Veech groups of hexagonal tiled surfaces

畑佐 悠太

2022 年 3 月 26 日 @ Yota25

東工大・数学系 M2

目次

1. Origami

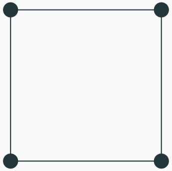
Origami とは

定義

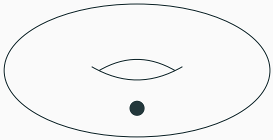
Origami とは有限枚の単位 Euclid 正方形からなり，以下の規則によって貼り合わせてできる曲面のことである．

- 各正方形の左辺はある正方形の右辺と貼り合う．
- 各正方形の上辺はある正方形の下辺と貼り合う．
- 貼り合わせてできる曲面は連結．

例

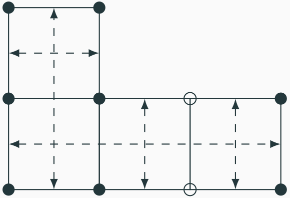


$\rightsquigarrow$

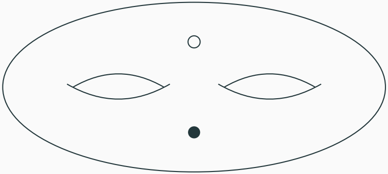


Origami の例

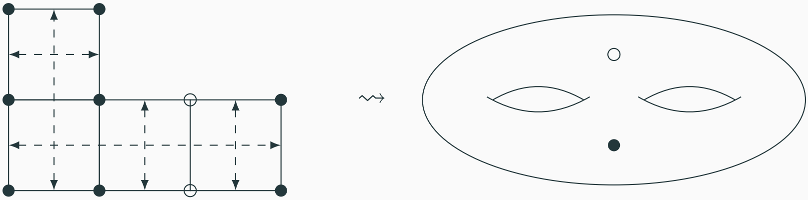
例



$\rightsquigarrow$



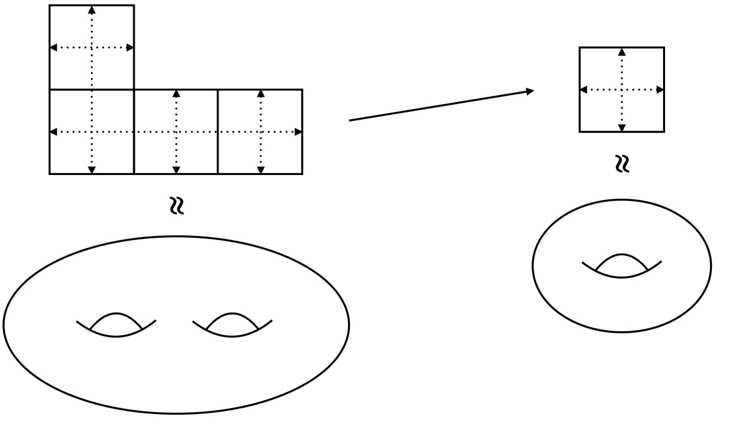
例



種数 g は Euler 標数を用いて

$$\begin{aligned} 2-2g &= (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}) \\ &= 2-8+4 = -2 \end{aligned}$$

から $g=2$ と計算される．



Origami は 1 点抜きトーラス上の被覆空間だとみなせる．

命題

d 枚の正方形からなる origami は以下によって特徴付けされる．

- トーラス上の高々 1 点で分岐している次数 d の Riemann 面．
- 1 点抜きトーラス上の次数 d の連結な被覆空間．
- 2 元生成自由群 F_2 の指数 d の部分群の共役類．
- 2 元生成自由群 F_2 から推移的な作用の入った d 元集合．
- 頂点が d 個で辺が x と y でラベル付けされた有向グラフで，各頂点は x と y でラベル付けされた入力辺と出力辺をそれぞれ 1 つずつ持つ．

余談：dessin d'enfants

有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ を研究するために Grothendieck は dessin d'enfants と呼ばれる組み合わせ論的対象を導入した．これは以下によって特徴付けされる．

