DRUGA GLAVA

2. SKUPOVI

$S = \{x |\ S(x)\}$, znači isto što i: $S = \{x |\ x$ ima svojstvo $S(x)\}$ tj. S je skup svih elemenata *koji imaju svojstvo* $S(x)$.

Za skupove *prirodnih, celih, racionalnih, realnih* brojeva koristimo oznake redom: N, Z, Q, R.

Podskup A skupa S je skup koji zadovoljava uslov: $(\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in S)$. Oznaka je $A \subset S$ ili $S \supset A$.

Jednakost dva skupa definiše se na sledeći način

$$A = B \iff (\forall x) \quad (x \in A \iff x \in B) \quad \text{ili} \quad (A = B \iff (A \subset B \wedge B \subset A).$$

Postoji jedan i samo jedan *prazan skup.* To je skup koji nema elemenata. Prazan skup je matematička konstanta. Označavamo ga sa $\varnothing$.

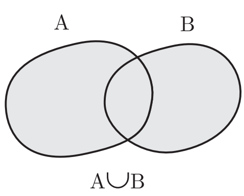
Unija dva skupa A i B je skup koji označavamo sa $A \cup B$ i to je:
$A \cup B = \{x |\ x \in A \vee x \in B\}$.

Presek dva skupa A i B je skup koji označavamo sa $A \cap B$ i to je:
$A \cap B = \{x |\ x \in A \wedge x \in B\}$.

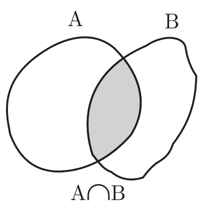
Ako je $A \cap B = \varnothing$, tada kažemo da su A i B *disjunktni (razdvojeni).*

Razlika skupa A i skupa B je skup koji označavamo sa $A \backslash B$ i to je:
$A \backslash B = \{x |\ x \in A \wedge x \notin B\}$.

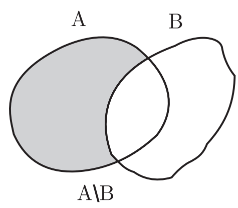
Grafička interpretacija pomoću tzv. *Ojler-Venovih dijagrama* (šrafirani delovi su redom: unija, presek, razlika) data je na slikama 6, 7 i 8.



Sl. 6



Sl. 7



Sl. 8

Komplement skupa A, skup označen sa A', definišemo kao: $A' = \{x |\ x \notin A\}$.

Komplement skupa A u *odnosu na* skup B, ako $A \subset B$, je: $C_B(A) = B \backslash A$.

Uređen par (uređena dvojka) je skup od dva elementa, recimo a i b, koji označavamo sa (a, b) i definišemo kao: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Jednakost dva uređena para karakteriše prirodu ovih skupova:

$$(a, b) = (c, d) \iff (a = c \wedge b = d).$$

Dekartov proizvod dva skupa A i B, u oznaci $A \times B$ je

$$A \times B = \{(a, b)|\ a \in A \wedge b \in B\}.$$

Dekartov kvadrat skupa A je: $A^2 = A \times A = \{(a, b)|\ a, b \in A\}$.

Relacija između dva elementa a i b, $a \in A$, $b \in B$, je skup ρ, takav da je $\rho \subset A \times B \wedge (a, b) \in \rho$. Tada pišemo: $a\rho b$, što znači: a je u relaciji ρ sa b.

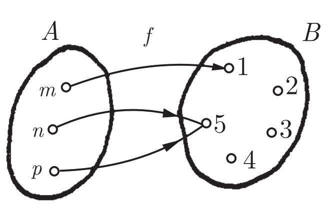
Od mogućih osobina relacije ρ definisanih na skupu A, $\rho \subset A \times A$, ističemo:

(R) refleksivnost	$(\forall x \in A)(x\rho x)$
(S) simetričnost	$(\forall x, y \in A)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$
(AS) antisimetričnost	$(\forall x, y \in A)(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$
(T) tranzitivnost	$(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$

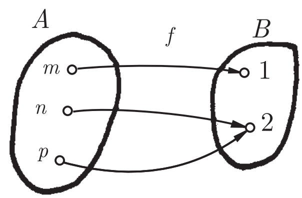
Relacija ekvivalencije je svaka relacija koja ima osobine R, S, T. Ona deli skup na disjunktne klase, a elementi jedne klase su svi jedni s drugim u relaciji. Oznaka za relaciju ekvivalencije je $\sim$ (tilda), a za *klasu ekvivalencije*: $C_x = \{y|\ x \sim y\}$.

Relacija poretka je svaka relacija koja se odlikuje osobinama R, AS, T.

