ZADACI

I GLAVA

1. LOGIKA I SKUPOVI

1.1. Osnovne logičke operacije

Primedbe:

1°. Simboli: -4, 0, 2, 5, $\sqrt{3}$, π, e,... nazivaju se **konstante**.

2°. Simboli: $a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, A, B, C$,... koji služe kao zajedničke oznake za više objekata nekog skupa (skupova), nazivaju se **promenljive**.

3°. Znaci: $+$, $\cdot$, $:$, $-$, $\cup$, $\cap$, ... koriste se za označavanje operacija i nazivaju se **operacijski znaci**.

4°. Znaci: $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\cong$, $\perp$, $\|$,... koriste se za označavanje relacija i nazivaju se **relacijski znaci**.

5°. Znaci: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ su znaci osnovnih **logičkih operacija**.

6°. Konstante i promenljive povezane znacima operacija nazivaju se **izrazi**. Primeri: $2x$, $5m+3$, $y-7$, $a+8b$, itd.

7°. Rečenica zapisana matematičkim simbolima naziva se **formula**.

8°. Rečenica koja ima samo jednu istinitosnu vrednost $\top$ (tačno) ili $\perp$ (netačno), naziva se **iskaz**.

9°. Iskazne konstante $\perp$ i $\top$, iskazna slova a, b, s, r, P, Q,... i svi složeni iskazi nastali pomoću znakova logičkih operacija $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ nazivaju se **iskazne formule**.
Iskazna formula koja je tačna za sve vrednosti iskaznih slova naziva se **tautologija**.

10°. Oznaka za reči: "svaki", "ma koji", "bilo koji" naziva se **univerzalni kvantifikator** u oznaci $\forall$ (obrnuto slovo A).
Oznaka za reči postoji: "najmanje jedan", "makar jedan", "neki", "bar jedan" naziva se **egzistencijalni kvantifikator** u oznaci $\exists$ (obrnuto slovo E).

1. Koje su od sledećih rečenica iskazi: a) $1+1=2$; b) broj 16 je neparan broj; c) paran broj se može napisati u obliku $2\,n$, gde je n prirodan broj; d) rešenje jednačine $3\,x=18$ je prirodan broj; e) $(a-b)^2 \geq 0$, za svako racionalno a i b; f) $ab>0$ ako su a i b istog znaka; g) $a^2>0$ ako je a negativan broj; h) $-a^2<0$ ako je a negativan broj?

2. Koji od znakova $<, >, =, \leq, \geq$ možemo staviti umesto zvezdice (*) da bi se dobio tačan iskaz: a) $4*4$; b) $3*5$; c) $6*5$?

3. Dat je polinom $p(x)=x^2-6\,x+8 \leq 0$. Odrediti istinitost iskaza: $p(1)$; $p(2)$; $p(3)$; $p(4)$; $p(5)$.

4. Odrediti sve parove $(x,\,y)$ za koje je formula $2\,x+y=10$ istinit iskaz $(x,\,y \in N)$.

5. Dat je skup $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Odrediti vrednost istinitosti sledećih tvrđenja: a) $(\exists\, x \in A)(x+3=10)$; b) $(\forall\, x \in A)(x+3<10)$; c) $(\forall\, x \in A)(x+1>x)$; d) $(\exists\, x \in A)(x+3<5)$; e) $(\exists\, x \in A)(x^2=x)$.

6. Odrediti istinitosnu vrednost iskaza: a) $(1<2)\wedge(2<5)$; b) $(1<3)\wedge(-3<-2)$; c) $\neg(1<2)\wedge(\pi<9)$.

7. Date su formule: a) $5x-4=11\ (x \in N)$; b) $x|6\,(x \in Z)$; c) $x<7 \wedge x \in N$; d) $x>3 \wedge x<5 \wedge x \in N$; e) $(x<1 \vee x>5) \wedge x \in Z$. Rešiti date formule, odnosno naći sve vrednosti odgovarajućih promenljivih za koje je istinitosna vrednost formule tačna.

8. Rešiti date formule: a) $x \in \{1,2,3\}$; b) $x|9 \wedge x|6\ x \in Z$; c) $x^3+x<40 \wedge x \in N$; e) $x<3 \vee (x>5 \wedge x<8)$.

9. Popuniti tabelu:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tau(x>7 \vee x<4)$										
$\tau(x<9 \wedge x>5)$										
$\tau(3x<7)$										
$\tau(x^2=x\cdot x)$										

10. Dati su iskazi $p \equiv \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{10}{3}$;

$q \equiv \frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=-\frac{37}{6}$;

$r \equiv \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=7$; $s \equiv \frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

Odrediti njihovu tačnost, pa na osnovu toga odrediti istinitosnu vrednost iskaza:
a) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$; b) $(p \vee q) \vee (p \wedge s)$;
c) $((p \vee r) \wedge q) \wedge (s \wedge r)$; d) $((r \vee s) \wedge (p \vee s)) \wedge q$;
e) $(q \wedge (r \wedge (s \wedge p))) \vee ((p \wedge q) \vee (q \wedge s))$.

11. Odrediti istinitosnu vrednost iskaza:
a) $(\top \wedge ((\bot \wedge \top) \wedge (\top \wedge \top))) \wedge \bot$;
b) $(((\bot \wedge \bot) \vee (\top \wedge \bot)) \vee ((\bot \vee \bot) \wedge (\bot \vee \top)) \wedge (\top \vee \bot)$.

12. Odrediti istinitosne vrednosti iskaza:
$p \equiv \frac{3+2x}{3}-\frac{2-3x}{4}=\frac{29}{24}$ za $x=0{,}5$;
$q \equiv 3(5-y)-2(y-1)=1+3y$, za $y=2$,
pa zatim odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaza:
a) $(p \vee q) \wedge p$; b) $(p \wedge q) \vee q$.

13. Dati su iskazi:
$p \equiv (a^3-2ax+6a-1)0{,}5a^2x=0{,}5a^5x-a^4x^2+3a^3x-0{,}5a^2x$, $a, x \in Q$,
$q \equiv (a^2+10a+25)(a-5)=a^3-125$, $a \in Q$,
$r \equiv (2x-3y)(3x+3y)-(4x-5y)^2-(6x^2+17y^2)=$
$=40xy$, $x, y \in Q$.
Odrediti njihove istinitosne vrednosti, pa na osnovu toga odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaza:
a) $p \Rightarrow (q \vee r)$; b) $(p \vee q) \wedge (r \Rightarrow q)$; c) $(q \Rightarrow r) \vee p$.

