

# 我国高考数学应该引入计算器吗？<sup>\*</sup>

——基于对 30 个国家和地区高考政策和实践的调查及思考

李淑惠<sup>1</sup> 李 上<sup>2</sup> 范良火<sup>1,3</sup>

(1. 华东师范大学数学科学学院, 上海 200241; 2. 昆山杜克大学, 江苏昆山 215316;  
3. 南安普顿大学, 英国南安普顿 SO17 1BJ)

**摘 要:** 高考数学是否应该引入计算器是一个学界关心和争议的话题。本研究调查了六大洲 30 个经济较为发达的国家和地区高考数学计算器的使用规定,从考试模式(单一、混合)、计算器的种类和计算器本身在数学试题及其解答中发挥的作用三方面进行比较分析,并对有代表性的考试样卷进行案例分析。研究发现,当前全球大多数高考数学卷允许使用计算器,且以科学计算器的单一模式为主。高考数学中引入计算器能够突破传统考试对试题内容、类型和情境的限制,为提高试题的情境性、开放性、灵活性、应用性和探究性,拓宽试题内容的范围提供新的途径,并有效提高考试与课程标准的一致性。根据研究结果,我们认为,应充分认识到将计算器引入高考数学的正面价值和信息时代下的必然性,高考改革应积极适应未来社会发展的需要;努力探索将计算器引入高考数学的考试模式和题目设计,开展相关研究,推进考试创新和命题改革;同时,要切实注意到计算器进入高考数学带来的公平性问题,制订和完善有关计算器进入课堂和考试的长期规划。

**关键词:** 高考数学; 教育考试政策; 计算器使用; 现代信息技术; 国际和比较教育

## 一、引言

现代信息技术给数学课程和数学教育带来了巨大的变化和多方面的挑战(Ruthven, 2022)。我国《普通高中数学课程标准》明确指出:“鼓励学生尽可能运用计算器、计算机进行模拟活动,处理数据,更好地体会概率的意义和统计思想”(教育部, 2020, 第 33 页)。然而,我国高考中禁用计算器的规定与新课程提倡计算器使用形成了明显的反差。2022 年仅上海高考数学卷允许使用科学计算器(上海市教育考试院, 2021)。同时,一线教师对是否使用计算器有很多困惑,教材中“计算器使用”的内容略讲、甚至不讲的现象十分突出。由于高考指挥棒的作用,计算器不进入高考,学生难有相应的学习机会。

国务院办公厅(2019)《关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见》就深化考试命题改革方面提出:“重点考查学生运用所学知识分析问题和解决问题的能力。创新试题形式,加强情境设计,注重联系社会生活实际”。教育部(2021)《关于做好 2021 年普通高校招生工作的通知》指出深化考试内容改革,高考命题要“优化情境设计,增强试题开放性、灵活性”,“引导减少死记硬背和‘机械刷题’现象”。现实情境中的数学问题往往涉及复杂的数据,如果引入计算器,学生可以避免在繁琐的运算上浪费大量时间,将有限的时间用来思考、解决真实问题(张阳开等, 2014)。价格相对低廉的计算器的日益普及,为增强高考数学题的情境性、开放性、灵活性、应用性和探究性提供了新途径。

<sup>\*</sup> 基金项目:华东师范大学亚洲数学教育中心项目(92900-120215-10514);华东师范大学“幸福之花”先导研究基金项目(2019ECNU-XF2H004);上海市核心数学与实践重点实验室基金(22DZ2229014)。

高考是否应该引入计算器是一个学界关心和争议的话题。国内外学者从计算器带来的教育公平问题(刘琴, 2010)、计算器引发考试题型革新(Brown, 2010; 马峰, 2021; Senk et al., 1997)、图形计算器解高考数学题(林磊, 2001; 林米儿, 2006; 沈建刚, 2015)等方面讨论了有关计算器进入数学考试的问题。值得注意的是, 胡耀华(2009)和刘琴(2010)专门比较和分析了国内外数学考试中计算器的使用, 但有关研究开展在十多年前, 选取的国家也较少, 而最近十多年来不少国家的考试政策已发生很大的变化。例如, 2016年美国新SAT考试改变了全程允许使用计算器的规定, 将试卷分成了计算器卷和无计算器卷(任子朝, 陈昂, 2016)。并且, 从中国知网检索可以发现, 我国关于国内外高考数学的比较主要集中在试题综合难度、情境水平、核心素养等方面(如李作滨, 2019; 张玉环, 周侠, 2020), 很少涉及高考计算器使用问题。现有关于高考使用计算器的研究主要集中在上海高考数学卷。

上海是目前我国大陆唯一在高考数学中允许使用计算器的省份。1988年, 国家教育委员会(现教育部)委托上海市, 作为经济发达地区, 率先进行中小学课程教材改革, 为其他地区提供经验, 在上海进行的这场课程改革的第一阶段(1988—1997)以实施素质教育为理念, 也涉及高考命题的改革(孙元清等, 2016)。考虑到计算器进入高考对于推进素质教育的重要意义, 上海市教委最初在几所中学试点计算器教学, 但由于初期存在着关于计算器机型、质量、定价等方面的问题, 以及高考不能够使用计算器等问题, 实验效果不理想。接着经过几年的经验积累和探索, 上述几方面的问题得到了较好的解决(汪文, 2001)。1997年, 上海市教育考试院和上海中小学课程教改办联合发文, 决定高一学生配置并使用卡西欧fx-82型计算器, 并在2000年及以后的上海高考中准许使用计算器, 该决定在当时引起了国内学术界的广泛注意, 被认为“在中国教育使用现代技术的历史上是一个重要的突破”(见数学教学, 2000)。