Funkcija (*preslikavanje*) skupa A *u* skup B, $A \xrightarrow{f} B$, je podskup f Dekartovog proizvoda $A \times B$, koji se odlikuje osobinama: svakom elementu a skupa A odgovara tačno jedna uređena dvojka (a, b), $b \in B$, takva da $(a, b) \in f$, sl. 9. Koriste se označavanja: $f = \begin{pmatrix} m & n & p \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ i $f = \{(m, 1), (n, 5), (p, 5)\}$. Skup A je *domen*, a skup B je *kodomen* funkcije f.



Sl. 9

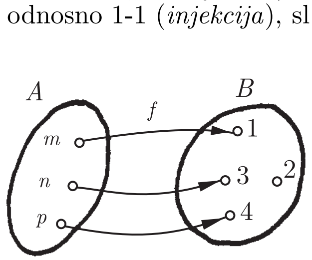


Sl. 10

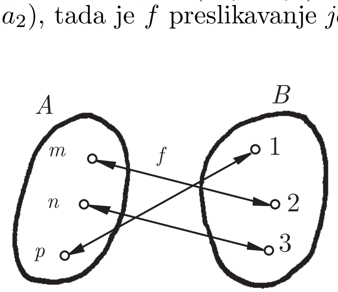
Elemenat $a \in A$ je *original* (*lik*), a elemenat $b \in B$ je *slika*. Činjenicu da je $(a, b) \in f$ označavamo sa $f(a) = b$. Skup slika označavamo sa $f(A)$.

Ako je $f(A) = B$, tada je f preslikavanje skupa A *na* skup B (sirjekcija), sl. 10.

Ako važi implikacija: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, tada je f preslikavanje *jedan-jedan*, odnosno 1-1 (*injekcija*), sl. 11.



Sl. 11



Sl. 12

Ako je f preslikavanje *na* i *jedan-jedan*, sl. 12, onda je to *bijekcija* i postoji *inverzno* (*obratno*) preslikavanje skupa B na skup A. To označavamo sa $B = f^{-1}(A)$.

Ako je $f(A) = B$ i $g(B) = C$, tada se skup A preslikava na skup C *kompozicijom preslikavanja*: $g \circ f(A) = C$ (čita se: "*gof od A jednako C*"). Važi zakon asocijativnosti: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Svako preslikavanje skupa $A \times A$ u skup A naziva se *binarna operacija.* Dakle, ako za svaki x, $y \in A$ postoji $z \in A$, tako da $(x, y) \xrightarrow{*} z$, kažemo da je z *rezultat* primene operacije $*$ redom na x i y. Pišemo: $x * y = z$.

Operacija je *komutativna* ako za $\forall x$, $y \in A$ važi: $x * y = y * x$.

Operacija je *asocijativna* ako za $\forall x$, $y \in A$ važi: $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Ako postoji $e \in A$, tako da za $\forall x \in A$, važi: $e*x = x*e = x$, tada je e *jedinični element* (*jedinica*) operacije $*$.

Ako za $\forall x \in A$ postoji $y \in A$, tako da je $x * y = y * x = e$, tada je y *inverzni elemenat* (*obrat*) eementa x u odnosu na jedinicu e. Inverzni elemenat označavamo i sa x^{-1}.

Skup snabdeven operacijom čini *algebarsku strukturu*, na primer: $(A, *)$

Algebarska struktura $(A, *)$ je *grupa*, ako se operacija $*$ odlikuje osobinama:

1° *Asocijativna* je, tj. važi jednakost: $x * (y * z) = (x * y) * z$, za bilo koju trojku elemenata $x, y, z \in A$.

2° U skupu A postoji *jedinični elemenat* e, tj. za svaki elemenat $x \in A$ važe jednakosti: $e * x = x * e = x$.

3° Za svaki elemenat $x \in A$ postoji *obrat* $x^{-1} \in A$, tj. za svaki elemenat $x \in A$ može se naći elemenat $x^{-1} \in A$, takav da važe jednakosti: $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$.

Ako je $*$ još i *komutativna* operacija, onda se $(A, *)$ naziva *komutativna* (*Abelova*) *grupa.*

Algebarska struktura $(R, +, \cdot)$ je *polje realnih brojeva* jer se odlikuje osobinama:

1° $a + b = b + a$ (komutativnost sabiranja)

2° $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asocijativnost sabiranja)

3° $a + 0 = 0 + a = a$ (0 je neutralni (jedinični) elemenat sabiranja)

4° $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (postojanje suprotnog (inverznog) elementa za sabiranje)

5° $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativnost množenja)

6° $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asocijativnost množenja)

7° $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (postoji jedinični elemenat za množenje)

8° $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, $a \neq 0$ (postojanje inverznog elementa za množenje)

9° $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivnost množenja u odnosu na sabiranje), gde su a, b, c, $(-a)$, a^{-1}, 1 i 0 realni brojevi, a R skup svih realnih brojeva.

2.1 OPERACIJE SA SKUPOVIMA

△ **61.** Za skup S, dat jednakošću: $S = \{x|\ F(x)\}$, kažemo da je *dat opisivanjem.* Data jednakost ističe da skup S sadrži samo one elemente x koji imaju svojstvo $F(x)$ (za koje je tačna formula $F(x)$).

