Математические модели для задач преобразования частоты.

О люди! все похожи вы
На прародительницу Еву:
Что вам дано, то не влечёт,
Вас непрестанно змий зовёт
К себе, к таинственному древу;
Запретный плод вам подавай,
А без того вам рай не рай.

А.С. Пушкин

Волновые уравнения

$$\Delta\bar{E} - \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{D}}{\partial t^2} = 0$$

$$\bar{E}(z,t) = \frac{1}{2}(\dot{E}_{\omega_1}(z,t) + \dot{E}_{\omega_2}(z,t) + \dot{E}_{\omega_3}(z,t) + \text{к. с.})$$

ГВГ: $\omega_2 = \omega_1 = \omega \rightarrow \quad \omega_3 = 2\omega$

ooe (oo → e) тип синхронизма $\rightarrow$ $n_0(\omega) = n_e(2\omega)$

Для взаимодействующих волн:

$$D_{2e}2(\omega) = \varepsilon_0\varepsilon_{2e}(2\omega)E_{2e}(2\omega) + \varepsilon_0 P_{\text{нел},2e}(2\omega) =$$
$$= \varepsilon_0\varepsilon_{2e}(2\omega)E_{2e}(2\omega) + \varepsilon_0 d_{\text{эфф}}^{ooe}(2\omega)[E_{1o}(\omega)]^2$$

$$D_{1o}(\omega) = \varepsilon_0\varepsilon_{1o}(\omega)E_{1o}(\omega) + \varepsilon_0 P_{\text{нел},1o}(\omega) =$$
$$= \varepsilon_0\varepsilon_{1o}(\omega)E_{1o}(\omega) + 2\varepsilon_0 d_{\text{эфф}}^{ooe}(\omega)E_{2e}(2\omega)E_{1o}^*(\omega)$$

Волновые уравнения

$$\Delta E_{2e} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{2e} \frac{\partial^2 E_{2e}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P_{\text{нел},2e}}{\partial t^2}$$

$$\Delta E_{1o} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{1o} \frac{\partial^2 E_{1o}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P_{\text{нел},1o}}{\partial t^2}$$

$$\dot{E}_j(z,t) = \frac{1}{2}(\dot{E}_{m,j}(z) \cdot Exp(i(\omega_j t - k_j z)) + \text{к. с.})$$

$$\dot{E}_{m,j}(z) = A_{m,j}(z) \cdot Exp(i\varphi_j)$$

Приближения для дальнейшего:

– монохроматичное, стационарное $E_{m,j}/\partial t = \partial^2 E_{m,j}/t^2 = 0$

- плосковолновое $E_{m,j}/\partial x = \partial^2 E_{m,j}/x^2 = 0$

$$E_{m,j}/\partial y = \partial^2 E_{m,j}/y^2 = 0$$

Плосковолное монохроматичное излучение

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \dot{E}_{m,2}}{\partial z^2} - 2ik_2\frac{\partial \dot{E}_{m,2}}{\partial \mathrm{z}} - (k_2)^2\dot{E}_{m,2}\right)\cdot Exp(i(2\omega t - k_2 z)) + \text{к. с.}\right]$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \dot{E}_{m,1}}{\partial z^2} - 2ik_1\frac{\partial \dot{E}_{m,1}}{\partial \mathrm{z}} - (k_1)^2\dot{E}_{m,1}\right)\cdot Exp(i(\omega t - k_1 z)) + \text{к. с.}\right]$$

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left[(2\omega)^2\dot{E}_{m,2}\cdot Exp(i(2\omega t - k_2 z)) + \text{к. с.}\right]$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left[(\omega)^2\dot{E}_{m,1}\cdot Exp(i(\omega t - k_1 z)) + \text{к. с.}\right]$$

$$\frac{\partial^2 P_{\text{нел},2}}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\frac{d^{ooe}_{\text{эфф}}}{2}(2\omega)^2\left[\dot{E}^2_{m,1}\cdot Exp(i(2\omega t - 2k_1 z)) + \text{к. с.}\right]$$

$$\frac{\partial^2 P_{\text{нел},1}}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\frac{d^{ooe}_{\text{эфф}}}{2}(\omega)^2\left[\dot{E}_{m,2}\dot{E}^*_{m,1}\cdot Exp(i(\omega t - (k_1 - k_2)z)) + \text{к. с.}\right]$$

