PRVA GLAVA

1. LOGIKA

Iskaz je rečenica koja može biti samo *tačna* ili samo *netačna*.

Logičke konstante su $\top$ i $\bot$ ("te" i "nete") - tačno i netačno.

Istinitosna vrednost iskaza p označava se sa $\tau(p)$. Moguće je $\tau(p) = \top$ ili $\tau(p) = \bot$.

Negacija iskaza p je iskaz koji je tačan *ako i samo ako*[1)] je netačan iskaz p. Koristimo oznaku $\neg p$ ili $\overline{p}$. (Čitamo: *nije* p).

Konjunkcija iskaza p i q je iskaz koji je tačan ako i samo ako su tačna oba iskaza p i q. Oznaka je $p \wedge q$. (Čitamo: p i q.).

Disjunkcija iskaza p i q je iskaz koji je netačan ako i samo ako su netačna oba iskaza p i q. Oznaka je $p \vee q$. (Čitamo: p ili q).

Implikacija iskaza p i q je iskaz koji je netačan ako i samo ako je iskaz p tačan, a iskaz q netačan. Oznaka je $p \Rightarrow q$. (Ako p, *onda* q).

Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz koji je tačan ako i samo ako p i q imaju jednake istinitosne vrednosti. Oznaka je $p \Leftrightarrow q$. (p ekvivalentno sa q).

Ovo su osnovne logičke operacije i njima odgovaraju sledeće istinitosne tablice

negacija

p	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

konjunkcija

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

disjunkcija

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

implikacija

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

ekvivalencija

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Potreban i dovoljan uslov.

1) Iskazu $p \Rightarrow q$ odgovaraju sledeće rečenice:
   - *p povlači q*
   - *Iz p sledi q*
   - *Ako p, onda q*
   - *q, ako p*
   - *p je dovoljan uslov za q*
   - *q je potreban uslov za p.*
2) Iskazu $p \Leftrightarrow q$ odgovaraju rečenice:
   - *p povlači q i q povlači p*
   - *p je ekvivalentno sa q*
   - *Iz p sledi q i iz q sledi p*

[1)] Umesto *ako i samo ako* često se skraćeno piše *akko*.

- *q ako p i p ako q*
- *p ako i samo ako q*
- *p je potreban i dovoljan uslov za q.*

Ako su p i q iskazi, onda su iskazi takođe $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$.

Tautologija je iskaz t koji je *uvek tačan*, nezavisno od istinitosnih vrednosti iskaza $p, q, \ldots, r$, koji obrazuju t.

Tautologije su *zakoni logičkog zaključivanja* i često se zapisuju kao: $\dfrac{p, q}{r}$, što znači $(p \wedge q) \Rightarrow r$, ili na primer: $\dfrac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$, što znači $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

De Morganovi zakoni za konjunkciju i disjunkciju: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ i $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$.

Kvantori:

1° *Univerzalni kvantor* je $\forall$ – čita se: *svaki, bilo koji, proizvoljan.* (Na primer: $(\forall x)t$, čita se: "*Za svaki x vredi t*").

2° *Egzistencijalni kvantor* je $\exists$ – čita se: *postoji, neki, ima bar jedan.* (Na primer: $(\exists x)t$, znači: "*Za neki x vredi t*").

3° Koristimo i kvantor $\exists_1$ – čita se: *postoji tačno jedan*, ili *postoji jedan i samo jedan.*

Negacije kvantora su: $\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A$ i $\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$.

Elementi iskazne algebre

U rešavanju logičkih zadataka koristi se i izvesna analogija disjunkcije sa sabiranjem brojeva i analogija konjunkcije sa množenjem brojeva, kao i distributivnost konjunkcije prema disjunkciji (analogno distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje brojeva). U iskaznoj algebri (*Bulovoj algebri iskaza*) koristimo tablice:

disjunkcija

A	B	$A+B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

konjunkcija

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

negacija

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Za disjunkciju koristimo znak $+$, za konjukciju znak $\cdot$ i za negaciju nadvučenu crtu. Za istinitosnu vrednost iskaza "tačan" oznaka je 1, a za "netačan" oznaka je 0. Tablica konjunkcije potpuno je identična običnoj tablici množenja, a tablica disjunkcije razlikuje se od obične tablice sabiranja samo u slučaju: $1 + 1 = 1$. (Kod običnog sabiranja je $1 + 1 = 2$)

1.1 OSNOVNE LOGIČKE OPERACIJE

1.1.1 Iskazi i formule

△ **1.** Odrediti istinitosne vrednosti iskaza:

a) 0 je prirodan broj; b) 1 je prost broj;

c) $NZS(2, 6) = 12$; d) $NZD(3, 18) = 3$.

$\triangle$ **2.** Neka su 3 i 6 vrednosti redom promenljivih x i y. Da li su te vrednosti rešenja formula:

a) $(y-2)|(y+2)$; b) $NZS(x, x+2) = x(x+2)$;

c) $2x - y = y - 2x$; d) $NZD(x, y) = 1$.

$\triangle$ **3.** Rešiti formulu na nekom skupu znači naći sve one vrednosti promenljive u tom skupu, za koje je formula tačna.

U skupu N rešiti po x i y formule:

a) $x + 1 < 4$; b) $3|(x+1)$; c) $x \leq 0$; d) $x|6$;

e) $x + y = 7$; f) $x + y < 5$; g) $x^2 + y^2 < 5$; h) $x + y < x$;

i) $x + y \geq x^2 + y^2$; j) $\tau(2x \neq 8) = \bot$; k) $\tau(x + 2y \leq 4) = \top$.

$\triangle$ **4.** Umesto tačkica staviti odgovarajuće brojeve, tako da budu tačni iskazi:

a) ... je najmanji prirodan broj, b) ... je najveći negativan ceo broj,

c) ... nije ni pozitivan ni negativan broj.

1.1.2 Konjunkcija, disjunkcija, negacija

$\triangle$ **5.** Odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaza:

a) $|-5| = -(-5) \wedge \sqrt{121} = 11$;

b) $\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{10}{3}\right] \wedge \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = 7\right]$.

$\triangle$ **6.** Ako je $x, y \in N$, rešiti po x i y formule:

a) $x - 1 \leq 3 \wedge \dfrac{x+3}{2x} \leq 1$; b) $x > 3 \wedge x + 1 = 9$; c) $x|12 \wedge 2|(x+1)$;

d) $2|x \wedge x \in \{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11\}$; e) $x + y = 7 \wedge (x \leq 2 \wedge x \in N)$;

f) $(2^{x+1} < 20 \wedge x \in N) \wedge x + y = -2$; g) $y - 2x = 0 \wedge x - 2y = -3$.

