Волновые процессы

Волна́ — изменение некоторой совокупности физических величин (характеристик некоторого физического поля или материальной среды), которое способно перемещаться, удаляясь от места его возникновения...

Волна бежит на этот берег,
Волна бежит, и что - то бредит.

Исходные уравнения: Максвелл

$$rot\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}$$

$$rot\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial\overline{D}}{\partial t}$$

$$div\overline{D} = \rho$$

$$div\overline{B} = 0$$

$$\overline{D} = \varepsilon\varepsilon_0\overline{E}$$

$$\overline{B} = \mu\mu_0\overline{H}$$

$$\overline{J} = \sigma \cdot \overline{E}$$

Допущения для рассматриваемых задач.

1. Электромагнитные волны распространяются в диэлектрической немагнитное среде без потерь: μ=1, σ=0.

$$\overline{B} = \mu_0\overline{H} \qquad \overline{J} = 0$$

2. В среде отсутствуют заряды ρ=0.

$$div\overline{D} = 0$$

В символьном виде:

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -\mu_0\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = \frac{\partial\overline{D}}{\partial t}$$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{D} = 0$$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{B} = 0$$

Волновое уравнение

$$rot\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad rot\ rot\overline{E} = -\mu_0 rot\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial rot\overline{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \overline{D}}{\partial t^2}$$

$$rot\ rot\overline{E} = grad\ div\overline{E} - \Delta\overline{E}$$

$$div\overline{E} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\Delta\overline{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \overline{D}}{\partial t^2}}$$

Отклик среды

$$\overline{D} = \varepsilon\varepsilon_0\overline{E} = \varepsilon_0\overline{E} + \varepsilon_0\chi\overline{E} = \varepsilon_0\overline{E} + \varepsilon_0\overline{P}$$

χ - диэлектрическая восприимчивость среды ($\varepsilon = 1 + \chi$)

$\overline{P}$ - поляризуемость среды ($P = \chi E$) - линейная

$$\boxed{\Delta\overline{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overline{P}}{\partial t^2} = 0}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

При $\chi = 0, \quad \varepsilon = 1$ (вакуум)

$$\boxed{\Delta\overline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\upsilon_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}$$

$$\boxed{\Delta\overline{E} - \frac{1}{\upsilon_{ph}^2}\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Плоская монохроматичная волна

$$\partial^2 \overline{E} / \partial x^2 = \partial^2 \overline{E} / \partial y^2 = \partial \overline{E} / \partial x = \partial \overline{E} / \partial y = 0$$

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{\upsilon_{ph}^2} \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = 0$$

Структура общего решения:

$$\overline{E}(z,t) = \overline{E}_1(t - z/\upsilon_{ph}) + \overline{E}_1(t + z/\upsilon_{ph})$$

$$\overline{E}(z,t) = \overline{E}_m \cdot \cos(\omega_0 t \mp k \cdot z + \varphi)$$

$$|k| = \frac{\omega_0}{\upsilon_{ph}} = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(\omega_0) = \frac{2\pi}{\lambda_m}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial z^2} - k^2 \overline{E} = 0}$$

Рассматриваем: $\overline{E}(z,t) = \overline{E}_m \cdot \cos(\omega_0 t - kz + \varphi)$

Формализм комплексного представления параметров

$$\overline{E}(z,t) = \overline{E}_m \cdot \frac{\left(Exp(j(\omega_0 t - kz + \varphi)) + Exp(-j(\omega_0 t - kz + \varphi))\right)}{2} =$$

$$\overline{E}_m \cdot \frac{\left(Exp(j(\omega_0 t - kz + \varphi)) + k.c.\right)}{2}.$$

Введем комплексную амплитуду:

$$\dot{\overline{E}}_m = \overline{E}_m \cdot e^{j\varphi}$$

$$\overline{E}(z,t) = \frac{\left(\dot{\overline{E}}_m \cdot Exp(j(\omega_0 t - kz)) + k.c.\right)}{2}.$$

Для линейных сред справедливо: $\overline{E}(z,t) = \dot{\overline{E}}_m \cdot Exp(j(\omega_0 t - kz))$

