解析入門　解答

河村遼

2019 年 7 月 5 日

第 I 章実数と連続

§1 実数

問 1(i)

$a, b \in K$ が両方 (R3) を満たす 0 であると仮定する.

a が (R3) を満たす 0 なので $b + a = b$

b も (R3) を満たす 0 なので $a + b = a$

また (R1) より $a + b = b + a$

以上より $a = b$ で (R3) を満たす 0 は唯一

(ii)

$a \in K$ に対し $b, c \in K$ を両方 (R4) を満たす $-a$ であると仮定する.

$a + b = 0$ より (R3) と合わせ $c + (a + b) = c + 0 = c$

また $a + c = 0$

(R1) より $a + c = c + a$ なので $c + a = 0$

より

$$
\begin{aligned}
b &= b + 0 \ (\because (R3)) \\
&= 0 + b \ (\because (R1)) \\
&= (c + a) + b \\
&= c + (a + b) \ (\because (R2)) \\
&= c
\end{aligned}
$$

つまり (R4) を満たす $-a$ は唯一

(iii)

$a \in K$ に対し (R4) より $a + (-a) = 0$

(R1) より $(-a) + a = a + (-a)$ で $(-a) + a = 0$ だ.

より (ii) から $-(-a) = a$

(iv)

$*$ 注意

$a \in K$ がある $b \in K$ に対して $b + a = b$ なら $a = 0$ だ.

なぜなら

$$\begin{aligned}0 &= b+(-b)\ (\because (R4))\\ &= (b+a)+(-b)\\ &= (a+b)+(-b)\ (\because (R1)\text{ より } b+a=a+b)\\ &= a+(b+(-b))\ (\because (R2))\\ &= a+0\ (\because (R4)\text{ より } b+(-b)=0)\\ &= a\ (\because (R3))\end{aligned}$$

以下これは暗黙の了解として使う.

$a \in K$ に対し

$$\begin{aligned}0a+0a &= (0+0)a\ (\because (R7))\\ &= 0a\ (\because (R3)\text{ より } 0+0=0)\end{aligned}$$

より $0a=0$

(v)

$a \in K$ に対し

$$\begin{aligned}a+(-1)a &= a1+(-1)a\ (\because (R8)\text{ より } a=a1)\\ &= 1a+(-1)a\ (\because (R5)\text{ より } a1=1a)\\ &= (1+(-1))a\ (\because (R7))\\ &= 0a\ (\because (R4)\text{ より } 1+(-1)=0)\\ &= 0\ (\because (iv))\end{aligned}$$

より (ii) から (以下 (ii) も暗黙の了解として使う)$(-1)a=-a$

(vi)

$$\begin{aligned}(-1)(-1) &= -(-1)\ (\because (v))\\ &= 1\ (\because (iii))\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}ab+a(-b) &= a(b+(-b))\ (\because (R7))\\ &= a0\ (\because (R4)\text{ より } b+(-b)=0)\\ &= 0a\ (\because (R5))\\ &= 0\ (\because (iv))\end{aligned}$$

より $a(-b)=-ab$

$$\begin{aligned}ab+(-a)b&=(a+(-a))b\ (\because (R7))\\&=0b\ (\because (R4)\text{ より } a+(-a)=0)\\&=0\ (\because (iv))\end{aligned}$$

より $(-a)b=-ab$

(viii)

$$\begin{aligned}(-a)(-b)&=-a(-b)\ (\because (vii))\\&=-(-ab)\ (\because (vii)\text{ より } a(-b)=-ab)\\&=ab\ (\because (iii))\end{aligned}$$

(ix)

$b\neq 0$ と仮定する.b^{-1} が存在し $bb^{-1}=1$.

この時

$$\begin{aligned}a&=a1\ (\because (R8))\\&=a(bb^{-1})\ (\because bb^{-1}=1)\\&=ab(b^{-1})\ (\because (R6))\\&=0b^{-1}\\&=0\ (\because (iv))\end{aligned}$$

つまり $a=0$ または $b=0$

(x)

$$\begin{aligned}(-a)(-(a^{-1}))&=aa^{-1}\ (\because (viii))\\&=1\ (\because (R9))\end{aligned}$$

(ii) と同様に (R9) を満たす a^{-1} は各 $a\in K, a\neq 0$ に対し唯一なので (以下これは暗黙の了解として使う).
$(-a)^{-1}=-(a^{-1})$