$\triangle$ **7.** Utvrditi koji iskazi su tačni, a koji su netačni:

a) $(NZS(2,3) = 6 \wedge NZS(3,4) = 12) \vee (NZD(6,8) = 4 \wedge NZD(3,2) = 1)$;

b) $(3 - (3 - (-3))) : 3 = 1 \vee (3-2)^2 \leq (2-3)^3$;

c) $(2 \leq 5 \vee |-1| \geq 0 \wedge -\left(\dfrac{2}{-5}\right) \geq -\dfrac{5}{2}$.

$\triangle$ **8.** Odrediti najpre istinitosne vrednosti rečenica p, q, r, pa izračunati istinitosnu vrednost odgovarajuće formule:

a) $p : \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$: $q : (-2)^2 = -2^2$; $r :\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$;

b) $p : |-2| \geq |2|$; $q : (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$; $r : \bot \vee \top = \bot$; $p \vee (q \wedge r)$;

c) p: Bilo koji trougao može imati najviše dva prava ugla; q : Zbir dve stranice trougla veći je od treće stranice tog trougla; r : Zbir spoljašnjih uglova u trouglu jednak je zbiru unutrašnjih uglova trougla; $(q \wedge p) \vee (r \wedge q)$;

d) $p : \dfrac{1}{3} > -\dfrac{1}{2}$; $q : \dfrac{1}{3} \geq \dfrac{1}{2}$; $r : \dfrac{1}{3} : \dfrac{1}{2} = 1,5$; $p \vee (r \wedge (q \vee p))$.

△ **9.** Neka su p, q, r i s sledeće rečenice:

$p:$ Zbir unutrašnjih uglova u trouglu je $180°$

$q:$ Simetrale stranica trougla seku se u jednoj tački

$r:$ Svaki trougao je centralno simetrična figura

$s:$ U svaki trougao može se upisati krug.

Odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaznih formula:

a) $(p \vee q) \wedge r$; b) $(p \wedge q) \vee r$; c) $((p \wedge q) \vee r) \vee s$; d) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

e) $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$; f) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$; g) $(p \wedge (q \wedge (r \vee s)))$.

□ **10.** Sledeće formule rešiti po p, gde je $p \in \{\top, \bot\}$:

a) $\tau(\top \wedge p) = \top$; b) $\tau(p \wedge p) = \top$; c) $\tau(p \vee p) = \top$; d) $\tau(\top \vee p) = \bot$;

e) $\tau(p \vee p) = \bot$; f) $\tau((\top \wedge p) \wedge \top) = \top$; g) $\tau((\top \wedge p) \wedge p) = \top$;

h) $\tau((\bot \wedge p) \vee \bot = \bot$; i) $\tau((\top \vee p) \wedge p) = \top$; j) $\tau((p \wedge \top) \vee (p \vee \top)) = \bot$.

□ **11.** Uočimo rečenice:

a) Oba prirodna broja a i b su parna. b) Bar jedan od prirodnih brojeva a i b je paran. c) Bar jedan od prirodnih brojeva a i b je neparan. d) Oba prirodna broja a i b su neparna.

Koja od sledećih formula odgovara pojedinim od navedenih rečenica:

1) $a \in 2N + 1 \vee b \in 2N + 1$; 2) $a \in 2N \wedge b \in 2N$; 3) $a \in 2N \vee b \in 2N$,

4) $a \in 2N + 1 \wedge b \in 2N + 1$?

△ **12.** Izračunati:

a) $\top \wedge \top$; b) $\top \wedge \bot$; c) $\top \vee \bot$; d) $\top \vee (\top \wedge \bot)$; e) $\bot \vee (\bot \wedge \top)$;

f) $\bot \wedge (\top \vee \bot)$; g) $(\top \vee \top) \wedge (\bot \vee \bot)$; h) $(\top \wedge \top) \vee (\bot \wedge \bot)$;

i) $((\top \vee \bot) \wedge \bot)$; j) $(((\bot \wedge \bot) \vee \top) \wedge \top)$.

□ **13.** Dokazati jednakost:

a) $\tau(\top \vee p) = \top$; b) $\tau(\bot \vee p) = \tau(p)$; c) $\tau(\top \wedge p) = \tau(p)$;

d) $\tau(\bot \wedge p) = \bot$.

△ **14.** Sledeće rečenice kraće zapisati koristeći slova p i q i logičke znake $\wedge$, $\vee$, $\neg$:

a) nije p ili je q; b) nije: p ili q; c) p ili nije q; d) nije p ili nije q;

e) nije p i nije q; f) nije: p i q; g) nije: $p \vee q$ i: nije p ili je q.

△ **15.** Utvrditi da li se negacije zapisane u obliku:

a) $\neg(3 < 5)$; b) $\neg(5 = 2)$; c) $\neg(0 \in N)$; d) $\neg(5 \leq 4)$;

e) $\neg(3|4)$; f) $\neg(1 \notin N)$; g) $\neg(2 > 5)$; h) $\neg(6|8)$;

mogu i ovako napisati:

a) $3 > 5$; b) $5 \neq 2$; c) $0 \notin N$; d) $5 > 4$; e) $4|3$; f) $1 \in N$;

g) $2 \leq 5$; h) $6 \not| 8$. Koji su iskazi tačni?

△ **16.** Izračunati:

a) $\neg\bot \vee \bot$; b) $\neg(\top \vee \neg(\top \wedge \bot)$; c) $\neg(\top \wedge \top) \vee \neg)\bot \vee \bot)$;

d) $(\neg\bot \vee \neg(\top \vee \neg\top) \wedge \neg(\bot \wedge \neg\bot)$; e) $\neg(\neg\bot \vee \top) \wedge ((\neg\bot \wedge \top) \vee \neg(\neg\bot \wedge \top))$.

□ **17.** Dokazati da navedeni parovi formula imaju jednake istinitosne vrednosti za bilo koje istinitosne vrednosti iskaza p, q i r:
a) $\neg p \wedge \neg q$ i $\neg(p \vee q)$; b) $p \vee \neg q$ i $\neg(\neg(p \wedge q)$;
c) $p \wedge (q \vee r)$ i $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

1.1.3 Implikacija i ekvivalencija

△ **18.** Izračunati:
$(\top \Rightarrow \top) \wedge \bot$; $(\bot \Rightarrow \top) \vee \top$; $(\neg\top \Rightarrow \top) \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot)$; $(\neg\top \vee \top) \Leftrightarrow (\top \Rightarrow \top)$;
$\neg(\top \Rightarrow \bot) \vee (\top \Leftrightarrow \bot)$; $(\top \vee \bot) \Rightarrow (\top \vee (\bot \Leftrightarrow \neg\top))$.