Волновой вектор

Параметр *k* можно определить вектором $\overline{k}$ если направление на точку наблюдения задавать вектором $\overline{r}$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{D} = 0$$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{B} = 0$$

$$\overline{\nabla} = \overline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \overline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \overline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Для волны: $Exp(-j\overline{k} \cdot \overline{r})$

В символьном виде: $-j\overline{k} \cdot \overline{D} = 0$

$$-j\overline{k} \cdot \overline{B} = 0$$

Вектор $\overline{k}$ ортогонален фронту волны

Следовательно: $\overline{D} \perp \overline{k}, \quad \overline{B} \perp \overline{k}$

Уравнение фронта волны (эквифазной поверхности): $\overline{k} \cdot \overline{r} = const$

Взаимная ориентация векторов

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

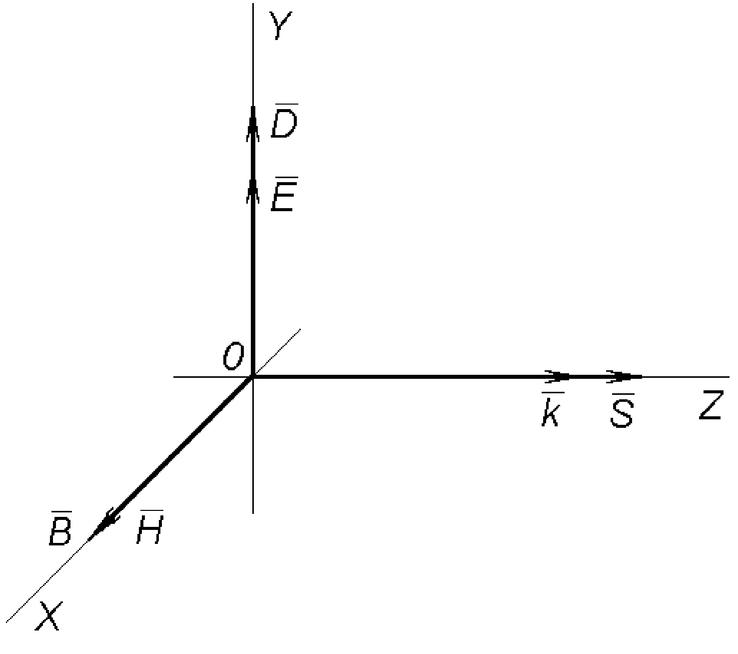
$$\dot{\overline{E}}(z,t) = \dot{\overline{E}}_m \cdot Exp(j(\omega_0 t - \overline{k} \cdot \overline{z}))$$

$$\dot{\overline{B}}(z,t) = \dot{\overline{B}}_m \cdot Exp(j(\omega_0 t - \overline{k} \cdot \overline{z}))$$

$$-j\overline{k} \times \dot{\overline{E}}_m = -j\omega_0 \dot{\overline{B}}_m$$

$$\boxed{\overline{E} \perp \overline{k}, \quad \overline{H} \perp \overline{k}}$$

$$\boxed{\overline{E} \perp \overline{H}}$$



Взаимная ориентация векторов.

Взаимосвязь компонент поля

$$rot\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \longrightarrow \overline{\nabla} \times \overline{E} = -\mu_0 \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} \longrightarrow -j\overline{k} \times \dot{\overline{E}}_m = -j\omega_0 \dot{\overline{B}}_m$$

$$\left|\dot{\overline{E}}_m\right| = \frac{\omega_0}{k}\left|\dot{\overline{B}}_m\right|$$

$$\boxed{\left|\overline{E}_m\right| = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \cdot \left|\overline{H}_m\right| = Z \cdot \left|\overline{H}_m\right|}$$

$Z = \sqrt{\mu\mu_0 / \varepsilon\varepsilon_0}$ - волновое сопротивление среды

$\boxed{Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 120\pi}$ $\approx$ **377 Ом** - волновое сопротивление вакуума

$Z = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon\varepsilon_0} = Z_0 / \sqrt{\varepsilon} = Z_0 / n$ - волновое сопротивление среды (μ=1)