Odrediti elemente skupova koji su dati opisivanjem:

a) $\{x|\ x \in N \wedge x > 2 \wedge x < 5\}$, b) $\{x|\ x|12 \wedge x \in N\}$;

c) $\{x|\ x \in N \wedge x < 5 \wedge x \neq 3\}$, d) $\{x|\ (x + 1)|9 \wedge x \in Z\}$;

e) $\{x|\ 10|x \wedge x|40 \wedge x \in N\}$, f) $\{x|\ x \in N \wedge x < 2 \wedge x \neq 1\}$.

△ **62.** Utvrditi koja od navedenih tvrđenja su tačna, a koja su netačna:
a) $1 \in N$, gde je N oznaka za skup prirodnih brojeva: b) $\varnothing = 0$;

c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; d) $\varnothing = \{0\}$; e) $\{a\} \in \{a, b, c\}$;

f) $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2, 1\}$; g) $\{x|\ x - 3 = 0\} \supset \{3\}$.

△ **63.** Koja od relacija $=$, $\subset$, $\supset$, važi između skupa A koji je dat navođenjem elemenata i skupa B koji je zadat opisivanjem.
a) $A = \{2\}$; $B = \{x|\ \ x - 2 = 0\}$;

b) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x|\ x \in 2N \wedge x < 10\}$;

c) $A = \varnothing$, $B = \{x|\ x \in N \wedge x < 1\}$;

d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{x|\ x \in N \wedge x|6\}$.

□ **64.** Na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ rešiti po x formule:
a) $\tau((x-1)|6) = \top$; b) $\tau((x+1)|(x+3)) = \bot$, c) $\tau((x+1)^2 \neq 2) = \top$.

□ **65.** Rešiti po x i y formule:
a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$; b) $2 \in \{1, x, 3, 4\}$; c) $\{1, 5\} \subset \{1, 2, x, 4, 10\}$;

d) $\{x\} \subset \{2, 5, 6\}$; e) $\{1, 5\} \in \{1, 2, x, 4, 10\}$;

f) $\{x, y\} \subset \{2, 5, 10\}$; g) $\{1, x, 2, y\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

△ **66.** Odrediti vrednosti promenljivih x, y tako da vredi:
a) $(x, y) = (2, 1)$; b) $\left(\frac{1}{x}, 1\right) = \left(1, \frac{y}{3}\right)$; c) $\left(\frac{x}{y}, y\right) = (2, 3)$;

d) $(x, y) = \left(3, \frac{y}{2}\right)$; e) $\left(1, \frac{1}{x}\right) = \left(1, \frac{1}{y}\right)$.

△ **67.** Odrediti $A \cap B$ ako je:
a) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$; b) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$;

c) $A = \{a|\ a$ je paran broj$\}$, $B = \{b|\ b$ nije ceo broj$\}$;

d) $A = \varnothing$, $B = N$; e) $A = \{a|\ 2|a\} = \{b|\ 0 < b < 5\}$;

f) $A = \{a|\ a \in N \wedge a \leq 3\}$, $B = \{b|\ b \in N \wedge b \geq 2\}$;

g) $A = \{a|\ a^2 - 4 = 0\}$, $B = \{b|b < 2\}$; h) $A = \{a|\ 2|a\}$, $B = \{b|\ 3|b\}$.

△ **68.** Rešiti formulu $\{1, 2, 3\} \cap X = \{2, 3\}$, ako je X podskup skupa $\{2, 3, 4, 5\}$.

△ **69.** Da li važi jednakost $\{0, 1, 2, 3, 4\} \cap X = \{1, 2\}$, ako je:
a) $X = \{3, 4\}$; b) $X = \varnothing$; c) $X = \{0, 1\}$;

d) $X = \{2, 3\}$; e) $X = \{0, 1, 2, 3\}$?

△ **70.** Dati su skupovi: $A = \{a|\ a|6 \wedge a \in N\}$, $B = \{1, 3, 5\}$,
$C = \{c|\ c \in Z \wedge c > 0 \wedge c < 8\}$. Odrediti:
a) $A \cup B$; b) $A \cap C$: c) $(A \cup B) \cap C$; d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;

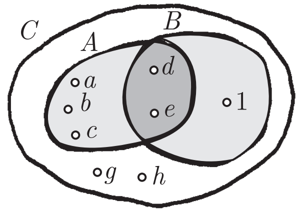
e) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$; f) $((A \cup B) \cap C) \cap A$.

