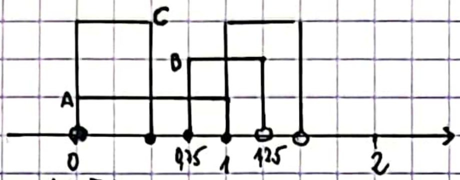
PRACA DOMOWA 3

(1) $\Omega = [0;2]$

$A = (0;1]$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$

$B = [0{,}75; 1{,}25)$, $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{0{,}5}{2} = \frac{1}{4}$

$C = [0; 0{,}5] \cup [1; 1{,}5)$, $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$



Poprzez sumowanie przedziałów:

$A \cup B \cup C = [0; 1{,}5)$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{|A \cup B \cup C|}{|\Omega|} = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4}$$

Poprzez rachunek zdarzeń:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$
$$+ P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + 0 =$$
$$= \frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Niezależność parami:

$P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B)$

$A \cap B = [0{,}75; 1]$

$\frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \overset{?}{=} \frac{|A|}{|\Omega|} \cdot \frac{|B|}{|\Omega|}$

$\frac{0{,}25}{2} \overset{?}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}5}{2}$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$L = P$

A i B są niezależne

$P(A \cap C) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(C)$

$A \cap C = (0; 0{,}5] \cup \{1\}$

$\frac{|A \cap C|}{|\Omega|} \overset{?}{=} \frac{|A|}{|\Omega|} \cdot \frac{|C|}{|\Omega|}$

$\frac{0{,}5}{2} \overset{?}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$L = P$

A i C są niezależne

$P(B \cap C) \stackrel{?}{=} P(B) \cdot P(C)$

$B \cap C = [1; 1{,}25)$

$\frac{|B \cap C|}{|\Omega|} \stackrel{?}{=} \frac{|B|}{|\Omega|} \cdot \frac{|C|}{|\Omega|}$

$\frac{0{,}25}{2} \stackrel{?}{=} \frac{0{,}5}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$L = P$

B i C są niezależne

Niezależność wzajemna:

$P(A \cap B \cap C) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$A \cap B \cap C = \{1\}$

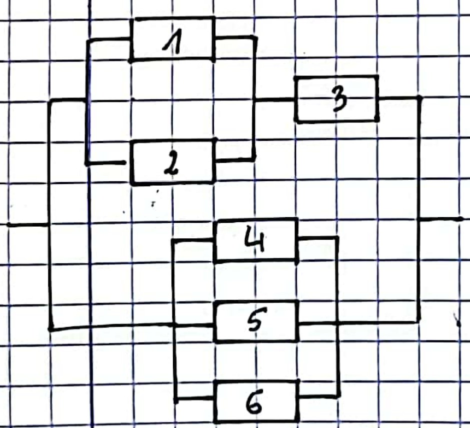
$\frac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega|} \stackrel{?}{=} \frac{|A|}{|\Omega|} \cdot \frac{|B|}{|\Omega|} \cdot \frac{|C|}{|\Omega|}$

$0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}5}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$L \neq P$

A, B i C nie są wzajemnie niezależne

2



A_i – i-ty element działa poprawnie

B – urządzenie jako całość działa poprawnie

$P(A_1) = 0{,}7$, $P(A_2) = 0{,}8$, $P(A_3) = 0{,}9$, $P(A_4) = 0{,}9$, $P(A_5) = 0{,}8$, $P(A_6) = 0{,}9$

$P(B) = P[((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \cup (A_4 \cup A_5 \cup A_6)]$

$P(B) = P[((A_1 \cup A_2)\cap A_3) \cup (A_4\cup A_5\cup A_6)] =$

$= P((A_1\cup A_2)\cap A_3) + P(A_4\cup A_5\cup A_6) - P[((A_1\cup A_2)\cap A_3)\cap(A_4\cup A_5\cup A_6)] =$

$= P(A_1\cup A_2)\cdot P(A_3) + P(A_4)+P(A_5)+P(A_6) - P(A_4\cap A_5) - P(A_4\cap A_6) - P(A_5\cap A_6) + P(A_4\cap A_5\cap A_6) -$

