

解析入門 解答

itleigns

2019 年 7 月 13 日

第 I 章実数と連続

§1 実数

問 1(i)

$a, b \in K$ が両方 (R3) を満たす 0 であると仮定する.

a が (R3) を満たす 0 なので $b + a = b$

b も (R3) を満たす 0 なので $a + b = a$

また (R1) より $a + b = b + a$

以上より $a = b$ で (R3) を満たす 0 は唯一

(ii)

$a \in K$ に対し $b, c \in K$ を両方 (R4) を満たす $-a$ であると仮定する.

$a + b = 0$ より (R3) と合わせ $c + (a + b) = c + 0 = c$

また $a + c = 0$

(R1) より $a + c = c + a$ なので $c + a = 0$

より

$$\begin{aligned} b &= b + 0 \quad (\because (R3)) \\ &= 0 + b \quad (\because (R1)) \\ &= (c + a) + b \\ &= c + (a + b) \quad (\because (R2)) \\ &= c \end{aligned}$$

つまり (R4) を満たす $-a$ は唯一

(iii)

$a \in K$ に対し (R4) より $a + (-a) = 0$

(R1) より $(-a) + a = a + (-a)$ で $(-a) + a = 0$ だ.

より (ii) から $-(-a) = a$

(iv)

* 注意

$a \in K$ がある $b \in K$ に対して $b + a = b$ なら $a = 0$ だ.

なぜなら

$$\begin{aligned}0 &= b + (-b) \quad (\because (R4)) \\&= (b + a) + (-b) \\&= (a + b) + (-b) \quad (\because (R1) \text{ より } b + a = a + b) \\&= a + (b + (-b)) \quad (\because (R2)) \\&= a + 0 \quad (\because (R4) \text{ より } b + (-b) = 0) \\&= a \quad (\because (R3))\end{aligned}$$

以下これは暗黙の了解として使う.

$a \in K$ に対し

$$\begin{aligned}0a + 0a &= (0 + 0)a \quad (\because (R7)) \\&= 0a \quad (\because (R3) \text{ より } 0 + 0 = 0)\end{aligned}$$

より $0a = 0$

(v)

$a \in K$ に対し

$$\begin{aligned}a + (-1)a &= a1 + (-1)a \quad (\because (R8) \text{ より } a = a1) \\&= 1a + (-1)a \quad (\because (R5) \text{ より } a1 = 1a) \\&= (1 + (-1))a \quad (\because (R7)) \\&= 0a \quad (\because (R4) \text{ より } 1 + (-1) = 0) \\&= 0 \quad (\because (iv))\end{aligned}$$

より (ii) から (以下 (ii) も暗黙の了解として使う) $(-1)a = -a$

(vi)

$$\begin{aligned}(-1)(-1) &= -(-1) \quad (\because (v)) \\&= 1 \quad (\because (iii))\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}ab + a(-b) &= a(b + (-b)) \quad (\because (R7)) \\&= a0 \quad (\because (R4) \text{ より } b + (-b) = 0) \\&= 0a \quad (\because (R5)) \\&= 0 \quad (\because (iv))\end{aligned}$$

より $a(-b) = -ab$

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= (a + (-a))b \quad (\because (R7)) \\ &= 0b \quad (\because (R4) \text{ より } a + (-a) = 0) \\ &= 0 \quad (\because (iv)) \end{aligned}$$

より $(-a)b = -ab$
(viii)

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -a(-b) \quad (\because (vii)) \\ &= -(-ab) \quad (\because (vii) \text{ より } a(-b) = -ab) \\ &= ab \quad (\because (iii)) \end{aligned}$$

(ix)

$b \neq 0$ と仮定する. b^{-1} が存在し $bb^{-1} = 1$.