△ **71.** Dati su skupovi: $A = \{a|\ a^2 - 4 = 0\}$, $B = \{b|\ -3 < b < 3 \wedge b \in Z\}$,
$C = \{c|\ c \leq 7 \wedge c \in N\}$. Odredite skupove:

a) $(A \backslash B) \backslash C$; b) $(A \cup B) \backslash C$; c) $(A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;

d) $(A \cap B) \backslash C$; e) $(A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

△ **72.** Dati su skupovi $A = \{a|\ a|12\}$, $B = \{b|\ b|24\}$, $C = \{c|\ c|6\}$, $D = \{2, 3, 4\}$. Utvrditi da su A, C i D podskupovi skupa B i odrediti komplemente skupova A, C i D u odnosu na skup B.



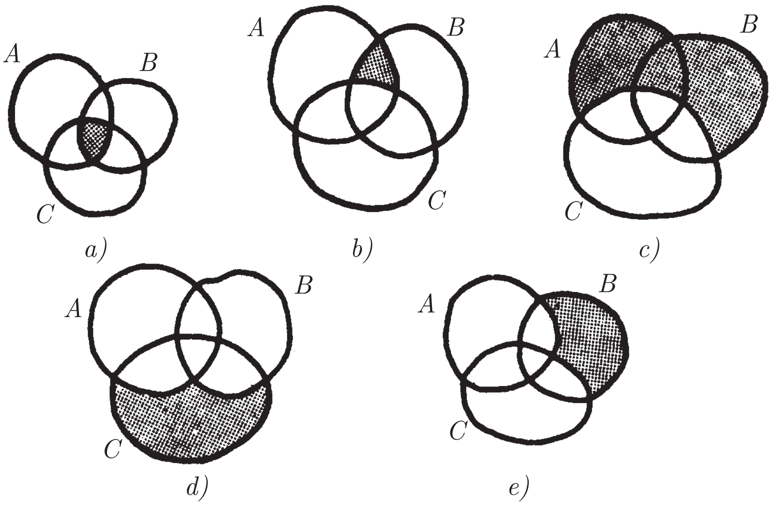
Sl. 13

△ **73.** Dati su dijagrami skupova A, B i C, sl. 13. Odrediti skupove: A, B, C, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $C \backslash (A \cup B)$, $C_c(A)$, $C_c(B)$,
$C_c(A \cap B)$, $C_c(A \cup B)$.

□ **74.** Osenčene skupove na sl. 14 opisati pomoću skupova A, B i C:

1) Koristeći se oznakama operacija $\vee$, $\wedge$ i relacija $\in$ i $\notin$;

2) Koristeći skupovne operacije.



Sl. 14

△ **75.** Na slici 15 je unija proizvoljnih skupova A, B, i C rastavljena na disjunktne skupove: $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7$. Slično opisu u **zadatku 74**, opisati skupove $D_1, D_2, \ldots, D_7$.

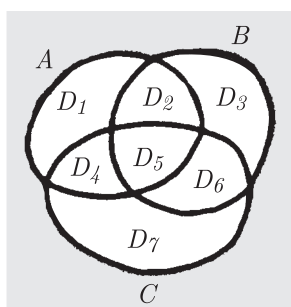
2) Iz dijagrama zaključujemo da je $A = D_1 \cup D_2 \cup D_4 \cup D_5$. Koristeći slične jednakosti dokazati:

a) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$;

b) $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$;

c) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;

d) $A \backslash (B \cap C) = ((A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.



Sl. 15

□ **76.** Dati su $card\ A = 26$, $card\ B = 29$, $card\ C = 33$, $card\ (A \cap B) = 14$, $card\ (A \cap C) = 16$, $card\ (B \cap C) = 18$, $card\ (A \cap B \cap C) = 16$. Koristeći dijagrame odrediti:

1) $card\ (A \backslash (B \cup C))$; 2) $card\ (B \backslash (A \cup C))$; 3) $card\ (C \backslash (B \cup A))$;

4) $card\ ((A \cap B) \backslash C)$; 5) $card\ ((B \cap C) \backslash A)$; 6) $card\ ((A \cap C) \backslash B)$.

b) Odrediti $card\ A$ i $card\ B$, ako je:

1) $card\ (A \backslash B) = 5 \wedge card(B \backslash A) = 6 \wedge card(A \cap B) = 3$;

2) $card\ (A \backslash B) = 4 \wedge card(B \backslash A) = 8 \wedge card(A \cup B) = 18$;

3) $card\ (A \backslash B) = 10 \wedge card(A \cap B) = 7 \wedge card(A \cup B) = 24$.