□ **19.** Neka promenljiva x uzima vrednost iz skupa $\{1, 2, 3\}$. Za svaku vrednost x utvrditi istinitosnu vrednost formula:
a) $(x > 1 \vee x > 2) \Rightarrow x > 3$; b) $(x|6 \vee x|8) \Rightarrow (x > 3 \wedge x > 2)$;
c) $(x > 1 \wedge x > 2) \Rightarrow x > 3$; d) $x|4 \Rightarrow x|2$.

○ **20.** Obrazovati istinitosne tablice formula:
a) $p \Rightarrow \neg p$; b) $p \vee q \Rightarrow p$; c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$; d) $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$;
e) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Longleftrightarrow p)$; f) $((p \vee q) \Rightarrow (p \Longleftrightarrow r)) \wedge (\neg p \Longleftrightarrow r)$;
g) $p \vee (q \Rightarrow \neg r)$; h) $(p \vee \neg r) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$.

○ **21.** Ako su p i q ma kakvi iskazi, odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:
a) $q \Rightarrow ((\top \Rightarrow p) \Rightarrow \top)$; b) $((p \wedge q) \wedge \bot) \Rightarrow ((p \vee q) \vee \top)$;
c) $(q \vee \neg q) \Rightarrow (p \wedge \neg p)$; d) $(\bot \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow (\top \Rightarrow (p \wedge \neg p))$.

○ **22.** Neka je p proizvoljan iskaz. Dokazati da je tačno:
a) $\tau(\top \Rightarrow p) = \tau(p)$; b) $\tau(p \Rightarrow \top) = \top$; c) $\tau(\bot \Rightarrow p) = \top$.

□ **23.** Neka je sa $F(p)$ označena formula: $((\top \Rightarrow p) \Rightarrow \top) \Rightarrow p$. Izračunati: $F(\top)$, $F(\bot)$, $F(F(\top))$, $F(F(\bot))$.

1.2 POTREBAN I DOVOLJAN USLOV

△ **24.** Data je implikacija: $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$. Koje od navedenih rečenica opisuju datu implikaciju:
a) ako $x = 1$, onda $x^2 = 1$; b) ako $x^2 = 1$, onda $x = 1$;
c) $x^2 = 1$, ako $x = 1$; d) $x = 1$, samo ako $x^2 = 1$;
e) $x = 1$ je potreban uslov za $x^2 = 1$;
f) $x = 1$ je dovoljan uslov za $x^2 = 1$?

△ **25.** Data je formula: $x \in Z$. Koja od formula:
a) $x \in 2Z$; b) $x \in 2Z + 1$; c) $x \in Q$; d) x je prost broj;
e) $x \in \{-1, 0, 1\}$; f) x je rešenje jednačine $x^2 - 4 = 0$,
predstavljaju potreban, a koji dovoljan uslov datoj formuli?

□ **26.** Umesto tačkica staviti reči: *potreban*, ili *dovoljan*, ili *potreban i dovoljan*, tako da date rečenice imaju istinitosnu vrednost $\top$:

a) $x > 6$ je .... uslov za $x > 3$.

b) $x > 3$ je .... uslov za $x > 6$.

c) $x \in N$ je .... uslov za $x \in Z$.

d) $x = 0 \vee y = 0$ je .... uslov za $x \cdot y = 0$.

e) $x|15$ je .... uslov za $x|30$.

f) $x = 2 \vee x = -2$ je .... uslov za $x^2 = 4$.

g) $x \in Z$ je .... uslov za "x je prost broj".

□ **27.** Uočimo rečenicu: p : "Trougao je jednakokrak i nije jednakostraničan". Koja od navedenih rečenica je potreban i dovoljan uslov za rečenicu p:

a) uglovi trougla su jednaki; b) dve stranice trougla su jednake;

c) trougao ima tačno jednu osu simetrije;

d) trougao je centralno simetričan; e) jedan ugao trougla je prav?

1.3 TAUTOLOGIJE

△ **28.** Sastaviti istinitosne tablice za sledeće formule i utvrditi koje od njih su tautologije:

a) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$; b) $(p \wedge \neg p) \Rightarrow p$; c) $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p$;

d) $(p \Rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p$; e) $p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

□ **29.** Koristeći se istinitosnim tablicama, uverite se da su sledeće formule tautologije:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$; b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$; c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;

d) $p \Rightarrow (p \vee q)$; e) $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$; f) $\big((p \wedge q) \vee p\big) \Leftrightarrow p$; g) $p \Rightarrow (q \vee p)$.

□ **30.** Koristeći se De Morganovim zakonima, dokazati da su sledeće formule tautologije:

a) $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$; b) $\neg(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q)$.

□ **31.** Koristeći De Morganove formule, odrediti negacije sledećih rečenica:

a) $2 = 2 \vee 2 \neq 2$; b) $2 > 0 \vee 3|6$; c) $2 \in \{1, 2\} \vee 3 \in \{1, 2\}$;

d) $3 = 3 \wedge 4 = 4$; e) $-2 < 1 \wedge -1 < 0$; f) $2 \in \{1, 2\} \wedge 1 \in \{1, 2\}$;

g) $2 \in N \wedge -3 \in Z$; h) $2|4 \wedge 4|8$; i) $2 < 3 \vee 3|6$.

□ **32.** Dokazati da su ekvivalentne formule, koristeći se istinitosnim tablicama:

a) $p \Rightarrow q$ i $\neg p \vee q$; b) $p \Leftrightarrow q$ i $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$;

c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ i $p \Leftrightarrow q$; d) $\neg(p \Rightarrow q)$ i $p \wedge \neg q$; e) $\neg(p \Leftrightarrow q)$ i $\neg p \Leftrightarrow q$.

○ **33.** Za dokazivanje formule $A \Leftrightarrow B$ potrebno je i dovoljno dokazati sledeće implikacije:

a) $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$; b) $A \Rightarrow B$ i $\neg A \Rightarrow \neg B$; c) $\neg A \vee B$ i $\neg B \vee A$. Dokazati.

○ **34.** Dokazati da su tautologije:

a) $p \Rightarrow p$ (zakon identiteta); b) $p \vee \neg p$ (zakon isključenja trećeg); c) $\neg(p \wedge \neg p)$ (zakon neprotivrečnosti); d) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ (zakon negacije negacije); e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (zakon kontrapozicije); f) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (zakon *verum ex quo libet* – istina iz bilo čega); g) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (*modus ponens*); h) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ (*modus tollens*); i) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (zakon silogizma, odnosno zakon tranzitivnosti implikacije); j) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ i $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (De Morganovi zakoni).

