解析入門　解答

itleigns

2019 年 7 月 22 日

第 I 章実数と連続

§1 実数

問 1(i)

$a, b \in K$ が両方 (R3) を満たす 0 であると仮定する.

a が (R3) を満たす 0 なので $b + a = b$

b も (R3) を満たす 0 なので $a + b = a$

また (R1) より $a + b = b + a$

以上より $a = b$ で (R3) を満たす 0 は唯一

(ii)

$a \in K$ に対し $b, c \in K$ を両方 (R4) を満たす $-a$ であると仮定する.

$a + b = 0$ より (R3) と合わせ $c + (a + b) = c + 0 = c$

また $a + c = 0$

(R1) より $a + c = c + a$ なので $c + a = 0$

より

$$\begin{aligned} b &= b + 0\ (\because (R3)) \\ &= 0 + b\ (\because (R1)) \\ &= (c + a) + b \\ &= c + (a + b)\ (\because (R2)) \\ &= c \end{aligned}$$

つまり (R4) を満たす $-a$ は唯一

(iii)

$a \in K$ に対し (R4) より $a + (-a) = 0$

(R1) より $(-a) + a = a + (-a)$ で $(-a) + a = 0$ だ.

より (ii) から $-(-a) = a$

(iv)

$*$ 注意

$a \in K$ がある $b \in K$ に対して $b + a = b$ なら $a = 0$ だ.

なぜなら

$$\begin{aligned}0 &= b+(-b)\ (\because (R4))\\ &= (b+a)+(-b)\\ &= (a+b)+(-b)\ (\because (R1)\text{ より } b+a=a+b)\\ &= a+(b+(-b))\ (\because (R2))\\ &= a+0\ (\because (R4)\text{ より } b+(-b)=0)\\ &= a\ (\because (R3))\end{aligned}$$

以下これは暗黙の了解として使う.

$a \in K$ に対し

$$\begin{aligned}0a+0a &= (0+0)a\ (\because (R7))\\ &= 0a\ (\because (R3)\text{ より } 0+0=0)\end{aligned}$$

より $0a=0$

(v)

$a \in K$ に対し

$$\begin{aligned}a+(-1)a &= a1+(-1)a\ (\because (R8)\text{ より } a=a1)\\ &= 1a+(-1)a\ (\because (R5)\text{ より } a1=1a)\\ &= (1+(-1))a\ (\because (R7))\\ &= 0a\ (\because (R4)\text{ より } 1+(-1)=0)\\ &= 0\ (\because (iv))\end{aligned}$$

より (ii) から (以下 (ii) も暗黙の了解として使う)$(-1)a=-a$

(vi)

$$\begin{aligned}(-1)(-1) &= -(-1)\ (\because (v))\\ &= 1\ (\because (iii))\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}ab+a(-b) &= a(b+(-b))\ (\because (R7))\\ &= a0\ (\because (R4)\text{ より } b+(-b)=0)\\ &= 0a\ (\because (R5))\\ &= 0\ (\because (iv))\end{aligned}$$

より $a(-b)=-ab$

$$\begin{aligned}ab+(-a)b &= (a+(-a))b \ (\because (R7))\\ &= 0b \ (\because (R4) \text{ より } a+(-a)=0)\\ &= 0 \ (\because (iv))\end{aligned}$$

より $(-a)b=-ab$

(viii)

$$\begin{aligned}(-a)(-b) &= -a(-b) \ (\because (vii))\\ &= -(-ab) \ (\because (vii) \text{ より } a(-b)=-ab)\\ &= ab \ (\because (iii))\end{aligned}$$

(ix)

$b \neq 0$ と仮定する.b^{-1} が存在し $bb^{-1}=1$.

このとき

$$\begin{aligned}a &= a1 \ (\because (R8))\\ &= a(bb^{-1}) \ (\because bb^{-1}=1)\\ &= ab(b^{-1}) \ (\because (R6))\\ &= 0b^{-1}\\ &= 0 \ (\because (iv))\end{aligned}$$

つまり $a=0$ または $b=0$

(x)

$$\begin{aligned}(-a)(-(a^{-1})) &= aa^{-1} \ (\because (viii))\\ &= 1 \ (\because (R9))\end{aligned}$$

(ii) と同様に (R9) を満たす a^{-1} は各 $a \in K, a \neq 0$ に対し唯一なので (以下これは暗黙の了解として使う).