14. Na osnovu istinitosnih vrednosti datih iskaza:
$p \equiv 2^3 \cdot 4^2=2^7$; $q \equiv (8^2 \cdot 4^3):(16 \cdot 64)=2^3$;
$r \equiv (27^2 \cdot 64)^2:(216^3 \cdot 36)=6$;
$s \equiv 2^3+3^3=5^3$; $t \equiv 3^3+3^4=3^7$.
Odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:
a) $((p \vee q) \Rightarrow (s \wedge t)) \Leftrightarrow r$; b) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow s) \Leftrightarrow ((s \wedge t) \vee p)$;
c) $((q \Leftrightarrow s) \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow (s \Rightarrow t)$; d) $((s \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow (t \Leftrightarrow (q \Rightarrow r))$.

15. Dati su iskazi:
a) $a \equiv ((4x^4y^3)^3 : (2x^2y)^5 = 2x^2y^3,\ x, y \in Q)$;
b) $b \equiv ((3x^4y^2)^3 : (3x^6y)^2 = 3xy^4,\ x, y \in Q)$;
c) $c \equiv ((4y^2 + 2x^2 - 3xy)(4xy - 2x^2 + 5y^2) =$
$= xy^3 + 14x^3y - 10x^2y^2 + 4x^4 + 20y^4,\ x, y \in Q)$;
d) $d \equiv (10x^2y^2(0{,}016 + 0{,}4y^2) - 2xy^2 - 0{,}4xy)^2 =$
$= 16x^2y^2,\ \ x, y \in Q$.
Odrediti njihove istinitosne vrednosti, pa na osnovu toga odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaza:
a) $(a \Rightarrow \neg c) \Leftrightarrow (\neg(\neg b \wedge c) \vee (\neg d))$;
b) $(\neg(\neg a \vee b) \Rightarrow (\neg c \Leftrightarrow d)) \wedge (a \Rightarrow \neg b)$;
c) $((b \Leftrightarrow \neg c) \Rightarrow \neg(\neg a \wedge d)) \vee (\neg d \Leftrightarrow c)$.

16. Ispitati da li je iskazna formula
$A = ((p \vee q) \wedge z) \Leftrightarrow ((p \wedge z) \vee (q \wedge z))$ tautologija?

17. Dokazati da je logička formula
$A = \neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$ tautologija.

18. Sastaviti istinitosne tablice za sledeće iskaze:
a) $(p \vee q) \vee q$; b) $(p \vee q) \vee r$; c) $p \wedge (q \wedge r)$;
d) $p \vee (q \wedge r)$; e) $p \wedge (q \vee r)$; f) $(p \wedge q) \vee r$.

19. Odrediti istinitosne vrednosti iskaza:
a) $(p \vee \neg q) \Rightarrow r$; b) $(p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg q \vee \neg r)$;
c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg r)$; d) $(p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow q$;
e) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p)$; f) $(\neg p \Leftrightarrow \neg(\neg p)) \vee (p \Rightarrow \neg p)$;
g) $(p \vee \neg r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$; h) $((\neg p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee r)$;
i) $(p \wedge \neg r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r)$.

20. Dokazati da su istiniti iskazi za sve vrednosti p i q koje pripadaju skupu $\{\top, \bot\}$: a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ (Ovaj iskaz može se uzeti za definiciju implikacije.); b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q)$. (Ovaj iskaz se može uzeti za definiciju ekvivalencije.) Svaka iskazna formula tačna za sve istinitosne vrednosti iskazanih slova koja figurišu u njoj naziva se tautologija.

21. Dokazati da su sledeće iskazne formule tautologije:
a) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ i $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (zakon asocijacije za $\vee$ i $\wedge$);
b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ i $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.
(De Morganovi obrasci);
c) $p \Rightarrow p$ (zakon refleksivnosti za implikaciju);
d) $\neg\neg p \Rightarrow p$ (zakon dvojne negacije);
e) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (zakon idenpotencije disjunkcije);

f) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (zakon idenpotencije konjunkcije);
g) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (zakon distributivnosti $\wedge$ prema $\wedge$);
h) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (zakon distributivnosti $\vee$ prema $\wedge$);
k) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow p \Rightarrow r$ (zakon tranzitivnosti implikacije);
l) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (zakon apsorpcije – gutanja – $\vee$ prema $\wedge$);
h) $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

1.2. Osnovne skupovne operacije

1°. **Skup** je osnovni pojam u matematici. Usvaja se bez definicije u logičkom smislu te reči. Često se umesto skup kaže: množina, mnoštvo, kolekcija.

2°. **Relacija članstva.** Neka je S dati skup, a p jedan objekat iz kolekcije S, tj. p je član skupa S piše se simbolički $p \in S$. Negacijom, relacija $p \in S$ postaje $p \notin S$, što znači p nije element S. Znak $\in$ potiče od italijanskog matematičara G. Peano (1850–1932), te se relacija članstva često naziva Peanova relacija.

3°. **Podskup skupa** (Relacija "biti deo od"). Ako su A i B dva skupa, pa je svaki element skupa A istovremeno i element skupa B, onda se kaže da je A deo od B ili podskup od B ili "parče" od B i piše se $A \subseteq B$ ili $B \supseteq A$. Simbilički
$A \subseteq B \overset{def}{\Leftrightarrow} \{x | x \in A \Rightarrow x \in B\}$.
Ova relacija se često naziva Kantorova relacija po velikom nemačkom matematičaru G. Cantoru (1845–1918).

4°. **Presek skupova.** Presek (zajednički deo) datih skupova je skup sastavljen od onih i samo onih elemenata koji pripadaju svim datim skupovima. Simbolički za dva skupa:
$A \cap B \overset{def}{\Leftrightarrow} \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

5°. **Unija skupova.** Pod unijom (združivanjem, spojem ili zbirom) skupova podrazumevamo skup koji je sastavljen od onih i samo onih elemenata koji pripadaju bar jednom od zadanih skupova. Simbolički za dva skupa:
$A \cup B \overset{def.}{\Leftrightarrow} \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

6°. **Razlika dva skupa.** Razlika dva skupa A i B u oznaci $A \setminus B$ je skup, čiji su elementi, samo oni elementi skupa A, koji ne pripadaju skupu B. Ova definicija simbolički:

$$A \setminus B \overset{def}{\Leftrightarrow} C = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \quad C \subseteq A.$$

7°. **Simetrična razlika.** Neka su A i B dva neprazna skupa, a $A \setminus B$ i $B \setminus A$ njihove razlike. Unija skupova $A \setminus B$ i $B \setminus A$ naziva se simetrična razlika. Simbolički:

$$A \Delta B \overset{def}{\Leftrightarrow} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

8°. **Komplement skupa.** Neka je A bilo koji podskup skupa E. Razlika skupa E i ma kog njegovog podskupa A naziva se komplement skupa A i označava se sa A', kraće

$$A' \overset{def}{\Leftrightarrow} \{x | x \in E \setminus A\}.$$

Tvrđenje da $x \in A'$ znači da $x \notin A$.