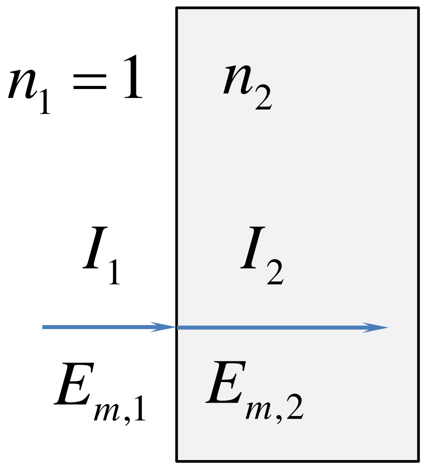
Энергетический параметр волны – вектор Пойтинга

$$\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H} \qquad \overline{S} \parallel \overline{k}$$

$$I = \frac{1}{T}\left|\int_0^T \overline{E} \times \overline{H} \cdot dt\right|$$ Интенсивность излучения

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \left|\overline{E}_m \times \overline{H}_m\right| \cos^2 \omega t \cdot dt = \left|\frac{\overline{E}_m \times \overline{H}_m}{2}\right| = \frac{\left|\overline{E}_m\right|^2}{2 \cdot Z} = \frac{\left|\overline{E}_m\right|^2 n}{2 \cdot Z_0} = \frac{\left|\overline{E}_m\right|^2 n}{240 \cdot \pi}$$

Граница раздела сред (R=0):



$$I_1 = I_2$$

Сохранение мощности

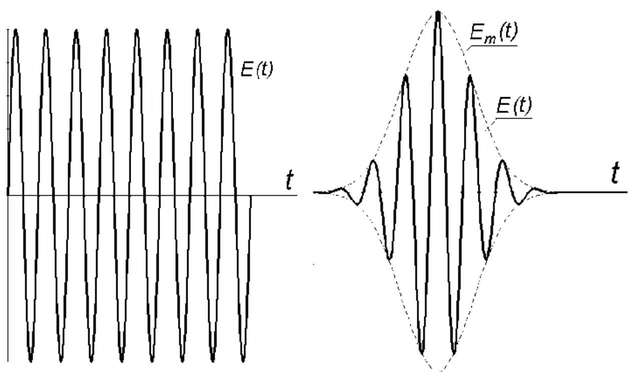
$$\boxed{E_{m,2} = E_{m,1} / \sqrt{n_2}}$$

Распространение импульса излучения в изотропной среде

$$\dot{\bar{E}}(t,z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\dot{\bar{F}}_i(\Omega_i,z)\cdot Exp(j\Omega_i t)$$

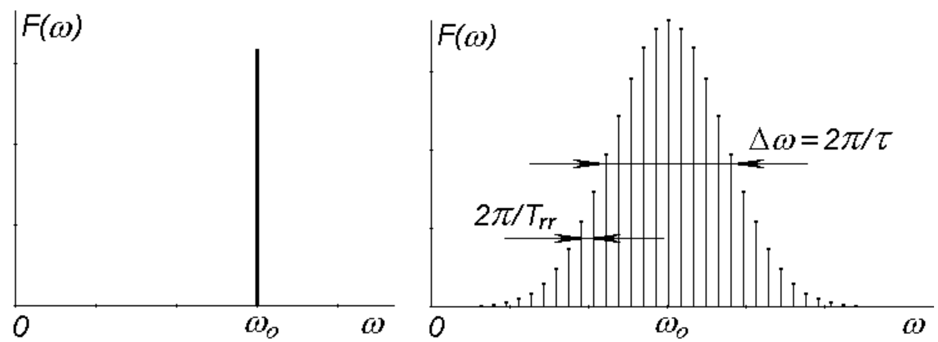
$\dot{\bar{F}}_i(\Omega_i,z)$ - Спектральная компонента

$$\dot{\bar{F}}_i(\omega_i)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\dot{\bar{E}}(t)\cdot Exp\left[-j\Omega_i t\right]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\dot{\bar{E}}_m(t)\cdot Exp\left[-j(\Omega_i-\omega_0)t\right]$$



а. б.

(а) - непрерывное (монохроматичное), (б) - импульсное.



а. б.