この時

$$\begin{aligned} a &= a1 \quad (\because (R8)) \\ &= a(bb^{-1}) \quad (\because bb^{-1} = 1) \\ &= ab(b^{-1}) \quad (\because (R6)) \\ &= 0b^{-1} \\ &= 0 \quad (\because (iv)) \end{aligned}$$

つまり $a = 0$ または $b = 0$

(x)

$$\begin{aligned} (-a)(-a^{-1}) &= aa^{-1} \quad (\because (viii)) \\ &= 1 \quad (\because (R9)) \end{aligned}$$

(ii) と同様に (R9) を満たす a^{-1} は各 $a \in K, a \neq 0$ に対し唯一なので (以下これは暗黙の了解として使う).

$$(-a)^{-1} = -(a^{-1})$$

(xi)

$$\begin{aligned} (ab)(b^{-1}a^{-1}) &= ((ab)b^{-1})a^{-1} \quad (\because (R6)) \\ &= (a(bb^{-1}))a^{-1} \quad (\because (R6) \text{ より } (ab)b^{-1} = a(bb^{-1})) \\ &= (a1)a^{-1} \quad (\because (R9) \text{ より } bb^{-1} = 1) \\ &= aa^{-1} \quad (\because (R8) \text{ より } a1 = a) \\ &= 1 \quad (\because (R9)) \end{aligned}$$

より $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

問 2(i)

\Rightarrow

$a \leq b$ と (R15) より $a + (-a) \leq b + (-a)$

より $0 \leq b - a$

\Leftarrow

$0 \leq b - a$ と (R15) より $0 + a \leq (b - a) + a$ より $a \leq b$

(ii)

(i) より $a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a$

さらに (i) より $-b \leq -a \Leftrightarrow 0 \leq -a - (-b)$

以上より $-a - (-b) = b - a$ と合わせて $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$

(iii)

(i) と $a \leq b$ より $b - a \geq 0$

(i) と $c \leq 0, 0 - c = -c$ より $-c \geq 0$

より (R16) から $(b - a)(-c) \geq 0$ で $(b - a)(-c) = ac - bc$ と (i) から $ac \geq bc$

(iv)

$a^{-1} \leq 0$ と仮定する.

$-a^{-1} \geq 0$ で $a \geq 0$ とあわせ (R16) から $a(-a^{-1}) \geq 0$

より $-1 \geq 0$ (ii) より $0 \geq 1$ となり矛盾.

背理法から $a^{-1} > 0$

(v)

$a \leq b$ と (R15) より $a + c \leq b + c$

$c \leq d$ と (R15) より $c + b \leq d + b$

$b + c = c + b, b + d = d + b$ より $b + c \leq b + d$

(R13) より $a + c \leq b + d$

(vi)

(v) より $a + c \leq b + d$ は言える.

$a + c \neq b + d$ を言えたい.

$a + c = b + d$ と仮定する.

(R11) より $b + d \leq a + c$

また $a \leq b$ と (ii) より $-b \leq -a$

(v) より $-b + (b + d) = d, -a + (a + c) = c$ と合わせて $d \leq c$

$c < d$ に矛盾し背理法から $a + c \neq b + d$

以上より $a + c < b + d$

§2 実数列の極限

1)(i)

$N > |a|$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n > N$ の時 $|a_n| = |a_{n-1}| \frac{|a|}{n}, \frac{|a|}{n} < 1$ で

$$|a_n| < |a_{n-1}|$$

これを繰り返し用いると $n \geq N$ で

$$|a_n| \leq |a_N|$$

$\epsilon > 0$ に対し $n \geq \max(N+1, \frac{|aa_N|}{\epsilon} + 1)$ とすると

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_{n-1}| \frac{|a|}{n} \\ &\leq \frac{|aa_N|}{n} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

より

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(ii)

$\epsilon > 0$ に対し $\epsilon' = \min(1, \epsilon)$ とする.