9°. **Partitivni skup.** Ako je A proizvoljan neprazan skup a $P(A)$ skup svih njegovih podskupova, onda se $P(A)$ naziva partitivni skup skupa A. Simbolički:

$$P(A) \overset{def}{\Leftrightarrow} \{X | X \subseteq A\}.$$

Podskupovi skupa A su i $\varnothing$ i skup A.

10°. **Jednakost skupova.** Ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, onda se kaže da su skupovi A i B jednaki (identični, poklapaju se). Simbolički:

$$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

11°. **Uređene dvojke.** Neka su A i B dva neprazna skupa $a \in A$ i $b \in B$ dati elementi. Kažemo da je (a, b) uređena dvojka (uređen par), ako je element "a" proglašen prvim, a element "b" drugim u tom paru. U uređenom paru (a, b) element a nazivamo prva komponenta, a b druga komponenta. Dva uredjena para su jednaka ako je tačna ekvivalencija: $(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$.

12°. **Dekartov proizvod (Kartezija).** Dekartov proizvod nepraznih skupova A i B u oznaci $A \times B$ je skup uređenih parova (x, y) pri čemu je $x \in A$ i $y \in B$. Kraće:

$$A \times B \overset{def}{\Leftrightarrow} \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}.$$

Dekartov proizvod nepraznog skupa A sa samim sobom naziva se kvadrat skupa A u oznaci $A^2 = A \times A$.

R. Dekart (1596–1650) veliki francuski matematičar i filozof, osnivač analitičke geometrije.

22. Dati su skup $S = \{0,1,2,3\}$ i relacija $x \in S$; odrediti x.

23. Dat je skup $S = \{(A, B), \perp, (1,5), (m, l, V, W)\}$; odredi card S.

24. Ako je Q skup velikih slova latinice, a R skup velikih slova ćirilice (štampanih), odrediti presek $Q \cap R$.

25. Dat je skup $P = \{0,1,2,...., 9\}$. a) Odrediti skupove A i B tako da su njihovi elementi ujedno i elementi skupa P i da je $A = \{x | x \geq 3\}$, a $B = \{x | x \leq 8\}$; b) odrediti skupove: $A \cap B$ i $B \setminus A$.

26. Dati su skupovi $A = \{x | x$ je ceo broj $\}$ i $B = \{x | x > 0\}$. Odrediti $A \cap B$.

27. Odrediti koja su od navedenih tvrđenja tačna a koja netačna: a) $\varnothing = \{\varnothing\}$; b) $\varnothing \in \varnothing$; c) $0 \in \varnothing$; d) $0 = \varnothing$.

28. Dati su skupovi $A = \{x | x$ se sadrži u $12\}$, $B = \{x | x$ se sadrži u $20\}$, $C = \{x | x$ se sadrži u $32\}$. Odrediti skupove: a) $A \setminus (B \cup C)$; b) $A \cup (B \cap C)$; c) $C \cup (A \cap B)$; d) $(A \cap B) \setminus C$; e) $A \setminus (B \setminus C)$.

29. Dat je skup $P = \{x | x = 2m + 3 \wedge x = 5m - 3\}$. a) Odrediti realan parametar m tako da skup P ne bude prazan, pa za tako navedenu vrednost parametra m odrediti elemente skupa P; b) za koje će vrednosti parametra m skup P biti prazan?

30. Dati su skupovi: $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{a, b, 4\}$; $C = \{2, 4, c\}$; $D = \{a, b, 3\}$; $E = \{1, b\}$. Odrediti a, b, c i d znajući da je: $B \subset A$, $C \subset A, D \subset A, E \subset B$.

31. Dat je skup $S = \{0,1,2,..., 9\}$. Odrediti skupove

$$A = \{x | x \in S \wedge \frac{2x}{12 - x} \in S\} \text{ i } B = \{y | y \in S \wedge \left(\frac{y^2}{2} - y\right) \in S\}, \text{ zatim}$$

odrediti skupove: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ i $P(A \setminus B)$.

32. Dat je skup $S = \{0,1,2,...,12\}$. Odrediti skupove

$$A = \{x | x \in S \wedge \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) \in S\} \text{ i } B = \{y | y \in S \wedge \left(y + \frac{y}{2}\right) \in S\},$$

zatim odrediti i skupove: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ i $P(A \setminus B)$.

33. Ako je $P \cup Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $P \cap Q = \{c, f, h\}$, $P \cup \{c, d, f\} = \{a, c, d, f, g, h\}$, $Q \cup \{a, f, h\} = \{a, b, c, d, e, f, h\}$, odrediti skupove P i Q.

34. Ako je $A \cup B = \{1,2,3,...,8\}$, $A \cap B = \{3,6,8\}$, $A \cup \{1,6,8\} = \{1,2,3,...,8\}$, $B \cup \{3,4,6\} = \{1,3,4,6,7,8\}$, odrediti skupove A i B.

35. Dati su skupovi $A=\{2,5,4\}$, $B=\{1,2,4,5\}$. Odrediti koje od relacija su tačne: $A\subset B$, $A=B$, $A\supset B$, $A\neq B$, $A\in B$, $B\in A$.

36. Dati su skupovi $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,c,e\}$, $C=\{b,c,d,e,f\}$. Dokazati tačnost tvrđenja
a) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;
b) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;
c) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

37. Dati su skupovi $A=\{1,3,4,6,7,8\}$, $B=\{1,2,3,5,8,9\}$. Odrediti $A\Delta B$.

38. Odrediti elemente skupova A,B,C, ako je $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$, $(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$, $A\setminus B=\{1,3,5\}$, $C\setminus B=\{2,4\}$ i $(A\cap B)\setminus C=\{6\}$.

39. Dat je skup $S=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ i njegovi podskupovi: $A=\{a,c,e,f,h\}$, $B=\{a,b,c,f,i\}$, $C=\{b,d,e,h\}$.
1°. Odrediti skupove:
a) $A\cup B$; b) $A\cap B$; c) $B\cup C$; d) $B\cap C$; e) $A\cup C$;
f) $A\cap C$; g) $A\cup(B\cup C)$; h) $A\cup(B\cap C)$; i) $A\cap(B\cap C)$.
2°. Odrediti i skupove: a) $\overline{A}$; b) $\overline{B}$; c) $\overline{C}$; d) $C_S(A\cup B)$;
e) $C_S(A\cup C)$; f) $C_S(B\cup C)$; g) $C_S(A\cap B)$; h) $C_S(A\cap C)$;
i) $C_S(A\cup(B\cup C))$; j) $C_S(A\cap(B\cap C))$; k) $C_S(A\cup(B\cap C))$.
3°. Pokazati da je
$(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=A$.