Спектр излучения: (а) - монохроматичного, (б) - импульсного.

$$\dot{\bar{F}}_i(\Omega_i, z = L) = \dot{\bar{F}}_i(\Omega_i, z = 0) \cdot \dot{f}(z)$$ - Связь между спектрами на входе и выходе

$$\frac{\partial^2 \dot{\bar{E}}}{\partial z^2} - \frac{1}{\upsilon_{ph}^2} \frac{\partial^2 \dot{\bar{E}}}{\partial t^2} = \sum_i \frac{\partial^2 \dot{\bar{F}}_i(\Omega_i, z)}{\partial z^2} Exp(j\Omega_i t) + \sum_i \frac{\Omega_i^2}{\upsilon_{\phi,i}^2} \dot{\bar{F}}_i(\Omega_i, z) \cdot Exp(j\Omega_i t) = 0$$

Умножим на $Exp(-j\omega_p t)$ и проинтегрируем на периоде *T*.

$$\sum_i \frac{\partial^2 \dot{\bar{F}}_i(\Omega_i, z)}{\partial z^2} \int_{-T/2}^{T/2} Exp\left[j(\Omega_i - \omega_p)t\right] dt + \sum_i \frac{\omega_i^2}{\upsilon_{\phi,i}^2} \dot{\bar{F}}_i(\Omega_i, z) \int_{-T/2}^{T/2} Exp\left[j(\Omega_i - \omega_p)t\right] dt = 0$$

Ортогональность: $$\int_{-T/2}^{T/2} Exp\left[j(\Omega_i - \omega_p)t\right] dt = \begin{cases} 0, & i \neq p \\ T, & i = p \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\bar{F}}_p}{\partial z^2} + \frac{\omega_p^2}{\upsilon_{ph,p}^2} \dot{\bar{F}}_p = 0 \qquad \dot{\bar{F}}_{p,0} = \dot{\bar{F}}_p(\omega_p, z = 0)$$

$$\boxed{\dot{\bar{F}}_p(\omega_p, z) = \dot{\bar{F}}_{p,0} \cdot Exp(-j\frac{\omega_p}{\upsilon_{ph,p}} z) = \dot{\bar{F}}_{p,0} \cdot Exp(-jk_p z)}$$

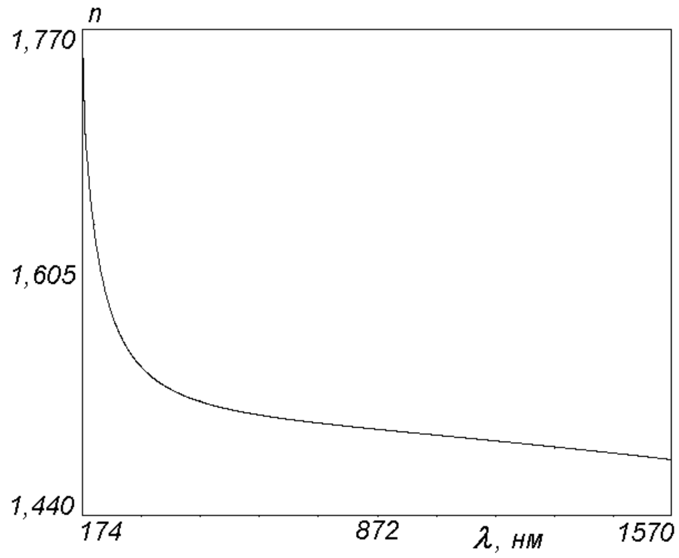
Выполняется для каждой *p*-й спектральной компоненты – гармонический баланс

Групповое запаздывание

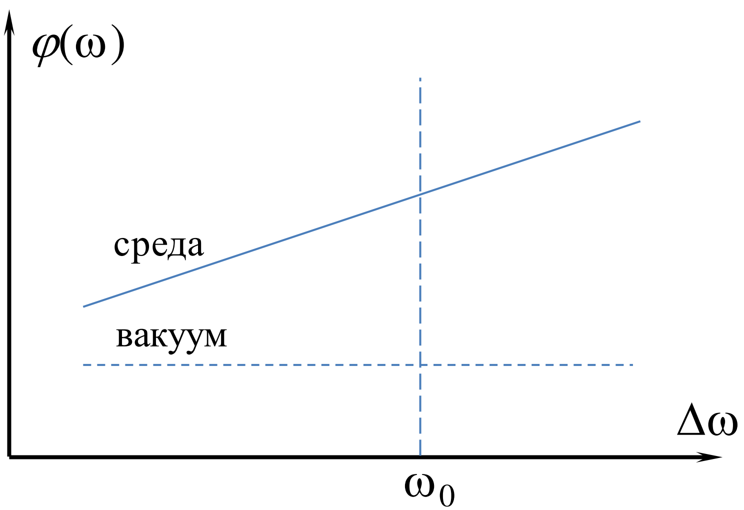
$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + ...$$