(xi)

$$\begin{aligned}(ab)(b^{-1}a^{-1})&=((ab)b^{-1})a^{-1}\ (\because (R6))\\&=(a(bb^{-1}))a^{-1}\ (\because (R6)\text{ より } (ab)b^{-1}=a(bb^{-1}))\\&=(a1)a^{-1}\ (\because (R9)\text{ より } bb^{-1}=1)\\&=aa^{-1}\ (\because (R8)\text{ より } a1=a)\\&=1\ (\because (R9))\end{aligned}$$

より $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

問 2(i)

$\Rightarrow$

$a \leqq b$ と (R15) より $a + (-a) \leqq b + (-a)$

より $0 \leqq b - a$

$\Leftarrow$

$0 \leqq b - a$ と (R15) より $0 + a \leqq (b - a) + a$ より $a \leqq b$

(ii)

(i) より $a \leqq b \Leftrightarrow 0 \leqq b - a$

さらに (i) より $-b \leqq -a \Leftrightarrow 0 \leqq -a - (-b)$

以上より $-a - (-b) = b - a$ と合わせて $a \leqq b \Leftrightarrow -b \leqq -a$

(iii)

(i) と $a \leqq b$ より $b - a \geqq 0$

(i) と $c \leqq 0, 0 - c = -c$ より $-c \geqq 0$

より (R16) から $(b - a)(-c) \geqq 0$ で $(b - a)(-c) = ac - bc$ と (i) から $ac \geqq bc$

(iv)

$a^{-1} \leqq 0$ と仮定する.

$-a^{-1} \geqq 0$ で $a \geqq 0$ とあわせ (R16) から $a(-a^{-1}) \geqq 0$

より $-1 \geqq 0$ (ii) より $0 \geqq 1$ となり矛盾.

背理法から $a^{-1} > 0$

(v)

$a \leqq b$ と (R15) より $a + c \leqq b + c$

$c \leqq d$ と (R15) より $c + b \leqq d + b$

$b + c = c + b, b + d = d + b$ より $b + c \leqq b + d$

(R13) より $a + c \leqq b + d$

(vi)

(v) より $a + c \leqq b + d$ は言える.

$a + c \neq b + d$ を言えばいい.

$a + c = b + d$ と仮定する.

(R11) より $b + d \leqq a + c$

また $a \leqq b$ と (ii) より $-b \leqq -a$

(v) より $-b + (b + d) = d, -a + (a + c) = c$ と合わせて $d \leqq c$

$c < d$ に矛盾し背理法から $a + c \neq b + d$

以上より $a + c < b + d$

§2 実数列の極限

1)(i)

$N > |a|$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n > N$ の時 $|a_n| = |a_{n-1}|\frac{|a|}{n}$, $\frac{|a|}{n} < 1$ で

$$|a_n| < |a_{n-1}|$$

これを繰り返し用いると $n \geqq N$ で

$$|a_n| \leqq |a_N|$$

$\epsilon > 0$ に対し $n \geqq max(N+1, \frac{|aa_N|}{\epsilon}+1)$ とすると

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_{n-1}|\frac{|a|}{n} \\ &\leqq \frac{|aa_N|}{n} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

より

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(ii)

$\epsilon > 0$ に対し $\epsilon' = min(1, \epsilon)$ とする.

$0 \leqq 1-\epsilon' < 1$ なので例 6 より $lim_{n\to\infty}(1-\epsilon')^n = 0$

より $a > 0$ より $N \in \mathbb{N}$ が存在し

$$n \geqq N \Rightarrow (1-\epsilon')^n < a$$

より $n \geqq N$ の時 $-\epsilon \leqq -\epsilon' < \sqrt[n]{a} - 1$

また二項定理より $n \geqq 1$ で

$$(1+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\epsilon^k > n\epsilon$$

$M > \frac{a}{\epsilon}$ を満たすように $M \in \mathbb{N}$ を取ると

$n \geqq M$ で

$$a < n\epsilon < (1+\epsilon)^n$$

より $\sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$

$n \geqq max(N, M)$ の時 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$ で

$$a_n \to 1 \ (n \to \infty)$$

(iii)

$k = 2, \cdots, n$ で $\frac{k}{n} \leqq 1$ なので辺々掛け合わせて

$$\frac{n!}{n^{n-1}} \leqq 1$$

より $0 < a_n \leqq \frac{1}{n}$

また $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ なのではさみうちの原理から

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(iv)