$0 \leq 1 - \epsilon' < 1$ なので例 6 より $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \epsilon')^n = 0$

より $a > 0$ より $N \in \mathbb{N}$ が存在し

$$n \geq N \Rightarrow (1 - \epsilon')^n < a$$

より $n \geq N$ の時 $-\epsilon \leq -\epsilon' < \sqrt[n]{a} - 1$

また二項定理より $n \geq 1$ で

$$(1 + \epsilon)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \epsilon^k > n\epsilon$$

$M > \frac{a}{\epsilon}$ を満たすように $M \in \mathbb{N}$ を取ると

$n \geq M$ で

$$a < n\epsilon < (1 + \epsilon)^n$$

より $\sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$

$n \geq \max(N, M)$ の時 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$ で

$$a_n \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(iii)

$k = 2, \dots, n$ で $\frac{k}{n} \leq 1$ なので辺々掛け合わせて

$$\frac{n!}{n^{n-1}} \leq 1$$

より $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$

また $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ なのではさみうちの原理から

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(iv)

二項定理より $n \geq 2$ で

$$2^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k > \frac{n(n-1)}{2}$$

より $0 < a_n < \frac{2}{n-1}$

また $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$ なのではさみうちの原理から

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(v)

$\epsilon > 0$ に対し $N > \frac{1}{\epsilon^2}$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n \geq N$ で

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

$a_n > 0$ も合わせて $n \geq N$ で $|a_n| < \epsilon$ なので

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

2)

$-1 \leq \cos(n!\pi x) \leq 1$ だ.

$\cos(n!\pi x) = \pm 1$ の時 $(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$ なので $\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

$-1 < \cos(n!\pi x) < 1$ の時 $0 \leq (\cos(n!\pi x))^2 < 1$ なので例 6 より $\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

$\cos(n!\pi x) = \pm 1 \Leftrightarrow n!x \in \mathbb{Z}$ だ.

x が有理数の時 $x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ とおけ $n \geq q$ の時

$$n!x = n \cdots (q+1) \cdot (q-1) \cdots 1 \cdot p \in \mathbb{Z}$$

より $n \geq q$ で $\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

より $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}) = 1$

x が無理数の時

$n!x$ が整数と仮定する.

$x = \frac{n!x}{n!}$ で分母と分子が整数なので x が有理数となり矛盾.

より $n!x$ は整数でなく $\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

より $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}) = 0$

以上より

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数} \\ 0 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

3)

$\epsilon > 0$ とする.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ なので $n \geq N'$ なら $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ となる $N' \in \mathbb{N}$ が存在.

$N = \max(1, N')$ とする.

$n \geq \max(N, \frac{2}{\epsilon} |\sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a)|)$ の時

$$|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - a| \leq \frac{1}{n} |\sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a)| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |a_k - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n - N + 1}{2n} \epsilon < \epsilon$$

より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$

4)

$$a_k \neq 0 \text{ なので } a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$\text{より } a_k > 0 \text{ に注意し } \log a_n = \log a_1 + \log \frac{a_2}{a_1} + \log \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \log \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ に対し } a_n > 0 \text{ なので } b_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ とおける.}$$

$$\log \sqrt[n]{a_n} = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} - \frac{b_n}{n} + \frac{\log a_1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \text{ と } \log x \text{ が連続なので } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log a$$

$$\text{より 3) より } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = \log a$$

また $n \geq N$ で $|b_n - \log a| < 1$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$$n \geq N \text{ で } \frac{\log a - 1}{n} \leq \frac{b_n}{n} \leq \frac{\log a + 1}{n} \text{ で } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a - 1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a + 1}{n} = 0 \text{ なのではさみうちの原理から}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

$$\text{さらに } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_1}{n} = 0 \text{ なので}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{a_n} = \log a$$

$$e^x \text{ は連続なので } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{\log a} = a$$

5)

$$H = A \cup \{0\} \cup \{1\} \cup \cdots \cup \{m-1\} \text{ とする.}$$

H が継承的であることを示す.