○ **35.** Da je neka iskazna formula tautologija može se dokazati i *metodom svođenja na protivrečnost*. Na primer, dokažimo da je $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ tautologija. Pretpostavimo suprotno, tj. da nije tautologija, odnosno da je moguće da formula ima vrednost $\perp$. Na osnovu istinitosne tablice implikacije, to nastaje u slučaju $\tau(p) = \top$ i $\tau(\neg p \Rightarrow q) = \perp$. Tada bi na osnovu druge jednakosti, dakle ponovo na osnovu tablice implikacije, bilo: $\tau(\neg p) = \top$ i $\tau(q) = \perp$, tj. $\tau(p) = \perp$. Međutim, to protivreči pretpostavci da je $\tau(p) = \top$. Dakle, nije moguće da data formula ima vrednost $\perp$. Ona je prema tome tautologija. Dokaz je završen. Na sličan način, svođenjem na protivrečnost, ispitati da li su sledeće iskazne formule tautologije:

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$; b) $(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$; c) $p \Rightarrow (q \vee p)$;

d) $\neg(\neg p) \Rightarrow p$; e) $\neg(p \wedge \neg p) \Rightarrow p$; f) $p \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)$; g) $(p \vee q) \wedge p \Rightarrow (p \vee \neg q)$.

○ **36.** Izraziti osnovne logičke operacije preko implikacije i negacije. (Na primer: dokazati da je formula $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$ tautologija, odakle zaključujemo da je $\neg(p \Rightarrow \neg q)$ zamena za $p \wedge q$). Mogu li se osnovne logičke operacije slično izraziti pomoću negacije i disjunkcije (odnosno pomoću negacije i konjunkcije)?

1.4 KVANTORI

△ **37.** Koristeći kvantore $\forall x$ i $\exists x$, načiniti formulske zapise rečenica:

a) *Postoji* prirodan broj manji od 5. b) *Bar jedan* od prirodnih brojeva je manji od 5. c) Svaki racionalan broj je realan broj. d) Svaki realan broj je pozitivan ili negativan, ili jednak nuli. e) Svaki realan broj pomnožen sa 1 jednak je samom sebi. f) Svi celi brojevi su parni ili neparni, g) Neki prirodni brojevi su parni, h) Svaki prirodan broj je ceo broj, i) Postoji prirodan broj koji je rešenje jednačine $2x - 4 = 0$. j) Svaki realan broj je rešenje jednačine $0 \cdot x = 0$. k) Svaki ceo broj je racionalan. l) Najmanje jedan prirodan broj je rešenje formule $x|6$. m) Svaki paran broj je ceo broj. n) Svaki prirodan broj je pozitivan broj o) Neki članovi skupa $2N$ su veći od 1000. p) Postoji član skupa $2N$ takav da je jednak 10.

Odrediti istinitosne vrednosti ovih iskaza.

△ **38.** Rečenicu: Za *svaki x iz skupa A postoji y iz skupa A, tako da je $x = y$*, formulom pišemo ovako: $(\forall x \in A)(\exists x \in A)\ x = y$. Ako za svaki par elemenata x, y skupa A važi: $x = y$, onda pišemo: $(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ x = y$, ili $(\forall x, y \in A)\ x = y$. Zapisati upotrebom kvantora sledeće rečenice:

a) Zbir ma koja dva prirodna broja je prirodan broj. b) Proizvod svaka dva cela broja je ceo broj. c) Zbir realnih brojeva je komutativan. d) Od svakog prirodnog broja postoji veći prirodan broj. e) Za svaki ceo broj x postoji tačno jedan ceo broj y, tako da je $x + y = 5$. f) Za svaki ceo broj postoji manji ceo broj i postoji veći ceo broj. g) Za svaka dva prirodna broja postoji jedinstveni zbir koji je takođe prirodan broj.

△ **39.** Sledeći formulski zapis napisati rečima:
a) $(\exists x \in N)x = 1$; b) $(\exists x \in N)x > 5$; c) $(\exists x \in N)(x = 1 \vee x > 5)$;

d) $(\forall x)(x = 0 \vee x \neq 0)$; e) $(\forall x)(x \in Z \Rightarrow x \in Q)$; f) $(\exists x)(x \in Z \wedge x \in N)$.

□ **40.** Koja od sledećih formula je tačna:
a) $\neg(\forall x)(x < 2) \Leftrightarrow (\exists x)(x \geq 2)$; b) $\neg(\forall x)(x \neq 1) \Leftrightarrow (\exists x)(x = 1)$;

c) $\neg(\exists x)(x < 1 \wedge x > 3) \Leftrightarrow (\forall x)\neg(x < 1 \wedge x > 3)$;

d) $\neg(\exists x \in N)x^2$ je prost broj $\Leftrightarrow (\forall x \in N)x^2$ nije prost broj.

1.5 *DETEKTIVSKI ZADACI

Znanje iz matematičke logike iskoristićemo za rešavanje zadataka koji se sastoje u razrešavanju raznih komplikovanih situacija, ukrštenih izjava i jezičkih zavrzlama. Navešćemo nekoliko metoda za rešavanje ovakvih zadataka. Za sve probleme zajedničko je da svaka izjava, svaki podatak, predstavlja *iskaz*, dakle, uvek je *ili tačan ili netačan*. Neki od iskaza su konjunkcije, disjunkcije i sl. dvaju ili više iskaza. Umesto objašnjenja metoda rešićemo karakteristične primere.

1.5.1 Metoda uvođenja pretpostavke

41. *Filip, Luka* i *Mirko*, igrajući se u sobi, razbili su prozor. Vera je zbog toga bila ljuta i nijedan od trojice dečaka nije se usudio da prizna krivicu.

"Neko od vas laže", reče Vera.

Luka: "Mirko je slagao".

Mirko: "Znam da Filip neće da slaže".

Filip: "Laže Luka ili Mirko".

Vera je na osnovu ovih izjava zaključila ko je razbio prozor i krivcu ukinula džeparac za sledeći mesec.

Ko je razbio prozor?

