解析入門　解答

itleigns

2019 年 7 月 14 日

第 I 章実数と連続

§1 実数

問 1(i)

$a, b \in K$ が両方 (R3) を満たす 0 であると仮定する.

a が (R3) を満たす 0 なので $b + a = b$

b も (R3) を満たす 0 なので $a + b = a$

また (R1) より $a + b = b + a$

以上より $a = b$ で (R3) を満たす 0 は唯一

(ii)

$a \in K$ に対し $b, c \in K$ を両方 (R4) を満たす $-a$ であると仮定する.

$a + b = 0$ より (R3) と合わせ $c + (a + b) = c + 0 = c$

また $a + c = 0$

(R1) より $a + c = c + a$ なので $c + a = 0$

より

$$\begin{aligned} b &= b + 0 \ (\because (R3)) \\ &= 0 + b \ (\because (R1)) \\ &= (c + a) + b \\ &= c + (a + b) \ (\because (R2)) \\ &= c \end{aligned}$$

つまり (R4) を満たす $-a$ は唯一

(iii)

$a \in K$ に対し (R4) より $a + (-a) = 0$

(R1) より $(-a) + a = a + (-a)$ で $(-a) + a = 0$ だ.

より (ii) から $-(-a) = a$

(iv)

$*$ 注意

$a \in K$ がある $b \in K$ に対して $b + a = b$ なら $a = 0$ だ.

なぜなら

$$
\begin{aligned}
0 &= b+(-b) \ (\because (R4)) \\
&= (b+a)+(-b) \\
&= (a+b)+(-b) \ (\because (R1) \text{ より } b+a=a+b) \\
&= a+(b+(-b)) \ (\because (R2)) \\
&= a+0 \ (\because (R4) \text{ より } b+(-b)=0) \\
&= a \ (\because (R3))
\end{aligned}
$$

以下これは暗黙の了解として使う.

$a \in K$ に対し

$$
\begin{aligned}
0a+0a &= (0+0)a \ (\because (R7)) \\
&= 0a \ (\because (R3) \text{ より } 0+0=0)
\end{aligned}
$$

より $0a = 0$

(v)

$a \in K$ に対し

$$
\begin{aligned}
a+(-1)a &= a1+(-1)a \ (\because (R8) \text{ より } a=a1) \\
&= 1a+(-1)a \ (\because (R5) \text{ より } a1=1a) \\
&= (1+(-1))a \ (\because (R7)) \\
&= 0a \ (\because (R4) \text{ より } 1+(-1)=0) \\
&= 0 \ (\because (iv))
\end{aligned}
$$

より (ii) から (以下 (ii) も暗黙の了解として使う)$(-1)a = -a$

(vi)

$$
\begin{aligned}
(-1)(-1) &= -(-1) \ (\because (v)) \\
&= 1 \ (\because (iii))
\end{aligned}
$$

(vii)

$$
\begin{aligned}
ab+a(-b) &= a(b+(-b)) \ (\because (R7)) \\
&= a0 \ (\because (R4) \text{ より } b+(-b)=0) \\
&= 0a \ (\because (R5)) \\
&= 0 \ (\because (iv))
\end{aligned}
$$

より $a(-b) = -ab$

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= (a + (-a))b \ (\because (R7)) \\ &= 0b \ (\because (R4) \text{ より } a + (-a) = 0) \\ &= 0 \ (\because (iv)) \end{aligned}$$

より $(-a)b = -ab$

(viii)

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -a(-b) \ (\because (vii)) \\ &= -(-ab) \ (\because (vii) \text{ より } a(-b) = -ab) \\ &= ab \ (\because (iii)) \end{aligned}$$

(ix)

$b \neq 0$ と仮定する.b^{-1} が存在し $bb^{-1} = 1$.

この時

$$\begin{aligned} a &= a1 \ (\because (R8)) \\ &= a(bb^{-1}) \ (\because bb^{-1} = 1) \\ &= ab(b^{-1}) \ (\because (R6)) \\ &= 0b^{-1} \\ &= 0 \ (\because (iv)) \end{aligned}$$

つまり $a = 0$ または $b = 0$

(x)

$$\begin{aligned} (-a)(-(a^{-1})) &= aa^{-1} \ (\because (viii)) \\ &= 1 \ (\because (R9)) \end{aligned}$$

(ii) と同様に (R9) を満たす a^{-1} は各 $a \in K, a \neq 0$ に対し唯一なので (以下これは暗黙の了解として使う).

