и ΔBCH имају све одговарајуће углове једнаке, па је и $\sphericalangle KAB = \sphericalangle BCH$ (в. сл.). Одавде следи да је $\Delta CDH \cong \Delta AKD$, па је и $KD = DH$.

461. Нека су D_1 и C_1 тачке на AB такве да је $DD_1 \| NM \| CC_1$. Троуглови ADD_1 и CC_1B су једнакокраки ($AD_1 = DD_1, CC_1 = BC_1$), па је $\sphericalangle A = \frac{1}{2}\sphericalangle DD_1C_1$, $\sphericalangle B = \frac{1}{2}\sphericalangle CC_1D_1$, а одавде $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$. За доказ у обрнутом смеру посматрати ΔABE, где је E пресек правих AD и BC. Тада је $\sphericalangle AEB = 90°$.

462. Доказати да је четвороугао образован средиштима страница делтоида правоугаоник.



Сл. уз зад. 463

463. Нека је $\alpha < 1°$. Нека су B и D тачке са исте стране праве AC такве да су троуглови ACB и ACD једнакокраки, при чему је угао на основици AC једнак $90° - \frac{\alpha}{2}$ у првом, а $90° - \frac{3\alpha}{2}$ у другом троуглу, (в. сл.). Онда четвороугао $ABCD$ има три угла једнака α.

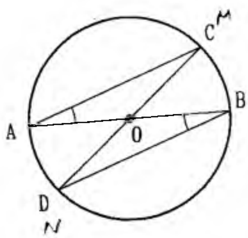
464. Из $(n-2)180° : 360° = 15 : 4$ добијамо $n = 19/2$-апсурд.

465. n се добија из једнакости $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-4)}{2} + 8$; $(n = 10)$.

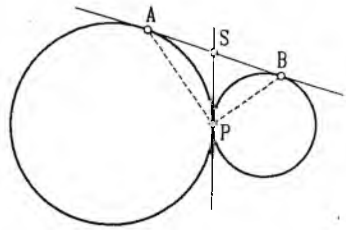
466. Елиминисати α из једнакости $\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$ и $k = \dfrac{2\alpha}{180° - \alpha}$. Добијамо $k = n - 2$.

467. Збир спољашњих углова конвексног многоугла је 360°, па такав многоугао може имати највише 3 тупа спољашња угла и према томе највише 3 оштра унутрашња угла. Оштроугли троуглови су, на пример, конвексни многоуглови са три оштра унутрашња угла.

468. Имамо $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OBN$ (наизменични), па следи да су једнакокраки троуглови OAM и OBN подударни (в. сл.).



Сл. уз зад. 468

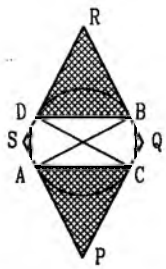


Сл. уз зад. 469

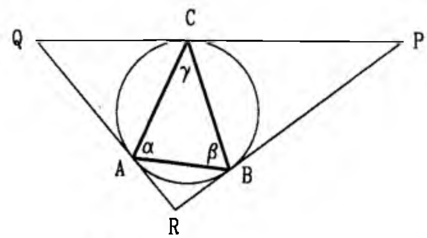
469. Нека је S пресечна тачка тангенте AB и заједничке тангенте у тачки P (в. сл.). Из једнакости тангентних дужи $SA = SP$ и $SP = SB$ следи да тачка P припада кругу над AB као пречником.

470. Нека је O центар кругова, $A, B \in k'$ и нека су AP и BQ тангентне дужи ($P, Q \in k$). Правоугли троуглови OAP и OBQ су подударни јер имају једнаке хипотенузе и по једну катету.

471. Наспрамне странице добијеног четвороугла $PQRS$ су паралелне јер су нормалне на исти пречник (в. сл.). Отуда је и $\sphericalangle APC = \sphericalangle BRD$. Из $\Delta OAC \cong \Delta OBD$ следи $AC = BD$. Сад можемо закључити да су једнакокраки троуглови ACP и BDQ подударни, па је $AP = PC = BR = RD$. На исти начин добијамо и $CQ = QB = DS = SA$.



Сл. уз зад. 471



Сл. уз зад. 472

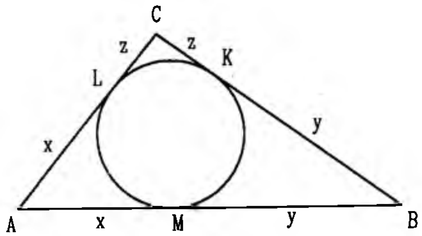
472. Означимо добијени троугао са PQR (в. сл.). Како је $\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = \gamma$ (теорема о тангентном углу), имамо $\sphericalangle QRP = 180° - 2\gamma$. Аналогно, $\sphericalangle RPQ = 180° - 2\alpha$, $\sphericalangle PQR = 180° - 2\beta$.

473. $\alpha = 54°$. **474.** $\alpha = 15°$. **475.** $\alpha = 75°, \beta = 105$.

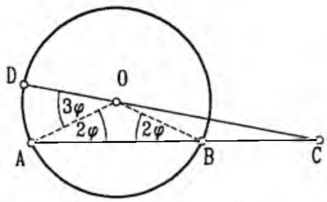
476. $\beta = 41°$. **477.** 28° и 46°.

478. Из једнакости тангентних дужи, $AM = AL = x$, $BM = BK = y$, $CK = CL = z$, (в. сл.). Решење добијамо из система једначина $x + y = c, y + z = a, z + x = b$.

479. $11cm$ или $19cm$.



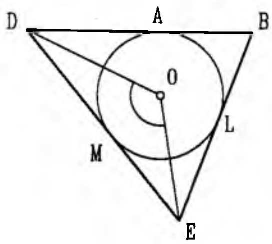
Сл. уз зад. 478



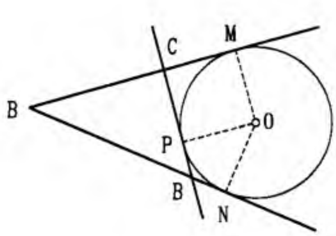
Сл. уз зад. 480

480. Означимо $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BCO = \varphi$ (види слику). Тада је спољашњи угао $\sphericalangle ABO$ једнакокраког троугла BCO једнак 2φ, па је и $\sphericalangle OAB = 2\varphi$, а у $\triangle OAC$ спољашњи угао $\sphericalangle DOA = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OCA = 3\varphi$.

481. Како је дати круг уписан у $\triangle BDE$, биће (в. сл.) $\sphericalangle DOE = 180° - \dfrac{\sphericalangle BDE + \sphericalangle BED}{2} =$ $180° - \dfrac{180° - \sphericalangle DBE}{2} = 90° + \dfrac{\sphericalangle DBE}{2}$, чиме је тврђење доказано.



Сл. уз зад. 481



Сл. уз зад. 485

482. $\sphericalangle ADO = \sphericalangle ABC$ - углови са нормалним крацима; $\sphericalangle AOD = \sphericalangle ABC$, па је троугао ADO једнакокраки.

483. Конструисати заједничку тангенту кругова у тачки M.

484. Искористити теорему о углу између тетиве и тангенте круга.

485. $BP = BN, CP = CM$ (в. сл.). $AC + CB + BC = AC + CM + BN + AB = 2AM$.

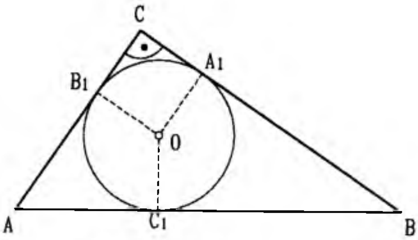
486. Искористити једнакост тангентних дужи $CB_1 = CA_1$, $BA_1 = BC_1$, $AB_1 = AC_1$ (в. сл.), чињеница да је OA_1CB_1 квадрат и чињеницу да је код правоуглог троугла пречник описаног круга једнак хипотенузи.

487. а) По претходном задатку је $c + 2r = a + b$, а како је $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, биће $c + 2r \geq 2\sqrt{ab}$. Једнакост важи ако и само ако је троугао једнакокракоправоугли.

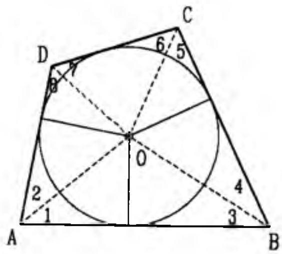
б) Очигледно важи $2r < a, 2r < b, 2r < h_c \leq \dfrac{c}{2}$.

488. Ако из тачке O конструишемо нормале на странице четвороугла (в. сл.), добићемо четири пара подударних троуглова, при чему је $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ и $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 8$. Како је $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 + \sphericalangle 7 + \sphericalangle 8 = 360°$, а $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 360° - (\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 +$ $\sphericalangle 6 + \sphericalangle 7) = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 + \sphericalangle 8$, биће $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \dfrac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

489. Периферијски углови над истим луком су једнаки, па је $\sphericalangle ACK + \sphericalangle CBK + \sphericalangle BAK =$ $\sphericalangle KBA + \sphericalangle KAC + \sphericalangle KCB$. Збир свих шест ових углова је 180°, као збир углова $\triangle ABC$, па је $\sphericalangle ACK + \sphericalangle CBK + \sphericalangle BAK = 90°$, што је довољан услов да би збир лукова KA, KB и KC био једнак полукругу.

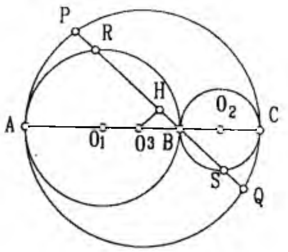


Сл. уз зад. 486

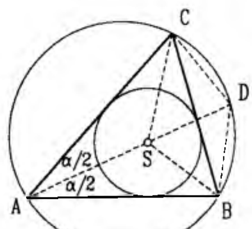


Сл. уз зад. 488

490. Означимо полупречнике кругова са r_1, r_2 и r_3. Како је $O_1R = O_3O_2 = r_1, O_1O_3 = O_2S = r_2$ и $\sphericalangle O_3O_1R = \sphericalangle O_3O_2S$ (јер је $O_1R \| O_2S$), биће $\Delta O_1RO_3 \cong \Delta O_2SO_3$ (в. сл.). Одавде следи да је $O_3R = O_3S$. Ако је H подножје нормале из O_3 на тетиву PQ, биће $RH = SH$ и $PH = QH$, дакле $PR = PH - RH = QH - SH = QS$.



Сл. уз зад. 490



Сл. уз зад. 492

492. Једнаким кружним луковима одговарју једнаки периферијски углови, па је (в. сл.):

$$\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB = \frac{\alpha}{2}(\overset{\frown}{DB}), \qquad \sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC = \frac{\alpha}{2}(\overset{\frown}{CD}),$$

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = \beta(\overset{\frown}{CA}), \qquad \sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA = \gamma(\overset{\frown}{AB}).$$

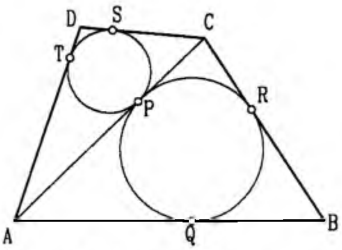
Даље имамо $\sphericalangle CSD = 180° - \left(\beta + \dfrac{\gamma+\alpha}{2}\right) = \alpha + \beta + \gamma - \left(\beta + \dfrac{\gamma+\alpha}{2}\right) = \dfrac{\gamma+\alpha}{2} = \sphericalangle DCS$, па је $CD = SD$. Такође је једнакокраки троугао CDB, па је $CD = BD$.

493. а) Поделимо дати многоугао на троуглове тако —што спојимо сва његова темена са центром круга у који је многоугао уписан. Сви добијени троуглови су подударни и једнакокраки, Ако је α угао на основицама ових троуглова, следи да је сваки угао датог многоугла једнак 2α.

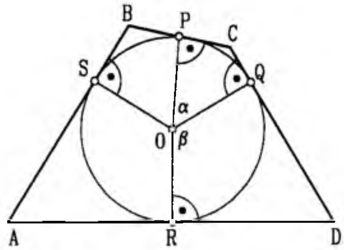
б) Поделимо опет многоугао тако што спојимо сва темена са центром круга уписаног у многоугао. Свака од уведених дужи је симетрала једног угла многоугла. Следи дс су сви добијени троуглови једнакокраки. Како сви они имају једнаке висине над основицом (полупречници круга), следи да су сви подударни и стога су све њихове основице (тј. странице многоугла) једнаке.

494. Означимо додирне тачке са P, Q, R, S (в. сл.). Из једнакости тангентних дужи $AQ = AP = AT, BQ = BR, CR = CP = CS, DS = DT$ следи $AB + CD = AC + BD$.

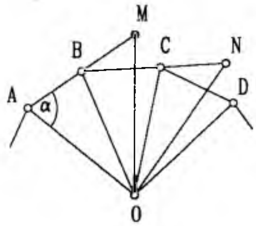
495. Нека су P, Q, R, S тачке на произвољном кругу са центром O такве да важи $\sphericalangle POQ = \alpha$, $\sphericalangle QOR = \beta$, $\sphericalangle ROS = 180° - \alpha$, $\sphericalangle SOP = 180° - \beta$. Тада тангенте у тачкама P, Q, R, S образују четвороугао са траженим особинама. Заиста, ако темена добијеног четвороугла означимо са A, B, C, D као на слици, тада су у сваком од четвороуглова $AROS, BSOP, CPOQ, DQOR$ два угла права, па следи да су углови у четвороуглу $ABCD$ редом једнаки α, β, $180° - \alpha$, $180° - \beta$.



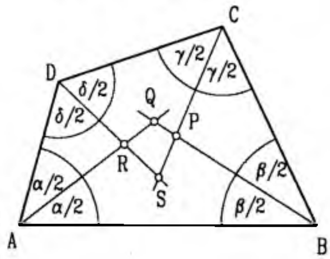
Сл. уз зад. 494



Сл. уз зад. 495



Сл. уз зад. 496

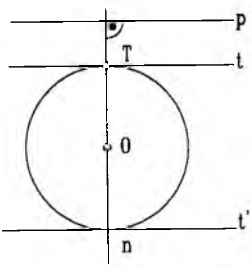


Сл. уз зад. 497

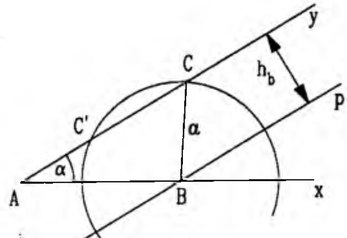
496. Једнокраки троуглови $OAB, OBC, OCD, \dots$ су сви подударни; означимо са α њихов угао на основици, (в. сл.). Из подударности $\Delta OBM \cong \Delta OCN$ добијамо $\sphericalangle BOM = \sphericalangle CON$ и отуда $\sphericalangle MON = \sphericalangle BOC = 180° - 2\alpha$. Како је ΔMON једнакокраки, следи $\sphericalangle OMN = \alpha$. Користећи још чињеницу да је α спољашњи угао код темена B у ΔOBM, добијамо коначно $\sphericalangle BON + \sphericalangle BMN = \sphericalangle BOM + \sphericalangle MON + \sphericalangle BMO + \sphericalangle OMN = \alpha + (180° - 2\alpha) + \alpha = 180°$.

497. Означимо са α, β, γ, δ углове конвексног четвороугла $ABCD$ (в. сл.). Тада је $\sphericalangle AQB = 180° - \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ и $\sphericalangle DSC = 180° - \dfrac{\delta + \gamma}{2}$, па је $\sphericalangle AQB + \sphericalangle DSC = 360° - \dfrac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 180°$.

502. Нека су k и p дати круг и права. Нека је t тражена тангента и T њена додирна тачка, (в. сл.). Права n одређена центром O круга и тачком T је нормална на t. Праву n можемо конструисати (нормала из O на p), а онда T, па t. Постоје увек два решења, јер n сече круг у двема тачкама.



Сл. уз зад. 502

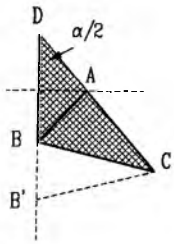


Сл. уз зад. 503

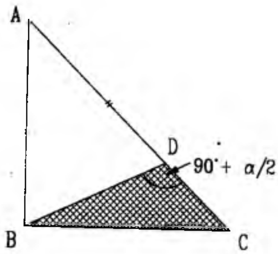
503. *Анализа.* Претпоставимо да је тражени троугао ABC конструисан и означимо са D подножје висине троугла из темена B. Тада је правоугли троугао ABD може конструисати, па се задатак своди на одређивање тачке C која припада правој AD и налази се на одстојању a од тачке B. *Конструкција.* Конструишемо прво угао xAy једнак датом углу α. Конструишемо затим праву p паралелну са краком Ay тако да је растојање између p и Ay једнако h_b и да p сече крак Ax. У пресеку p и h_b добијамо тачку B. Конструишимо сад круг k полупречника a са центром B и тачку C добијамо у пресеку овог круга са краком Ay, (в. сл.).

Доказ. Према конструкцији, $\sphericalangle BAC = \alpha$. Висина BD је одсечак заједничке нормале паралилних правих Ay и p, па је њена дужина једнака h_b. Коначно $BC = a$, јер $B \in k$.

Дискусија. Број решења зависи од тога колико круг k и полуправа Ay имају заједничких тачака. Дакле, број решења је 0, 1 или 2. За детаљнију дискусију размотримо прво случај кад је α оштар угао. Ако је $a < h_b$, тада нема решења. Ако је $a = h_b$, има једно решење. Ако је $h_b < a < AB$, има два решења. Ако је $a \geq AB$, опет има једно решење. У случају кад је α туп угао имамо једно или ниједно решење, зависно од тога да ли је $a > AB$ или је $a \leq AB$.



Сл. уз зад. 504а



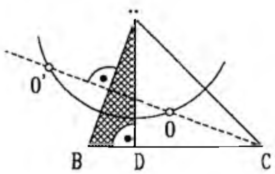
Сл. уз зад. 504б

504. а) Нека је D тачка на продужетку странице CA таква да је $AD = c$, (в. сл.). Троугао BCD можемо конструисати јер знамо две странице (BC и CD) и угао код темена $D(= \alpha/2)$. Троугао ABD је једнакокраки а теме A добијамо у пресеку симетрале дужи BD са страницом CD. Задатак има 0, 1 или 2 решења (како конструишемо ΔBCD?).

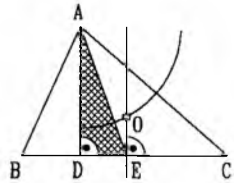
б) Нека је d тачка на страници AC таква да важи $AD = AB$, (в. сл.). Тада је ΔABD једнакокраки. Прво конструичемо ΔBCD јер знамо две његове странице и угао код темена D који је једнак $90° + \frac{\alpha}{2}$, па теме A нађемо у пресеку праве CD и симетрале дужи BD. Опет има 0, 1 или 2 решења.

505. а) Нека је AD висина, (в. сл.). Конструишемо прво ΔABD јер знамо страницу $AD = h_b$ и све његове углове. Центар O описаног круга мора припадати симетрали странице AB и мора бити $AO = R$, што је довољно да га конструишемо. Има 0, 1 или 2 решења, зависно од тога да ли је R мање, једнако или веће од $\frac{AB}{2}$.

б) Нека су AD и AE висина и тежишна дуж, (в. сл.). Прво конструишемо ΔADE. Имамо $OE \perp DE$ и $OA = R$, што је довољно да се конструише O и онда описани круг. Темена B и C су пресечне тачке описаног круга са правом DE. Број решења је 0 или 1; у сваком од три описана корака конструкција се или не може извести или се изводи једнозначно.



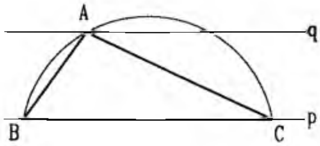
Сл. уз зад. 505а



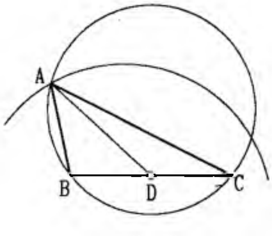
Сл. уз зад. 505б

506. а) На некој правој p конструишемо дуж BC, а затим у једној од полуравни одређеној правом p конструишемо праву q на растојању h_a од p и лук l који је геометријско место тачака из којих се дуж AB види под углом α, (в. сл.). Теме A добијамо у пресеку q и l, па задатак има 0,1 или 2 пешења.

б) Конструишемо геометријско место тачака из којих се тетива BC дужине a види под углом α. Затим конструишемо круг l полупречника t_a са центром у средишту D дужи BC, (в. сл.). Теме A је пресечена тачка два конструисана круга, па задатак има 0, 1 или 2 решења.



Сл. уз зад. 506а



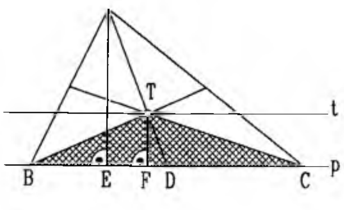
Сл. уз зад. 506б

507. а) *Анализа.* Уочимо $\triangle BTC$, где је T тежиште троугла ABC, (в. сл.). Познате су нам његове странице TB и TC - свака од њих једнака је $\frac{2}{3}$ тежишне дужи којој припада. Позната нам је и висина из темена T - она је трећина висине h_a.

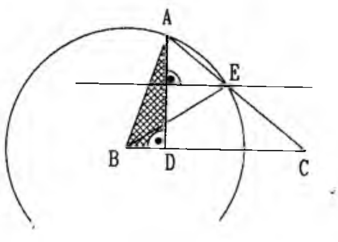
Конструкција. Конструишемо паралелне праве p и t на растојању $\frac{1}{3}h_a$. Са центром у произвољној тачки $T \in t$ конструишемо кругове k_1 и k_2, први са полупречником $\frac{2}{3}t_b$, а други са полупречником t_c. Тачке B и C добијамо у пресеку ових кругова са p. Конструишемо сад средиште D дужи BC и на полуправој DT конструишемо треће теме A тако да је $TA = 2TD$.

Доказ. Дуж AD је по конструкцији тежишна линија у $\triangle ABC$. Како је $AT : TD = 2 : 1$, следи да је T тежиште $\triangle ABC$. Тачка T дели онда и преостале две тежишне дужи у односу 2:1, па како је $BT = \frac{2}{3}t_b$ и $CT = \frac{2}{3}t_c$, следи да су тежишне дужи једнаке t_b и t_c. Нека су сад E и F подножја нормала из A и T на p. Из Талесове теореме (или на неки други начин) добијамо $AE = 3TF = 3 \cdot \frac{1}{3}h_a = h_a$.

Дискусија. Број решења зависи од броја пресечних тачака кругова k_1 и k_2 са p. Ако је $2t_b > h_a$ и $2t_c > h_a$ добијамо четири троугла, тачније два пара подударних троуглова. Ако је $2t_b > h_a$ и $2t_c = h_a$ или ако је $2t_b = h_a$ и $2t_c > h_a$, тад добијамо два подударна троугла. Коначно, ако је $2t_b < h_a$ или $2t_c < h_a$ или $2t_b = h_a = 2t_c$, тад нема решења.



Сл. уз зад. 507а

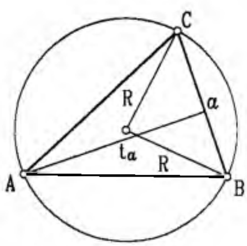


Сл. уз зад. 508а

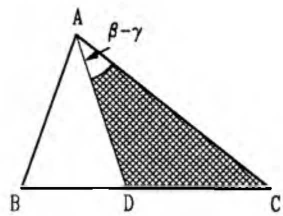
508. а) Нека је AD висина и BE тежишна дуж у траженом ΔABC, (в. сл.). Можемо конструисати правоугли ΔABD јер му знамо две странице. Затим E добијамо у пресеку симетрале дужи AD и круга са центром B и полупречником t_b. Задатак има два решења ако је $c > h_a$ и $2t_b > h_a$. Једно решење постоји ако је тачна једна од ових неједнакости, а у преосталој важи једнакост. У осталим случајевима нема решења.

509. *Анализа.* Претпоствимо да је тражени ΔABC конструисан. Његова темена B и C су крајеви дате дужи $BC = a$. Дакле, задатак се своди на одређивање темена A. При томе A треба да задовољи два услова: 1° мора припадати кругу полупречника R описаном око ΔABC и 2° налази се на одстојању t од средишта дужи BC. *Опис конструкције.* Конструишимо дуж $BC = a$ и једнакокраки ΔBOC ($BO = OC = R, BC = a$), а затим круг $k(O, R)$. Затим конструишемо круг $k_1(D, t_a)$, где је D средиште дужи BC (в. сл.) Пресек круга k и k_1 даје тражено теме A.
Доказ. По конструкцији је $BC = a$. Теме A припада и кругу k и кругу k_1, па задовољава оба поменута услова из анализе: $OA = R$ и $AD = t_a$.
Дискусија. Конструкција се састоји из два дела - конструкције ΔBOC и пресека кругова k и k_1. Да би се ΔBOC могао конструисати неопходно је да је $R > \frac{1}{2}a$. Ако је $R < \frac{1}{2}a$ задатак нема решења. Ако је $R = \frac{1}{2}a = t_a$ задатак има бесконачно много решења, а ако је $R = \frac{1}{2}a \neq t_a$ нема решења. Ако је $R > \frac{1}{2}a$ задатак има два симетрична, једно или ниједно решење у зависности од броја пресечних тачака кругова k и k_1. Специјално, ако је $t_a = \frac{1}{2}a$ троугао ABC се деформише у дуж BC.

510. Нека је D тачка на правој BC таква да важи $AD = AB$, (в. сл.). Конструисати прво помоћни троугао ADC. Постоји увек једно решење.



Сл. уз зад. 509

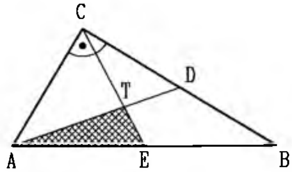


Сл. уз зад. 510

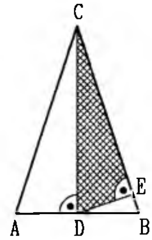
511. а) Нека су AD и CE тежишне дужи, (в. сл.). У ΔTAE познате су нам све странице.
б) Нека је S центар уписаног круга. Имамо $AB = 2R$ и $\sphericalangle ASB = 135°$ (зашто?), па можемо да конструишемо ΔASB.
в) Продужити катету AB за дужину хипотенузе;
г) конструисати троугао ако је дата једна страница и два угла на њој од којих је један 135°;
д) конструисати троугао ΔBAD, где је $AD = CA + CD = AC + BC$ и $\sphericalangle BDC = 45°$.

512. а) Нека је CD висина и E подножје нормале из D на BC, (в. сл.). Имамо $CD = h_c$ и $DE = \frac{1}{2}h_a$, па се правоугли ΔCDE може конструисати. б) Треће теме A је у пресеку нормале из P на BC и круга са центром C и полупречником BC.

513. а) нека је D тачка праве AB тако да је $B - A - D$ и $AD = AC = b$. Биће $\sphericalangle ADC = 90° - \frac{\beta + \gamma}{2}$. б) Нека су D и E тачке праве BC такве да је $D - B - C - E$ и $BD = BA$, $CE = EA$. Троуглови ABD и ACE су једнакокраки, па је и $\sphericalangle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\sphericalangle AEC = \frac{\gamma}{2}$.



Сл. уз зад. 511а



Сл. уз зад. 512а

в) Може се конструисати правоугли $\triangle BDA$, где је D подножје висине из B. г) Најпре конструисати троугао ADC, где је D подножје висине из A и затим на одстојању h_b праве паралелне првој AC. д) Констуисати прво правоугли $\triangle ACD$ (D је подножје висине из C) а затим одредити на AD тачку E тако да је $A-D-E$ и $AE=c+a$.

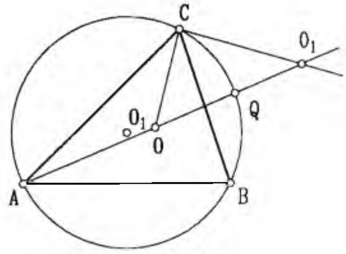
514. а) Нека је D средиште странице BC и E тачка праве AD, таква да је $D-A-E$ и $DE=b+h_a$. Симетрала дужи BE сече DE у тачки A.
б) Нека је D седиште сранице BC и E тачка праве BC таква да је $E-B-D$ и $DE=s$. Троугао ADE се може конструисати.
г) Нека је D тачка праве AC таква да је BD симетрала $\sphericalangle B$. Троугао ABD се може конструисати.
д) Конструисати правоугли $\triangle BDT$, где је D средиште BC, а T тежиште троугла.
ђ) Конструисати правоугли $\triangle CDF$, где је D седиште дужи BC и F тачка праве AD таква да је $A-D-F$ и $DF=b-h_a$.

515. а) Нека је E додирна тачка уписаног круга и странице BC и G тачка на правој BC таква да је $EG=b-c$. Тада је средиште дужи EG у исто време и средиште странице BC.
б) У углу $\sphericalangle A=\alpha$ конструише се круг полупречника r тако да додирује краке угла у тачкама D и F; затим на крацима угла одредити тачке P и Q такве да је $A-D-P$ и $A-F-Q$ и $DP=FQ=a$. Тада је права BC заједничка тангента круга полупречника r и круга, који додирује краке угла у тачкама P и Q.
в) Најпре се конструише правоугли троугао ABD, где је D подножје висине из A, а затим правоугли $\triangle ABE$, где је E подножје висине из B.
г) Доказати најпре да ако су M и N тачке у којима споља описани круг додирују продужетке страница AB и AC, тада је $AM=AN=s$.
д) Ако су H и D тачке праве BC такве да је AH висина и AD симетрала $\sphericalangle A$, може се конструисати троугао AHD. Затим се одреди средиште O уписаног круга и конструише круг $k(O,r)$.
ђ) Конструисати најпре троугао ACD ($AD=s_\alpha$, $AC=b$, $\sphericalangle CAD=\frac{\alpha}{2}$).

516. Нека су O и O_1 средишта уписаног и споља уписаног круга. Доказати, најпре, да тачке B и C припадају кругу k над пречником OO_1 и да средиште Q тог круга припада кругу описаном око $\triangle ABC$. Пресек круга k и круга са средиштом у O_2 и полупречника O_2Q (O_2-средиште описаног круга $\triangle ABC$) даје тачке B и C. Ако је тачка O_2 ван круга полупречника $\frac{1}{4}OO_1$ са центром у Q тада постоји јединствено решење. У противном, нема решења.

517. а) Нека је $ABCD$ тражени правоугаоник и E тачка праве AB таква да је $A-E-B$ и $AE=a-b$. Тада се може конструисати $\triangle AEC$ јер је $\sphericalangle AEC=135°$.
г) Нека су у правоугаонику $ABCD$ дати страница $AB=a$ и разлика $AC-BC=d-b$. Уочити тачку E на правој CB такву да је $C-B-E$ и $BE=d-b$. Троугао ABE се може конструисати. Тачка C припада симетрали дужи AE.

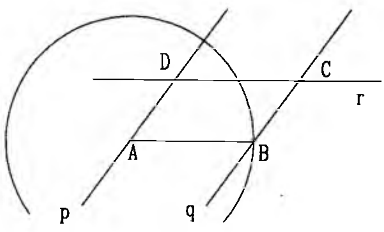
518. Нека је $ABCD$ тражени квадрат и E тачка праве AC таква да је $A-E-C$ и $AE=d-a$. Троугао ABE се може конструисати на следећи начин. На симетрали



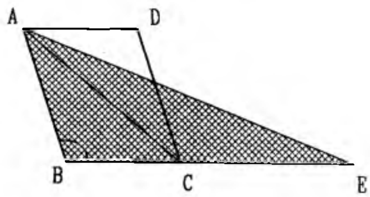
Сл. уз зад. 516

правог угла $\sphericalangle BAD$ одреди се тачка E таква да је $AE = d - a$. Затим се из произвољне тачке P те симетрале конструише полуправа PQ под углом од 45° према симетрали AP и на крацима угла APQ одреде тачке M и N такве да је $PM = PN$. Најзад, кроз тачку E се конструише права паралелна дужи MN. Она сече крак AB угла $\sphericalangle BAD$ у темену B траженог квадрата.

519. а) Нека су h_1 и h_2 дата растојања међу страницама AB и CD, односно BC и AD. Конструишимо прво паралелне праве p и q на растојању h_2, (в. сл.). Онда конструишимо круг са центром у произвољној тачки $A \in p$ и полупречником AB; његов пресек са q даје нам тачку B. Преостала два темена добијамо у пресеку правих p и q са правом r која је паралелна са AB и на растојању h_1 од AB. Нема решења ако је $AB < h_2$; у супротном, постоји (до на подударност) јединствено решење.
б) Нека је E тачка на продужетку странице BC таква да важи $CE = AC$, (в. сл.). У ΔABE знамо странице AB и BE у угао ABE. Конструишемо овај троугао, а онда добијамо C у пресеку BE са симетралном дужи AE (ΔACE је једнакокраки). Овај пресек постоји кад је $AB < BE$ (у супротном, симетрала дужи AE сече страницу AB, а не BE).



Сл. уз зад. 519а

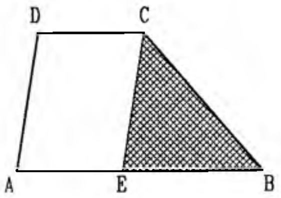


Сл. уз зад. 519б

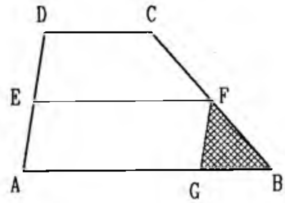
520. а) Нека су дате основице a, b ($a > b$) и краци c, d. Нека је E тачка на већој основици AB таква да је $AE = b$, (в. сл.). Прво конструишемо ΔEBC (све странице познате), а потом и преостала два темена. Постоји (јединствено) решење ако је свака од дужи $a - b, c, d$ мања од збира остале две.
б) Нека је дата основица $AB = a$ и средња линија $EF = m$. Нека је G тачка на AB таква да важи $AG = m$, (в. сл.). Можемо конструисати ΔGBF јер знамо страницу $GB = a - m$ и налегле углове (суплементни датим угловима на мањој основици трапеза). Постоји јединствено решење ако је $a > m$ и ако је збир датих углова мањи од 180°.

521. Нека су дати подаци d и r. Дијагонале деле ромб на четири подударна правоугла троугла, (в. сл.). Њих можемо конструисати јер знамо једну катету ($d/2$) и висину из темена правог угла (r). Постоји јединствено решење када је $d > 2r$.

522. Нека је S средиште KL, а T тачка на правој KL тако да је $TL = LS$. Кроз T конструишемо праву паралелну симетрали странице KL. Ова права сече симетралу

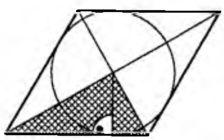


Сл. уз зад. 520а

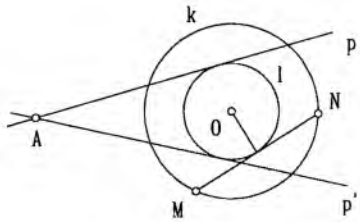


Сл. уз зад. 520б

странице ML у једном од темена траженог четвороугла. Остала темена се налазе на основу услова да су тачке K, L, M средишта страница четвороугла $ABCD$.



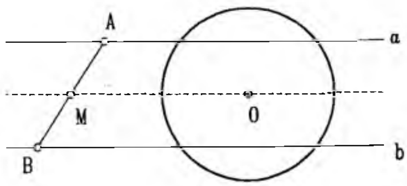
Сл. уз зад. 521



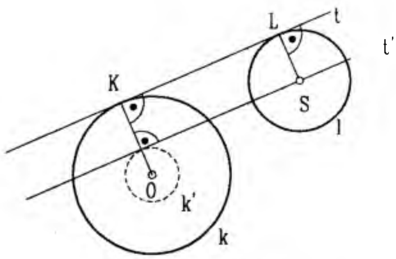
Сл. уз зад. 523

523. Све тетиве дате дужине d подједнако су удаљене од центра круга, па зато постоји круг l концентричан са k који све ове тангенте додирују. Круг l можемо конструисати (полупречник једнак одсечку нормале из центра O на произвољну тетиву MN дужине d, види слику). Права p је тангента из A на l. Постоји 0, 1 или 2 решења, зависно од тога да ли је d веће, једнако или мање од пречника круга k.

524. Тражене праве a и b ($A \in a, B \in b$) су подједнако удаљене од центра O круга (в. сл.). Ако је M средиште дужи AB, следи да је $a \| MO \| b$ (зашто?). Постоји једно или ниједно решење.