F_p - Спектральная компонента, центральная частота ω_0

$$\dot{\bar{F}}_p(\omega_p, z = L) = \dot{\bar{F}}_p(\omega_p, z = 0) \cdot Exp\left(- j\left[k(\omega_0) + \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0} (\omega_p - \omega_0) \right] L \right)$$



Дисперсия показателя преломления (нормальный закон дисперсии).



$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda} n(\omega) \cdot L$$

Теорема запаздывания

$$\dot{\bar{E}}(t, z = L) = \sum_p \dot{\bar{F}}_p(\omega_p, z = L) \cdot Exp(j(\omega_p - \omega_0)t) =$$

$$\sum_p \dot{\bar{F}}_p(\omega_p, z = 0) \cdot Exp\Big(j(\omega_p - \omega_0)t\Big) \cdot Exp\left(-j\left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0}(\omega_p - \omega_0)L\right) =$$

$$\sum_p \dot{\bar{F}}_p(\omega_p, z = 0) \cdot Exp\left(j(\omega_p - \omega_0)(t - \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0} L)\right).$$

$$\dot{\bar{E}}(t, z = L) = \dot{\bar{E}}_m\left[(t - \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0} L), z = 0\right] \cdot Exp\big[j(\omega_0 t - k(\omega_0)L\big]$$

$$t_{gr} = \frac{\partial k}{\partial \omega} L = L/\upsilon_{gr} \qquad \upsilon_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)^{-1}$$

$\Delta t = t_{gr} - t_{ph} == L(1/\upsilon_{gr} - 1/\upsilon_{ph}) < 0$ Групповое запаздывание

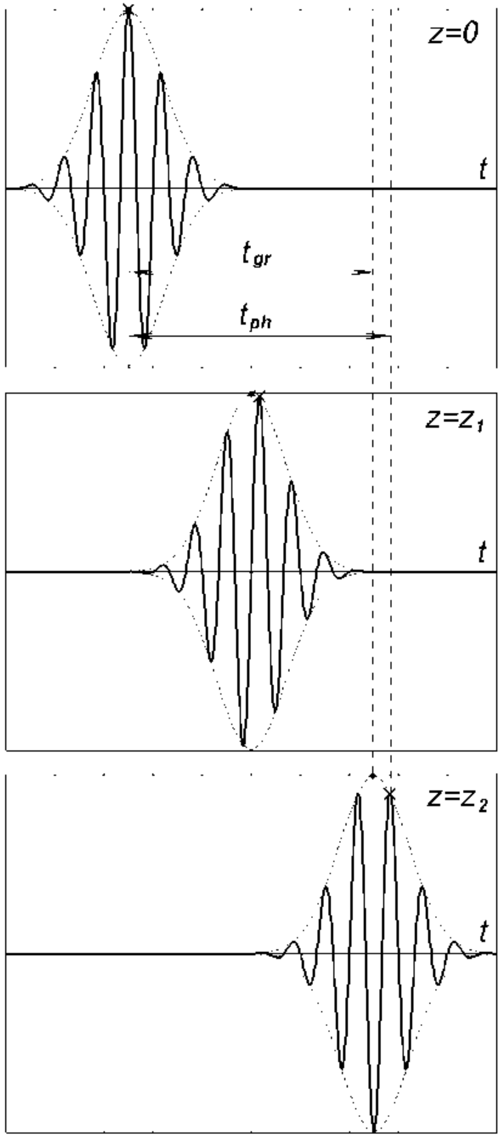
$$\upsilon_{gr} = \upsilon_{ph} + k\frac{\partial \upsilon_{ph}}{\partial k} = \upsilon_{ph} - \lambda \frac{\partial \upsilon_{ph}}{\partial \lambda} = \frac{\upsilon_{ph}}{1 - \dfrac{\omega}{\upsilon_{ph}}\dfrac{\partial \upsilon_{ph}}{\partial \omega}}$$

$$\upsilon_{gr} = \frac{c}{n + \omega \dfrac{\partial n}{\partial \omega}} = \frac{c}{n - \lambda \dfrac{\partial n}{\partial \lambda}}$$