○ **77.** Dati su skupovi $A = \{a|\ a|18 \wedge a \in N\}$, $B = \{b|\ b|30 \wedge b \in N\}$, $C = \{c|\ c|45 \wedge c \in N\}$. Odrediti skup X, koji zadovoljava sledeće uslove:

$$X \cap A = X,\ X \cap B = X \cap C = A \cap B \cap C,\ X \backslash B = X \backslash C \neq \varnothing$$

○ **78.** Skupovne identičnosti mogu se dokazivati pomoću tablica, sličnih istinitosnim tablicama, samo umesto $\top$ i $\perp$, tablice popunjavamo sa $\in$ i $\notin$. Pri tome koristimo ekvivalenciju, kojom se definiše jednakost dvaju skupova:

$$(A = B) \iff (\forall x)((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \wedge (\forall x)((x \in B) \Rightarrow (x \in A)).$$

Tako, na primer, za dokaz identičnosti $(A \cap B) \backslash C = A \cap (B \backslash C)$, načinićemo tablicu:

A	B	C	$A \cap B$	$B \backslash C$	$A \cap B \backslash C$	$A \cap (B \backslash C)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$

Dve poslednje kolone, kao što vidimo, popunjene su na identičan način, što potvrđuje zadatu identičnost. Odavde zaključujemo da se može pisati bez zagrada: $A \cap B \backslash C$.

Slično navedenom primeru, dokazati sledeće skupovne identičnosti:

a) $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$ (zakon idempotentnosti unije i preseka skupova);

b) $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$ (zakon komutativnosti unije i preseka skupova);

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ i $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (zakoni distributivnosti);

d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ i $(A \cap B)' = A' \cup B'$, gde $'$ ("prim") označava komplement skupa (De Morganovi zakoni za skupove).

○ **79.** Skupovne jednakosti mogu se dokazivati na osnovu definicija skupovnih operacija i ekvivalencije kojom se definiše jednakost dva skupa. Na primer, jednakost

$(A \cup B')' = A' \cap B$ dokazujemo koristeći ekvivalenciju:

$$(A \cup B')' = A' \cap B \iff (\forall x)(x \in (A \cup B')' \Rightarrow x \in (A' \cap B))\wedge$$
$$\wedge(\forall y)(y \in (A' \cap B) \Rightarrow y \in (A \cup B')'.$$

Prvi deo dokaza:

$$(\forall x)(x \in (A \cup B')' \Rightarrow x \notin (A \cup B') \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B' \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in (A' \cap B)).$$

Drugi deo dokaza:

$$(\forall y)(y \in (A' \cap B) \Rightarrow y \in A' \wedge y \in B \Rightarrow y \notin A \wedge y \notin B' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y \notin (A \cup B') \Rightarrow y \in (A \cup B')').$$

Dokazati skupovnu jednakost $(B \backslash C) \cap A = (A \cap B) \backslash C$:

a) Koristeći dijagrame i disjunktne podskupove, kao u zadatku 75.

b) Koristeći tablice pripadnosti, kao u zadatku 78.

c) Koristeći definicije skupovnih operacija, kao što je učinjeno sa upravo dokazanim primerom.

□ **80.** Koja od navedenih skupovnih formula je tačna:

a) $A \cap B = B \Rightarrow A \subset B$; b) $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$;

c) $A \cup B = B \Rightarrow B \subset A$; d) $A \cup B = A \Rightarrow B \subset A$;

e) $A \subset B \Rightarrow B \backslash A = \varnothing$; f) $A \subset B \Rightarrow A \backslash B = \varnothing$; g) $A \backslash B = \varnothing \iff A \subset B$;

h) $A \cup B = A \iff A \subset B$; i) $A \cup \varnothing = \varnothing \iff A = \varnothing$.

○ **81.** Učenik je napisao na školskoj tabli redom prirodne brojeve od 1 do 1000. Prvo je izbrisao brojeve koji su deljivi sa 4 i brojeve koji su deljivi sa 6, a zatim i brojeve koji su deljivi sa 10. Koliko je brojeva ostalo na školskoj tabli?

□ **82.** U razredu ima 20 dečaka. Četrnaestorica imaju smeđe oči, petnaestorica imaju smeđu kosu, sedamnaestorica teže više od 60 kg, a osamnaestorica su viši od 165 cm. Dokazati da barem četvorica dečaka imaju sve navedene osobine.

□ **83.** Na Balkanskom kongresu matematičara svaki od 100 učesnika govori bar jedan od stranih jezika: engleski, francuski ili ruski. Ruski jezik govori 57 učesnika, ruski i francuski 28, engleski i francuski 34 a 5 učesnika govori samo francuski. Samo dva strana jezika govori 49 učesnika, a sva tri 11 učesnika. Odgovoriti

a) Koliko učesnika govori francuski jezik? b) Koliko učesnika govori samo engleski jezik? c) Koliko učesnika ne govori francuski jezik?

○ **84.** U školskom izveštaju dati su podaci o sportskim aktivnostima učenika: 50 % igra košarku, a 40 % rukomet. Svaki deseti učenik bavi se rukometom i fudbalom, 5 % bavi se sa sva tri sporta. Za fudbal nije zainteresovano 40 % učenika. 30 % učenika igra fudbal, a ne igra košarku, a 20 % igra rukomet, a za košarku se ne interesuje.

a) Koliko procenata učenika ove škole ne upražnjava ni jedan od navedenih sportova? b) Koliko procenata učenika upražnjava samo jedan sport?