Rešenje. Sigurno je da ne govore svi istinu, jer ako Luka ne laže, iz njegove izjave izlazi da laže Mirko. Takođe je nemoguće da svi lažu, jer, ako Luka laže, onda iz njegove izjave izlazi da Mirko nije slagao. Ko onda laže? Pođimo od Lukine izjave. Ako Luka govori istinu, onda Mirko laže, ako Luka laže, onda Mirko govori istinu. U oba slučaja izjava Filipova je disjunkcija oblika $\top \vee \bot = \top$. Dakle, Filip govori istinu. Prema tome, i Mirko je rekao istinu, pa je slagao samo Luka. Luka je razbio prozor. ♠

Postupajući slično, tj. uvodeći pretpostavku da je neki iskaz tačan ili netačan, analizom ostalih iskaza potvrditi pretpostavku ili je dovesti do protivrečnosti i tako rešiti sledeće zadatke.

42. *Aca, Miša* i *Rajko* čitaju "*Politiku*", "*Novosti*" i "*Sport*", i to svaki čita samo jedne od ovih novina. Upitali su Srboljupku, koja ih je videla sa novinama u rukama, da li se seća koje novine su čitala ova trojica. Ona je odgovorila: "*Aca* je čitao "*Politiku*", *Miša* nije čitao "*Novosti*", a *Rajko* nije čitao "*Politiku*". Pokazalo se da ju je sećanje izneverilo i da je odgovor bio tačan samo za jednog čitaoca.

Koje novine čitaju *Aca, Miša* i *Rajko*?

43. Za krađu prstena u robnoj kući osumnjičeni su *Zoran*, *Dušan* i *Nikola*, jer su se u vreme krađe našli u blizini vitrine sa nakitom. Islednik je postavio pitanje: "Ko je od vas trojice ukrao prsten?", Na to su ovi građani odgovorili: *Zoran*: "Ja nisam ukrao prsten. Ukrao ga je *Dušan*." *Dušan*: "Nikola nije ukrao prsten. Ni ja ga nisam ukrao", *Nikola*: "Ja nisam ukrao. Prsten je ukrao Zoran"..

Ispostavilo se da su dvojica oba puta rekli istinu, a da je jedan oba puta slagao. Ko je lopov?

44. Izvršeno je ubistvo. Sumnja je pala, na trojicu: Bucu, Denisa i Rizu. Na saslušanju kod islednika svaki je dao po dve izjave. Buca: "Ja to nisam učinio. *Denis* to nije učinio". *Denis*: "Buca to nije učinio. To je učinio Riza". *Riza*: "Ja to nisam učinio. To je učinio Buca." Dalje je utvrđeno sledeće. Ubistvo je učinilo samo jedno lice. Jedan od osumnjičenih, od svih poštovan deda, oba puta je rekao istinu. Drugi, poznati siledžija, oba puta je slagao. Treći, gotovo nepoznati građanin, jednom je rekao istinu, a jednom laž. Ko je izvršio ubistvo? Kako su se zvali deda, siledžija i malo poznati građanin?

1.5.2 Metoda tabela

45. Tri železničara *Arsić, Božić* i *Vasić*, rade u istoj brigadi kao *vozovođa*, *kondukter* i *ložač*. Njihova zanimanja nisu ovde obavezno navedena istim redom kao i njihova prezimena. U vozu koji opslužuje ova brigada nalaze se tri putnika iz tri grada, sa istim prezimenima: *drug Arsić*, *drug Božić* i *drug Vasić*. (Ispred prezimena putnika stavljena je reč "*drug*" da bi se ona razlikovala od prezimena železničara.) O šestorici navedenih ljudi znamo sledeće podatke:

1) *Drug Vasić* živi u *Beogradu*, 2) *Kondukter* živi u *Zagrebu*, 3) *Drug Božić* je već odavno zaboravio ono što je iz algebre učio u školi, 4) Putnik koji ima isto prezime kao *kondukter* živi u *Sarajevu*, 5) *Kondukter* i jedan od putnika, koji je inače stručnjak za matematičku fiziku, kupuju svakog jutra novine u istom kiosku, 6) *Arsić* uvek dobija partije bilijara koje u slobodno vreme ponekad igra sa *ložačem*. 7) *Ložač* i putnik iz *Zagreba* dogovorili su se da odigraju jednu partiju bilijara.

Odredite prezimena ložača i putnika iz Zagreba, koji igraju bilijar.

Rešenje. Date podatke upisaćemo u tabele (a) i (b). U prve kolone upišimo ispod Ž (železničari) i P (putnici) početna slova prezimena, a u prvu vrstu tabele (a) početna slova zanimanja i u prvu vrstu tabele (b) početna slova gradova u kojima žive putnici.

$Ž$	v	k	l
A			0
B			
V			

Tabela (a)

P	B	Z	S
A	0		
B	0		
V	1	0	0

Tabela (b)

Iz prvog uslova vidimo da drug Vasić živi u Beogradu. Stoga ćemo u drugoj tabeli poslednju vrstu ispuniti redom sa $1, 0, 0$[2] (jer drug Vasić ne živi ni u Zagrebu,

[2] 1 i 0 prema ranijem dogovoru označavaju *tačno* i *netačno*.

ni u Sarajevu). Prvu kolonu tabele (b) dopunićemo sa $0, 0$, jer drug Arsić i drug Božić ne žive u Beogradu. Iz uslova 6) vidimo da Arsić nije ložač, pa ćemo na kraju prve vrste tabele (a) upisati 0. Ovo se odmah može zaključiti iz datih uslova i to smo označili u tabelama (a) i (b).

Sada ćemo kombinovanjem datih uslova dobiti nove podatke za tabele. Iz uslova 5) vidimo da stručnjak za matematičku fiziku živi u isiom gradu sa kondukterom (kupuju novine u istom kiosku), tj. oba žive u Zagrebu (uslov 2). Ovaj stručnjak nije Božić, jer je prema 3) Božić odavno zaboravio algebru, a nije ni Vasić, jer je Vasić iz Beograda. Dakle, stručnjak za matematičku fiziku zove se Arsić i živi u Zagrebu. Unesimo ovaj podatak u tabelu (b_1). Sada se vidi da je drug Božić iz Sarajeva. Time je tabela (b_1) popunjena.

$\check{Z}$	v	k	l
A		0	0
B	0	1	0
V		0	

Tabela (a_1)

P	B	Z	S
A	0	1	0
B	0	0	1
V	1	0	0

Tabela (b_1)

Iz podatka 4) vidimo da se kondukter preziva Božić. Stoga kolonu ispod "k", popunimo redom sa $0, 1, 0$. Takođe ćemo u srednji red ove tabele staviti još dva puta 0. Sada se odmah iz tabele vidi da je Arsić vozovođa, a Vasić ložač (vidi tabelu (a_1)).