40. Neka su A i B dva podskupa skupa S. Tada je:
(1) $(A\cup B)'=A'\cap B'$.
(2) $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

41. Dati su skupovi $A=\{x|x$ je delilac broja $12\}$;
$B=\{x|x$ je delilac broja $18\}$; $C=\{x|x$ je delilac broja $30\}$.
Izračunati: a) $A\setminus(B\cup C)$ i pokazati da važi
$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus B=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;
b) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$;
c) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.
Relacije b) i c) objasniti Ojler-Venovim dijagramom.

42. Dati su skupovi $A=\{1,2,3,6\}$, $B=\{3,6\}$, $C=\{1,3,5\}$. Proveriti tačnost jednakosti $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

43. Koristeći definicije operacija sa skupovima dokazati skupovnu jednakost $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$. ($A,B,C$ su neprazni skupovi).

44. Odrediti partitivni skup skupa $S=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

45. Dati su skupovi: $A=\{x|1\leq x\leq 5\}$, $B=\{x|1<x<8\}$, $C=\{1,3,4,8\}$.
Dokazati da je:
a) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$;
b) Dokazati da jednakost pod a) važi za ma koje neprazne skupove.

46. Dati su skupovi:
$A=\{d,i,o,p,r,s\}$; $B=\{e,i,l,m,o,p,s,z\}$ i $C=\{e,i,j,o,p,s,t,v\}$.
Proveriti:
$card(A\cup B\cup C)=cardA+cardB+cardC-card(A\cap B)-$
$-card(A\cap B)-card(B\cap C)+card(A\cap B\cap C)$
($card\,A$ znači kardinalan broj skupa A).

47. U jednoj školi 330 učenika uči francuski, 470 učenika uči engleski, 420 učenika uči ruski, 140 učenika uči francuski i engleski, 180 francuski i ruski, 250 engleski i ruski, a 120 učenika engleski, francuski i ruski. Koliko je učenika u toj školi?

48. Dat je skup $S=\{1,2,5,8,9,11,15\}$ i njegovi podskupovi $A=\{2,8,9,15\}$, $B=\{1,2,11,15\}$, i $C=\{8,11,15\}$. Odrediti skup $M=((A\cap B)\cap C)\cup((S\setminus B)\cup(S\setminus(B\cup C)))$.

49. Ako su A i B neprazni skupovi pomoću tablice pripadnosti uveriti se da su tačna tvrđenja
a) $(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$;
b) $(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{B}$.

50. Data su tri podskupa abecede:
$A=\{a,b,c,d,e\}$; $B=\{b,d,f,g,m,n\}$ i $C=\{a,c,d,f,r,s\}$.
a) Dokazati da važi antidistributivnost
1° $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;
2° $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
b) Dokaz izvedi i pomoću Ojler-Venovog dijagrama.

51. Neka su A i B dva neprazna skupa. Dokazati da za njih važi zakon apsorpcije $A\cup(A\cup B)=A$ i $A\cap(A\cap B)=A$.

52.* Dat je skup $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ i njegovi podskupovi:
$A=\{2,4,5\}$, $B=\{1,4,5,6\}$, $D=\{2,4,5,6\}$.
Odrediti komplementarne skupove
$\overline{A}=C_S(A)$, $\overline{B}=C_S(B)$, $\overline{D}=C_S(D)$.
Zatim izračunati:
$x=(A\cup B)\cup(\overline{A}\cup B)\cup(A\cup\overline{D})$,
$y=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap D)$,
$z=(A\cup D)\cap(\overline{A}\cup D)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$.

53. Odrediti elemente skupa $A = \{a,b,c,d\}$ ako je
$\{a,b,7\} \cap \{b,c\} = \{b,-5\}$; $\{a,b,13\} \cap \{b,c\} = \{b,-5\}$;
$\{a,b,13\} \subset A$; $\{b,c,d\} \subset A$; $\{b,c,d\} \cup \{a,3\} = \{a,c,d,3\}$.

54. Neka su A,B,C podskupovi skupa $S = \{a,b,c,d,e\}$ takvi da je:
$A \cap B = \{b,d\}$; $A \cup B = \{b,c,d,e\}$; $A \cap C = \{b,c\}$;
$A \cup C = \{a,b,c,d\}$.
a) Odrediti A,B i C;
b) Odrediti simetrične diferencije $A \Delta B$, $B \Delta C$ i $C \Delta A$.

55. Dati su neprazni skupovi A,B,C. Pomoću Ojler-Venovih dijagrama dokazati da je $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ tj. da ovaj zakon nije asocijativan.

56. Dati su skupovi: $A = \{x | x$ se sadrži u $12\}$, $B = \{x | x$ se sadrži u $20\}$, $C = \{x | x$ se sadrži u $32\}$. Odrediti skupove:
a) $A \setminus (B \cup C)$; b) $A \cup B \cap C$; c) $C \cup (A \cap B)$;
d) $(B \setminus C) \cap A$; e) $(A \cap B) \setminus C$; f) $A \setminus (B \setminus C)$.

57. Dat je skup uređenih parova: $S = \{(a,b),(c,a),(c,b),(d,b),(c,e)\}$. Odrediti skup T simetričnih uređenih parova skupa S.

58. Dati su skupovi $A = \{a,b,c\}$ i $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$. Neki učenik je napisao
$A \times B = \{(a,\alpha),(a,\beta),(\gamma,c),(b,\alpha),(\beta,b),(b,\gamma),(c,\alpha),(c,\beta),(c,\gamma)\}$.
Da li je ovo ispravno?

59. Dati su skupovi: $A = \{a,b,c\}$, $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $C = \{1,2\}$.
Odrediti skupove:
a) $A \times B$; b) $(A \times B) \times C$; c) $A \times (B \times C)$.

60. Dati su skupovi: $S = \{a,b,c,d,f\}$, $A = \{a,c,d,f\}$, $B = \{c,d,e,f\}$.
a) Odrediti sve podskupove skupa B;
b) Napisati sve elemente skupa $P(A)$;
c) Odrediti $P(A) \cap P(B)$;
d) Odrediti $P(C_S A) \cap P(C_S B)$.

61. Dat je skup $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Odrediti skupove X i Y tako da bude:
$X \subset E \wedge \{1,2,3\} \cap X = \{2,3\}$;
$Y \subset E \wedge Y \setminus \{2,4\} = \{3,5\} \wedge Y \cap \{1,2,4\} = \{2\}$, pa odrediti $X \setminus Y$.

62. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Odrediti skup X tako da bude $X \setminus B = \varnothing$ i $A \setminus X = \{1, 2, 3\}$.

63. Odrediti skupove A i B, čiji su elementi celi brojevi i zadovoljavaju relacije: a) $A \cup B = \{x \mid 1 \leq x < 7\}$; $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x < 4\}$, $6 \notin A$ i $5 \notin B \setminus A$; b) $A \cup B = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $A \cap B = \{x \mid 2 < x < 6\}$, $1 \notin A \setminus B$ i $2 \notin B \setminus A$.