Плосковолное монохроматичное излучение

$$\upsilon_{\phi,j}^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_j \qquad c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0 \qquad k_j = \omega_j/\upsilon_{\phi,j}$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \dot{E}_{m,2}}{\partial z^2} - 2ik_2\frac{\partial \dot{E}_{m,2}}{\partial \mathrm{z}} - (k_2)^2\dot{E}_{m,2} + \frac{(2\omega)^2}{\upsilon_{\phi,2}^2}\dot{E}_{m,2}\right)\cdot Exp(j(2\omega t - k_2 z)) + \text{к. с.}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(2\omega)^2}{2c^2}d_{\text{эфф}}^{ooe}\left[\dot{E}_{m,2}^2\cdot Exp(i(2\quad t - 2k_1 z)) + \text{к. с.}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \dot{E}_{m,1}}{\partial z^2} - 2ik_1\frac{\partial \dot{E}_{m,1}}{\partial \mathrm{z}} - (k_1)^2\dot{E}_{m,1} + \frac{(\omega)^2}{\upsilon_{\phi,1}^2}\dot{E}_{m,1}\right)\cdot Exp(i(\quad t - k_1 z)) + \text{к. с.}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(\omega)^2}{2c^2}d_{\text{эфф}}^{ooe}\left[\dot{E}_{m,2}\dot{E}_{m,1}^*\cdot Exp(i(\quad t - (k_2 - k_1)z)) + \text{к. с.}\right]$$

Плосковолное монохроматичное излучение

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{m,2}}{\partial z^2} - 2ik_2 \frac{\partial \dot{E}_{m,2}}{\partial \mathrm{z}} = -\frac{(2\omega)^2}{2c^2} d_{\text{эфф}}^{ooe} \dot{E}_{m,1}^2 Exp(i(k_2 - 2k_1)z)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{m,1}}{\partial z^2} - 2ik_1 \frac{\partial \dot{E}_{m,1}}{\partial \mathrm{z}} = -2\frac{(\omega)^2}{2c^2} d_{\text{эфф}}^{ooe} \dot{E}_{m,2} \dot{E}_{m,1}^* Exp(-i(k_2 - 2k_1)z)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{m,j}}{\partial z^2} \ll 2ik_1 \frac{\partial \dot{E}_{m,j}}{\partial \mathrm{z}}$$!!!

$$\Delta k = k_2 - 2k_1$$

$$\boxed{\frac{\partial \dot{E}_{m,2}}{\partial \mathrm{z}} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda_1 n_2} d_{\text{эфф}}^{ooe} \dot{E}_{m,1}^2 Exp(i\Delta kz)}$$

$$\boxed{\frac{\partial \dot{E}_{m,1}}{\partial \mathrm{z}} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda_1 n_1} d_{\text{эфф}}^{ooe} \dot{E}_{m,2} \dot{E}_{m,1}^* Exp(-i\Delta kz)}$$

Плосковолное монохроматичное излучение

$$\dot{E}_{m,j}(z) = A_j(z)\cdot Exp(i\varphi_j(z))$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + iA_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = -i\frac{\pi}{\lambda_1 n_2} d_{эфф}^{ooe} A_1^2 Exp[i(2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kz)]$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + iA_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -i\frac{\pi}{\lambda_1 n_1} d_{эфф}^{ooe} A_1 A_2 Exp[-i(2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kz)]$$

$$\Phi = \Delta kz - (\varphi_2 - 2\varphi_1) = \Delta kz - \Delta\varphi$$

$$\boxed{\sigma_j^{ooe} = \frac{\pi}{\lambda_1 n_j} d_{эфф}^{ooe}}$$

Начальные условия: при z = 0 $A_2(z = 0) = 0$, **(φ_2 - 2φ_1) = π/2**

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = \sigma_1^{ooe} A_1^2 \cdot sin\Phi$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -\sigma_1^{ooe} A_1 A_2 \cdot sin\Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Delta k - \left(2\sigma_1^{ooe} A_2 - \sigma_1^{ooe}\frac{A_1^2}{A_2}\right)\cdot cos\Phi$$