$$\{0\} \subset H \text{ なので } 0 \in H$$

$x \in H$ とする

$$x = 0, \dots, m-2 \text{ の時 } \{x+1\} \subset H \text{ なので } x+1 \in H$$

$$x = m-1 \text{ の時イ) より } m \in A \text{ で } A \subset H \text{ なので } x+1 = m \in H$$

$$x \in A \text{ の時イ) より } x \geq m$$

$$x \in A, x \geq m \text{ なのでロ) より } x+1 \in A \text{ で } A \subset H \text{ なので } x+1 \in H$$

以上より H は継承的.

$$\text{より } \mathbb{N} \subset H$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ で } n \geq m \text{ とする.}$$

$$\mathbb{N} \subset H \text{ より } n \in H.$$

$$\text{また } n \geq m \text{ なので } n \neq 0, 1, \dots, m-1 \text{ で } n \notin \{0\} \cup \{1\} \cup \cdots \cup \{m-1\}$$

$$\text{より } n \in A \text{ で } \{n \in \mathbb{N} | n \geq m\} \subset A$$

次に $n \in A$ とする.

$$A \subset \mathbb{N} \text{ なので } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{イ) より } n \geq m$$

$$\text{より } n \in \{n \in \mathbb{N} | n \geq m\} \text{ で } A \subset \{n \in \mathbb{N} | n \geq m\}$$

$$\text{以上より } A = \{n \in \mathbb{N} | n \geq m\}$$

6)

$$n \in \mathbb{N} \text{ に対し } A_n = \{x \in \mathbb{R} | x+n \in \mathbb{N}\} \text{ とする.}$$

A_n が継承的であることを示す.

$n \in \mathbb{N}$ なので $0 + n \in \mathbb{N}$ で $0 \in A_n$

$x \in A_n$ とする.

$x + n \in \mathbb{N}$ で \mathbb{N} が継承的なので $x + 1 + n \in \mathbb{N}$

より $x + 1 \in A_n$

以上より A_n は継承的で $\mathbb{N} \subset A_n$

$m \in \mathbb{N}$ なら $m \in A_n$ で $m + n \in \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}$ に対し $B_n = \{x \in \mathbb{R} | xn \in \mathbb{N}\}$ とする.

B_n が継承的であることを示す.

$0n = 0 \in \mathbb{N}$ なので $0 \in B_n$

$x \in B_n$ とする.

$xn, n \in \mathbb{N}$ なので上の結果より $xn + n = (x + 1)n \in \mathbb{N}$

より $x + 1 \in B_n$

以上より B_n は継承的で $\mathbb{N} \subset B_n$

$m \in \mathbb{N}$ なら $m \in B_n$ で $mn \in \mathbb{N}$

$C = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{N} | x - 1 \in \mathbb{N}\}$ とする.

C が継承的であることを示す.

$\{0\} \subset C$ より $0 \in C$

$x \in C$ とする.

$x \in \{0\}, x \in \{x \in \mathbb{N} | x - 1 \in \mathbb{N}\}$ いずれの場合も $x \in \mathbb{N}$

\mathbb{N} は継承的なので $x + 1 \in \mathbb{N}$

また $x + 1 - 1 = x \in \mathbb{N}$ なので $x + 1 \in C$

以上より C は継承的で $\mathbb{N} \subset C$

$m \in \mathbb{N}$ に対し $D_m = \{x \in \mathbb{N} | m < x \text{ または } m - x \in \mathbb{N}\}$ とする.

D_m が継承的であることを示す.

$m \in \mathbb{N}$ なので $m - 0 \in \mathbb{N}$ で $0 \in D_m$

$x \in D_m$ とする.

$m \leq x$ の時 $m < x + 1$ なので $x + 1 \in D_m$

$m > x$ の時 $m - x \in \mathbb{N} \subset C$

さらに $m - x \neq 0$ なので $m - x - 1 \in \mathbb{N}$

より $x + 1 \in D_m$

いずれの場合も $x + 1 \in D_m$ で $0 \in D_m$ と合わせて D_m は継承的で $\mathbb{N} \subset D_m$

より $n \in \mathbb{N}, m \geq n$ なら $m - n \in \mathbb{N}$

7)

\mathbb{R}_+ は継承的なので $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$ で $n \in \mathbb{N}$ なら $n \geq 0$ なことに注意する.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $E_n = \{x \in \mathbb{N} | x \leq n \text{ または } n + 1 \leq x\}$ とする.

