**ТЕМА: РЯДЫ**

# ЛЕКЦИЯ 2

# РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ

## 1. РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

**Определение 1.** Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad , \qquad (1)$$

в котором $u_n > 0 \ \ \forall n \in N$, называется *рядом с положительными членами* (короче, *знакоположительным рядом* или *положительным рядом*).

**Замечание 1.** Главной особенностью ряда с положительными членами является то, что последовательность его частичных сумм

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

содержит только положительные числа, а поэтому будет возрастающей и ограниченной снизу (нулем).

Действительно, так как

$$u_n > 0 \ \forall n \in N, \text{ то } S_k = u_1 + \ldots + u_k > 0 \ \forall k \in N$$

и

$$u_1 + \ldots + u_k < u_1 + \ldots + u_k + u_{k+1},$$

откуда

$$S_k < S_{k+1} \ \forall k \in N.$$

Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ всегда имеет предел. Этот предел будет конечным числом тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху. В противном случае, если $\{S_n\}$ не является ограниченной сверху, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Таким образом, справедливо утверждение.

<u>Т е о р е м а 1</u> (*необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами*). Для сходимости ряда с положительными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

## 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ

<u>Т е о р е м а 2</u> (*интегральный признак Коши*). Пусть функция $f(x)$ при $x \geq 1$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна,
2) положительна,
3) монотонно убывает.

Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ где } u_n = f(n)\ \forall n \in N, \tag{2}$$

сходится или расходится одновременно со сходимостью или расходимостью несобственного интеграла

$$\int_1^{\infty} f(x)dx. \tag{3}$$

П р и м е р 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1}. \tag{4}$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$ при $x \ge 1$. Очевидно, она непрерывна на $[1; +\infty)$, положительна и монотонно убывает

(так как $f'(x) = -\dfrac{2x^2-1}{(2x^2+1)^2} < 0$ при $x \ge 1$).

Поэтому интегральный признак Коши применим к рассматриваемому ряду.

Вычислим интеграл (3):

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{2x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{xdx}{2x^2+1} = \frac{1}{4} \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{d(2x^2+1)}{(2x^2+1)} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\ln|2x^2+1|\,\Big|_1^b\right) = \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}(\ln(2b^2+1)-\ln 3) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{2b^2+1}{3} = +\infty .$$

**О т в е т:** ряд расходится.

**З а м е ч а н и е 2.** Интегральный признак Коши сохраняет силу, если условия теоремы 2 выполнены только при

$x \ge n_0$ $(n_0 \in N)$. В этом случае интеграл (3) следует заменить интегралом

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx . \qquad (5)$$

**П р и м е р 2.** Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}. \qquad (6)$$

**Р е ш е н и е.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{x\cdot\ln^2 x}, \quad x\in[2;+\infty).$$

Она непрерывна при $x\in[2;+\infty)$, положительна, монотонно убывает

(так как $f'(x) = -\dfrac{\ln x+1}{x^2\cdot\ln^3 x} < 0$ и $\ln x > 0$ при $x > 1$).

Поэтому теорема 2 справедлива для ряда (6).

Вычислим интеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left( -\frac{1}{\ln x} \Bigg|_2^b \right) = \lim_{b \to +\infty} \left( \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$ сходится. Значит, по теореме 2 сходится ряд (6).

**Ответ:** ряд сходится.

## 3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД. РЯД ДИРИХЛЕ

**Определение 2.** Числовой ряд вида

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{7}$$

называется *гармоническим рядом*.

**Определение 3.** Числовой ряд вида

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, \tag{8}$$

где $p>0$, $p=\text{const}$, называется *рядом Дирихле* или обобщенным гармоническим рядом.

Заметим, что ряд (7) можно рассматривать как частный случай ряда (8) при $p=1$.

Применим интегральный признак Коши для исследования вопроса о сходимости рядов (7) и (8).

**Теорема 3.** Ряд Дирихле (8) сходится при $p>1$ и расходится при $0<p\le 1$.

Доказательство. Рассмотрим ряд (8) и составим по его общему члену функцию

$$f(x)=\frac{1}{x^p}, \text{ где } p=\text{const}, \quad p>0.$$

Нетрудно видеть, что она непрерывна при $x\in[1\,;+\infty)$, положительна, монотонно убывает (так как $f'(x)=-\frac{p}{x^{p+1}}<0$). Поэтому теорема 2 для ряда (8) применима.

Вычислим несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Если $p=1$ (то есть рассматривается гармонический ряд (7)), получаем:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\,\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ расходится, а значит , расходится гармонический ряд (7).