Dakle, Vasić i drug Arsić dogovorili su se da odigraju partiju bilijara. ♠

46. Posle završenog takmičenja na semaforu je objavljeno da su prva tri mesta zauzeli sledeći takmičari: 1. *Muja Ćamilović*, 2. *Cane Simić*, 3. *Novica Jerotić*. Posle kraćeg vremena spiker se izvinio gledaocima i objavio da je saopšteni redosled pogrešan. Zapravo, ni jedno ime ni prezime ne odgovaraju objavljenom redosledu takmičara, a takođe ni jedno ime ne odgovara napisanom prezimenu. Spiker je dodao da je pobedio *Simić*.

Odrediti tačan redosled takmičara, a imena i prezimena sastaviti kao što treba.

47. U svakom od četiri grada: Beogradu, Prištini, Podgorici i Novom Sadu rođen je i živi po jedan od izvesna četiri čoveka. Ni jedan od četvorice ne stanuje u mestu svojeg rođenja. Čovek rođen u Beogradu ne stanuje u Podgorici. Mesto stanovanja čoveka koji je rođen u Novom Sadu, ujedno je mesto rođenja čoveka koji stanuje u rodnom mestu čoveka koji stanuje u Prištini. Gde stanuje čovek rođen u Podgorici?

48. U jednoj školi ima tri odeljenja I razreda. Profesor *matematike* je razredni starešina u I_1, profesor *fizike* u I_2 i profesor *hemije* u I_3. U rukovodstvo matematičke sekcije razreda delegirano je po dva učenika iz svakog odeljenja. Imena tih učenika su: *Lela*, *Ljilja*, *Nada*, *Cane*, *Vlada* i *Mika*. Osim toga, znaju se sledeći podaci: 1) *Vlada* je igrao fudbal protiv odeljenja čiji je razredni starešina professor *hemije*. 2) *Mikin* razredni starešina ne predaje ni u *Canetovom*, ni u *Vladinom* odeljenju. 3) *Mika* ne poznaje nikog iz I_1. 4) *Nadin* razredni starešina je *matematičar*, a *hemiju* joj predaje *Ljiljin* razredni starešina.

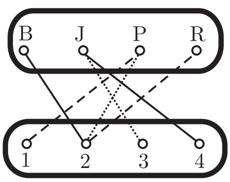
Na osnovu ovih podataka utvrdite iz kojeg odeljenja je *Lela*. Ako su *Mika* i *Lela* iz istog odeljenja, navesti imena delegata ostalih odeljenja.

1.5.3 Metoda grafova

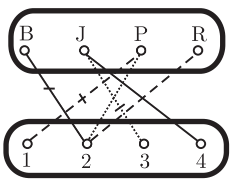
Podaci koje treba razvrstati često predstavljaju dva, tri ili više skupova čiji elementi su na neki način povezani. Pritom svakom elementu jednog skupa odgovara jedan i samo jedan elemenat drugog skupa, i obrnuto. Dati podaci otkrivaju neke od ovih veza, a mi treba da otkrijemo ostale. Crtanjem Ojler-Venovih dijagrama ovih skupova i povezivanjem odgovarajućih elemenata linijama ili strelicama dobijamo grafove. Zadate su nam neke linije ovih grafova, a naš zadatak je da ih kompletiramo ili da otkrijemo samo neke od nepoznatih linija. Pogledajmo na sledećim primerima kako se to može činiti.

49. Na turniru učestvuju četiri košarkaške ekipe: "Partizan", "Jugoplastika", "Bosna" i "Rabotnički". Pre početka turnira treneri su dali sledeće prognoze. *Trener "Partizana"*: "Bosna" će biti druga, "Jugoplastika" četvrta. *Trener "Jugoplastike"*: "Partizan" će biti prvi, "Rabotnički" drugi. *Trener "Bosne"*: "Partizan" će biti drugi, "Jugoplastika" treća. *Trener "Rabotničkog"* nije želeo da daje prognozu. Na kraju se ispostavilo da je svaki trener pogodio poredak samo jedne ekipe. Znate li kakav je bio redosled ekipa na kraju turnira?

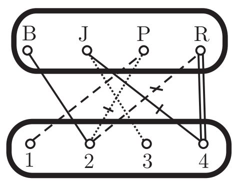
Rešenje. Nacrtajmo Ojler-Venove dijagrame skupa početnih slova naziva ekipa i skupa čiji su elementi redni brojevi mesta na tabeli. Zatim povežimo linijama elemente o kojima je reč u datim izjavama. (Puna linija predstavlja izjavu "Partizanovog" trenera, a tačkama je označena izjava trenera "Bosne"). Dobijamo graf prikazan na sl. 1. Pošto od svakog elementa polaze po dve linije, moraćemo po jednu eliminisati i zadržati samo one koje predstavljaju tačne iskaze.



Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3

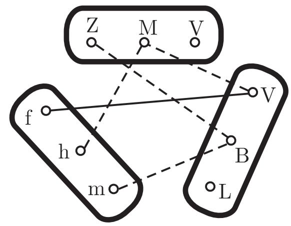
Pretpostavimo da je netačna izjava da je "Bosna" druga. Stoga precrtajmo punu liniju koja spaja elemente B i 2. Ovu liniju ćemo označiti sa $B-2$. Tada je tačno $J-4$, pa sledi da je netačno $J-3$ (precrtaćemo odgovarajuću tačkastu liniju) Ako nije tačno $J-3$, onda je tačno $P-2$, a u tom slučaju treba precrtati $P-1$. Tako dobijemo graf na sl. 2. Ako je pretpostavka tačna, onda su drugo mesto osvojili "Partizan" i "Rabotnički". Ovo nije moguće. Dakle, tačno je $B-2$, što povlači da treba precrtati $P-2$ i $R-2$, a takođe i $J-4$. Tako dobijemo ispravan graf na sl. 3. Vidimo da je "Partizan" prvi, "Bosna" druga i "Jugoplastika" treća. Ostaje četvrto mesto za "Rabotnički" (dopisana dvostruka linija na sl. 3). ♠

50. Tri prijatelja, *Zoran*, *Mika* i *Vlada*, profesori iz tri različita predmeta (*matematiku*, *fiziku* i *hemiju*), rade u školama u tri grada: *Loznici*, *Valjevu* i *Beogradu*. Poznato je sledeće. 1) *Zoran* ne radi u *Beogradu*, a *Mika* ne radi u *Valjevu*, 2) *Beograđanin* ne predaje *matematiku*, 3) Onaj koji radi u *Valjevu* predaje *fiziku*, 4) *Mika* ne predaje *hemiju*.

Koji predmet i u kom gradu predaje svaki od profesora?