二項定理より $n \geqq 2$ で

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k > \frac{n(n-1)}{2}$$

より $0 < a_n < \frac{2}{n-1}$

また $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0$ なのではさみうちの原理から

$$a_n \to 0\ (n \to \infty)$$

(v)

$\epsilon > 0$ に対し $N > \frac{1}{\epsilon^2}$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n \geqq N$ で

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

$a_n > 0$ も合わせて $n \geqq N$ で $|a_n| < \epsilon$ なので

$$a_n \to 0\ (n \to \infty)$$

2)

$-1 \leqq \cos(n!\pi x) \leqq 1$ だ.

$\cos(n!\pi x) = \pm 1$ の時 $(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$ なので $\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

$-1 < \cos(n!\pi x) < 1$ の時 $0 \leqq (\cos(n!\pi x))^2 < 1$ なので例 6 より $\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

$\cos(n!\pi x) = \pm 1 \Leftrightarrow n!x \in \mathbb{Z}$ だ.

x が有理数の時 $x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ とおけ $n \geqq q$ の時

$$n!x = n \cdots (q+1)\cdot(q-1)\cdots 1 \cdot p \in \mathbb{Z}$$

より $n \geqq q$ で $\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

より $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m}) = 1$

x が無理数の時

$n!x$ が整数と仮定する.

$x = \frac{n!x}{n!}$ で分母と分子が整数なので x が有理数となり矛盾.

より $n!x$ は整数でなく $\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

より $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m}) = 0$

以上より

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x\text{ が有理数} \\ 0 & x\text{ が無理数} \end{cases}$$

3)

$\epsilon > 0$ とする.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ なので $n \geqq N'$ なら $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ となる $N' \in \mathbb{N}$ が存在.

$N = max(1, N')$ とする.

$n \geqq max(N, \frac{2}{\epsilon}|\sum_{k=1}^{N-1}(a_k - a)|)$ の時

$$|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - a| \leqq \frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{N-1}(a_k - a)| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|a_k - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-N+1}{2n}\epsilon < \epsilon$$

より $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

4)

$a_k\neq 0$ なので $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}$

より $a_k>0$ に注意し $\log a_n=\log a_1+\log\frac{a_2}{a_1}+\log\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\log\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$n\in\mathbb{N}$ に対し $a_n>0$ なので $b_n=\log\frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおける.

$$\log\sqrt[n]{a_n}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}-\frac{b_n}{n}+\frac{\log a_1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$ と $\log x$ が連続なので $\lim_{n\to\infty}b_n=\log a$

より 3) より $\lim_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=\log a$

また $n\geqq N$ で $|b_n-\log a|<1$ となる $N\in\mathbb{N}$ が存在.

$n\geqq N$ で $\frac{\log a-1}{n}\leqq\frac{b_n}{n}\leqq\frac{\log a+1}{n}$ で $\lim_{n\to\infty}\frac{\log a-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log a+1}{n}=0$ なのではさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$

さらに $\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_1}{n}=0$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{a_n}=\log a$$

e^x は連続なので $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{\log a}=a$

5)

$H=A\cup\{0\}\cup\{1\}\cup\cdots\cup\{m-1\}$ とする.

H が継承的であることを示す.

$\{0\}\subset H$ なので $0\in H$

$x\in H$ とする

$x=0,\cdots,m-2$ の時 $\{x+1\}\subset H$ なので $x+1\in H$

$x=m-1$ の時イ) より $m\in A$ で $A\subset H$ なので $x+1=m\in H$

$x\in A$ の時イ) より $x\geqq m$

$x\in A, x\geqq m$ なのでロ) より $x+1\in A$ で $A\subset H$ なので $x+1\in H$

以上より H は継承的.

より $\mathbb{N}\subset H$

$n\in\mathbb{N}$ で $n\geqq m$ とする.

$\mathbb{N}\subset H$ より $n\in H$.

また $n\geqq m$ なので $n\neq 0,1,\cdots,m-1$ で $n\notin\{0\}\cup\{1\}\cup\cdots\cup\{m-1\}$

より $n\in A$ で $\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}\subset A$

次に $n\in A$ とする.

