PRACA DOMOWA 5

(1) X – objętość 1 beczki piwa

$X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$

$\mu_x = 20\ l$

$\sigma_x^2 = 0{,}04 \Rightarrow \sigma_x = 0{,}2$

$X \sim N(20; 0{,}2)$

a) Y – liczba opakowań o objętości mniejszej od 19,5 l w partii 100 beczek

$Y \sim Bin(n, p)$

$n = 100$

$p = P(X < 19{,}5)$

$P(X < 19{,}5) = P\left(\frac{X-20}{0{,}2} < \frac{19{,}5-20}{0{,}2}\right) = P(Z < -2{,}5) = \Phi(-2{,}5) = 1 - \Phi(2{,}5) \cong$

$\cong 1 - 0{,}9938 \cong 0{,}0062$

$Y \sim Bin(100; 0{,}0062)$

$E(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}0062 = 0{,}62 \approx 1$

b) $P(19{,}75 \leq X \leq 20{,}25) = ?$

$P(19{,}75 \leq X \leq 20{,}25) = P\left(\frac{19{,}75-20}{0{,}2} \leq \frac{X-20}{0{,}2} \leq \frac{20{,}25-20}{0{,}2}\right) = P(-1{,}25 \leq Z \leq 1{,}25) =$

$= \Phi(1{,}25) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(1{,}25) - (1 - \Phi(1{,}25)) = 2 \cdot \Phi(1{,}25) - 1 \cong$

$\cong 2 \cdot 0{,}8944 - 1 \cong 1{,}7888 - 1 \cong 0{,}7888$

c) $P(X \geq c) = 0{,}75$

$c = ?$

$P(X \geq c) = 1 - P(X < c)$

$1 - P(X < c) = 0{,}75$

$P(X < c) = 0{,}25$

$P(X < c) = P\left(\frac{X-20}{0{,}2} < \frac{c-20}{0{,}2}\right) = P\left(Z < \frac{c-20}{0{,}2}\right) = \Phi\left(\frac{c-20}{0{,}2}\right) = 0{,}25$

$0{,}25 = \Phi(z_{0{,}25}) = \Phi(-z_{0{,}75}) = \Phi(-0{,}67449)$

$\frac{c-20}{0{,}2} = -0{,}67449 \quad | \cdot 0{,}2$

$c - 20 = -0{,}134898$

$c \approx 19{,}87\ [l]$ Odp.: Co najmniej 75% beczek ma objętość nie mniejszą niż 19,87 l.

② X – liczba internautów, którzy odpowiedzieli pozytywnie na spam

$X \sim Bin(n, p)$

$n = 2000$

$p = 0{,}01$

a) $X \sim Bin(2000; 0{,}01)$

$P(X = k) = \binom{2000}{k} \cdot 0{,}01^{k} \cdot 0{,}99^{2000-k}$

b) $P(X \geqslant 30) = 1 - P(X < 30) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - \ldots\ P(X=29) =$

$= 1 - \sum_{i=0}^{29} \binom{2000}{i} \cdot 0{,}01^{i} \cdot 0{,}99^{2000-i}$

c) $P(X \geqslant 30) = ?$

$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 2000 \cdot 0{,}01 = 20 \geqslant 5 \\ n \cdot (1-p) = 2000 \cdot 0{,}99 = 1980 \geqslant 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ można więc stosować CTG

$Var(X) = n \cdot p \cdot q = 2000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99 = 19{,}8$

$P(X \geqslant 30) = 1 - P(X < 30)$

$P(X < 30) = P(X \leqslant 29) = P(X \leqslant 29{,}5) = P\left(\frac{X-20}{\sqrt{19{,}8}} \leqslant \frac{29{,}5-20}{\sqrt{19{,}8}}\right) = P\left(Z \leqslant \frac{9{,}5}{4{,}45}\right) = P(Z \leqslant 2{,}13)$