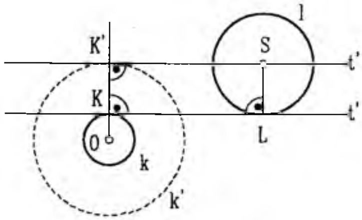


Сл. уз зад. 524

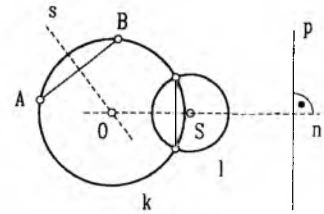


Сл. уз зад. 525а

525. Нека су k и l дати кругови, O и S њихови центри, а R и r ($R \geq r$) њихови полупречници, (в. сл.). Нека су k и l додирне тачке заједничке тангенте t. Нека је t' права паралелна са t која садржи S и нека је K' њена пресечна тачка са правом OK. Због $\sphericalangle OK'S = 90°$ имамо да је t' тангента из S на круг k' са центром O и полупречником OK'. Овај полупречник OK' једнак је $R + r$ ако је t заједничка спољашња тангента, а једнак је $R - r$ ако је t унутрашња тангента. У оба случаја можемо конструисати круг k', а потом t' и t. Број решења је између 0 и 4, зависно од положаја кругова.



Сл. уз зад. 525б

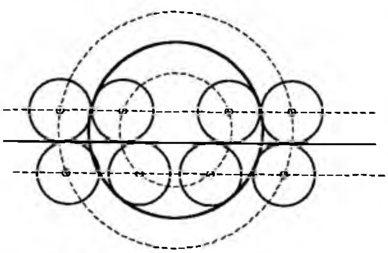


Сл. уз зад. 526

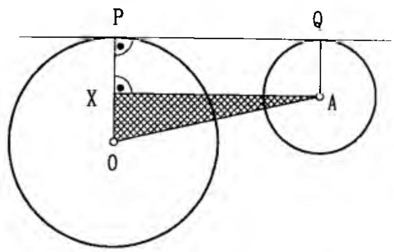
526. Нека је s симетрала дужи AB, а n нормала из центра S круга l на праву p, (в. сл.). Пресечна тачка O правих s и n је центар траженог круга. Ако је $s = n$, има бесконачно много решења. Ако је $s \| n$ и $s \neq n$, нема решења. Коначно када се s и n секу, постоји једино решење уколико је збир полупречника круга l и OA мањи од OS, а опет нема решења ако је овај збир једнак или већи од OS.

527. Нека су R и r полупречници траженог и датог круга. Центар O траженог круга је на растојању R од дате праве p, а геометријско место тачака које су на растојању R од p су две праве паралелне са p. Са друге стране, растојање међу центрима O и S траженог и датог круга једнако је $R + r$ или $|R - r|$ (зашто?), па O мора припадати једном од кругова са центром S и полупречником $R + r$ или $|R - r|$. Задатак може имати од 0 до 8 решења. Слика приказује случај са макцималним бројем решења.

528. Ако је O центар круга k, центар траженог круга добијамо у пресеку праве OM и симетрале дужи AM.



Сл. уз зад. 527



Сл. уз зад. 529

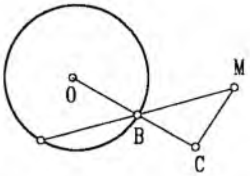
529. *Анализа.* Нека у R и r полупречници кругова k и l, (в. сл.). Нека су OP и AQ полупречници нормални на заједничку тангенту. Претпоставимо да је $R > r$ и нека је X подножје нормале из A на OP. Имамо $AX = m$ и $\sphericalangle AOX = 90°$. Ситуације је слична у преосталом случају $R \leq r$.

Конструкција. Конструишемо полукруг k' над пречником OA, а затим кругове k_1 и k_2 са центрима A и O, оба с полупречником m. Нека су X и Y пресечне тачке кругова k_1 и k_2 са k'. Кругови l_1 и l_2 са центром A и полупречницима $R - OX$ и $R + AY$ су решења задатка, (в. сл.)

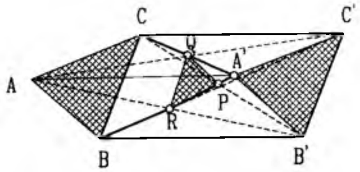
Доказ. Нека је OP полупречник круга k који садржи тачку X и нека је t тангента на k у тачки P. Нека је Q подножје нормале из A на t. Лако се доказује да је $XAQP$ правоугаоник, па следи да је $AQ = XP$. Како је XP једнако полупречнику круга l_1, следи да $Q \in l_1$ и да је t тангента на l_1. Тангента дуж PQ једнака је $AX = m$. Сасвим слично се доказује и да је l_2 решење.

Дискусија. Нема решења ако је $m > OA$ (не добијају се тачке X и Y). Ако је $m \leq OA$, имамо две могућности, зависно од тога да ли је $R \geq OX$ или је $R < OX$. У првом случају постоји једно решење (круг l_2), а у другом случају имамо два решења.

530. Одредимо тачку C (в. сл.) тако да је $OC = 2R$ и $CM = R$. Тачка B, која је у пресеку OC и датог круга припада траженој сечици. Задатак има два решења ако је $MO < 3R$, једно решење ако је $MO = 3R$ и нема решења, ако је $MO > 3R$.



Сл. уз зад. 530



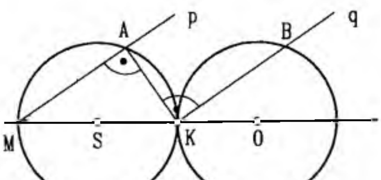
Сл. уз зад. 534

532. a) Нека је k_1' круг добијен транслацијом круга k_1 за вектор $\vec{r}$. Тада је $k_1' \cap k_2 = B$. Број решења: бесконачно (ако је $k_1' = k_2$), два, једно или ниједно.
б) Нека је k' круг добијен транслацијом круга k за вектор $\vec{r}$ и $N = k' \cap k$. Број решења једнак је броју пресечних тачака кругова k и k'.

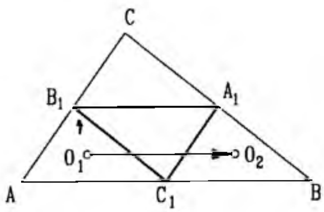
533. У паралелограму је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, па тачку C добијамо у пресеку круга k и круга добијеног транслацијом k за вектор $\overrightarrow{AB}$.

534. Због $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, четвороугао $AA'C'C$ је паралелограм. Тачка Q је његов пресек дијагонала, па следи да је Q средиште дужи $A'C$, (в. сл.). Аналогно је R средиште за $A'B$. Следи да је QR средња линија у $\Delta A'BC$, па је $QR = \dfrac{BC}{2}$. Аналогно је $PQ = \dfrac{AB}{2}$ и $RP = \dfrac{CA}{2}$.

535. Нека су k и l дати кругови, а S и O њихови центри, (в. сл.). Ако је $M \in k$ тачка дијаметрално супротна са K, а p и q праве одређене са M, A и K, B имамо $p \| q$, јер су обе праве нормалне на AK. Транслација за вектор $\overrightarrow{SO}$ пресликава M у K, па следи да она пресликава праву p у праву q. Иста транслација пресликава k у l, па како је $\{A\} = k \cap p$ и $\{B\} = l \cap q$, следи да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SO}$.



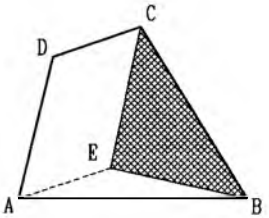
Сл. уз зад. 535



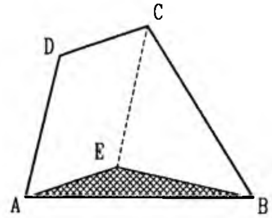
Сл. уз зад. 536

536. Троугао C_1A_1B добија се од ΔAB_1C_1 транслацијом за вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, (в. сл.), па како се транслацијом (као и сваком другом изометријом) центар описаног (уписаног)круга пресликава у центар описаног (уписаног) круга, следи да је $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{S_1S_2}(= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$. На исти начин добијамо и $\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{S_2S_3}$, $\overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{S_1S_3}$. Дакле, $\Delta O_1O_2O_3$ и $\Delta S_1S_2S_3$ имају све странице једнаке.

537. Нека су дате странице AB, BC, CD и углови γ и δ код темена C и D. Нека је тачка E добијена транслацијом тачке A за вектор $\overrightarrow{DC}$, (в. сл.). У $\triangle CEB$ знамо странице CE и CB, а $\sphericalangle ECB$ једнак је $\gamma + \delta - 180°$.



Сл. уз зад. 537

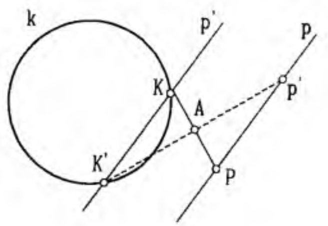


Сл. уз зад. 538

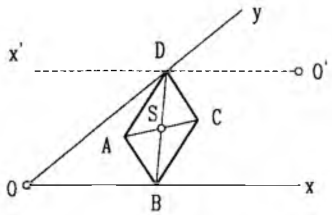
538. Нека су дати углови код темена A, B, C и странице BC и AD. Ако је тачка E добијена транслацијом тачке A за вектор $\overrightarrow{DC}$, (в. сл.), у троуглу BCE знамо две странице (BC и BE) и захваћени угао.

540. а) Нека је $k_1' = S_A(k_1)$ и $k_1' \cap k_2 = \{A, B\}$. Тражена права је права AB.
б) Нека је $p' = S_A(p)$, $p' \cap q = \{Q\}$. Тражена права је права QA.

541. Конструишимо $p' = S_A(p)$, (в. сл.). Тачку K добијамо у пресеку p' и k. Има 0, 1 или 2 решења.



Сл. уз зад. 541

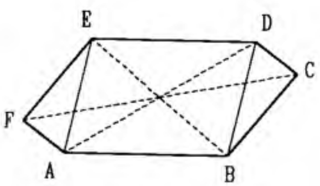


Сл. уз зад. 543

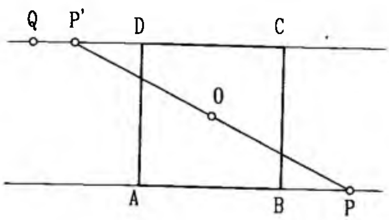
542. Нека је O центар паралелограма. Имамо $C = S_0(A)$ и $D = S_0(B)$, па следи $CD = S_0(AB)$ и зато $N = S_0(M)$.

543. Средиште S дужи AC је центар паралелограма; дакле, $S_s(B) = D$, па D добијамо у пресеку полуправих Oy и $S_s(Ox)$, (в. сл.).

544. Фигура је централно симетрична ако кругови имају једнаке полупречнике или ако су концентрични.



Сл. уз зад. 545



Сл. уз зад. 546

545. Нека је $ABCDEF$ дати шестоугао. Дужи AD и BE су дијагонале паралелограма $ABCDE$, а дужи AD и CF су дијагонале паралелограма $ACDF$. Следи да дужи AD, BE и CF имају заједничко средиште, које је онда центар симетрије шестоугла. Шестоугао не мора бити правилан, (види слику).

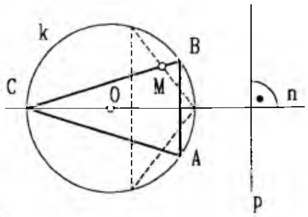
546. Тачка $P' = S_0(P)$ припада правој CD, (в. сл.). Ако је $P' \neq Q$, права $P'Q$ (коју можемо конструисати) је права CD. Растојање те праве до тачке O једнака је половини странице квадрата, па се конструкција једноставно завршава. Ако је $P' = Q$, задатак има бесконачно много решења, а ако у случају $P' \neq Q$ тачка O припада правој $P'Q$, тада нема решења.

547. а) Две; б) бесконачно много; в) две; г) три; д) четири; ђ) бесконачно много; е) једну или бесконачно много; ж) једну или две; з) једну, две или бесконачно много.

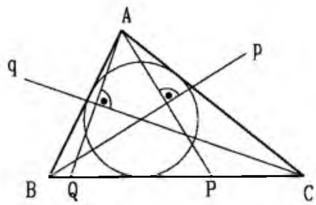
548. Нека је $\triangle ABC$ тражени и $AB \| p$. Оса симетрије троугла мора садржати центар O описаног круга и мора бити нормална на AB. Та се права може конструисати - нормала n из O на p, (в. сл.). Теме C се добија у пресеку n и k; темена на основици се потом лако конструишу. Ако је $OM \perp p$, тада задатак нема решења; у супротном, постоје два решења.

549. Темена на круговима су симетрична у односу на p; њих прво конструишемо. Тиме је добијена једна дијагонала ромба, а њен пресек са p је центар ромба. Преостала два темена су тачке на p на растојању $d/2$ од конструисаног центра.

550. Нека је $B' = S_p(B)$. Тражена тачка је пресек правих p и AB'. Нема решења ако p садржи средиште дужи AB, а није нормална на AB; ако је $p \perp AB$ и p садржи средиште дужи AB има бесконачно много решења. У осталим случајевима задатак има једно решење.



Сл. уз зад. 548



Сл. уз зад. 551

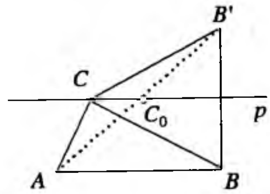
551. Тачке $P = S_p(A)$ и $Q = S_q(A)$ припадају правој BC, (в. сл.). Конструишемо прво њих, а онда темена B и C у пресеку правих p и q са правом PQ. Задатак нема решења кад је $p \| q$ (тада $A \in BC$) и кад је дуж која спаја A са пресечном тачком правих p и q нормална на p или q (тад је $PQ \| p$ или $PQ \| q$). У преосталим случајевима постоји једно решење.

552. Нека је p права паралелна са AB на растојању h_c и нека је $B' = S_p(B)$. Нека је C_0 пресек дужи AB са p, (в. сл.). Тада је $\triangle ABC_0$ једнакокраки и за сваку тачку $C \in p$ $(C \neq C_0)$ имамо $AC + CB = AC + CB' > AC_0 + C_0B' = AC_0 + C_0B$, па је обим $\triangle ABC$ већи од обима $\triangle ABC_0$.

553. Оса симетрије троугла мора садржати једно теме троугла и тад су странице којима је то теме заједничко једнаке. Следи да ако троугао има две осе симетрије, тада све три његове странице морају бити једнаке. Но, тада он има и трећу осу симетрије.

555. а) Како је $R_{S,60°}(A) = B$, то $B \in R_{S,60°}(a) = a_1$, па је $a_1 \cap b = \{B\}$ и $A = R_{S,-60°}(B)$.
б) Нека је $R_{A,90°}(p) = p'$. Тада је $p' \cap q = \{D\}$.
в) 1° $R_{A,60°}(q) = q'$, $q' \cap r = \{C\}$; 2° слично као под 1°.

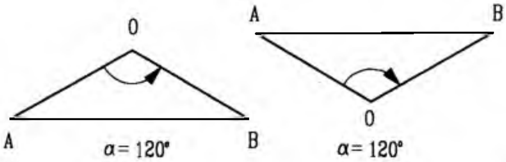
556. Ако је $0° < \alpha < 180°$, троугао OAB је једнакокраки са основицом AB и углом α код темена C и уз то је позитивно оријентисан, па је тачка A једнозначно одређена. Ако је



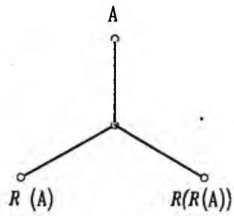
Сл. уз зад. 552

$-180° < \alpha < 0$, троугао OAB је једнакокраки са основицом AB и углом $|\alpha|$ код темена C и уз то је негативно оријентисан, па је опет једнозначно одређен. Коначно, ако је $\alpha = 180°$, тад је O средиште дужи AB. Слика илуструје случајеве $\alpha = \pm 120°$.

557. Дужи које спајају O са трима наведеним тачкама су једнаке и граде три угла од $120°$, (в. сл.).

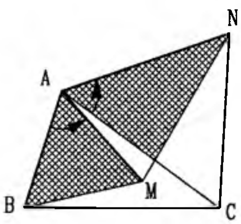


Сл. уз зад. 556

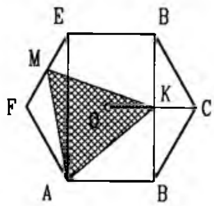


Сл. уз зад. 557

558. Ротација за $60°$ око тачке A преводи B у M, а C у N. Дуж BC се тако пресликава у MN, па те дужи морају бити једнаке, (види слику).



Сл. уз зад. 558



Сл. уз зад. 560

559. Ротирати дати квадрат за $60°$.

560. Нека је O центар шестоугла, (в. сл.). Ротација за $60°$ око тачке A пресликава O у F, а C у E. Како је K средиште дужи OC (зашто?), следи да наша ротација пресликава K у M. То већ значи да је ΔAMK једнакостранични.

562. $1cm, 1cm, 0,8cm$.

563. Како је $A_1C = BC_1 = B_1A$, $CB_1 = A_1B = AC_1$, $\sphericalangle A_1BC_1 = \sphericalangle B_1AC_1 = \sphericalangle A_1CB_1 = 120°$, то су троуглови A_1CB_1 и B_1AC_1 подударни, одакле следи да је $A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1$.

564. Троуглови EPM и HQM су подударни, одакле следи да је $EP = HQ$. (Са P и Q су означена подножја нормале из M на q и p, из подударности троугла FPM и GQM следи $FP = GQ$, па је $GH = EF$.

565. Углови AKE и AKH су једнаки јер су оба једнака половини $\sphericalangle A$. Одавде следи да су троуглови AKH и AKE подударни и једнакокраки.

566. Нека O теме датих углова. Доказати да су троуглови AOB и AOC једнакокраки.

567. Ако је L подножје висине из темена C, биће троуглови ACL и DAF подударни, па је $AL = DF$. Слично подударни су троуглови CBL и BHM, па је $MH = BL$.

568. $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCA$, као трансверзални. $\sphericalangle CAB_1 = \sphericalangle CAB$, због симетричности тачака B и B_1, па је $\sphericalangle CAB_1 = \sphericalangle DCA$ и $\triangle AEC$ је једнакокраки ($AE = EC$). Како је $DA = CB = CB_1$, а $\sphericalangle DEA = \sphericalangle CEB_1$, као унакрсни, биће правоугли троуглови ADE и CB_1E подударни.

571. Доказати да је сваки од углова, које симетрала гради са наспрамном страницом већи од половине угла, који та симетрала полови.

572. $36°, 36°, 108°$.

573. Нека је K тачка на AB тако да је $AK = AE$. Троуглови ADE и ADK су подударни. Означимо $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ADK = \phi$. Сада је спољашњи угао $\triangle ADK$ $\sphericalangle DKB = \dfrac{\alpha}{2} + \phi$. Такође је: $\sphericalangle DEC = \dfrac{\alpha}{2} + \phi$. Из $\triangle ECD$ следи $\gamma = 180° - \dfrac{3\alpha}{2} - \phi$, где је $\gamma = \sphericalangle C$, а из $\triangle ABC$: $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - \alpha - (180° - \dfrac{3\alpha}{2} - \phi) = \dfrac{\alpha}{2} + \phi$, где је $\beta = \sphericalangle B$. Дакле, $\sphericalangle DKB = \sphericalangle KBD$, па је $\triangle BDK$ једнакокрак: $DB = DK$. Због $DK = DE$, биће и $BD = DE$.

574. Како је MN средња дуж троугла BCD, то је $MN \| BC$, тј. $MN \perp CA$. У троуглу ACM $CD \perp AM$, $MN \perp CA$, па је тачка N ортоцентар, значи AN је трећа висина троугла, тј. $AN \perp MC$.

575. Нека је M средиште дужи BE. Тада је $FM \| DB$, па је $FM \perp CD$, а како је и $DE \perp MC$, то је F ортоцентар троугла DMC, дакле $CF \perp DM$. Како је $AE \| DM$, то је и $CF \perp AE$.

576. *Први начин:*
Означимо $\alpha_1 = \sphericalangle BOA_1, \alpha_2 = \sphericalangle COA_1, \alpha_3 = \sphericalangle OBA_1, \alpha_4 = OCA_1$, где је A_1 подножје висине из A, затим $\sphericalangle ABC = \beta, \sphericalangle BCA = \gamma$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$. Из правоуглих троуглова се добија $\alpha_1 + \alpha_3 = 90°, \alpha_2 + \alpha_4 = 90°, \beta - \alpha_3 = 90° - \alpha, \gamma - \alpha_4 = 90° - \alpha$. Из прве две релације је $\alpha_1 + \alpha_2 = 180° - (\alpha_3 + \alpha_4)$, а из друге две $\beta + \gamma - (\alpha_3 + \alpha_4) = 180° - 2\alpha$, тј. $\alpha = \alpha_3 + \alpha_4$, па је $\alpha_1 + \alpha_2 = 180° - \alpha$.
Други начин:
$\sphericalangle BOC$ и $\sphericalangle BAC$ су углови са нормалним крацима у супротном смеру, па су суплементни.

577. Ако су t_a, t_b, t_c дужине тежиних дужи, а T - тежиште троугла ABC, биће из троугла ATB: $\dfrac{2}{3}t_a + \dfrac{2}{3}t_b > c$, тј. $t_a + t_b > \dfrac{3}{2}c$. На исти начин је $t_a + t_c > \dfrac{3}{2}b$ и $t_b + t_c > \dfrac{3}{2}a$. Сабирањем ових једнакости добијамо $t_a + t_b + t_c > \dfrac{3}{4}(a + b + c)$.

578. Ако је $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, тада је и $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$. Дакле, наспрамне странице AD и BC четвороугла $ABCD$ су паралелне и једнаке, па је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

579. $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$; $3\vec{a} + 2\vec{b} = \dfrac{1}{3}(8\vec{p} + \vec{q})$.

580. Упутство. Ако су T_1 и T_2 тежишта троуглова $M_1M_3M_5$ и $M_2M_4M_6$ тада (по задатку 401б) важи $\overrightarrow{OT_1} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_5})$ и $\overrightarrow{OT_2} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_4} + \overrightarrow{OM_6})$, где је O произвољна тачка. Коришћењем овога и чињенице да је $\overrightarrow{OM_1} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}), \dots, \overrightarrow{OM_6} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OA})$, доказати да је $\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OT_2}$, одакле следи да је $T_1 = T_2$.

581. Из петоугла $MNPCD$ је $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CP}$. Из четвороугла $NPBA$ је $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$. Сабирањем наведених једнакости добијамо $\overrightarrow{NP} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}$, јер је $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, а вектори $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{NA}$, односно $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{BP}$ су супротни вектори.

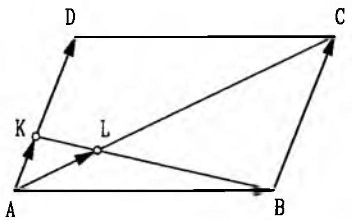
582. Одредимо тачку D на правој OB тако да је $OD = OB$ и $B - O - D$ и нека је $OD \cap AC = \{S\}$. Како је $BO : OC = 2 : 1$, то је $OS = OD$, а како је $SA = SC$, то је четвороугао $AOCD$ паралелограм, па је $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$. Сада је $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, тј. $-\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$, одакле је $\vec{c} = -\vec{b} - \vec{a} = -(\vec{a} + \vec{b})$.

583. Из многоугла $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ је $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_1} = \vec{0}$. Како је $\overrightarrow{A_2B_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_2C_1} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C_2A_1} = \overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, то је и $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$.

584. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BC_1})$. Збир у првој загради је $\vec{0}$, а сваки вектор у другој загради добија се ротацијом одговарајућег вектора из прве заграде за 60°, па је и збир у другој загради једнак $\vec{0}$.

585. Како је $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER}$ и $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CR}$, то је $2\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FC}$. На сличан начин се доказује да је $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EB}$, па је $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$, а то је неопходан и довољан услов да четвороугао $PQRS$ буде паралелограм.

586. Како је $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, то је $5\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, односно $5\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AK}$. Како је $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$, то су тачке K, L и B колинеарне и $KL : LB = 1 : 4$.



Сл. уз зад. 586

587. Нека је S пресечна тачка кругова описаних око троуглова ARQ и BPR. Тврђење ће бити доказано ако докажемо да је и $\sphericalangle QSP = 180° - \gamma$. Претпоставимо са је S у унутрашњости троугла ABC (остали случајеви се слично доказују). Тада је $\sphericalangle QSR = 180° - \alpha$, $\sphericalangle PSR = 180° - \beta$ и $\sphericalangle QSR = 360° - (\sphericalangle QSR + \sphericalangle PSR) = 180° - \gamma$.

588. Из ΔABC имамо $\sphericalangle BAD = 180° - 80° - 50° = 50°$, па је $AD = BD$. Ако конструишемо круг са средиштем D и полупречником DAпошто су углови ADB и ACB са исте стране тетиве AB и пошто је $\sphericalangle ADB = 80° = 2\sphericalangle ACB$, то и тачка C припада поменутом кругу (однос централног и периферијског угла). Стога је $BD = CD$, троугао DBC једнакокраки и $\sphericalangle BDC + 2\sphericalangle DBC = 180°$. Како је $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC + 30°$, добија се да је $\sphericalangle DBC = 70°$.

589. $\sphericalangle PBA = \sphericalangle BDA$, као угао између тетиве и тангенте и периферијски угао над том тетивом; $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDA$ јер је ΔABD једнакокраки, па је $\sphericalangle DBA = \sphericalangle ABP$.

590. Нека је T средиште тетиве MN. Како је $OT \perp NM$, то се дуж OM види из тачке T под правим углом, па је тражено геометријско место круг конструисан над дужи OM као пречником.

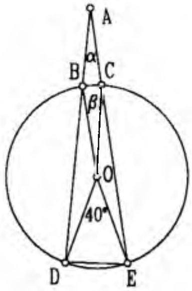
591. Искористити чињеницу да се све овакве тачке K налазе на кругу конструисаном над дужи BM као пречником, где је M средиште дужи, која спаја B и центар описаног круга ΔABC.

592. а) $d = b - a$; б) $a \leq b < 2a$.

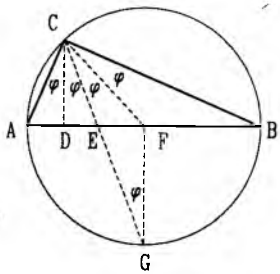
593. $MN \| PQ$, па је $MNQP$ трапез. NQ је тежишна дуж правоуглог троугла AQC, па је $NQ = \frac{AC}{2}$. Такође је и $MP = \frac{1}{2}AC$, па је $NQ = MP$.

594. Нека је ABC_1 троугао симетричан датом у односу на праву AB и $K_1 = S_{AB}(K)$. Тада је $\sphericalangle AOK = \sphericalangle POB$ (јер је $\sphericalangle A = \sphericalangle B$) и $\sphericalangle K_1OA = \sphericalangle AOK$, па је и $\sphericalangle POB = \sphericalangle K_1OA$, односно тачке K_1, O и P су колинеарне. Пошто је $AM \perp BC$ и $K_1P \perp BC$, биће $AM \| K_1P$. Осим тога ови одсечци се налазе између паралелних правих C_1A и BC, па је $AM = K_1P = KO + OP$.

595. Нека је β централни угао, који одговара мањем луку $\overset{\frown}{BC}$ (в. сл.). Тада је $\beta : 40 = 3 : 10$, одакле је $\beta = 12°$, а $\sphericalangle BEA = \frac{\beta}{2} = 6°$, као периферијски угао над BC. На исти начин $\sphericalangle DBE = 20°$. Због тога је $\sphericalangle ABE = 160°$, па је $\alpha = 180° - (160° + 6°) = 14°$.



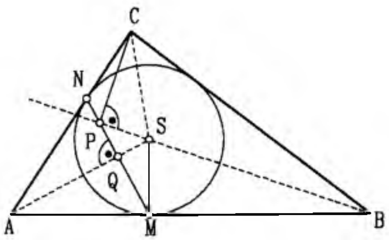
Сл. уз зад. 595



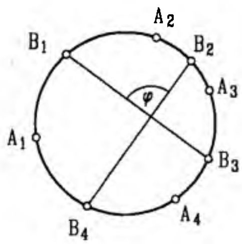
Сл. уз зад. 596

596. Нека симетрала угла C сече описани круг у тачки G (види слику). Како је $\sphericalangle ACG = \sphericalangle GCB = 2\phi$, то је $\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{GB}$, па је FG симетрала странице AB. Пошто је и $CD \| FG$, то је $\sphericalangle DCE = \sphericalangle EGF = \phi$, па је троугао CGF једнакокраки и симетрала основице CG пролази кроз теме F. Према томе, F је пресек симетрале две тетиве CG и AB, тј. F је средиште описаног круга. Следи да је AB пречник, па је $\sphericalangle ACB = 90°$. Одавде налазимо да је $\phi = 22°30'$, а $\sphericalangle CAD = 90° - \phi = 67°30'$ и $\sphericalangle ABC = 90° - 3\phi = 22°30'$.

597. Имамо да је (в. сл.) $\sphericalangle PNC = 180° - \sphericalangle ANQ = 180° - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° + \frac{\alpha}{2}$ (*), $\sphericalangle PSC = \frac{\beta + \gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ (**), па је $\sphericalangle PNC + \sphericalangle PSC = 180°$ (из (*) и (**)) и четвороугао $PNCS$ је тетиван. Одавде следи да су и периферијски углови над тетивом SC једнаки: $\sphericalangle SPC = \sphericalangle SNC = 90°$, па је и $\sphericalangle BPC = 90°$. Доказ је сличан ако се тачка P налази ван троугла ABC.



Сл. уз зад. 597



Сл. уз зад. 599

598. Нека $AB = 6, AC = 7$ и $BC = 9$ и R_a, R_b, R_c дужине полупречника кругова са средиштима у A, B, C. Тада је $R_a + R_b = 6, R_c - R_a = 7$ и $R_c - R_b = 9$, одакле се лако налази $R_a = 4, R_b = 2, R_c = 11$.

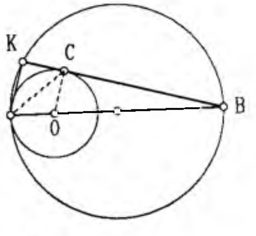
599. Нека је α_i централни угао, који одговара луку A_iB_i ($i = 1,2,3,4$) и ϕ угао између дужи B_1B_3 и B_2B_4 (в. сл.). Тада је

$$\varphi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2},$$

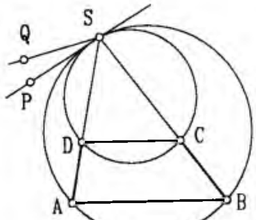
а како је $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = 360°$, то је $\varphi = 90°$.

600. Четвороугао $AQMP$ је тетиван, јер је $\sphericalangle APM + \sphericalangle AQM = 180°$. Како су периферијски углови над тетивом PM, $\sphericalangle PAM$ и $\sphericalangle PQM$ једнаки, а $\sphericalangle PQM = \sphericalangle KAQ$, као углови са нормалним крацима, биће и $\sphericalangle PAM = \sphericalangle KAQ$.

601. Нека је O средиште мањег круга (в. сл.). Због $AK \| OC$ и $OA = OC$, биће $\sphericalangle KAC = \sphericalangle ACO = \sphericalangle CAO$.



Сл. уз зад. 601



Сл. уз зад. 602

602. Нека је PS тангента мањег, а QS већег круга. Тада је $\sphericalangle PSD = \sphericalangle SCD$ и $\sphericalangle QSD = \sphericalangle SBD$ (в. сл.), па је $\sphericalangle PSD = \sphericalangle QSD$, $PS = QS$ и кругови се међусобно додирују.

603. Нека су Q и R тачке у којима уписани круг додирује странице BC и AC. Како је $S_{s_a}(CR) = MP$ и $S_{s_b}(CQ) = NP$ и $CR \cong CQ$, то је и $MN \cong PN$.

605. Транслирати крак Ox у смеру осе q за дужину d.

606. Исто као у претходном задатку.

Глава VI – Рационални алгебарски изрази

607. а) $6x^3 - 4x^2 + 8x + 5$; б) $x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 3$.

608. а) $2x^2 + a$; б) $2x^2 + 3x - 2a^2$; в) $7x^2y + 7xy^2 - 2xy + y^2$; г) $-\frac{1}{2}x^3y$; д) $2x^a$; ђ) a^x.

609. а) $x^3 + 3x^2 - 7x$; б) $4x^4 - 12x^3 + 33x^2 + 7x - 2$; в) $4x^5 - 5x^4 - x^3 + 24x^2 + 30x + 9$; г) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$.

610. а) $2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$; б) $ax + by$; в) $x^5 - y^5$; г) $a^{2x}b^{3y} - 2a^{x+y}b^{2y} - 3a^x b^{x+2y}$.

611. а) $P(x) + Q(x) = 2x^2 - 2x$, $Q(x) - P(x) = 2x - 2$;
б) $P(x) + Q(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^3 + 2$, $P(x) - Q(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 2x - 2$;
в) $P(x) + Q(x) = 4x^5 - 3x^4 - 7x^2 - x + 3$, $Q(x) - P(x) = -4x^5 - 3x^4 - 3x^2 - 7x + 7$;
г) $P(x) + Q(x) = (a + b)x^3 + (b - 2a)x^2 - 2ax + 3b + 8a$,
$P(x) - Q(x) = (a - b)x^3 + (b + 2a)x^2 - 2ax + 3b - 8a$;
д) $P(x,y) + P(x,y) = 2x^3 + 6xy^2$, $P(x,y) - Q(x,y) = 2y^3 + 6x^2y$;
ђ) $P(x,y) + Q(x,y) = -\frac{1}{3}xy - 2x$, $P(x,y) - Q(x,y) = \frac{5}{3}xy - x + 2y$.

612. а) $x^3 - 1$; б) $x^3 + 27$; в) $6x^3 - 31x^2 + 47x - 42$; г) $x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x + 8$; д) $4x^4 - 4x^3y - 4x^2y^3 - 18x^2y^2 + 12xy^4 + 12xy^3 - 6y^5$; ђ) $xy^2 - x^2y - xz^2 + x^2z + yz^2 - y^2z$.

613. а) $2x^2y^2$; б) $-2x^{10}y^3$; в) $4x^6y^{10}$; г) x^2y^{2n+1}; д) xy; ђ) x^2y^7; е) xy^2; ж) $16a^{6n}b^{9m}$; з) x^4; и) $x^{14}y^2$; ј) x^my^{4m}; к) y^{2n}.

614. а) $5(a+x)$; б) $2(a-1)$; в) $7(a-2)$; г) $3(a^2+3)$; д) $3(a+2b+3)$; ђ) $x(6+a+b)$; е) $3(3a^2-2a+4)$.

615. а) $a^2(1-a)$; б) $3a(a-2)$; в) $x^3(a^2-1)$; г) $a(3a^2+2a+1)$; д) $x(4x-2+y)$; ђ) $x^3y(y^2-1+xy^2)$.

616. а) $x^2y^3(x-y^5)$; б) $2xy^2(3x-2y)$; в) $5x^2(x-3y^3)$; г) $3x^2y(2x-3y+xy)$; д) $x^3(1-x^4-2x^2)$.

617. а) $ab^2(a^2+2a^3-4b^3)$; б) $3a^2b^3(a-3b+4a^3b)$; в) $5x^3y(3-2x-xy^2)$; г) $7x^3y^2(2x-5xy+3y^2)$; д) $3a^5b^7(7a^2b^3-4a^3+5b^5-6)$; ђ) $7x^4a^3(2a^5-3a^2x^4-2x^3-12)$.

618. а) $(m+n)(a+b)$; б) $(a-b)(m+n)$; в) $(m-n)(x-y)$; г) $(a-b)(x-5)$; д) $(p-q)(7q-2p)$; ђ) $(x-3)(2m+5n)$; е) $(a-b)(2k+1)$; ж) $(x+y)(3+x+y)$; з) $(a-b)(a-3b)$; и) $(x+y-z)(2a-3b-5z)$.

619. а) $a^n(a^n+1)$; б) $a^{2x}(a^x-b^x)$; в) $2x^n(x^m+3)$; г) $a^x(a^{2x}+3a^x+5$; д) $3a^{2x}(2-3a^x+b^x)$.

620. а) $(a+b)(m-n)$; б) $(a-b)(m-n)$; в) $(a-x)(b+y)$; г) $(a-m)(n-b)$; д) $(x+y)(5a-1)$; ђ) $(x-y)(2x-1)$; е) $(m-n)(4y-1)$; ж) $(x-y)(x-2)$; з) $(3b-2a)(2y-5x)$; и) $(a-b)(x^2+x-1)$; ј) $(x-2)(5ax-b-1)$; к) $(xy-1)(3x^3y^4+xy+z)$; л) $(mx-n)(mx^3+2x-1)$.

621. а) $(x+7)(x-7)$; б) $(a-6)(a+6)$; в) $(4x-3)(4x+3)$; г) $(3x-7)(3x+7)$; д) $(x-\frac{1}{7})(x+\frac{1}{7})$; ђ) $(\frac{x}{2}-\frac{2}{3})(\frac{x}{2}+\frac{2}{3})$; е) $(\frac{3x}{2}-\frac{2y}{3})(\frac{3x}{2}+\frac{2y}{3})$; ж) $(\frac{7x}{5}-3y)(\frac{7x}{5}+3y)$; з) $(x-0,6)(x+0,6)$; и) $(x-0,03)(x+0,03)$; ј) $(0,2x-0,5)(0,2x+0,5)$; к) $(0,1x-0,2y)(0,1x+0,2y)$; л) $(x^2y-0,1)(x^2y+0,1)$; љ) $(0,5xy-0,01)(0,5xy+0,01)$.