$(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

(xi)

$$\begin{aligned} (ab)(b^{-1}a^{-1}) &= ((ab)b^{-1})a^{-1} \ (\because (R6)) \\ &= (a(bb^{-1}))a^{-1} \ (\because (R6) \text{ より } (ab)b^{-1} = a(bb^{-1})) \\ &= (a1)a^{-1} \ (\because (R9) \text{ より } bb^{-1} = 1) \\ &= aa^{-1} \ (\because (R8) \text{ より } a1 = a) \\ &= 1 \ (\because (R9)) \end{aligned}$$

より $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

問 2(i)

$\Rightarrow$

$a \leqq b$ と (R15) より $a + (-a) \leqq b + (-a)$

より $0 \leqq b - a$

$\Leftarrow$

$0 \leqq b - a$ と (R15) より $0 + a \leqq (b - a) + a$ より $a \leqq b$

(ii)

(i) より $a \leqq b \Leftrightarrow 0 \leqq b - a$

さらに (i) より $-b \leqq -a \Leftrightarrow 0 \leqq -a - (-b)$

以上より $-a - (-b) = b - a$ と合わせて $a \leqq b \Leftrightarrow -b \leqq -a$

(iii)

(i) と $a \leqq b$ より $b - a \geqq 0$

(i) と $c \leqq 0, 0 - c = -c$ より $-c \geqq 0$

より (R16) から $(b - a)(-c) \geqq 0$ で $(b - a)(-c) = ac - bc$ と (i) から $ac \geqq bc$

(iv)

$a^{-1} \leqq 0$ と仮定する.

$-a^{-1} \geqq 0$ で $a \geqq 0$ とあわせ (R16) から $a(-a^{-1}) \geqq 0$

より $-1 \geqq 0$ (ii) より $0 \geqq 1$ となり矛盾.

背理法から $a^{-1} > 0$

(v)

$a \leqq b$ と (R15) より $a + c \leqq b + c$

$c \leqq d$ と (R15) より $c + b \leqq d + b$

$b + c = c + b, b + d = d + b$ より $b + c \leqq b + d$

(R13) より $a + c \leqq b + d$

(vi)

(v) より $a + c \leqq b + d$ は言える.

$a + c \neq b + d$ を言えばいい.

$a + c = b + d$ と仮定する.

(R11) より $b + d \leqq a + c$

また $a \leqq b$ と (ii) より $-b \leqq -a$

(v) より $-b + (b + d) = d, -a + (a + c) = c$ と合わせて $d \leqq c$

$c < d$ に矛盾し背理法から $a + c \neq b + d$

以上より $a + c < b + d$

§2 実数列の極限

1)(i)

$N > |a|$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n > N$ の時 $|a_n| = |a_{n-1}|\frac{|a|}{n}$, $\frac{|a|}{n} < 1$ で

$$|a_n| < |a_{n-1}|$$

これを繰り返し用いると $n \geqq N$ で

$$|a_n| \leqq |a_N|$$

$\epsilon > 0$ に対し $n \geqq max(N+1, \frac{|aa_N|}{\epsilon}+1)$ とすると

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_{n-1}|\frac{|a|}{n} \\ &\leqq \frac{|aa_N|}{n} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

より

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(ii)

$\epsilon > 0$ に対し $\epsilon' = min(1, \epsilon)$ とする.

$0 \leqq 1 - \epsilon' < 1$ なので例 6 より $\lim_{n\to\infty}(1-\epsilon')^n = 0$

より $a > 0$ より $N \in \mathbb{N}$ が存在し

$$n \geqq N \Rightarrow (1-\epsilon')^n < a$$

より $n \geqq N$ の時 $-\epsilon \leqq -\epsilon' < \sqrt[n]{a} - 1$

また二項定理より $n \geqq 1$ で

$$(1+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \epsilon^k > n\epsilon$$

$M > \frac{a}{\epsilon}$ を満たすように $M \in \mathbb{N}$ を取ると

$n \geqq M$ で

$$a < n\epsilon < (1+\epsilon)^n$$

より $\sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$

$n \geqq max(N, M)$ の時 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$ で

$$a_n \to 1 \ (n \to \infty)$$

(iii)

$k = 2, \cdots, n$ で $\frac{k}{n} \leqq 1$ なので辺々掛け合わせて

$$\frac{n!}{n^{n-1}} \leqq 1$$

より $0 < a_n \leqq \frac{1}{n}$

また $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ なのではさみうちの原理から

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(iv)

二項定理より $n \geqq 2$ で

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k > \frac{n(n-1)}{2}$$

より $0 < a_n < \frac{2}{n-1}$

また $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{n-1} = 0$ なのではさみうちの原理から

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(v)

$\epsilon > 0$ に対し $N > \frac{1}{\epsilon^2}$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n \geqq N$ で

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

$a_n > 0$ も合わせて $n \geqq N$ で $|a_n| < \epsilon$ なので

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

2)

$-1 \leqq \cos(n!\pi x) \leqq 1$ だ.