$(-a)^{-1}=-(a^{-1})$

(xi)

$$\begin{aligned}(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= ((ab)b^{-1})a^{-1} \ (\because (R6))\\ &= (a(bb^{-1}))a^{-1} \ (\because (R6) \text{ より } (ab)b^{-1}=a(bb^{-1}))\\ &= (a1)a^{-1} \ (\because (R9) \text{ より } bb^{-1}=1)\\ &= aa^{-1} \ (\because (R8) \text{ より } a1=a)\\ &= 1 \ (\because (R9))\end{aligned}$$

より $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

問 2(i)

$\Rightarrow$

$a \leqq b$ と (R15) より $a + (-a) \leqq b + (-a)$

より $0 \leqq b - a$

$\Leftarrow$

$0 \leqq b - a$ と (R15) より $0 + a \leqq (b - a) + a$ より $a \leqq b$

(ii)

(i) より $a \leqq b \Leftrightarrow 0 \leqq b - a$

さらに (i) より $-b \leqq -a \Leftrightarrow 0 \leqq -a - (-b)$

以上より $-a - (-b) = b - a$ と合わせて $a \leqq b \Leftrightarrow -b \leqq -a$

(iii)

(i) と $a \leqq b$ より $b - a \geqq 0$

(i) と $c \leqq 0, 0 - c = -c$ より $-c \geqq 0$

より (R16) から $(b - a)(-c) \geqq 0$ で $(b - a)(-c) = ac - bc$ と (i) から $ac \geqq bc$

(iv)

$a^{-1} \leqq 0$ と仮定する.

$-a^{-1} \geqq 0$ で $a \geqq 0$ とあわせ (R16) から $a(-a^{-1}) \geqq 0$

より $-1 \geqq 0$ (ii) より $0 \geqq 1$ となり矛盾.

背理法から $a^{-1} > 0$

(v)

$a \leqq b$ と (R15) より $a + c \leqq b + c$

$c \leqq d$ と (R15) より $c + b \leqq d + b$

$b + c = c + b, b + d = d + b$ より $b + c \leqq b + d$

(R13) より $a + c \leqq b + d$

(vi)

(v) より $a + c \leqq b + d$ は言える.

$a + c \neq b + d$ を言えばいい.

$a + c = b + d$ と仮定する.

(R11) より $b + d \leqq a + c$

また $a \leqq b$ と (ii) より $-b \leqq -a$

(v) より $-b + (b + d) = d, -a + (a + c) = c$ と合わせて $d \leqq c$

$c < d$ に矛盾し背理法から $a + c \neq b + d$

以上より $a + c < b + d$

§2 実数列の極限

1)(i)

$N > |a|$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n > N$ のとき $|a_n| = |a_{n-1}|\frac{|a|}{n}$, $\frac{|a|}{n} < 1$ で

$$|a_n| < |a_{n-1}|$$

これを繰り返し用いると $n \geqq N$ で

$$|a_n| \leqq |a_N|$$

$\epsilon > 0$ に対し $n \geqq max(N+1, \frac{|aa_N|}{\epsilon}+1)$ とすると

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_{n-1}|\frac{|a|}{n} \\ &\leqq \frac{|aa_N|}{n} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

より

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(ii)

$\epsilon > 0$ に対し $\epsilon' = min(1, \epsilon)$ とする.

$0 \leqq 1 - \epsilon' < 1$ なので例 6 より $\lim_{n\to\infty}(1-\epsilon')^n = 0$

より $a > 0$ より $N \in \mathbb{N}$ が存在し

$$n \geqq N \Rightarrow (1-\epsilon')^n < a$$

より $n \geqq N$ のとき $-\epsilon \leqq -\epsilon' < \sqrt[n]{a} - 1$

また二項定理より $n \geqq 1$ で

$$(1+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \epsilon^k > n\epsilon$$

$M > \frac{a}{\epsilon}$ を満たすように $M \in \mathbb{N}$ を取ると

$n \geqq M$ で

$$a < n\epsilon < (1+\epsilon)^n$$

より $\sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$

$n \geqq max(N, M)$ のとき $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$ で

$$a_n \to 1 \ (n \to \infty)$$

(iii)

$k = 2, \cdots, n$ で $\frac{k}{n} \leqq 1$ なので辺々掛け合わせて

$$\frac{n!}{n^{n-1}} \leqq 1$$

より $0 < a_n \leqq \frac{1}{n}$

また $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ なのではさみうちの原理から

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(iv)

二項定理より $n \geqq 2$ で

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k > \frac{n(n-1)}{2}$$

より $0 < a_n < \frac{2}{n-1}$

また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0$ なのではさみうちの原理から

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(v)

$\epsilon > 0$ に対し $N > \frac{1}{\epsilon^2}$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n \geqq N$ で

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

$a_n > 0$ も合わせて $n \geqq N$ で $|a_n| < \epsilon$ なので

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

2)

$-1 \leqq \cos(n!\pi x) \leqq 1$ だ.