$\cong \Phi(2{,}13) \cong 0{,}9834$

$P(X \geqslant 30) \cong 1 - 0{,}9834 \cong 0{,}0166$

③ X – liczba klientów, którzy odpowiedzieli pozytywnie na ofertę

$X \sim Bin(n, p)$

$n = 400$ { prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie jest tożsame z odsetkiem sukcesów we wszystkich nieznanych próbach

$p = 0{,}8$

$X \sim Bin(400; 0{,}8)$

a) $P(X \geqslant 350) = P(X=350) + P(X=351) + \ldots + P(X=400) = \sum_{i=350}^{400} \binom{400}{i} \cdot 0{,}8^{i} \cdot 0{,}2^{400-i}$

b) $P(X \geqslant 350) = ?$

$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 400 \cdot 0{,}8 = 320 \geqslant 5 \\ n \cdot (1-p) = 400 \cdot 0{,}2 = 80 \geqslant 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ można stosować CTG

$Var(X) = 400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 64$

$P(X \geqslant 350) = 1 - P(X < 350)$

$P(X < 350) = P(X \leqslant 349) = P(X \leqslant 349{,}5) = P\left(\frac{X-320}{\sqrt{64}} \leqslant \frac{349{,}5-320}{\sqrt{64}}\right) = P\left(Z \leqslant \frac{29{,}5}{8}\right) =$

$= \Phi(3{,}69) \cong 0{,}9999$

$P(X \geqslant 350) \cong 1 - 0{,}9999 \cong 0{,}0001$

c) Poszukujemy nowej wartości n, dla której spełniony będzie warunek:

$$P(X > 300) \geq 0{,}95$$

$$1 - P(X \leq 300) \geq 0{,}95$$

$$P(X \leq 300) \leq 0{,}05$$

$$n \cdot p = n_{min} \cdot p = 300 \cdot 0{,}8 = 240 \geq 5$$

$$n(1-p) = n_{min}(1-p) = 300 \cdot 0{,}2 = 60 \geq 5$$

$\Rightarrow$ możemy więc dokonać przybliżenia rozkładem normalnym korzystając z CTG

$$P(X \leq 300) = P(X \leq 300{,}5) = P\left(\frac{X - 0{,}8n}{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot n}} \leq \frac{300{,}5 - 0{,}8n}{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot n}}\right) = P\left(Z \leq \frac{300{,}5 - 0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{300{,}5 - 0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right)$$

$$0{,}05 = \Phi(z_{0{,}05}) = \Phi(-z_{0{,}95}) = \Phi(-1{,}64485)$$

$$\Phi\left(\frac{300{,}5 - 0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right) \leq \Phi(-1{,}64485)$$

$$\frac{300{,}5 - 0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}} \leq -1{,}64485$$ (ponieważ Φ jest ściśle rosnąca)

$$300{,}5 - 0{,}8n \leq -0{,}657940\sqrt{n}$$

$$0{,}8n - 0{,}657940\sqrt{n} - 300{,}5 \geq 0$$

Niech: $\sqrt{n} = t$

$$0{,}8t^2 - 0{,}65794t - 300{,}5 \geq 0$$

$$\Delta_t = (-0{,}65794)^2 - 4 \cdot 0{,}8 \cdot (-300{,}5) = 0{,}432885 + 961{,}6 \approx 962, \quad \sqrt{\Delta_t} \approx 31{,}02$$

$$t_1 = \frac{0{,}65794 - 31{,}02}{2 \cdot 0{,}8} \approx -18{,}98 \qquad t_2 = \frac{0{,}65794 + 31{,}02}{2 \cdot 0{,}8} \approx 19{,}8$$

$$n = t_2^2 = (19{,}8)^2 \approx 392{,}04 \Rightarrow n_{min} = 393$$

Odp.: Aby z prawdopodobieństwem minimum 0,95 uzyskać więcej niż 300 odpowiedzi, należy wysłać ofertę do co najmniej 393 klientów.