∗ **85.** U nekom društvu matematičara svaki od njih se bavi bar jednom od sledećih grana matematike : algebrom, analizom, geometrijom ili logikom. Onaj koji se bavi algebrom ili logikom bavi se i analizom; onaj koji se bavi geometrijom bavi se i logikom; onaj koji se bavi analizom i geometrijom bavi se i algebrom. Kojom od ovih grana se bavi najviše, a kojom najmanje matematičara?

○ **86.** Uočimo skup $A = \{1, 2, 3\}$. Skup čiji su elementi svi podskupovi skupa A naziva se *partitivni skup* skupa A. To je skup

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Naći partitivne skupove datih skupova:

a) $M = \{m, n\}$; b) $N = \varnothing$; c) $S = \{*, \circ, \square, \triangle\}$.

□ **87.** 1) Naći Dekartove proizvode dvaju datih skupova, $A \times B$ i $B \times A$:

a) $A = \{a\}$, $B = \{b, c, d\}$; b) $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$;

c) $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$.

Da li važi zakon komutacije za Dekartov proizvod, tj. da li važi jednakost: $A \times B = B \times A$?

2) Odrediti Dekartove kvadrate datih skupova:

a) $A = \{1\}$; b) $B = \{a, b\}$; c) $C = \{m, n, p\}$; d) $D = \{2, 4, 6, 8\}$.

2.2 BINARNE RELACIJE

△ **88.** Znak ρ zameniti jednim od znakova: $=$, $<$, $>$, $|$, tako da dati zapis postane tačna formula:

a) $2\rho 3$; b) $2\rho 2$; c) $1\rho(-1)$; d) $2\rho 4$; e) $2\rho\frac{1}{2}$; f) $x\rho 2x$, $x \in N$;

g) $(x-1)(x+1)\rho(x^2-1)$, gde je x realan broj, različit od 1 i -1,

h) $(x-1)(x-1)\rho(x-1)^2$, gde je x realan broj, različit od 1,

i) $(x+x)\rho 2x$, gde je x iz R i $x \neq 0$.

□ **89.** Na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ određena je relacija ρ, tako da $x\rho y$ – ako i samo ako je $x + y \equiv 0 \pmod 2$[3)]

1) Načiniti tablicu relacije ρ.

2) Rešiti formule:

a) $\tau(1\rho x) = \top$; b) $\tau(2\rho x) = \bot$;

c) $\tau(x\rho 3) = \bot$; d) $\tau(x\rho 6) = \top$, gde je $x \in A$.

△ **90.** Relacija ρ skupa $A = \{2, 4, 6, 8\}$ data je tablicom:

1) Odrediti:

a) $\tau(6\rho 2)$; b) $\tau(4\rho 4)$; c) $\tau(6\rho 8)$;

d) $\tau(8\rho 6)$; e) $\tau(2\rho 2)$.

2) Rešiti formule:

a) $\tau(2\rho x) = \bot$; b) $\tau(4\rho x) = \top$;

c) $\tau(6\rho x) = \top$; d) $\tau(8\rho x) = \bot$.

ρ	2	4	6	8
2	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
4	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
6	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
8	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$

[3)] Čita se: "$x + y$ *kongruentno nuli, po modulu 2*", što znači da je $x + y$ deljivo sa 2, tj. pri deljenju sa 2 daje ostatak 0.

□ **91.** Koje su od relacija skupa R:

a) $=$; b) $>$; c) $<$; d) $\neq$; e) $\leq$; f) $\geq$; g) $|$ (se sadrži):

1° refleksivne, 2° simetrične, 3° antisimetrične, 4° tranzitivne?

Koja od navedenih relacija je relacija ekvivalencije, a koja je relacija poretka?

□ **92.** Relacija ρ skupa $A = \{1,2,3\}$ predstavljena je tablicom. Zbog čega ρ nije relacija ekvivalencije?

ρ	1	2	3
1	$\perp$	$\top$	$\top$
2	$\top$	$\perp$	$\top$
3	$\top$	$\top$	$\top$

○ **93.** Uočimo skup $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ i u njemu relaciju ρ definisanu ovako: $x\rho y$ *akko* $x - y \equiv 0 \pmod 3$, tj. *akko* x i y pri deljenju sa 3 daju isti ostatak.

a) Nacrtati graf relacije ρ, b) Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

c) Odrediti klase ekvivalencije skupa A u odnosu na relaciju ρ.

○ **94.** U skupu $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ definisana je relacija ρ na sledeći način: $x\rho y$ *akko* $x \leq y$.

a) Dokazati da je ρ relacija poretka, tj. da je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

b) Nacrtati graf relacije ρ. c) Načiniti tablicu relacije ρ.

