PRACA DOMOWA 4

① $$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \\ p & \text{dla } -1 \leq x < 1 \\ 2p & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Aby F była dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej X, musi spełnić następujące warunki:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$, $x \in (-\infty; \infty)$

więc spełnione musi zostać:

$p \in [0; 1] \wedge 2p \in [0; 1]$

co nakłada na parametr p warunek $p \in [0; 0{,}5]$

2) $F(x)$ jest funkcją niemalejącą: $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

F jest przedziałami stała, zatem $F(x) - F(x^-) = 0$

dla każdego rzeczywistego $x \neq -1$ lub 1 lub 2.

Natomiast dla:

$x = -1$, $F(-1) - F(-1^-) = p - 0 = p \Rightarrow p \geq 0$

$x = 1$, $F(1) - F(1^-) = 2p - p = p \Rightarrow p \geq 0$

$x = 2$, $F(2) - F(2^-) = 1 - 2p \Rightarrow 1 - 2p \geq 0 \Rightarrow 2p \leq 1 \Rightarrow p \leq 0{,}5$

Skoki te muszą być nieujemne, co dla parametru p znowu tworzy warunek $p \in [0; 0{,}5]$

3) $F(x)$ jest funkcją prawostronnie ciągłą – nie stwarza to dodatkowych warunków dla parametru p

4) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ oraz $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, co również nie nakłada na parametr p dodatkowych warunków.

Zatem funkcja F jest dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej X dla $p \in [0; 0{,}5]$.

b) $P(X>0) = 0{,}7$

zatem liczymy bezpośrednio, w punktach skoku:

$P(X>0) = p(1) + p(2) = (2p-p) + (1-2p) = 2p - p + 1 - 2p = 1-p$

$1 - p = 0{,}7$

$p = 0{,}3$

i.

x	-1	1	2
$p(x)$	$0{,}3$	$0{,}3$	$0{,}4$

ii. $P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) - p(1) = 0{,}6 - 0{,}3 - 0{,}3 = 0$

$P(X \leq 0) = F(0) = 0{,}3$

$P(X \geq 1) = 1 - F(1) + p(1) = 1 - 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}7$

$P(X \geq -1) = 1 - F(-1) + p(-1) = 1 - 0{,}3 + 0{,}3 = 1$

iii. $E(X) = (-1)\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}4 = -0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}8 = 0{,}8$

$Var(X) = (-1-0{,}8)^2 \cdot 0{,}3 + (1-0{,}8)^2 \cdot 0{,}3 + (2-0{,}8)^2 \cdot 0{,}4 =$

$= (-1{,}8)^2 \cdot 0{,}3 + (0{,}2)^2 \cdot 0{,}3 + (1{,}2)^2 \cdot 0{,}4 =$

$= 3{,}24 \cdot 0{,}3 + 0{,}04 \cdot 0{,}3 + 1{,}44 \cdot 0{,}4 =$

$= 0{,}972 + 0{,}012 + 0{,}576 =$

$= 1{,}56$

$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1{,}56} \approx 1{,}249$

2. X - oddane strzały

$p = 0{,}8$ – prawdopodobieństwo sukcesu - trafienia w cel przy pojedynczym strzale

$$X = \begin{cases} 2 & \text{dla dwóch trafień w dwóch pierwszych strzałach} \\ 3 & \text{dla dwóch trafień w trzech pierwszych strzałach (zdarzenia: • pudło, traf., traf. • traf., pudło, traf.)} \\ 4 & \text{dla pozostałych kombinacji trafień i pudeł} \end{cases}$$

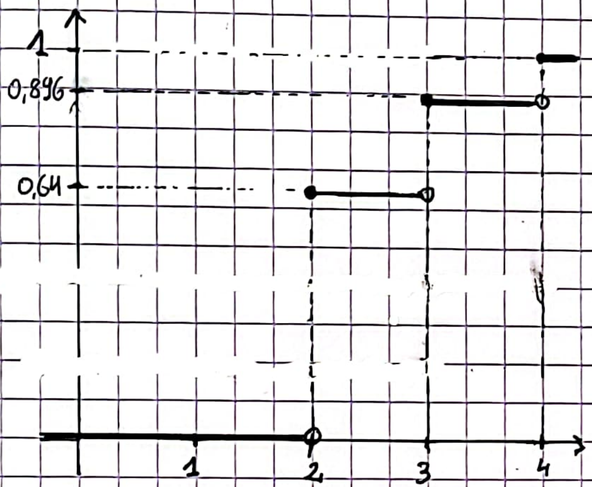
$P(X=2) = 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}64$

$P(X=3) = p\cdot q\cdot p + q\cdot p\cdot p = 0{,}8\cdot(1-0{,}8)\cdot 0{,}8 + (1-0{,}8)\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}256$

$P(X=4) = 1 - P(X=2) - P(X=3) = 1 - 0{,}64 - 0{,}256 = 0{,}104$

x	2	3	4
$p(x)$	$0{,}64$	$0{,}256$	$0{,}104$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 2 \\ 0{,}64 & \text{dla } 2 \leq x < 3 \\ 0{,}896 & \text{dla } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{dla } x \geq 4 \end{cases}$$



$$E(X) = 0{,}64 \cdot 2 + 0{,}256 \cdot 3 + 0{,}104 \cdot 4 = 1{,}28 + 0{,}768 + 0{,}416 = 2{,}464$$

③ T – czas naprawy urządzenia

$T \sim exp(\lambda)$

$\mu_T = 4$

$\mu_T = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0{,}25$

$T \sim exp(0{,}25)$

a) $P(T > 4) = ?$

$P(T>4) = e^{-\lambda \cdot 4} = e^{-0{,}25 \cdot 4} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

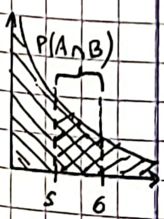
b) A – naprawa trwa co najmniej 5 h

B – naprawa trwa mniej niż 6 h

$P(B|A) = ?$

$P(A) = P(T>5) = e^{-0{,}25 \cdot 5} = e^{-1{,}25}$

$P(B) = P(T<6) = 1 - P(T>6) = 1 - e^{-0{,}25 \cdot 6} = 1 - e^{-1{,}5}$



$P(A \cap B) = P(5 < T < 6) = 1 - P(T>6) - P(T<5) =$

$= 1 - P(T>6) - (1 - P(T>5)) = 1 - P(T>6) - 1 + P(T>5) =$

$= P(T>5) - P(T>6) = e^{-1{,}25} - e^{-1{,}5}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{e^{-1{,}25} - e^{-1{,}5}}{e^{-1{,}25}} = \frac{e^{-1{,}25}}{e^{-1{,}25}} - \frac{e^{-1{,}5}}{e^{-1{,}25}} = 1 - e^{-0{,}25} = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx$$

$\approx 0{,}22$