$\dfrac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$ нормальная дисперсия

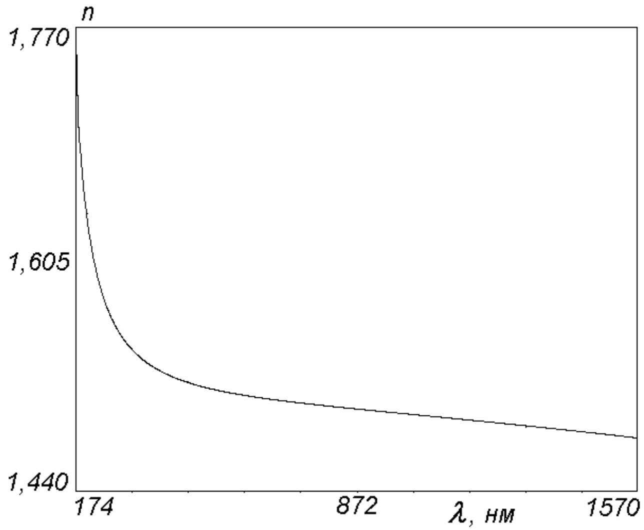
$$\boxed{\upsilon_{gr} < \upsilon_{ph}}$$

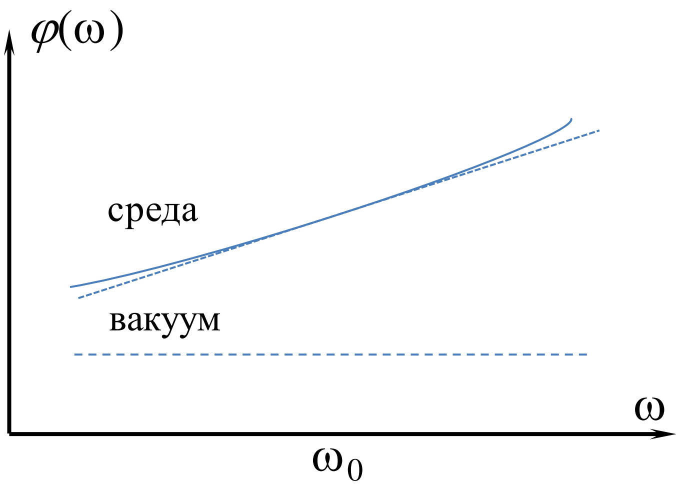
$$\Delta t = t_{gr} - t_{ph} = L(1/\upsilon_{gr} - 1/\upsilon_{ph}) > 0$$



Дисперсионное расплывание импульсов

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\bigg|_{\omega_0}(\omega - \omega_0)^2$$