$\cos(n!\pi x) = \pm 1$ の時 $(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$ なので $\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

$-1 < \cos(n!\pi x) < 1$ の時 $0 \leqq (\cos(n!\pi x))^2 < 1$ なので例 6 より $\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

$\cos(n!\pi x) = \pm 1 \Leftrightarrow n!x \in \mathbb{Z}$ だ.

x が有理数の時 $x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ とおけ $n \geqq q$ の時

$$n!x = n \cdots (q+1) \cdot (q-1) \cdots 1 \cdot p \in \mathbb{Z}$$

より $n \geqq q$ で $\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

より $\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}) = 1$

x が無理数の時

$n!x$ が整数と仮定する.

$x = \frac{n!x}{n!}$ で分母と分子が整数なので x が有理数となり矛盾.

より $n!x$ は整数でなく $\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

より $\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}) = 0$

以上より

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数} \\ 0 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

3)

$\epsilon > 0$ とする.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ なので $n \geqq N'$ なら $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ となる $N' \in \mathbb{N}$ が存在.

$N = max(1, N')$ とする.

$n \geqq max(N, \frac{2}{\epsilon} |\sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a)|)$ の時

$$|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - a| \leqq \frac{1}{n} |\sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a)| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n} |a_k - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-N+1}{2n}\epsilon < \epsilon$$

より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

4)

$a_k\neq 0$ なので $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}$

より $a_k>0$ に注意し $\log a_n=\log a_1+\log\frac{a_2}{a_1}+\log\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\log\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$n\in\mathbb{N}$ に対し $a_n>0$ なので $b_n=\log\frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおける.

$$\log\sqrt[n]{a_n}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}-\frac{b_n}{n}+\frac{\log a_1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$ と $\log x$ が連続なので $\lim_{n\to\infty}b_n=\log a$

より 3) より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=\log a$

また $n\geqq N$ で $|b_n-\log a|<1$ となる $N\in\mathbb{N}$ が存在.

$n\geqq N$ で $\frac{\log a-1}{n}\leqq\frac{b_n}{n}\leqq\frac{\log a+1}{n}$ で $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log a-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log a+1}{n}=0$ なのではさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=0$

さらに $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log a_1}{n}=0$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{a_n}=\log a$$

e^x は連続なので $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{\log a}=a$

5)

$H=A\cup\{0\}\cup\{1\}\cup\cdots\cup\{m-1\}$ とする.

H が継承的であることを示す.

$\{0\}\subset H$ なので $0\in H$

$x\in H$ とする

$x=0,\cdots,m-2$ の時 $\{x+1\}\subset H$ なので $x+1\in H$

$x=m-1$ の時イ) より $m\in A$ で $A\subset H$ なので $x+1=m\in H$

$x\in A$ の時イ) より $x\geqq m$

$x\in A, x\geqq m$ なのでロ) より $x+1\in A$ で $A\subset H$ なので $x+1\in H$

以上より H は継承的.

より $\mathbb{N}\subset H$

$n\in\mathbb{N}$ で $n\geqq m$ とする.

$\mathbb{N}\subset H$ より $n\in H$.

また $n\geqq m$ なので $n\neq 0,1,\cdots,m-1$ で $n\notin\{0\}\cup\{1\}\cup\cdots\cup\{m-1\}$

より $n\in A$ で $\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}\subset A$

次に $n\in A$ とする.

$A\subset\mathbb{N}$ なので $n\in\mathbb{N}$

イ) より $n\geqq m$

より $n\in\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$ で $A\subset\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$

以上より $A=\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$

6)

$n\in\mathbb{N}$ に対し $A_n=\{x\in\mathbb{R}|x+n\in\mathbb{N}\}$ とする.