同时, 随着时代的发展, 允许在上海高考中使用的计算器类型也有了很大变化, 从以功能受限(如无法生成函数表格)的fx-82SX、fx-82MS型计算器为主, 过渡到2006年具备表格、统计回归功能的fx-82ES型计算器, 至2007年及以后, 不再对计算器的品牌和型号作具体规定, 但要求计算器不带有无无线通讯、记忆存储以及图象功能(虞涛, 2008)。在科技日新月异的时代, 如何促进功能更全、应用更广泛的计算器在高考中发挥更好的作用, 值得我们进一步探索。

本研究针对30个国家和地区高考数学卷中计算器的使用政策和实践进行比较分析, 旨在了解世界范围内有代表性的考试的有关计算器使用的现状, 并由此对我国高考引入计算器问题进行深入思考, 给高考改革提供相关建议, 并为数学教育研究者开展进一步的研究和讨论提供参考。

## 二、研究设计

### (一) 数据来源

本研究聚焦高考, 由于国际上部分国家和地区不存在类似的考试, 故将会考、高中学业水平测试作为参考。具体地, 本研究通过以下两个阶段对国家和地区进行筛选。

第一阶段: 参加2018国际学生评估项目(PISA)的国家和地区。PISA是世界上规模较大、具有广泛国际影响的基础教育评价项目。因学生必须在计算机上答题, 对教育信息化水平有一定的要求, 故可为本研究提供较多的优质研究数据。79个国家和地区参与了PISA 2018, 包括美国、澳大利亚、绝大部分欧洲国家、日本、韩国等部分亚洲国家及地区, 以及巴西等部分南美洲国家(OECD, 2018)。

第二阶段: 非洲人均国内生产总值(GDP)排名前三的国家, 即尼日利亚、南非和埃及(The World Bank, 2018)。考虑到除摩洛哥外, 非洲没有任何国家参与PISA 2018, 且非洲的文化、经济发展和社会背景与参加PISA 2018的其他洲的国家、地区等不同, 包括非洲国家可以更全面地反映国际上高考中使用计算器的现状。而人均GDP体现了国家经济发达程度, 一定程度上影响了计算器的可获得性。故本研究对以上国家及地区按照人均GDP进行排序, 通过邮件与其中上位圈国家及地区的数学教育

工作者取得联系，最终得到了表 1 中的国家及地区。

表 1 国家及地区的选取结果	
大洲	人均GDP上位圈的国家及地区 <sup>1</sup>
亚洲	中国大陆（上海、上海以外地区） <sup>2</sup> 、日本、韩国、印度尼西亚、沙特阿拉伯、泰国、阿联酋、新加坡、以色列、中国香港、马来西亚、中国澳门、中国台湾 <sup>3</sup>
北美洲	美国、加拿大
南美洲	巴西、哥伦比亚
欧洲	德国、英国、法国、意大利、俄罗斯、西班牙、土耳其、荷兰、丹麦、芬兰
大洋洲	澳大利亚
非洲	南非

注：1. 选用2018年人均GDP，上位圈为前50%。2. 考虑到上海高考计算器使用政策与大陆其他地区政策的差别，区分了上海与上海以外地区。3. 补充了中国澳门和中国台湾。

此外，鉴于国际文凭组织的大学预科(International Baccalaureate, 简称 IB)课程的国际影响力，且其数学课程改革的经验一直为我国的课程改革所借鉴(马峰, 2021)，故本研究也将 IB 考试纳入研究范围。需要指出的是，为论述方便，本文也统称 IB 考试为 30 个国家和地区的考试之一。

基于数据的可获得性和可靠性，本研究的主要数据为可获取的最新考试大纲、考试计划、考试说明、样卷，辅助数据为相关的期刊、报纸提供的有关资料和证据。

(二) 分析框架

本研究的整体分析框架如图 1 所示。

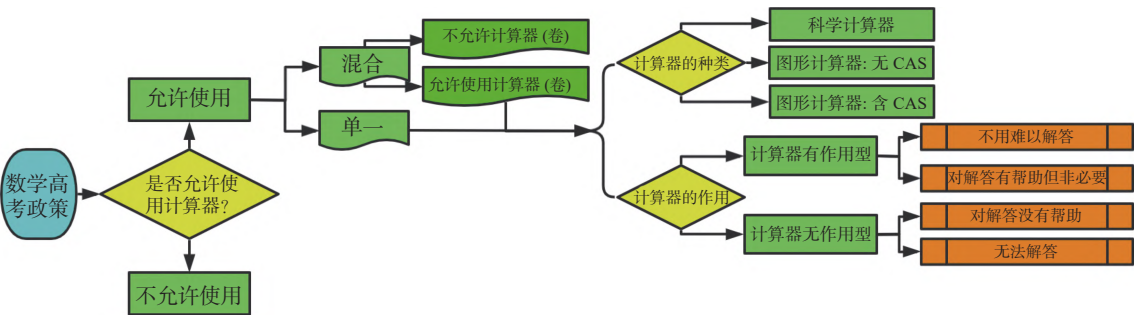


图 1 计算器在数学高考中使用情况的分析框架

如图 1 所示，我们首先对高考数学是否允许使用计算器分成两种模式，即“允许”和“不允许”(Browne & Ellis, 1997)，而对“允许”这一模式，我们进一步分为“单一模式”(全部允许)和“混合模式”(只允许在某些卷使用)。考虑到不同种类计算器在绘图、运算功能上的差异，我们将其分为：科学计算器、无计算机代数系统(CAS)的图形计算器和含 CAS 的图形计算器。最后，基于 Brown(2005)关于计算器对高考题影响的分类模型，我们根据计算器在解题中发挥的作用，将所分析的样卷题目分为：计算器有作用型(Active)：包括“不用计算器难以解答”和“用计算器对解答有帮助但非必要”这两类；计算器无作用型(Inactive)：包括“用计算器对解答没有帮助”和“无法使用计算器解答”这两类。