Для импульса гауссовой формы: $E(t.z=0) = E_m \cdot Exp(-t^2/\tau_0^2)$

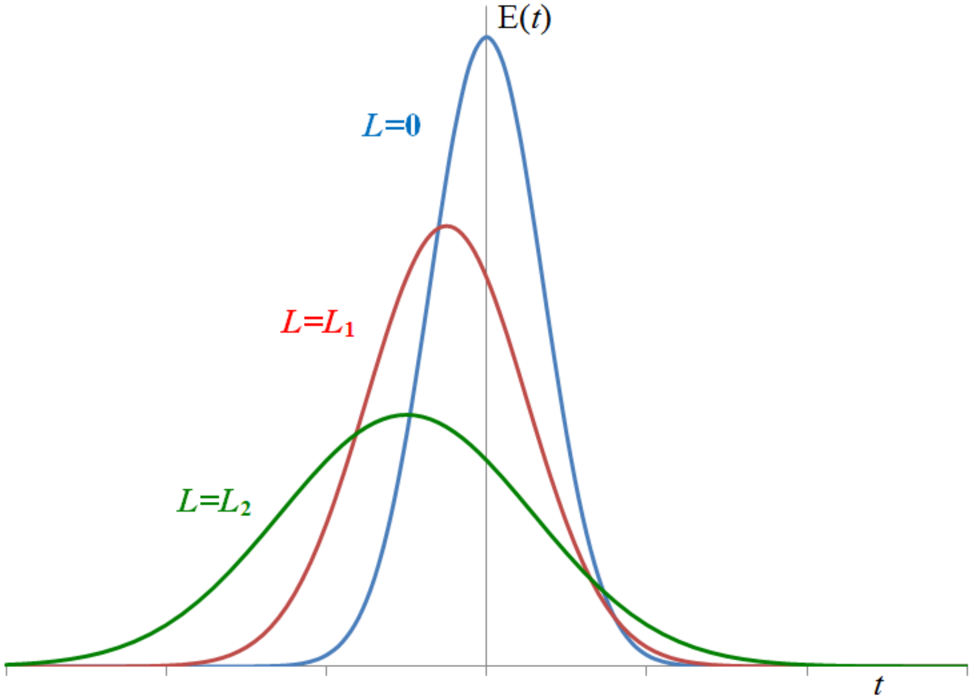
$$\tau(L) = \tau_0\sqrt{1 + \frac{4{k''_\omega}^2 L^2}{\tau_0^4}} \qquad k''_\omega = \partial^2 k / \partial\omega^2$$

$L = \tau_0^2 / 2k''_\omega$ - длина дисперсионного расплывания при $\tau(L) = \tau_0\sqrt{2}$

Групповое запаздывание и дисперсионное расплывание импульсов

$$\Delta t = t_{gr} - t_{ph} = L(1/\upsilon_{gr} - 1/\upsilon_{ph}) > 0$$

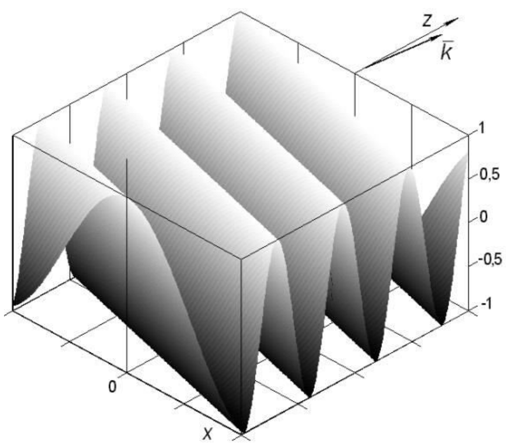
$$\tau(L) = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{4 k_{\omega}''^{\,2} L^2}{\tau_0^4}} \qquad k_{\omega}'' = \partial^2 k / \partial \omega^2$$