$\cos(n!\pi x) = \pm 1$ のとき $(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$ なので $\displaystyle\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

$-1 < \cos(n!\pi x) < 1$ のとき $0 \leqq (\cos(n!\pi x))^2 < 1$ なので例 6 より $\displaystyle\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

$\cos(n!\pi x) = \pm 1 \Leftrightarrow n!x \in \mathbb{Z}$ だ.

x が有理数のとき $x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ とおけ $n \geqq q$ のとき

$$n!x = n \cdots (q+1) \cdot (q-1) \cdots 1 \cdot p \in \mathbb{Z}$$

より $n \geqq q$ で $\displaystyle\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}) = 1$

x が無理数のとき

$n!x$ が整数と仮定する.

$x = \frac{n!x}{n!}$ で分母と分子が整数なので x が有理数となり矛盾.

より $n!x$ は整数でなく $\displaystyle\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}) = 0$

以上より

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数} \\ 0 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

3)

$\epsilon > 0$ とする.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ なので $n \geqq N'$ なら $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ となる $N' \in \mathbb{N}$ が存在.

$N = max(1, N')$ とする.

$n \geqq max(N, \frac{2}{\epsilon}|\sum_{k=1}^{N-1}(a_k - a)|)$ のとき

$$|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - a| \leqq \frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{N-1}(a_k - a)| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|a_k - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-N+1}{2n}\epsilon < \epsilon$$

より $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

4)

$a_k\neq 0$ なので $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}$

より $a_k>0$ に注意し $\log a_n=\log a_1+\log\frac{a_2}{a_1}+\log\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\log\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$n\in\mathbb{N}$ に対し $a_n>0$ なので $b_n=\log\frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおける.

$$\log\sqrt[n]{a_n}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}-\frac{b_n}{n}+\frac{\log a_1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$ と $\log x$ が連続なので $\lim_{n\to\infty}b_n=\log a$

より 3) より $\lim_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=\log a$

また $n\geqq N$ で $|b_n-\log a|<1$ となる $N\in\mathbb{N}$ が存在.

$n\geqq N$ で $\frac{\log a-1}{n}\leqq\frac{b_n}{n}\leqq\frac{\log a+1}{n}$ で $\lim_{n\to\infty}\frac{\log a-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log a+1}{n}=0$ なのではさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$

さらに $\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_1}{n}=0$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{a_n}=\log a$$

e^x は連続なので $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{\log a}=a$

5)

$H=A\cup\{0\}\cup\{1\}\cup\cdots\cup\{m-1\}$ とする.

H が継承的であることを示す.

$\{0\}\subset H$ なので $0\in H$

$x\in H$ とする

$x=0,\cdots,m-2$ のとき $\{x+1\}\subset H$ なので $x+1\in H$

$x=m-1$ のときイ) より $m\in A$ で $A\subset H$ なので $x+1=m\in H$

$x\in A$ のときイ) より $x\geqq m$

$x\in A, x\geqq m$ なのでロ) より $x+1\in A$ で $A\subset H$ なので $x+1\in H$

以上より H は継承的.

より $\mathbb{N}\subset H$

$n\in\mathbb{N}$ で $n\geqq m$ とする.

$\mathbb{N}\subset H$ より $n\in H$.

また $n\geqq m$ なので $n\neq 0,1,\cdots,m-1$ で $n\notin\{0\}\cup\{1\}\cup\cdots\cup\{m-1\}$

より $n\in A$ で $\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}\subset A$

次に $n\in A$ とする.

$A\subset\mathbb{N}$ なので $n\in\mathbb{N}$

イ) より $n\geqq m$

より $n\in\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$ で $A\subset\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$

以上より $A=\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$

6)

$n\in\mathbb{N}$ に対し $A_n=\{x\in\mathbb{R}|x+n\in\mathbb{N}\}$ とする.