64. Dati su skupovi $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Q = \{1,2,3,7\}$. Odrediti skupove:
a) $P \,\Delta\, Q$; b) $Q \,\Delta\, P$; c) $(P \,\Delta\, Q) \,\Delta\, Q$; d) $(P \,\Delta\, Q) \,\Delta\, (P \cup Q)$.

65. Dati su univerzalan skup $E = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ i njegovi podskupovi $A = \{b,d,e,g\}$ i $B = \{a,c,f\}$. Odrediti njihove komplemente A' i B'.

66. Neka je N (skup prirodnih brojeva) univerzalan skup, a skup $P = \{x | x = 2k, k \in N\}$ jedan njegov podskup. Odrediti komplement P' skupa P u odnosu na skup N.

67. Dati su skupovi: $A = \{n | n \in N, n \leq 10\}$,
$B = \{n | n \in N, 2 \leq n \leq 7\}$ i $C = \{2,3,6\}$. Odrediti skupove X i Y tako da važe relacije:
a) $X \subset A$ i $C \cup X = B$; b) $Y \subset A$ i $B \cap Y = C$.

68. Ako su elementi skupa A prosti činioci broja 546, a elementi skupa B prosti činioci broja 330, ispitati istinitost relacija:
a) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$; b) $(A \Delta B) \cap (A \cap B) = \varnothing$;
c) $(A \Delta B) \setminus (A \setminus B) \cup (A \cap B) = B$.

69. U jednom odeljenju od 30 učenika odgovaralo je: 19 učenika matematiku, 17 učenika fiziku, 11 učenika istoriju, 12 učenika matematiku i fiziku, 7 učenika istoriju i matematiku, 5 učenika fiziku i istoriju i 2 učenika sva tri predmeta; a) koliko učenika je odgovaralo istoriju, ali ne i matematiku; b) koliko učenika je odgovaralo dva predmeta od tri moguća; c) koliko učenika je odgovaralo samo jedan predmet?

70. Ako su A, B i C neprazni skupovi, dokazati da važi:
a) $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$;
b) $A \cap (A \cup B) = A$;
c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(distributivni zakon $\cup$ prema $\cap$);
d) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
(distributivni zakon $\cap$ prema $\cup$);
e) $(A \cup B) \cup C = (A \cup (B \cup C))$ (asocijativni zakon unije);
f) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ (De Morganov obrazac);
g) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ (De Morganov obrazac);
h) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
j) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
k) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

71. Na jednom kursu stranih jezika svaki slušalac uči bar jedan od tri strana jezika (engleski, francuski i nemački), i to: 18 slušalaca uči francuski, 22 slušaoca uči engleski, 15 slušalaca uči nemački, 6 slušalaca uči engleski i francuski, 11 slušalaca engleski i nemački, 1 slušalac uči sva tri jezika. Koliko ima slušalaca na tom kursu i koliko njih uči samo dva jezika?

72. Odrediti skup S tako da budu tačne (istovremeno) sledeće formule:
$S\cap\{1,3,6,9\}=\{3,6\}$,
$S\cup\{2,3,9,11\}=\{2,3,5,6,9,11\}$,
$S\subset\{3,5,6,7,9,11\}$
$\{6,11\}\subset S$.
Zatim odrediti x tako da bude $S\setminus\{1,2,6,11\}=\{x,3\}$.

73. Dati su skupovi $A=\{a,b,c\}$ i $B=\{*,\square\}$. Odrediti skup $A\times B$.

74. Dati su skupovi $A=\{0,1,2\}$ i $B=\{a,b,c\}$. Odrediti skupove $A\times B$, $B\times A$ i nacrtati njihove grafove.

75. Dat je skup $A=\{a,b,c\}$. Odrediti skup A^2.

76. Dat je skup $A=\{1,2,3,4,5\}$. Sastaviti sve:
a) uređene dvojke (x,y) elemenata $x,y\in A$ takve da je $x<y$.
b) uređene trojke (x,y,z) elemenata $x,y,z\in A$ takve da je $x<y<z$.

77. Dat je skup
$A\times B=\{(a,1);(a,3);(b,1);(b,2);(c,1);(a,2);(b,3);(c,3);(c,2)\}$.
Odrediti skupove A i B.

78. Dati su skupovi $A=\{a,b,c\}$ i $B=\{b,c,d\}$. Odrediti skupove:
a) $(A\times A)\cap(B\times B)$; b) $(A\times A)\cap(A\times B)$;
c) $(B\times B)\cap(A\times B)$.

79. Dat je skup $S=\{0,1,2,\ldots,12\}$. Odrediti elemente skupova:
$$A=\left\{x\middle|x\in S\wedge\frac{x+2}{3}\in S\right\},\qquad B=\left\{y\middle|y\in S\wedge\left(\frac{y}{2}+\frac{y}{5}\right)\in S\right\}\text{ i}$$
$$C=\left\{z\middle|z\in S\wedge\left(\frac{z^2}{4}-25\right)\in S\right\},$$ pa odrediti skupove:
$A\cup(B\cap C)$, $B\setminus(A\cap C)$, $P(C\setminus(A\cup B))$ i $B\times A$.

80. Dat je skup $S=\{0,2,4,6,8,10,12\}$. Odrediti elemente skupova:
$$A=\left\{x\middle|x\in S\wedge\left(\frac{2x}{3}-\frac{x}{2}\right)\in S\right\},\qquad B=\left\{y\middle|y\in S\wedge\left(\frac{y^2}{y+4}+1\right)\in N\right\}\text{ i}$$
$$C=\left\{z\middle|z\in S\wedge\frac{z^2}{4}>z\right\},$$ pa odrediti skupove: $(A\cap B)\cup C$,
$(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$, $P((B\setminus C)\cup A)$ i $A\times C$.

1.3. Relacije i funkcije

Definicija 1. Relacija je bilo koji podskup Dekartovog proizvoda proizvoljnih nepraznih skupova A i B. Ako je $\rho\subset(A\times B)$ i $(x,y)\in\rho$, onda kažemo da je x u relaciji sa y, i zapisujemo $x\ \rho\ y$.

Definicija 2. Binarna relacija ρ skupa A je svaki dogovor, pravilo, propis kojim se svakom paru (x,y) elemenata (članova) skupa A dodeljuje T ili $\perp$.

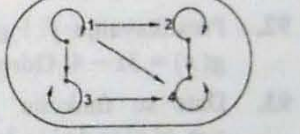
Definicija 3. Neka je zadan neprazan skup A. Preslikavanje $f:A^2\to A$ naziva se binarna operacija.

Definicija 4. Neka su A i B neprazni skupovi. Funkcija (preslikavanje) skupa A u skup B je svaki podskup f skupa $A\times B$ koji ima ova dva svojstva:

1°. Skup svih prvih komponenata skupa f jednak je skupu A.
2°. $(x_1,y_1)\in f\wedge(x_1,y_2)\in f\Rightarrow y_1=y_2$.
Skup A naziva se domen (oblast definisanosti funkcije), a skup B kodomen ili antidomen.