三、各国高考数学卷中计算器的使用规定分析

(一) 整体情况

整体来看，把上海单独作为一个地区，则研究结果显示，39% 的被选取国家和地区不允许使用计算器，它们主要来自亚洲和南美洲，包括日本、韩国、印度尼西亚、沙特阿拉伯、泰国、巴西、哥伦比亚、俄罗斯、土耳其、中国大陆(上海以外地区)、中国澳门、中国台湾。而有 61% 的国家和地区允许使用

计算器,如表2所示。除IB考试要求必须使用图形计算器外,其他国家和地区均允许科学计算器(不带通信、存储和画图功能)。其中,约62%允许使用计算器的考试也允许使用图形计算器,以不含CAS为主,仅丹麦、芬兰允许使用CAS、电子表单或其他软件。

表2 最近几年计算器在各个国家和地区高考数学卷中的使用规定

国家、地区	考试及数据年份	计算器种类	模式
美国	Scholastic Assessment Test (SAT) Math Test, 2021	科学/图形 (含CAS)	混合
	American College Test (ACT) Math, 2021	科学/图形 (不含CAS)	单一
加拿大 <sup>1</sup>	Uniform Examination for Secondary IV Mathematics, 2021	科学/图形 (不含CAS)	单一
	Alberta Diploma Examinations - Mathematics, 2021		
德国	Abitur Mathematik, 2021 (英文: The German Abitur)	科学 <sup>2</sup>	单一
英国 <sup>3</sup>	General Certificate of Education Advanced Level (GCE A-Level) Mathematics & Further Mathematics, 2021	科学/图形 (不含CAS)	混合
法国	Baccalauréat en mathématiques, 2019 (英文: The French Baccalaureate)	科学/图形 (不含CAS)	单一
意大利	Esame di Stato conclusivo del secondo ciclo di istruzione - Matematica, 2020 (英文: The Upper Secondary School Leaving Exam (State Exam) in Italy)	科学/图形 (不含CAS)	单一
	Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad - Matemáticas II, 2021 (英文: The Spanish Baccalaureate)		
荷兰	VWO wiskunde (A, B, C), 2022 (英文: VMO)	科学/图形 (不含CAS)	单一
丹麦	Vejledende enkeltopgaver stx Mat A & stx Mat B, 2020 (英文: The Higher General Examination Programme (stx) Exam in Denmark)	科学/图形 (含CAS) 等 <sup>4</sup>	混合
芬兰	Ylioppilastutkinto - Matematiikka, 2021 (英文: The Finnish Matriculation Examination)	科学/图形 (含CAS) 等 <sup>4</sup>	混合
澳大利亚 <sup>5</sup>	NSW Higher School Certificate Examination - Mathematics Standard 1 & 2, 2022	科学	单一
南非	National Senior Certificate Examination of South Africa - Mathematics P1&P2, 2020	科学	单一
阿联酋	يَسَائِقْلَا تَارَامِلَا رَابِتْخ 2021 (英文: The Emirates Standard Test)	科学 <sup>6</sup>	单一
新加坡	Singapore-Cambridge GCE A-Level Mathematics, 2021	科学/图形 (不含CAS) <sup>7</sup>	单一
以色列	תורגב תדועת (Levels 3-5), 2021 (英文: The Israeli Matriculation Exams (Bagrut))	科学/图形 (不含CAS)	单一
中国上海 <sup>8</sup>	普通高等学校招生全国统一考试 上海 数学试卷, 2021	科学	单一
中国香港	香港中学文凭考试数学必修部分, 2021	科学	单一
马来西亚	Sijil Pelajaran Malaysia Mathematics, 2021	科学	单一
IB	Mathematics: Analysis and Approaches; Applications and Interpretation, 2021	图形 (不含CAS)	混合

注: 1. 以魁北克和阿尔伯塔为例。2. 少部分大学、州/区允许图形计算器。3. 以英国资格评估与认证联合会 (AQA) 为例。4. 允许使用CAS、电子表单或其他软件。5. 以新南威尔士为例。6. 具体型号未有规定, 学生以科学计算器为主。7. 图形计算器 (无CAS) 只在A-Level at H1, H2, H3 Levels中允许使用。8. 上海市普通高校招生考试包括春季考试和秋季统一高考, 但是两次考试对计算器的使用规定是一致的。9. 表格中非英文试卷名称的翻译并非逐词翻译, 对这些国家高考感兴趣的读者, 可通过表中提供的英文搜索相应国家高考的有关信息。

允许使用计算器的高考中, 约 76% 采用单一模式, 但同一份试卷中也有不使用计算器的试题。具体地, 西班牙高考数学有单独考查计算器使用的题目, 且计算器无作用型题目在样卷中占比很高。在马来西亚高考数学卷中, 也有个别题目规定不允许使用计算器, 如: 题目要求推导步骤(过程), 不允许一步写答案。新加坡高考数学对不允许使用计算器的题目也会说明要求列出详细步骤和解题过程。

采用混合模式的高考数学卷比较少。美国的 SAT 数学分为无计算器卷和允许使用包含 CAS 图形计算器的计算器卷。计算器卷中有最好不使用计算器的题目, 以此来考查学生能否甄别何时使用计算

器。负责 SAT 考试的大学理事会指出，计算器是重要的工具，学生要想在高中毕业后取得成功，需要了解如何使用以及何时使用计算器，此外，在计算器的帮助下，学生可以专注于真实世界中复杂问题的数学建模和推理过程(College Board, 2021)。IB 数学卷分为“分析与方法”和“应用与解释”两部分，设有标准水平(一卷、二卷)和较高水平(一卷、二卷和三卷)，只有一卷中的“分析与方法”不允许使用计算器(IBO, 2021)。在“应用与解释”部分要求必须使用不含 CAS 的图形计算器，否则部分题目无法解答。图形计算器的使用让 IB 试题灵活了很多，很多数据可直接来源于生活与生产(马峰, 2021)。