A_n が継承的であることを示す.
$n \in \mathbb{N}$ なので $0 + n \in \mathbb{N}$ で $0 \in A_n$
$x \in A_n$ とする.
$x + n \in \mathbb{N}$ で $\mathbb{N}$ が継承的なので $x + 1 + n \in \mathbb{N}$
より $x + 1 \in A_n$
以上より A_n は継承的で $\mathbb{N} \subset A_n$
$m \in \mathbb{N}$ なら $m \in A_n$ で $m + n \in \mathbb{N}$
$n \in \mathbb{N}$ に対し $B_n = \{x \in \mathbb{R} | xn \in \mathbb{N}\}$ とする.
B_n が継承的であることを示す.
$0n = 0 \in \mathbb{N}$ なので $0 \in B_n$
$x \in B_n$ とする.
$xn, n \in \mathbb{N}$ なので上の結果より $xn + n = (x + 1)n \in \mathbb{N}$
より $x + 1 \in B_n$
以上より B_n は継承的で $\mathbb{N} \subset B_n$
$m \in \mathbb{N}$ なら $m \in B_n$ で $mn \in \mathbb{N}$
$C = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{N} | x - 1 \in \mathbb{N}\}$ とする.
C が継承的であることを示す.
$\{0\} \subset C$ より $0 \in C$
$x \in C$ とする.
$x \in \{0\}, x \in \{x \in \mathbb{N} | x - 1 \in \mathbb{N}\}$ いずれの場合も $x \in \mathbb{N}$
$\mathbb{N}$ は継承的なので $x + 1 \in \mathbb{N}$
また $x + 1 - 1 = x \in \mathbb{N}$ なので $x + 1 \in C$
以上より C は継承的で $\mathbb{N} \subset C$
$m \in \mathbb{N}$ に対し $D_m = \{x \in \mathbb{N} | m < x$ または $m - x \in \mathbb{N}\}$ とする.
D_m が継承的であることを示す.
$m \in \mathbb{N}$ なので $m - 0 \in \mathbb{N}$ で $0 \in D_m$
$x \in D_m$ とする.
$m \leqq x$ のとき $m < x + 1$ なので $x + 1 \in D_m$
$m > x$ のとき $m - x \in \mathbb{N} \subset C$
さらに $m - x \neq 0$ なので $m - x - 1 \in \mathbb{N}$
より $x + 1 \in D_m$
いずれの場合も $x + 1 \in D_m$ で $0 \in D_m$ と合わせて D_m は継承的で $\mathbb{N} \subset D_m$
より $n \in \mathbb{N}, m \geqq n$ なら $m - n \in \mathbb{N}$
7)
$\mathbb{R}_+$ は継承的なので $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$ で $n \in \mathbb{N}$ なら $n \geqq 0$ なことに注意する.
$n \in \mathbb{N}$ に対して $E_n = \{x \in \mathbb{N} | x \leqq n$ または $n + 1 \leqq x\}$ とする.
また $F = \{n \in \mathbb{N} | \mathbb{N} \subset E_n\}$ とする.
F が継承的であることを示したい.
まず E_0 が継承的なことを示す.
$0 \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq 0$ より $0 \in E_0$

$x \in E_0$ とする.$x \in \mathbb{N}$ で $x+1 \in \mathbb{N}$

また $x \geqq 0$ なので $1 \leqq x+1$ で $x+1 \in E_0$

より E_0 は継承的で $0 \in F$

次に $n \in F$ を仮定して $n+1 \in F$ を示す.

$n \in F \subset \mathbb{N}$ なので $n \geqq 0$ で $0 \leqq n+1$ で $0 \in E_{n+1}$

$x \in E_{n+1}$ とする.$x \in \mathbb{N} \subset E_n$ なので $x \leqq n$ または $n+1 \leqq x$

より $x+1 \leqq n+1$ または $n+2 \leqq x+1$

より $x+1 \in E_{n+1}$

以上より E_{n+1} は継承的で $\mathbb{N} \subset E_{n+1}$

より $n+1 \in F$

以上より F は継承的で $\mathbb{N} \subset F$

より $n \in \mathbb{N}$ なら $\mathbb{N} \subset \{x \in \mathbb{N} | x \leqq n$ または $n+1 \leqq x\}$ で

$n < k < n+1$ となる自然数は存在しない.

§3 実数の連続性

1)(i)

$$a_n = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+\frac{1}{n}) \cdot (2+\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+0) \cdot (2+0) = \frac{1}{3}$$

(ii)

$a \leqq 1$ のとき $M(\in \mathbb{R})$ に対し $N > \sqrt{max(0, M)}$ を満たす $N(\in \mathbb{N})$ が存在.