81. Dat je skup $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ i u njemu je definisana relacija $\rho:\forall(x,y)\in A:x\ \rho\ y\Leftrightarrow y=x+1$.
Odrediti elemente relacije ρ i prikazati je grafički u skupu A^2.

82. Dat je šematski prikaz (graf) jedne relacije ρ u skupu $A=\{1,2,3,4\}$ na slici 1. Odrediti sve članove relacije ρ, pa je napisati kao skup.



Sl. 1

83. U skupu $M=\{0,1,2,\ldots,10\}$ odrediti relaciju ρ definisanu na sledeći način:
$\forall(x,y)\in M:x\ \rho\ y\Leftrightarrow x+y=10$.

84. U skupu $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$ definisane su sledeće relacije:
a) $x\ \rho\ y\overset{def}{\Leftrightarrow}x<y$; b) $x\ \rho\ y\overset{def}{\Leftrightarrow}x=2y$;
c) $x\ \rho\ y\overset{def}{\Leftrightarrow}x^2=y^2$; d) $x\ \rho\ y\overset{def}{\Leftrightarrow}x+y=2$.
Odrediti odgovarajuće skupove, nacrtati grafove i ispitati svojstva tih relacija.

85. U skupu $A=\{-1,0,1\}$ definisana je relacija ρ na sledeći način:
$\forall(x,y)\in A:x\ \rho\ y\Leftrightarrow x^3=y^3$. Da li je relacija refleksivna?

86. U skupu $S=\{x|x\in N\wedge x\leq 12\}$ definisana je relacija ρ na sledeći način:
$\forall(x,y)\in S: x\rho y \Leftrightarrow 3|(x-y)$ *
Pokazati da je ρ relacija ekvivalencije. Odrediti klase ekvivalencije i odgovarajući količnički skup.

87. U skupu celih brojeva Z definisana je relacija ρ na sledeći način: $\forall(x,y)\in Z: x\ \rho\ y \Leftrightarrow x\equiv y \pmod 3$*. Pokazati da je ρ relacija ekvivalencije, zatim odrediti odgovarajuće klase ekvivalencije i količnički skup Z/ρ.

88. U skupu Z celih brojeva definisana je relacija ρ, tako da je: $\forall(x,y)\in Z: x\ \rho\ y \Leftrightarrow x\equiv y \pmod 5$. Dokazati da je ova relacija u stvari relacija ekvivalencije. Odrediti klase ekvivalencije i količnički skup Z/ρ.

89. U skupu $S=\{1,2,3,4,5,7,9,11\}$, relacija ρ "ima isti ostatak kod deljenja sa 4 " je relacija ekvivalencije. Dokazati.

90. U skupu N, relacija ρ "ima isti ostatak deljenja sa 7 " je relacija ekvivalencije. Dokazati, zatim naći količnički skup.

91. U skupu R data su preslikavanja:
$f: x\to 3x+5$ i $g: x\to 4x+6$.
Izračunati:
a) $(f\circ g)(6)$; b) $(f\circ g)(m)$; c) $(g\circ f)(6)$ d) $(g\circ f)(m)$.

92. Preslikavanja f i g, $R\to R$ definisana su sa $f(x)=x^2-4x+5$ i $g(x)=3x-4$. Odrediti: a) f^2; b) g^2; c) $f\circ g$; d) $g\circ f$.

93. Date su funkcije f i g definisane u $R: x\to f(x)=2x^2-1$ i $x\to g(x)=4x^3-3x$. Dokazati da za date funkcije važi, $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$.

94. U skupu $S=\{a,b,c,d,e,f\}$, je jedan vojnik a, dva poručnika b,c i tri kapetana d,e,f. U skupu S uočena je relacija ρ "mora prvi pozdraviti". Kakva je to relacija?

95. Data je funkcija $x\to f(x)=3x-2$. Dokazati da je preslikavanje dato ovom formulom jedan–jedan i na.

96. Dokazati da su bijektivna $(1-1$ i na$)$ preslikavanja:

a) $f(x)=4x-1$; b) $f(x)=5x-6$; c) $f(x)=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{2}{3}$.

---

* $x\,|\,y$ znači x se sadrži u y ili x je činilac za y. Osim ove oznake, često pišemo $x\equiv 0 \pmod y$ čitamo x kongruentno 0 po modulu y, znači y je deljivo sa x. Ova relacija se naziva relacija kongruencije.

97. Dati su skupovi $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ i $B=\{a,b,c,d,e,m\}$ i preslikavanje
$f: A\to B,\ f=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta\\ b & d & e & m\end{pmatrix}$.
Dokazati da je f preslikavanje 1–1.

98. Dati su skupovi $A=\{a,b,c\}$ i $B=\{1,2,3\}$ i preslikavanje $f=\{(a,2);(b,2);(c,2)\}$. Dokazati da je preslikavanje f konstantno.

99. Data je funkcija $f=\begin{pmatrix}a & b & c & d & e\\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$.
Odrediti inverznu funkciju f^{-1} za datu.

100. Dato je preslikavanje $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$.
Odrediti: a) $f\circ f=f^2$; b) $f\circ f\circ f=f^3$; c) $f\circ f\circ f\circ f=f^4$.

101. Date su funkcije $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ i $g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Odrediti: a) $f\circ g$; b) $g\circ f$; c) $f^2\circ g$.

102. Date su funkcije: $x\to f(x)=3x-5$ i $x\to g(x)=5x-3$.
Odrediti: a) $f^{-1}(x)$ i $g^{-1}(x)$; b) $f\circ g$ i $g\circ f$;
c) $f^{-1}\circ g^{-1}$ i $f^{-1}\circ g$.

103. Ako je: a) $f(x+1)=5x-3$; b) $f(2x-3)=3x+1$;
c) $f(3-2x)=2x+5$; d) $f(1-x)=3-2x$, odrediti $f(x)$.

104. Date su funkcionalne jednačine $f(x+1)=3x+2$ i $g(2x+3)=2-3x$. Odrediti: a) $f(x)$ i $g(x)$; b) $f\circ g$;
c) $f^{-1}\circ g$.

105. Odrediti funkciju $f(x)$ koja zadovoljava funkcionalnu jednačinu:

a) $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$; b) $(x-1)f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x-1}$;

c) $f(x)+x\cdot f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)=2$.

106.* Rešiti funkcionalne jednačine:

a) $f\left(\dfrac{x-3}{2x+4}\right)=\dfrac{x+1}{3x-1}$; b) $f\left(\dfrac{2x+2}{x+3}\right)=\dfrac{4x+1}{2x-3}$;

c) $f\left(\dfrac{x+2}{3x+5}\right)=\dfrac{x+4}{2x-1}$; d) $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{x-2}{x+2}$.