Плосковолное монохроматичное излучение

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = \sigma_1^{ooe} A_1^2 \cdot sin\Phi$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -\sigma_1^{ooe} A_1 A_2 \cdot sin\Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Delta k - \left(2\sigma_1^{ooe} A_2 - \sigma_1^{ooe} \frac{A_1^2}{A_2}\right) \cdot cos\Phi$$

$$E_1(z=0)=E_{1,0}$$

$$E_2(z=0)=?$$

$\Delta k \neq 0$ $\quad A_2(z=0)=0$

1. $A_2(z) << A_{1,0}, \quad A_1(z) \approx A_{1,0}$ Начальный этап

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Delta k + \sigma_1^{ooe} \frac{A_1^2}{A_2} \cdot cos\Phi \quad > \Delta k$$

$$2\sigma_1^{ooe} A_2 \ll \sigma_1^{ooe} \frac{A_1^2}{A_2}$$

2. $A_2(z) \approx A_{1,0}, \quad A_1(z) << A_{1,0}$ Сильный энергообмен

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Delta k - 2\sigma_1^{ooe} A_2 \cdot cos\Phi \quad < \Delta k$$

$$2\sigma_1^{ooe} A_2 \gg \sigma_1^{ooe} \frac{A_1^2}{A_2}$$

Показатели преломления среды

Генерация второй гармоники

$$D(\omega) = \hat{\varepsilon}_1(\omega)\varepsilon_0 E(\omega) \qquad D(2\omega) = \hat{\varepsilon}_2(2\omega)\varepsilon_0 E(2\omega)$$

$$D(2\omega) = \left[(1+\chi_1(2\omega))\cdot E_2(2\omega) + \chi_2 E_1^2(\omega)\right]\varepsilon_0 = \left[\varepsilon(2\omega) + \chi_2 \frac{E_1^2(\omega)}{E_2(2\omega)}\right]\varepsilon_0 E_2(2\omega).$$

$$D(\omega) = \left[(1+\chi_1(\omega))\cdot E_1(\omega) + \chi_2 E_2(2\omega)E_1^*(\omega)\right]\varepsilon_0 = \left[\varepsilon(\omega) + \chi_2 \frac{E_2(2\omega)E_1^*(\omega)}{E_1(\omega)}\right]\varepsilon_0 E_1(\omega)$$

$$\hat{\varepsilon}_1(\omega) = \varepsilon(\omega) + \chi_2 \frac{E_2(2\omega)E_1^*(\omega)}{E_1(\omega)} \qquad \hat{\varepsilon}_2(2\omega) = \varepsilon(2\omega) + \chi_2 \frac{E_1^2(\omega)}{E_2(2\omega)}$$

$$E_1(z,t) = A_{1m}(z)\cdot Exp(i(\omega t - k_1 z + \varphi_1(z))) \qquad E_2(z,t) = A_{2m}(z)\cdot Exp(i(2\omega t - k_2 z + \varphi_2(z)))$$

$$\hat{\varepsilon}_2(2\omega) = \varepsilon(2\omega) + \chi_2 \frac{A_{1m}^2}{A_{2m}}\left[\cos(\Phi) - i\sin(\Phi)\right] \qquad \hat{\varepsilon}_1(\omega) = \varepsilon(\omega) + \chi_2 A_{2m}(2\omega)\left[\cos(\Phi) + i\sin(\Phi)\right]$$

$$\boxed{\Phi = (k_2 - 2k_1)z - (\varphi_2 - 2\varphi_1)}$$

По определению $\dot{n}_i = \sqrt{\dot{\varepsilon}_i} = \sqrt{\mathrm{Re}(\dot{\varepsilon}_i) + i\,\mathrm{Im}(\dot{\varepsilon}_i)}$ $\quad \chi_2 = 2deff$

$$\mathrm{Re}(\dot{\varepsilon}) >> \mathrm{Im}(\dot{\varepsilon})$$

$$\boxed{\dot{n}_2 = n_{2l} + \frac{d_{eff} E_{1m}^2 \cos(\Phi)}{n_{2l} E_{2m}} = n_{2l} + \delta n_2} \qquad \boxed{\dot{n}_1 = n_{1l} + \frac{d_{eff} E_{2m} \cos(\Phi)}{n_{1l}} = n_{1l} + \delta n}$$

$$\delta\varphi_i = (2\pi / \lambda_i)\cdot \delta n_i z$$

Эффективные значения показателей преломления

Плосковолновое монохроматичное излучение

Частные случаи:

Режим	Синхронизм	Расстройка
Приближение заданного поля (ПЗП) $E_{10} \approx const$, $\eta << 1$	$\Delta k = 0$	$\Delta k \neq 0$
Сильный энергообмен, $\eta \sim 1$	$\boldsymbol{\Delta k = 0}$	$\boldsymbol{\Delta k \neq 0}$

Приближение заданного поля при Δk=0

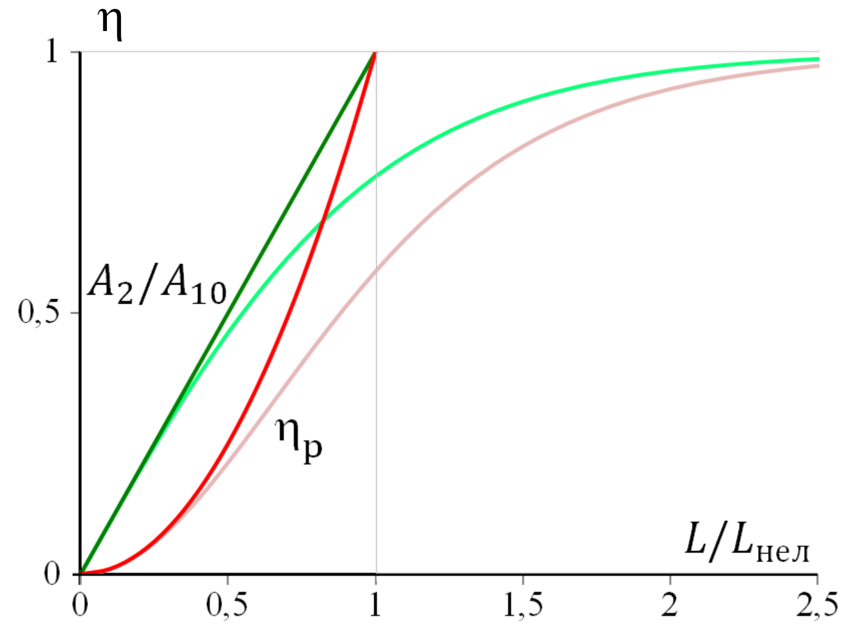
A_1=cost, Δk=0 При z = 0: $(\varphi_2 - 2\varphi_1) = \pi/2$, $A_2(z)=0$.

$$\frac{dA_2}{dz} = \sigma_2^{ooe} A_1^2 \cdot sin\Phi = \sigma_2^{ooe} A_1^2 \qquad A_2 = \int_0^{L_{\text{кр}}} \sigma_2^{ooe} A_1^2 dz$$

$$\boxed{A_2 = \sigma_2^{ooe} A_1^2 L_{\text{кр}} = \frac{\pi}{\lambda_1 n_2} d_{\text{эфф}}^{ooe} A_1^2 L_{\text{кр}}}$$

$$\eta_p = \frac{I_2}{I_{10}} = \frac{A_{2,in}^2 n_2}{A_{10,in}^2 n_1} \qquad n_1 = n_2 \qquad A_{in} = A_{out}/n$$

$$\boxed{\eta_p = 240\pi^3 \frac{I_{10}}{\lambda_1^2} \frac{\left(d_{\text{эфф},2}^{ooe}\right)^2}{n_2^3} L_{\text{кр}}^2}$$



$$A_2 = A_{10} \frac{L_{\text{кр}}}{L_{\text{нел}}} \qquad \boxed{L_{\text{нел}} = \frac{\lambda_1 n_1}{\pi \cdot d_{\text{эфф}}^{ooe} \cdot A_{10}}} \qquad \eta_p = \frac{L_{\text{кр}}^2}{L_{\text{нел}}^2}$$

: η_p=100% при $L_{\text{кр}}=L_{\text{нел}}$ с ПЗП

Приближение заданного поля при $\Delta k \neq 0$

$$\frac{\dot{E}_{m,2}}{\partial z} = -i\sigma_2^{ooe}\dot{E}_{m,1}^2 Exp(i\Delta kz)$$

$$\dot{E}_{m,2} = -i\sigma_2^{ooe}\dot{E}_{m,1}^2\int_0^{L_{\text{кр}}} Exp(i\Delta kz)dz = -\frac{\sigma_2^{ooe}}{\Delta k}\dot{E}_{m,1}^2\int_0^{L_{\text{кр}}} Exp(i\Delta kz)d(i\Delta kz) =$$