$n \geqq N$ で

$$a_n = \frac{n^2}{a^n} \geqq \frac{n^2}{1^n} = n^2 \geqq M$$

より $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$a > 1$ のとき二項定理より $n \geqq 3$ で

$$a^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (a-1)^k \cdot 1^{n-k} > \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)(a-1)^3$$

より

$$\frac{n^2}{a^n} < \frac{6}{(1-\frac{1}{n})(1-2\cdot\frac{1}{n})(a-1)^3} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{6}{(1-0)(1-2\cdot 0)(a-1)^3} \cdot 0 = 0$$

$a_n > 0$ と合わせはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

以上より $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & (a \leqq 1) \\ 0 & (a > 1) \end{cases}$

(iii)

$n \geqq 2$ のとき $\sqrt[n]{n} > 1$ で二項定理より

$$n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (\sqrt[n]{n}-1)^k \cdot 1^{n-k} > \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n}-1)^2$$

より

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$\epsilon>0$ に対し $N>\frac{2}{\epsilon^2}+1$ を満たす $N\in\mathbb{N}$ が存在.

$n\geqq max(N,2)$ で $|\sqrt[n]{n}-1|<\epsilon$

つまり $\lim_{n\to\infty} a_n=1$

(iv)

2) より $e>1$ で $n\geqq k+1$ で二項定理より

$$e^n=\sum_{l=0}^{n}{}_nC_l(e-1)^l\cdot 1^{n-l}>{}_nC_{k+1}(e-1)^{k+1}>\frac{(n-k)^{k+1}}{(k+1)!}\cdot(e-1)^{k+1}$$

より

$$a_n<(\frac{1}{1-\frac{k}{n}})^k\cdot\frac{(k+1)!}{(e-1)^{k+1}}\frac{1}{n-k}\xrightarrow[n\to\infty]{}(\frac{1}{1-0})^k\cdot\frac{(k+1)!}{(e-1)^{k+1}}\cdot 0=0$$

$a_n>0$ と合わせはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(v)

$n\geqq 2$ のとき 2) の e を用いて

$$a_n=(1-\frac{1}{n^2})^n=(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}})^n=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{((1+\frac{1}{n-1})^{n-1})^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{e}{e^1}=1$$

(vi)

$0<c<1$ のとき

$$a_n<\frac{1}{c^{-n}}=c^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$a_n>0$ と合わせはさみうちの定理から $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$c=1$ のとき $a_n=\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$

$c>1$ のとき $0<\frac{1}{c}<1$ で $a_n=\frac{1}{(\frac{1}{c})^{-n}+(\frac{1}{c})^n}$ なので $0<c<1$ のときの結果より $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

以上より $\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\frac{1}{2} & c=1\\ 0 & c\neq 1\end{cases}$

(vii)

$b_n=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}$ とする.

$a_n>0, b_n>0$ なので両方下に有界.

$\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}<1$ より $a_{n+1}<a_n$

$\frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}<1$ より $b_{n+1}<b_n$

より a_n, b_n は両方単調減少で収束する.

それぞれ a,b に収束するとすると $a\geqq 0, b\geqq 0$

$n\in\mathbb{N}-\{0\}$ に対し $(2n)^2>(2n)^2-1\Leftrightarrow\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$ なので

$n=1,\cdots,k$ で掛けて $a_k<b_k$ より $a\leqq b$

また $a_nb_n=\frac{1}{2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ なので $ab=0$

$0\leqq a^2\leqq ab=0$ より $a=0$ つまり $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

2)

二項定理より

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\frac{1}{n})^k, a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k$$

$l = 0, \cdots, k-1$ に対し $n(n+1) - nl \geqq n(n+1) - (n+1)l \Leftrightarrow \frac{n+1-l}{n+1} \geqq \frac{n-l}{n}$

なので辺々掛けて $\frac{1}{k!}$ で割り ${}_nC_k(\frac{1}{n})^k \leqq {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k$ より

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\frac{1}{n})^k \leqq \sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k < \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k = a_{n+1}$$

より a_n は単調増加.

また ${}_nC_k \leqq \frac{n^k}{k!}$ なので

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\frac{1}{n})^k \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$n \geqq 3$ で $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqq 2.9 - \frac{1}{n!}$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 3$ のとき

(左辺) $= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} < 2.67 < 2.9 - \frac{1}{6} =$ (右辺) で成立.

ii) $n = l(\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する.($l \geqq 3$)

$$\sum_{k=0}^{l+1} \frac{1}{k!} \leqq 2.9 - \frac{1}{l!} + \frac{1}{(l+1)!} = 2.9 - \frac{l}{(l+1)!} < 2.9 - \frac{1}{(l+1)!}$$

より $n = l + 1$ も成立.

i)ii) より示された.