- 3 点抜き球面上の有限次数の連結な被覆空間．
- 2 元生成自由群 F_2 の有限指数の部分群の共役類．

2. Veech 群

定義

任意の座標変換が $z \mapsto z + c$ $(c \in \mathbb{C})$ の形からなる座標近傍系 μ を備えた Riemann 面 (X, μ) を translation surface という．

$E^* = (\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2) \setminus \{0\}$ とするとき，E^* は translation surface となる．また E^* 上の有限次数被覆空間 (i.e. origami) も translation surface となる．

X を translation surface とし，$f\colon X \to X$ を微分同相写像とする．

定義

f が局所的に $z \mapsto Az + b$ $(A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$，$b \in \mathbb{R}^2)$ であるとき，f を affine という．

注意

X が translation surface であることにより行列 $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は局所座標の取り方によらずに大域的に定まる．

$$\mathrm{Aff}^{+}(X) \coloneqq \{f\colon X \to X \mid \text{向きを保つ affine 微分同相}\}$$

とし $D\colon \mathrm{Aff}^{+}(X) \to \mathrm{GL}_2^{+}(\mathbb{R})$ を f に対し大域的に定まる行列 A を返す群準同型とする．

定義

$\mathrm{GL}_2^{+}(\mathbb{R})$ の部分群 $\Gamma(X) \coloneqq D(\mathrm{Aff}^{+}(X))$ を X の Veech 群と呼ぶ．

目標：origami の Veech 群を計算したい

$O = (p\colon X^* \to E^*)$ を origami，$u\colon \widetilde{X^*} \to X^*$ を普遍被覆とする．
H を X^* の基本群とし F_2 の部分群とみなす．

定理 (Schmithüsen)

以下の可換図式が存在して，各行は完全列である．

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\widetilde{X^*}/E^*) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Aff}^+(\widetilde{X^*}) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Inn}(F_2) \arrow[r] & \mathrm{Aut}^+(F_2) \arrow[r] \arrow[ur, "\hat{\beta}"] & \mathrm{Out}^+(F_2) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

さらに $\mathrm{Aff}^+(H) = \{\gamma \in \mathrm{Aut}^+(F_2) \mid \gamma(H) = H\}$ とするとき
$\Gamma(X^*) = \hat{\beta}(\mathrm{Aff}^+(H)) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が成り立つ．

$h_1, \ldots, h_k$ を H の生成元，$\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ を右剰余類集合 $H \backslash F_2$ の完全代表系，$\overline{\sigma_i}$ を右剰余類 $H \cdot \sigma_i$ とする．

系 (Schmithüsen)

$A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}^+(\mathbb{Z}^2)$ に対し，A のリフト $\gamma_A^0 \in \mathrm{Aut}^+(F_2)$ を *1* つ取って固定する．このとき

$$A \in \Gamma(X^*) \iff \begin{array}{l} \exists i \in \{1, \ldots, d\}, \forall j \in \{1, \ldots, k\}, \\ \overline{\sigma_i} \cdot \gamma_0^A(h_j) = \overline{\sigma_i} \end{array}$$

定理 (Schmithüsen)

$\Gamma(X^*)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の有限指数部分群である．

系と定理を用いて Schmithüsen は origami の Veech 群を計算するアルゴリズムを与えた．

3. Hexagonal tiled surface

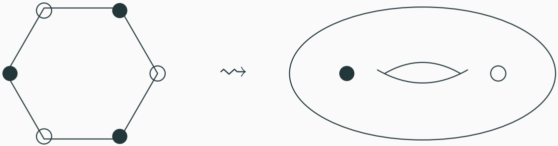
Hexagonal tiled surface とは

定義

Hexagonal tiled surface とは有限枚の単位正六角形からなり，以下の規則によって貼り合わせてできる曲面のことである．

- 各正六角形の上の辺はある正六角形の下の辺と貼り合う．
- 各正六角形の左上の辺はある正六角形の右下の辺と貼り合う．
- 各正六角形の右上の辺はある正六角形の左下の辺と貼り合う．
- 貼り合わせてできる曲面は連結．