また $F = \{n \in \mathbb{N} | \mathbb{N} \subset E_n\}$ とする.

F が継承的であることを示したい.

まず E_0 が継承的なことを示す.

$0 \in \mathbb{N}$ で $0 \leq 0$ より $0 \in E_0$

$x \in E_0$ とする. $x \in \mathbb{N}$ で $x+1 \in \mathbb{N}$

また $x \geq 0$ なので $1 \leq x+1$ で $x+1 \in E_0$

より E_0 は継承的で $0 \in F$

次に $n \in F$ を仮定して $n+1 \in F$ を示す.

$n \in F \subset \mathbb{N}$ なので $n \geq 0$ で $0 \leq n+1$ で $0 \in E_{n+1}$

$x \in E_{n+1}$ とする. $x \in \mathbb{N} \subset E_n$ なので $x \leq n$ または $n+1 \leq x$

より $x+1 \leq n+1$ または $n+2 \leq x+1$

より $x+1 \in E_{n+1}$

以上より E_{n+1} は継承的で $\mathbb{N} \subset E_{n+1}$

より $n+1 \in F$

以上より F は継承的で $\mathbb{N} \subset F$

より $n \in \mathbb{N}$ なら $\mathbb{N} \subset \{x \in \mathbb{N} | x \leq n \text{ または } n+1 \leq x\}$ で

$n < k < n+1$ となる自然数は存在しない.

§3 実数の連続性

1)(i)

$$a_n = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+0) \cdot (2+0) = \frac{1}{3}$$

(ii)

$a \leq 1$ のとき $M(\in \mathbb{R})$ に対し $N > \sqrt{\max(0, M)}$ を満たす $N(\in \mathbb{N})$ が存在.

$n \geq N$ で

$$a_n = \frac{n^2}{a^n} \geq \frac{n^2}{1^n} = n^2 \geq M$$

より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

$a > 1$ のとき二項定理より $n \geq 3$ で

$$a^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k(a-1)^k \cdot 1^{n-k} > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(a-1)^3$$

より

$$\frac{n^2}{a^n} < \frac{6}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{n}\right)(a-1)^3} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{6}{(1-0)(1-2 \cdot 0)(a-1)^3} \cdot 0 = 0$$

$a_n > 0$ と合わせはさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\text{以上より } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & (a \leq 1) \\ 0 & (a > 1) \end{cases}$$

(iii)

$n \geq 2$ のとき $\sqrt[n]{n} > 1$ で二項定理より

$$n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k(\sqrt[n]{n}-1)^k \cdot 1^{n-k} > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

より

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$\epsilon > 0$ に対し $N > \frac{2}{\epsilon^2} + 1$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$$n \geq \max(N, 2) \text{ で } |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$$

$$\text{つまり } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

(iv)

2) より $e > 1$ で $n \geq k+1$ で二項定理より

$$e^n = \sum_{l=0}^n {}_nC_l (e-1)^l \cdot 1^{n-l} > {}_nC_{k+1} (e-1)^{k+1} > \frac{(n-k)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot (e-1)^{k+1}$$

より

$$a_n < \left(\frac{1}{1-\frac{k}{n}}\right)^k \cdot \frac{(k+1)!}{(e-1)^{k+1}} \frac{1}{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-0}\right)^k \cdot \frac{(k+1)!}{(e-1)^{k+1}} \cdot 0 = 0$$

$a_n > 0$ と合わせはさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(v)

$n \geq 2$ のとき 2) の e を用いて

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e}{e^1} = 1$$

(vi)