(二) 案例分析

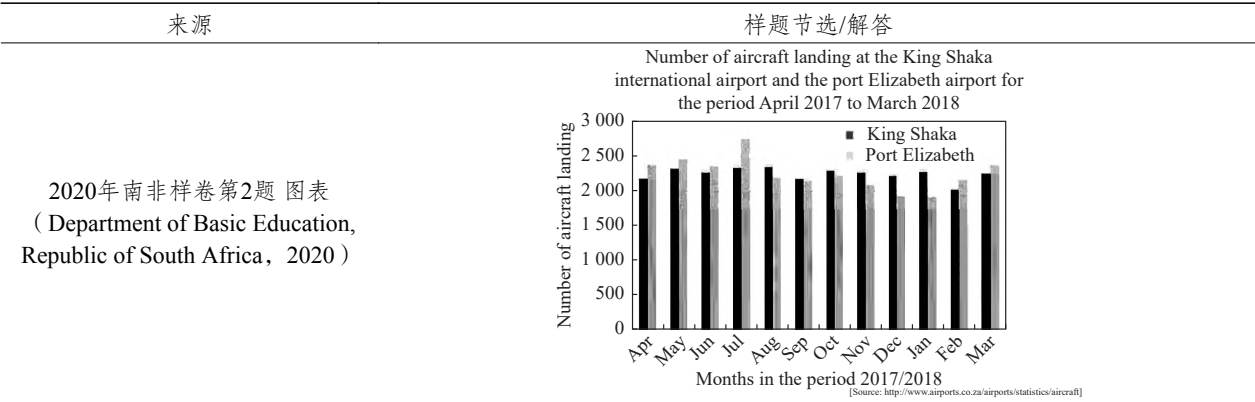
从高考数学题目特点的角度来看，高考引入科学计算器，有助于促进多元化的真实问题情境的应用，提升高考的情境性和应用性。如表 3 中南非样卷所示，题目取自现实中南非沙卡国王国际机场和伊丽莎白港机场在 2017 年 4 月至 2018 年 3 月期间每月降落飞机的数量。再如表 3 中 2001 年上海春季高考样卷所示，问题背景中的年利率、利息税率均为当年银行个人储蓄标准。在计算器的辅助下，真实的“不完美”数据的运算，也不会浪费学生很长时间，使得税金、储蓄、预算、促销、温度预测等丰富的真实生活和科学背景问题进入高考。

高考题有时碍于技术，出题的灵活度受到很大的限制(马峰, 2021)，而图形计算器的引入提高了问题设计的探究性、开放性和灵活性。如表 3 新加坡样卷第 5 题解答所示，在图形计算器的辅助下，学生可以通过观察函数图像的位置，追踪两个函数的交点坐标和特定点坐标，进行数学探究。又如表 3 中 2001 年上海秋季高考样卷所示，学生可通过计算器计算  $x=2, 3, 4, 5, 6$  时的函数值，观察函数值的变化特点后，再缩小范围探索  $x=2.5, 2.7, 2.9, 3.1, 3.3, 3.5$  时函数值的特点，探索函数值的变化趋势，排除选项中的假命题。用计算器算出函数值并不难，但是学生选择计算哪些值，如何筛选和调整所选取的  $x$  值的范围等，都需要学生的深度思考。如果允许学生使用具有表格功能的计算器，学生可通过计算器直接生成函数表格探索函数值的变化趋势，提出对函数性质的预测。引入计算器为增强高考题的探究性，从而考查学生解决探究性问题的能力提供了新途径。

从数学内容的角度来看，引入计算器扩大了概率与统计、数学建模类题目的设计空间，增强了数学问题解决的实际意义。如表 3 中澳大利亚样卷第 36 题所示，学生需要从 box-plot 统计图中抽取出有效信息(中位数)，分析文字描述中两个变量的信息，借助计算器，求解样本平均数，得到(最小二乘法)线性回归直线上的一点，并将点的坐标代入方程求出回归直线的斜率，最后用此回归直线的方程估计一个点的坐标，在计算器的帮助下完成了用线性回归模型解决一个实际问题的题目。又如表 3 中新加坡样卷第 6 题解答所示，学生在计算器的帮助下，运用正态分布的相关知识，求解分布的期望和方差。

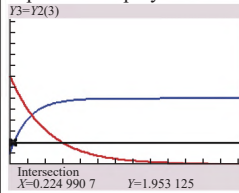
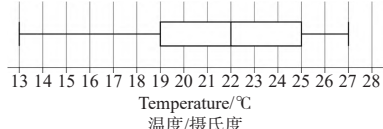
无论是不允许使用计算器的中国大陆(上海以外)的高考数学卷，还是允许使用计算器的上海高考数学卷，考查内容都以代数和几何为主，概率统计的内容比重很低，具体地：在 2017 年新课改前常常学