より $a_n \leqq 2.9 - \frac{1}{n!} < 2.9$ で a_n は上に有界. より a_n は e に収束するとしてよく $e \leqq 2.9 < 3$

$n \geqq 2$ で $a_n \geqq a_2 = \frac{9}{4} > 2$ より $e > 2$

3)

$0 < a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 0$ のとき

$a_0 > 0$ だ. また $a < b$ より $a < \frac{a+b}{2} < b$ で $a_0 < a_1 < b_0$

より $\sqrt{a_1} < \sqrt{b_0}$ で $a_1 < \sqrt{a_1 b_0} = b_1 < b_0$

より成立.

ii) $n = k(\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する.

$0 < a_k \leqq a_{k+1} \leqq b_{k+1} \leqq b_k$

まず $a_{k+1} > 0$. また $a_{k+1} \leqq b_{k+1}$ より $a_{k+1} \leqq \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2} = a_{k+2} \leqq b_{k+1}$

より $\sqrt{a_{k+2}} \leqq \sqrt{b_{k+1}}$ で $a_{k+2} \leqq \sqrt{a_{k+2} b_{k+1}} = b_{k+2} \leqq b_{k+1}$

より $n = k + 1$ も成立.

i)ii) より示された.

より区間 $[a_n, b_n]$ は単調減少. また

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqq b_n - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

これを繰り返し用い $b_n-a_n \leqq \frac{1}{2^n}(b_0-a_0)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b-a)=0, b_n-a_n \geqq 0$ よりはさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n-a_n=0$

以上より区間縮小法より a_n, b_n は収束し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$ でこの値を l とおける.

$0<a<b$ より $0<x<\frac{\pi}{2}$ としてよい.

$a_n=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}b, b_n=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}b$ を数学的帰納法で示す.

i) $n=0$ のとき

$$a_0=b\cos x=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^0}}{2^0\sin\frac{x}{2^0}}b, b_0=b=\frac{\sin x}{2^0\sin\frac{x}{2^0}}b$$

より成立する.

ii) $n=k(\in\mathbb{N})$ で成立すると仮定する.

$$a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}=\frac{\sin x}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}b\cdot\frac{1+\cos\frac{x}{2^k}}{2}=\frac{\sin x\cos^2\frac{x}{2^{k+1}}}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}b=\frac{\sin x\cos^2\frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}\cos\frac{x}{2^{k+1}}}b=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}}b$$

$$b_{k+1}=\sqrt{a_{k+1}b_k}=\sqrt{\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}}b\cdot\frac{\sin x}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}b}=\sqrt{\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}}b\cdot\frac{\sin x}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}\cos\frac{x}{2^{k+1}}}b}=\frac{\sin x}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}}b$$

より $n=k+1$ も成立.

i)ii) より示された.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=1$ で

$$b_n=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}b\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\sin x}{x}b$$

より $l=\frac{\sin x}{x}b$

(おまけ)

$a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ のとき $x=\frac{\pi}{4}$

直径 1 の円の中心を O, この円に外接, 内接する正 2^{n+2} 角形の辺の 1 つをそれぞれ $AB, A'B'$ とする.

また $AB, A'B'$ の中点をそれぞれ M, M' とする.

$$\angle AOM=\angle A'OM'=\frac{2\pi}{2\cdot 2^{n+2}}=\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

$MO, A'O$ は円の半径で $\frac{1}{2}$

$$AM=MO\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}=\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}, A'M'=A'O\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

$AB=2AM, A'B'=2A'M'$ で 2^{n+2} 個合わせてそれぞれ $2^{n+2}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}, 2^{n+2}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$

逆数を取るとそれぞれ

$$\frac{1}{2^{n+2}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}b=a_n$$

$$\frac{1}{2^{n+2}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}b=b_n$$

また $l = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi}$

4)

$\mathbb{Q}$ から順序体 K への同型写像 f を探す.

$x \in \mathbb{N}$ に対し $f(x) = \begin{cases} 0_K & x = 0 \\ f(x-1) + 1_K & x \neq 0 \end{cases}$ とする.

