

二平方和数の分布について

柳川 泰壮 *

京都大学大学院理学研究科 修士二年

“前田洋太の 24 歳誕生日記念講演”@京都大学, 2021 年

1 アブストラクト

二平方和数とはある二つの自然数の平方の和で表される整数のことである。整数が二平方和数になる必要十分条件は、その素因数についての記述を用いて既に 18 世紀に Euler によって示されており [1], また素数定理のような大域的な漸近挙動は 1907 年に Landau[2] によって示された。

一方で、二平方和数の「局所的な」分布、すなわち算術級数や短区間における分布の評価は、以上に挙げた結果よりも現代に近い時期の結果となっている。算術級数中に属する二平方和数の分布は 1953 年に Pracher[3] が与えており、更に級数の法に依らない誤差項付きの結果は 1976 年の Iwaniec[4] の結果となる。また短区間中の二平方和数の分布については、 x を正の無限大に発散する実数として、1994 年に Hooley[5] が始点 x , 幅 $\log^N x$ の短区間に含まれる二平方和数の個数が Landau の結果を元にしたナイーブな推測と「ほぼ」合致することを示しており、逆に 2000 年に Balog-Wooley[6] は推測が完全には成立しないことを示した。

本講演では、以上の結果のうち特に Iwaniec の結果と Balog-Wooley の結果に重点を置いて解説を行う。またこれらの結果には共通して「ふるい法 (sieve method)」と呼ばれる理論が用いられているため、この理論の簡単な紹介も与える。

2 前田くんとのおい出

講演で一分ほど前田くんについて語れば良かったはずなのですが....., 折角なので先行者の書式に習って私も書いてみることにします。

私が前田くんに初めて会ったのは学部に入學して間もない頃でした。クラスごとの理学部オリエンテーションでたまたま同じ机に座って、確かクラスメールの手続きについて話をしたのが最初でした。第一印象としては、あどけない顔をした子だなあと感じていました。お互い 18 歳だったわけですから、6 年前ともなると私も前田くんもそれなりに顔が変わったものだと思います。

そこからより深い付き合いになったのは、同じ年に KUTG(だったろうか...) のガロア理論のセミナーと一緒に参加するようになってからでした。とにかく興味のままだけに勉強をすすめ体得していく彼が眩しく思われたと同時に、必然他の事に手が回せない彼を勝手に心配していたことをよく覚えています。

講演で話す内容のため、またきっと続いてくれるであろう来年以降の生誕祭のために、面白いエピソードは

* yanagawa.taizo.86a@st.kyoto-u.ac.jp

取っておきたいものです。ただ、私が前田くんについて感じることは当時から変わらず、きっとこれからも変わらないのだと思います。

ひとまずお互い進路は別れますが24歳をぼちぼち張り切って生きていきましょう。最後になりましたが、お誕生日おめでとう。来年も祝わせてください。

参考文献

- [1] K. Chandrasekharan. *Introduction to analytic number theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 148. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1968.
- [2] Edmund Landau. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. 2 Bände. Chelsea Publishing Co., New York, 1953. 2d ed, With an appendix by Paul T. Bateman.
- [3] Karl Prachar. Über Zahlen der Form $a^2 + b^2$ in einer arithmetischen Progression. *Math. Nachr.*, Vol. 10, pp. 51–54, 1953.
- [4] H. Iwaniec. The half dimensional sieve. *Acta Arith.*, Vol. 29, No. 1, pp. 69–95, 1976.
- [5] Christopher Hooley. On the intervals between numbers that are sums of two squares. IV. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 452, pp. 79–109, 1994.
- [6] Antal Balog and Trevor D. Wooley. Sums of two squares in short intervals. *Canad. J. Math.*, Vol. 52, No. 4, pp. 673–694, 2000.