Если $p>0$ и $p\neq 1$, то получаем:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\,\Bigg|_1^b\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{(1-p)\cdot b^{p-1}}-\frac{1}{1-p}\right)=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{lll}\dfrac{1}{p-1} & \text{при } p>1 & \Rightarrow \text{ряд (8) сходится,}\\ +\infty & \text{при } 0<p<1 & \Rightarrow \text{ряд (8) расходится.}\end{array}\right.$$

Теорема 3 доказана.

**Замечание 3.** Ряд (8), где $p = \text{const}$ и $p \le 0$, также является расходящимся. Но в этом случае для него не выполнено необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 1 & \text{при } p = 0, \\ +\infty & \text{при } p < 0. \end{cases}$$

Поэтому числовой ряд (8) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а) } 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + \ldots \quad ,$$

$$\text{б) } 1 + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^3}} + \ldots \quad .$$

Решение. Ряд а) совпадает со следующим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$. Он расходится как ряд Дирихле с показателем $p = \frac{2}{3} < 1$.

Ряд б) совпадает со следующим : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Он сходится как ряд Дирихле с показателем $p = \frac{3}{2} > 1$.

Ответ: а) расходится; б) сходится.

## 4. ПРИЗНАКИ СРАВНЕНИЯ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Теорема 4 (*первый признак сравнения*). Пусть члены знакоположительных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{9}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{10}$$

удовлетворяют неравенству:

$$u_n \le v_n \quad \forall n \in N. \tag{11}$$

Тогда: а) если ряд (10) сходится, то сходится ряд (9).

б) если ряд (9) расходится, то расходится ряд (10).

Доказательство. Обозначим $S_n$ и $\sigma_n$ – частичные суммы рядов (9) и (10) соответственно:

$$S_n = u_1 + \ldots + u_n, \qquad \sigma_n = v_1 + \ldots + v_n.$$

Тогда (в силу условия (11)) заключаем:

$$S_n \le \sigma_n \quad \forall n \in N. \tag{12}$$

а) Пусть ряд (10) сходится, то есть существует конечный предел последовательности $\{\sigma_n\}$.

Значит, по теореме 1 эта последовательность ограничена сверху, например, числом $\sigma$. Но тогда из неравенства (12) вытекает ограниченность сверху последовательности $\{S_n\}$ тем же числом $\sigma$.

Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, а значит, по теореме 1 имеет конечный предел, что равносильно сходимости соответствующего ряда (9).

б) Пусть ряд (9) расходится. Предположим, что в этом случае ряд (10) сходится.

Тогда по только что доказанному в а) будет сходиться ряд (9). Полученное противоречие доказывает ошибочность предположения о сходимости ряда (10) и верность утверждения б).

Теорема 4 доказана.

**Замечание 4.** Теорема 4 сохраняет силу, если условие (11) будет выполнено, начиная с некоторого номера $n_0 > 1$, $n_0 \in N$ (так как отбрасывание или приписывание к ряду любого конечного числа первых членов не меняет характер сходимости ряда).

**Пример 4**. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}.$$

Решение. Общий член данного ряда задается формулой

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}.$$

Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \qquad (13)$$

с общим членом $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

Нетрудно видеть, что

$$u_n < v_n \quad \forall n \in N,$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+2}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad \forall n \in N.$$

Причем, ряд (13) сходится как ряд Дирихле с показателем $p = \frac{3}{2} > 1$.

Следовательно, по первому признаку сравнения положительных рядов из сходимости ряда (13) следует сходимость исходного ряда .

О т в е т: ряд сходится.

<u>**П р и м е р 5**</u>. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}. \qquad (14)$$

Р е ш е н и е. Для сравнения с рядом (14) возьмем расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

На рис. 1 дано сравнение графиков функций $y = \ln x$ и $y = x$. Очевидно, что $\ln x < x \quad \forall x > 0,$ в частности, при $x \geq 2$.