表 3 典型案例





续表3

来源	样题节选/解答
2001年上海市普通高等学校春季招生考试数学试卷第12题(数学教学, 2001a)	12. 甲、乙两人于同一天分别携款1万元到银行储蓄。甲存五年期定期储蓄, 年利率为2.88%。乙存一年期定期储蓄, 年利率为2.25%, 并在每年到期时将本息续存一年期定期储蓄。按规定每次计息时, 储户须交纳利息的20%作为利息税。若存满五年后两人同时从银行取出存款, 则甲与乙所得本息之和的差为____元。(假定利率五年内保持不变。结果精确到1分)
2020年新加坡A-level样卷第5题(v)解答(Eunoia Junior College, 2020)	<p><b>Suggested solution</b></p> <p>When <math>t=3</math>, using GC, Population of prey=1 953</p>  <p>Intersection <math>X=0.224\ 990\ 7</math> <math>Y=1.953\ 125</math></p> <p>Using GC, <math>t=0.224\ 99</math> It took about 2.7 months to reach the same value. (1 d.p.)</p>
2001年全国普通高等学校招生统一考试上海数学试卷(理工农医类)第16题(数学教学, 2001b)	<p>16. 用计算器验算函数 <math>y=\frac{\lg x}{x}</math> (<math>x&gt;1</math>) 的若干值, 可以猜想下列命题中的真命题只能是</p> <p>A. <math>y=\frac{\lg x}{x}</math> 在 <math>(1, +\infty)</math> 上是单调减函数    B. <math>y=\frac{\lg x}{x}</math>, <math>x \in (1, +\infty)</math> 的值域为 <math>(0, \frac{\lg 3}{3}]</math></p> <p>C. <math>y=\frac{\lg x}{x}</math>, <math>x \in (1, +\infty)</math> 有最小值    D. <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n}=0</math>, <math>n \in \mathbb{N}</math></p>
2020年澳大利亚HSC Mathematics Standard 2样卷第36题节选(NSW Education Standards Authority, 2020)	<p>36. 雄性蟋蟀会发出唧唧渣渣的声音。一位科学家想要探索温度(以摄氏度为单位)与15秒内蟋蟀鸣叫次数之间的关系。科学家每天收集一次数据, 连续收集了20天。基于这20天的数据, 科学家提供了以下信息。</p> <p>• 下图是一个显示温度数据的box-plot统计图。</p>  <p>• 平均温度(the mean temperature)比中间温度(the median temperature)低0.525°C。</p> <p>• 科学家在20天中总共收集了684次蟋蟀鸣叫。</p> <p>科学家用最小二乘法线性回归直线对收集的数据进行拟合。<math>x</math>表示温度(以摄氏度为单位), <math>y</math>表示15秒内蟋蟀鸣叫的次数。线性回归直线的方程是 <math>y = -10.606\ 3 + bx</math>, 其中 <math>b</math> 是回归直线的斜率。请计算19摄氏度时每15秒间隔内预期的蟋蟀鸣叫的次数。(精确到整数)</p>
2020年新加坡A-level样卷第6题解答(Eunoia Junior College, 2020)	<p><b>Suggested solution</b></p> <p>Let <math>\mu</math> and <math>\sigma^2</math> be the mean and variance of the distribution. Let <math>X</math> be the length of a randomly chosen carrot. <math>X \sim N(\mu, \sigma^2)</math></p> <p>Since <math>P(X &lt; 13.2) = P(X &gt; 16.8)</math>, <math>\mu = \frac{13.2 + 16.8}{2} = 15</math> and since <math>P(X &lt; 13.2) = 0.066\ 8</math>, <math>P(Z &lt; \frac{13.2 - 15.0}{\sigma}) = 0.066\ 8</math>.</p> <p>Using GC, <math>\frac{13.2 - 15.0}{\sigma} = 1.500\ 1</math> (5 s.f.) <math>\sigma = 1.200\ 0</math> (5 s.f.) <math>\therefore \sigma^2 = 1.44</math> (3 s.f.)</p>

注: 应当指出, 表中新加坡样卷第5题也可以用带有表格功能的科学计算器解决, 但图形计算器提供了更加形象、更加快捷的解答。d.p.指decimal places; s.f.指significant figures。

而不考或较少涉及(虞涛, 2017); 在新课改后考查的内容少、覆盖面窄、且较为基础, 以等可能事件的概率、排列组合及二项式定理中任一知识点为主, 与课程标准之间的一致性水平较差(付婉迪, 2021; 88

张京京, 2020)。在大数据时代, 数据处理和分析的能力越来越重要, 甚至逐渐成为一项必备技能。上海目前允许使用的计算器, 已具备执行单变量统计计算、多种回归模型(如线性回归模型)的拟合计算的功能。高考引入计算器, 有助于丰富学生概率统计内容的学习机会, 提高概率统计内容在高考中所占的比重, 这与新课标中对数学建模素养与数据分析素养的能力要求相一致。

引入计算器对高考数学卷的命题带来不小的挑战, 高考题型的设计也需要做出相应的调整。若高考数学卷采用单一模式, 高考命题者应避免命制一些数值运算类题目。比如, 有关研究发现, 传统高考中的指数、对数、排列数、组合数、阶乘数、三角函数、初等函数等数值求解和数值大小比较的问题, 应尽量避免在高考中出现, 将对学生运算能力的考查更多地放在理解性、分析性和实验性的运算上(如虞涛, 2008)。除了避免此类数值计算类问题在单一模式下的高考卷中出现, 命题者也可以将问题进行适当改造, 将题目中的具体数值换成变量, 将求值题变为化简题, 达到考查相应知识点的要求。

此外, 当不希望学生通过计算器一步写答案, 可添加题目说明, 明确要求呈现推导过程、解题步骤。如马来西亚和新加坡样卷(例如, Eunoia Junior College, 2020)中, 部分题目的题干中出现了以下要求: (1)使用数学归纳法证明……(Using mathematical induction to prove...); (2)使用代数的方法解决……(Using an algebraic approach, solve...; 或 Find algebraically the set of...; 或 Show algebraically that...); (3)最终答案用变量来表示……(State the answers in the form of variables)。样卷中还有部分题目明确要求学生呈现解题步骤(There is a “Show” question, so all the steps must be shown), 或者明确要求学生不使用计算器解决此题(Do not use a calculator in answering this question)。

若高考数学卷采用混合模式, 分为计算器卷和无计算器卷, 则无计算器卷仍可维持传统考试对学生运算能力的考查, 而计算器卷可重点考查学生数据处理和解决复杂问题的能力。计算器进入高考的考试模式和题型设计值得进一步的思考和探索。