$x, y \in \mathbb{N}$ に対し $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を y に関する数学的帰納法で示す.

i) $y = 0$ のとき

$$f(x+0) = f(x) = f(x) + 0_K = f(x) + f(0)$$

より成立.

ii) $y = k(\in \mathbb{N})$ のとき成立すると仮定する.

$$f(x+k+1) = f(x+1) + f(k) = f(x) + 1_K + f(k) = f(x) + f(k+1)$$

より $y = k+1$ のときも成立.

i)ii) より $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$x, y \in \mathbb{N}$ に対し $f(xy) = f(x)f(y)$ を y に関する数学的帰納法で示す.

i) $y = 0$ のとき

$$f(x0) = f(0) = 0_K = f(x)0_K = f(x)f(0)$$

より成立.

ii) $y = k(\in \mathbb{N})$ のとき成立すると仮定する.

$$f(x(k+1)) = f(xk) + f(x) = f(x)f(k) + f(x) = f(x)(f(k) + 1_K) = f(x)f(k+1)$$

より $y = k+1$ のときも成立.

i)ii) より $f(xy) = f(x)f(y)$

$x \in \mathbb{N} - \{0\}, y \in \mathbb{N}$ に対し $f(y) < f(x+y)$ を x に関する数学的帰納法で示す.

i) $x = 1$ のとき

$1_K > 0$ より

$f(y) < 1_K + f(y) = f(1) + f(y) = f(1+y)$ より成立.

ii) $x = k(\in \mathbb{N} - \{0\})$ のとき成立すると仮定する.

$1_K > 0$ より

$$f(y) < f(k+y) < 1_K + f(k+y) = f(1) + f(k+y) = f(k+1+y)$$

より $x = k+1$ のときも成立.

i)ii) より $f(y) < f(x+y)$

$x, y \in \mathbb{N}$ に対し $x < y$ なら $y - x \in \mathbb{N} - \{0\}$ で $f(x) < f(x+y-x) = f(y)$

$x = y$ なら $f(x) = f(y)$

$x > y$ なら $x < y$ のときと同様に $f(x) > f(y)$

より $x \leqq y \Leftrightarrow f(x) \leqq f(y)$

以上より f は自然数に対して演算を保存.

$x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ に対して $-x \in \mathbb{N}$ で $f(x) = -f(-x)$ と定義できる.

$x, y \in \mathbb{Z}$ に対し $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を示す.

$x \geqq 0, y \geqq 0$ は既に示した.

$x \geqq 0, y \leqq 0, x+y \geqq 0$ のとき $f(x) = f(x+y) + f(-y) = f(x+y) - f(y)$ より成立.

$x \geqq 0, y \leqq 0, x+y \leqq 0$ のとき $f(y) = -f(-y) = -(f(-x-y) + f(x)) = f(x+y) - f(x)$ より成立.

$x \leqq 0, y \geqq 0$ は $x \geqq 0, y \leqq 0$ のときと同様.

$x \leqq 0, y \leqq 0$ のとき $f(x) + f(y) = -(f(-x) + f(-y)) = -f(-x-y) = f(x+y)$ より成立.

より $f(x+y) = f(x) + f(y)$

次に $x, y \in \mathbb{Z}$ に対し $f(xy) = f(x)f(y)$ を示す.

$x \geqq 0, y \geqq 0$ は既に示した.

$x \geqq 0, y \leqq 0$ のとき $f(xy) = -f(x(-y)) = -(f(x)f(-y)) = f(x)f(y)$ より成立.

$x \leqq 0, y \geqq 0$ のとき $f(xy) = -f((-x)y) = -(f(-x)f(y)) = f(x)f(y)$ より成立.

$x \leqq 0, y \leqq 0$ のとき $f(xy) = f((-x)(-y)) = f(-x)f(-y) = f(x)f(y)$ より成立.

より $f(xy) = f(x)f(y)$

$x \in \mathbb{Z}, x \leqq 0$ とすると $0 \leqq -x$ より $f(0) \leqq f(-x) = -f(x)$ で $f(x) \leqq f(0) = 0_K$ に注意する.

$x, y \in \mathbb{Z}$ に対し $x \leqq y \Leftrightarrow f(x) \leqq f(y)$ を示す.

$x \geqq 0, y \geqq 0$ は既に示した.

$x \geqq 0, y \leqq 0$ のとき $y \leqq x, f(y) \leqq f(x)$ が常に成り立ち成立.

$x \leqq 0, y \geqq 0$ のとき $x \geqq 0, y \leqq 0$ のときと同様に成立.

$x \leqq 0, y \leqq 0$ のとき

$$f(x) \leqq f(y) \Leftrightarrow -f(x) \geqq -f(y) \Leftrightarrow f(-x) \geqq f(-y) \Leftrightarrow -x \geqq -y \Leftrightarrow x \leqq y$$

より成立.

より $x \leqq y \Leftrightarrow f(x) \leqq f(y)$

以上より f は整数に対して演算を保存.

$x \in \mathbb{Q}$ とすると $x = \frac{p}{q}$ とおける. $(q \in \mathbb{N} - \{0\}, p \in \mathbb{Z})$

$q > 0$ なので $f(q) \neq 0_K$ で $f(x) = \frac{f(p)}{f(q)}$ と定義できる.