622. а) $(x-5)(x-1)$; б) $(a+2)(a+8)$; в) $x(2y-x)$; г) $-y(2x+y)$; д) $(2-x)(3x+2)$; ђ) $(2x+1)(4x-1)$.

623. а) $-(3x+5y)(5x+3y)$; б) $8(x-4y)(y-x)$; в) $-(3x+7y)(7x+3y)$; г) $(x-17)(11x-7)$; д) $4x(y-z)$; ђ) $(y-5)(2x+y-1)$.

624. а) $98\cdot 102=(100-2)(100+2)=100^2-2^2=10000-4=9996$;

625. а) $x^2-4x+4,\qquad x^3-6x^2+12x-8$;
б) $x^2+6xy+9y^2,\qquad x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$;
в) $x^2+2x^3+x^4,\qquad x^3+3x^4+3x^5+x^6$;
г) $a^6-4a^4+4a^2,\qquad a^9-6a^7+12a^5-8a^3$;
д) $x^4y^2-2x^3y^4+x^2y^6,\ x^6y^3-5x^5y^5+3x^4y^7-x^3y^9$;
ђ) $((x+y)+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz,\ ((x+y)+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2+3y^2z+3yz^2+6xyz$;
е) $((x-y)+z)^3=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz,\ ((x-y)+z)^3=x^3-y^3+z^3-3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2+3y^2z-3yz^2-6xyz$.

626. а) $11^2=(10+1)^2=100+20+1=121$
б) $99^3=(100-1)^3=100^3-3\cdot 100^2\cdot 1+3\cdot 100\cdot 1^2-1^3=1000000-30000+300-1=970299$.

627. а) $(a-2)(a^2+2a+4)$; б) $(4a+1)(16a^2-4a+1)$; в) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$; г) $(x-4ay)(x^2+4axy+16a^2y^2)$; д) $(2ax+y^2)(4a^2x^2-2axy^2+y^4)$; ђ) $a(a^2+3ab+3b^2)$; е) $-y(3x^2-3xy+y^2)$; ж) $-(2x+3)(13x^2-15x+9)$; з) $-2b(3a^2+b^2)$; и) $(0,4-x)(0,16+0,4x+x^2)$; ј) $(0,2+0,1x)(0,04-0,02x+0,01x^2)$; к) $(1,3x-1)(0,79x^2-1,7x+1)$; л) $-(0,5x+1)(1,75x^2+2,5x+1)$; љ) $(\frac{1}{2}-\frac{x}{3})(\frac{1}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{9})$; м) $(\frac{4}{3}+y)(\frac{16}{9}-\frac{4}{3}y+y^2)$; н) $2(2b-a)(13a^2-16ab+7b^2)$; њ) $(2a-3)(a^2-3a+3)$; о) $(5y-x)(19x^2+5xy+7y^2)$; п) $(x-5y)(19x^2+5xy+7y^2)$; р) $5(x-y)(7x^2-11xy+7y^2)$.

628. а) $(a-3)^2$; б) $(3a+1)^2$; в) $(5x+4y)^2$; г) $4(x^2+y)^2$; д) $a^3(a^2-b)^2$; ђ) $x(3x^2+y)^2$; е) $(\frac{1}{2}a+1)^2$; ж) $(x-\frac{1}{4})^2$; з) $(x+y+2)^2$; и) $(3x-y+z)^2$; ј) $(a+2b)^3$; к) $(5a-b)^3$; л) $(2x+3y)^3$; љ) $(3a-5b)^3$.

629. а) *Први начин:* $x^2-(3-2)x+3(-2)=x^2-3x+2x+3(-2)=x(x-3)+2(x-3)=(x-3)(x+2)$;
Други начин:

$$x^2-x+(\frac{1}{2})^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{24}{4}=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}=(x-\frac{1}{2}-\frac{5}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2})=(x-3)(x+2);$$

б) $(x+2)(x+4)$; в) $(x+7)(x+5)$; г) $(x-4)(x+1)$; д) $(x-10)(x+3)$; ђ) $(b-9)(b+7)$; е) $(b-5)(b+10)$; ж) $(a-4b)(a+7b)$; з) $(2x-y)(x+3y)$; и) $(y-a)(y-a-1)$; ј) $a^2(a-1)(a+1)(a+2)(a-2)$; к) $n(n+1)(n+2)$; л) $(x-1)(3x+8)$; љ) $(x-2)(5x+22)$; м) $x(2x-1)(x+3)$; н) $x(6x-1)(2x+1)$.

630. а) $(x+y-z)(x+y+z)$; б) $(x-y-z)(x-y+z)$; в) $(x-y-3)(x-y+3)$; г) $2(x+y-1)(x+y+1)$; д) $a(a-2b-1)(a-2b+1)$; ђ) $b^2(2a-b-2)(2a-b+2)$.

631. а) $ab(a-b)$; б) $2(x-y)(x+y)$; в) $a(a-1)(a+1)$; г) $a^2(a+1)(a-1)$; д) $5x(x-2y)(x+2y)$; ђ) $yz^2(x-1)(x+1)$; е) $(x-y)(x+y+1)$; ж) $(x+y)(x-y-1)$; з) $(x-y)(x+y-1)$; и) $x(x^2+1)(x-1)(x+1)$; ј) $ab(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$; к) $(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y)$; л) $(x-y)(x^2+xy+y^2-x-y)$; љ) $(x+y)(x^2-xy+y^2-x+y)$.

632. а) $a^2b^2(a-b)(a^2+ab+b^2)$; б) $x^4y^3(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$; в) $(x-a)(x+a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$; г) $(a^2+3)(a^4-3a^2+9)$; д) $(x^2+a^4)(x^4-a^4x^2+a^8)$; ђ) $(x-a)(x+a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)(x^2+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)$; е) $(x^5-2y^3)(x^{10}+2x^5y^3+4y^6)$; ж) $7x^7(x+2y^2)(x^2-2xy^2+4y^4)$; з) $(a-b)(a^2+ab+b^2-27)$; и) $a(a-b)(a+b)^2(a^2-ab+b^2)$; ј) $(2x+5)(x-1)(x^2+x+1)$; к) $(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$; л) $(x-1)(x+1)(p-q)(p^2+pq+q^2)$; љ) $(x-1)(x+1)(x+3)(x^2-3x+9)$; м) $(x-1)(y-1)(x^2+x+1)(y^2+y+1)$; н) $(a+2)(b-1)(b+1)(a^2-2a+4)$.

633. а) $2y(2y+3a)^3$; б) $3x(3x+2y)^3$; в) $3x(2x-3a)^3$; д) $2y(3y-2a)^3$.

634. а) $x^3-4x^2+13x-9$; б) $-x^4+2x^2+1$; в) $-4a^3-13a^2-6a+7$; г) a^2+b^2-2bc.

635. а) $x+y$; б) $c-5$; в) $(a-b)^2$; г) $2a-1$; д) $9-6a+4a^2$.

636. а) $P(2)=8$; б) $P(1-\sqrt{2})=-1-4\sqrt{2}$.

637. а)

$$-\begin{cases}(2x^5-5x^4-2x^3+12x^2-9x+2):(x^2-3x+2)=2x^3+x^2-3x+1\\ 2x^5-6x^4+4x^3\end{cases}$$

$$-\begin{cases}x^4-6x^3+12x^2-9x+2\\ x^4-3x^3+2x^2\end{cases}$$

$$-\begin{cases}-3x^3+10x^2-9x+2\\ -3x^3+9x^2-6x\end{cases}$$

$$-\begin{cases}x^2-3x+2\\ x^2-3x+2\end{cases}$$

$$0$$

б)

$$-\begin{cases}(x^3-5x^2+3x-2):(x^2-x+1)=x-4\\ x^3-x^2+x\end{cases}$$

$$-\begin{cases}-4x^2+2x-2\\ -4x^2+4x-4\end{cases}$$

$$-2x+2$$

в) x^2+1 и остатак $2x+1$; г) x^2-x и остатак 1; д) x^2-3x+5 и остатак $x-1$.

638. Остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x-1$ је по Безуовој теореми једнак $p(1)$. Резултати: а) 1; б) 0; в) 2.

639.

а) $Q(x)=x-1,\quad R(x)=1$;
б) $Q(x)=3x-2,\quad R(x)=-6$;
в) $Q(x)=x+1,\quad R(x)=-2x-1$;
г) $Q(x)=x^2+x-1,\quad R(x)=1$;
д) $Q(x)=x^2+3x+5,\quad R(x)=0$;
ђ) $Q(x)=1,\quad R(x)=4x-14$;

е) $Q(x) = 0$, $R(x) = x + 3$; ж) $Q(x) = x - \frac{1}{3}$, $R(x) = \frac{1}{6}$;

з) $Q(x) = 4x^2 + x - 1$, $R(x) = 5x + 3$.

640. а) Полиноми су идентички једнаки ако су им једнаки коефицијенти уз одговарајуће степене. Дакле, треба да буде $3 = b$, $-a = -4$, $2 = b - 1$ и $5 = 5$, тј. $a = 4$, $b = 3$. б) $a = 0$, $b = -4$; в) $a = 5$, $b = 4$.

641. а) Да би било $x^3 - 2x^2 + 3 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$, мора бити $a = 1$, $a + b = -2$, $c = 3$ и $(b + c) = 0$, одакле се добија $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$.
б) $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$; в) $a = 4$, $b = -12$, $c = 5$; г) $a = 6$, $b = -17$, $c = 12$;
д) из $x+5 = (a+b+c)x^2 - (5a+4b+3c)x + (6a+3b+2c)$, мора бити $a+b+c = 0$, $5a+4b+3c = -1$ и $6a + 3b + 2c = 5$, одакле се добија $a = 3$, $b = -7$ и $c = 4$. ђ) $a = 3$, $b = 12$, $c = 11$.

642. а) Како је $p(2)$ једнако $16 - 16m$, то је полином дељив са $x - 2$ ако је $m = 1$.
б) Пошто је $p(1) = 2 - 5m$, то је остатак једнак 7 ако је $m = -1$.

643. а) Приметимо да је $p(-1) = 0$. Одавде закључујемо да је полином p дељив са $x + 1$. Када извршимо то дељење добијамо количник $x^2 + 8x + 15$ тј. добијамо да је $p(x) = (x+1)(x^2 + 8x + 15) = (x+1)(x+3)(x+5)$.
б) $p(2) = 0; p(x) = (x-2)(x^3 - 3x - 2) = (x-2)^2(x+1)^2$. в) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. г) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$. д) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. ђ) $(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)(x+4)$.

644. а) С обзиром да је $p(1) = 0$ закључујемо да је полином $p(x)$ дељив са $x - 1$ (Безуова теорема). Када извршимо то дељење, добијамо количник $x^2 - 5x + 6$, тј. добијамо да је $p(x) = (x-1)(x^2 - 5x - 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$.
б) Због $p(1) = 0$ делимо $p(x)$ са $x - 1$ и добијамо количник $q(x) = x^3 + 2x + 3$. Због $q(-1) = 0$, делимо $q(x)$ са $x + 1$ и добијамо $q(x) = (x+1)(x^2 - x + 3)$, тј. $p(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - x + 3)$.

645. По Безуовом ставу је $p(-2) = 0$, односно $-8a + 12a - 6 = 0$, тј. $a = \frac{3}{2}$.

646. Уочимо да је $p(2) = 0$ и применимо последицу Безуове теореме.

647. Из $p(3) = p(1) + 6$ и $p(-1) = 2p(1)$ налазимо $k = 1$, $l = 2$.

648. Из $p(-1) = p(1) = p(4)$ налазимо $k = -2$, $l = 1$.

649. а) $p(2) + p(-2) = 6$, $m = 1$; б) $p(1) - p(-1) = 8$, $p(1) + p(-1) = 2$, па је $p(1) = 5$, $p(-1) = -3$, одакле налазимо $k = 3$, $l = 2$.

650. $a = 1$, $b = -5$. **651.** $m = -3$, $n = -1$.

652. Ако у $p(x) = (x^2 - 5x - 14)q(x) + 2x + 4$ заменимо $x = 7$ и $x = -2$ добијамо $p(7) = 18$, $p(-2) = 0$.

653. а) $A(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$, $B(x) = (x+1)(x+3)$, НЗД$(A(x), B(x)) = x + 1$;
б) $A(x) = (x-1)(x+1)$, $B(x) = (x-1)(x-2)$, $C(x) = (x-1)(x+2)$, НЗД$(A(x), B(x), C(x)) = x - 1$;
в) НЗД$(A(x), B(x)) = (x-2)^2(x^2 + x + 1)$;
г) Дати полиноми могу се написати као $(a-b)(a+b)$, $(a-b)^2$, $(a-b)(a-2b)$. Њихов НЗД је $a - b$;
д) $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$; ђ) $x - 1$; е) $x(x-2)$; ж) x.

654. а) $10a^3$; б) $18ab^2$; в) $180a^3$; г) $42a^2b^5$; д) $12abc$; ђ) $30a^2b^2c^2$.

655. а) $x^2 - y^2$; б) $a^2 - b^2$; в) $x(x^2 - 1)$; г) $3(a-b)(a+2)$; д) $2(a^2 - b^2)$; ђ) $6(a^2 - b^2)$; е) $-(a^2 - b^2)$; ж) $6a(a^2 - 9)$.

656. а) $(x^2 - y^2)^2$; б) $(x+y)(x^2 - y^2)$; в) $(a^2 - b^2)^2$; г) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^2$; д) $a^3 - b^3$; ђ) $a^3 + b^3$; е) $a^3 + 27$; ж) $a^3 - 125$.

657. а) $xy^2(x^2 - y^2)$; б) $x^2(x-1)(x+1)^2$; в) $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = x^6 - y^6$; г) $12x^2(x^2 - 1)^2$; д) $x^2(3x - 2y)^2(3x + 2y)$; ђ) $(4x^2 + 3)(x-2)(3x+1)$.

658. а) $x \neq 7$; б) $x \neq y$; в) $p \neq -q$; г) $x \neq -\frac{1}{2}$; д) $x \neq y$ и $x \neq 3y$; ђ) $x \neq -1$; е) $x \neq 2y$ и $x \neq 3y$; ж) $a \neq \pm 1$.

659. а) c за $bc \neq 0$; б) d за $bcd \neq 0$; в) $\frac{a}{2c}$ за $ac \neq 0$; г) -1 за $x \neq y$; д) $-\frac{1}{x+y}$ за $x \neq \pm y$; ђ) $\frac{a-b}{a+b}$ за $a \neq -b$; е) $\frac{a}{a-2}$ за $a \neq 2$; ж) $\frac{a+3}{b}$ за $b \neq 0$ и $a \neq -3$; з) $\frac{a-4}{ab}$ за $ab \neq 0$ и $a \neq \pm 2$; и) $\frac{y(x-5)}{x}$ за $xy \neq 0$ и $x \neq -5$; ј) $\frac{x+y}{x(x-y)}$ за $xy \neq 0$ и $x \neq y$.

660. а) $\frac{a}{a-b}$, за $a,b \neq 0$ и $a \neq \pm b$; б) $\frac{a+1}{a-2}$, за $a \neq 0$ и $a \neq 2$; в) $\frac{ab}{a+2}$, за $a,b \neq 0$ и $a \neq -2$; г) $\frac{a}{b}$, за $a,b \neq 0$ и $|a| \neq 2$; д) 1, за $a,b \neq 0$ и $a \neq \pm b$; ђ) 2, за $a,b \neq 0$ и $a \neq \frac{3}{2}b$; е) -2, за $a \neq 0, b \neq 0$ и $a \neq 2b$; ж) $\frac{b-a}{1-b}$, за $a,b \neq 0$ и $b \neq 1$; з) $\frac{a+1}{a+b}$, за $a \neq -b$; и) $\frac{a-2}{a+3}$, за $a \neq 1$ и $a \neq -3$; ј) $\frac{x-2y+1}{x+4y}$, за $x,y \neq 0$ и $x \neq -4y$; к) $\frac{a-c}{2a+c}$, за $b \neq -c$, $c \neq -2a$; л) $\frac{4a(ax-3y)}{5(ax+3y)}$, за $ax+3y \neq 0$, $a \neq 0$; љ) $\frac{ax+b}{ax-b}$, за $ax \neq b$.

661. а) $\frac{a-b}{b}$, за $b \neq 0$ и $a \neq -3$; б) $\frac{a}{a+2b}$, за $a \neq -b$ и $a \neq -2b$; в) $\frac{1}{a-b}$, за $a \neq 0, a \neq b$ и $|a| \neq 1$; г) $\frac{1}{3}$, за $a \neq 0$ и $a \neq -1$; д) $\frac{a-3}{a+2}$, за $a \neq 0$ и $a \neq -2$; ђ) 1, за $a,b \neq 0$ и $a \neq 2$; е) $2a^2$, за $a \neq 1$, $b \neq 0$; ж) $4ab^3$, за $a \neq 0$ и $|a| \neq 1$; з) $5xy^2$, за $x \neq 1$; и) $\frac{x-y}{2}$, за $x \neq 0$ и $x \neq 1$.

662. а) $\frac{a+1}{a-1}$, за $a \neq x$ и $a \neq 1$; б) $\frac{1}{1-x^2}$, за $a \neq \pm 1$ и $x \neq \pm 1$; в) $\frac{a+b}{b-a}$, за $d \neq c, b \neq a$; г) $\frac{a+b+c}{a+b-c}$, за $a+b-c \neq 0$ и $a-b+c \neq -0$; д) $\frac{x^2-x-1}{9(x^2+x-1)}$, за $x^2+x-1 \neq 0$; ђ) $\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}$, за $x \neq -a$; е) $\frac{x^2+2x+2}{a-1}$, за $a \neq 1$; ж) $\frac{a+b}{ab-1}$, за $ab \neq \pm 1$; з) $\frac{a^2+1}{a^4-a^2+1}$, за $a \neq \pm 1$; и) $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$, за $x^2-y^2 \neq 0$; ј) $\frac{c+2}{c-2}$, за $c \neq 2$; к) $x^4+x^3+x^2+x+1$, за $x \neq 1$; л) 1, за $|x| \neq 1$, $|y| \neq 1$; љ) 1, за $a \neq \pm b$.

663. а) $\frac{a}{2}$, за $a \neq 0$; б) $\frac{b+1}{b}$, за $b \neq 0$; в) $\frac{a^2+a-1}{a+1}$, за $a \neq 0, a \neq -1$; г) $\frac{b^n+4b+1}{1-2b}$, за $b \neq 0$ и $b \neq \frac{1}{2}$; д) $\frac{a^4+2}{b^5-3}$, за $a \neq 0, b^5 \neq 3$; ђ) $\frac{a^n+3}{ab^n-2}$, за $a,b \neq 0$, $ab^n \neq 2$; е) $\frac{a}{a^x-1}$, за $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$; ж) $\frac{a^x-a^y}{a^x}$, за $a \neq 0$, $a^x+a^y \neq 0$; з) $\frac{a^{3x}}{a^x-b^x}$, за $a^x \neq b^x$.

664. а) $\frac{22a+b}{6ab}$ за $a,b \neq 0$; б) $-\frac{7x+6y}{6xy}$ за $x,y \neq 0$; в) $\frac{39a-37}{12a}$ за $a \neq 0$; г) $\frac{11b+18}{30b}$ за $b \neq 0$;

665. а) $\frac{x+5y}{x^2-y^2}$, за $x \neq \pm y$; б) $\frac{a^2-5ab-2b^2}{a(a^2-b^2)}$, за $a \neq 0, a \neq \pm b$; в) $\frac{a-b-3}{b(a+b)}$, за $b \neq 0, a \neq -b$; г) $\frac{6ab}{a^2-b^2}$, за $a \neq \pm b$; д) $\frac{5xy+y^2}{x(y^2-x^2)}$, за $x \neq 0, x \neq \pm y$; ђ) $\frac{x^3-2x^2y-y^3}{xy(x-y)}$, за $x,y \neq 0, x \neq y$.

666. а) $\frac{2a}{(a-b)^2(a+b)}$, за $a \neq \pm b$; б) 0, за $n \neq \pm 1$; в) $\frac{4a}{a+x}$, за $a \neq \pm x$; г) $\frac{2y}{x(x-y)}$, за $x \neq y \neq 0$; д) $\frac{3y}{x^2-9y^2}$, за $x \neq \pm 3y$; ђ) $\frac{1}{x+2}$, за $|x| \neq 2$; е) 0, за $|x| \neq 2$; ж) $\frac{-23}{15(x-2)}$, за $x \neq 2$.

667. а) $\frac{2a+3}{(a+3)^2}$, за $a \neq -3$; б) $\frac{3y-2x}{(x-y)^2}$, за $x \neq y$; в) $\frac{3(2x^2-7x+6)}{(x-3)^2}$, за $x \neq 3$; г) $\frac{a+b-2ab-b^2}{(a+b)^3}$, за $a \neq -b$; д) $\frac{x^2-2xy-y^2}{(x+y)(x-y)^2}$, за $x \neq \pm y$; ђ) $\frac{2a^2+25a-3}{(a-3)^2(a+3)}$, за $a \neq \pm 3$.

668. а) 1, за $x, y \neq 0$ и $2x - 5y \neq 0$; б) $\frac{15-5a}{3a(4a^2-9)}$, за $a \neq 0$ и $|a| \neq \frac{3}{2}$; в) $\frac{8-4a}{(a+4)(a-4)^2}$, за $|a| \neq 4$; г) $\frac{2(3y-2x)}{2x+3y}$, за $x \neq \pm\frac{3}{2}y$; д) $\frac{13x+7y}{2}$, $x \neq 0$, $2x+y \neq 0$; ђ) $\frac{9x^2-16xy+3x-8y}{2x}$, $x \neq 0$, $x - 2y \neq 0$.

669. а) $\frac{4}{(a-2)(x-3)}$, за $|a| \neq 2$ и $x \neq 3$; б) $\frac{5x}{(2x-1)(3x+1)}$, за $x \neq \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -2$; в) $\frac{a+y}{(a+b)(x+y)}$, за $a \neq -b, x \neq -y$; г) $\frac{7}{6}$, за $a \neq b, a \neq x$; д) 1, за $m \neq \pm\frac{1}{3}$; ђ) 1, за $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a+b \neq 0$; е) $\frac{m+3}{(m-3)^2}$, за $m \neq \pm 3$; ж) 1, за $a \neq 4$, $a \neq \pm 3$.

670. а) $\frac{6x^3+13x^2+9x+1}{(x^2-1)(1+x+x^2)}$, за $|x| \neq 1$; б) $\frac{(2a+1)^2}{8a^3-1}$, за $a \neq \frac{1}{2}$; в) $\frac{4a^2}{a^2-b^2}$, за $a \neq \pm b$; г) $\frac{-2}{b(a+b)}$, за $b \neq 0, a \neq -b$; д) 0, за $x \neq \pm 2$; ђ) 1, за $a \neq 2$.

671. а) $\frac{1}{b^9}$ за $a, b \neq 0$; б) $\frac{1}{(ab)^8}$ за $a, b \neq 0$; в) $\frac{ab^2d^2}{c^5}$ за $a, b, c, d \neq 0$; г) $\frac{a^4b}{c^5d}$ за $a, b, c, d \neq 0$; д) $\frac{x^9y^2}{9a^3c^3d^7}$ за $a, b, c, d, x, y \neq 0$; ђ) $\frac{3a^9b^{25}}{c^6}$ за $a, b, c \neq 0$.

672. а) a^{n+3} за $a \neq 0$; б) a^{3n+1} за $b \neq 0$; в) b^{n+2} за $a, b \neq 0$; г) $\frac{b^{n+4}}{c^6}$ за $a, c \neq 0$; д) $\frac{5b^{3n-6}}{a^{2n-8}}$ за $a, b \neq 0$.

673. а) -1 за $a \neq b \neq 0 \neq a$; б) $z(4x^2+6y^2-3xz)$ за $x, y \neq 0$; в) $\frac{y-x}{y^2}$ за $y \neq 0$ и $x \neq -y$; г) $\frac{1}{(a+b)^2}$ за $a \neq -b$ и $a^2+b^2 \neq 0$; д) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$ за $a \neq \pm b$; ђ) $\frac{6}{2x+1}$ за $x \neq 0$ и $|x| \neq \frac{1}{2}$.

674. а) $\frac{3x(x+5)}{10}$ за $x \neq 0$ и $x \neq 5$; б) $\frac{2y}{x+2}$ за $y \neq 0$ и $|x| \neq 2$; в) $-\frac{2(x+y)}{y}$ за $y \neq 0, x \neq y$ и $x \neq 2y$; г) $\frac{-2x}{ax+1}$ за $ax \neq 2$ и $|ax| \neq 1$; д) $\frac{a}{x}$, за $x \neq 0$, $x \neq 3$, $x \neq -y$; ђ) $\frac{a(x+y)^2}{b(x-y)^2}$, за $b \neq 0$, $x \neq \pm y$; е) $\frac{b}{a}$, за $b \neq 0$, $a \neq 0$, $x \neq \pm y$; ж) $\frac{(b-c)^2}{a^2-c^2}$, за $a \neq \pm b$, $a \neq \pm c$, $b \neq c$.

675. а) $\frac{5x}{y}$, за $x, y \neq 0$; б) $\frac{a^3-ab^2+a^2b-b^3-2b}{(a+b)^2}$, $a \neq \pm b$; в) $\frac{1}{2a^3}$, за $a \neq 0$ и $a^2 \neq \frac{1}{2}$; г) 2, за $x \neq 3$; д) $b-a$, за $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq 2a$; ђ) $\frac{3(x^2+y^2)}{xy}$, за $x \neq 0$, $y \neq 0$; е) $\frac{x^2-9y^2}{9y^3}$, за $y \neq 0$, $x \neq 3y$; ж) 16 за $m \pm n \neq 0$, $r \pm s \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

676. а) $\frac{2a}{3(a-4)}$, $a \neq 4$ и $|a| \neq 2$; б) $\frac{a+2}{a^{n+1}}$, $a \neq 0$, $a \neq 3$ и $|a| \neq 1$; в) $\frac{a+b+1}{ab(a+b)^2}$, за $a, b \neq 0$ и $a \neq -b$; г) $\frac{x-y}{xy}$, за $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$; д) $\frac{5}{xy}$, за $x \neq 0$, $y \neq 0$, $2x \neq \pm 3y$; ђ) 2, за $3a \neq \pm 4b$; е) 6, за $x \neq 3y$, $x \neq \frac{1}{3}y$, $x \neq \pm y$; ж) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, за $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$.

677. а) $\frac{a+b}{3}$, $ab \neq 0$; б) $\frac{x-2y}{2}$, $x, y \neq 0$ и $x \neq \pm 2y$. в) $\frac{20}{3}$, $y \neq \pm 1$; г) $x+2$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$; д) $\frac{ab}{3}$, $ab \neq 0$, $a \neq \pm b$; ђ) $\frac{27}{ab}$, $ab \neq 0$, $a \neq \pm\frac{2}{3}b$.

678. а) 1 за $a, b \neq 0, a \neq -b$; б) $\frac{x+y}{x-y}$ за $x, y \neq 0$ и $x \neq \pm y$.

679. а) $\frac{3xy}{(y-x)^3}$, $x \neq \pm y$; б) 9, $x \neq 0, |x| \neq 2$.

680. а) $\frac{a}{x-a}$, $a \neq 0$, $x \neq \pm a$; б) $\frac{2bc}{(b+c-a)^2}$, $abc \neq 0$ и $x \neq \pm a$; в) $\frac{a-x}{8x^2}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$ и $x \neq \pm a$; г) $-\frac{b+2}{2b}$, $b \neq 0, a \neq b, a \neq -2, a \neq \frac{1}{2}$.

681. а) $\frac{2}{2a+1}$, $|a| \neq 1, a \neq \pm\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{a+1}$, $|a| \neq 1$; в) $\frac{a(b+c-a)}{2}$, $abc \neq 0, b \neq -c, b+c \neq \pm a$.

682. а) $\frac{(a+1)^2}{a}$, за $a \neq 0, a \neq 1$ и $|x| \neq 1$; б) $\frac{x^2}{x^2+y^2}$, $x \neq \pm y$; в) $-\frac{3}{2}$, $x \neq 3$; г) $\frac{a(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)}$, $a \neq \pm b$; д) $\frac{a(a-3)}{(a+4)(a-2)}$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, $a \neq -4$ и $a \neq -3$; ђ) $\frac{x+y}{y}$, $y \neq 0$.

683. а) $\frac{a+b-2}{a-b+2}$, за $|a \pm b| \neq 2$; б) $\frac{9}{a-b}$, за $a \neq \pm b, 2a+b \neq 0$; в) ab за $a, b \neq 0$, $a+b \neq \pm 2c$; г) $\frac{x-y}{x+y}$, за $x \neq \pm y \neq 0 \neq x$.

684. а) $\frac{3x}{2(y-x)}$, $x \neq y \neq 0 \neq x$; б) $\frac{a-3}{a+1}$, $a \neq 0$, $a \neq -1$ и $a \neq -3$; в) $x-y$, $x, y \neq 0$ и $x \neq -y$; г) $\frac{3}{2}$, $a \neq \pm b$; д) $x-y$, $x \neq -y$; ђ) $\frac{1}{x^2-9}$, $|x| \neq 3$; е) 1, $|a| \neq 2$; ж) 2, $x \neq 0$ и $x \neq -3$.

685. а) $\frac{1}{xy}$, за $x, y \neq 0$ и $x \neq y$; б) $\frac{1}{x-1}$, за $x \neq 0$ и $|x| \neq 1$; в) $\frac{1}{x-y}, x \neq \pm y, x \neq 0, x \neq -\frac{y}{2}$; г) $9, x \neq \pm 2, x \neq -1, x \neq 0$; д) $0, x \neq \pm\frac{1}{2}$; ђ) $-1, a \neq 0, a \neq \pm 1$; е) 2, $x \neq 1$; ж) $\frac{a^2+x^2}{x^3-a^3}$, $x \neq a$.

686. а) $\frac{a-b-c}{a+b+c}$, за $a+b-c \neq 0$ и $a-b+c \neq 0$; б) $\frac{a+3}{a-3}$, за $a \neq 3$; в) $\frac{a^2+ax+a^2}{a-x}$, за $a \neq 0$ и $a \neq \pm x$; г) $\frac{a}{x}$, за $a, x \neq 0$; д) $\frac{x+y+z}{b+c-a}$, за $b+c-a \neq 0$ и $x+y-z \neq 0$; ђ) $a-b, a \neq -b$.

687. а) $\frac{a-b}{a+2b}$, $b \neq 0, a+2b \neq 0$; б) $\frac{a-1}{a-2b}$, $b \neq 0, a \neq 2b$; в) $\frac{b^2-1}{ab+1}$, $b \neq 0, ab+1 \neq 0$; г) $\frac{3ab-1}{3a+b}$, $ab \neq 0, 3a+b \neq 0$.

688. а) $\frac{1}{2(x+y)}$, $x \neq 3, x \neq \pm y$; б) $\frac{4}{3(a+5)}$, $a \neq -5$; в) $\frac{(a^2-4)^2}{8a}$, $|a| \neq 2$.

689. а) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $x \neq \pm y$; б) $\frac{a+b}{a-b}$, $a, b \neq 0, a \neq b, a \neq 3b$; в) $\frac{1}{x}$, $|x| \neq 1$ и $x \neq 0$.

690. а) $x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2-(\sqrt{2}xy)^2 = (x^2-\sqrt{2}xy+y^2)\cdot(x^2+\sqrt{2}xy+y^2)$;
б) $x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$;
в) $(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)$;
г) $(x^3)^2-(y^3)^2+(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)\cdot(x^2-y^2+1)$;
д) $2(x^2+xy+y^2)^2$;
ђ) $5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

691. а) $x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-4x^2 = (x^2-2x^2+2)\cdot(x^2-2x+2)$;
б) $(x^4+1)^2-(x^2)^2 = (x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)$;
в) $x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1) = (x+1)(x^4+x^2+1) = (x+1)((x^2+1)^2-x^2) = (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;
г) Пођимо од $x^{15}-1$ имамо да је $x^{15}-1 = (x^5)^3-1 = (x^5-1)(x^{10}+x^5+1) = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{10}+x^5+1)$, а са друге стране $x^{15}-1 = (x^3)^5-1 = (x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)$, па је $x^{10}+x^5+1 = \frac{(x^2+x+1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{x^4+x^3+x^2+x+1} = (x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$.

692. а) $2(x^2+1)^2+x^3+x = (x^2+1)(2x^2+x+2)$;
б) Узети смену: $x^2+5x = t$. Резултат: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$; в) Уведимо смену $x^2+x = t$. Тада важи $(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10 = t^2+3t-10 = (t+5)(t-2) = (x^2+x+5)(x^2+x-2) =$

$(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$. г) $(x^2+x+4)(x+3)(x-2)$; д) $(x^2+x+7)(x+3)(x-2)$; ђ) $(x^2+x+3)(x-1)(x+2)$.

693. а) $ab^2+2abc+ac^2+bc^2+2abc+ba^2+ca^2+2abc+cb^2-4abc = ab^2+ba^2+ac^2+bc^2+c(a+b)^2 = ab(a+b)+c^2(a+b)+c(a+b)^2 = (a+b)(c^2+ca+cb+ab) = (a+b)(b+c)(c+a)$;
б) $a^2b-ab^2-a^2c-ac^2+2abc+bc^2-b^2c = ab(a-b)-c^2(a-b)-c(a-b)^2 = (a-b)(ab-c^2-ca+cb) = (a-b)(b(a+c)-c(a+c)) = (a-b)(a+c)(b-c)$;
в) $d(b-c)(a-c)(a-b)$;
г) $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$;
д) $3(a+b)(b+c)(c+a)$;
ђ) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc = (a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c) = (a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)\cdot c+c^2-3ab\right] = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

694. а) $z^3(x-y)-z(x^3-y^3)+xy(x^2-y^2) = (x-y)\left[z^3-z(x^2+xy+y^2)+xy(x+y)\right] = (y-x)(z-y)(x-z)(x+y+z)$;
б) $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)(x+y+z)$; в) $(a+b)((b+c)(c+a)$;
г) $(x-y)(z+x)(z-y)$; д) $(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$;
ђ) $(x+y)(y+z)(z-x)(xz-yz-xy)$; е) $(x-y)(x+z)(y-z)$;
ж) $(b+c)(a+b)(a+c)$; з) $(y-z)(z-x)(y-z)(x+y+z)$;
и) $(a-x)(x-y)(a-y)(a+x+y)$.

695. а) $a(a+7b)(a-4b)$; б) $a(a-3b)(a+11b)$; в) $n(7n+x)(2n+7x)$; г) $m(2n-x)(3n+4x)$; д) $ab(3ax-2b)(2ax+5b)$; ђ) $bx(5ax-3by)(2ax+3by)$; е) $xy(2x+3y)(3x+2y)$; ж) $xy(x-5y)(5x-y)$.

696. а) $a^2-b^2-c^2+d^2-2ad-2bc = (a^2-2ad+d^2)-(b^2+2bc+c^2) = (a-d)^2-(b+c)^2 = (a-b-c-d)(a+b+c-d)$;
б) $a^3+8a^2+19a+12 = a^3+4a^2+4a^2+16a+3a+12 = a^2(a+4)+4a(a+4)+3(a+4) = (a+4)(a^2+4a+3) = (a+4)(a^2+a+3a+3) = (a+4)(a(a+3)+a+3) = (a+4)(a+3)(a+1)$;
в) $a^2+ac-bc-b^2 = a^2+ac+ab-ab-bc-b^2 = a(a+c+b)-b(a+c+b) = (a+b+c)(a-b)$;
е) $a^3-6a^2+12a-8-12a+8+30-a = (a-2)^3-(a-2)-12(a-3) = (a-2)(a-3)(a-1)-12(a-3) = (a-3)(a-5)(a+2)$.

697. а) $a^2c+ac^2-b^2c-bc^2+ab(a-b) = c(a^2-b^2)+c^2(a-b)+ab(a-b) = (a-b)(c(a+c)+b(a+c)) = (a+c)(a-b)(b+c)$.

698. а) Из $\dfrac{A(x+1)+B(x-5)}{(x+1)(x-5)} = \dfrac{16-2x}{x^2-4x-5}$ добијамо $(A+B)x+A-5B=-2x+16$, тј. $A+B=-2$, $A-5B=16$. Одавде је $A=1$, $B=-3$; б) $A=3$, $B=4$; в) $A=1$, $B=3$; г) $A=5$, $B=-2$.