A_n が継承的であることを示す.
$n \in \mathbb{N}$ なので $0+n \in \mathbb{N}$ で $0 \in A_n$
$x \in A_n$ とする.
$x+n \in \mathbb{N}$ で $\mathbb{N}$ が継承的なので $x+1+n \in \mathbb{N}$
より $x+1 \in A_n$
以上より A_n は継承的で $\mathbb{N} \subset A_n$
$m \in \mathbb{N}$ なら $m \in A_n$ で $m+n \in \mathbb{N}$
$n \in \mathbb{N}$ に対し $B_n = \{x \in \mathbb{R} | xn \in \mathbb{N}\}$ とする.
B_n が継承的であることを示す.
$0n = 0 \in \mathbb{N}$ なので $0 \in B_n$
$x \in B_n$ とする.
$xn, n \in \mathbb{N}$ なので上の結果より $xn + n = (x+1)n \in \mathbb{N}$
より $x+1 \in B_n$
以上より B_n は継承的で $\mathbb{N} \subset B_n$
$m \in \mathbb{N}$ なら $m \in B_n$ で $mn \in \mathbb{N}$
$C = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{N} | x-1 \in \mathbb{N}\}$ とする.
C が継承的であることを示す.
$\{0\} \subset C$ より $0 \in C$
$x \in C$ とする.
$x \in \{0\}, x \in \{x \in \mathbb{N} | x-1 \in \mathbb{N}\}$ いずれの場合も $x \in \mathbb{N}$
$\mathbb{N}$ は継承的なので $x+1 \in \mathbb{N}$
また $x+1-1 = x \in \mathbb{N}$ なので $x+1 \in C$
以上より C は継承的で $\mathbb{N} \subset C$
$m \in \mathbb{N}$ に対し $D_m = \{x \in \mathbb{N} | m < x$ または $m - x \in \mathbb{N}\}$ とする.
D_m が継承的であることを示す.
$m \in \mathbb{N}$ なので $m - 0 \in \mathbb{N}$ で $0 \in D_m$
$x \in D_m$ とする.
$m \leqq x$ の時 $m < x+1$ なので $x+1 \in D_m$
$m > x$ の時 $m - x \in \mathbb{N} \subset C$
さらに $m - x \neq 0$ なので $m - x - 1 \in \mathbb{N}$
より $x+1 \in D_m$
いずれの場合も $x+1 \in D_m$ で $0 \in D_m$ と合わせて D_m は継承的で $\mathbb{N} \subset D_m$
より $n \in \mathbb{N}, m \geqq n$ なら $m - n \in \mathbb{N}$
7)
$\mathbb{R}_+$ は継承的なので $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$ で $n \in \mathbb{N}$ なら $n \geqq 0$ なことに注意する.
$n \in \mathbb{N}$ に対して $E_n = \{x \in \mathbb{N} | x \leqq n$ または $n+1 \leqq x\}$ とする.
また $F = \{n \in \mathbb{N} | \mathbb{N} \subset E_n\}$ とする.
F が継承的であることを示したい.
まず E_0 が継承的なことを示す.
$0 \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq 0$ より $0 \in E_0$

$x \in E_0$ とする.$x \in \mathbb{N}$ で $x+1 \in \mathbb{N}$

また $x \geqq 0$ なので $1 \leqq x+1$ で $x+1 \in E_0$

より E_0 は継承的で $0 \in F$

次に $n \in F$ を仮定して $n+1 \in F$ を示す.

$n \in F \subset \mathbb{N}$ なので $n \geqq 0$ で $0 \leqq n+1$ で $0 \in E_{n+1}$

$x \in E_{n+1}$ とする.$x \in \mathbb{N} \subset E_n$ なので $x \leqq n$ または $n+1 \leqq x$

より $x+1 \leqq n+1$ または $n+2 \leqq x+1$

より $x+1 \in E_{n+1}$

以上より E_{n+1} は継承的で $\mathbb{N} \subset E_{n+1}$

より $n+1 \in F$

以上より F は継承的で $\mathbb{N} \subset F$

より $n \in \mathbb{N}$ なら $\mathbb{N} \subset \{x \in \mathbb{N} | x \leqq n$ または $n+1 \leqq x\}$ で

$n < k < n+1$ となる自然数は存在しない.

§3 実数の連続性

1)(i)

$$a_n = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+\frac{1}{n}) \cdot (2+\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+0) \cdot (2+0) = \frac{1}{3}$$

(ii)

$a \leqq 1$ のとき $M(\in \mathbb{R})$ に対し $N > \sqrt{max(0, M)}$ を満たす $N(\in \mathbb{N})$ が存在.