Значит, $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} \quad \forall x \geq 2,$ откуда заключаем:

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2, \; n \in N.$$

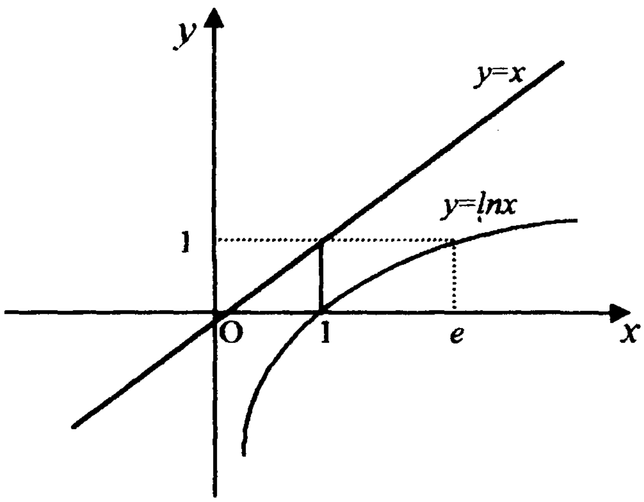


Рис. 1.

Следовательно, по теореме 5 из расходимости гармонического ряда следует расходимость исходного ряда (14).

О т в е т. ряд расходится.

<u>**Теорема 5**</u> (*второй признак сравнения*). Пусть члены положительных рядов (9) и (10) таковы, что существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \neq 0. \tag{15}$$

Тогда ряды (9) и (10) сходятся или расходятся одновременно.

**Замечание 5.** Ряды (9) и (10), сходящиеся или расходящиеся одновременно, будем называть <u>*эквивалентными*</u> с точки зрения сходимости.

<u>**Пример 6**</u>. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+1}. \tag{16}$$

Решение. Применим второй признак сравнения, выбрав для сравнения гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Тогда

$$u_n = \frac{2n-1}{3n^2+1}, \quad v_n = \frac{1}{n}$$

и

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot n}{3n^2+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Следовательно, учитывая, что гармонический ряд расходится, расходящимся является ряд (16)

О т в е т: ряд расходится.

<u>**П р и м е р 7**</u>. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5+2}}. \qquad (17)$$

Р е ш е н и е. Заметим, что

$$u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^5+2}} \approx \frac{n}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

при больших значениях числа $n$.

Поэтому для сравнения с рядом (18) возьмем ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

с показателем $p = \dfrac{3}{2} > 1$, а значит, сходящийся. Его общий член задается формулой: $v_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

Вычислим предел:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n^{3/2}}{\sqrt{n^5+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot\sqrt{n^5}}{n\cdot\sqrt{n^5+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^5}}}\right) = 1 \neq 0.$$

Следовательно, по теореме 5 ряд (17) сходится.

О т в е т: ряд сходится.

## 5. ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА

Т е о р е м а 6 (*признак Даламбера*). Пусть для ряда (1) с положительными членами существует конечный предел

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}. \qquad (18)$$

Тогда при $q < 1$ ряд (1) сходится, при $q > 1$ ряд (1) расходится.

Доказательство. а) Пусть выполнено условие (19), где $q < 1$.

Выберем число $\varepsilon > 0$ таким, чтобы было $r = q + \varepsilon < 1$. Тогда по данному $\varepsilon$ найдется такой номер $n_0 \in N$, что при $n \geq n_0$ будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - q\right| < \varepsilon$$

или, что то же самое в силу положительности чисел $u_n$, выполнены неравенства:

$$(q - \varepsilon) \cdot u_n < u_{n+1} < (q + \varepsilon) \cdot u_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Следовательно,

$$u_{n_0+1} < r \cdot u_{n_0},$$

$$u_{n_0+2} < r \cdot u_{n_0+1} < r^2 \cdot u_{n_0},$$

$$u_{n_0+3} < r \cdot u_{n_0+2} < r^3 \cdot u_{n_0},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$u_{n_0+k} < r \cdot u_{n_0+k-1} < r^k \cdot u_{n_0} \quad \forall k \in N.$$

Таким образом, все члены ряда (1), начиная с номера $n_0 + 1$, меньше соответствующих членов ряда

$$r \cdot u_{n_0} + r^2 \cdot u_{n_0} + \ldots + r^k \cdot u_{n_0} + \ldots \quad ,$$

который сходится, так как образован из членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $r$, $0 < r < 1$.

Значит, по теореме 4 ряд (1) сходится.

б) Пусть выполнено условие (19), где $q > 1$.

Тогда можно утверждать, что, начиная с некоторого номера $n_0$, выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad \forall n \geq n_0$$

или, что то же самое в силу положительности чисел $u_n$, выполняется неравенство:

$$u_{n+1} > u_n \quad \forall n \geq n_0 .$$

Следовательно, последовательность

$$u_{n_0}, u_{n_0+1}, \ldots, u_n, \ldots$$

является возрастающей и $u_n > 0$. Поэтому ее общий член $u_n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. Значит, ряд (1) является расходящимся, так как нарушено необходимое условие сходимости ряда.

Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 6.** Если в формуле (18) $q = 1$, то признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда.

Действительно, рассмотрим два ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\quad, \qquad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\quad. \qquad (20)$$

Для ряда (20) $u_n=\frac{1}{n}$ и $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$.

Вычислим:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Для ряда (21) $u_n=\frac{1}{n^2}$ и $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$.

Вычислим:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=1.$$

Однако, как нам уже известно, ряд (19) – гармонический ряд, расходящийся, а ряд (20) – ряд Дирихле с показателем $p=2>1$, сходящийся.

**З а м е ч а н и е 7.** Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$, то при этом, как и в случае $q>1$, ряд (1) расходится.

<u>**П р и м е р 8**</u>. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}. \qquad (21)$$

Р е ш е н и е. Напомним, что

$$k!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k \quad (k\in N).$$

Для данного ряда $u_n=\dfrac{n!}{3^n}$ и $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}$.

Вычислим:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)\cdot 3^n}{3^n\cdot 3\cdot n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=+\infty.$$

Следовательно, с учетом замечания 7 ряд (21) расходится по признаку Даламбера.

О т в е т: расходится.

<u>**П р и м е р 9**</u>. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{2^n}}. \qquad (22)$$

Р е ш е н и е. Для данного ряда

$$u_n = \frac{2n+1}{\sqrt{2^n}} \text{ и } u_{n+1} = \frac{2n+3}{\sqrt{2^{n+1}}}.$$

Поэтому

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)\sqrt{2^n}}{(2n+1)\sqrt{2^n}\cdot\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{(2n+1)\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, то по признаку Даламбера заключаем: ряд (22) сходится.

О т в е т: сходится.

**П р и м е р 10**. По признаку Даламбера исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot(2n)}. \qquad (23)$$

Р е ш е н и е. Для данного ряда

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}, \qquad u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2(n+1)-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2(n+1))}.$$

Поэтому

$$u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot (2n+2)} = u_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$

откуда

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} = 1.$$

Значит, признак Даламбера не дает ответ на вопрос о сходимости ряда (23).

Ответ: вопрос остается открытым.

## 6. РАДИКАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ

**Теорема 7** (*радикальный признак Коши*). Пусть для ряда (1) с положительными членами существует конечный предел

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}. \qquad (24)$$

Тогда при $q < 1$ ряд (1) сходится; при $q > 1$ ряд (1) расходится; при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда (1) остается нерешенным.

**Пример 11**. Исследовать сходимость ряда с помощью радикального признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n. \qquad (25)$$

Решение. Для данного ряда $u_n=\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.

Вычислим:

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $q=\dfrac{1}{2}<1$ и по теореме 7 ряд (25) сходится.

Ответ: сходится.

**Пример 12**. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+7}\right)^n. \qquad (26)$$

Решение. В данном случае

$$u_n=\left(\frac{2n^2}{n^2+7}\right)^n, \quad \text{откуда} \quad \sqrt[n]{u_n}=\frac{2n^2}{n^2+7}.$$

Вычислим:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\dfrac{7}{n^2}} = 2.$$

Следовательно, так как $q = 2 > 1$, то по радикальному признаку Коши ряд (26) расходится.

О т в е т: расходится.

**З а м е ч а н и е 8.** В тех случаях, когда теоремы 6 или 7, или они обе не «работают», необходимо применить к исследованию сходимости ряда другие признаки. Кроме приведенных ранее часто оказывается полезным следующий признак сходимости.

<u>П р и з н а к  Р а а б е.</u> Пусть для ряда (1) с положительными членами существует конечный предел

$$p = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right). \qquad (27)$$

Тогда при $p > 1$ ряд (1) сходится, при $p < 1$ ряд (1) расходится, при $p = 1$ вопрос о сходимости ряда (1) остается открытым.

<u>П р и м е р 13.</u> Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}. \qquad (28)$$

Р е ш е н и е. Этот ряд изучался выше в примере 10 с помощью признака Даламбера и привел к результату $q = 1$.

Для рассматриваемого ряда

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)},$$

откуда

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Поэтому

$$n \cdot \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = n \cdot \left( \frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = n \cdot \frac{2n+2-2n-1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}.$$

Следовательно, находим:

$$p = \lim_{n\to\infty} \left( n \cdot \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $p < 1$ и по признаку Раабе изучаемый ряд расходится.

О т в е т: расходится.