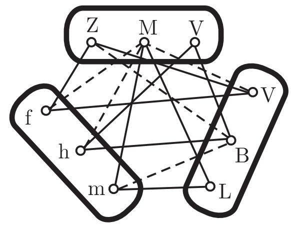
Rešenje. Prilikom ispunjavanja grafova koristićemo činjenicu da se svaki elemenat jednog skupa povezuje sa tačno jednim elementom drugog skupa. Pri tom se misli na *odgovarajuće* elemente. No, prilikom upisivanja datih podataka moramo upisati i činjenice da neki elementi nisu jedan drugom odgovarajući. Stoga ćemo se dogovoriti da *odgovarajuće elemente spajamo punim linijama.* Isprekidanim linijama spajaćemo dva elementa koji nisu odgovarajući jedan drugom. U skladu sa ovim dogovorom nacrtajmo Ojler-Venove dijagrame za postavljeni zadatak i upišimo odgovarajuće pune i isprekidane linije.

Ovde imamo tri skupa, čije elemente smo označili početnim slovima. Skup imena je $\{Z, M, V\}$, skup predmeta $\{f, h, m\}$ i skup gradova $\{B, V, L\}$. Svaki elemenat jednog skupa odgovara tačno jednom od elemenata iz drugog skupa. Na osnovu datih činjenica dobijamo graf prikazan na sl. 4. Tri odgovarajuća elementa iz tri data skupa obrazovaće trougao nacrtan punom linijom. Prema tome, rešenje na grafu biće tri trougla nacrtana punim linijama.



Sl. 4

Linije koje budemo povlačili označićemo krajnjim elementima. Pošto je MV isprekidana linija, to ne postoji trougao MVf sa punim linijama, pa je i linija fM isprekidana (ako M ne odgovara elementu V, ne može odgovarati ni elementu f). Pošto smo povukli isprekidane linije Mf i Mh, to linija Mm mora biti puna (ako elemenat M ne odgovara elementima f i h iz skupa predmeta, on mora odgovarati preostalom elementu m). Sada na isti način zaključujemo da je u trouglu MmB linija MB isprekidana, pa kako su ranije BZ i BM isprekidane, to linija BV mora biti puna (B i V su odgovarajući elementi). Nastavljajući dalje povlačenje linija po istim principima dobićemo potpuni graf na sl. 5. Odatle vidimo sledeće: 1) Zoran predaje fiziku u Valjevu, 2) Mika predaje matematiku u Loznici, 3) Vlada predaje hemiju u Beogradu. ♠



Sl. 5

51. *Milena*, *Dragica*, *Rajko* i *Crešo* rukovode *likovnom*, *muzičkom*, *dramskom* i *sportskom* sekcijom u svojoj školi. (Svako učestvuje u radu samo jedne sekcije). Svaki od pomenutih učenika uči tačno jedan od stranih jezika: *engleski*, *francuski*, *nemački* i *ruski*. Odrediti koji strani jezik uči svaki od ovih učenika i kojom sekcijom rukovodi, ako je poznato sledeće: a) Rukovodilac dramske sekcije ne uči ruski. b) Milena se ne bavi sportom, ni muzikom i ne uči engleski jezik. c) Rajko uči francuski jezik, ali se ne bavi sportom. d) Onaj koji uči nemački smatra da je pametno što nije član muzičke sekcije. e) Dragica ne voli ni sport, ni muziku i kaže da bi se ispisala iz škole ako bi je neko prisiljavao da uči ruski ili engleski jezik.

52. Četiri profesora: *Voja*, *Ljuba*, *Živko* i *Zvonko*, stari poznanici sa Prirodno-matičkog fakulteta, gde su studirali *fiziku*, *hemiju*, *matematiku* i *geografiju* (svaki po jedan predmet), sreli su se za vreme zimskog raspusta u Beogradu. Iz razgovora saznali su da predaju u srednjim školama u *Valjevu*, *Boru*, *Loznici* i *Nišu*. Jedan matematičar, koji je sedeo za susednim stolom, čuo je sledeće podatke. 1) Voja ne predaje ni hemiju, ni matematiku i nikad nije bio u Boru. 2) Živko predaje u Loznici, ali ne hemiju. 3) Ljuba je zaboravio hemiju, a kvadratne jednačine nije znao ni kad ih je učio u gimnaziji. 4) Nišlija priznaje da je i on zaboravio hemiju. 5) Valjevac predaje geografiju.

Na osnovu ovih podataka, koje ja zapisao i proučio, matematičar je saznao koji predmet i u kojem mestu predaje svaki od četiri prijatelja. Do kakvog je zaključka on došao?

1.5.4 Metoda negacije iskaza

Podrazumeva se da sve ličnosti koje se pominju u zadatku znaju matematičku logiku, pa u davanju odgovora greše ili ne greše, zavisno od toga da li su iskreni ili su "lažovi".

53. Neki putnik (dobar znalac matematičke logike) obreo se u gradu za koji ne zna da li je Šabac ili nije. Jedino zna da se nalazi u kraju u kojem svaki stanovnik uvek govori istinu, ili uvek laže. Kako će ovaj putnik od prvog građanina kojeg sretne saznati da li se nalazi u Šapcu? Na postavljena pitanja stanovnici odgovaraju sa "da" ili "ne".

Rešenje. Putnik zna za princip da je negacija laži istina. Stoga će prvom prolazniku postaviti pitanje: "*Ako bih te pitao da li se nalazim u Šapcu, šta bi mi ti odgovorio*". Ako dobije odgovor "Da", onda je u Šapcu. Odgovor "Ne" znači da putnik nije u Šapcu. Zašto je tako? Ako se putnik nalazi u Šapcu, a prolaznik govori uvek istinu, onda je odgovor jasno: "Da". Ako prolaznik uvek laže, on laže i da bi odgovorio sa "Ne", pa zbog toga kaže "Da". (On zna da bi odgovorio "Ne", ali ponovo laže, pa tako dobijamo potvrdan odgovor). Ovo je tzv. *negacija negacije.* Čitaocu prepuštamo da sam razjasni zašto odgovor "Ne" znači da putnik nije u Šapcu. ♠

54. Divljaci uhvate jednog istraživača, inače dobrog logičara, i zatvore ga u pećinu sa dva izlaza. Na svakom izlazu stajao je po jedan čuvar. Poglavica, videći da je istraživač dobronameran naučnik, odluči da mu pruži šansu da se spase i reče mu: "Jedan od izlaza vodi u slobodu, a jedan u kavez sa tigrovima. Možeš da pitaš stražare koji izlaz da izabereš. Samo vodi računa o tome da oni govore istinu samo kad su dobro raspoloženi, inače uvek lažu". Istraživač je pronašao pravo pitanje i spasao se. Šta je on pitao stražara?