#### 四、对我国高考数学是否应该引入计算器的启示与建议

##### (一) 充分认识到计算器进入高考的正面价值, 高考改革应积极适应未来社会发展的需要

计算器让数学成为真正意义上的应用工具, 使得将鲜活案例“数学化”成为可能(林风, 2012)。传统高考中出现的“数”, 由于不用计算器, 往往需要试题编写者精心设计“凑数”, 巧妙地避开复杂的运算, 这与日常生活情境很不相符, 因为现实问题的数据往往不那样“漂亮”。而引入计算器, 可以使得复杂的数据计算进入高考, 问题情境可设定在真实的场景, 问题涉及的数学内容可以得到进一步拓宽, 如概率统计、算法思维等, 增强数学问题解决的现实意义, 这与新课标数学学科核心素养中的数学建模素养与数据分析素养的能力要求相适应(教育部, 2020), 也能促进而不是阻碍我国目前数学教学改革中正在提倡和强调的在很大程度上以探索现实世界的问题为背景的数学建模活动、探究式学习、项目式学习的发展趋势。总之, 高考引入计算器, 能有力地突破传统考试对试题内容、类型、情境的限制, 更好地测试学生的高阶思维能力, 与新课标中数学学科核心素养的要求相一致。

此外, 我国的高中数学课标以学生发展为本, 强调了“不同的人数学上得到不同的发展”(教育部, 2020)。就大部分学生而言, 高中毕业后, 数学更多的是作为一种工具去使用, 未来要面对的考试、工作大多允许使用计算器, 且计算器的使用已成为公民的必备技能。高考引入计算器可以考查学生是否掌握计算器的操作技能, 帮助学生更好地与未来的工作和生活接轨, 适应未来社会发展的需要, 让学生更好地认识数学的科学价值和应用价值。

##### (二) 关注高考试题与课程标准的一致性, 计算器进入高考是信息化时代的必然趋势

考试的设计应反映课程和教学要求, 从而起到积极的促进作用, 而高考作为高中生毕业和升学的重要依据, 理应与课程标准保持一致。高考只有与课程标准的要求相一致, 才能真实反映学生学习质量的有效信息, 且高考与课程标准的一致性对全面落实新课程目标, 深化课程、教学和评价改革具有重要意义(王焕霞, 2015)。数学课程标准中明确了“鼓励学生尽可能运用计算器、计算机进行模拟活

动,处理数据”(教育部,2020,第33页)的要求,而当前大陆地区(除上海之外)高考数学卷却不允许使用计算器,并未反映课程标准的要求。一些研究者也发现,高考卷在内容主题和认知水平两方面与课程标准均有一定程度的偏差,尤其是在概率统计内容方面与课程标准的一致性普遍较差(如张京京,2020)。计算器进入高考,能够在内容和认知水平等方面有效提高考试和课程的一致性,从而提高考试对于课程实施的促进作用。

随着二十一世纪现代信息技术的高度普及和快速发展,现代信息技术反映在数学课程的几乎所有方面,而作为价格相对低廉且普及程度越来越高的计算器,不应游离在考试之外。我们应该充分认识到,在当前的信息化时代,高考引入计算器是一个必然的趋势。

### (三)积极探索将计算器引入高考的考试模式和题型设计,推进考试创新和命题改革

将计算器引入高考是对传统高考数学题型的一个不小的挑战。相比于欧美国家,我国在高考引入计算器上起步较晚,在开发计算器有作用型的数学问题上缺乏经验,关于计算器在数学评价中的应用研究也十分薄弱。由此,我们建议,通过实证研究,从考试模式、题型设计等方面开发符合我国学生信息技术环境下的评价工具,通过多元化的真实问题情境提升试题的应用性、开放性、灵活性和探究性,对计算器在高考题中的使用提出具体且明确的要求,考查学生能否使用以及甄别何时使用计算器。

针对可行的考试模型,若采取单一模式,可以借鉴新加坡、马来西亚高考,在不希望学生从计算器直接获得答案时,添加题目说明,不允许一步写答案,明确要求学生呈现推导过程、解题步骤。也可借鉴上海高考卷命题的经验,避免或适当减少直接进行数值计算的题目,用理解性和分析性运算的题目替代。若采取混合模式,可以借鉴SAT和IB数学卷,计算器卷考查学生数据处理和解决复杂问题的能力,无计算器卷仍可维持传统考试对学生运算能力的考查。命题者应明确在每道题目中学生使用或者不使用计算器的理由以及评价目标。同时,题型设计需要综合考虑计算器的种类以及计算器在题目及解答中发挥的作用。基于我国国情,我们建议现阶段主要聚焦科学计算器“有作用型”的真实情境问题的开发,推进考试创新和命题改革。

### (四)关注计算器进入高考带来的公平性等问题,完善计算器进入课堂和考试的长期规划

“何时引进何种计算器?使用到什么程度?”等问题,均是摆在高考引入计算器政策实施会带来的现实挑战,不应长期回避。国内外的相关研究和教学实践表明,若过早在小学全面引入计算器,可能会削弱学生的数感、量感、运算能力与推理能力等数学核心素养(廖运章,卢建川,2015);但若过晚引入,会很大程度上限制学生探索解决贴近生活的复杂问题,学生会不习惯甚至无法自如使用计算器。有研究者通过实证研究发现造成学生加减法问题答题错误的原因之一是过早地使用计算器,由此建议应在学生建立了数学概念的关系性理解之后引入计算器(Makonye & Fakude, 2016)。将计算器引入到课堂的时间点也应与学生认知发展水平相适应。