$0 < c < 1$ のとき

$$a_n < \frac{1}{c^{-n}} = c^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$a_n > 0$ と合わせはさみうちの定理から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$c = 1 \text{ のとき } a_n = 2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

$$c > 1 \text{ のとき } 0 < \frac{1}{c} < 1 \text{ で } a_n = \frac{1}{(\frac{1}{c})^{-n} + (\frac{1}{c})^n} \text{ なので } 0 < c < 1 \text{ のときの結果より } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\text{以上より } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 2 & c = 1 \\ 0 & c \neq 1 \end{cases}$$

(vii)

$$b_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \text{ とする.}$$

$a_n > 0, b_n > 0$ なので両方下に有界.

$$\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} < 1 \text{ より } a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} < 1 \text{ より } b_{n+1} < b_n$$

より a_n, b_n は両方単調減少で収束する.

それぞれ a, b に収束するとすると $a \geq 0, b \geq 0$

$$n \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ に対し } (2n)^2 > (2n)^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1} \text{ なので}$$

$$n = 1, \dots, k \text{ で掛けて } a_k < b_k \text{ より } a \leq b$$

$$\text{また } a_n b_n = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ なので } ab = 0$$

$$0 \leq a^2 \leq ab = 0 \text{ より } a = 0 \text{ つまり } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

2)

二項定理より

$$a_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k, a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k$$

$l = 0, \dots, k-1$ に対し $n(n+1) - nl \geq n(n+1) - (n+1)l \Leftrightarrow \frac{n+1-l}{n+1} \geq \frac{n-l}{n}$
 なので辺々掛けて $\frac{1}{k!}$ で割り ${}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \leq {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k$ より

$$a_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \leq \sum_{k=0}^n {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k < \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = a_{n+1}$$

より a_n は単調増加.

また ${}_nC_k \leq \frac{n^k}{k!}$ なので

$$a_n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$n \geq 3$ で $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 2.9 - \frac{1}{n!}$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 3$ のとき

(左辺) $= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} < 2.67 < 2.9 - \frac{1}{6} =$ (右辺) で成立.

ii) $n = l (\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する. ($l \geq 3$)

$$\sum_{k=0}^{l+1} \frac{1}{k!} \leq 2.9 - \frac{1}{l!} + \frac{1}{(l+1)!} = 2.9 - \frac{l}{(l+1)!} < 2.9 - \frac{1}{(l+1)!}$$

より $n = l+1$ も成立.

i)ii) より示された.

より $a_n \leq 2.9 - \frac{1}{n!} < 2.9$ で a_n は上に有界. より a_n は e に収束するとしてよく $e \leq 2.9 < 3$

$n \geq 2$ で $a_n \geq a_2 = \frac{9}{4} > 2$ より $e > 2$

9)

$k_0 + \frac{1}{\frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_n}}}}$ を $[k_0; k_1, k_2, \dots, k_n]$ と書く事にする.

$k_n > 0$ ($n > 0$) を満たす整数列 $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対し $(p'_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}, (q'_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ を以下のように定義する.

$$p'_n = \begin{cases} k_0 & n = 1 \\ k_0 k_1 + 1 & n = 2 \\ p'_{n-1} k_{n-1} + p'_{n-2} & n \geq 3 \end{cases}, q'_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ k_1 & n = 2 \\ q'_{n-1} k_{n-1} + q'_{n-2} & n \geq 3 \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N} - \{0\}, t > 1$ に対し $[k_0; \dots, k_n, t] = \frac{p'_{n+1}t + p'_n}{q'_{n+1}t + q'_n}$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 1$ の時

$$\begin{aligned}
[k_0; k_1, t] &= k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{t}} \\
&= k_0 + \frac{t}{tk_1 + 1} \\
&= \frac{(k_0k_1 + 1)t + k_0}{k_1t + 1} \\
&= \frac{p'_2t + p'_1}{q'_2t + q'_1}
\end{aligned}$$

ii) $n = m (\in \mathbb{N} - \{0\})$ の時に成立すると仮定する.