例



Origami の場合と同様に以下のことが成り立つ．

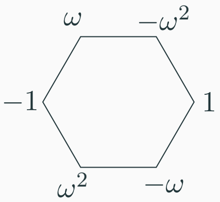
命題

d 枚の正六角形からなる hexagonal tiled surface は以下によって特徴付けされる．

- トーラス上の高々 2 点で分岐している次数 d の Riemann 面．
- 2 点抜きトーラス上の次数 d の連結な被覆空間．
- 3 元生成自由群 F_3 の指数 d の部分群の共役類．
- 3 元生成自由群 F_3 から推移的な作用の入った d 元集合．
- 頂点が d 個で辺が x_1 と x_2 と x_3 でラベル付けされた有向グラフで，各頂点は x_1 と x_2 と x_3 でラベル付けされた入力辺と出力辺をそれぞれ 1 つずつ持つ．

Hexagonal tiled surface の Veech 群

$E \coloneqq (1, -\omega^2, \omega, -1, \omega^2, -\omega$ を頂点とする正六角形からなる曲面)，
$E^* \coloneqq E \setminus \{1, -1\}$ とする．E^* は translation surface である．また
$p \colon X^* \to E^*$ を有限次数被覆空間 (i.e. hexagonal tiled surface) と
するとき，X^* も translation surface である．



定理

$$\Gamma(E^*) = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

系

$P^{-1}\Gamma(E^*)P$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の指数 4 で $\Gamma(3)$ を含む合同部分群.

$p\colon X^* \to E^*$ を hexagonal tiled surface とし $\widetilde{X^*}$ を X^* の普遍被覆とする．$F_3 \cong \mathrm{Aut}(\widetilde{X^*}/E^*)$ と同一視するとき，

$$\begin{array}{rccc} *\colon & \mathrm{Aff}^+(\widetilde{X^*}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(F_3) \\ & \widetilde{f} & \longmapsto & (\widetilde{f}_*\colon \sigma \mapsto \widetilde{f} \circ \sigma \circ \widetilde{f}^{-1}) \end{array}$$

が定義される．$\mathrm{Aut}_*(F_3) := \mathrm{Im}(*)$ と定義する．

注意

$\mathrm{Aut}_*(F_3)$ は $\mathrm{Aut}(F_3)$ や $\mathrm{Aut}^+(F_3)$ とは等しくない．

H を X^* の基本群とし F_3 の部分群とみなす．

定理

以下の可換図式が存在して，上の行は完全列である．

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\widetilde{X^*}/E^*) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Aff}^+(\widetilde{X^*}) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "*"] & \Gamma(E^*) \arrow[r] & 1 \\
& \mathrm{Inn}(F_3) \arrow[r] & \mathrm{Aut}_*(F_3) \arrow[ur, "\theta"'] & &
\end{tikzcd}$$

さらに $\mathrm{Aff}^+(H) = \{\gamma \in \mathrm{Aut}_*(F_3) \mid \gamma(H) = H\}$ とするとき
$\Gamma(X^*) = \theta(\mathrm{Aff}^+(H)) \subseteq \Gamma(E^*)$ が成り立つ．

$h_1, \ldots, h_k$ を H の生成元，$\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ を右剰余類集合 $H \backslash F_3$ の完全代表系，$\overline{\sigma_i}$ を右剰余類 $H \cdot \sigma_i$ とする．

系

$A \in \Gamma(E^*)$ に対し，$\theta(\gamma_A^0) = A$ を満たす $\gamma_A^0 \in \mathrm{Aut}_*(F_3)$ を *1* つ取って固定する．このとき

$$A \in \Gamma(X^*) \iff \begin{array}{l} \exists i \in \{1, \ldots, d\}, \forall j \in \{1, \ldots, k\}, \\ \overline{\sigma_i} \cdot \gamma_0^A(h_j) = \overline{\sigma_i} \end{array}$$

定理

$\Gamma(X^*)$ は $\Gamma(E^*)$ の有限指数部分群である．