PRACA DOMOWA 7

(1) X - waga torebki cukru

$\mu_0 = 1\,[kg] = 1000\,[g]$

$X \sim N(\mu, \sigma)$, parametry rozkładu nieznane, weryfikacja hipotez dot. μ => model 2.

obserwacje: [g]

1005, 997, 950, 1010, 987, 994, 995, 986, 1003

$n = 9$

$\alpha = 0{,}025$

1. Hipotezy.

$H_0: \quad \mu = 1000$

$H_1: \quad \mu < 1000$

2. Statystyka testowa.

$T = \frac{\bar{X} - 1000}{S} \cdot \sqrt{9}$, ma rozkład t-Studenta o 8 stopniach swobody, oznaczany jako t_8, o ile H_0 prawdziwa

3. Wartość statystyki testowej.

$\bar{x} = \frac{1}{9}(1005 + 997 + 950 + 1010 + 987 + 994 + 995 + 986 + 1003) = \frac{1}{9} \cdot 8927 = 991{,}8889$

$s^2 = \frac{1}{8}[(1005 - 991{,}8889)^2 + (997 - 991{,}8889)^2 + (950 - 991{,}8889)^2 + (1010 - 991{,}8889)^2 + (987 - 991{,}8889)^2 + (994 - 991{,}8889)^2 +$

$+ (995 - 991{,}8889)^2 + (986 - 991{,}8889)^2 + (1003 - 991{,}8889)^2] = \frac{1}{8}(171{,}9009 + 26{,}1233 + 1754{,}6799 + 328{,}0119 +$

$+ 23{,}9013 + 4{,}4567 + 9{,}6789 + 34{,}6791 + 123{,}4565) = \frac{1}{8} \cdot 2476{,}8885 = 309{,}6111$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{309{,}6111} = 17{,}5958$

$t = \frac{991{,}8889 - 1000}{17{,}5958} \cdot \sqrt{9} = -\frac{8{,}1111}{17{,}5958} \cdot 3 = -\frac{24{,}3333}{17{,}5958} = -1{,}3829$

4. Zbiór krytyczny.

$C = (-\infty; -t_{1-\alpha, n-1}]$

$\alpha = 0{,}025 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}975 \Rightarrow -t_{0{,}975;8} = -2{,}3060$

$C = (-\infty; -2{,}3060]$

5. Decyzja i jej uzasadnienie.

$t \notin C$, więc nie można twierdzić, że $\mu < 1000$, na poziomie istotności 0,025. Na poziomie istotności 0,025 nie można twierdzić, że średnia waga torebki cukru jest niższa, niż nominalna.

(2) X - średnia studenta po I roku

Y - średnia studenta po II roku

D - różnica średnich studenta

$D = X - Y \wedge X \sim N(\mu_X, \sigma_X) \wedge Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y) \Rightarrow D \sim N(\mu_D, \sigma_D)$ (przy założeniu, że X, Y niekorelowane)

$D \sim N(\mu_D, \sigma_D)$, σ_D nieznane, weryfikacja hipotezy dot. $\mu_D \Rightarrow$ model 9.

obserwacje:

student	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I rok	3,5	4,0	3,7	4,6	3,9	3,0	3,5	3,4	3,5
II rok	4,2	3,9	3,8	4,5	4,2	3,4	3,8	3,2	3,1
różnica	-0,7	0,1	-0,1	0,1	-0,3	-0,4	-0,3	0,2	0,4

$n = 9$, $\alpha = 0,05$

1. Hipotezy.

$H_0: \mu_D = 0$

$H_1: \mu_D < 0$

2. Statystyka testowa.

$T = \frac{\overline{D}}{s_D} \cdot \sqrt{9}$, ma rozkład t-Studenta o 8 stopniach swobody, oznaczamy jako t_8, o ile H_0 prawdziwa

3. Wartość statystyki testowej:

$\overline{D} = \frac{1}{9}(-0,7 + 0,1 - 0,1 + 0,1 - 0,3 - 0,4 - 0,3 + 0,2 + 0,4) = \frac{1}{9} \cdot (-1) = -0,1111$

$s_D^2 = \frac{1}{8}[(-0,7 - (-0,1111))^2 + (0,1 - (-0,1111))^2 + (-0,1 - (-0,1111))^2 + (0,1 - (-0,1111))^2 + (-0,3 - (-0,1111))^2 + (-0,4 - (-0,1111))^2 +$

$+ (-0,3 - (-0,1111))^2 + (0,2 - (-0,1111))^2 + (0,4 - (-0,1111))^2] = \frac{1}{8}(0,3468 + 0,0446 + 0,0001 + 0,0446 + 0,0357 + 0,0835 +$

$+ 0,0357 + 0,0968 + 0,2612) = \frac{1}{8} \cdot 0,949 = 0,1186$

$s_D = \sqrt{s_D^2} = \sqrt{0,1186} = 0,3444$

$t = -\frac{0,1111}{0,3444} \cdot \sqrt{9} = -\frac{0,1111}{0,3444} \cdot 3 = -\frac{0,3333}{0,3444} = -0,9678$

4. Zbiór krytyczny.

$C = [-\infty; -t_{1-\alpha, n-1}]$ $\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow -t_{0,95;8} = -1,8595$

$C = (-\infty; -1,8595]$

5. Decyzja i jej uzasadnienie.

$t \notin C$, więc nie można twierdzić, że $\mu_D < 0$, na poziomie istotności 0,05. Na poziomie istotności 0,05 nie można stwierdzić, że wyniki po II roku są lepsze niż po I roku.

(13) X - zmienna losowa przyjmująca wartość 1, gdy wieśniak popiera kandydata A.

$X \sim Bin(1, p)$, $p \in (0,1)$ => model 10.

$n = 1024$

$k = 384$

$\alpha = 0{,}05$

$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{384}{1024} = 0{,}375$

$p_0 = 0{,}4$

1. Hipotezy.

$H_0: p = 0{,}4$

$H_1: p < 0{,}4$

2. Statystyka testowa.

$Z = \frac{\hat{p} - 0{,}4}{\sqrt{\frac{0{,}4(1-0{,}4)}{1024}}}$, ma rozkład bliski $N(0,1)$, o ile H_0 prawdziwa

3. Wartość statystyki testowej.

$$z = \frac{0{,}375 - 0{,}4}{\sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{1024}}} = -\frac{0{,}025}{\sqrt{\frac{0{,}24}{1024}}} = -\frac{0{,}025}{0{,}0153} = -1{,}6340$$

4. Zbiór krytyczny.

$C = (-\infty; -z_{1-\alpha}]$

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow -z_{0{,}95} = -1{,}64485$

$C = (-\infty; -1{,}64485]$

5. Decyzja i jej uzasadnienie.

$z \notin C$, więc nie można twierdzić, że $p < 0{,}4$, na poziomie istotności $0{,}05$.

Na poziomie istotności $0{,}05$ nie można twierdzić, że poparcie dla kandydata A jest mniejsze niż 40%.