□ **95.** Uočimo skup $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ i u njemu relaciju ρ, datu na sledeći način: $x\rho y$ *akko* $x|y$.

a) Dokazati da je ρ relacija poretka.

b) Nacrtati graf relacije ρ. c) Sastaviti tablicu relacije ρ.

d) Dokazati da je ρ relacija poretka na skupu N. Da li to važi za skup $Z\backslash\{0\}$?

○ **96.** Na skupu uređenih parova prirodnih brojeva definisana je relacija ρ:

a) $(x,y)\rho(x_1,y_1) \overset{\text{def}}{\iff} x + y_1 = x_1 + y$; b) $(x,y)\rho(x_1,y_1) \overset{\text{def}}{\iff} x \cdot y_1 = x_1 \cdot y$.

Dokazati da je ρ refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija, tj. da je ρ relacija ekvivalencije.

2.3 PRESLIKAVANJA

△ **97.** Neka je $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & a & b \end{pmatrix}$ preslikavanje skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$ na skup $\{a,b,c,d\}$. Odrediti:

a) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$;

b) Rešiti po x iz $\{1,2,3,4,5,6\}$ formule: $f(x) = a$, $f(x) = b$, $f(x) = c$, $f(x) = d$.

△ **98.** Uočimo preslikavanje $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$ skupa $\{a,b,c,d\}$ na samog sebe. Odrediti:

a) $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(f(d))$;

b) Rešiti formule po x iz skupa $\{a,b,c,d\}$: $f(x) = a$, $f(f(x)) = b$, $f(f(f(x))) = d$,

△ **99.** Preslikavanje skupa A u skup B može se opisati slikom (grafom) uz dogovor da strelica ide od lika (elementa skupa A) ka slici (elementu skupa B), sl. 16.

1) Iz priložene slike odrediti:

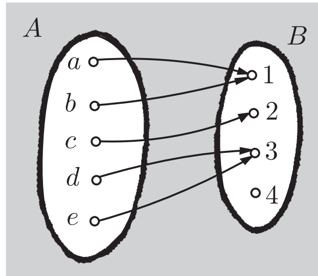
a) $f(a)$; b) $f(b)$; c) $f(c)$; d) $f(d)$;

e) $f(e)$.

2) Rešiti po x iz skupa $A = \{a, b, c, d, e\}$ formule:

a) $f(x) = 1$; b) $f(x) = 2$; c) $f(x) = 3$;

d) $f(x) = 4$.



Sl. 16

□ **100.** Odrediti sva preslikavanja skupa A u samog sebe, u slučajevima:

a) $A = \{a\}$; b) $A = \{a, b\}$.

○ **101.** Vrednost promenljive x u skupu R za koju je tačna formula $f(x) = x$, naziva se *nepokretna (fiksna) tačka* funkcije $f(x)$. Tako, na primer, nepokretna tačka funkcije $f(x) = 2x - 1$ je broj 1, jer je tačna formula $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, tj. $f(1) = 1$. Ova se tačka dobije iz uslova $f(x) = x$, u ovom slučaju iz $2x - 1 = x$.

1) Odrediti, ukoliko postoje, nepokretne tačke funkcija:

a) $f(x) = 2x$; b) $f(x) = x$; c) $f(x) = 2x + 1$; d) $f(x) = x + 1$.

2) Ako sa f označimo preslikavanje skupa $A = \{a, b, c, d, e\}$ u samog sebe, odrediti nepokretne tačke preslikavanja u sledećim slučajevima:

a) $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & e & d \end{pmatrix}$; b) $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$; c) $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & c & b & a & d \end{pmatrix}$

3) Ako je $A = \{1, 2, a, b\}$, odrediti sva preslikavanja skupa A u samog sebe tako da: a) svaki element skupa A bude nepokretna tačka, b) 1 i a budu nepokretne tačke, c) b bude nepokretna tačka, d) ne bude nepokretnih tačaka.

□ **102.** Koliko ima $1 - 1$ i *na* preslikavanja skupa A u samog sebe u slučaju:

a) A je $\{1, 2, 3, 4\}$; b) A je $\{1\}$; c) A je $\{1, 2\}$;

c) A je $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; e) A je $\{a, b, c, d\}$.

□ **103.** Uočimo funkciju $f = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \end{pmatrix}$ koja preslikava skup $A = \{p, q, r\}$ u samog sebe. Odrediti:

a) f^2, tj. $f \circ f$; b) f^3, tj. $f^2 \circ f$; c) f^4, tj. $f^3 \circ f$;

d) f^5, tj. $f^4 \circ f$; e) f^6, tj. $f^5 \circ f$;

○ **104.** Data je funkcija $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ koja preslikava skup $\{1, 2, 3\}$ na samog sebe. Rešiti po x (iz skupa N) sledeće formule:

a) $f^x = I$, gde je I identično preslikavanje, tj. $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $f^x = f$; c) $f^x = f^2$.

Uputstvo: Obrazovati f^n (n je $1, 2, 3, \ldots$) i utvrditi pravilo pomoću kog se može f^n svesti na f ili na f^2.