$$= \frac{\sigma_2^{ooe}}{\Delta k}\dot{E}_{m,1}^2\left[1 - Exp\left(i\Delta kL_{\text{кр}}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sigma_2^{ooe}}{\Delta k}\dot{E}_{m,1}^2\left[Exp\left(-i\Delta kL_{\text{кр}}/2\right) - Exp\left(i\Delta kL_{\text{кр}}/2\right)\right]Exp\left(i\Delta kL_{\text{кр}}/2\right) =$$

$$= -2i\frac{\sigma_2^{ooe}}{\Delta k}\dot{E}_{m,1}^2\cdot sin\left(\Delta kL_{\text{кр}}/2\right)Exp\left(i\Delta kL_{\text{кр}}/2\right)$$

Амплитуда волны второй гармоники:

$$A_2 = \sigma_2^{ooe}L_{\text{кр}}\,A_{10}^2\cdot\frac{sin\left(\Delta kL_{\text{кр}}/2\right)}{\Delta kL_{\text{кр}}/2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_2 = \sigma_2^{ooe}L_{\text{кр}}\,A_{10}^2\cdot sinc\left(\Delta kL_{\text{кр}}/2\right)}}$$

Эффективность преобразования по мощности:

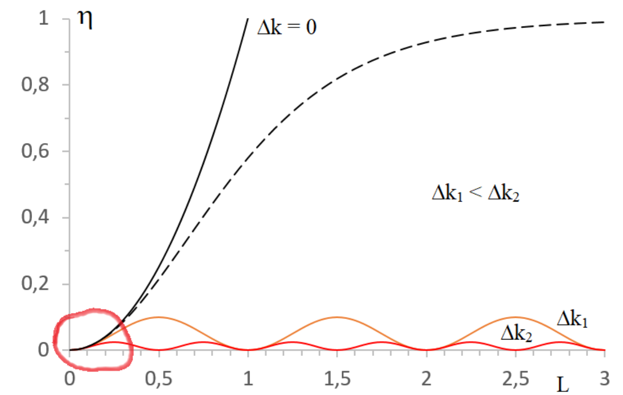
$$\boxed{\boldsymbol{\eta_p = 240\pi^3\frac{I_{10}}{\lambda_1^2}\frac{\left(d_{\text{эфф},2}^{ooe}\right)^2}{n_2^3}L_{\text{кр}}^2\cdot sinc^2\left(\Delta kL_{\text{кр}}/2\right)}}$$

$$\boldsymbol{A_{in} = A_{out}/n}$$

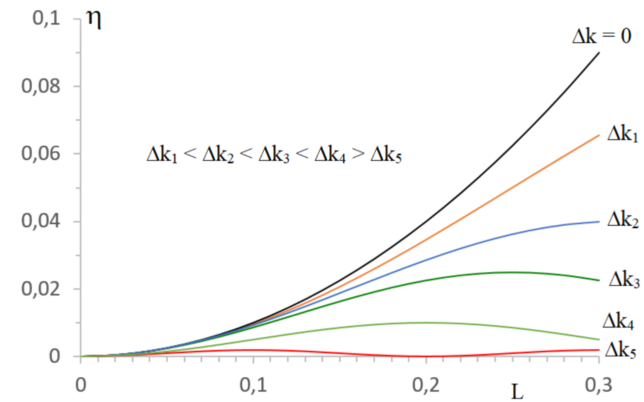
Функциональные зависимости

$$\eta_{p,1}=240\pi^3\frac{I_{10}}{\lambda_1^2}\frac{\left(d^{ooe}_{эфф,2}\right)^2}{n_2^3}L_{кр}^2$$

Без волновой расстройки.



$$\eta_{p,2}=240\pi^3\frac{I_{10}}{\lambda_1^2}\frac{\left(d^{ooe}_{эфф,2}\right)^2}{n_2^3}\frac{1}{\Delta k^2}\cdot sin^2\left(\Delta k L_{кр}/2\right)$$

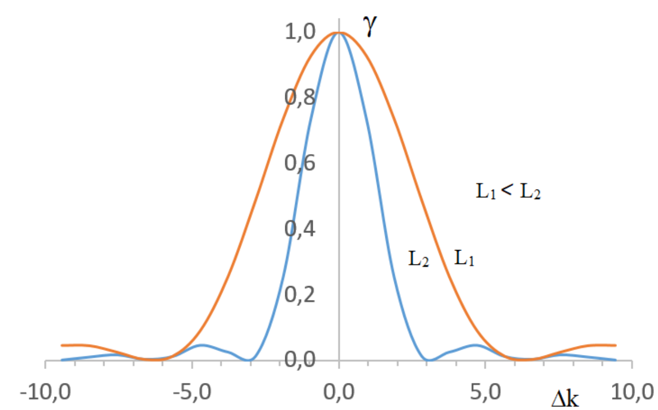


С волновой расстройкой.