$A\subset\mathbb{N}$ なので $n\in\mathbb{N}$

イ) より $n\geqq m$

より $n\in\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$ で $A\subset\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$

以上より $A=\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$

6)

$n\in\mathbb{N}$ に対し $A_n=\{x\in\mathbb{R}|x+n\in\mathbb{N}\}$ とする.

A_n が継承的であることを示す.

$n \in \mathbb{N}$ なので $0+n \in \mathbb{N}$ で $0 \in A_n$

$x \in A_n$ とする.

$x+n \in \mathbb{N}$ で $\mathbb{N}$ が継承的なので $x+1+n \in \mathbb{N}$

より $x+1 \in A_n$

以上より A_n は継承的で $\mathbb{N} \subset A_n$

$m \in \mathbb{N}$ なら $m \in A_n$ で $m+n \in \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}$ に対し $B_n = \{x \in \mathbb{R} | xn \in \mathbb{N}\}$ とする.

B_n が継承的であることを示す.

$0n = 0 \in \mathbb{N}$ なので $0 \in B_n$

$x \in B_n$ とする.

$xn, n \in \mathbb{N}$ なので上の結果より $xn + n = (x+1)n \in \mathbb{N}$

より $x+1 \in B_n$

以上より B_n は継承的で $\mathbb{N} \subset B_n$

$m \in \mathbb{N}$ なら $m \in B_n$ で $mn \in \mathbb{N}$

$C = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{N} | x-1 \in \mathbb{N}\}$ とする.

C が継承的であることを示す.

$\{0\} \subset C$ より $0 \in C$

$x \in C$ とする.

$x \in \{0\}, x \in \{x \in \mathbb{N} | x-1 \in \mathbb{N}\}$ いずれの場合も $x \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ は継承的なので $x+1 \in \mathbb{N}$

また $x+1-1 = x \in \mathbb{N}$ なので $x+1 \in C$

以上より C は継承的で $\mathbb{N} \subset C$

$m \in \mathbb{N}$ に対し $D_m = \{x \in \mathbb{N} | m < x$ または $m - x \in \mathbb{N}\}$ とする.

D_m が継承的であることを示す.

$m \in \mathbb{N}$ なので $m - 0 \in \mathbb{N}$ で $0 \in D_m$

$x \in D_m$ とする.

$m \leqq x$ の時 $m < x+1$ なので $x+1 \in D_m$

$m > x$ の時 $m - x \in \mathbb{N} \subset C$

さらに $m - x \neq 0$ なので $m - x - 1 \in \mathbb{N}$

より $x+1 \in D_m$

いずれの場合も $x+1 \in D_m$ で $0 \in D_m$ と合わせて D_m は継承的で $\mathbb{N} \subset D_m$

より $n \in \mathbb{N}, m \geqq n$ なら $m - n \in \mathbb{N}$

7)

$\mathbb{R}_+$ は継承的なので $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$ で $n \in \mathbb{N}$ なら $n \geqq 0$ なことに注意する.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $E_n = \{x \in \mathbb{N} | x \leqq n$ または $n+1 \leqq x\}$ とする.

また $F = \{n \in \mathbb{N} | \mathbb{N} \subset E_n\}$ とする.

F が継承的であることを示したい.

まず E_0 が継承的なことを示す.

$0 \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq 0$ より $0 \in E_0$

$x \in E_0$ とする.$x \in \mathbb{N}$ で $x+1 \in \mathbb{N}$

また $x \geqq 0$ なので $1 \leqq x+1$ で $x+1 \in E_0$

より E_0 は継承的で $0 \in F$

次に $n \in F$ を仮定して $n+1 \in F$ を示す.

$n \in F \subset \mathbb{N}$ なので $n \geqq 0$ で $0 \leqq n+1$ で $0 \in E_{n+1}$

$x \in E_{n+1}$ とする.$x \in \mathbb{N} \subset E_n$ なので $x \leqq n$ または $n+1 \leqq x$

より $x+1 \leqq n+1$ または $n+2 \leqq x+1$

より $x+1 \in E_{n+1}$

以上より E_{n+1} は継承的で $\mathbb{N} \subset E_{n+1}$

より $n+1 \in F$

以上より F は継承的で $\mathbb{N} \subset F$

より $n \in \mathbb{N}$ なら $\mathbb{N} \subset \{x \in \mathbb{N} | x \leqq n$ または $n+1 \leqq x\}$ で

$n < k < n+1$ となる自然数は存在しない.