699. а) $\dfrac{(2n-1)(n+1)}{(2n-1)(n-1)} - \dfrac{(3n+1)(n-1)}{(3n+1)(n+1)} - \dfrac{4n}{(n-1)(n+1)} = 0$, $n\neq\pm1$, $n\neq\frac{1}{2}$, $n\neq-\frac{1}{3}$;
б) $\dfrac{4x}{(1-x)(1+x)} + \dfrac{(3x-1)(x+1)}{(3x-1)(x-1)} - \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(2x+1)(x+1)} = 0$, $x\neq\pm1$, $x\neq\frac{1}{3}$, $x\neq-\frac{1}{2}$; в) $\dfrac{1}{1-4a^2}$, $a\neq\pm\frac{1}{2}$, $a\neq\frac{1}{3}$, $a\neq-\frac{2}{3}$; г) $\dfrac{1}{1-4y^2}$, $y\neq\pm\frac{1}{2}$, $y\neq\pm\frac{1}{4}$; д) $\dfrac{x-1}{x^2-x-1}$, за $x\neq0$, $x^2\neq x+1$; ђ) $-\dfrac{x+2}{8}$, за $x\neq\pm1$, $x\neq\pm2$; е) $\dfrac{(a-b-c)a}{2}$, $abc\neq0$, $b+c\neq0$, $a-b-c\neq0$; ж) $\dfrac{2x^4}{x^8-16y^8}$, $xy\neq0$; з) 0, $x\neq0$, $x\neq\pm y$; и) 1, $x\neq\pm\frac{3}{2}$; ј) x^3-1, $x\neq-1$; к) $\dfrac{1}{x+2}$, $x\neq\pm2$. л) $\dfrac{a}{a^2+1}$, $|a|\neq1$; љ) $\dfrac{-2ab}{a+b}$, $a\neq\pm b, a\neq0, b\neq0$; м) $x-y$, $x\neq\pm y$; н) $1, x\neq\pm1, x\neq0, y+x\neq0$; њ) $-\dfrac{a+b}{a^2b^2}, a,b\neq0, a\neq b^2, a^2\neq b^2$; о) $\dfrac{1}{xy}, x,y\neq0, x+y\neq0$. п) Дељењем полинома се добија да је дати израз једнак за $x\neq0, x^2-x-4\neq0$ изразу $3x^2:[(x^2-x+4)+(x^2+x+1)+(x^2+x+2)-x-7] = 3x^2:3x^2=1$; р) Резултат дељења $(x^6+2x^5+x^3-2x^2-2)$ и (x^3+2x^2+2) је x^3-1, па је дати израз за $x\neq1, x\neq0, x\neq-\frac{1}{2}$ и $x^3+2x^2+2\neq0$ једнак

изразу $-\dfrac{1}{x^2+x+1}$; с) Израз у средњој загради је једнак изразу $(x^2+\dfrac{1}{x^2}+1)^2$. Резултат (за $x \neq 0$): $\dfrac{x^4}{(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)}$; т) $\dfrac{1}{x^4}, x \neq 0, x^4-7x^2+1 \neq 0$.

700. а) $\dfrac{6x-14}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ за $x \neq 1, 2, 3$;

б) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)} - \dfrac{1}{b(c-b)(b-a)} + \dfrac{1}{c(c-a)(c-b)} = \dfrac{bc(c-b)-ac(c-a)+ab(b-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} = \dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} = \dfrac{1}{abc}$ за $a \neq b \neq c \neq a, a, b, c \neq 0$.

701. а) За $x > 3$ имамо $\dfrac{x(x-3)+x^2-9}{x(2x^2-3x-9)} = \dfrac{1}{x}$, а за $x < 3, x \neq 0, x \neq -\dfrac{3}{2}$ $\dfrac{x(x-3)+x^2-9}{x(2x+3)(x-3)} = \dfrac{3(x-3)}{x(2x+3)(x-3)} = \dfrac{3}{x(2x+3)}$; б) $\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$, за $x \neq \pm 1$; в) $\dfrac{1}{x+1}$, за $x < 2, x \neq -1, x \neq -3$, $\dfrac{1}{x+3}$, за $x > 2$; г) $\dfrac{1}{2-3x}$ за $x < 0$, $\dfrac{x+2}{(3x-2)(x-2)}$ за $0 \leq x < 2$ и $x \neq \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{x-2}$ за $x > 2$; д) $x-2$ за $x < 1$, $\dfrac{x^2+4}{x-2}$ за $1 < x < 2$, $x+2$ за $x > 2$.

702. Означимо $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y) = t$. Решавањем система једначина $y+z = \dfrac{t}{a}$, $z+x = \dfrac{t}{b}$, $x+y = \dfrac{t}{c}$ добијамо $x = \dfrac{t}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)$, $y = \dfrac{t}{2}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$, $z = \dfrac{t}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)$ одакле је $\dfrac{y-z}{a(b-c)} = \dfrac{z-x}{b(c-a)} = \dfrac{x-y}{c(a-b)} = \dfrac{t}{abc}$.

703. Из датог услова добијамо $b^2 = (a+b-c)^2-a^2 = (2a+b-c)(b-c)$, $a^2 = (a+b-c)^2-b^2 = (a+2b-c)(a-c)$, одакле је $\dfrac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \dfrac{(a+2b-c)(a-c)+(a-c)^2}{(2a+b-c)(b-c)+(b-c)^2} = \dfrac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)} = \dfrac{a-c}{b-c}$.

704. а) Из дате једнакости добијамо $bc(a+b+c)+ac(a+b+c)+ab(a+b+c)-abc = 0$, а одатле $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$, тј: $a+b = 0$ или $b+c = 0$ или $c+a = 0$.
б) Следи непосредно из а).

705. Из $x+y+z = 0$ и $x^2+y^2+z^2 = 1$ следи $1 = x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) = -2(xy+yz+zx)$, тј. $xy+yz+zx = -\dfrac{1}{2}$. Квадрирањем добијамо $\dfrac{1}{4} = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+yz^2x+zx^2y) = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z) = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$. Најзад $x^4+y^4+z^4 = (x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) = 1^2-2\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

706. Слично као у предходном задатку, из $x+y+z = 1$ и $x^2+y^2+z^2 = 1$ следи $xy+yz+zx = 0$.

707. $b^2x^4-a^2y^4+(a^2-b^2)z^4 = b^2(x^4-z^4)+a^2(z^4-y^4) = b^2(x^2-z^2)(x^2+z^2)+a^2(z^2-y^2)(z^2+y^2) = b^2(a^2-2z^2)a^2+a^2(2z^2-b^2)b^2 = a^2b^2(a^2-b^2)$.

708. а) $M_1(x) = x^6-1, M_2(x) = 8(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1), D_2(x) = x-1$, па уз услове $x \neq 0, x \neq \pm 1, x^2y \neq \pm\dfrac{1}{4}$ важи $E(x) = (x-1)^2$. б) $x+1, x \neq \pm 1$; $M(x) = x^3+x^2-x-1$. в) $x(y-x), x \neq y$; $M(x,y) = x(x-y)^2$.

709. а) Ако је $P(\alpha) = 0$, онда је $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0 = 0$, па је $a_0 = -\alpha(a^n\alpha^{n-1}+a_{n-1}\alpha^{n-2}+\cdots+a_1)$, то је број a_0 дељив са α.

б) Из $P(\dfrac{p}{q}) = 0$ добијамо $a_n\dfrac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\dfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\cdots+a_1\dfrac{p}{q}+a_0 = 0$. Одатле, најпре, следи $a_0q^n = -p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1})$. Десна страна ове једнакости је дељива са p, па је таква и лева; како су p и q узајамно прости, добијамо $p|a_0$. Слично се доказује да $q|a_n$.

710. а) $(x+2)(x+3)(x-5)$; б) $(x+1)(x+2)(x-3)$; в) $(x-1)(x+3)(x+7)$; г) $(x-1)(x+3)^2$; д) $(3x-1)(3x-2)^2$;
ђ) Ако је $P(x)=x^3-3xy^2+2y^3$, онда је $P(y)=y^3-3y^3+2y^3=0$, па је полином $P(x)$ дељив са $x-y$. Извршивши ово дељење, добијамо $P(x)=(x-y)(x^2+xy-2y^2)=(x-y)^2(x+2y)$.

711. а) Имамо да је

$$p(x)=q(x)(x-1)(x+1)+ax+b \quad (*)$$

По Безуовој теореми је $p(1)=3$, $p(-1)=1$. Ако вредности $x=1$ и $x=-1$ заменимо у $(*)$, добијамо

$$\begin{aligned}3=&p(1)=a+b,\\ 1=&p(-1)=-a+b.\end{aligned}$$

Из последњих релација се налази $b=2$, $a=1$. Дакле, остатак при дељењу полинома $p(x)$ са x^2-1 је $x+2$. б) $x+2$.

712. а) Најпре уочимо да важи $p(1)=p(2)=0$ и $2x^4-11x^3+16x^2-x-6=(x-1)(x-2)(2x^2-5x-3)=(x-1)(x-2)(x-3)(2x+1)$; б) $(x-1)(x+3)(x+7)(3x-1)$; в) $(x+2)(x-3)(x-5)(2x+1)$; г) $(x+1)(x+3)(x+5)(3x-1)$; д) $(x-1)(x-2)(2x-1)(3x+1)$; ђ) $(x-1)(x-2)(x-3)(x^2+x+2)$; е) $(x-1)(x+3)(x+7)(x^2-x+1)$.

713. Да, јер је $P(0)=(-1)^{2n}+1-2=0$ и $P(1)=1+1-2=0$.

714. Да би полином $P(x)$ био дељив полиномом $Q(x)=(x-1)(x-2)$, неопходно је и довољно да буде дељив са $x-1$ и $x-2$. Из $P(1)=2+p+q=0$, $P(2)=28+2p+q=0$ следи $p=-26, q=24$.

715. Из прве од датих једнакости добијамо $xbc+yac+zab=abc$ (1), а из друге $ayz+bxz+cxy=0$ (2). Ако квадрирамо леве и десне стране релације (1), добијамо: $a^2b^2c^2=(xbc+yac+zab)^2=x^2b^2c^2+y^2a^2c^2+z^2a^2b^2+2abc(ayz+bxz+cxy)=x^2b^2c^2+y^2a^2c^2+z^2a^2b^2$, имајући у виду (2). Дељењем са $a^2b^2c^2$ добијамо: $1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

716. а) Упутство: посматрати производ $(x+y+z)(a^2+b^2+c^2)$. б) Упутство: најпре доказати да важи $ab+bc+ca=0$.

717. а) $E(x,y)=(x+y+1)^2+(x-2)^2-3$ има најмању вредност -3, ако је $x+y+1=0$ и $x-2=0$, тј. $x=2, y=-3$.
б) $E(x,y)=(x-y+1)^2+(y-1)^2-1$ има најмању вредност -1, ако је $x=0, y=1$.

718. а) $x_1=1$; б) $x_1=1$; в) $x_1=-1$; г) $x_1=0$.

719. а) $x_1=2$; б) $x_1=-6$; в) $x_1=0$; г) $x_1=0$; д) нема решења; ђ) $x=5$.

720. а) Решење је сваки реалан број; б) нема решења; в) $x_1=\frac{6}{5}$; г) свако $x\in R$; д) $x=-\frac{1}{3}$; ђ) $x=-2$; е) $x=2$.

721. а) $x=1 \lor x=-2$; б) $x=-1 \lor x=\frac{2}{3}$; в) $x=-\frac{1}{3} \lor x=2$; г) $x=-2 \lor x=1 \lor x=3$; д) $x=-2 \lor x=3$; ђ) $x=-3 \lor x=4$; е) $x=-\frac{3}{2} \lor x=2$; ж) $x=1 \lor x=\frac{1}{2}$.

722. Решења једначине облика $\frac{A}{B}=0$ траже се применом формуле

$$\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow (A=0 \land B\neq 0).$$

а) $x_1=2$; б) $x_1=-\frac{1}{3}$; в),г),д),ђ) - нема решења.

723. а) Једначина је дефинисана за $x\neq-\frac{2}{5}$ и $x\neq-\frac{24}{5}$. Решење је $x_1=0$; б) $x_1=-\frac{1}{4}$; в) $x_1=3$; г) $x_1=-1$; д) $x_1=-1$.

724. а) Уз претпоставку да је $x \neq \pm 1$ могу се леве и десне стране дате једначине помножити са $5(x^2 - 1)$. Добија се еквивалентна једначина $2x + 19 - 85 + 15(x + 1) = 0$, чије је решење $x_1 = 3$. Број 3 је решење и полазне једначине.

б) Уочити да је $(3x - 2)(3 - 2x) = -(6x^2 - 13x + 6)$. Решење је $x_1 = 2$; в) $x_1 = \frac{7}{8}$; г) $x_1 = 0$; д) нема решења.

725. а) Једначина је еквивалентна једначини

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{x(1+x)^2} - \frac{5}{2x(1+x)} = 0,$$

тј. $\dfrac{2x + 8 - 5(1+x)}{2x(1+x)^2} = 0$, односно $\dfrac{3 - 3x}{2x(1+x)^2} = 0$, па је решење $x_1 = 1$;
б) $y_1 = 0,9$; в) $z_1 = 1,5$; г) $u_1 = 3$; д) $v_1 = 2$; ђ) нема решења. е) нема решења; ж) $x_1 = 4$; з) $x_1 = 3$; и) нема решења.

726. а) За $x \neq 1$ једначина је еквивалентна једначини $3x + 2 - (2x + 3) = 0$, чије је решење $x_1 = 1$. Међутим, како једначина није дефинисана за $x = 1$, дата једначина нема решења.

727. а) да; б) да; в) не; г) не; д) не; ђ) не; е) да; ж) да; з) не.

728. а) $x = 10 - 4a$, $y = \dfrac{2+2a}{3}$; б) $a = 2$ $x = y = 2$.

729. а) Дата једначина еквивалентна је са једначином и $(m-3)x = -5(3m+1)$, одакле се закључује да за $m = 3$ нема решења, а за $m \neq 3$ решење је $x_1 = \dfrac{-5(3m+1)}{m-3}$;

б) За $m = 4$ - нема решења, за $m \neq 4$ решење је $x_1 = \dfrac{m+2}{4-m}$;

в) За $m = -6$ - нема решења, за $m \neq -6$ решење је $x_1 = \dfrac{5}{m+6}$;

г) За $m = 0$ - решење је сваки реалан број x, за $m \neq 0 - x_1 = 1 - m$;

д) За $m = -5$ - решење је сваки реалан број x, за $m \neq -5 - x_1 = m - 5$;

ђ) За $m = 3$ - решење је сваки реалан број x, за $m = -3$ нема решења, за $m \neq \pm 3$ - решење је $x_1 = \dfrac{1}{m+3}$;

е) За $m = -5$ - решење је сваки реалан број x, за $m = 3$ нема решења, за $m \notin \{-5, 3\}$ решење је $x_1 = \dfrac{1}{m-3}$;

ж) Једначина се може представити у облику $(m-1)(m-2)x = m - 1$. За $m = 1$ решење је сваки реалан број x, за $m = 2$ - нема решења, за $m \notin \{1, 2\}$ решење је $x_1 = \dfrac{1}{m-2}$;

з) За $m = 0$ нема решења; за $m = 1$ решење је сваки реалан број x, за $m \notin \{0, 1\}$ решење је $x_1 = \dfrac{1}{m}$;

и) Једначина се може написати у облику $(8 + m^3)x = m^2 - 4$, за $m = -2$ решење је сваки реалан број x, за $m \neq -2$ решење је $x_1 = \dfrac{m-2}{m^2 - 2m + 4}$;

ј) За $m = 2$ решење је сваки реалан број x, за $m \neq 2 - x_1 = \dfrac{m+2}{m^2 + 2m + 4}$;

к) За $m = 4$ нема решења, за $m \neq 4$ решење је $x_1 = \dfrac{7 - 3m}{m - 4}$;

л) За $m \in \{-3, 1, 2\}$ решење је сваки реалан број, за $m = 3$ нема решења, а за $m \notin \{-3, 1, 2, 3\}$ решење је $x_1 = \dfrac{1}{m-3}$.

730. а) Једначина је еквивалентна једначини $(a-1)(a-3)x = (a-3)(a+2)$. За $a \neq 1$, $a \neq 3$ решење је $x_1 = \dfrac{a+2}{a-1}$, за $a = 3$ решење је сваки реалан број, а за $a = 1$ - нема решења;

б) За $b \neq 1$, $b \neq -2$ -$x_1 = \dfrac{b-3}{b+2}$, за $b = -2$ - нема решења, а за $b = 1$ решење је свако $x \in \mathbf{R}$;

в) За $a \neq 1$, $a \neq -3$ решење је $x_1 = \frac{a-4}{a+3}$. За $a = 1$ решења су сви реални бројеви, а за $a = -3$ - нема решења.

731. а) Једначина је еквивалентна једначини $2x(a-b) = b^2 - a^2$. За $a \neq b$ решење је $x_1 = -\frac{a+b}{2}$, а за $a = b$ решење је сваки реални број x;

б) За $a \neq 3b$ решење је $x_1 = \frac{a(7b-3a)}{a-3b}$. Ако је $a = b = 0$ - решење је $x \in \mathbf{R}$, а ако је $a = 3b$, $b \neq 0$ - нема решења;

в) За $|a| \neq |b|$ решење је $x_1 = \frac{a-b}{a+b}$. Ако је $a = b$ - решење је $x \in \mathbf{R}$, а ако је $a = -b \neq 0$ - нема решења;

г) Уз услове $b \neq 0$, $c \neq 0$ једначина је еквивалентна једначини $ac^2x(3+2b) = b^2c^3(3+2b)$. Ако је $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $b \neq -\frac{3}{2}$ решење је $x_1 = \frac{b^2c}{a}$. За $b = 0$ или $c = 0$ - нема решења. За $b = -\frac{3}{2}$, $c \neq 0$ - решење је $x \in \mathbf{R}$. Ако је $a = 0, b \neq -\frac{3}{2}, c \neq 0$ - нема решења.

д) За $b \neq \pm 3a$ једначина је еквивалентна једначини $(12a+b)x = 25ab + 2b^2 + 12a^2$. Тако за $b \neq \pm 3a$ и $12a + b \neq 0$ једначина има решење $x_1 = \frac{25ab + 2b^2 + 12a^2}{12a+b} = \frac{(12a+b)(a+2b)}{12a+b} = a + 2b$. Ако је $a = \pm\frac{b}{3}$ - нема решења. Ако је $12a + b = 0, a \neq 0$ и $a \neq \pm\frac{b}{3}$ решење је сваки реалан број x.

ђ) За $a \neq 0$, $a \neq \pm 2$ $x_1 = \frac{3}{a}$, за $a = 0$, $a = 2$ или $a = -2$ – нема решења.

е) За $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$ $x_1 = -2a$, за $a \neq 0$, $b = 0$ $x \in \mathbf{R}$, а за $a = 0$ или $a = b$ или $a = -b$ – нема решења.

732. а) Једначина је за $a \neq 0$, $b \neq 0$ еквивалентна једначини $(b-a)x = (b-a)(a^2b^2 - a - b)$, па је за $a \neq b$ (и a, $b \neq 0$) решење $x_1 = a^2b^2 - a - b$. За $a = b \neq 0$ решење је сваки реалан број, а за $a = 0$ или $b = 0$ нема решења;

б) За $a = \pm b$ нема решења. Ако је $a \neq \pm b$ решење је $x_1 = \frac{2a^2 + ab + 3b^2}{a+b}$;

в) За $a = 0$ или $b = 0$ нема решења. Ако је $a \neq 0$ и $b \neq 0$ једначина је еквивалентна једначини $(a^2 - ab + b^2)x = a^3 + b^3$, па је тада њено решење $x_1 = a + b$;

г) За $a \neq 2$, $b \neq 1$ решење је $x_1 = \frac{2a-b}{(a-2)(b-1)}$; за $a = 2$ и $b = 4$ или $a = \frac{1}{2}$ и $b = 1$ решења су сви реални бројеви; за $a = 2$, $b \neq 4$, односно $a \neq \frac{1}{2}$ и $b = 1$ нема решења.

733. а) За $x \neq a$, $x \neq -a$ једначина је еквивалентна једначини $4a^2 - 4a + 2 + x - a - ax - a^2 = 0$, тј. једначини $x(a-1) = (3a-2)(a-1)$. За $a \neq 1$ имамо $x = 3a - 2$ уз услове $3a - 2 \neq a$, тј. $a \neq 1$ и $3a - 2 \neq -a$, тј. $a \neq \frac{1}{2}$. За $a = 1$ решење је свако x различито од ± 1. Према томе: за $a = 1$ - $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$; за $a = \frac{1}{2}$ - нема решења, а за $a \neq 1$, $a \neq \frac{1}{2}$ - $x_1 = 3a - 2$;

б) За $b = 1$ - $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$; за $b = 3$ - нема решења, а за $b \neq 1$, $b \neq 3$ - $x_1 = 2b - 3$;

в) $x_1 = \frac{b}{2}$ за $b \neq \pm 2a$ - иначе нема решења;

г) За $a \neq 0$ $x_1 = 3a$, за $a = 0$ $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

д) За $a \neq 0$ $x_1 = 0$, за $a = 0$ нема решења.

ђ) За $a \neq 0$ $x_1 = 9a$, за $a = 0$ $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

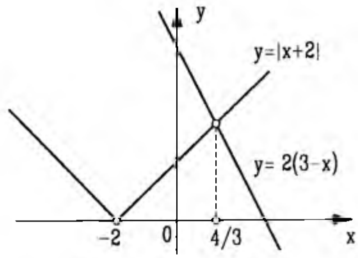
е) За $a \neq 0$ решење је $x_1 = a$; за $a = 0$ решење је свако $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

734. а) Пошто је:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2, \\ -x-2, & x \leq -2, \end{cases}$$

1° за $x < -2$ имамо једначину $-x - 2 = 2(3 - x)$. Њено решење је $x_1 = 8$, међутим оно не задовољава услов $x < -2$.

2° За $x \geq -2$ добија се једначина $x+2=2(3-x)$. Њено решење је $x_1=\frac{4}{3}$. То је, истовремено, и једино решење дате једначине. Геометријска интерпретација дата је на слици.



Сл. уз зад. 734 а)

б)$x_1=1, x_2=5$; в) $x_1=0$.

735. а) Посматрајмо два случаја: (1) $x \geq -2$ - тада је $x+2-3=2x-6$, па је $x_1=5$ и (2) $x<-2$ - тада је $-x-2-3=2x-6$, одакле је $x=\frac{1}{3}$ - што није решење, обзиром да не задовољава услов $x<-2$. Дакле, једино решење једначине је број 5.

б) $x_1=-5, x_2=\frac{1}{3}$; в) $x_1=1, x_2=3$; г) $x_1=-2, x_2=2$; д) $x_1=1, x_2=7$; ђ) $x_1=-7, x_2=-1, x_3=7$; е) $x_1=0$; ж) $x \in [6,+\infty)$; з) $x_1=-7, x_2=7$; и) $x_1=-1, x_2=1$; ј) $x_1=-2$; к) $x_1=\frac{5}{7}$; л) $x_1=-4, x_2=8$; љ) $x_1=1, x_2=\frac{11}{2}$; м) $x \geq 2$.

736. Из $\frac{3+x}{7+x}=\frac{2}{3}$ налази се $x=5$.

737. Нека то буде кроз x година. Тада је $27+x=4(3+x)$, тј. $27+x=12+4x$, $-3x=-15$, одакле је $x=5$. Дакле, мајка ће бити старија од ћерке четири пута кроз 5 година.

738. Нека је t тражено време. Тада је $\frac{t}{15}+\frac{t}{20}+\frac{t}{30}=1$, па је $t=6\ h$ и 40 минута.

739. из $0,75x=0,51(x+12)$ добија се $x=25.5\ l$.

740. $30kg, 24kg$ и $10,2kg$.

741. Нека је s пут од Београда до Панчева, t укупно време вожње у одласку и повратку и v_1, v_2 и v_{sr} брзине аутобуса у одласку и повратку и средња брзина. Тада је $\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}=t$ и $v_{sr}=\frac{2s}{t}=\frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{x_2}}=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$. Из $35=\frac{2}{\frac{1}{30}+\frac{1}{v_2}}$ налази се $\frac{1}{v_2}=\frac{2}{35}-\frac{1}{30}=\frac{1}{42}$, па је $v_2=42\ km/h$.

742. Тај број је 765.

743. По услову задатка је $5\cdot\overline{abcde7}=\overline{7abcde}$. Ако број $\overline{abcde}$ означимо са x, тада је $5(10x+7)=700000+x$, одакле је $x=14285$. Тражени шестоцифрени број је 142857.

744. Посматрајмо табелу:

	Иван	Марко
пре	$2x$	x
сада	$4x$	$x+2x$
кроз 15 година	$4x+15$	$3x+15$

Према томе, биће $4x+15+3x+15=100$, тј. $x=10$. Дакле, Марко сада има 30 година.

745. Из $\frac{3}{7}x+4=\frac{x+4}{2}$ се добија $x=28$.

746. Било је 255.

747. Нека је x износ који је антикварница платила за први предмет. Тада је $1\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}(2250 - x) = 3150$, одакле је $x = 900$, а $2250 - x = 1350$ динара.

748. 176 ученика.

749. Ако је x дужина воза, биће $\frac{x}{7} = \frac{378 + x}{25}$, одакле је $x = 147m$, а брзина $75,6km/h$.

750. Ако је x износ снижења и a број посетилаца пре поскупљења биће:
$a \cdot 150 = \frac{3}{2}a(150 - x) \cdot \frac{4}{5}$, одакле се добија $x = 25$ динара.

751. Нека је тај човек рођен $\overline{19xy}$ године. Тада је $1995 - (1900 + 10x + y) = 1 + 9 + x + y$, одакле је $x = \frac{85 - 2y}{11}$. Обзиром да је $0 \leq x, y \leq 9$, решење је $x = 7$, $y = 4$, па је тај човек рођен 1974. године.

752. Брзина велике казаљке је 1 круг/час, а брзина мале $\frac{1}{12}$ круг/час. Казаљке ће се поклопити ако је $t - 1 = \frac{t}{12}$, тј. $t = \frac{12}{11}\ h$, тј у $13\frac{1}{11}\ h$.

753. 24 km, $6\frac{2}{3}\ h$. **754.** Осам динара. **755.** 10 динара.

756. а) (4, 1); б) (7, 3); в) нема решења; г) $(6 + 2t, t)$, $t \in \mathbf{R}$; д) (2, 3); ђ) (2, 1); е) нема решења.

757. а) (1, 1); б) (2, 1); в) (1, 1); г) (2, 1).

758. а) (2, 2); б) (−1, 1). **759.** а) (1, 1); б) (−1, −1).

760. а) (1, 2); б) (3, 7); в) $(\frac{20}{3}, \frac{95}{18})$; г) (4, 10).

761. а) Увођењем смена $\frac{1}{x} = u$ и $\frac{1}{y} = v$, добијамо систем:

$$\begin{cases} 3u + 5v = 16 \\ 5u - 3v = 4 \end{cases}$$

чија су решења: $u = 2$, $v = 2$, па је $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$;
б) (2, 5); в) (2, 3); г) (7, 3); д) (5, 1); ђ) (2, 1); е) (5, 3); ж) (7, 4).

762. а) Систем има јединствено решење; б) бесконачно много решења; в) нема решења, јер је $\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{3}$; г) нема решења; д) има решења; ђ) нема решења.

763. Систем две линеарне једначине са две непознате има бесконачно много решења ако је $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, тј. у датом задатку ако је $2 = \frac{m}{-3} = \frac{3}{4n}$, одакле је $m = -6$ и $n = \frac{3}{8}$, па се систем своди на једну једначину $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$, ($x$-произвољно). Дакле, решење система се своди на облик $(x, \frac{1}{3}x - \frac{1}{2})$, $x \in \mathbf{R}$.

764. На основу услова $\frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ систем неће имати решење, тј. за дати задатак ако је $\frac{a}{2} = \frac{-6}{3} \neq \frac{7}{4}$. Други услов $\frac{-6}{3} \neq \frac{7}{4}$ је испуњен. Из $\frac{a}{2} = \frac{-6}{3}$ следи $a = -4$. Дакле, за $a = -4$ дати систем неће имати решење. Једначине система гласе: $-4x - 6y = 7 \land 2x + 3y = 4$.

765. Коришћењем једног од метода за решавање система једначина добијамо да је:
$x = \frac{2b + 3}{a + 10}$, $y = \frac{15 - ab}{2(a + 10)}$, $a \neq -10$.

1° На основу услова $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ систем има јединствено решење. Из $\frac{a}{5} \neq -\frac{4}{2}$ следи $a \neq -10$, а из $-\frac{4}{2} \neq \frac{3}{b}$ добијамо $b \neq -\frac{3}{2}$.

2° За $a = -10$, $b = \frac{3}{2}$ систем има бесконачно много решења при чему су она облика $(x, \frac{10x+3}{4})$.

3° Систем нема решења ако је: $a = -10$, $b =\neq \frac{3}{2}$.

766. а) За $a = -1$ нема решења; за $a = 1$ решења су парови облика $(x, 1-x)$, $x.\in \mathbf{R}$; за $a \neq \pm 1$ решење је $(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1})$.
б) Ако је $a \neq -1$, систем нема решења. Ако је $a = -1$ решења су $(x, -1-x)$, $x \in \mathbf{R}$.
в) Ако је $a \neq 1$, систем има јединствено решење $x = -2$, $y = 2(1+a)$. Ако је $a = 1$, систем има бесконачно много решења, при чему су она облика $(x, 2-x)$, $x \in \mathbf{R}$.
г) За $a = -3$ нема решења. За $a \neq -3$ решење је $(\frac{a}{2(a+3)}, \frac{1}{a+3})$.
д) Ако је $a + b \neq 0$, систем има јединствено решење $(1, a-b)$. Ако је $a + b = 0$, решења су сви парови облика $(x, a(x+1))$, $x \in \mathbf{R}$.
ђ) (a, b) за $a \neq b$; (x, x), $x \in \mathbf{R}$, за $a = b$;
е) $(\frac{a}{2}, 0)$ за $b \neq 3$; $(x, \frac{a-2x}{3})$, $x \in \mathbf{R}$, за $b = 3$.
ж) За $a + b = 0$, $a \neq 0$ нема решења; за $a = b = 0$ решења су $(0, y)$, $y \in \mathbf{R}$; за $a + b \neq 0$ решење је $(\frac{2ab}{a+b}, \frac{b-a}{a+b})$.

767. а) За $a = 1$ има бесконачно много решења облика $(\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. За $a = -1$ систем је немогућ (нема решења), а за $a \neq \pm 1$ решење је $(-\frac{a}{a+1}, \frac{a^2+a+1}{a+1})$.
б) За $a \neq \pm 6$ решење је $(\frac{2}{a+6}, \frac{3}{a+6})$; за $a = 6$ решења су $(t, \frac{1-3t}{2})$, $t \in \mathbf{R}$, док за $a = -6$ нема решења.
в) За $a \neq \frac{10}{13}$ решење је $(0, 0)$ и за $a = \frac{10}{13}$ решења су $(t, \frac{-13}{2}t)$, $t \in \mathbf{R}$.
г) За $a \neq \pm 1$ решење је $(0, 1)$, за $a = \pm 1$ решења су $(t, 1 \pm t)$, $t \in \mathbf{R}$.

768. а) $(2, 1)$ б) $(1, 1)$ или $(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7})$.

769. а) $(8, 13)$ или $(2, 1)$; б) $(2, 1)$ или $(0, -3)$ или $(-6, 9)$; в) увести смену $x+y = u$, $x-y = v$. Добије се $u = 3$, $v = -1$; $x = 1$, $y = 2$;
г) За $a = -b$, $x \geq \frac{|a|}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, за $a \geq |b|$ $x = -\frac{b}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, за $b \geq |a|$ $x = -\frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$, за $a = b \geq 0$, $x = -\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}$;
д) $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$; ђ) $(0,3)$, $\left(-\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$; е) $(3,-2)$, $(1,-6)$, $(-5,6)$; ж) $(2,0)$, $(-1,-3)$, $(\alpha, \alpha+2)$, $\alpha \in [-3, 0]$.

770. а) Ако прву једначину помножимо са -2 и додамо другој, а затим прву једначину додамо трећој, добићемо еквивалентан систем:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad -y + z = 1 \\ \quad 6y - z = 9. \end{cases}$$

Ако сада другу једначину додамо трећој, добијамо еививалентан систем "дијагоналног" облика:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad -y+z=1 \\ \qquad 5y=10. \end{cases}$$

Из треће једначине сада се непосредно налази да је $y=5$, потом из друге $z=3$ и, на крају, из прве $x=1$. Дакле, решење је $(1,\ 2,\ 3)$;
б) $(8,\ 4,\ 2)$; в) $(1,\ 2,\ 2)$; г) $(2,\ 1,\ 3)$; д) нема решења; ђ) $(1,\ 0,\ -1)$;
е) Систем је "неодређен", јер је трећа једначина збир прве две. Решења су $(10t+1,\ 7t,\ t)$, $t \in \mathbf{R}$.
ж) Нема решења.

771. Из $\frac{600}{x}+3=\frac{600}{y}$ и $\frac{250}{x}=\frac{200}{y}$, налазимо $x=50\ km/h$, $y=40\ km/h$.

772. Нека је x брзина реке, а y брзина чамца у мирној води. Тада је $\frac{20}{y+x}+\frac{20}{y-x}=10$ и $\frac{2}{y-x}=\frac{3}{y+x}$. Налазимо да је $y+x=5$, $y-x=\frac{10}{3}$, па је $x=\frac{5}{6}\ km/h$.

773. Нека Иван има - x, а Марко - y година. Тада је $x=2(2y-x)$ и $x+y=35$. Решење је : $x=20$, и $y=15$.

774. 36 и 27.

775. Из $x+z=2y$, $y+z=3x$, добија се $x:y:z=3:4:5$. Дакле, победила је трећа бригада.

776. Означимо са x, y, z, u, v учинке првог, другог, трећег, четвртог и петог радника, редом. Из услова задатка се добија
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{15}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{v}=\frac{1}{5}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{4}$. Помножимо последњу једнакост са 2 и додајмо јој прве три. Тада је $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)=1$ тј. сви радници, радећи заједно, урадили би посао за три часа.

777. 10 дана.

778. Осам.

779. $100\ l$ у првом, $45\ l$ у другом суду.

780. 60 и 30 литара.

781. $30\ km/h$ и $35\ km/h$.

782. $4\ km$.

783. Из $v_1+v_2=70$, $2v_1=6(v_2-v_1)$ налазимо $v_1=30\ km/h$, $v_2=40\ km/h$.

784. Из $60v_1-60v_2=1,2$, $15v_1+15v_2=1,2$ се добија $v_1=0,03\ m/sec$, $v_2=0,05\ m/sec$.

785. а) $x\in(-\infty,\ 2]$; б) $x\in(\frac{1}{3},\ +\infty)$; в) $x\in(-\infty,\ -\frac{1}{7}]$; г) $x\in(-\infty,\ -\frac{3}{2}]$; д) $x\in[0,\ +\infty)$; ђ) $x\in(-\infty,\ -\frac{4}{5})$; е) $x\in(-\infty,\ -2]$; ж) $x\in\emptyset$.

786. а) $x\in(-\infty,\ \frac{10}{9}]$; б) $x\in(-\infty,\ \frac{23}{7}]$.

787. а) $-\frac{7}{2}<x<0$; б) $x\geq 36$; в) $x\in\left(-\infty,\ 2\frac{1}{4}\right)\cap[-2,\ +\infty)$, тј. $x\in\left[-2,\ 2\frac{1}{4}\right)$; г) $x\in\left[\frac{17}{2},\ +\infty\right)$; д) $x\in(4,\ +\infty)\cap(1,+\infty)\cap\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$, тј. $x\in(4,\ +\infty)$.

788. а) *Први начин*: Користимо еквиваленцију $AB>0 \Leftrightarrow (A>0 \wedge B>0) \vee (A<0 \wedge B<0)$. Помоћу ње имамо $(x-1)(x+3)>0 \Leftrightarrow (x-1>0\ \wedge\ x+3>0)\ \vee\ (x-1<0\ \wedge\ x+3<0) \Leftrightarrow (x>1\ \wedge\ x>-3)\ \vee\ (x<1\ \wedge\ x<-3) \Leftrightarrow (x>1\ \vee\ x<-3)$.
Други начин: Дата неједначина се може решавати графички (в. сл.)
На првој бројној оси представљен је знак функције $x-1$, на другој функција $x+3$, а на трећој знак производа. Према слици очигледнно је да се решења сви бојеви мањи од -3, као и бројеви већи од 2.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
(x−1)	− − − − − − − −	− − − − − − − − − −	+ + + + + + +
(x+3)	− − − − − − − −	+ + + + + + +	+ + + + + + +
(x−1)(x+3)	+ + + + + + + +	− − − − − − − − − −	+ + + + + + +
	−3		1

Сл. уз зад. 788

б) $x \in (-1, 2)$; в) $x \in (-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$; г) $x \in [0, 3]$; д) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$; ђ) $x \in [2, 3]$; е) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup (1, \infty)$; ж) $x \in [-\frac{5}{2}, 2]$.

789. а) Можемо се користити еквиваленцијом $\frac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow (A < 0 \land B > 0) \lor (A > 0 \land B < 0)$, или "табеларном" методом (в.сл.). Решења су сви бројеви x за које важи $-\frac{1}{2} < x < 2$.