$n \geqq N$ で

$$a_n = \frac{n^2}{a^n} \geqq \frac{n^2}{1^n} = n^2 \geqq M$$

より $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$a > 1$ のとき二項定理より $n \geqq 3$ で

$$a^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (a-1)^k \cdot 1^{n-k} > \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(a-1)^3$$

より

$$\frac{n^2}{a^n} < \frac{6}{(1-\frac{1}{n})(1-2\cdot\frac{1}{n})(a-1)^3} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{6}{(1-0)(1-2\cdot 0)(a-1)^3} \cdot 0 = 0$$

$a_n > 0$ と合わせはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

以上より $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & (a \leqq 1) \\ 0 & (a > 1) \end{cases}$

(iii)

$n \geqq 2$ のとき $\sqrt[n]{n} > 1$ で二項定理より

$$n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (\sqrt[n]{n}-1)^k \cdot 1^{n-k} > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

より

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$\epsilon>0$ に対し $N>\frac{2}{\epsilon^2}+1$ を満たす $N\in\mathbb{N}$ が存在.

$n\geqq max(N,2)$ で $|\sqrt[n]{n}-1|<\epsilon$

つまり $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

(iv)

2) より $e>1$ で $n\geqq k+1$ で二項定理より

$$e^n=\sum_{l=0}^{n}{}_nC_l(e-1)^l\cdot 1^{n-l}>{}_nC_{k+1}(e-1)^{k+1}>\frac{(n-k)^{k+1}}{(k+1)!}\cdot(e-1)^{k+1}$$

より

$$a_n<(\frac{1}{1-\frac{k}{n}})^k\cdot\frac{(k+1)!}{(e-1)^{k+1}}\frac{1}{n-k}\xrightarrow[n\to\infty]{}(\frac{1}{1-0})^k\cdot\frac{(k+1)!}{(e-1)^{k+1}}\cdot 0=0$$

$a_n>0$ と合わせはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(v)

$n\geqq 2$ のとき 2) の e を用いて

$$a_n=(1-\frac{1}{n^2})^n=(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}})^n=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{((1+\frac{1}{n-1})^{n-1})^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{e}{e^1}=1$$

(vi)

$0<c<1$ のとき

$$a_n<\frac{1}{c^{-n}}=c^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$a_n>0$ と合わせはさみうちの定理から $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$c=1$ のとき $a_n=\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$

$c>1$ のとき $0<\frac{1}{c}<1$ で $a_n=\frac{1}{(\frac{1}{c})^{-n}+(\frac{1}{c})^n}$ なので $0<c<1$ のときの結果より $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

以上より $\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\frac{1}{2} & c=1\\ 0 & c\neq 1\end{cases}$

(vii)

$b_n=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}$ とする.

$a_n>0,b_n>0$ なので両方下に有界.

$\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}<1$ より $a_{n+1}<a_n$

$\frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}<1$ より $b_{n+1}<b_n$

より a_n,b_n は両方単調減少で収束する.

それぞれ a,b に収束するとすると $a\geqq 0,b\geqq 0$

$n\in\mathbb{N}-\{0\}$ に対し $(2n)^2>(2n)^2-1\Leftrightarrow\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$ なので

$n=1,\cdots,k$ で掛けて $a_k<b_k$ より $a\leqq b$

また $a_nb_n=\frac{1}{2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ なので $ab=0$

$0\leqq a^2\leqq ab=0$ より $a=0$ つまり $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

2)

二項定理より

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\frac{1}{n})^k, a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k$$

$l = 0, \cdots, k-1$ に対し $n(n+1) - nl \geqq n(n+1) - (n+1)l \Leftrightarrow \frac{n+1-l}{n+1} \geqq \frac{n-l}{n}$

なので辺々掛けて $\frac{1}{k!}$ で割り ${}_nC_k(\frac{1}{n})^k \leqq {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k$ より

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\frac{1}{n})^k \leqq \sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k < \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k = a_{n+1}$$

より a_n は単調増加.