55. U gradu *Istilažu* neki stanovnici *uvek lažu*, a neki *uvek govore istinu.* U taj grad stigne putnik, koji je znao za ovo. On naiđe na lice A koje je znalo njegov jezik i zamoli ga da mu bude tumač. Međutim, putnik nije znao kojoj vrsti građana pripada lice A. Stoga ga zamoli da ovaj zapita vozača taksija (lice B) da li on (vozač) govori istinu. Ovaj to učini i reče mu da je vozač odgovorio da uvek govori istinu. Na osnovu toga putnik je znao da li njegov tumač laže ili govori istinu.

Kojoj grupi stanovnika pripada lice A?

56. U jednom gradu postoje tri vrste stanovnika: koji uvek lažu (označimo ih sa L), koji uvek govore istinu (označimo ih sa I) i koji nekad lažu, a nekad govore istinu (označimo ih sa P). Za stolom sede tri stanovnika, i to jedan iz grupe L, jedan iz grupe I i jedan iz grupe P. Došljak, dobar logičar, znajući da su pred njim takvi stanovnici, postavio im je tri pitanja (svako pitanje jednom od trojice prisutnih – nije obavezno da budu različita lica), na koja je svaki put dobio odgovor "Da", ili "Ne". Na osnovu ovih odgovora došljak je utvrdio ko je L, ko je I i ko je P. Objasnite kako je došljak uspeo da odredi kojoj vrsti pripada svaki od prisutnih.

1.5.5 Metoda iskazne algebre

Koristeći istinitosne tablice logičkih operacija i navedene važeće zakone i oznake, možemo rešavati detektivske zadatke gotovo formalnim računanjem. Da bi se mogla koristiti ova metoda moramo prvo naučiti osnovne zakone matematičke logike, (asocijativnost, komutativnost i distributivnost logičkih operacija).

57. Na šahovskom turniru prva četiri mesta su zauzeli: *Aca*, *Jela*, *Muja* i *Spoma*. Na pitanje kako su se plasirali, pobednici su izjavili: *Aca*: "Jela je druga, Muja treći". *Jela*: "Muja je drugi, Aca četvrti". *Muja*: "Aca je treći, Spoma druga". Nezadovoljna svojim uspehom Spoma nije želela da daje izjave. Ostali su, sa namerom da zbune novinare, dali po jedan tačan i jedan netačan podatak, i tu svoju nameru su im na kraju otkrili. Među novinarima bio je jedan koji je znao matematičku logiku i u njegovom listu je objavljen tačan redosled takmičara. Kako je novinar odredio tačan redosled?

Rešenje. Sa J_2 označimo da je Jela zauzela drugo mesto, sa M_3 da je Muja zauzeo treće mesto, i slično. Tako dobijamo tri formule iz tri izjave: $J_2 + M_3 = 1$ $M_2 + A_4 = 1$, $A_3 + S_2 = 1$. (Koristimo osobinu: disjunkcija jednog tačnog i jednog netačnog iskaza je tačan iskaz: $\top \vee \bot = \bot \vee \top = \top$, ili $1+0 = 1$). Zatim, iskoristimo zakon distributivnosti konjunkcije prema disjunkciji: $(J_2 + M_3) \cdot (M_2 + A_4) = 1$, odakle je: $J_2 \cdot M_2 + J_2 \cdot A_4 + M_3 \cdot M_2 + M_3 \cdot A_4 = 1$

Ovde je $J_2 \cdot M_2 = 0$ jer ne mogu i Jela i Muja biti drugi, pa je to konjunkcija oblika $\top \wedge \bot = \bot$. Takođe je $M_3 \cdot M_2 = 0$, jer ne može Muja biti i treći i drugi. Ostaje uslov: $J_2 \cdot A_4 + M_3 \cdot A_4 = 1$. Uzimajući u obzir i treću izjavu dobićemo: $(J_2 \cdot A_4 + M_3 \cdot A_4) \cdot (A_3 + S_2) = 1$, odakle je: $J_2 \cdot A_4 \cdot A_3 + J_2 \cdot A_4 \cdot S_2 + M_3 \cdot A_4 \cdot A_3 + M_3 \cdot A_4 \cdot S_2 = 1$. Zaključujući kao u prethodnom slučaju, utvrdimo da je $J_2 \cdot A_4 \cdot A_3 = 0$, $J_2 \cdot A_4 \cdot S_2 = 0$ i $M_3 \cdot A_4 \cdot A_3 = 0$, pa ostaje: $M_3 \cdot A_4 \cdot S_2 = 1$. Dakle: Muja je treći, Aca četvrti, Spoma druga. Prva je Jela. ♠

58. Šahisti *Matulović*, *Šahović* i *Matanović* igrali su tromeč. Pobednik meča stiče pravo učešća na zonskom turniru za prvenstvo sveta. Ne čekajući da se završe prekinute partije, jedan novinar je javio svojoj redakciji da je prvi *Matulović*, *Matanović* nije prvi i da *Šahović* neće biti poslednji. Posle završetka prekinutih partija pokazalo se da je novinar pogodio uspeh samo jednog šahiste.

Kako je završen ovaj tromeč?

59. Na pitanje ko od pet učenika (Voja, Mirjana, Vlada, Nada i Jagoda) igra šah, dato je pet odgovora. 1) Ako Mirjana igra šah, onda ga i Voja igra. 2) Bar jedna od učenica, Nada ili Jagoda, igra šah. 3) Samo jedan od dečaka igra šah. 4) Što se tiče Nade i Vlade, oni ili oboje igraju, ili oboje ne igraju šah! 5) Ako Jagoda igra šah, onda Mirjana i Nada takođe igraju šah.

Svaki od datih odgovora je tačan. Odrediti koji od ovih pet učenika igraju šah.

60. Rada i njen muž Ramiz hoće da vode kćerke Anitu i Irenu u bioskop ili u pozorište. Dali su sledeće izjave: *Ramiz*: "Ja idem u pozorište ako i samo ako sa mnom ide Rada". *Anita*: "Irena je mnogo dosadna. Ja idem tamo gde ne ide Irena". *Irena*: "Ako Anita ide u pozorište, onda mama i ja idemo u bioskop". Na kraju su svi otišli ili u bioskop ili u pozorište. Međutim, pokazalo se da su Ramiz i Anita rekli istinu, dok je Irena slagala.

Odredite ko je išao u bisokop, a ko u pozorište.