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 2)$	$(2, \infty)$
x+2	− − − − − − − −	− − − − − − − − − −	+ + + + + + +
2x+1	− − − − − − − −	+ + + + + + +	+ + + + + + +
$\frac{x-2}{2x+1}$	+ + + + + + + +	− − − − − − − − − −	+ + + + + + +
	−1/2		2

Сл. уз зад. 789

б) $x < \frac{3}{2}$ или $x > 3$; в) $-3 \leq x < 4$; г) $x < -\frac{5}{4}$ или $x \geq \frac{2}{3}$.

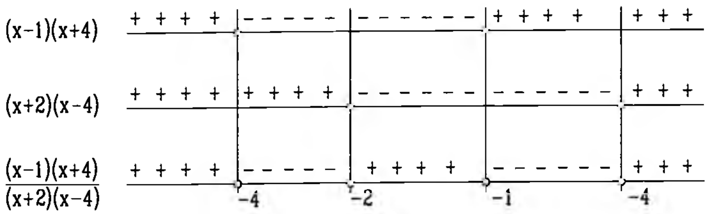
790. а) $\frac{2x-3}{x-4} - 1 \leq 0$, тј. $\frac{x+1}{x-4} \leq 0$, одакле се налази решење: $-1 \leq x < 4$; б) $x \leq -\frac{5}{2}$ или $x > -1$; в) $-3 < x \leq 8$.

791. а) $\frac{1}{3} < x < 6$; б) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; в) $x < -3 \lor x > 2$.

792. а) За $x \neq 1$ дата неједначина еквивалентна је неједначини $\frac{x+1}{x-2} < 2$, тј. $\frac{x+1}{x-2} - 2 < 0$, односно $\frac{5-x}{x-2} < 0$. Решења последње неједначине су сви реални бројеви x за које је $x > 5$ или $x < 2$. Водећи рачуна о услову $x \neq 1$, добија се да је скуп решења дате неједначине: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (5, +\infty)$.
б) $x \in (-\infty, 3) \cup (3, 4) \cup (5, +\infty)$.

793. а) $x \leq -3$ или $-1 \leq x \leq 2$; б) $x < -1$ или $1 < x < 3$; в) $1 < x < 2$ или $2 < x < 3$; г) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ или $x > 3$; д) $\frac{3}{11} < x < \frac{5}{13}$; ђ) $x < -2$ или $x > -1$; е) $x < 1$ или $x > 3$; ж) $x \leq -1$ или $2 < x < 4$ или $4 < x \leq 5$.

794. а) Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\frac{3x^2 - x - 20}{x^2 - 2x - 8} - 2 < 0$, тј. $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} < 0$, односно $\frac{(x-1)(x+4)}{(x+2)(x-4)} < 0$. Применом "табличног" метода лако се израчунава знак функције на левој страни последње неједначине (в.сл.). Дакле, решења неједначине су сви реални бројеви x такви да је $x \in (-4, -2) \cup (1, 4)$.



Сл. уз зад. 794

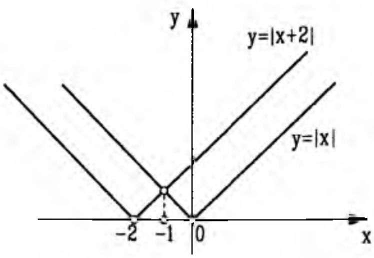
б) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, 4) \cup (7, +\infty)$.

795. Дата неједначина је еквивалентна неједначина $a(x-1) + b\left(\frac{1}{x} - 1\right) < 0$, односно $(x-1)\left(a - \frac{b}{x}\right) < 0$, тј. $\frac{(x-1)(ax-b)}{x} < 0$. Скуп решења је $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{b}{a}, 1\right)$.

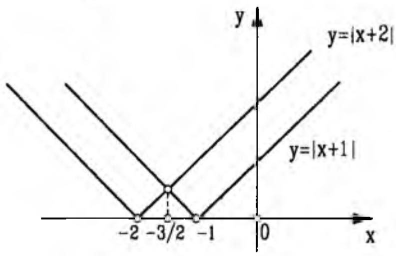
796. $A - B = (x+1)(x-1)^2$, па је а) $x > -1 \land x \neq 1$; б) $x = 1 \lor x = -1$; в) $x < -1$.

797. а) За $x < \frac{5}{2}$ имамо $5 - 2x < 1$, тј. $x > 2$, а за $x \geq \frac{5}{2}$ добијамо $2x - 5 < 1$, тј. $x < 3$. У првом случају решења неједначине су бројеви из интервала $\left(2, \frac{5}{2}\right)$, а у другом $\left[\frac{5}{2}, 3\right)$, па су решења неједначине сви реални бројеви x за које важи $x \in (2, 3)$.
б) $x \leq \frac{1}{6} \lor x \geq \frac{3}{2}$; в) $x < -2 \lor x > 2$; г) $\frac{5}{3} < x < 3$; д) $x \geq -1$; ђ) $x > \frac{9}{2}$; е) $x < -2 \lor x > 5$; ж) $x \leq 2$.

798. а) Решења су: $x > -1$, (в.сл.); б) Решења су: $x > -\frac{3}{2}$, $x \neq -1$, (в.сл.).



Сл. уз зад. 798а



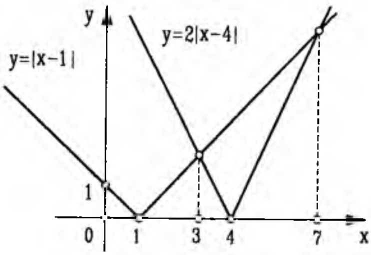
Сл. уз зад. 798б

799. а) Дата неједначина еквивалентна је неједначини: $\frac{|x| - 3}{(|x|-1)(|x|+1)} < 0$. Решење се могу одредити из таблице на слици. Дакле, решења неједначине су сви реални бројеви x за које важи $x \in (-3, -1) \cup (1, 3)$.
б) $x \in (-\infty, -7) \cup (-1, 1) \cup (7, +\infty)$; в) $x \in (-\infty, -5) \cup (-2, 2) \cup (5, +\infty)$; г) $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1) \cup (5, +\infty)$.

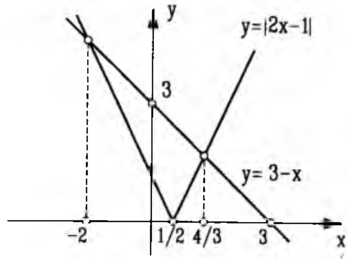
800. а) За $x \neq 1$, $x \neq 4$ дата неједначина еквивалентна је неједначини $|x-1| < 2|x-4|$. За $x < 1$ добијамо $1 - x < -2x + 8$, тј. $x < 7$. За $1 < x < 4$ имамо $x - 1 < 2(4-x)$, односно $x < 3$ и за $x > 4$ имамо $x - 1 < 2(x-4)$, одакле се добија $x > 7$. Узимајући у обзир услове, добијамо да је скуп решења $(-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (7, +\infty)$. "Графичко" решење неједначине $|x-1| < 2|x-4|$ приказано је на слици.
б) $x \in (-\infty, 3) \cup (3, 5) \cup (9, +\infty)$.

$\lvert x\rvert-3$	+ + + +	− − − − −	− − − − − −	− − − − −	+ + +
$\lvert x\rvert-1$	+ + + +	+ + + +	− − − − − −	+ + + +	+ + +
$\lvert x\rvert+1$	+ + + +	+ + + +	+ + + +	+ + + +	+ + +
$\dfrac{\lvert x\rvert-3}{(\lvert x\rvert-1)(\lvert x\rvert+1)}$	+ + + +	− − − − −	+ + + +	− − − − −	+ + +
		−3	−1	−1	−3

Сл. уз зад. 799



Сл. уз зад. 800а



Сл. уз зад. 802а

801. а) $x \in [\frac{3}{2}, 2)$; б) $x \in (-\infty, 0] \cup (1,2) \cup [4, +\infty)$; в) $x \in [-\frac{11}{2}, -5)$; г) $x \in (-\infty, -3) \cup (-3,-1) \cup [0, +\infty)$; д) $x \in [-6,-5)$; ђ) $x \in (-5, 0) \cup (1, 5)$.

802. а) Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\sqrt{(2x-1)^2} < 3 - x$, тј. $|2x-1| < 3 - x$. Имамо два случаја:

1° За $\frac{1}{2} \leq x$ неједначина постаје $2x - 1 < 3 - x$, одакле је $\frac{1}{2} \leq x < \frac{4}{3}$.

2° За $x < \frac{1}{2}$ неједначина је $-2x + 1 < 3 - x$, одакле је $-2 < x < \frac{1}{2}$. Дакле, решење неједначине је $-2 < x < \frac{4}{3}$, (в.сл.);

б) $x < -\frac{9}{7}$ или $x > 1$;

в) Неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{|x+2|}{|3-x|} < 2$, тј. $|x+2| < 2|3-x|$, за $x \neq 3$. Решења: $x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (8, +\infty)$;

г) $\frac{3}{2} < x \leq \frac{9}{5}$.

803. а) $17^{14} > 16^{14} = \left(2^4\right)^{14} = 2^{4\cdot 14} = 2^{4\cdot 14} = 2^{56}$, $31^{11} < 32^{11} = \left(2^5\right)^{11} = 2^{5\cdot 11} = 2^{55}$. Одавде је $17^{14} > 31^{11}$.

б) Како је $\frac{1}{51} > \frac{1}{100}$, $\frac{1}{52} > \frac{1}{100}, \cdots, \frac{1}{99} > \frac{1}{100}$, добићемо $\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \cdots + \frac{1}{99} > \frac{49}{100}$, на основу чега имамо $\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > 50 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{2}$.

в) Нека је $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{120}{121}$, $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{119}{120}$. Како је $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$, $\frac{6}{7} > \frac{5}{6}, \cdots, \frac{120}{121} > \frac{119}{120}$, имамо $x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{119}{120} \cdot \frac{120}{121} = \frac{1}{121}$, па је $x^2 > \frac{1}{121}$, односно $x > \frac{1}{11}$.

г) Користити доказ под в).

804. а) Како је $ab > 0$, то множењем дате неједнакости са ab добија се еквивалентна неједнакост: $a^2+b^2 \geq 2ab$, или $(a-b)^2 \geq 0$, што је увек тачно. Једнакост важи ако и само ако је $a = b$.
б), в) Доказ идентичан као под а).
г) сабирањем неједнакости $a^2+b^2 \geq 2ab, b^2+c^2 \geq 2bc$, $a^2+c^2 \geq 2ac$ добијамо: $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ac)$, односно $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$.
д) Сабрати неједнакости $a^2+1 \geq 2a, b^2+1 \geq 2b, c^2+1 \geq 2c$.

805. а) за све реалне бројеве x важи $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x^2}{2(1+x^4)} = \frac{(1-x^2)^2}{2(1+x^4)} \geq 0$. Једнакост важи ако и само ако је $|x| = 1$;
б) $(1+2x^4)-(2x^3+x^2) = (x^4-2x^3+x^2)+(x^4-2x^2+1) = (x^2-x)^2+(x^2-1)^2 \geq 0$. Једнакост важи ако и само ако је $x = 1$;
в) Применити везу између аритметичке и квадратне средине;
г) Искористити да је $x^2+z^2 \geq 2xz$ и $b^2 = xz$;
д) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2} = \frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \leq 0$.

806. а) $(a+1)^2+2 > 0$; в) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$; д) $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = 0$.

807. а) *Први начин.* Ако наведену неједнакост поделимо са abc, добијамо $\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geq 6$, а како је $\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, закључујемо да је нејенакост тачна.
Други начин. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc = a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-2abc-2abc-2abc = a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geq 0$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$ или ако су бар два од бројева a, b и c једнака 0.
б) Из $(a-b)^2 \geq 0$ следи $a^2-ab+b^2 \geq ab$. Ако помножимо ту неједнакост са $a+b > 0$ добијамо $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b$.
в) $\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{(1+a)+b} + \frac{b}{(1+b)+a} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$.
г) $a^4+b^4-a^3b-ab^3 = (a-b)^2(a^2+ab+b^2) \geq 0$.

808. а) Из $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ добијамо $a-2\sqrt{ab}+b \geq 0$, односно $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
б) Користећи а) имамо $\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$. Последњи израз је аритметичка средина бројева $\sqrt{ab}$ и $\sqrt{cd}$, па је $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$, односно $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.
в) Када у неједнакости б) ставимо да је $d = \frac{a+b+c}{3}$ добијамо

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}, \text{ тј. } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}.$$

Четврти степен обе стране последње неједнакости је $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc\cdot\frac{a+b+c}{3}$, и ако обе стране поделимо са $\frac{a+b+c}{3} \neq 0$ добијамо тражену неједнакост $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Једнакост важи за $a = b = c$.

809. а) Сабирањем неједнакости $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, $b+c \ge 2\sqrt{bc}$, $a+c \ge 2\sqrt{ac}$ добијамо дату неједнакост;

б) Дата неједнакост је еививалентна неједнакостима: $\frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \ge 0$, $a^3+b^3-a^2b-ab^2 \ge 0$, $(a+b)(a-b)^2 \ge 0$. Једнакост важи за $a=b$;

в) Доказ следи непосредно из следећег низа еквивалентних неједнакости: $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}$; $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2})}{\sqrt{ab}}$, $\sqrt{ab} \le \sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}$, одакле је $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0$. Једнакост важи за $a=b$.

г) Приметимо да је $a^2+3=(a^2+2)+1=\sqrt{(a^2+2)^2}+1$. Даље је $\sqrt{(a^2+2)^2}+1 > 2\sqrt{a^2+2}$, односно $\left(\sqrt{a^2+2}+1\right)^2 > 0$.

812. $a=-\frac{1}{4}$. **813.** $b=\frac{2}{3}$. **814.** $a=b=-1$. **815.** $m=2$.

816. а) 1° $b=-2, y=\frac{9}{5}$; 2° $b=3, x=-\frac{4}{5}$; 3° $b^2-2b+1=0$, тј. $(b-1)^2=0$, тј. $b=1, y=\frac{3}{2}x$.

б) 1° $b=1, y=-\frac{4}{3}$; 2° $b=-2, x=\frac{1}{3}$; 3° $b=-1, y=2x$.

817. $f(1)=2+3\cdot 1=5$, $f(2)=8$, $g(1)=3$, $g(2)=4$.

818. За $x=5, y=0$ следи $0=(a-1)\cdot 5-(a+2)$ одакле је $a=\frac{7}{4}$.

819. а) Треба да буде $\frac{3k+5}{4-k} > 0$ и $4-k^2 > 0$, тј. $-\frac{5}{3} < k < 4$ и $-2 < k < 2$, дакле $k \in (-\frac{5}{3}, 2)$; б) $k \in (-1, \frac{1}{2})$.

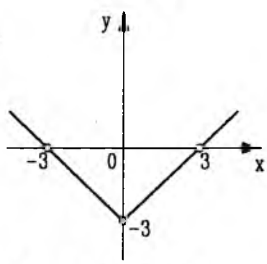
820. а) $a=\frac{3}{5}$; б) $a=0$.

821. Из $a-3=2a+1$ следи $a=-4$.

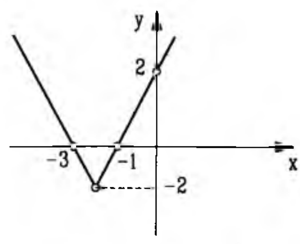
822. а) Да би угао био оштар, тј. да би функција била растућа, мора бити $k>0$, одакле следи $2m-3>0$, односно $m>\frac{3}{2}$.

б) $k<0$, $m<\frac{3}{2}$; в) $k=0$, $m=\frac{3}{2}$.

823. а) Треба да буде $\frac{3k-1}{k-2} > 0$, тј. $k<\frac{1}{3}$ или $k>2$; б) $1<k<\frac{3}{2}$.



Сл. уз зад. 824а

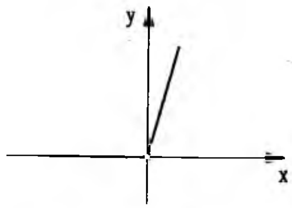


Сл. уз зад. 824б

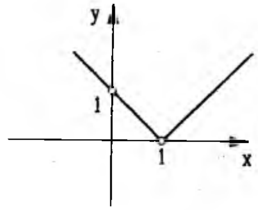
824.

$$\text{а) } |x|-3=\begin{cases} x-3, & \text{за } x \ge 0 \\ -x-3, & \text{за } x<0 \end{cases}$$

$$\text{б) } |2x+4|-2=\begin{cases} 2x+2, & \text{за } x \ge -2 \\ -2x-6, & \text{за } x<-2 \end{cases}$$



Сл. уз зад. 824в



Сл. уз зад. 824г

$$\text{в) } x+|x|=\begin{cases} 2x; & \text{за } x \geq 0 \\ 0, & \text{за } x<0 \end{cases}$$

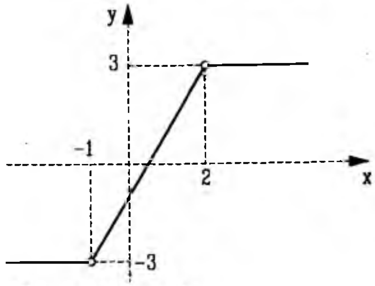
$$\text{г) } |x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{за } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{за } x<1. \end{cases}$$

825.

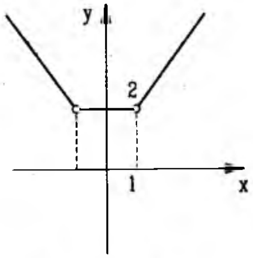
$$\text{а) } |x+1|-|x-2|=\begin{cases} 3, & \text{за } x \geq 2 \\ 2x-1, & \text{за } -1 \leq x \leq 2 \\ -3, & \text{за } x<-1 \end{cases}$$

$$\text{б) } |x+1|+|1-x|=\begin{cases} 2x, & \text{за } x \geq 1 \\ 2, & \text{за } -1 \leq x<1 \\ -2x, & \text{за } x \leq -1 \end{cases}$$

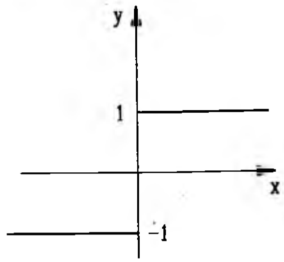
$$\text{г) } x+\frac{|x|}{x}=\begin{cases} x+1, & \text{за } x>0 \\ x-1, & \text{за } x<0. \end{cases}$$



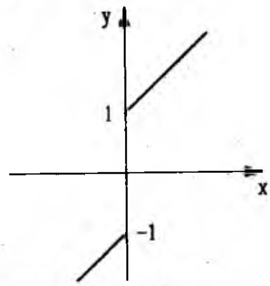
Сл. уз зад. 825а



Сл. уз зад. 825б



Сл. уз зад. 825в



Сл. уз зад. 825г

826. а) За $b \neq 4$, $x \neq -1$ једначина је еквивалентна једначини $4x^2-3a = 4x(x+1)+x(b-4)$, тј. $bx = -3a$. За $b \neq 0$ решење је $x_1 = \frac{-3a}{b} \neq -1$, мора да буде $a \neq \frac{b}{3}$. Дакле, решења полазне једначине су: за $b \neq 4$, $b \neq 0$, $a \neq \frac{b}{3}$ - $x_1 = -\frac{3a}{b}$; за $b = 0$, $a = 0$ - решење је сваки реалан број различит од -1; за $b = 4$ нема решења; за $b \neq 0$, $a = \frac{b}{3}$ - нема решења; за $b = 0, a \neq 0$ - нема решења.

б) За $a \neq 1$, $b \neq -1$, $a+b \neq 0$ - решење је $x_1 = 1$; за $a+b=0$ решење је сваки реалан број $x \neq a$ и $x \neq -b$; за $a = 1$ или $b = -1$, а $a+b \neq 0$ нема решења.

в) За $a \neq \pm b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ решење је $x_1 = \frac{ab}{a-b}$; за $a = b \neq 0$ - нема решења; за $a = -b$ решење је свако $x \neq -a$; за $a \neq b = 0$ и $a = 0 \neq b$ нема решења.

г) За $a \neq 0$ $x_1 = 5$, за $a = 0$ – нема решења.

д) За $a \neq 0$, $a \neq b$, $a \neq 2b$ $x_1 = \frac{5a+b}{2}$, за $a \neq 0$, $a = 2b$ $x \in \mathbf{R} \setminus \{3a, 3b\}$, за $a = 0$ или $a = b$ нема решења.

ђ) За $a \neq \pm 3b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ $x_1 = a + 3b$, за $a = 3b$, $a \neq -3b$ $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, а за $a = 0$ или $b = 0$ или $a = -3b$ нема решења.

827. а) За $a \neq \pm\frac{3}{2}$, $a \neq 3$, $a \neq -\frac{3}{5}$ решење је $x_1 = \frac{3a}{2a+3}$. За $a = -\frac{3}{2}$, $a = 3$, $a = -\frac{3}{5}$ - нема решења, а за $a = \frac{3}{2}$ решења су сви реални бројеви x различити од ± 1.

б) За $m \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq -1$ лева и десна страна једначине могу се помножити са $(m-1)(x+2)(x+1)$. Добијамо еквивалентну једначину $(2m-5)(x+1) - 3(m-1)(x+2) = (3x+4)(m-1)$, односно $x(1-4m) = 8m-5$. Последња једначина за $m = \frac{1}{4}$ нема решења, а за $m \neq \frac{1}{4}$ има решење $x_1 = \frac{8m-5}{1-4m}$. Да би овај број био решење полазне једначине треба да буде $\frac{8m-5}{1-4m} \notin \{-1, -2\}$, тј. $m \neq 1$. Дакле, за $m \neq 1$ и $m \neq \frac{1}{4}$ решење је $x_1 = \frac{8m-5}{1-4m}$, а за $m = 1$ или $m = \frac{1}{4}$ - нема решења.

в) За $x \neq \pm 2$ једначина је еквивалентна једначини $(3a-4)(3a+4)x = 2a(3a+4)$, тј. за $a \neq \pm\frac{4}{3}$ $x = \frac{2a}{3a-4}$. Међутим мора да буде $\frac{2a}{3a-4} \neq \pm 2$, одакле се добије $a \neq 1$ и $a \neq 2$. Дакле, за $a \neq \pm\frac{4}{3}$, $a \neq 1$, $a \neq 2$ решење је $x_1 = \frac{2a}{3a-4}$, а ако је $a = 1$ или $a = 2$ или $a = \frac{4}{3}$ - нема решења. Ако је $a = -\frac{4}{3}$ решење је свако x различито од ± 2.

г) За $|a| \neq 1$ решење је $x_1 = \frac{a+1}{2}$, за $|a| = 1$ - нема решења.

828. а) За $x \neq \pm m$ дата једначина еквивалентна је једначини $x(2m-n) = -n(2m-n)$. Решења су: за $m = 2n$ - $x \in \mathbf{R}\setminus\{\pm m\}$; за $m \neq \pm n, m \neq 2n$ $x = -n$; за $0 \neq m \neq \pm n$ нема решења;

б) за $a \neq \pm b$; дата једначина трансформише се у облик $x(a+b) = 3b(a+b)$. Дакле, за $a \neq \pm b$ решење је $x_1 = 3b$, док за $a = b$, или $a = -b$, нема решења;

в) за $m \neq 0, m \neq 2$ једначина је еквивалентна једначини $x(m+3) = 6-m$. За $m \neq -3, m \neq 0, m \neq -2$, решење је $x_1 = \frac{6-m}{m+3}$, а за $m = -3$, или $m = 0$, или $m = 2$ - нема решења.

г) за $m \neq \pm 2$ добијамо еквивалентну једначину $mx = 8m - 2$. Решења: за $m \neq 0, m \neq \pm 2$ $x_1 = \frac{8m-2}{m}$; за $m = 0$, или $m = 2$, или $m = -2$ - нема решења;

д) за $m \neq \pm n, m \neq 0, n \neq 0$ решење је $x = \frac{m+n}{2}$; за $m = -n \neq 0$ решења су $x \in \mathbf{R}\setminus\{m, n\}$; за $m = 0$ или $n = 0$ или $m = n$ - нема решења.

829. а) $x = ab$ за $a \neq 0$ и $a \neq \pm b$; б) Једначина нема решење за $m \neq -1$. За $m = -1$ решења су сви $x \in \mathbf{R}\setminus\{0, 1\}$.

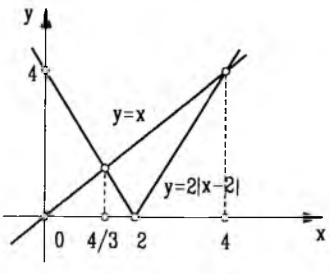
830. а) За $a \neq 2$, $x = \dfrac{4(a+1)}{(a+1)^2+1}$; б) $a > -1$; в) $a = -1$.

831. а) Решење је $x_1 = \dfrac{a}{a+1}$; б) $x > 0$ за $a < -1$ или $a > 0$, $x > 1$ за $a < -1$.

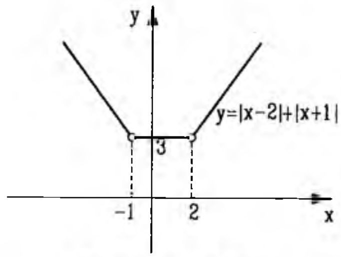
832. а) Први сабирак написати у облику $\dfrac{x-(a+b+c)}{c} + 1$, а затим слично и остала два. Сабирањем добијамо $[x-(a+b+c)]\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) = 0$, па је за $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \neq 0$ решење $x = a+b+c$, а уколико је $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = 0$ решење је свако x, уз услов да је $a, b, c \neq 0$.
б) За $a, b, c \neq 0$ и $a+b+c \neq 0$, $x = a+b+c$. За $a, b, c \neq 0$ и $a+b+c = 0$ решење је свако x, а нема решења ако је $a = 0$, или $b = 0$ или $c = 0$.

833. Посматрајмо графике функција $y_1 = \dfrac{x-a}{2}$ и $y_2 = \left|2|x| - a^2\right|$. Види се да је максималан број решења ове једначине једнак четири и то када је $a < -\dfrac{a^2}{2}$ и $-\dfrac{a}{2} < a^2$. Пошто је, очигледно, $a < 0$, то се из последњих неједнакости добија $-2 < a < -\dfrac{1}{2}$.

834. а) Из $2\sqrt{(x-2)^2} = x$ добијамо $2|x-2| = x$.
1° За $x > 2$ је $2x - 4 = x$, тј. $x_1 = 4$;
2° За $x \leq 2$ је $4 - 2x = x$, тј. $x_2 = \dfrac{4}{3}$.
б) Једначина се може представити у облику $|x-2| - |2x+3| = -1$. Решења су $x_1 = -6$ и $x_2 = 0$.



Сл. уз зад. 834а



Сл. уз зад. 839а

835. а) Како је $x + 3 - 2\sqrt{x+2} = \left(\sqrt{x+2}-1\right)^2$ и $x + 27 - 10\sqrt{x+2} = \left(\sqrt{x+2}-5\right)^2$, то је дата једначина еквивалентна једначини $\left|\sqrt{x+2}-1\right| + \left|\sqrt{x+2}-5\right| = 4$. Добијамо да је $1 \leq \sqrt{x+2} \leq 5$, одакле следи да су решења сви реални бројеви за који важи $-1 \leq x \leq 23$.
б) $3 \leq x \leq 7$; в) $1 \leq x \leq 26$; г) $2 \leq x \leq 5$; д) $x_1 = \dfrac{1}{2}, x_2 = 5$.

836. а) $1 \leq x \leq 2$, сл.; б) $x = 1$ или $x = \dfrac{11}{2}$, сл.; в) $1 \leq x \leq 2$ или $x = 5$, сл.; г) $x = \pm 4$ или $x = \pm 2$ или $x = 0$, сл.

837. Ако уведемо смену $\dfrac{1}{x} = t$, добијамо једначину $|t| + |t-1| + |2t-1| = \dfrac{4}{3}$, чија су решења $t_1 = \dfrac{1}{3}$, $t_2 = \dfrac{2}{3}$, па је $x_1 = 3, x_2 = \dfrac{3}{2}$.

838. а) За $a < 3$ - нема решења; за $3 \leq a < 4$ - решења су $x_1 = 3 - a$, $x_2 = a - 3$; за $4 \leq a \leq 5$ - решења су $x_1 = 3 - a$, $x_2 = \dfrac{a-1}{3}$, за $a > 5$ - решења су $x_1 = -\dfrac{a+1}{3}$, $x_2 = \dfrac{a-1}{3}$.
б) За $a < -2$ - нема решења; за $a = -2$ - решења су $x \leq 2$; за $a > -2$ - решење је $x_1 = 1 - \dfrac{a}{2}$;
в) За $a < 0$ - нема решења; за $a = 0$ - решења су $x \geq 0$; за $a > 0$ - решење је $x_1 > -\dfrac{a}{2}$.

839. а) Посматрајмо график функције $y = |x-2| + |x+1|$ и график функције $y = a + 2x$, $a \in \mathbf{R}$ (сл.) Види се да за $a < -1$ - нема решења, за $a = -1$ решења су $x \geq 2$, за $-1 < a \leq 5$ решење је $x_1 = \dfrac{3-a}{2}$, за $a > 5$ решење је $x_1 = \dfrac{1-a}{4}$.

б) За $b < -1$ нема решења, за $b = -1$ решења су $x \in (-\infty, -2]$, за $-1 < b < 5$ решење је $x_1 = \dfrac{b-3}{2}$, а за $b \geq 5$ - $x_1 = \dfrac{b-1}{4}$.

в) За $a < 0$ - нема решења, за $a = 0$ решења су $x \geq 1$, за $0 < a \leq 4$ решење је $x_1 = \dfrac{2-a}{2}$ и за $a > 4 - x_1 = \dfrac{-a}{4}$.

г) За $b = 1$ - $x \geq 2$, за $-1 < b < 1$ - нема решења, за $b = -1$ - $x \leq -2$, за $|b| > 1$ - $x_1 = \dfrac{2}{b}$.

840. а) $(2, -\dfrac{1}{a})$ за $a \neq 0, a \neq -3$; нема решења за $a = 0$; $(3y+1, y)$, $y \in \mathbf{R}$, за $a = -3$.

б) $(a+1, a-1)$ за $a \neq 0$, $a \neq 1$; $(x, x-2)$, $x \in \mathbf{R}$, за $a = 0$; $(x, 0)$, $x \in \mathbf{R}$, за $a = 1$.

в) Ако је $a = b = 0$, решења су $(x, 1-x)$, $x \in \mathbf{R}$; ако је $b = 0$, $a \neq 0$, нема решења; за $b \neq 0$ решење је $(\dfrac{b-a}{2b}, \dfrac{a+b}{2b})$.

г) $((a+b)^2, (a-b)^2)$ за $a \neq 0, a \neq \pm b$; (x, x), $x \in \mathbf{R}$, за $a = 0$, $b \neq 0$; нема решења за $a = \pm b$.

д) $(\dfrac{-m}{2m+1}, \dfrac{2m+1}{m+1})$ за $m \neq \pm 1$, $m \neq -\dfrac{1}{2}$; нема решења за $m = -1$ или $m = -\dfrac{1}{2}$; $(x, 3 - \dfrac{1}{x+1})$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, за $m = 1$.

ђ) $(1, h)$ за $a \neq \pm b$; $(x, 1+h-x)$ за $a = b \neq 0$; $(x, x-1+h)$ за $a = b \neq 0$; сви парови (x, y), $x, y \in \mathbf{R}$, за $a = b = 0$.

841. а) За $b \neq 0$, $a \neq 2$ решење је $(b, -a)$, за $b = 0$ решења су $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$, а за $a = 2$ - решења су $(-b - b\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

б) За $b \neq 1$, $a \neq 2$ решење је $(-b, a)$, за $b = 1$ решења су $(-1, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$, а за $a = 2$ - решења су $(b - 2 + (1-b)\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

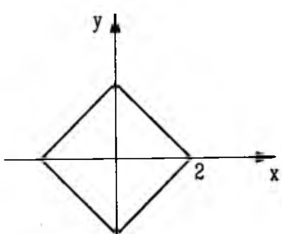
в) за $b \neq 0$, $a \neq 1$ решење је $(b, a-1)$, за $b = 0$ решења су $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$, а за $a = 1$ - решења су $(b + b\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

г) за $b \neq -1$, $a \neq 2$ решење је $(-b, a)$, за $a = 2$ решења су $(b + 2 - (b+1)\beta, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$, а за $b = -1$ - решења су облика $(1, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

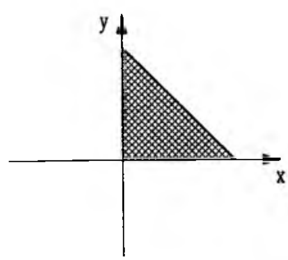
д) за $a \neq 1$, $b \neq 4$ решење је $(b, \dfrac{1}{a-1})$. За $a = 1, b \neq 4$ - нема решења, за $b = 4, a \neq 1$ решења су $(5 - (a-1)\beta, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$ и за $a = 1$, $b = 4$ решења су $(5, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

ђ) за $a \neq 0$, $b \neq -\dfrac{5}{3}$ решење је $(1, a)$, за $a = 0$ решења су $(1, \beta)$, $\beta \in \mathbf{R}$, а за $b = -\dfrac{5}{3}$ решења су $(3a^2 + 1 - 3a\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

842. а) – г): видети слике.

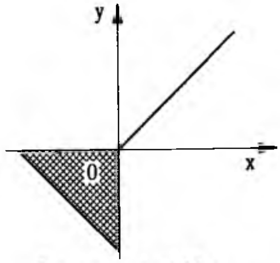


Сл. уз зад. 842а

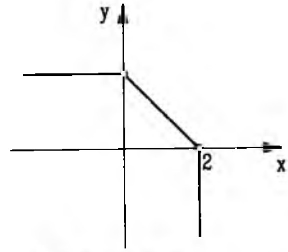


Сл. уз зад. 842б

843. Решење система је $\left(\dfrac{3n+8}{n^2+6}, \dfrac{4n-9}{n^2+6}\right)$. Због $x > 0, y < 0$ треба да буде $-\dfrac{8}{3} < n < \dfrac{9}{4}$, тј. $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



.Сл. уз зад. 842в

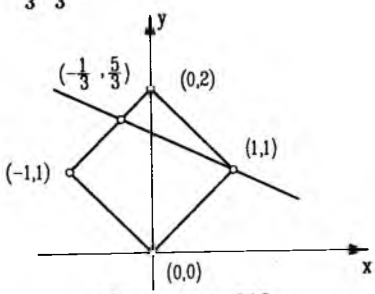


Сл. уз зад. 842г

844. $a = 0, b = 0, c = \frac{9}{4}$, или $a = 2, b = -1, c = 1$.

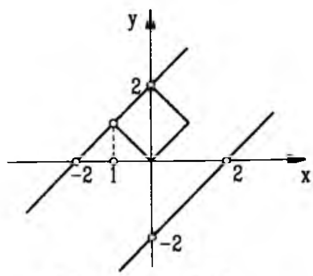
845. Из $9x = n^2(n-1)$, како су n^2 и $n-1$ узајамно прости следи $n = 3k$ или $n = 9k+1$ $(k \in \mathbf{N})$. У првом случају се добија $x = k^2(3k-1), y = k^2(10-3k)$, па је $x, y \in \mathbf{N}$ ако и само ако је $n = 3, n = 6$ или $n = 9$. У другом случају се покаже да не може бити истовремено $x \in \mathbf{N}$ и $y \in \mathbf{N}$.

846. Решења су (1, 1) или $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$, (в.сл.).

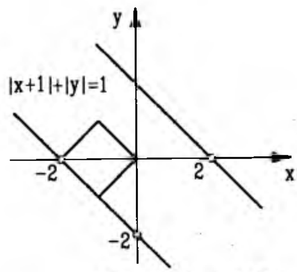


Сл. уз зад. 846

847. а) Решења су облика $(\alpha, -2-\alpha)$, $\alpha \in [-2, -1]$, (в.сл.);
б) Решења су облика $(\alpha, \alpha+2)$, $\alpha \in [-1, 0]$, (в.сл.).



Сл. уз зад. 847а



Сл. уз зад. 847б

848. а) Означимо: $\frac{3}{x+2y+z} = a$, $\frac{4}{5x-y+2z} = b$, $\frac{5}{3x+2y+z} = c$. Сада је $2a+b+c = 4$, $a+2b+c = 4$, $3a+3b-2c = 4$. Решење овог система је $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. Из $x+2y+z = 3$, $5x-y+2z = 4$, $3z+2y+z = 5$ добија се да је решење датог система $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.
б) $(1, 0, -1)$.

849. а) Увести смене: $\frac{x}{a} = x'$, $\frac{y}{b} = y'$, $\frac{z}{c} = z'$. Решење је $(-a, b, c)$.

б) $(bc,\ ac,\ ab)$.

в) Сваку од једначина поделити са abc и увести смене: $\frac{x}{a} = x'$, $\frac{y}{b} = y'$, $\frac{z}{c} = z'$. Решење је $(a,\ 2b,\ 3c)$.