また ${}_nC_k \leqq \frac{n^k}{k!}$ なので

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\frac{1}{n})^k \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$n \geqq 3$ で $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqq 2.9 - \frac{1}{n!}$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 3$ のとき

(左辺) $= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} < 2.67 < 2.9 - \frac{1}{6} =$ (右辺) で成立.

ii) $n = l (\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する.$(l \geqq 3)$

$$\sum_{k=0}^{l+1} \frac{1}{k!} \leqq 2.9 - \frac{1}{l!} + \frac{1}{(l+1)!} = 2.9 - \frac{l}{(l+1)!} < 2.9 - \frac{1}{(l+1)!}$$

より $n = l + 1$ も成立.

i)ii) より示された.

より $a_n \leqq 2.9 - \frac{1}{n!} < 2.9$ で a_n は上に有界. より a_n は e に収束するとしてよく $e \leqq 2.9 < 3$

$n \geqq 2$ で $a_n \geqq a_2 = \frac{9}{4} > 2$ より $e > 2$

3)

$0 < a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 0$ のとき

$a_0 > 0$ だ. また $a < b$ より $a < \frac{a+b}{2} < b$ で $a_0 < a_1 < b_0$

より $\sqrt{a_1} < \sqrt{b_0}$ で $a_1 < \sqrt{a_1 b_0} = b_1 < b_0$

より成立.

ii) $n = k (\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する.

$0 < a_k \leqq a_{k+1} \leqq b_{k+1} \leqq b_k$

まず $a_{k+1} > 0$. また $a_{k+1} \leqq b_{k+1}$ より $a_{k+1} \leqq \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2} = a_{k+2} \leqq b_{k+1}$

より $\sqrt{a_{k+2}} \leqq \sqrt{b_{k+1}}$ で $a_{k+2} \leqq \sqrt{a_{k+2} b_{k+1}} = b_{k+2} \leqq b_{k+1}$

より $n = k + 1$ も成立.

i)ii) より示された.

より区間 $[a_n, b_n]$ は単調減少. また

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqq b_n - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

これを繰り返し用い $b_n - a_n \leqq \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b-a) = 0, b_n - a_n \geqq 0$ よりはさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$
以上より区間縮小法より a_n, b_n は収束し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$
この値を l とおける.
$0 < a < b$ より $\sin x \neq 0$ に注意する.
$a_n = \frac{\sin x \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} b, b_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} b$ を数学的帰納法で示す.
i) $n = 0$ のとき $a_0 = b\cos x = \frac{\sin x \cos \frac{x}{2^0}}{2^0 \sin \frac{x}{2^0}} b$
$b_0 = b = \frac{\sin x}{2^0 \sin \frac{x}{2^0}} b$
より成立する.
ii) $n = k(\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する.

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} b \cdot \frac{1 + \cos \frac{x}{2^k}}{2} = \frac{\sin x \cos^2 \frac{x}{2^{k+1}}}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} b = \frac{\sin x \cos^2 \frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}} \cos \frac{x}{2^{k+1}}} b = \frac{\sin x \cos \frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}}} b$$

$$b_{k+1} = \sqrt{a_{k+1} b_k} = \sqrt{\frac{\sin x \cos \frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}}} b \cdot \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} b} = \sqrt{\frac{\sin x \cos \frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}}} b \cdot \frac{\sin x}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}} \cos \frac{x}{2^{k+1}}} b} = \frac{\sin x}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}}} b$$

より $n = k + 1$ も成立.
i)ii) より示された.
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = 1$ で

$$b_n = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} b \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sin x}{x} b$$

より $l = \frac{\sin x}{x} b$
9)
$k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \cdots \frac{1}{k_n}}}$ を $[k_0; k_1, k_2, \cdots, k_n]$ と書く事にする.
$k_n > 0$ $(n > 0)$ を満たす整数列 $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}, (q'_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ を以下のように定義する.

$$p'_n = \begin{cases} k_0 & n = 1 \\ k_0 k_1 + 1 & n = 2 \\ p'_{n-1} k_{n-1} + p'_{n-2} & n \geqq 3 \end{cases}, \; q'_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ k_1 & n = 2 \\ q'_{n-1} k_{n-1} + q'_{n-2} & n \geqq 3 \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N} - \{0\}, t > 1$ に対し $[k_0; \cdots, k_n, t] = \frac{p'_{n+1} t + p'_n}{q'_{n+1} t + q'_n}$ を数学的帰納法で示す.
i) $n = 1$ の時

$$\begin{aligned} [k_0; k_1, t] &= k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{t}} \\ &= k_0 + \frac{t}{t k_1 + 1} \\ &= \frac{(k_0 k_1 + 1)t + k_0}{k_1 t + 1} \\ &= \frac{p'_2 t + p'_1}{q'_2 t + q'_1} \end{aligned}$$

ii) $n=m(\in\mathbb{N}-\{0\})$ の時に成立すると仮定する.