107.* Odrediti funkcije $f(x)$ i $g(x)$, koje zadovoljavaju sisteme:

a) $f(2x+1)+g(x-1)=x \wedge f(2x+1)-2g(x-1)=2x^2$;

b) $f(2x+1)+2g(2x+1)=2x \wedge f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+g\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=x$;

c) $f(x+1)+xg(x+1)=2x \wedge f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+g\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x-1$.

108.* Ako je: $f\left(\dfrac{1}{x}\right)-2g\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=x-2 \wedge f\left(\dfrac{1}{x}\right)+g\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=x+1$,

$(x\neq 0)$ tada je $f\circ g=g\circ f=1$. Dokazati.

1.4. Elementi kombinatorike

Primedba 1. Neka je $E=\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$ dati skup, onda postoji više načina da se od njegovih elemenata, ređajući ih na razne načine, formiraju neki novi skupovi. Pri tome je važno utvrditi koliko će članova imati ti novi skupovi i kako će broj članova tog novog skupa zavisiti od broja elemenata početnog skupa.
Oblast matematike koja se bavi problemima ove vrste naziva se **kombinatorika.**

Primedba 2. Zadaci iz kombinatorike koji se rešavaju pomoću formula za permutacije $P(n)=n!$, za varijacije $V_k^n=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ i za kombinacije $C_k^n=\dbinom{n}{k}$, nisu u nastavnom planu i programu, već su namenjeni boljim učenicima za razna takmičenja.

109. Napisati sve permutacije od: a) cifara 1, 2, 3, 4; b) slova a,b,c,d; c) reči OVAJ.

110. Napisati sve permutacije od cifara 3, 4, 5, 6, 7, koje imaju 6 na prvom mestu, a 4 na drugom mestu.

111. Koliko ima petocifrenih brojeva koji se mogu formirati od cifara 1, 3, 5, 7, 9?

112. Koliko permutacija od cifara 1, 2, 3, ..., 8 počinje: a) sa 5; b) sa 123; c) sa 8 642?

113. U koliko permutacija elemenata 1, 2, 3, ..., 8 stoje elementi 2, 4, 5, 6 jedan pored drugog, i to: a) u datom poretku; b) u proizvoljnom poretku?

114. Napiši sve četvorocifrene brojeve ciji je zbir cifara 10 a cifra desetica 5.

115. Koliko se cifara upotrebi za numerisanje od prve do 567 stranice neke knjige (svaku cifru računati onoliko puta koliko se puta pojavljuje)?

116. Date su tri različite prave i na svakoj od njih po 5 različitih tačaka. Koliko ima najvišee trouglova čija su temena date tačke.

117. Dat je skup tačaka $S=\{A,B,C,D,E,F\}$ takav da tačke A,B,C,D pripadaju pravoj a, a tačke E i F njoj paralelnoj pravoj b. Odrediti sve prave takve da svaka sadrži tačno dve tačke iz datog skupa.

118. Na Milanovom rođendanu svi su se rukovali sa Milanom i među sobom. Bilo je ukupno 136 rukovanja. Koliko je Milan imao gostiju na svom rađendanu?

119. Kvadrat stranice 6 cm podeljen je na kvadratne centimetre. Koliko se duži, a koliko kvadata može uočiti na tako dobijenoj slici?

120. Pomoću vage treba izmeriti sve celobrojne težine od 1 kg do 13 kg. Koliko nam je najmanje tegova za to potrebno i kolika je težina tih tegova?

121. U ravni su date dve klase paralelnih pravih: $p_1,p_2,p_3,\ldots p_{10}$ i $q_1,q_2,q_3,\ldots q_6$. Prave klase p presecaju prave klase q. Koliko je različitih paralelograma određeno ovim pravama (različiti paralelogrami su oni koji imaju bar dva temena različita).

122. Na koliko načina 7 učenika može sesti na:
a) 5 različitih stolica;
b) 9 različitih stolica?

123. Koliko se šestocifrenih brojeva može sastaviti od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5 uz uslov da se svaka cifra pojavljuje samo jednom i da su parne cifre jedna uz drugu? (0 je parna cifra).

124. Koliko ima četvorocifrenih prirodnih brojeva napisanih pomoću cifara 0,1,2,3,4,5,8 takvih da se:
a) cifre mogu ponavljati;
b) cifre ne mogu ponavljati;
c) cifre mogu ponavljati, a broj je deljiv sa 5?

125. Koliko ima petocifrenih prirodnih brojeva napisanih pomoću cifara 0,1,2,3,4,5,6 takvih da se:
a) cifre mogu ponavljati;
b) cifre ne mogu ponavljati;
c) cifre mogu ponavljati, a broj nije deljiv sa 5?

126. U neprovidnoj vrećici se nalaze 10 belih, 20 crvenih i 30 plavih kuglica. Koliko najmanje kuglica treba izvući iz vrećice da bismo sigurno imali:
a) tri crvene kuglice;
b) tri kuglice različite boje;
c) tri kuglice iste boje.

127. Na koliko načina je moguće sastaviti stražu, koja se sastoji od 5 vojnika i jednog oficira ako ima 40 vojnika i 3 oficira?

128. Koliko različitih četvorocifrenih brojeva je moguće napisati koristeći cifre 1,3,5,7,9,0 samo jedanputa?

129.* Za koje vrednosti n i k je tačna konjunkcija

$$V_{k-1}^{n+2}:V_{k-2}^{n+2} = 8:1 \wedge C_{k-1}^{n+2}:C_{k-2}^{n+2} = 4:3\ ?$$

130.* U koliko tačaka se seče 18 pravih, od kojih 5 su paralelne, 6 se seku u tački A a 4 u tački B?

131.* Dato je u ravni 10 crvenih i 8 plavih tačaka, tako da bilo koje tri nisu kolinearne. Koliko ima trouglova sa temenima u datim tačkama kod kojih sva temena nisu iste boje?

132.* Na polici se nalaze 12 različitih knjiga, od kojih su 5 iz matematike, 4 iz fizike i 3 iz hemije. Na koliko različitih načina se mogu rasporediti knjige na polici, ako se zna da knjige iz iste oblasti moraju biti uvek jedna pored druge?

133. Elementi skupa S su tačke takve da su svake tri nekolinearne, a svake četiri nekomplanarne. Ako je elementima skupa S određeno dva puta više ravni nego pravih, koliko pravih i koliko ravni određuju elementi skupa S?

134. Skratiti razlomke: a) $\dfrac{20!}{18!}$; b) $\dfrac{102!}{100!}$; c) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$; d) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$.

135. Koliko elemenata sadrži skup ako broj svih permutacija od njegovih elemenata: a) nije veći od 1 000; b) nije manji od 500; c) jednak je 120?