850. а) $\left(\frac{a-9b-2}{11}, \frac{-5a+9b+10}{11}, a,\ b\right)$ $a, b \in \mathbf{R}$;

б) $(-1,3,-2,2)$: в) $(2,1,-3,1)$; г) нема решења; д) $(1,2,3,4,-4,-3,-2,-1)$.

851. Када саберемо једначине, добијемо $2(x+y+z)^2 = 288$, одакле је $x+y+z = \pm 12$, што можемо заменити у дате једначине. Добијају се два система, чија су решења $(2,4,6)$ и $(-2,-4,-6)$.

852. Означимо са x, y, z, u једночасовни учинак прве, друге, треће и четврте цеви. Тада је

$$\begin{cases} x+y+z+u = \dfrac{1}{4} \\ x+y+u = \dfrac{1}{6} \\ y+z+u = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Из прве и друге једначине следи $z = \frac{1}{12}$, а из прве и треће $x = \frac{1}{20}$, па је $z + x = \frac{2}{15}$, односно прва и трећа цев напуне базен за 7,5 часова.

853. Нека је m број страна и n број ученикових марака. Тада је $20m < n$, $23(m-1) \geq n$ и $21m+n = 500$. Заменом n из једначине добијамо $20m < 500 - 21m$ и $23(m-1) \geq 500 - 21m$. Како је m цео број из прве неједначине следи $m \leq 12$, а из друге $m \geq 12$, па је $m = 12$.

854. а) За $a = -2$ решење је $(0,-2)$, за $a = -1$ решење је $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. За $a \neq -1, a \neq -2$ - нема решења;

б) За $a = 2$ решење је $(0,2)$, за $a = -1$ решење је $(-1,-2)$. За $a \neq -1, a \neq 2$ - нема решења.

855. Елиминацијом y из датих једначина добијамо $z = 12x$, како је $z > 0$ и $x > 0$ биће $z > x$.

856. а) Дати систем се може написати у облику:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{12} \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{18} \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{13}{36}.$$

После примене смене: $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c$, налазимо $x = 4, y = 6, z = 9$; б) $\left(\frac{35}{4}, -210, \frac{35}{9}\right)$.

857. Означимо са x почетну количину траве и са y дневни прираст траве (у количинама дневних порција), тада је $x + 50y = 40 \cdot 50$, $x + 30y = 60 \cdot 30$, одакле је $x = 1500$, $y = 10$. Из $1500 + 10 \cdot z = z \cdot 20$ налазимо да 20 крава мора пасти $z = 150$ дана, а из $1500 + 10 \cdot 75 = u \cdot 75$, налази да 75 дана на ливади може пасти $u = 30$ крава.

858. а) $x > \frac{a-4}{5-a}$, за $a < 5$, $x < \frac{a-4}{5-a}$, за $a > 5$, $a = 5$ – нема решења;

б) $x > \frac{m+2}{n+1}$, за $n > -1$; $x < \frac{m+2}{n+1}$, за $n < -1$; свако x за $n = -1$ и $m < -2$; нема решења за $n = -1$, $m \geq -2$;

в) $x > a + b$ за $a > b$; $x < a + b$ за $a < b$; $a = b$ - нема решења;

г) $x < \frac{2b}{a}$ за $a > 0$, $x > \frac{2b}{a}$, за $a < 0$;

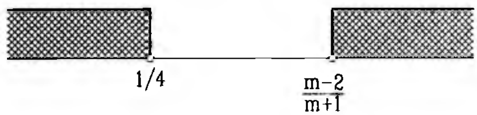
д) $x > \frac{2}{(a+1)^2}$ за $a > -1$, $x < \frac{2}{(a+1)^2}$ за $a < -1$;

ђ) $x > a(a+1)$ за $a > 0$, $x < a(a+1)$ за $a < 0$;

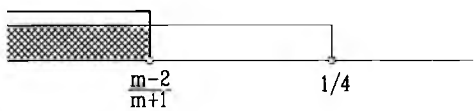
е) $x \leq \frac{a-2}{a-1}$ за $a < 1$ или $a > 2$, $x \geq \frac{a-2}{a-1}$ за $1 < a < 2$, $x \in \mathbf{R}$ за $a = 1$ или $a = 2$.

859. Решења прве неједначине система су: за $m < -1$ - $x > \dfrac{m-2}{m+1}$; за $m > -1$ $x < \dfrac{m-2}{m+1}$; за $m = -1$ она се своди на $0 \cdot x < -3$ и она нема решења. Решења друге неједначине су $x < \dfrac{1}{4}$. Сада треба утврдити када је (за $m \neq -1$) испуњено $\dfrac{m-2}{m+1} \geq \dfrac{1}{4}$, односно $\dfrac{m-2}{m+4} < \dfrac{1}{4}$. Нека је, најпре $m > -1$. Тада је неједначина $\dfrac{m-2}{m+1} \geq \dfrac{1}{4}$ еквивалентна неједначини $4(m-2) \geq m+1$, тј. $m \geq 3$, док је за $-1 < m < 3$ $\dfrac{m-2}{m+1} < \dfrac{1}{4}$. Ако је $m < -1$, неједначина $\dfrac{m-2}{m+1} \geq \dfrac{1}{4}$ еквивалентна је неједначини $4(m-2) \leq m+1$, тј. $m \leq 3$. Овај услов је сагласан услову $m < -1$, што значи да је за све $m < -1$ испуњен услов $\dfrac{m-2}{m+1} \geq \dfrac{1}{4}$. Резимирајмо закључке до којих смо дошли:

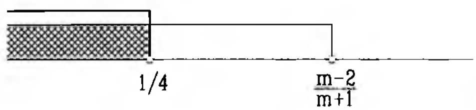
1° $m < -1$, $x > \dfrac{m-2}{m+1}, x < \dfrac{1}{4}$,



2° $-1 < m \leq 3$, $x < \dfrac{m-2}{m+1}, x < \dfrac{1}{4}$,



3° $m > 3$, $x < \dfrac{m-2}{m+1}, x < \dfrac{1}{4}$.



а) $m < -1$ - нема решења; б) $m = -1$ - нема решења; в) $-1 < m \leq 3$ - $x < \dfrac{m-2}{m+1}$; г) $m > 3$ - $x < \dfrac{1}{4}$.

860. а) Прва неједначина система еквивалентна је неједначини $x(a-1) < a^2 - 1$, а њена решења су: (1) за $a < 1$ $x > a+1$, (2) за $a = 1$ - нема решења, (3) за $a > 1 : x < a+1$.
Друга неједначина система еквивалентна је неједначини $(a-4)x < 2(a-4)$, па су њена решења: (1) за $a < 4 : x < 2$, (2) за $a = 4$ - нема решења, (3) за $a > 4 : x > 2$.
Како је $a + 1 > 2$, за $a > 1$, то су решења датог система неједначина: 1° за $a < 1 : x > 2$; 2° за $a = 1$: нема решења; 3° за $1 < a < 4 : 2 < x < a+1$; 4° за $a = 4$: нема решења; 5° за $a > 4 : x < 2$.
б) За $a < -3 : x < 2$; за $a = -3$ и $a = 0$ - нема решења; за $-3 < a < 0 : 2 < x < 2 - a$ и за $a > 0 : x > 2$.
в) За $c < -2 : x < 2$; за $c = -2$ и $c = 1$ - нема решења; за $-2 < c < 1 : 2 < x < 3 - c$ и за $c > 1 : x > 2$;
г) за $c < -1 : x > 2$; за $c = -1$ и $c = 2$ - нема решења; за $-1 < c < 2 : 2 < x < c+3$; за $c > 2 : x < 2$.

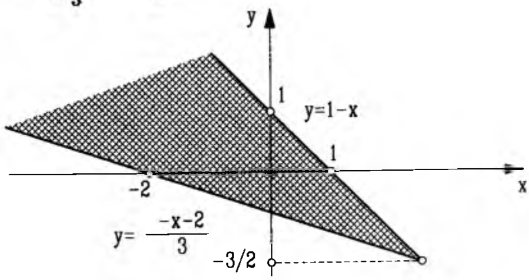
861. а) Решења прве неједначина су: за $a > 3 : x < \dfrac{2-a}{3-a}$, за $a = 3 : x \in \mathbf{R}$, за $a < 3 : x > \dfrac{2-a}{3-a}$, а решења друге неједначине су $x < \dfrac{1}{3}$. Како је $\dfrac{2-a}{3-a} > \dfrac{1}{3}$ ако је $a < \dfrac{3}{2}$ или $a > 3$, то су решења датог система:

(1) за $a \leq \frac{3}{2}$ - нема решења; (2) за $\frac{3}{2} < a < 3$ - $x \in \left(\frac{2-a}{3-a}, \frac{1}{3}\right)$;

(3) за $a \geq 3$ - $x < \frac{1}{3}$;

б) за $m \leq 0$ - $x > \frac{11}{3}$, за $0 < m < \frac{3}{2}$ - $x \in \left(\frac{11}{3}, \frac{3m+1}{m}\right)$ и за $m \geq \frac{3}{2}$ - нема решења.

862. (а) $-3-2y \leq x \leq 1-y \ \wedge y \geq -\frac{3}{4}$. Геометријска интерпретација дата је на слици. б) $2-x \leq y \leq 2x+1 \ \wedge \ x \geq \frac{1}{3}$; в) $x \geq max\{y-7, 3y+2\}$.



Сл. уз зад. 862

863. а) Једначина се може написати у облику $(a-1)(a-2)x = (a-2)(a-3)$. За $a \neq 2$, $a \neq 1$ $x = \frac{a-3}{a-1}$, за $a = 2$ решење је свако x, а за $a = 1$ нема решења.
1° $a = 3$, 2° $a < 1$ или $a > 3$, 3° $1 < a < 3$, $a \neq 2$;
б) за $a \neq \pm 1$ $x = \frac{a+3}{a-1}$, за $a = -1$ решење је свако x, а за $a = 1$ нема решења. 1° $a = -3$, 2° $a < -3$ или $a > 1$, 3° $-3 < a < 1$, $a \neq -1$.

864. а) За $a \neq 5$ - $x_1 = \frac{a-4}{5-a}$ 1° $x_1 > 0$ је испуњено за $4 < a < 5$, 2° $a = 4$, 3° $a < 4 \vee a > 5$;
б) за $a \neq -1$ - $x_1 = \frac{a+2}{a+1}$ 1° $a < -2 \vee a > -1$; 2° $a = -2$; 3° $-2 < a < -1$.
в) за $a \neq -1$ - $x_1 = \frac{2}{(a+1)^2}$, па је $x_1 > 0$ за све $a \neq -1$.
г) за $a \neq 0$ - $x_1 = a(a+1)$, па је: 1° $a < -1 \vee a > 0$, 2° $a = -1$; 3° $-1 < a < 0$.

865. За $a \neq 0$, $a \neq -1$ - једначина је еквивалентна једначини $x(a+1)^2 - a(a+1)^2 = xa(a+1) - a$, тј. $x(a+1) = a^2(a+2)$, одакле је, пошто је $a \neq -1$ $x_1 = \frac{a^2(a+2)}{a+1}$. Знак решења је исти као знак израза $\frac{a+2}{a+1}$, па је $x_1 > 0$ за $a < -2 \ \vee \ -1 < a < 0 \ \vee \ a > 0$, а $x_1 = 0$ за $a = -2$ и $x_1 < 0$ за $-2 < a < -1$.

866. За $m \neq 3$ $x = \frac{15-2m}{2(m-3)}$, $y = \frac{3(13-2m)}{2(m-3)}$; $x > 0$ и $y < 0$ је за $6,5 < m < 7,5$.

867. Решење је $\left(\frac{k+16}{7}, \frac{8-3k}{7}\right)$. Услов је испуњен за $k \in \left(-23, \frac{8}{3}\right)$.

868. За $k = -1$ нема решења; за $k \neq -1$ је $x = \frac{1}{k+1}, y = \frac{k}{k+1}$ и тада је $x > 2y$ ако и само ако је $-1 < k < \frac{1}{2}$.

869. а) За $p = 0$ нема решења; за $p \neq 0$ решење је $(\frac{1}{p}, \frac{p-1}{p})$; б) $p < 0$, или $p \geq \frac{1}{2}$.

870. а) За $b \neq 1, b \neq -3$ решење је $(\frac{1}{b-1}, \frac{b+1}{b-1})$; за $b = 1$ нема решења; за $b = -3$ решења су $(t, \frac{1}{4} - t), t \in \mathbf{R}$; б) $b \in [0, 1)$.

871. а) За $b \neq 0, a \neq 1$ решење је $(b, a-1)$; за $b = 0$ решења су облика $(0,t), t \in \mathbf{R}$; за $a = 1$ решења су облика $(bt+b, t), t \in \mathbf{R}$. б) Ако у дату неједначину заменимо $x_0 = b, y_0 = a-1$, добијамо после сређивања еквивалентну неједначину $\dfrac{2b-3}{b-4} \leq 1$, чија су решења $b \in [-1, 4), (b \neq 0, b \neq \dfrac{3}{2})$.

872. За $p \neq \pm 2$ решење је $(\dfrac{6}{p+2}, \dfrac{3}{p+2})$, за $p = 2$ решења су $(3-2t, t), t \in \mathbf{R}$, док за $p = -2$ нема решења. б) $-5 < p < -2$, или $-2 < p < 1$.

873. а) Систем има јединствено решење за $k \neq 1$: $(3k-1, -1)$. Услов важи за $k \in (\dfrac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

б) Систем има јединствено решење за $k \neq 2$: $(-1, 3k-2)$. Услов важи за $k \in (\dfrac{1}{2}, 2) \cup (2, +\infty)$.

874. Систем има јединствено решење за $m \neq \pm 1$: $(\dfrac{2m}{1+m}, \dfrac{1-m}{1+m})$. Услов важи за $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \cup (1, +\infty)$.

875. а) Посматрати аритметичку и геометријску средину бројева a^2c, b^2a и c^2b.

б) Аритметичка средина за бројеве $x+1, 1$ и 1 није мања од геометријске, па је $\dfrac{(x+1)+1+1}{3} \geq \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (x+1)}$ или $\dfrac{x}{3} + 1 \geq \sqrt[3]{1+x}$. Једнакост важи ако и само ако је $x = 0$.

в) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\dfrac{ab}{c}\dfrac{bc}{a}} = 2b$. На исти начин се покаже $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{ca}{b} \geq 2a$, $\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq 2c$, а затим се леве и десне стране ових неједнакости саберу.

г) Аритметичка средина бројева a, b, c није мања од хармонијске.

д) Аритметичка средина бројева $\dfrac{b+c}{2}, \dfrac{b+a}{2}, \dfrac{a+c}{2}$ је већа или једнака од хармонијске.

ђ) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{a}} = 3$. Ова, као и многе друге од поменутих, неједнакости може се уопшити - тако за све позитивне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$ важи $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_n}{a_1} \geq n$.

876. а) $|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2+2xy+y^2} \leq \sqrt{2+2xy} = \sqrt{4} = 2$, јер због $x^2+y^2 \leq 2$ из $0 \leq (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \leq 2-2xy$, следи $2xy \leq 2$.

в) Нека је $a = 1+k$ и $b = 1-k$. Тада је $a^4+b^4 = (1+k)^4+(1-k)^4 = 2(k^4+6k^4+1) \geq 2$, јер је $k^4+6k^2 \geq 0$.

ђ) Како је $(x-y-\sqrt{2})^2 = (x-y)^2 - 2\sqrt{2}(x-y) + 2 = x^2+y^2-2\sqrt{2}(x-y) \geq 0$, биће $\dfrac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$. Кориштени су услови $x-y > 0$ и $xy = 1$.

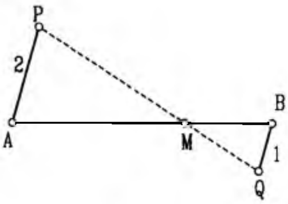
е) $x^2+y^2-\dfrac{4}{a} = x^2+y^2-\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} \geq 0$.

877. Упутство: применити однос квадратне и аритметичке средине.

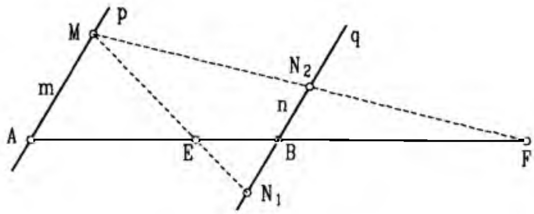
878. Нека је t време за које први аутомобил стиже у B. Укупан његов пут ће бити $AB = \dfrac{u+v}{2} \cdot t$. Ако је T време за које други аутомобил стиже на циљ, биће $T = \dfrac{\frac{AB}{2}}{u} + \dfrac{\frac{AB}{2}}{v} = \dfrac{AB}{2}(\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v})$, одакле је $AB = T \cdot \dfrac{2uv}{u+v}$. Сада имамо $\dfrac{u+v}{2} \cdot t = T \cdot \dfrac{2uv}{u+v}$, тј. $\dfrac{T}{t} = \dfrac{(u+v)^2}{4uv} \geq 1$, јер је $(u+v)^2 \geq 4uv$ због $(u-v)^2 \geq 0$. Дакле $t \leq T$, где једнакост важи ако и само ако је $u = v$.

Глава VII – Сличност

879. Нека су P и Q тачке такве да је $AP = 2$, $BQ = 1$ и $AP \| BQ$ (в. сл.). Тада је M пресек дужи AB и PQ.

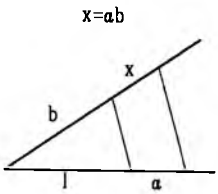


Сл. уз зад. 879

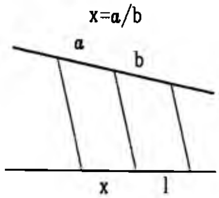


Сл. уз зад. 880

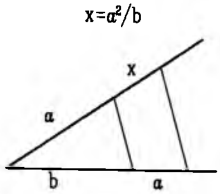
880. $p \| q$, $AM = m$, $BN_1 = BN_2 = n$, $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{m}{n}$ (в.сл.).



Сл. уз зад. 882а



Сл. уз зад. 882б



Сл. уз зад. 882в

882. Једнакости написати у облику пропорције: а) $x : a = b : 1$; б) $x : 1 = a : b$; в) $x : a = a : b$ (в.сл.).

883. Нека је AB дата дуж, l произвољна права која садржи тачку A и A_1, A_2, A_3 тачке такве да важи $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, (в.сл). Нека праве које садрже тачке A_1 и A_2 и паралелне су са правом A_3B секу дуж AB у тачкама C и D. Тада тачке C и D деле дуж AB на три једнака дела.

884. На основу Талесове теореме, према датој слици, имамо размере $AC : CD = BC : CE = AB : DE$. Одавде ћемо изарачунати тражене дужине.

а) Из $AC : CD = BC : CE$ добијамо $CE = \dfrac{CD \cdot BC}{AC} = \dfrac{4 \cdot 24}{12} = 8$;

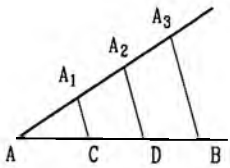
б) Из $AC : CD = BC : CE$, на основу особина пропорција, добијамо $(AC - CD) : (BC : CE) = AC : BC$, односно $AD : BE = AC : BC$. Одавде је $BE = \dfrac{AD \cdot BC}{AC} = \dfrac{3 \cdot 25}{15} = 5$.

в) Слично, као под б): $BE = \dfrac{AD \cdot CE}{CD} = 3$, па је $BC = CE + BE = 10$.

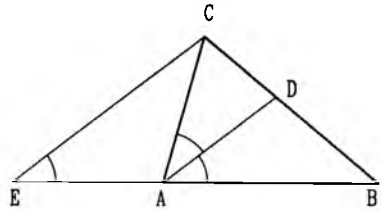
г) $AD = AC - CD = 12$, па је $CE = \dfrac{6 \cdot 8}{12} = 4$; д) $AC = CD + DA = 10$.

885. Из услова задатка следи $AC : CD : DB = 10 : 15 : 21$ и $AC + CD + DB = 92$. Ако означимо $AC = 10t$, $CD = 15t$ и $DB = 21t$, онда добијамо $t = 2$, па следи $AC = 20, CD = 30, DB = 42$.

886. Нека је D пресек симетрале угла A и странице BC и E пресек праве која садржи тачку C, а паралелна је правој AD, са правом AB, (в.сл.). Тада су углови код темена C и E троугла ACE једнаки половини угла A троугла ABC, тј. тај троугао је једнакокраки.



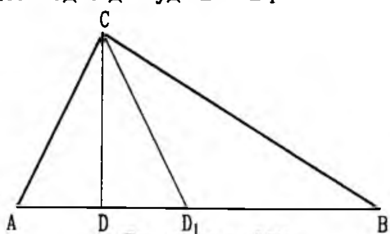
Сл. уз зад. 883



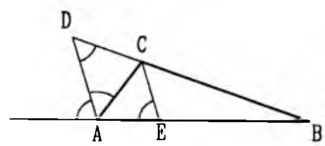
Сл. уз зад. 886

Зато је $AC = AE$. Даље, због $AD \| CE$, на основу Талесове теореме добијамо $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$.

887. Нека је $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{DB}$, где је CD дата полуправа, а CD_1 симетрала угла C (в.сл.). Тада је због особине симетрале $\dfrac{AD_1}{DB} = \dfrac{AC}{CB}$, па би било $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{D_1B}{BD_1}$. Одатле следи да је неопходно да буде $D = D_1$.



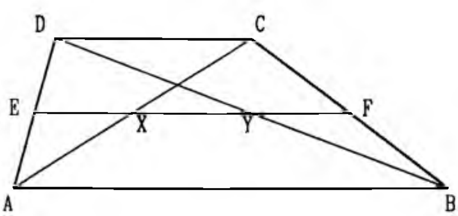
Сл. уз зад. 887



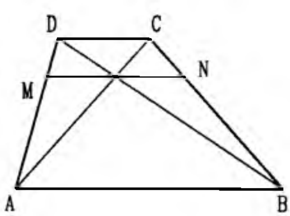
Сл. уз зад. 889

888. Из $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AN}{AM}$ и $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AN}{BN}$ и $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{BN}{BM}$ следи $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AC}{BC} \cdot \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AC}{BD}$, па је $AE = BD$.

889. Нека је D пресек симетрале спољашњег угла код темена A троугла ABC са правом BC и E пресек паралеле са AD, која садржи тачку C, са правом AB, (в.сл). Тада су углови код темена C и E троугла ACE једнаки половини спољашњег угла код темена A троугла ABC, па следи $AE = AC$. Даље, због $AD \| CE$, следи $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$.

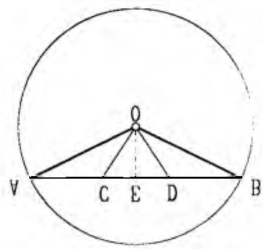


Сл. уз зад. 890



Сл. уз зад. 891

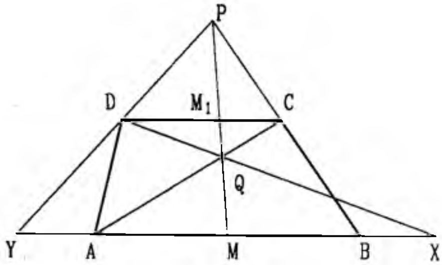
890. Нека су $AB = a$ и $CD = b$ основице трапеза $ABCD$, E и F средишта страница AD и BC, редом, и нека су X и Y пресеци дијагонала AC и BD са правом EF (в.сл.). На основу Талесове теореме добијамо $\dfrac{DE}{DA} = \dfrac{EY}{AB}$, $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{EX}{DC}$, одакле следи $EY = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}a$ и $EX = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{1}{2} = b$, па је $XY = EY - EX = (a - b)/2$.



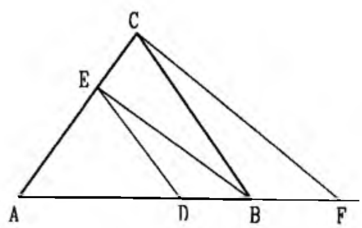
Сл. уз зад. 892

891. Нека је O пресек дијагонала датог трапеза. Тада на основу Талесове теореме добијамо $\dfrac{MO}{AB} = \dfrac{DM}{DA}$ и $\dfrac{MO}{DC} = \dfrac{AM}{AD}$, одакле сабирањем добијамо $\dfrac{MO}{AB} + \dfrac{MO}{CD} = \dfrac{DM + AM}{AD} = 1$, па одатле следи $MO = \dfrac{ab}{a+b}$. Аналогно је $ON = \dfrac{ab}{a+b}$, па добијамо $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$.

892. Означимо са E подножје нормале из O на AB (в.сл.). Тада је OE висина, а OC медијана у троуглу AOD. Како је бисектриса угла AOD између медијане и висине, то је $\sphericalangle AOC < \sphericalangle COD$, док је $\sphericalangle AOC = \sphericalangle DOB$.

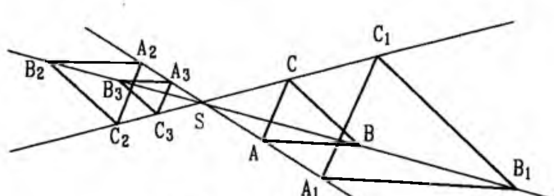


Сл. уз зад. 893



Сл. уз зад. 894

893. Нека је M_1 пресек правих PM и CD (в.сл.). Користећи чињенице $AB \| CD$ и $AM = MB$ добијамо $\dfrac{MY}{M_1D} = \dfrac{PY}{PD} = \dfrac{PB}{PC} = \dfrac{MB}{M_1C} = \dfrac{MX}{M_1D}$. Према томе, $MX = MY$, тј. тачка M је средиште дужи XY.



Сл. уз зад. 898

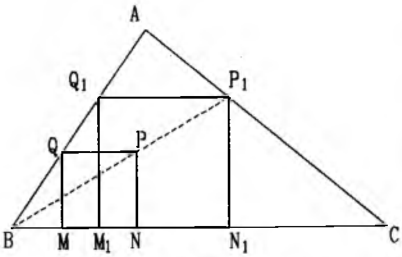
894. Из $BC \| ED$ добијамо $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$, а из $FC \| BE$ добијамо $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AC}{AE}$, (в.сл.). Према томе, $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AF}{AB}$, одакле следи $AB^2 = AD \cdot AF$.

895. $\dfrac{AE}{AB} + \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{CD}{BC} + \dfrac{DB}{BC} = \dfrac{BC}{BC} = 1$.

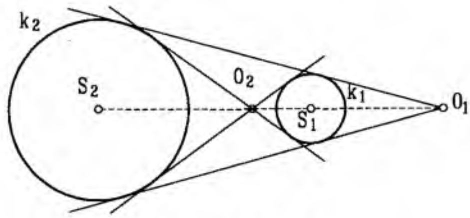
898. Троугао ABC се хомотетијама $\mathcal{H}_{O,2}$, $\mathcal{H}_{O,-1}$ и $\mathcal{H}_{O,-1/2}$ слика редом у троуглове $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, (в.сл).

899. Средишта страница квадрата су темена новог квадрата. Тачке симетричне тачки O у односу на средишта страница датог квадрата су хомотетичне тим средиштима при хомотетији $\mathcal{H}_{O,2}$.

900. Нека је $MNPQ$ произвољан квадрат такав да $M, N \in BC$ и $Q \in AB$, (в.сл.). Нека је P_1 пресек праве BP и праве AC. Хомотетија са центром B и коефицијентом $\frac{BP_1}{BP}$ пресликава квадрат $MNPQ$ у тражени квадрат $M_1N_1P_1Q_1$.



Сл. уз зад. 900



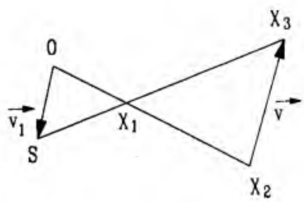
Сл. уз зад. 902

902. Ако су кругови дисјунктни, центри хомотетија су пресек заједничких спољашњих и пресек заједничких унутрашњих тантгенти, (в.сл.). Размотрите случај када се кругови секу.

903. Центар хомотетије је средиште дужи одређене центрима кругова, а коефицијент те хомотетије једнак је -1.

904. Упутство. Одредити центар хомотетије за кругове k_1 и k_2, а затим том хомотетијом пресликати троугао $A_1B_1C_1$ у троугао $A_2B_2C_2$.

905. Нека је X_1 произвољна тачка фигуре F_1, X_2 склика тачке X_1 при хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$, X_3 тачка одређење са $\overrightarrow{X_2X_3} = \vec{v}$ и S тачка одређена условом $\overrightarrow{OS} = \vec{v} = -\frac{OX_1}{X_1X_2}\vec{v}$. Тада су тачке С, X_1 и X_3 колинеарне, (в.сл.), и важи $\frac{SX_3}{SX_1} = \frac{OX_2}{OX_1} = k$. Према томе, фигура F_3 је хомотетична фигури F_1 при хомотетији $\mathcal{H}_{s,k}$.



Сл. уз зад. 905

906. Нека је O центар хомотетије $\mathcal{H}_{O,k}$ и нека су X и Y произвољне тачке праве p, а X_1 и Y_1 слике тих тачака при хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$. Тада важи $\overrightarrow{X_1Y_1} = \overrightarrow{X_1O} + \overrightarrow{OY_1} = k\overrightarrow{XO} + k\overrightarrow{OY} = k(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY}) = k\overrightarrow{XY}$. Према томе, тачке X_1 и Y_1 припадају правој p_1, која је паралелна са правом p. Лако се доказује да је свака тачка праве p_1 слика неке тачке праве p. Нека је M_1 произвољна тачка праве p_1, и нека је тачка M одређена условом $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM_1}$. Тада је $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{X_1M_1} = k\overrightarrow{XM}$. Према томе, тачка M припада правој p, а њена слика при датој хомотетији је тачка M_1.

907. Нека је $\mathcal{H}_{O,k}$ хомотетија и нека је K круг са центром S и полупречником R, X произвољна тачка тог круга и S_1 и X_1 слике тачака S и X при датој хомотетији. Као у претходном задатку добијамо $\overrightarrow{S_1X_1} = k\overrightarrow{SX}$. Према томе, тачка X_1 припада кругу K_1 са центром S_1 и полупречником kR. Лако се доказује да је свака тачка круга K_1 слика тачке круга K.

908. а) Из $12 : 9 = 8 : 6$, односно $6 \cdot 12 = 9 \cdot 8$, следи $AC : BC = AC' : AB'$. Одговарајући одсечци су пропорционални, па је $BB' \| CC'$;
б) $BB' \| CC'$; в) Из $21 : 6 \neq 17 : 9$, односно $21 \cdot 9 \neq 6 \cdot 17$, следи $AC : AB \neq AC' : AB'$. BB' није паралелно са CC'.

909. $a = 18cm$.

910. $h' = \frac{a'}{a} \cdot h = 16$.

911. Да, јер важи $\frac{27}{36} = \frac{36}{48} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$.

912. 32, 48, 56.

913. $19\,cm$ и $23\,cm$.

914. $a_1 = 30$, $b_1 = 25$, $c_1 = 20$, $O_1 = 75$.

915. $O_1 = 24\ cm$.

916. Како је $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$ (као унакрсни) и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ (као углови над луком AD), следи да су торуглови ABS и CDS слични.

917. $a = 10$, $b = 12$, $c = 18$, $d = 20$.

918. $\frac{P_1}{P_2} = \frac{75}{48} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$. Одавде имамо да је $\frac{O_1}{O_2} = \frac{5}{4}$, па како је $O_1 = 28$, биће $O_2 = \frac{112}{5}\ cm$.

919. $x = \frac{a}{d} \cdot h = 15m$.

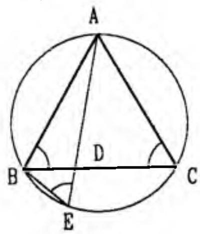
920. $x : 250 = y : 320 = z : 450 = 1 : 10000$, $x = 2,5$, итд.

921. $x = \frac{h}{a}(a - m) = 6cm$.

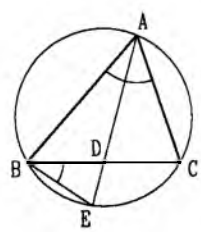
922. Сличност троуглова OAB и OCD следи из једнакости и $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCD$, $\sphericalangle OBA = \sphericalangle ODC$.

923. Из сличности троуглова ABC и CDA имамо $\frac{AC}{16} = \frac{4}{AC}$, одакле је $AC = 8cm$.

924. Приметимо да је $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACB$ (периферијски углови над истим луком), в.сл. Зато је и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AEB$. Осим тога $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAB$. Зато важи $\Delta ABE \sim \Delta ADB$, одакле следи $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$ и коначно $AB^2 = AD \cdot AE$.



Сл. уз зад. 924



Сл. уз зад. 928

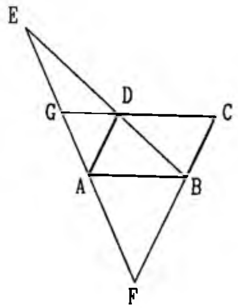
925. Ако дужина страница сличног правоугаоника означимо са x и y, биће $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$, тј. $x = 5k$, $y = 2k$. Из једнакости мерних бројева обима и површине тог правоугаоника добијамо: $2(5k + 2k) = 5k \cdot 2k$; тј. $k = \frac{7}{5}$, одакле је $x = 7$ и $y = \frac{14}{5}$.

926. $x = 4cm$.

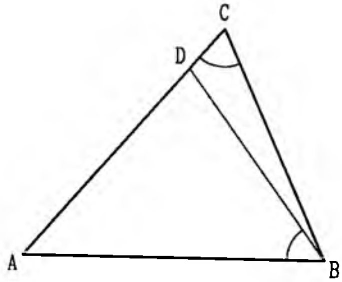
927. $O_1 = 69cm$.

928. Троуглови ABE и BDE имају заједнички угао код темена E. Осим тога $\sphericalangle EBD = \sphericalangle EBC = \sphericalangle EAC = \sphericalangle EAB$, (в.сл.). Зато је $\Delta ABE \sim \Delta BDE$, одакле следи $\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{BE}$, тј. $BE^2 = AE \cdot DE$.

929. Лако се доказује да важе следеће релације (в.сл.). $\Delta EGD \sim \Delta EAB$, $\Delta EAD \sim \Delta EFB$, $\Delta GDA \sim \Delta ABF$. Из ових сличности добијамо $\dfrac{EG}{AE} = \dfrac{GD}{AB} = \dfrac{AD}{FB} = \dfrac{AE}{EF}$, одакле следи $AE^2 = EF \cdot EG$.



Сл. уз зад. 929



Сл. уз зад. 933

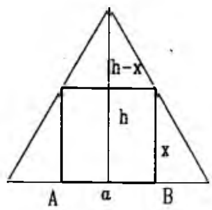
930. Из сличности троуглова BEC и DCF имамо $\dfrac{a}{4} = \dfrac{9}{a}$, одакле је $a = 6cm$.

931. $a = 31,5cm$. Упутство. Искористити сличност троуглова AED и FEC.

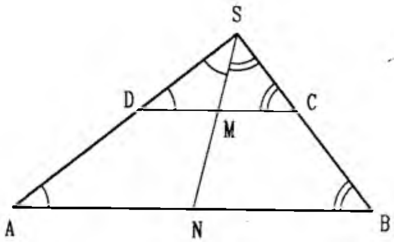
932. $\dfrac{3}{4}b$.

933. $\Delta ABC \sim \Delta ADB$, па је $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AB}{DB}$, одакле је $DB = \dfrac{ac}{b}$.

934. Имамо да је $\dfrac{a}{x} = \dfrac{h}{h-x}$, где је $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Одавде је $x = a(2\sqrt{3} - 3)$.



Сл. уз зад. 934



Сл. уз зад. 935

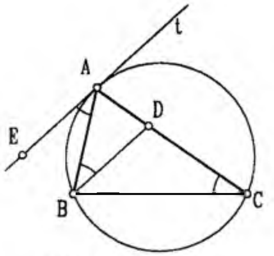
935. Продужимо бочне стране AD и BC трапеза $ABCD$ до њиховог пресека S (в.сл.). $\Delta DSM \sim \Delta ASN$, па је $\dfrac{AN}{DM} = \dfrac{SN}{SM}$, одакле је $\dfrac{AN - DM}{DM} = \dfrac{MN}{SM}$, па је због $MN = AN - DM$, $DM = SM$ и ΔSMD једнакокраки. Исто важи и за ΔSMC. Како је $\sphericalangle SMC = 2\sphericalangle A$, $\sphericalangle SMD = 2\sphericalangle B$. то је $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$.

936. $\Delta ABD \sim \Delta CC_1B$, где је C_1 подножје висине и C. Одавде је $\frac{BD}{\frac{1}{2}AB} = \frac{AB}{BC}$.

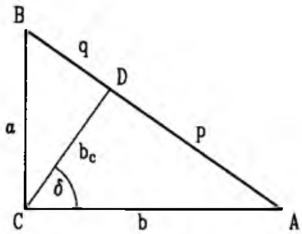
937. *Први начин*: $\Delta AOB_1 \sim \Delta BOA_1$. *Други начин*: Четвороугао ABA_1B_1 је тетивни, па је потенција тачке O: $AO \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$.