$$\eta_{p,2}=240\pi^3\frac{I_{10}}{\lambda_1^2}\frac{\left(d^{ooe}_{эфф,2}\right)^2}{n_2^3}L_{кр}^2\cdot sinc^2\left(\Delta k L_{кр}/2\right)=$$

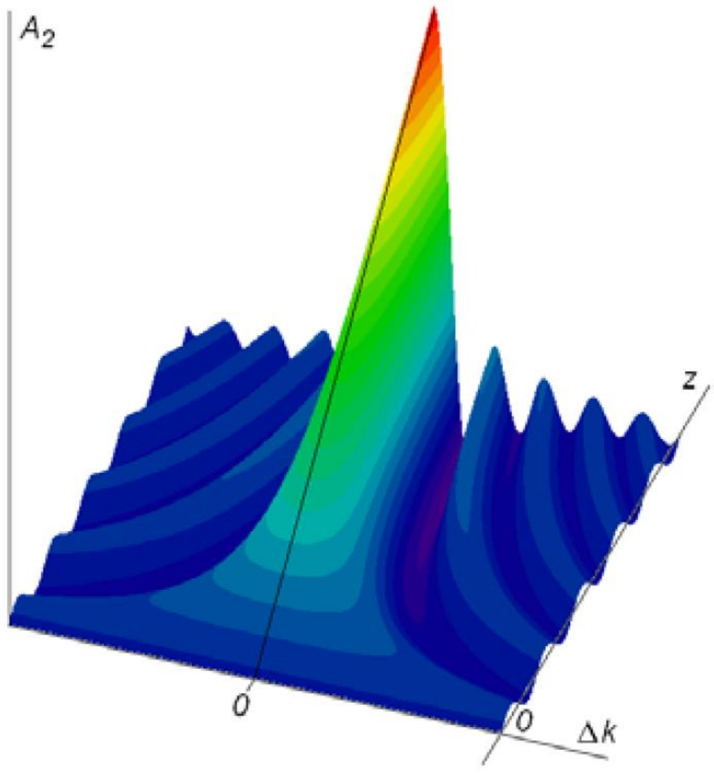
$$=\eta_{p,1}\cdot sinc^2\left(\Delta k L_{кр}/2\right)$$

$$\gamma_p\cdot=sinc^2\left(\Delta k L_{кр}/2\right)$$



Приближение заданного поля, $\Delta k \neq 0$

$$A_2 = \frac{\pi}{\lambda_1 n_2} d^{ooe}_{\text{эфф},2} A_1^2 L_{\text{кр}} \cdot sinc\left(\Delta k L_{\text{кр}}/2\right)$$



Ширина распределения уменьшается при увеличении длины кристалла.

Приближение заданного поля, $\Delta k \neq 0$

$$A_2 = \frac{\pi}{\lambda_1}\frac{d^{ooe}_{\text{эфф},2}}{n_2}A_1^2 \cdot L_{\text{кр}} \cdot sinc^2\left(\Delta k L_{\text{кр}}/2\right)$$

$$\eta_{p,2} = 240\pi^3 \frac{I_{10}}{\lambda_1^2}\frac{\left(d^{ooe}_{\text{эфф},2}\right)^2}{n_2^3}\frac{1}{\Delta k^2} \cdot sin^2\left(\Delta k L_{\text{кр}}/2\right)$$

$L_{\text{ког}}$: $\quad \Delta k L_{\text{кр}}/2 = \pi/2$

$$L_{\text{ког}} = \frac{\pi}{\Delta k} = \frac{\lambda_1}{2\Delta n}$$ - при генерации второй гармоники

$\Delta n = 0{,}01 \quad \lambda_{10} = 1$ мкм $\rightarrow$ $L_{\text{ког}} = 50$ мкм

$L_{\text{ког}}$ - длина кристалла, при которой эффективность преобразования имеет максимальную величину при $\Delta k \neq 0$.