针对教师关于课堂中要不要使用计算器的疑虑,我们认为应重视教师使用计算器教学的培训,使教师认识到计算器的价值,并且能指导学生合理使用计算器。张沿沿等(2018)调查了我国八个省市区的学生,结果表明学生心中的技术世界十分狭窄,很少学生选择“用计算器进行运算”,这与以技术为主导的社会发展需求存在落差,而引入计算器进课堂和考场能一定程度上提高学生的技术素养。对于计算器使用不当可能带来的问题,如计算能力弱化、忽略计算背后的理论依据等,并不足以推翻计算器的使用,而是提醒了应避免或减少上述问题的出现(刘娟娟,2016);当然,也需注意到计算器固有的局限,如通过追踪图像寻求到的方程的根不够精确、无法呈现“无限不循环小数”等抽象概念。

另外,不同类型的计算器在价格和功能上差异很大。如表2所示,国外考试已有使用图形计算器和CAS的趋势,而国内课堂仍以科学计算器为主,功能性较弱但价格更加亲民。所以,我们在考虑引入何种计算器时,也应关注其对教育公平的影响。

综上,我们建议,我国应进一步建立和完善计算器进入中小学课堂和中、高考的长期规划,积极主动地做好相关研究和实施改革的准备。义务教育阶段应强化科学计算器的工具化使用,在高中阶段则



应积极推广图形计算器在数学课堂的应用。与此相应,高考数学应积极考虑采取混合模式,在无计算器卷承接传统试题,而在计算器卷,采用创新的试题设计,引入真实情境,每道题目明确学生可否使用计算器,考查学生运用所学知识分析问题和解决问题的能力,稳步推进计算器进入高考数学的进程。

**致谢:** Jill Adler 教授、Daniel Thurm 博士、Şeyma Pekgöz 博士、Juliana Çar Stal、Edwin David Tamayo Martinez、Junette Yu、May Thongthum、Momoko Mandere、Aiya Kuchukova、Laura Navarro、Yebin Hong、Christiana Claros、Krista McJarow-Keller、Reika Shimomura、王兆云博士、赵炯美博士、孙丹丹博士、张明明博士、诸方淳博士、张益达、罗婕彤为数据获取和数据信度检查提供了帮助,特此致谢。

(李淑惠工作邮箱: shli@math.ecnu.edu.cn; 本文通信作者为范良火: lhfan@math.ecnu.edu.cn)

## 参考文献

- 付婉迪. (2021). 中美数学高考试卷比较及对我国高中数学教学管理的启示. 上海: 上海师范大学教育硕士专业学位论文.
- 国务院办公厅. (2019). 关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见. 取自: [http://www.gov.cn/zhengce/content/2019-06/19/content\\_5401568.htm](http://www.gov.cn/zhengce/content/2019-06/19/content_5401568.htm)
- 胡耀华. (2009). 信息技术环境下的数学评价——图形计算器在国外大学入学数学考试中的使用情况及启示. 现代教育技术, 19(5), 37—40.
- 教育部. (2020). 普通高中数学课程标准 (2017 年版 2020 年修订). 北京: 人民教育出版社.
- 教育部. (2021). 教育部关于做好 2021 年普通高校招生工作的通知. 取自: [http://www.moe.gov.cn/srcsite/A15/moe\\_776/s3258/202102/t20210208\\_513027.html](http://www.moe.gov.cn/srcsite/A15/moe_776/s3258/202102/t20210208_513027.html)
- 李作滨. (2019). 2018 年 13 套高考数学试卷审思: 基于核心素养的视角. 教育测量与评价, (4), 51—57; 64.
- 廖运章, 卢建川. (2015). 2014 英国国家数学课程述评. 课程·教材·教法, 35(4), 116—120.
- 林风. (2012). 基于图形计算器开展数学实验的实践与思考. 中国电化教育, (2), 105—108.
- 林磊. (2001). 用图形计算器解 2001 年上海市高考试题. 数学教学, (5), 24—26+33.
- 林米儿. (2006). 关于现代教育技术在数学教育中应用的探索——由图形计算器解数学高考题引起的若干思考. 现代教育技术, 16(2), 38—41.
- 刘娟娟. (2016). 计算器在美国小学数学教学中的使用及启示. 课程·教材·教法, 36(11), 123—127.
- 刘琴. (2010). 中外数学考试中计算器使用的比较研究. 上海师范大学学报 (基础教育版), 39(4), 44—49.
- 马峰. (2021). 国际文凭数学课程改革的特点分析及其启示. 比较教育学报, (3), 150—163.
- 任子朝, 陈昂. (2016). SAT 数学考试改革研究——兼议对我国高考改革的启示. 中国考试, (6), 20—24.
- 上海市教育考试院. (2021). 2022 年普通高等学校招生全国统一考试 (上海卷) 考试手册 (语文、数学、外语). 上海: 上海教育出版社.
- 沈建刚. (2015). 借助图形计算器平台, 用实验法求解解析几何高考题. 中小学数学 (高中版), (12), 62—64.
- 数学教学. (2000). 函数型计算器今年进入上海高考. 数学教学, (2), 19.
- 数学教学. (2001a). 2001 年上海市普通高等学校春季招生考试数学试卷. 数学教学, (1), 33—36.
- 数学教学. (2001b). 2001 年全国普通高等学校招生统一考试 上海 数学试卷 (理工农医类). 数学教学, (4), 37—41.
- 孙元清, 徐淀芳, 张福生, 赵才欣. (2016). 上海课程改革 25 年 (1988—2013). 上海: 上海教育出版社.
- 王焕霞. (2015). 高中物理学业水平考试与课程标准的一致性研究. 课程·教材·教法, 35(8), 60—66.
- 汪文. (2001). 素质教育在上海. 中国青年报, 2001-01-10.
- 虞涛. (2008). 上海高考使用计算器 8 年的回顾与思考. 数学教学, (4), 1—5.
- 虞涛. (2017). 与时俱进的高考数学上海卷应用问题. 数学教学, (6), 49—53.
- 张京京. (2020). 2010-2019 年上海高考数学发展趋势研究. 上海: 上海师范大学教育硕士专业学位论文.
- 张沿沿, 顾建军, 徐维炯, 陆叶丰. (2018). 对我国 8 省市区义务教育阶段学生技术素养的调查与研究. 华东师范大学学报 (教育科学版), 36(6), 29—41.
- 张阳开, 梁策力, 陈朝东. (2014). 高考数学使用计算器的争鸣及思考. 数学教育学报, 23(4), 88—91.
- 张玉环, 周侠. (2020). 综合难度视角下中法高考数学试题的比较研究——基于 2015—2019 年中国和法国高考数学试卷. 数学教育学报, 29(3), 43—50.
- Brown, R. G. (2005). *The impact of the introduction of the graphics calculator on system wide 'high stakes' end of secondary school mathematics examinations*. Doctoral dissertation, Swinburne University of Technology.
- Brown, R. G. (2010). Does the introduction of the graphics calculator into system-wide examinations lead to change in the types of mathematical skills tested? *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 181—203.
- Browne, R. & Ellis, W. (1997). Type, purpose and validity of assessment. In J. Berry, M. Kronfellner, B. Kutzler, & J. Monaghan (Eds.) *The State of Computer Algebra in Mathematics Education* (pp. 63—70). Bromley: Chartwell-Bratt.
- College Board. (2021). SAT Math Test. Retrieved from <https://collegereadiness.collegeboard.org/sat/inside-the-test/math>
- Department of Basic Education, Republic of South Africa. (2020). Mathematics P2 for National Senior Certificate. Retrieved from <https://wce->

