

① X - długość losowo wybranej wznowy

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

obserwacje:

406 399 413 404 408 411 422 401 417

$$n = 9 \Rightarrow n-1 = 8$$

$$98\% \text{ przedział ufności} \Rightarrow 1-\alpha = 0,98 \Rightarrow \alpha = 0,02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,99$$

$$\text{rozkład normalny, } \sigma \text{ nieznane} \Rightarrow \text{model II: } \left[\bar{X}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$$t_{0,99;8} = 2,8965$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{9} (406 + 399 + 413 + 404 + 408 + 411 + 422 + 401 + 417) = \frac{1}{9} \cdot 3681 = 409$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{8} [(406-409)^2 + (399-409)^2 + (413-409)^2 + (404-409)^2 + (408-409)^2 + (411-409)^2 + (422-409)^2 + (401-409)^2 + (417-409)^2] = \frac{1}{8} (9 + 100 + 16 + 25 + 1 + 4 + 169 + 64 + 64) = \frac{1}{8} \cdot 452 = 56,5$$

$$s = \sqrt{56,5} = 7,5166$$

$$\left[409 - 2,8965 \cdot \frac{7,5166}{\sqrt{9}}; 409 + 2,8965 \cdot \frac{7,5166}{\sqrt{9}} \right] = [409 - 7,2573; 409 + 7,2573] = [401,7427; 416,2573]$$

Odp: 98% przedział ufności dla wartości oczekiwanej długości wznowy telefonicznej ma postać $[401,7427; 416,2573]$.

② X - logd prądu długości dźwiękiem

obserwacje pomiarowe:

301 295 307 303 291 308 298 310 305 302

$$1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$$

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$n = 10 \Rightarrow n-1 = 9$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10} (301 + 295 + 307 + 303 + 291 + 308 + 298 + 310 + 305 + 302) = \frac{1}{10} \cdot 3020 = 302$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} [(301-302)^2 + (295-302)^2 + (307-302)^2 + (303-302)^2 + (291-302)^2 + (308-302)^2 + (298-302)^2 + (310-302)^2 + (305-302)^2 + (302-302)^2] = \frac{1}{9} (1 + 49 + 25 + 1 + 121 + 36 + 16 + 64 + 9 + 0) = \frac{1}{9} \cdot 322 = 35,7778$$

$$s = \sqrt{35,7778} = 5,9815$$

$$\chi^2_{0,995;9} = 19,0228 \quad \chi^2_{0,005;9} = 2,7004$$

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; n-1}}} \right] = \left[\sqrt{\frac{9 \cdot 35,7778}{19,0228}}, \sqrt{\frac{9 \cdot 35,7778}{2,7004}} \right] = \left[\sqrt{\frac{322,0002}{19,0228}}, \sqrt{\frac{322,0002}{2,7004}} \right] =$$

$$= \left[\sqrt{16,9271}, \sqrt{119,2417} \right] = [4,1143; 10,9198]$$

Odp.: Realizacja przedziału ufności dla odchylenia standardowego błędów pomiarowego dla poziomu ufności 0,95 wynosi $[4,1143; 10,9198]$.

③ X - czas występowania określonego efektu świetlnego

$$n = 10\,000 \Rightarrow n-1 = 9999$$

wkład X i σ nieznane \Rightarrow model III: $\left[\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k w_i \bar{x}_i = \frac{1}{10000} (870 \cdot 1 + 1580 \cdot 3 + 2950 \cdot 5 + 3060 \cdot 7 + 1540 \cdot 9) =$$

$$= 0,0001 \cdot (870 + 4740 + 14750 + 21420 + 13860) = 0,0001 \cdot 55640 = 5,564$$

$$1-\alpha = 0,96 \Rightarrow \alpha = 0,04 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,02 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,98 \quad z_{0,98} = 2,05375$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9999} \left[870(1-5,564)^2 + 1580(3-5,564)^2 + 2950(5-5,564)^2 + \right.$$

$$\left. + 3060(7-5,564)^2 + 1540(9-5,564)^2 \right] = \frac{1}{9999} (870 \cdot 20,8301 + 1580 \cdot 6,5741 + 2950 \cdot 0,3181 +$$

$$+ 3060 \cdot 2,0621 + 1540 \cdot 11,8061) = \frac{1}{9999} (18122,187 + 10387,078 + 938,395 + 6310,026 + 18181,394) =$$

$$= \frac{1}{9999} \cdot 53939,08 = 5,3944$$

$$s = \sqrt{5,3944} = 2,3226$$

$$\left[5,564 - 2,05375 \frac{2,3226}{100}, 5,564 + 2,05375 \frac{2,3226}{100} \right] = [5,564 - 0,0477; 5,564 + 0,0477] = [5,5163; 5,6117]$$

Y - zmienna losowa przyjmująca wartości 1, gdy czas występowania efektu nie przekracza 4 sek.

$$Y \sim \text{Bin}(1, p), p \in (0, 1)$$

$k = 870 + 1580 = 2450$ - liczba wystąpień efektu o nasie poniżej 4 sek.

$$1-\alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,995 \quad z_{0,995} = 2,57582$$

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{2450}{10000} = 0,245 \Rightarrow 1-\hat{p} = 0,755$$

$$\text{model IV: } \left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

$$\left[0,245 - 2,57582 \sqrt{\frac{0,245 \cdot 0,755}{10000}}, 0,245 + 2,57582 \sqrt{\frac{0,245 \cdot 0,755}{10000}} \right] =$$

$$= [0,245 - 2,57582 \cdot 0,0043; 0,245 + 2,57582 \cdot 0,0043] = [0,245 - 0,0111; 0,245 + 0,0111] =$$

$$= [0,2339; 0,2561]$$

Odp.: Przedział ufności światła czasu trwania efektu na poziomie ufności 0,96 to $[5,5163; 5,6117]$, a przedział ufności funkcji efektów nie dłuższych niż 4 sek. na poziomie ufności 0,99 to $[0,2339; 0,2561]$.