○ **105.** Odrediti $f \circ g$, (f i g su funkcije), ako je:

a) $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$; b) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x$;

c) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x + 1$; d) $f(x) = x + 3$, $g(x) = x - 1$.

□ **106.** Data su preslikavanja $f = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & d & c \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$, skupa $A = \{p, q, r, s\}$ na skup $B = \{a, b, c, d\}$. Odrediti inverzna preslikavanja f^{-1}, g^{-1} i h^{-1}, skupa B u skup A.

□ **107.** Data je linearna funkcija:

a) $f(x) = 2x - 1$; b) $f(x) = 3x - 2$; c) $f(x) = \dfrac{1}{2}x$; d) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{4}x$.

Odrediti $f^{-1}(x)$, a zatim dokazati da je $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ i $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

○ **108.** Odrediti $f(x)$ ako je:

a) $f(2x + 1) = 3x - 2$; b) $f(x + 3) = x$; c) $f\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) = \dfrac{2x}{3} + 1$;

d) $f(4x - 1) = \dfrac{1}{4}x + 1$; e) $f(2x) = \dfrac{x}{2}$; f) $f^{-1}(x) = x - 3$.

2.4 BINARNE OPERACIJE

△ **109.** Tablicama $\begin{array}{c|cc} * & p & n \\ \hline p & p & n \\ n & n & p \end{array}$ $\begin{array}{c|cc} \circ & p & n \\ \hline p & p & p \\ n & p & n \end{array}$ definisane su operacije skupa $\{p, n\}$.

1) Izračunati vrednost izraza:

a) $p * n$; b) $n \circ n$; c) $(p * p) \circ (n * p)$; d) $p \circ (p * (n \circ (p * n)))$.

2) Rešiti po x (x iz $\{p, n\}$) jednačine:

a) $p * x = n$; b) $(p * x) * n = p$; c) $(n \circ x) \circ n = n$; d) $(p * x) \circ (n * x) = n$.

□ **110.** Dokazati da je komutativna operacija $*$ data tablicom $\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & c & a & b \\ b & a & b & c \\ c & b & c & a \end{array}$.

Zatim, rešiti jednačine po x u skupu $\{a, b, c\}$.

a) $a * x = b$; b) $x * b = c$; c) $(a * x) * c = b$; d) $b * x = x$;

e) $a * x = x * b$; f) $(x * x) * a = b$; g) $a * x = x$.

□ **111.** Neka je u skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ definisana operacija $*$ na sledeći način: $x * y \overset{\text{def.}}{=} NZD(x, y)$ gde je NZD oznaka za najveći zajednički delilac.

a) Sastaviti tablicu operacije $*$.

b) Da li je skup S zatvoren u odnosu na operaciju $*$, tj. da li je za sve x, y iz S takođe $x * y$ iz S?

c) Da li je operacija $*$ komutativna, tj. da li za sve $x, y \in S$, važi formula $x * y = y * x$?

□ **112.** U skupu R definisane su operacije $*$ sledećim jednakostima:

a) $x * y = \dfrac{x}{y}$; b) $x * y = x(x+y)$; c) $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$; d) $x * y = x - y$;

e) $x * y = x^2 + xy + y^2$.

Koja je od ovih operacija komutativna?

□ **113.** U skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definisane su operacije $*$ i $\circ$ na sledeći način: $x * y = \max(x, y)$, $(x \circ y) = \min(x, y)$[4)]

a) Sastaviti tablice operacija $*$ i $\circ$.

b) Dokazati da su operacije $*$ i $\circ$ komutativne.

○ **114.** Da li je algebarska struktura $(A, *)$ grupa ili Abelova (komutativna) grupa, ako:

1) $A = \{a, b, c\}$, a operacija $*$ data je tablicom desno?

2) operacije a, b, c, d, e su određene tablicama, a elementi skupa A su dati u prvoj levoj koloni tablica?

1)

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

2)

a	1	2
1	1	1
2	1	1

b	1	2
1	2	1
2	2	2

c	1	2
1	1	2
2	2	1

d	1	2
1	2	1
2	1	2

e	a	b	c
a	a	b	c
b	c	c	c
c	c	c	c

○ **115.** U skupu Q racionalnih brojeva definisane su operacije $\triangle$ i $\square$ na sledeći način: $x\triangle y = x+y+1$ $\quad x\square y = xy+x+y$. Dokazati da je operacija $\square$ distrributivna u odnosu na operaciju $\triangle$, tj. da za racionalne brojeve x, y, z važe jednakosti:

$$x\square(y\triangle x) = (x\square y)\triangle(x\square z) \text{ i } (y\triangle z)\square x = (y\square x)\triangle(z\square x).$$

4) max je oznaka za najveći broj, a min za najmanji. Npr. $\max(2,5) = 5$. (Videti uvod za 4. glavu).