- online.westerncape.gov.za/documents/ExamPapers%26Memos/NSC-Exams-2020-Nov/non-languages/Mathematics/Mathematics%20P2%20Nov%202020%20Eng.pdf
- Eunoia Junior College. (2020). JC 2 Preliminary Examination 2020, General Certificate of Education Advanced Level, Higher 1. Retrieved from [https://www.sgtestpaper.com/gce/test\\_papers/jc2\\_math\\_h1\\_2020/JC2\\_Maths\\_H1\\_2020\\_EJC.pdf](https://www.sgtestpaper.com/gce/test_papers/jc2_math_h1_2020/JC2_Maths_H1_2020_EJC.pdf)
- IBO. (2021). Mathematics: Applications and Interpretation Guide: First Assessment 2021. Retrieved from [https://resources.ibo.org/data/mathematics-applications-and-interpretation-guide\\_3573b93d-5f69-4c19-8e30-c135da72b01c/mathematics-applications-and-interpretation-guide-en\\_5659ecbf-2f8b-4873-8075-c931f676e101.pdf](https://resources.ibo.org/data/mathematics-applications-and-interpretation-guide_3573b93d-5f69-4c19-8e30-c135da72b01c/mathematics-applications-and-interpretation-guide-en_5659ecbf-2f8b-4873-8075-c931f676e101.pdf)
- Makonye, J. P. & Fakude, J. (2016). A study of errors and misconceptions in the learning of addition and subtraction of directed numbers in grade 8. *SAGE Open*, 6(4), 1—10.
- NSW Education Standards Authority. (2020). Higher School Certification Examination Mathematics Standard 2. Retrieved from <https://educationstandards.nsw.edu.au/wps/wcm/connect/bbfe0d35-4e7e-4276-b7f7-d663194714a0/2020-hsc-mathematics-standard-2.pdf?MOD=AJPERES&CACHEID=ROOTWORKSPACE-bbfe0d35-4e7e-4276-b7f7-d663194714a0-no2PDZc>
- OECD. (2018). PISA 2018. Retrieved from <https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/pisa-2018-participants.htm>
- Ruthven, K. (2022). Ergonomic, epistemological and existential challenges of integrating digital tools into school mathematics. *Asian Journal for Mathematics Education*, 1(1), 1—12.
- Senk, S. L., Beckmann, C. E. & Thompson, D. R. (1997). Assessment and grading in high school mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 187—215.
- The World Bank. (2021). 2018 GDP Per Capita (current US\$). Retrieved from [https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.CD?end=2021&name\\_desc=false&start=1960&view=map&year=2018](https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.CD?end=2021&name_desc=false&start=1960&view=map&year=2018)

(责任编辑 林 磊)

## Should Calculators Be Allowed to Use in College Entrance Examinations in Mathematics: An International Comparison of 30 Countries and Regions' Calculator Use Policies and Practices in College Entrance Examinations

Li Shuhui<sup>1</sup> Li Shang<sup>2</sup> Fan Lianghuo<sup>1,3</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, East China Normal University, Shanghai 200241, China; 2. Duke Kunshan University, Kunshan, Jiangsu 215316, China; 3. University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, UK)

**Abstract:** Whether calculators should be introduced to College Entrance Examinations in Mathematics (CEE-M) in China is a long-standing controversial topic. This study examined calculator use policies and practices in CEE-M in 30 relatively economically developed countries and regions, and compared their delivery modes (single, mixed), types of calculators allowed and roles of calculators in exam questions and solutions; representative questions in selected sample exams were also used for case analysis. The study found that most CEE-M allowed students to use calculators, with mainly the single delivery mode using scientific calculators, and introducing calculators into the CEE-M can provide a new opportunity to enhance the real-life context, openness, and flexibility of questions in mathematics examinations. According to the results, the study concluded that there is a need to fully realize the value of introducing calculators in CEE-M, carry out more research in designing exam questions allowing calculators to promote examination reform and innovation, and establish a long-term plan for introducing calculators into mathematics classrooms and examinations.

**Keywords:** college entrance examinations in mathematics; education examination policy; calculator use; ICT; international and comparative education