$$\begin{aligned}
[k_0; \dots, k_{m+1}, t] &= [k_0; \dots, k_m, k_{m+1} + \frac{1}{t}] \\
&= \frac{p'_{m+1}(k_{m+1} + \frac{1}{t}) + p'_m}{q'_{m+1}(k_{m+1} + \frac{1}{t}) + q'_m} (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= \frac{(p'_{m+1}k_{m+1} + p'_m)t + p'_{m+1}}{(q'_{m+1}k_{m+1} + q'_m)t + q'_{m+1}} \\
&= \frac{p'_{m+2}t + p'_{m+1}}{q'_{m+2}t + q'_{m+1}}
\end{aligned}$$

i)ii) より示された.

特に $t = k_{n+1}$ として $[k_0; \dots, k_{n+1}] = \frac{p'_{n+1}k_{n+1} + p'_n}{q'_{n+1}k_{n+1} + q'_n} = \frac{p'_{n+2}}{q'_{n+2}}$

$[k_0;] = \frac{p'_1}{q'_1}, [k_0; k_1] = \frac{p'_2}{q'_2}$ と合わせて

$[k_0; \dots, k_n] = \frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}}$ が任意の自然数で成り立つ.

次に $p'_{n+2}q'_{n+1} - p'_{n+1}q'_{n+2} = (-1)^n$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 0$ の時

$p'_2q'_1 - p'_1q'_2 = (k_0k_1 + 1) \cdot 1 - k_0k_1 = 1 = (-1)^0$ で成立.

ii) $n = m (\in \mathbb{N})$ の時に成立すると仮定する.

$$\begin{aligned}
p'_{m+3}q'_{m+2} - p'_{m+2}q'_{m+3} &= (p'_{m+2}k_{m+2} + p'_{m+1})q'_{m+2} - p'_{m+2}(q'_{m+2}k_{m+2} + q'_{m+1}) \\
&= -(p'_{m+2}q'_{m+1} - p'_{m+1}q'_{m+2}) \\
&= (-1)^{m+1}
\end{aligned}$$

で $n = m + 1$ も成立.

i)ii) より示された.

より p'_n, q'_n の公約数は 1 の約数で 1. つまり p'_n, q'_n は互いに素.

$x \in \mathbb{R}$ に対し問題文のように変数を設定すると x の連分数展開は $k_0 = [x]$ として $[k_0; \dots, k_n, \dots]$

上で示したことより $a_n = \frac{q'_n}{p'_n}$

p'_n, q'_n は互いに素なので $p_n = p'_n, q_n = q'_n$

より $x = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}}$

$q_n \geq n - 1$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 1, 2, 3$ の時

$q_1 = 1 \geq 0$

k_1 は正整数なので $q_2 = k_1 \geq 1$

k_2 は正整数なので $q_3 = q_2 k_2 + q_1 \geq 1 \cdot 1 + 1 \geq 2$

ii) $n = m, m+1, m+2 (m \in \mathbb{N} - \{0\})$ の時に成立すると仮定する.

k_{m+2} は正整数なので $q_{m+3} = q_{m+2} k_{m+2} + q_{m+1} \geq (m+1) \cdot 1 + m = 2m+1 \geq m+2$

で $n = m+3$ も成立.

i)ii) より示された.

$n > 1$ で

$$\begin{aligned} |x - a_n| &= \left| \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \\ &= \left| \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n (q_n x_n + q_{n-1})} \right| \\ &= \left| \frac{1}{q_n (q_n x_n + q_{n-1})} \right| (\because p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}) \\ &\leq \left| \frac{1}{q_n^2} \right| (\because x_n > 1, q_{n-1} \geq n-2 \geq 0) \end{aligned}$$

$n = 0$ も

$$|x - a_1| = x - [x] \leq 1 = \frac{1}{q_1^2}$$

$\epsilon (> 0)$ に対し $N \in \mathbb{N}$ が $N > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 1$ を満たすとする.

$n \geq N$ なら $q_n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ で $|x - a_n| < \epsilon$

つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$