938. $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ABD = \sphericalangle BCA$ (в.сл.), па је $\Delta ABD \sim \Delta ACB$ и $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$, тј. $AB^2 = AC \cdot AD$.

939. 1° Како је троугао код темена A заједнички за троуглове ABC и ACD, то је троугао ABC сличан троуглу DAC, одакле је $c : b = b : p$, односно $b = \sqrt{cp}$. На исти начин се доказује да је $a = \sqrt{cq}$.



Сл. уз зад. 938



Сл. уз зад. 939 и 940

2° Како је угао δ једнак углу код темена B као углови са нормалним крацима то је $\Delta ADC \sim \Delta BDC$, па имамо пропорцију $h_c : p = q : h_c$, односно $h_c = \sqrt{pq}$.

940. Из $b : p = c : b$, тј. $b^2 = pc$, и $a : q = c : a$, тј. $a^2 = qc$ следи да је $a^2 + b^2 = qc + pc = (p+q)c = c \cdot c = c^2$ (в.сл.).

941. Ако је a основица, h висина и b крак троугла, из $b^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$ и $b = \sqrt{ah}$ имамо $a - 2h = 0$, тј. $a = 2h$.

944. $CD = 3$. **945.** $16 : 25$.

946. а) Ставити $y^2 = bc$, конструисати y, па применити Питагорину теорму.

947. Ставити: а) $x^2 = 4 \cdot 2$; б) $x^2 = 5 \cdot 3$. **948.** $\Delta ABC \sim \Delta BCD$, па је $\frac{CB}{AB} = \frac{CD}{CB}$.

949. Из $t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$ и $t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ сабирањем налазимо $t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2)$, па је $c^2 = \frac{4}{5}(t_a^2 + t_b^2)$ и $c = 2\sqrt{13}$.

950. $24cm$.

951. Нека је x одстојање центра круга од дуже тетиве. По Питагориној теореми је: $r^2 = x^2 + 12^2$ и $r^2 = (x+3)^2 + 9^2$, одакле је $x^2 + 144 = x^2 + 6x + 90$, па је $x = 9cm$ и $r = 15cm$.

952. $40cm$.

953. Како је $\sphericalangle DBC$ прав, то је CD пречник круга. Како је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 120°$, то је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 60°$. Четвороугао $ABCD$ је једнакокраки трапез, па је $AD = BC = 1cm$ и $DB = \sqrt{3}cm, CD = 2cm$.

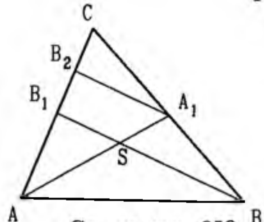
954. Нека су $BD = 40t$ и $BE = 41t$ висина, односно тежишна дуж које одговарају хипотенузи AC правоуглог троугла ABC ($AB < BC$). Тада је и $AE = CE = 41t$, а како је је из троугла BDE : $DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = 9t$, то је $AD = AE - DE = 32t$. Из сличности троуглова ABD и BDC сада налазимо $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{32t}{40t} = \frac{4}{5}$.

955. Неопходно је да крак c буде $c = \frac{a+b}{2}$. Добија се $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.

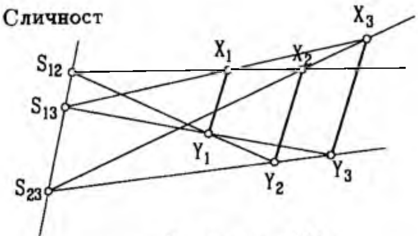
956. б) $BC = \sqrt{20}cm$, $r = \frac{4}{\sqrt{5}}cm$.

957. $AD = 25cm$, $DC = 7cm$. **958.** $15cm$ и $7cm$.

959. Нека права која садржи тачку A_1, а паралелна је са BB_1 сече страницу AC у тачки B_2, (в.сл). Тада је $\frac{B_1B_2}{B_1C} = \frac{BA_1}{A_1C} = \beta$, па следи $\alpha = \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB_1}{B_1B_2 + B_2C} = \frac{AB_1}{B_1B_2 + \frac{1}{\beta}B_1B_2} = \frac{\beta}{\beta+1}\frac{AB_1}{B_1B_2}$. Користећи ову једнакост и Талесову теорему добијамо: $\frac{AS}{SA_1} = \frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta}$.



Сл. уз зад. 959

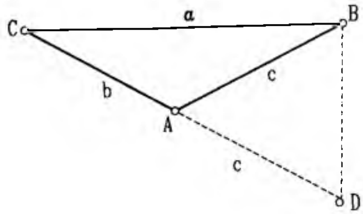


Сл. уз зад. 961

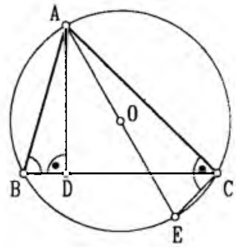
960. Применити претходни задатак.

961. а) Нека су X_1 и Y_1 произвољне тачке фигуре F_1, X_2 и Y_2 њихове слике у F_2 при хомотетији $\mathcal{H}_{S_{23},k_{23}}$. Тада важи $\overrightarrow{X_2Y_2} = k_{12}\overrightarrow{X_1Y_1}$ и $\overrightarrow{X_3Y_3} = k_{23}\overrightarrow{X_2Y_2}$, одакле следи $\overrightarrow{X_3Y_3} = k_{12}k_{23}\overrightarrow{X_1Y_1}$. Према томе, фигура F_3 хомотетична је фигури F_1 са коефицијентом хомотетије $k_{12}k_{23}$.
б) Тачка S_{23} се при хомотетији $\mathcal{H}_{S_{23},k_{23}}$ пресликава у себе. Нека је S тачка која се при хомотетији $\mathcal{H}_{S_{12},k_{12}}$ пресликава у S_{23}. Тада су колинеарне тачке S_{12}, S, S_{23} и S_{31}, S_{23}, S, па следи да тачке S_{12}, S_{23} и S_{31} припадају једној правој, (в.сл.).

962. На продужетку странице AC одредимо тачку D тако да $AD = c$ (в.сл.).Из $a^2 = b^2+bc$ следи $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b+c}{a}$, па је $\Delta BAC \sim \Delta BCD$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA + \sphericalangle DBA$.



Сл. уз зад. 962



Сл. уз зад. 964

963. Нека је AD симетрала угла код темена A. Из сличности троуглова ΔACD и ΔABC следи $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{BC}{AC}$, а одавде $a = \sqrt{b^2+bc}$.

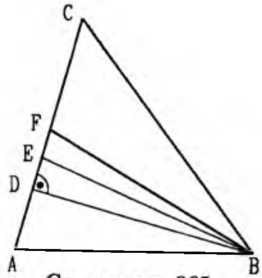
964. Нека је D подножје висине из A и AE пречник описаног круга (в.сл.). Тада је $\Delta ABD \sim \Delta ACE$ и одавде $AB : AD = AE : EC$, тј. $cb = 2rh_a$.

965. Нека су BD, BE и BF, ређом, висина, симетрала и медијана (в.сл.) у ΔABC. Претпоставимо да је $AB < BC$. Тада је $\sphericalangle A > \sphericalangle C$, $\sphericalangle CBD > \sphericalangle ABD$, одакле је $\sphericalangle CBD > \frac{1}{2}(\sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD) = \frac{1}{2}\sphericalangle B$, тј. $\sphericalangle CBD > \sphericalangle CBE$. Дакле, тачка E је између D и C. Даље имамо $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AB}{BC} < 1$, $AE < EC$, одакле је $AE < \frac{1}{2}(AE+EC) = \frac{1}{2}AC$, па је $AE < AF$ и F је између E и C. Дакле, важи $D - E - F$.

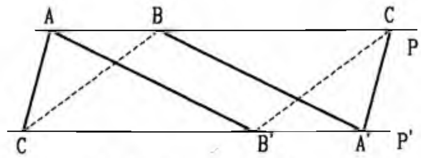
966. 1° Ако је $p \| p'$ из $AB' \| BA'$ следи $AB = B'A'$ и на исти начин $AC = C'A'$. Одакле одузимањем (или сабирањем) добијамо $CB = B'C'$ и одавде $BC' \| CB'$.

2° Ако се праве p и p' секу у тачки S (в.сл.), из $AB' \| BA'$ следи $\dfrac{SA}{SB} = \dfrac{SB'}{SA'}$ и слично $\dfrac{SC}{CA} = \dfrac{SA'}{SC'}$. Множењем ових релација добијамо $\dfrac{SC}{SB} = \dfrac{SB'}{SC'}$, одакле $BC' \| CB'$.

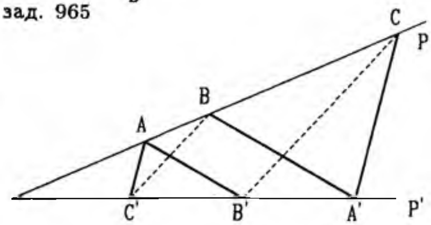
968. Конструишимо најпре једнакостранични троугао $A_1'B_1'C_1'$ такав да $C_1' \in AB$, $B_1' \in AC$ и $\sphericalangle(C_1'B_1'A) = 45°$. Тада је A_1 пресек правих AA_1' и BC, $AB_1 \| A_1'B_1'$ и $B_1C_1 \| B_1'C_1'$. (в.сл.)



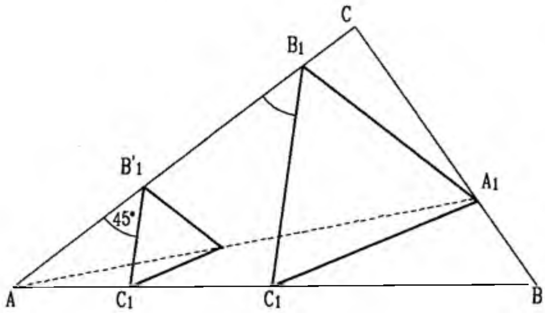
Сл. уз зад. 965



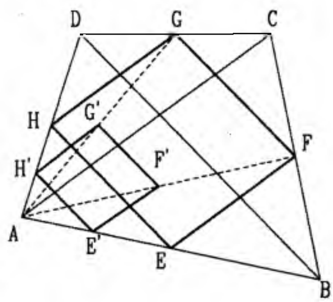
Сл. уз зад. 966(1°)



Сл. уз зад. 966(2°)



Сл. уз зад. 968



Сл. уз зад. 969

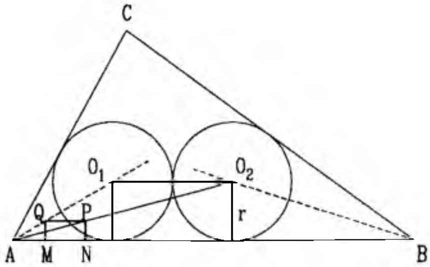
969. Нека је $E'F'G'H'$ ромб чије су странице паралелне дијагоналама датог четвороугла, а темена E' и H' су на страницама AB, односно AD (в.сл.). AF' сече BC у F, а AG' сече CD у G. $EFGH$ је тражени ромб.

970. Средиште O_1 мора се налазити на симетрали $\sphericalangle A$, а средиште O_2 на симетрали $\sphericalangle B$. (в.сл.) Ако са R означимо дужине полупречника круговас, биће $O_1O_2 = 2R$. Конструишемо правоугаоник $MNPQ$ тако да његова страница MN припада основици AB троугла ABC и да је $MN = 2MQ$, где Q припада симетрали $\sphericalangle A$. Права AP сече симетралу $\sphericalangle B$ у тачки O_2, а тачку O_1 налазимо на симетрали $\sphericalangle A$ тако да је $O_1O_2 \| AB$.

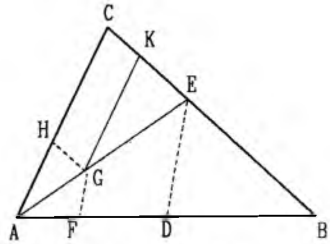
972. Нека је F-произвољна тачка на AB, а K тачка на CB тако да је $CK = AF$ и G тачка тако да је $FG = FA$ и $KG \| AC$. Четвороугао $AFGH$ где је $GH \| KC$ и $HEAC$ је хомотетичан траженом четвороуглу са центром хомотетије у тачки A, па је E пресек правих AG и BC. Задатак увек има јединствено решење.

973. $\dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$.

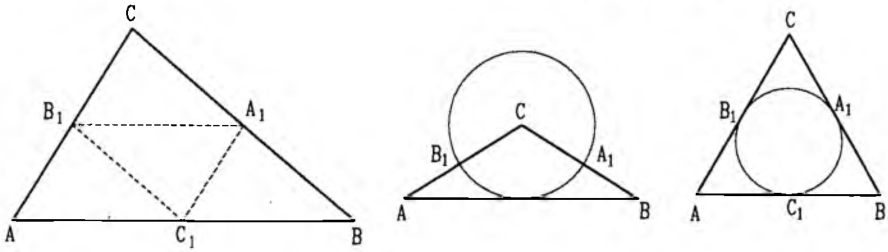
974. Круг који полови странице троугла требало би да пролази кроз тачке A_1, B_1 и C_1- средишта страница троугла ABC (в.сл.). Како су ови троуглови слични са коефицијентом сличности $\frac{1}{2}$ то су њихови полупречници описаних кругова у односу $1 : 2$.



Сл. уз зад. 970



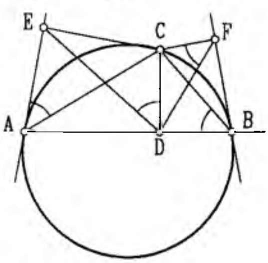
Сл. уз зад. 972



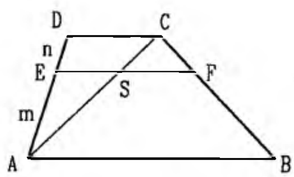
Сл. уз зад. 974

Иначе, услов задатке је могуће остварити на два начина (в.сл.).

975. Тачке D и E припадају кругу над пречником AC, а тачке D и F припадају кругу над пречником BC. Према томе, четвороуглови $ADCE$ и $BDFC$ су тетивни, (в.сл.). Имајући то у виду и користећи једнакост угла између тангенте и тетиве и периферијског угла над тетивом, добијамо $\sphericalangle EDC = \sphericalangle EAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle DFC$, тј. $\sphericalangle EDC = \sphericalangle DFC$. Аналогно доказујемо $\sphericalangle FDC = \sphericalangle DEC$. Из једнакости ових углова следи да је $\Delta EDC \sim \Delta DFC$, па даље добијамо $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CF}{CD}$, тј. $CD^2 = CE \cdot CF$.



Сл. уз зад. 975



Сл. уз зад. 977

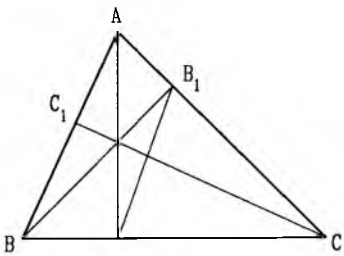
976. Нека је O пресек дијагонала трапеза. Из сличности троуглова OAB и OCD добијамо $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{a}{b}$.

977. Нека је S пресек дужи AC и EF, (в.сл.). Тада је $\dfrac{ES}{DC} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{m}{m+n}$, $\dfrac{SF}{AB} = \dfrac{CS}{AC} = \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{n}{m+n}$, одакле добијамо $EF = ES + SF = \dfrac{m}{m+n}CD + \dfrac{n}{m+n}AB = \dfrac{mCD + nAB}{m+n}$.

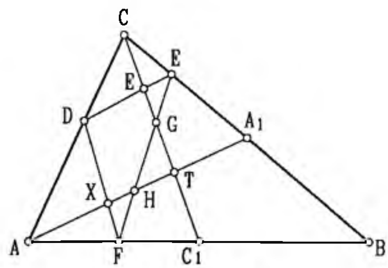
978. Нека је O_1 центар круга k_1, а O_2 центар круга k_2. Троугао SA_2B_2 хомотетичан је троуглу SA_1B_1 у односу на центар хомотетије S и са коефицијентом $-\frac{OS_2}{OS_1}$. Зато важи $\Delta SA_1B_1 \sim \Delta SA_2B_2$.

979. Нека су h, u, v висине које редом одговарају страницама a, b, c једног троугла, а h_1, u_1, v_1 висине које одговарају страницама a_1, b_1, c_1 другог троугла, при чему важи $\frac{h}{h_1} = \frac{u}{u_1} = \frac{v}{v_1} = k$. Како је $ah = bu = cv$ и $a_1h_1 = b_1u_1 = c_1v_1$ то добијамо $\frac{ah}{a_1h_1} = \frac{bu}{b_1u_1} = \frac{cv}{c_1v_1} = \frac{a}{a_1}k = \frac{b}{b_1}k = \frac{c}{c_1}k$. Из последње једнакости добијамо $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, а одатле следи да су дати троуглови слични.

980. Четвороугао ABA_1B_1 је тетиван, јер тачке A_1 и B_1 припадају кругу над пречником AB. Зато је и $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle BB_1A_1$, (в.сл.). Даље добијамо $\sphericalangle ABC = 90° - \sphericalangle BAA_1 = 90° - \sphericalangle BB_1A_1 = \sphericalangle A_1B_1C$, а како троуглови ABC и A_1B_1C имају заједнички угао код темена C, то су ти троуглови слични.



Сл. уз зад. 980



Сл. уз зад. 983

981. Из претходног задатка добијамо и $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ и $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1$. Према томе $\Delta A_1B_1C \sim \Delta A_1BC_1$, а одатле следи $\frac{A_1B_1}{A_1B} = \frac{A_1C}{A_1C_1}$, тј. $A_1B_1 \cdot A_1C_1 = A_1B \cdot A_1C$.

982. Искористити релацију $RM^2 = AM \cdot MB$ и сличност троуглова AMQ и BMP, из које се добија $AM \cdot MB = MP \cdot MQ$.

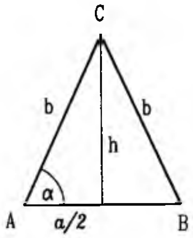
983. Нека је T тежиште троугла ABC, X пресек правих AA_1 и DF, Y пресек правих CC_1 и DE, а G и H пресеци дужи EF са тежишним дужима CC_1 и AA_1, редом, (в.сл.). Тада важи (зашто?) $\frac{EG}{EF} = \frac{EY}{ED} = \frac{A_1T}{AA_1} = \frac{1}{3}$. Према томе, $EG = \frac{1}{3}EF$ и аналогно $FH = \frac{1}{3}EF$.

984. а) Нека је $r_1 > r_2$ и M подножје нормале из тачке O_2 на дуж O_1T_1. Тада је четвороугао $O_2T_2T_1M$ правоугаоник, па је $T_1T_2 = MO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1M^2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$. б) Нека је T додирна тачка круга k и праве T_1T_2. На основу резултата под а) је $T_1T = 2\sqrt{r_1x}, T_2T = 2\sqrt{r_2x}$ и $T_1T_2 = \sqrt{r_1r_2}$. Из $2\sqrt{r_1x} + 2\sqrt{r_2x} = 2\sqrt{r_1r_2}$ следи да је $x = \frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$.

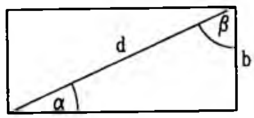
985. Нека су E и F подножја нормала из темена D и C на основицу AB. По Питагориној теореми је $AC^2 - AF^2 = CB^2 - FB^2$ и $DB^2 - EB^2 = AD^2 - AE^2$. Сабирањем левих и десних страна ових релација добијамо $AC^2 + BD^2 = AD^2 + CB^2 + AF^2 - FB^2 + EB^2 - AE^2 = AD^2 + CB^2 + AB(AF - FB + EB - AE) = AD^2 + CB^2 + AB \cdot 2EF = AD^2 + CB^2 + AB \cdot 2CD$.

Глава VIII – Тригонометрија правоуглог троугла

987. Како је $AD = \frac{a}{2} = 5$ и $h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, односно $h = 12$, биће (в.сл.) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$; $\sec\alpha = \frac{13}{5}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{b}{h}$, тј. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{12}$.



Сл. уз зад. 987



Сл. уз зад. 988

988. а) $d = 10cm, \sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ (в.сл.);

б) $\sin\beta = \frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{3}{5}, \mathrm{tg}\beta = \frac{4}{3}, \mathrm{ctg}\beta = \frac{3}{4}$.

989. $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ $\sin\beta = \frac{4}{5}, \cos\beta = \frac{3}{5}, \mathrm{tg}\beta = \frac{4}{3}, \mathrm{ctg}\beta = \frac{3}{4}$.

990. Из $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, односно $\frac{1}{2} = \frac{16}{c}$ следи да је $c = 32cm$, а из $b^2 = 32^2 - 16^2, b = 16\sqrt{3}cm$.

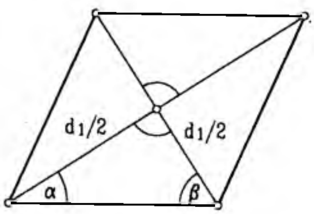
991. Друга катета је $\sqrt{x^2 - x}$. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{x}}{x}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}, \mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{x-1}$.

992. Како је $d = a\sqrt{2}$ и $D = a\sqrt{3}$ (в.сл.) следи да је: $\sin\alpha = \frac{a}{D} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos\alpha = \frac{d}{D} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{d}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

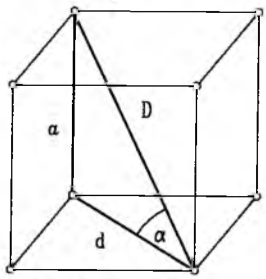
993. Како је $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ и $H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, то је (в.сл.):

а) $\sin\alpha = \frac{H}{h} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{\frac{1}{3}h} = 2\sqrt{2}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\frac{1}{3}h}{H} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

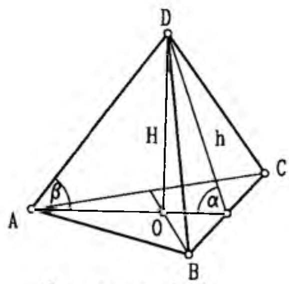
б) $\sin\beta = \frac{H}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \cos\beta = \frac{\frac{2}{3}h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \mathrm{tg}\beta = \frac{H}{\frac{2}{3}h} = \sqrt{2}, \mathrm{ctg}\beta = \frac{\frac{2}{3}h}{H} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Сл. уз зад. 989



Сл. уз зад. 992



Сл. уз зад. 993

994. а) $\cos 62°$; б) $\sin 41°$; в) $\mathrm{ctg}28°$; г) $\mathrm{tg}27°$;

д) $\cos(40° - \alpha) = \cos(90° - (50° + \alpha)) = \sin(50° + \alpha)$;

ђ) $\sin(30° - \alpha) = \sin(90° - (60° + \alpha)) = \cos(60° + \alpha)$;

е) $\mathrm{tg}(45° + \alpha) = \mathrm{tg}(90° - (45° - \alpha)) = \mathrm{ctg}(45° - \alpha), \alpha < 45°$;

ж) $\mathrm{ctg}(30° + \alpha) = \mathrm{ctg}(90° - (60° - \alpha)) = \mathrm{tg}(60° - \alpha), \alpha < 60°$;

з) $\mathrm{ctg}(10^\circ + \alpha), \alpha < 80^\circ$.

995. а) $\sin 47^\circ 30' = \sin(90^\circ - 42^\circ 30') = \cos 42^\circ 30'$;
б) $\cos(30^\circ - \alpha) = \cos(90^\circ - (60^\circ + \alpha) = \sin 60^\circ + \alpha)$.

996. а) $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\frac{5\pi}{12}$; б) $\cos\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14}\right) = \sin\frac{5\pi}{14}$;
в) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{10} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{ctg}\frac{2\pi}{5}$; г) $\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{15} = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{30}\right) = \mathrm{tg}\frac{11\pi}{30}$.

997. а) Како је $\beta = 90^\circ - \alpha$, тада је $\frac{\cos\beta}{\alpha} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin\alpha}\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1$;
б) $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\beta} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha)} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} = 1$;
в) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\beta + \cos\beta} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = 1$.

998. а) Како је $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, то је: $\frac{1 - \sin\alpha}{\cos\beta} + \frac{1 + \cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} + \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\alpha} =$
$\frac{1 - \sin\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1 + \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$; б) -2.

999. а) Како је $\sin 42^\circ = \sin(90^\circ - 48^\circ) = \cos 48^\circ$, то је:

$$\frac{2\cos 48^\circ + \sin 42^\circ}{3\cos 48^\circ} = \frac{2\cos 48^\circ + \cos 48^\circ}{3\cos 48^\circ} = 1;$$

б) 2.

1000. а) Како је $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$, то је: $\frac{\sin\frac{3\pi}{8} + 3\cos\frac{\pi}{8}}{5\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}} = \frac{\cos\frac{\pi}{8} + 3\cos\frac{\pi}{8}}{5\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}} =$
$\frac{4\cos\frac{\pi}{8}}{6\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{2}{3}$; б) 1.

1001. а) $\sin\frac{\alpha + \beta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$.

1002. а) 3; б) $2\sqrt{3}$. **1003.** а) 0; б) 0. **1004.** а) 1; б) 0.

1005. а) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1006.** а) 3; б) $\frac{2}{3}$; в) 0; г) 8.

1007. а) $\cos\alpha = \frac{9}{41}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{40}{9}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{9}{40}$; б) $\sin\alpha = \frac{221}{229}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{221}{60}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{60}{221}$;
в) $\sin\alpha = \frac{7}{25}, \cos\alpha = \frac{24}{25}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{24}{7}$; г) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}, \cos\alpha = \frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{m}$.

1008. Како је $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, из $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}$ добија се $\cos^2\alpha = \frac{16}{9}\sin^2\alpha$ (1). Из (1) у $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ биће $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ или $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$. Но, како је α оштар угао то је $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

1009. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{k\sqrt{n^2 - k^2}}{n}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{n\sqrt{n^2 - k^2}}{k(n^2 - k^2)}$.

1010. 7.

1011. Из $\sin^2 15° = 1 - \cos^2 15°$ добијамо да је $\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1012. $\cos 22°30' = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **1013.** $\frac{9}{5\sqrt{5}}$.

1014. а) $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x} = \frac{tg^3 x + 1}{tg^3 x - 1} = \frac{2^3+1}{2^3-1} = \frac{9}{7}$; б) $\frac{21}{40}$.

1015. $A = \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + 2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{3\sin x \cos x + \cos^2 x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x)} = \frac{3\sin^2 x + \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{3\sin x\cos x - 4\sin^2 x - 3\cos^2 x} =$
$\frac{3\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg} x + 2}{3\mathrm{tg} x - 4\mathrm{tg}^2 x - 3} = \frac{3\cdot 3^2 + 3 + 2}{3\cdot 3 - 4\cdot 3^2 - 3} = -\frac{16}{15}$.

1016. а) $\frac{6}{19}$; б) $\frac{3}{4}$.

1017. а) Из $\frac{\sin z}{\cos z} = 2$ и $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ добија се: $\sin^2 z = \frac{4}{5}$ и $\cos^2 z = \frac{1}{5}$. Следи да је $\sin^4 z + \cos^4 z = \frac{17}{25}$. б) $\frac{13}{25}$; в) $\frac{25}{21}$.

1018. Када се бројилац и именилац поделе са $\cos\alpha \neq 0$ добија се $\frac{3\mathrm{tg}\alpha - 1}{\mathrm{tg}\alpha + 2} = 1$, одакле је $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{2}$.

1019. Ако се једнакост $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = p$ квадрира, добија се $\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{ctg}\alpha + 2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha = p^2$, одакле је $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = p^2 - 2$.

1020. Ако се $\sin x + \cos x = s$ квадрира, онда је $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = s^2$ (1). После замене $\sin x \cos x = p$ у (1) добија се $1 + 2p = s^2$, односно $p = \frac{1}{2}(s^2 - 1)$.

1021. $A = 3\cos^4 x - 2\cos^6 x - (1-\cos^2 x)^2(2 - 2\cos^2 x - 3) = 3\cos^4 x - 2\cos^6 x - (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(-1 - 2\cos^2 x) = 3\cos^4 x - 2\cos^6 x + 1 + 2\cos^2 x - 2\cos^2 x - 4\cos^4 x + \cos^4 x + 2\cos^6 x = 1$.

1022. Из дате једнакости $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ следи $\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\beta$, односно $\sin^2\alpha = \cos^2\beta$. Како је $\sin\alpha > 0$ и $\cos\beta > 0$, то је $\sin\alpha = \cos\beta$. Даље је $\sin\alpha = \sin(90° - \beta)$. Дакле $\alpha + \beta = 90°$, тј. троугао је правоугли.

1023. $\frac{2 - \mathrm{cosec}^2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha - 1} - \mathrm{cosec}^2\alpha + 1 = \frac{1 - (\mathrm{cosec}^2\alpha - 1)}{\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} - 1} - (\mathrm{cosec}^2\alpha - 1) = \frac{1 - \mathrm{ctg}^2\alpha}{\frac{1 - \mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}} - \mathrm{ctg}^2\alpha =$
$\frac{\mathrm{ctg}\alpha(1 - \mathrm{ctg}\alpha)(1 + \mathrm{ctg}\alpha)}{1 - \mathrm{ctg}\alpha} - \mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{ctg}\alpha$.

1024. Користећи основне идентитете, дати израз може се написати као:
$(1 - \sin^2\alpha)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \cos^2\alpha\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha$.

1025. $\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

1026. $\frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin\alpha + \sin^2\alpha}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha}{(1 + \sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$ за $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

1027. Вредност израза је једнака 3, осим за $x = \frac{\pi}{4}$.

1028. *Први начин*:
$\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}\cdot\frac{1 + \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1 + \cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$.
Други начин:

$$\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot(1-\cos\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Трећи начин:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\Leftrightarrow\sin^2\alpha=(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Leftrightarrow sin^2\alpha=sin^2\alpha.$$

1029. $\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)$
$\Leftrightarrow\left(\frac{1+1+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\Leftrightarrow\frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\Leftrightarrow\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right).$

1030. $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha.$

1031. $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=3\sin^4\alpha+3\cos^4\alpha-2\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-2\cos^4\alpha=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1.$

1032. $\sin^3\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha)=\sin^3\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\cos^3\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$
$\sin^3\alpha\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos^3\alpha\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$

1033. $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\mathrm{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha(\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha)}=\frac{2\sin\alpha}{\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$
$2\mathrm{tg}^2\alpha.$

1034. Ако се други сабирак идентитета на левој страни трансформише добија се: $\frac{\cos^2x(\sin x+\cos x)}{\sin^2x-\cos^2x}=\frac{\cos^2x}{\sin x-\cos x}$. Даље је: $\frac{\sin^2x}{\sin x-\cos x}-\frac{\cos^2x}{\sin x-\cos x}=\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin x-\cos x}=\sin x+\cos x.$

1035. *Први начин*:

$$\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{1}{\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot\frac{1+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=$$

$$\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^3\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(\sin\alpha-1-\sin\alpha)+1}{\cos^3\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}.$$

Други начин:

Ако се идентитет напише у облику $\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{1}{\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}$ и изврши трансформација леве стране, добија се: $\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\cos^3\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}{\cos^3\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

После трансформације десне стране, добија се:

$$\frac{1}{\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\cdot\frac{1+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}.$$

Како се после трансформација леве и десне стране добија иста вредност, идентитет је доказан.

1036. Трансформишемо леву страну:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Трансформишемо десну страну:

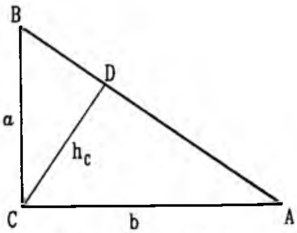
$$(1+\cos\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha) = (1+\cos\alpha)\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = (1+\cos\alpha)\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{(1+\cos\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Дата идентичност је тачна, јер су лева и десна страна једнаке.

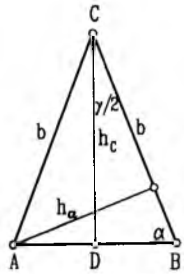
1047. а) $a = c\sin\alpha = 327\cdot 0,485 \approx 158,6cm$ и $b = c\sin 61° = 327\cdot 0,875 \approx 286$. $\beta = 90° - \alpha = 61°$. б) $a = 39,33cm$, $b = 59,72cm$, $\beta = 56°38'$.

1048. Из правоуглог троугла ADC (в.сл.) добијамо: $\frac{h_c}{b} = \sin\alpha$, односно $b = \frac{h_c}{\sin\alpha} = \frac{5,4}{\sin 27°36'} = \frac{5,4}{0,463} \approx 11,66cm$. Даље је $a = 6,1cm, c = 13,16cm$ и $\beta = 62°24'$.

1049. $c = 254,7cm$.



Сл. уз зад. 1048



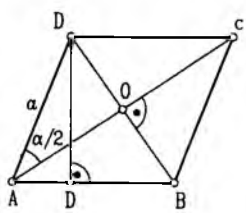
Сл. уз зад. 1050

1050. Из $\triangle ABD$ (в.сл.): $\frac{\gamma}{2} = 90° - \alpha, a = \frac{c}{2\cos\alpha}, h_c = \frac{c}{2}\mathrm{tg}\alpha$. Површина $\triangle ABC$ је $P = \frac{c\cdot h_c}{2} = \frac{c^2\mathrm{tg}\alpha}{4}$. Када се замене дате вредности, добија се: $\gamma = 110°, a = 56,16cm$, $h_c = 32,2cm$ и $P = 1481,2cm^2$.

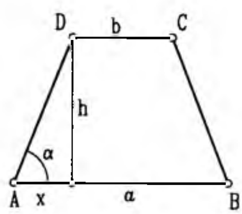
1051. $c = 23,97cm$, $h_c = 12,34cm$, $h_a = 17,19cm$, $\gamma = 89cm$. $P = 147,86cm^2$. (в.сл.).

1052. $a = 3000,27cm$, $h_a = 1869,1cm$, $h_c = 2832,29cm$, $\alpha = 70°44'$ и $P = 2803967,1cm^2$ (в.сл.).

1053. Нека је $AC = d_1, BD = d_2, ED = h$ (в.сл.). Из правоуглог троугла AOD следи: $d_1 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$ и $d_2 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$ (1). Из правоуглог троугла AED је $h = a\sin\alpha$ (2). Заменом датих вредности за a и α у (1) и (2) добија се: $d_1 = 24\cdot\cos 19° \approx 24\cdot 0,9456 \approx 22,69$, $d_2 = 24\cdot\sin 19° \approx 24\cdot 0,32557 \approx 7,81$ и $h = 12\sin 38° \approx 12\cdot 0,61566 \approx 7,39$.



Сл. уз зад. 1053

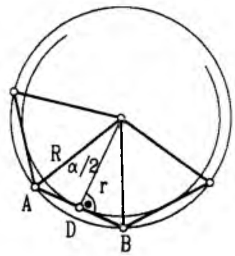


Сл. уз зад. 1055

1054. Из $P = ah$ следи $h = \frac{P}{a}$. Из $\sin\alpha = \frac{h}{a}$ добија се $a = \sqrt{\frac{P}{\sin\alpha}}$.

1055. Како је $x = \frac{a-b}{2}$ (в.сл.), из $c = \frac{x}{\cos\alpha}$ ($\triangle AED$) добија се да је $c = 4cm$. Даље је $h = c\sin\alpha = 2\sqrt{3}\,cm$ и $P = \frac{a+b}{2}\cdot h = 16\sqrt{3}cm^2$.

1056. Сваки правилан n-угао може се поделити на n подударних једнакокраких троуглова са углом $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$ на врху (в.сл.). Из правоуглог троугла BOD где је $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{180^\circ}{n}$, хипотенуза $R = OB$ и катете $r = OD$, $\dfrac{a}{2} = BD$ следи: $\dfrac{a}{2} = R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$, или $a = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$. Површина троугла је $P_\Delta = \dfrac{a}{2}\cdot h = R^2\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\dfrac{180^\circ}{n}$, а површина целог многоугла од n страница биће $P = n\cdot\dfrac{R^2}{2}\cdot 2\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\dfrac{180^\circ}{n}$.



Сл. уз зад. 1056, 1057, 1058

1057. За елементе правоуглог троугла ADO (в.сл.) важи: $\dfrac{a}{2} = r\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$, или $a = 2r\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$. Површина троугла ABO је $P_\Delta = \dfrac{a}{2}\cdot r = r^2\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$, а површина целог многоугла од n страница $P = n\cdot r^2\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$.

1058. Из ΔBOD (в.сл.) следи да је $r = \dfrac{a}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$. Површина троугла $P_\Delta = \dfrac{a}{2}\cdot r = \dfrac{a^2}{4}\mathrm{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$. Површина целог многоугла је $P = n\dfrac{a^2}{4}\mathrm{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$. Из ΔBOD (в.сл.) је $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{2R}$, односно $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$.