$$\begin{aligned}[k_0;\cdots,k_{m+1},t] &= [k_0;\cdots,k_m,k_{m+1}+\frac{1}{t}]\\ &= \frac{p'_{m+1}(k_{m+1}+\frac{1}{t})+p'_m}{q'_{m+1}(k_{m+1}+\frac{1}{t})+q'_m}\ (\because \text{帰納法の仮定})\\ &= \frac{(p'_{m+1}k_{m+1}+p'_m)t+p'_{m+1}}{(q'_{m+1}k_{m+1}+q'_m)t+q'_{m+1}}\\ &= \frac{p'_{m+2}t+p'_{m+1}}{q'_{m+2}t+q'_{m+1}}\end{aligned}$$

i)ii) より示された.

特に $t=k_{n+1}$ として $[k_0;\cdots,k_{n+1}]=\frac{p'_{n+1}k_{n+1}+p'_n}{q'_{n+1}k_{n+1}+q'_n}=\frac{p'_{n+2}}{q'_{n+2}}$

$[k_0;]=\frac{p'_1}{q'_1},[k_0;k_1]=\frac{p'_2}{q'_2}$ と合わせて

$[k_0;\cdots,k_n]=\frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}}$ が任意の自然数で成り立つ.

次に $p'_{n+2}q'_{n+1}-p'_{n+1}q'_{n+2}=(-1)^n$ を数学的帰納法で示す.

i) $n=0$ の時

$p'_2q'_1-p'_1q'_2=(k_0k_1+1)\cdot 1-k_0k_1=1=(-1)^0$ で成立.

ii) $n=m(\in\mathbb{N})$ の時に成立すると仮定する.

$$\begin{aligned}p'_{m+3}q'_{m+2}-p'_{m+2}q'_{m+3} &= (p'_{m+2}k_{m+2}+p'_{m+1})q'_{m+2}-p'_{m+2}(q'_{m+2}k_{m+2}+q'_{m+1})\\ &= -(p'_{m+2}q'_{m+1}-p'_{m+1}q'_{m+2})\\ &= (-1)^{m+1}\end{aligned}$$

で $n=m+1$ も成立.

i)ii) より示された.

より p'_n,q'_n の公約数は 1 の約数で 1. つまり p'_n,q'_n は互いに素.

$x\in\mathbb{R}$ に対し問題文のように変数を設定すると x の連分数展開は $k_0=[x]$ として $[k_0;\cdots,k_n,\cdots]$

上で示したことより $a_n=\frac{q'_n}{p'_n}$

p'_n,q'_n は互いに素なので $p_n=p'_n,q_n=q'_n$

より $x=\frac{p_nx_n+p_{n-1}}{q_nx_n+q_{n-1}}$

$q_n\geqq n-1$ を数学的帰納法で示す.

i) $n=1,2,3$ の時

$q_1=1\geqq 0$

k_1 は正整数なので $q_2=k_1\geqq 1$

k_2 は正整数なので $q_3=q_2k_2+q_1\geqq 1\cdot 1+1\geqq 2$

ii) $n=m,m+1,m+2(m\in\mathbb{N}-\{0\})$ の時に成立すると仮定する.

k_{m+2} は正整数なので $q_{m+3}=q_{m+2}k_{m+2}+q_{m+1}\geqq(m+1)\cdot 1+m=2m+1\geqq m+2$

で $n=m+3$ も成立.

i)ii) より示された.

$n > 1$ で

$$
\begin{aligned}
|x - a_n| &= |\frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}| \\
&= |\frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n(q_n x_n + q_{n-1})}| \\
&= |\frac{1}{q_n(q_n x_n + q_{n-1})}| \ (\because p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}) \\
&\leqq |\frac{1}{q_n^2}| \ (\because x_n > 1, q_{n-1} \geqq n-2 \geqq 0)
\end{aligned}
$$

$n = 0$ も

$$|x - a_1| = x - [x] \leq 1 = \frac{1}{q_1^2}$$

$\epsilon(>0)$ に対し $N \in \mathbb{N}$ が $N > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 1$ を満たすとする.

$n \geqq N$ なら $q_n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ で $|x - a_n| < \epsilon$

つまり $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x$