136. Dat je skup $S = \{0,1,2,3,4,5\}$. a) Koliko se različitih šestocifrenih prirodnih brojeva može formirati od elemenata skupa S, tako da se cifre u njima ne ponavljaju; b) koliko ima parnih brojeva određenih u zadatku pod a)?

137. Obrazovati sve varijacije druge i treće klase, bez ponavljanja, od elemenata 1, 2, 3, 4 i izračunati njihov broj.

138. Koliko se signala može načiniti sa 5 različitih zastava, uzimajući ih po jednu, po dve, po tri, po četiri i po pet zajedno?

139. Koliko se brojeva izmedju 3 000 i 5 000 može napisati pomoću cifara 0, 1, 2, ..., 7 ako se ni jedna cifra ne ponavlja u jednom broju?

140. Na koliko načina se od devet kandidata mogu izabrati četiri osobe na četiri različite dužnosti?

141. Odeljenje jednog razreda broji 35 učenika. Oni su međusobno razmenili fotografije. Koliko je ukupno razmenjenih fotografija?

142. Koliko se brojeva može napisati pomoću elemenata skupa M, koji čine prosti činioci broja 2 310, ako traženi brojevi sadrže po dva različita prosta činioca?

143. Rešiti jednačine: a) $V_2^{\,n} = 20$; b) $V_3^{\,n} = 120$; c) $2 \cdot V_3^{\,n} = V_4^{\,n}$; d) $V_5^{\,n} = V_4^{\,n}$ ($V_k^{\,n}$ je broj varijacije od n elemenata k–te klase).

144. Dat je skup $E = \{0,1,2,3,4,5\}$. Koliko se različitih prirodnih brojeva većih od 1 000 može formirati od elemenata skupa E, tako da cifre budu različite?

145. Napisati sve kombinacije treće i četvrte klase bez ponavljanja od elemenata 1, 2, 3, 4, 5, 6 i izračunati njihov broj.

146. Odrediti broj različitih trouglova, koji se mogu dobiti spajanjem svih temena šestougla.

147. Koliko se različitih grupa od po četiri učenika može izabrati od 17 kvalifikovanih, koje će reprezentovati školu na matematičkom takmičenju?

148. Na jednom šahovskom turniru učestvuje dvadeset šahista. Svaki treba da odigra partiju sa svakim. Koliko će biti odigrano partija na turniru?

149. Na šahovskom turniru odigrano je 45 partija. Ako je svaki šahista odigrao partiju sa svakim učesnikom, odredi broj učesnika.

150. Koliko podskupova ima skup od 6 elemenata?

151. Koliko nastaje trouglova konstrukcijom svih dijagonala konveksnog dvanaestougla ako im se temena poklapaju sa temenima dvanaestougla?

152. Odrediti broj dijagonala: a) konveksnog petougla; b) konveksnog dvanaestougla; c) konveksnog dvadesetougla; d) konveksnog n-tougla.

153. Dokazati tačnost jednakosti:

a) $C_0^6 + C_1^6 + C_2^6 + C_3^6 + C_4^6 + C_5^6 + C_6^6 = 2^6$;

b) $C_0^5 + C_1^5 + C_2^5 = C_3^5 + C_4^5 + C_5^5$.

154.* U skupu od 12 tačaka postoji tačno 6 četvorki komplanarnih tačaka. Koliko različitih ravni određuju ovih 12 tačaka? (Opštinsko takmičenje iz matematike 1982. god.)

155. U odeljenju ima 16 devojčica i 20 dečaka. Za odeljenjsku zajednicu treba izabrati četiri učenika, od kojih je bar jedna devojčica. Na koliko načina se može načiniti izbor?

156.* Koliko ima petocifrenih prirodnih brojeva čiji je zbir cifara jednak 5? (Opštinsko takmičenje iz matematike 1984. god.)

157. Koliko se različitih prirodnih brojeva manjih od 100 000 može formirati od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5?

158.* Dat je skup $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. a) Koliko se različitih šestocifrenih prirodnih brojeva manjih od 600 000 može načiniti od elemenata skupa S, tako da se u njima cifre ne ponavljaju; b) koliko ima neparnih brojeva određenih u zadatku pod a)?

159. Rešiti jednačine: a) $C_2^n = 105$; b) $C_2^n = 15n$; c) $5C_3^n = C_4^n$.

160.* Za koje vrednosti n je istinito tvrđenje:

a) $C_5^n < C_4^n$; b) $C_5^n > C_4^n$; c) $C_{k-1}^{19} < C_k^{19}$?

161.* Za koje vrednosti n i k je tačna konjunkcija:

$(V_k^n : V_{k-1}^n = 10:1) \wedge (C_k^n : C_{k-1}^n = 5:3)$?

162.* Na tiketu sportske prognoze nalazi se 12 susreta. a) Koliko različito popunjenih kolona obezbeđuje 12 tačnih pogodaka; b) koliko kolona treba popuniti ako se "zna" rezultat pet susreta; c) koliko kolona treba popuniti ako se "zna" da sedam susreta neće biti nerešeno?

163. U nekom odboru ima 7 lica (članova). a) Na koliko se načina mogu izabrati predsednik, sekretar i blagajnik tog odbora? b) Na koliko se načina svi članovi tog odbora mogu razmestiti (sesti) na 7 stolica?

164. Dat je skup $S = \{0,1,2,3,4,5\}$. a) Koliko se različitih petocifrenih brojeva, deljivih sa 6, može formirati od elemenata skupa S, tako da se cifre ne ponavljaju? b) Koliko se različitih petocifrenih brojeva deljivih sa 15, može formirati od elemenata skupa S, tako da se cifre u tim brojevima ne ponavljaju?

165. Zbir broja dijagonala i broja stranica konveksnog mnogougla iznosi 153. Odrediti broj različitih trouglova, koji je određen temenima ovog mnogougla.

166. Unutrašnji ugao pravilnog mnogougla veći je od odgovarajućeg spoljašnjeg ugla za toliko, za koliko je veći od sopstvene petine. Odrediti koliko je različitih pravih određeno temenima ovog mnogougla.

167. Između 3 000 i 7 000 nalaze se 1 344 broja u kojima se nijedna cifra ne ponavlja. Odrediti skup A čiji su elementi arapske cifre pomoću kojih se mogu napisati pomenuti brojevi.

168. Dat je skup $S = \{A,B,C,\ldots\}$. Elementi skupa S su temena konveksnog mnogougla, konstrukcijom svih dijagonala mnogougla dobijeno je 455 različitih trouglova. Odrediti card S da ovo važi.

169. Elementi skupa $S = \{A,B,C,\ldots\}$ su tačke od kojih su najviše dve kolinearne a najviše tri komplanarne. Odrediti kardinalan broj skupa S ako je od njegovih elemenata određeno 364 različitih ravni.