1059. $\alpha = 45^\circ$, $R = 1,96\,cm$, $r = 1,81\,cm$, $P = 10,86\,cm^2$.

1060. $\alpha = 24^\circ$, $a = 0,81\,cm$, $r = 1,91\,cm$, $P = 12,2\,cm^2$.

ТЕСТОВИ

У овом делу Збирке дато је девет тестова који садржином одговарају одређеним поглављима из градива првог разреда. Предвиђено је да се за сваки тачно урађени задатак добија 10 поена, тако да један тест максимално доноси 100 поена. Погрешно урађен задатак доноси -1 (минус један) поен. Време за израду једног теста је 90 минута. Одличним се могу сматратим резултати 80 – 100 поена, врло добрим 65 – 80, добрим 50 – 65 и довољним 35 – 50 поена.

Када се професори одлуче за састављање другачије варијанте тестова, у којима би задаци били различите тежине, могуће је број бодова по задатку одредити по некој другој шеми – на пример као што је то рађено за неке тестове у Математичкој гимназији: 1. и 2. задатак по 6 поена, 3–5. задатак по 8 поена, 6–8. задатак по 12 поена и 9. и 10. задатак по 14 поена (збир је 100 поена), с тим што је овде за погрешно решење одузимано по 25% поена по задатку.

Тест 1. ЛОГИКА, СКУПОВИ, КОМБИНАТОРИКА

Тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A, B, C, D, E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**.

1. Која од следећих таблица одговара формули $F = p \Rightarrow \neg q$?

A)

p	q	F
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

B)

p	q	F
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

C)

p	q	F
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

D)

p	q	F
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

E)

p	q	F
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

N).

2. У скупу природних бројева посматрају се реченице:

(I) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 10)$,

(II) $(\forall x)(\exists y)(x < y)$,

(III) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$.

Тачне су:

A) све; **B)** само I; **C)** само III; **D)** само II и III; **E)** само I и III; **N)**.

3. Исказ $p \wedge \neg q \wedge r$ има вредност $\top$ у случају:

A) $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$, $\tau(r) = \top$; **B)** $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$, $\tau(r) = \perp$;

C) $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \perp$, $\tau(r) = \top$; **D)** $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \perp$, $\tau(r) = \perp$;

E) $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \top$, $\tau(r) = \perp$; **N)**.

4. Која од својстава рефлексивност, симетрија, антисиметрија, транзитивност има релација $\perp$ (нормалност правих у равни)?

A) ниједно; **B)** само симетрију;

C) само симетрију и транзитивност;

D) само рефлексивност и симетрију;

E) само рефлексивност и антисиметрију; **N)**.

5. Ако је $f(x) = \frac{x}{3} - 1$, тада је $f(3x+1)$ једнако:

A) $x + \frac{1}{3}$; **B)** $x - \frac{2}{3}$; **C)** $x - 1$; **D)** $3x + 1$; **E)** x; **N)**.

6. Дати су скупови $A = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge -4 < x \leq 5\}$ и $B = \{x | x \in \mathbf{N} \wedge 2 < x \leq 7\}$. Колико елемената има скуп $A \cap B$?

A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** више од 3; **N)**.

7. Дате су реченице:

(I) Да би број био већи од 5, довољно је да буде већи од 10.

(II) Да би број био мањи од 3, неопходно је да буде мањи од 1.

(III) Да би број био већи од 100, неопходно је и довољно да буде већи од 90.

Тачне су:

A) све; **B)** ниједна; **C)** само I; **D)** само II; **E)** само I и III; **N)**.

8. Ако је $f(x) = x - 1$ и $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ тада је $(f \circ g)(x)$ једнако:

A) $\frac{1-x}{x}$; **B)** $\frac{1}{x-1}$; **C)** x; **D)** $\frac{1}{x}$; **E)** $\frac{x-1}{x}$; **N)**.

9. Колико има различитих троцифрених бројева од цифара 0, 2, 4, 6, 8?

A) 125; **B)** 90; **C)** 120; **D)** 14; **E)** 100; **N)**.

10. Вредност израза $\frac{100!}{99!} - \frac{99!}{98!}$ једнака је:

A) 100; **B)** 99; **C)** 9900; **D)** 98; **E)** 1; **N)**.

Тест 2. ЛОГИКА, СКУПОВИ, КОМБИНАТОРИКА

1. Исказ $p \vee \neg q \vee \neg r$ има вредност $\perp$ у случају (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $\tau(p) = \top,\ \tau(q) = \top,\ \tau(r) = \top$; **B)** $\tau(p) = \perp,\ \tau(q) = \top,\ \tau(r) = \top$;
C) $\tau(p) = \perp,\ \tau(q) = \top,\ \tau(r) = \perp$; **D)** $\tau(p) = \perp,\ \tau(q) = \perp,\ \tau(r) = \top$;
E) $\tau(p) = \perp,\ \tau(q) = \perp,\ \tau(r) = \perp$; **N)**.

2. Која од следећих реченица има значење: "Сви природни бројеви су позитивни" (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $(\forall x)(x \in \mathbf{N}) \Rightarrow (\forall x)(x > 0)$; **B)** $(\exists x)(x \in \mathbf{N} \wedge x > 0)$;
C) $(\forall x)(x \in \mathbf{N}) \wedge (\exists x)(x > 0)$; **D)** $\neg(\exists x)(x \in \mathbf{N} \wedge x > 0)$;
E) $(\forall x)(x \in \mathbf{N} \Rightarrow x > 0)$.

3. Дати су скупови $A = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ и $B = \{2,4,5,6,8\}$. Колико елемената има скуп S такав да је $A \cap S = \{3,4\}$ и $B \cup S = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (заокружити слово испред тачног одговора):

A) 2; **B)** 3; **C)** 4; **D)** 5; **E)** 6.

4. У скупу $\{0,1,2,3,4\}$ дефинисана је релација $x\,\rho\,y \Leftrightarrow x + y = 4$. Која од својстава рефлексивност, симетричност, антисиметричност, транзитивност има релација ρ на овом скупу (заокружити слово испред тачног одговора):

A) ниједно; **B)** само симетричност;
C) само антисиметричност; **D)** рефлексивност и симетричност;
E) сва четири својства.

5. Ако је $f(2x-1) = (x-1)^2$, тада је $f(3)$ једнако (заокружити слово испред тачног одговора):

A) 1; **B)** 3; **C)** 4; **D)** 9; **E)** 0.

6. Ако је $f(x) = 5x - 1$, тада је инверзна функција функције f (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $f^{-1}(x) = \frac{1}{5x-1}$; **B)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - 1$; **C)** $f^{-1}(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{5}$;

D) $f^{-1}(x) = \frac{x}{5} + \frac{1}{5}$; **E)** ни један од одговора A), B), C) , D).

7. Нека су p и q искази. Које од датих формула су таутологије (заокружити слово испред сваке такве формуле):

1) $\neg p \land p$; **2)** $\neg p \lor p$; **3)** $p \land q \Leftrightarrow q \land p$;
4) $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$; **5)** $\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$.

8. Које од следећих реченица су тачне, а које нетачне (иза тачне реченице написати знак $\top$, а иза нетачне знак $\perp$):

(1) Да би број био дељив са 2 довољно је да буде дељив са 4 ......

(2) Да би број био дељив са 4 довољно је да буде дељив са 2 ......

(3) Да би број био дељив са 2 неопходно је да буде дељив са 4 ......

(4) Да би број био дељив са 4 неопходно је да буде дељив са 2 ......

(5) Да би број био дељив са 2 неопходно је и довољно да буде дељив са 4 ......

9. Светла на семафору могу бити: црвено, жуто или зелено. Ако у једној улици има 7 семафора, на колико разних начина у сваком тренутку могу бити распоређена светла на семафорима (заокружити слово испред тачног одговора):

A) 21; **B)** 10; **C)** 3^7; **D)** 7^3; **E)** $3 \cdot 7^3$.

10. Колико има четвороцифрених природних бројева код којих је производ цифара једнак 6 (заокружити слово испред тачног одговора)?

A) 16; **B)** 12; **C)** 4; **D)** 10; **E)** 18.

Тест 3. РАЗМЕРЕ, ПРОПОРЦИЈЕ, ПРОЦЕНТИ

Тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A, B, C, D, E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**.

1. Износ од 180 динара треба поделити на три дела у односу 4 : 5 : 9. Најмањи од добијених делова је (у динарима):

A) 30; **B)** 36; **C)** 40; **D)** 45; **E)** 50; **N)**.

2. Седам цеви напуне базен за 35 часова. За које ће време пет цеви напунити базен (претпоставља се да цеви једнаком брзином пуне базен)?

A) 25; **B)** 49; **C)** 54; **D)** 35; **E)** 50; **N)**.

3. На плану израђеном у размери 1 : 1000 њива је преставњена правоугаоником дужине $13,25cm$ и ширине $4cm$. Површина њиве (у хектарима) је:

A) 0,53; **B)** 5,3; **C)** 53; **D)** 0,053; **E)** 530; **N)**.

4. Ако 5 ученика за 5 минута поједе 5 сладоледа, колико ће сладоледа појести 25 ученика за 25 минута?

A) 25; **B)** 75; **C)** 5; **D)** 100; **E)** 125; **N)**.

5. У једној продавници 8 јабука се продаје за 10 динара, а у другој 10 јабука за 15 динара. За колико процената је цена у другој продавници виша него у првој?

A) $2\frac{1}{2}\%$; **B)** 5%; **C)** 12%; **D)** 20%; **E)** 25%; **N)**.

6. Ако продавачица сладоледа сваког сата прода 20 сладоледа и на сваком сладоледу заради 40 пара, колико часова треба да ради да би зарадила 80 динара?

A) 160; **B)** 64; **C)** 100; **D)** 10; **E)** 16; **N)**.

7. Колико литара воде треба додати у 12 литара 25%-ног раствора амонијака да би се проценат амонијака у раствору смањио на 20%?

A) $3l$; **B)** $2,5l$; **C)** $2,25l$; **D)** $2l$; **E)** $1,5l$; **N)**.

8. На колику суму нарасте улог од 100 динара са 20% годишње камате после две године?

A) 112 дин.; **B)** 160 дин.; **C)** 172 дин.; **D)** 144 дин.; **E)** 120 дин.; **N)**.

9. На складишту има кафе по цени од 120 динара по килограму и од 92 динара по килограму. Треба направити мешавину која ће се продавати по 112 динара по килограму. Ове две врсте треба помешати у односу:

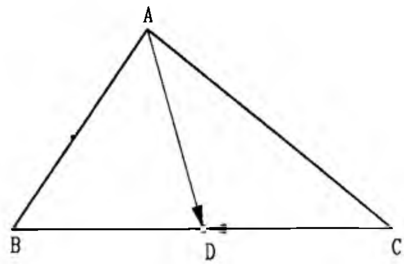
A) 5 : 4; **B)** 3 : 2; **C)** 5 : 2; **D)** 4 : 3; **E)** 5 : 3; **N)**.

10. Један посао 12 радника би завршило за 8 дана. За колико дана ће бити завршен остатак после ако након 2 дана рада 3 радника напусте посао?

A) 7 дана; **B)** 8 дана; **C)** 9 дана; **D)** 9,5 дана; **E)** 10,5 дана; **N)**.

Тест 4. ВЕКТОРИ, ТРОУГАО, ЧЕТВОРОУГАО, МНОГОУГАО, КРУГ

1. Тачка D је средиште дужи BC (на слици). Којем од наведених вектора је једнак збир $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$ (заокружити слово испред тачног одговора)?



Сл. уз зад. 1, Тест 4.

A) $\overrightarrow{BA}$; B) $\overrightarrow{AC}$; C) $\overrightarrow{AB}$; D) $\overrightarrow{CA}$; E) $\overrightarrow{DB}$;

2. Центар описаног круга троугла је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) пресек висина троугла; B) пресек тежишних дужи;
C) пресек симетрала углова; D) пресек симетрала страница;
E) средиште најдуже странице троугла.

3. Један унутрашњи угао троугла је α. Туп угао троугла под којим се секу симетрале друга два унутрашња угла тог троугла је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $90° - \frac{\alpha}{2}$; B) $90° + \frac{\alpha}{2}$; C) 2α; D) $90° + \alpha$; E) $180° - \alpha$.

4. Унутрашњи угао једног правилног многоугла је $150°$. Колико дијагонала има тај многоугао? (заокружити слово испред тачног одговора)?

A) 54; B) 44; C) 60; D) 65; E) 77.

5. Нека су M, P, Q, R редом средишта страница AB, BC, CD и DA трапеза $ABCD$ ($AB \| CD$). Дати су искази:

(I) $\overrightarrow{RP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$;

(II) $\overrightarrow{RP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$;

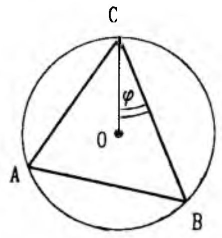
(III) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CP}$;

(IV) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PC}$.

Тачни су (заокружити слово испред тачног одговора):

A) само I и III; B) само II и IV; C) само I и IV;
D) само II и III; E) само IV.

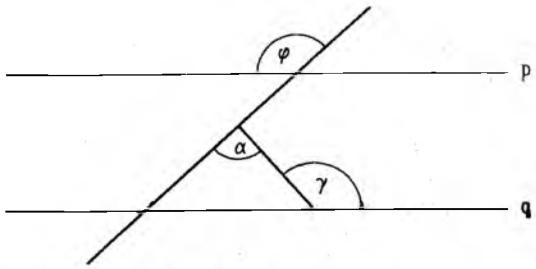
6. Тачка O је центар круга на слици. Ако је $\sphericalangle BCO = \varphi$, тада је $\sphericalangle BAC$ једнак (заокружити слово испред тачног одговора):



Сл. уз зад. 6, Тест 4.

A) $90° + \varphi$; **B)** $90° + 2\varphi$; **C)** $90° - 2\varphi$; **D)** $180° - 2\varphi$; **E)** $90° - \varphi$.

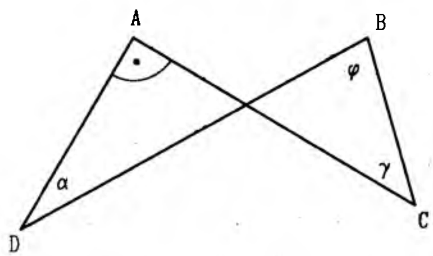
7. На слици су праве p и q паралелне. Тада је угао α једнак (заокружити слово испред тачног одговора):



Сл. уз зад. 7, Тест 4.

A) $180° - \gamma$; **B)** $\beta - \gamma$; **C)** $180° - \beta$; **D)** $90° + \beta - \gamma$; **E)** $\beta + \gamma - 180°$.

8. На слици је угао код темена A прав. Тада је збир углова β и γ једнак (заокружити слово испред тачног одговора):



Сл. уз зад. 8, Тест 4.

A) 2α; **B)** $90° + \alpha$; **C)** $180° - \alpha$; **D)** $180° - 2\alpha$; **E)** $90° - \alpha$.

9. Око круга је описан једнакокраки трапез чији је оштар угао $30°$. Ако је дужина средње линије трапеза $4cm$, дужина полупречника уписаног круга трапеза је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $1cm$; **B)** $2cm$; **C)** $1,5cm$; **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}cm$; **E)** $\sqrt{3}cm$.

10. Угао при врху једнакокраког троугла ABC ($AB = AC$) је $40°$. Дуж AB је пречник круга k са центром O. Круг k сече страницу BC у тачки D, а страницу AC у тачки E. Величина угла DOE је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $35°$; **B)** $20°$; **C)** $30°$; **D)** $40°$; **E)** $45°$.

Тест 5. ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

1. Праве p и q секу се у тачки O. Дати су искази:

(I) Постоји осна симетрија која праву p пресликава у праву q.

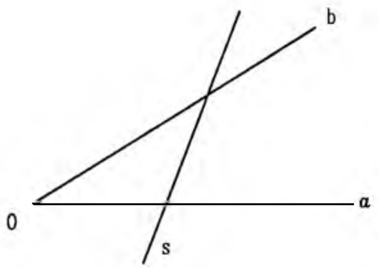
(II) Постоји транслација која праву q пресликава у праву p.

(III) Постоји ротација која праву p пресликава у праву q.

Тачни су (заокружити слово испред тачног одговора):

A) само III; **B)** сви искази; **C)** само I и III; **D)** ниједан; **E)** само II и III.

2. Дати угао aOb пресликати осном симетријом у односу на дату праву s:



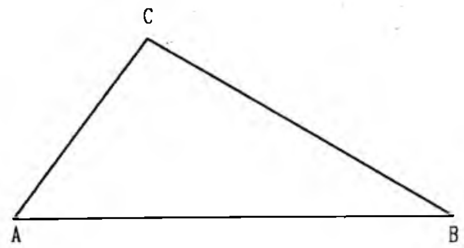
Сл. уз зад. 2, Тест 5.

3. Извршити ротацију датог троугла ABC око тачке A за $60°$.

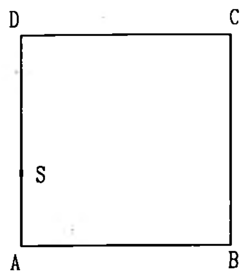
4. Дати квадрат $ABCD$ пресликати централном симетријом у односу на дату тачку S.

5. Који од следећих четвороуглова има тачно једну осу симетрије (заокружити слово испред тачног одговора):

A) трапез; **B)** квадрат; **C)** правоугаоник; **D)** ромб; **E)** делтоид.



Сл. уз зад. 3, Тест 5.

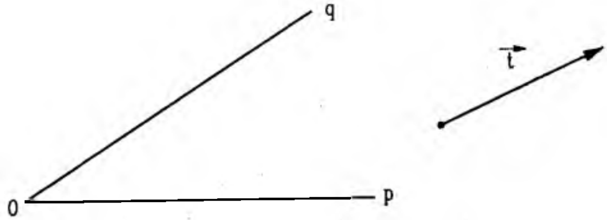


Сл. уз зад. 4, Тест 5.

6. Дати су четвороуглови: квадрат, ромб, правоугаоник, једнакокраки трапез и делтоид. Колико од ових пет четвоуглова су централно симетрични (заокружити слово испред тачног одговора):

A) 1 ; **B)** 2 ; **C)** 3 ; **D)** 4 ; **E)** 5 ;

7. Транслацијом за дати вектор $\overrightarrow{t}$ пресликати дати угао pOq.



Сл. уз зад. 7, Тест 5.

8. Нека су a и b две различите праве. Посматрамо исказе:

(I) Централна симетрија која пресликава праву a у праву b постоји ако су праве паралелне.

(II) Централна симетрија која пресликава праву a у праву b постоји ако се праве секу.

(III) Централна симетрија која пресликава праву a у праву b постоји ако су праве мимоилазне.

Тачни су искази (заокружити слово испред тачног одговора):

A) само I; **B)** само I и II; **C)** само I и III; **D)** сви; **E)** ниједан.

9. Инверзна изометријска трансформација транслацији $T_{\vec{v}}$ је ......

10. Дате су тачке X, P, Q. Уцртати тачке X_1, X_2 и X_3 такве да је X_1 симетрична тачки X у односу на PQ, X_2 се добија транслацијом тачке X за $\overrightarrow{PQ}$ и X_3 се добија ротацијом тачке X око тачке P за угао XPQ.

Сл. уз зад. 10, Тест 5.

Тест 6. ПОЛИНОМИ. ТРАНСФОРМАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ ИЗРАЗА

Тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A, B, C, D, E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**.

1. Ако је $ab \neq 0$ и $a^2 \neq b^2$, израз $\dfrac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$ једнак је изразу:

A) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab(a-b)}$; **B)** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$; **C)** $\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab(b-a)}$; **D)** $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$; **E)** $\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab(b-a)}$; **N)**.

2. Нека је $a=\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}$ и $c=b^2$ $(b\neq 0)$. Тада је вредност израза a једнака:

A) $b+b^2$; **B)** $\frac{b+b}{b^2}$; **C)** $\frac{1}{b}+b$; **D)** $b^2+\frac{1}{b}$; **E)** $1+\frac{b}{2b}$; **N)**.

3. Ако је $ab \neq 0$ и $a \neq b$, израз

$$\left[\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-4\right)\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right)\right] : \frac{a^3-b^3}{ab}$$

једнак је изразу:

A) $\frac{a^2+ab+b^2}{ab}$; **B)** $\frac{1}{ab}$; **C)** $a-b$; **D)** $\frac{a-b}{ab}$; **E)** $\frac{a+b}{ab}$; **N)**.

4. Остатак дељења полинома $3x^5-2x^4+12x^3-12x+55$ биномом $x+1$ је:

A) 56; **B)** 50; **C)** 55; **D)** 54; **E)** 60; **N)**.

5. Вредност израза $\left(3-\frac{(a+b)^2}{ab}\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right) : \frac{a^3+b^3}{ab}$ за $a=\frac{3}{10}$, $b=\frac{6}{5}$ је:

A) $-\frac{5}{2}$; **B)** $\frac{25}{6}$; **C)** $\frac{3}{5}$; **D)** $-\frac{9}{10}$; **E)** $\frac{117}{100}$; **N)**.

6. За све $x \in \mathbf{R}$ разломак $\frac{1+x^2+x^4}{1+x+x^2}$ једнак је:

A) $1+x-x^2$; **B)** 1; **C)** $\frac{1+x^2}{1+x}$; **D)** $1+x+x^2$; **E)** $1-x+x^2$; **N)**.

7. Најмањи заједнички садржалац (НЗС) полинома $(x+y)^2$, $x-y$ и x^2-y^2 је:

A) $(x+y)^2(x-y)(x^2-y^2)$; **B)** $(x+y)^2(x-y)^2$; **C)** $(x+y)(x-y)$;
D) $(x+y)^2(x-y)^2(x^2-y^2)^2$; **E)** $(x+y)^2(x-y)^2(x^2-y^2)$; **N)**.

8. Израз $\frac{2+2x}{6-3x} : \frac{x^2-1}{4-x^2}$ $(x \neq \pm 2,\ x \neq \pm 1)$ је једнак изразу:

A) $\frac{2(x+2)}{3(x-1)}$; **B)** $\frac{2(2-x)}{(x-1)(x+1)}$; **C)** $\frac{2(x-2)}{3(x+1)}$; **D)** $\frac{2(x+2)}{3(x+1)}$; **E)** $\frac{2(x+1)^2}{3(x-2)^2}$; **N)**.

9. За колико је квадрат разлике израза x и y мањи од збира квадрата тих истих израза?

A) $-2xy$; **B)** $2xy$; **C)** $4xy$; **D)** $-4xy$; **E)** 0; **N)**.

10. Израз $\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2+\left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2$ једнак је изразу:

A) $2a^2$; **B)** $\frac{a^2}{2}$; **C)** $a^2+|a|^2$; **D)** a^2; **E)** $\frac{a^2+|a|^2}{4}$; **N)**.

Тест 7. ЈЕДНАЧИНЕ, НЕЈЕДНАЧИНЕ, СИСТЕМИ ЈЕДНАЧИНА

Тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A, B, C, D, E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**.

1. Скуп решења неједначине $3(x+2) > 3(x+1)+2$ је:

A) $\emptyset$; **B)** $[0,+\infty)$; **C)** $\mathbf{R}$; **D)** $(0,1)$;
E) Ниједан од одговора A, B, C, D, није тачан; **N)**.

2. Једначина $\dfrac{x+a}{a+b} + \dfrac{x+b}{a-b} = \dfrac{2(ax+b^2)}{a^2-b^2} + 1$, $a, b \in R$, $|a| \neq |b|$:

A) Има јединствено решење које не зависи од a.

B) Има јединствено решење које не зависи од b.

C) Нема решења.

D) Има бесконачно много решења.

E) Има јединствено решење $x_1 = \dfrac{b^3}{a^3+b^3}$. **N)**.

3. Ако је $4 - a < \dfrac{b+3}{2}$, која од следећих реченица мора бити тачна?

A) $a > 2b$; **B)** $a > 4(b+3)$; **C)** $a < \dfrac{11-b}{2}$; **D)** $a < \dfrac{b-2}{2}$; **E)** $a > \dfrac{5-b}{2}$; **N)**.

4. Ако је $5x + 2y = 25$ и $42 - 4x = 6y$, тада је $3y + 2x$ једнако:

A) 16; **B)** 18; **C)** 21; **D)** 24; **E)** 28; **N)**.

5. Ако је (x, y, z) решење система једначина $x+y+z=0$, $2x+y+3z=-5$, $-x+2y-z=6$, тада је $x-y+z$ једнако:

A) -2; **B)** -4; **C)** 0; **D)** 4; **E)** 5; **N)**.

6. Дата је једначина $(k^2-1)x + k - 1 = 0$ $(k \in \mathbf{R})$ и искази:

(I) За $k=1$ дата једначина има бесконачно много решења.

(II) За $k=-1$ дата једначина има више од једног решења.

(III) За $k \notin \{-1, 1\}$ дата једначина има јединствено решење.

Тачни су

A) само I и III; **B)** само I и II; **C)** сви искази; **E)** само II; **E)** само I. **N)**.

7. Производ свих решења једначине $\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x-2+|x-2|} = 0$ је:

A) 24; **B)** 2; **C)** 6; **D)** 12; **E)** 0; **N)**.

8. Скуп решења неједначине $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$ је:

A) $(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$; **B)** $(0,+\infty)$;

C) $(-\infty,-1)\cap(\frac{1}{2},+\infty)$; **D)** $(\frac{1}{2},+\infty)$;

E) Ниједан од одговора A, B, C, D, није тачан; **N)**.

9. Дат је систем једначина $cx+y=1$, $x+cy=c$, $(c\in\mathbf{R})$. За колико различитих вредности реалног параметра c дати систем је неодређен (има бесконачно много решења)?

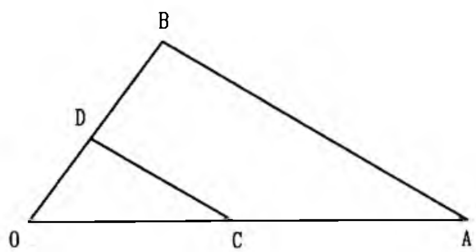
A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** 4; **N)**.

10. Колико различитих реалних решења има једначина $1+\frac{x-1}{x+2}+\frac{1}{x}=\frac{3x+2}{x(x+2)}$?

A) 0; **B)** 1; **C)** 2; **D)** 3; **E)** више од 3; **N)**.

Тест 8. ХОМОТЕТИЈА, СЛИЧНОСТ

1. У троуглу OAB на слици је $CD\|AB$. Ако је $OD=4cm$, $DB=6cm$, $CD=8cm$ и $CA=12cm$, израчунати дужине дужи OC и AB.
Одговор: $OC=\ldots\ldots\ cm$, $AB=\ldots\ldots\ cm$.



Сл. уз зад. 1, Тест 8.

2. Обим једног троугла једнак је $32cm$, а дужине његових страница се односе као $5:5:6$. Површина овог троугла је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $48cm^2$; **B)** $50cm^2$; **C)** $34\sqrt{2}cm^2$; **D)** $45cm^2$; **E)** $28\sqrt{3}cm^2$.

3. Које од следећих реченица су тачне, а које нетачне (иза тачне реченице написати знак $\top$, а иза нетачне знак $\perp$):

(1) Свака два једнакостранична троугла су слични ......

(2) Свака два једнакокрака троугла су слична ако је један угао једног троугла једнак неком углу другог троугла ......

(3) Свака два једнакокрако-правоугла троугла су слични ......

(4) Површине сличних троуглова односе се као њихови обими ......

(5) Два правоугла троугла су слични ако су им катете пропорционалне ......

4. Катете правоуглог троугла су дужине $15cm$ и $20cm$. Дужина висине која одговара хипотенузи у том троуглу је: (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $10\sqrt{2}cm$; **B)** $17,5cm$; **C)** $12cm$; **D)** $5\sqrt{5}cm$; **E)** $10cm$.

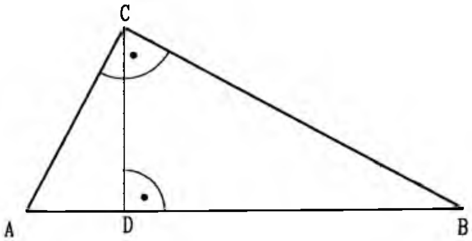
5. Нека су AA_1 и BB_1 висине троугла ABC и H ортоцентар тог троугла. Ако је $HA_1 = 3cm$, $HB_1 = 2cm$ и $HB = 5cm$, дужина AH једнака је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $\frac{10}{3}cm$; **B)** $7,5cm$; **C)** $1,2cm$; **D)** $5cm$; **E)** $4cm$.

6. Тетиве MN и PQ круга k секу се у тачки S. Ако је $NS = 4cm$, $MS = 6cm$ и $QS = 3cm$, дужина PS је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $8cm$; **B)** $\frac{9}{2}cm$; **C)** $2cm$; **D)** $10cm$; **E)** $4cm$.

7. Израчунати дужину дужи BD на слици, ако је $AC = 5cm$ и $CD = 3cm$. Одговор: $BD = \ldots\ldots\ cm$.



Сл. уз зад. 7, Тест 8.

8. Дат је квадрат $ABCD$ странице $8cm$. Круг k садржи темена A и D и додирује страницу BC. Полупречник круга k има дужину (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $5cm$; **B)** $4\sqrt{2}cm$; **C)** $4cm$; **D)** $5\sqrt{2}cm$; **E)** $6cm$.

9. У унутрашњости угла xOy дата је тачка M која је на одстојању $2cm$ од крака Ox и $3cm$ од крака Oy. Ако је $\sphericalangle xOy = 60°$, дужина дужи OM је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $3,5cm$; **B)** $4cm$; **C)** $\frac{6}{\sqrt{3}}cm$; **D)** $2\sqrt{2}cm$; **E)** $5cm$.

10. У правоугли трапез чије су паралелне странице дужине $6cm$ и $2cm$ уписан је круг. Дужина полупречника тог круга је (заокружити слово испред тачног одговора):

A) $3cm$; **B)** $\sqrt{2}cm$; **C)** $\sqrt{3}cm$; **D)** $1,5cm$; **E)** $2cm$.

Тест 9. ТРИГОНОМЕТРИЈА

Тест се састоји из 10 задатака. У сваком задатку понуђено је пет одговора (**A, B, C, D, E**) од којих је само један тачан. У случају да ученик не уме да реши задатак треба да заокружи слово **N**.

1. Катете једног правоуглог троугла имају дужине $6cm$ и $8cm$. Ако је α један оштар угао тог троугла, збир $\cos\alpha + \sin\alpha$ има вредност:

A) 1; **B)** $\frac{9}{5}$; **C)** $\frac{7}{5}$; **D)** $\frac{25}{12}$; **E)** $\frac{5}{7}$; **N)**.

2. Ако је $\operatorname{tg}x = 4$ $(0° < x < 90°)$, вредност израза $\frac{3\sin^2 x - 2\cos^2 x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$ је:

A) $\frac{10}{11}$; **B)** $\frac{46}{35}$; **C)** 0; **D)** 4; **E)** $\frac{10}{7}$; **N)**.

3. Вредност израза $3\operatorname{ctg}60° - \operatorname{tg}60°$ је:

A) $3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$; **B)** 2; **C)** $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$; **D)** 0; **E)** 1; **N)**.

4. Ако за неки оштар угао α важи $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, тада је $\operatorname{tg}\alpha$ једнако:

A) $\frac{40}{9}$; **B)** $\frac{32}{41}$; **C)** 1; **D)** $\frac{9}{41}$; **E)** $\frac{9}{40}$; **N)**.

5. Нека је x оштар угао $(x \neq 45°)$. Израз $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ је једнак изразу:

A) $\frac{1-\sin x\cos x}{\sin x - \cos x}$; **B)** $\frac{1+\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}$; **C)** $\frac{1-\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}$;
D) $\frac{1+\sin x\cos x}{\sin x - \cos x}$; **E)** $\frac{1}{\sin x - \cos x}$; **N)**.

6. Основица ромба има дужину a, а оштар угао тог ромба је α. Висина овог ромба има дужину:

A) $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha$; **B)** $a\cos\alpha$; **C)** $a\operatorname{tg}\alpha$; **D)** $a\sin\alpha$; **E)** $a\operatorname{ctg}\alpha$; **N)**.

7. Ако је $a = \sin 32°$ и $b = \cos 58°$, тада је:

A) $a = b$; **B)** $a^2 + b^2 = 1$; **C)** $a + b = 1$; **D)** $a^2 - b^2 = 1$; **E)** $a - b = 1$; **N)**.

8. У једнакокраком троуглу крак је два пута дужи од основице. Ако је α угао између кракова, онда је $\sin\frac{\alpha}{2}$ једнако:

A) $\frac{1}{4}$; **B)** $\frac{1}{2}$; **C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **D)** $\frac{\sqrt{15}}{4}$; **E)** $\frac{\sqrt{15}}{5}$; **N)**.

9. Израз $\frac{\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)} + \frac{1+\sin\alpha}{2\cos\alpha}$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ једнак је изразу:

A) $\frac{1}{\sin\alpha}$; **B)** $\frac{1}{\cos\alpha}$; **C)** $\frac{2}{\sin\alpha}$; **D)** $\frac{2}{\cos\alpha}$; **E)** $\operatorname{tg}\alpha$; **N)**.

10. Ако је $\operatorname{tg}\alpha = 2$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$, вредност $\cos\alpha$ једнака је:

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **B)** $\frac{1}{2}$; **C)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$; **D)** $\frac{2}{3}$; **E)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$; **N)**.

РЕШЕЊА ТЕСТОВА

Тест 1

1. C. **2.** D. **3.** C. **4.** B. **5.** B. **6.** D. **7.** C. **8.** A. **9.** E. **10.** E.

Тест 2

1. B. **2.** E. **3.** C. **4.** B. **5.** A. **6.** D. **7.** 2, 3, 5. **8.** ⊤, ⊥, ⊥, ⊤, ⊥. **9.** C. **10.** A.

Тест 3

1. C. **2.** B. **3.** A. **4.** E. **5.** D. **6.** D. **7.** A. **8.** D. **9.** C. **10.** B.

Тест 4

1. C. **2.** D. **3.** B. **4.** A. **5.** B. **6.** E. **7.** E. **8.** B. **9.** A. **10.** D.

Тест 5

1. C. **5.** E. **6.** C. **8.** A. **9.** $T_{-\vec{\vartheta}}$.

Тест 6

1. E. **2.** C. **3.** D. **4.** B. **5.** A. **6.** E. **7.** C. **8.** A. **9.** B. **10.** D.

Тест 7

1. C. **2.** D. **3.** E. **4.** C. **5.** B. **6.** A. **7.** D. **8.** A. **9.** C. **10.** B.

Тест 8

1. $OC = 8cm$, $AB = 12cm$. **2.** A. **3.** ⊤, ⊥, ⊤, ⊥, ⊤. **4.** C. **5.** A. **6.** A. **7.** $BD = 2,25cm$. **8.** A. **9.** B. **10.** D.

Тест 9

1. C. **2.** B. **3.** D. **4.** E. **5.** A. **6.** D. **7.** A. **8.** A. **9.** B. **10.** C.

Ivana ♡
David ♡

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Ивановић, Р. Петровић: *Неједнакости. О неким метричким особинама тетраедра.* Материјали за младе математичаре, св. 13, Друштво математичара Србије, Београд, 1981.

[2] З. Каделбург, С. Крстић, П. Младеновић: *Математика 1, збирка решених задатака за I разред гимназија и техничких школа.* Друштво математичара Србије, Београд, 1991.

[3] З. Каделбург, П. Младеновић: *Савезна такмичења из математике.* Материјали за младе математичаре, св. 23, Друштво математичара Србије, Београд, 1987.

[4] Л. Милин, Ж. Ивановић: *Збирка решених задатака из тригонометрије,* „Научна књига", Београд, 1984.

[5] П. Миличић, В. Стојановић, З. Каделбург, Б. Боричић: *Математика за* I *разред гимназија и средњих стручних школа.* Завод за издавање уџбеника Нови Сад и „Научна књига", Београд, 1991.

[6] В. Мићић, З. Каделбург: *Увод у теорију бројева.* Материјали за младе математичаре, св. 15, II издање, Друштво математичара Србије, Београд, 1989.

[7] П. Младеновић: *Комбинаторика.* Материјали за младе математичаре, св. 22, Друштво математичара Србије, Београд, 1989.

[8] П. Младеновић, С. Огњановић: *Припремни задаци за математичка такмичења за ученике средњих школа.* Материјали за младе математичаре, св. 17, Друштво математичара Србије, Београд, 1987.

[9] Ж. Адамар: *Элементарная геометрия.* Т.I, Москва, 1957.

[10] В. Г. Болтянский, И. В. Сидоров, М. И. Шабунин: *Лекции и задачи по элементарной математике.* „Наука", Москва, 1971.

[11] С. Е. Ляпин, И. В. Баранова, Е. Г. Борчугова: *Сборник задач по элементарной алгебре, изд. 2-ое.* „Просвещение", Москва, 1973.

[12] П. С. Моденов: *Сборник задач по специальному курсу элементарной математики* „Советская наука", Москва 1957.