$- P((A_1\cup A_2)\cap A_3)\cdot P(A_4\cup A_5\cup A_6) =$

$= (P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2))P(A_3) + P(A_4)+P(A_5)+P(A_6) - P(A_4)P(A_5) - P(A_4)(A_6) - P(A_5)P(A_6) + P(A_4)P(A_5)P(A_6) -$

$- P(A_1\cup A_2)P(A_3)\cdot(P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)-P(A_4\cap A_5)-P(A_4\cap A_6)-P(A_5\cap A_6)+P(A_4\cap A_5\cap A_6)) =$

$= (P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2))P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)-P(A_4)P(A_5)-P(A_4)P(A_6)-P(A_5)P(A_6)+P(A_4)P(A_5)P(A_6)-$

$-(P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2))P(A_3)(P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)-P(A_4)P(A_5)-P(A_4)P(A_6)-P(A_5)P(A_6)+P(A_4)P(A_5)P(A_6)) =$

$= (P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2))P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)-P(A_4)P(A_5)-P(A_4)P(A_6)-P(A_5)P(A_6)+P(A_4)P(A_5)P(A_6) -$

$-(P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2))P(A_3)(P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)-P(A_4)P(A_5)-P(A_4)P(A_6)-P(A_5)P(A_6)+P(A_4)P(A_5)P(A_6)) =$

$=(0,7+0,8-0,7\cdot 0,8)\cdot 0,9 + 0,9+0,8+0,9 - 0,9\cdot 0,8 - 0,9\cdot 0,9 - 0,8\cdot 0,9 + 0,9\cdot 0,8\cdot 0,9 - (0,7+0,8-0,7\cdot 0,8)\cdot 0,9\cdot ($

$\cdot(0,9+0,8+0,9-0,9\cdot0,8-0,9\cdot0,9-0,8\cdot0,9+0,9\cdot0,8\cdot0,9) =$

$=(1,5-0,56)\cdot0,9+2,6-0,72-0,81-0,72+0,648-(1,5-0,56)\cdot0,9\cdot(2,6-0,72-0,81-0,72+0,648)=$

$=0,94\cdot0,9+0,998-0,94\cdot0,9\cdot0,998=$

$=0,846+0,998-0,844308=$

$=0,999692$

$P(B)=0,999692$

3 A – wybrano osobę z 1-szej grupy

B – wybrano osobę z 2-giej grupy

C – wybrano osobę z 3-ciej grupy

D – wybrano kobietę

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$

$P(D|A)=\frac{6}{6+9}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$P(D|B)=\frac{8}{8+7}=\frac{8}{15}$

$P(D|C)=\frac{8}{8+6}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$

$P(D)=P(D|A)\cdot P(A)+P(D|B)\cdot P(B)+P(D|C)\cdot P(C)=$

$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}+\frac{8}{45}+\frac{4}{21}=\frac{42}{315}+\frac{56}{315}+\frac{60}{315}=\frac{158}{315}$

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)\cdot P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{158}{315}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{15}_{1}} \cdot \frac{\cancel{315}^{21}}{\cancel{158}_{79}} = \frac{21}{79}$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)\cdot P(B)}{P(D)} = \frac{\frac{8}{45}}{\frac{158}{315}} = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{45}_{1}} \cdot \frac{\cancel{315}^{7}}{\cancel{158}_{79}} = \frac{28}{79}$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)\cdot P(C)}{P(D)} = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{158}{315}} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{21}_{1}} \cdot \frac{\cancel{315}^{15}}{\cancel{158}_{79}} = \frac{30}{79}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że do Rady Wydziału wybrano kobietę, wynosi $\frac{158}{315}$ ($\approx 0,50$). Jeśli wiadomo, że wybrano kobietę, to najprawdopodobniej jest ona z 3-ciej grupy. Wynika to z reguły Bayesa, dzięki której a posteriori (znając wynik doświadczenia) możemy stwierdzić, które ze zdarzeń wyboru grupy było najbardziej prawdopodobne.