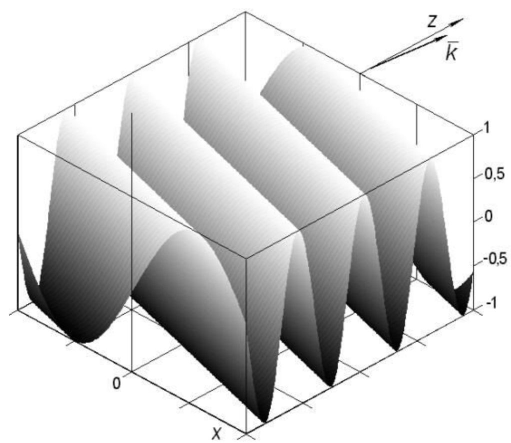


Распространение пучков излучения в изотропной среде

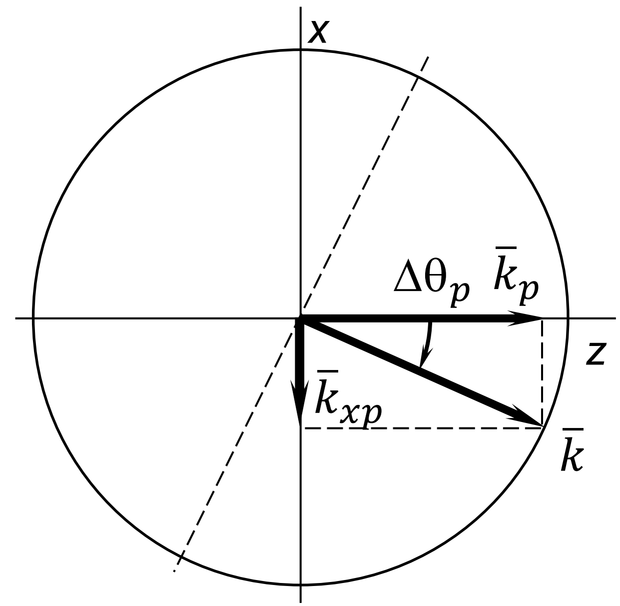
$$\dot{E}_m(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \dot{C}_p Exp(jk_{xp}x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \dot{C}_p Exp(j\frac{2\pi p}{A}x)$$

$$\dot{C}_p = \frac{1}{A}\int_{-A/2}^{A/2} \dot{E}_m(x) Exp(-jk_{xp}x)dx \qquad k_{xp} = \frac{2\pi}{A}p$$





Распределение поля плоской волны:
а. - по косинусу, б. - по синусу.



$$\Delta\theta_p = \frac{k_{xp}}{k} = \frac{\lambda}{A}p$$

Стационарное излучение:

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon_\phi^2} \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \dot{E}_m}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_m}{\partial x^2} + \frac{\omega_0^2}{\upsilon_\phi^2} \dot{E}_m = 0$$

$$\sum_p \frac{\partial^2 \dot{C}_p}{\partial z^2} Exp(jk_{xp}x) - \sum_s k_{xp}^2 \dot{C}_s Exp(jk_{xs}x) + \frac{\omega^2}{\upsilon_{ph}^2} \sum_t \dot{C}_t Exp(jk_{xt}x) = 0$$

Умножаем на $Exp(jk_{x,i}x)$ Интегрируем по *x* от –A/2 до A/2

$$\sum_p \frac{\partial^2 \dot{C}_p}{\partial z^2} \int_{-A/2}^{A/2} Exp(j(k_{xp} - k_{xi})x)dx - \sum_s k_{xs}^2 \dot{C}_s \int_{-A/2}^{A/2} Exp(j(k_{xs} - k_{xi})x)dx +$$

$$+ \frac{\omega^2}{\upsilon_{ph}^2} \sum_t \dot{C}_t \int_{-A/2}^{A/2} Exp(j(k_{xt} - k_{xi})x)dx = 0.$$

Ортогональность: $\int_{-A/2}^{A/2} Exp(j(k_{xi} - k_{xp})x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq p \\ A, & i = p \end{cases}$

$$\frac{\partial^2 \dot{C}_p}{\partial z^2} - k_{xp}^2 \dot{C}_p + \frac{\omega^2}{\upsilon_{ph}^2} \dot{C}_p = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 \dot{C}_p}{\partial z^2} + (k^2 - k_{xp}^2)\dot{C}_p = 0$$

$$\dot{C}_p(z) = \dot{C}_p(z=0) \cdot Exp(-jz\sqrt{k^2 - k_{xp}^2}) = \dot{C}_{p,0} \cdot Exp(-jz\sqrt{k^2 - k_{xp}^2})$$

$$k_p^2 = k^2 - k_{xp}^2$$

$$\sqrt{k^2 - k_{xp}^2} = k\sqrt{1 - \frac{k_{xp}^2}{k^2}} \cong k\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k_{xp}^2}{k^2}\right) = k - \frac{1}{2}\frac{k_{xp}^2}{k}$$

$$\dot{C}_p(z) = \dot{C}_{p0} \cdot Exp\left(jz\frac{k_{xp}^2}{2k}\right) \qquad \dot{C}_p(z) = \dot{C}_{p0} \cdot Exp\left(j\frac{1}{2}z \cdot k \cdot \Delta\theta_p^2\right)$$

Дифракция.

Пространственно-временная аналогия (изотропные среды)

	Импульс	**Пучок**
x	**Групповая задержка**	Нет в изотропных средах
x^2	**Дисперсионное расплывание**	**Дифракция**