$q, s \in \mathbb{N} - \{0\}, p, r \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \\
\Leftrightarrow & ps - qr = 0 \\
\Leftrightarrow & f(ps - qr) = 0_K \\
\Leftrightarrow & \frac{f(ps-qr)}{f(qs)} = 0_K \ (\because \frac{1_K}{f(qs)} \neq 0_K) \\
\Leftrightarrow & \frac{f(p)f(s) - f(q)f(r)}{f(q)f(s)} = 0_K \\
\Leftrightarrow & \frac{f(p)}{f(q)} = \frac{f(r)}{f(s)}
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ から f が well-defined なことが言え $\Rightarrow$ から f が単射なことが言える.

また $x \in \mathbb{Z}$ に対し $x = \frac{x}{1}$ で $\frac{f(x)}{f(1)} = \frac{f(x)}{1_K} = f(x)$ なので f の有理数での定義は整数での定義と矛盾しない.

$q,s\in\mathbb{N}-\{0\},p,r\in\mathbb{Z}$ に対し

$$\begin{aligned}
&f(\frac{p}{q}+\frac{r}{s})\\
=&f(\frac{ps+qr}{qs})\\
=&\frac{f(p)f(s)+f(q)f(r)}{f(q)f(s)}\\
=&\frac{f(p)}{f(q)}+\frac{f(r)}{f(s)}\\
=&f(\frac{p}{q})+f(\frac{r}{s})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s})\\
=&\frac{f(p)f(r)}{f(q)f(s)}\\
=&f(\frac{p}{q})f(\frac{r}{s})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{p}{q}\leqq\frac{r}{s}\\
\Leftrightarrow&ps-qr\leqq 0\\
\Leftrightarrow&f(ps-qr)\leqq 0_K\\
\Leftrightarrow&\frac{f(ps-qr)}{f(qs)}\leqq 0_K\ (\because\frac{1_K}{f(qs)}>0_K)\\
\Leftrightarrow&\frac{f(p)f(s)-f(q)f(r)}{f(q)f(s)}\leqq 0_K\\
\Leftrightarrow&\frac{f(p)}{f(q)}\leqq\frac{f(r)}{f(s)}
\end{aligned}$$

以上より f は有理数に対して演算を保存.

より f は $\mathbb{Q}$ から K への準同型写像.

f を $\mathbb{Q}$ から $f(\mathbb{Q})$ への関数に制限すると f の単射性から同型写像.

つまり $f(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ と同型.

9)

$k_0+\frac{1}{k_1+\frac{1}{k_2+\cdots\frac{1}{k_n}}}$ を $[k_0;k_1,k_2,\cdots,k_n]$ と書く事にする.

$k_n>0\ (n>0)$ を満たす整数列 $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}},(q'_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ を以下のように定義する.

$$p'_n=\begin{cases}k_0 & n=1\\ k_0k_1+1 & n=2\\ p'_{n-1}k_{n-1}+p'_{n-2} & n\geqq 3\end{cases},\ q'_n=\begin{cases}1 & n=1\\ k_1 & n=2\\ q'_{n-1}k_{n-1}+q'_{n-2} & n\geqq 3\end{cases}$$

$n\in\mathbb{N}-\{0\},t>1$ に対し $[k_0;\cdots,k_n,t]=\frac{p'_{n+1}t+p'_n}{q'_{n+1}t+q'_n}$ を数学的帰納法で示す.

i) $n=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
[k_0; k_1, t] &= k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{t}} \\
&= k_0 + \frac{t}{tk_1 + 1} \\
&= \frac{(k_0 k_1 + 1)t + k_0}{k_1 t + 1} \\
&= \frac{p'_2 t + p'_1}{q'_2 t + q'_1}
\end{aligned}
$$

ii) $n = m(\in \mathbb{N} - \{0\})$ のときに成立すると仮定する.

$$
\begin{aligned}
[k_0; \cdots, k_{m+1}, t] &= [k_0; \cdots, k_m, k_{m+1} + \frac{1}{t}] \\
&= \frac{p'_{m+1}(k_{m+1} + \frac{1}{t}) + p'_m}{q'_{m+1}(k_{m+1} + \frac{1}{t}) + q'_m} \ (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= \frac{(p'_{m+1}k_{m+1} + p'_m)t + p'_{m+1}}{(q'_{m+1}k_{m+1} + q'_m)t + q'_{m+1}} \\
&= \frac{p'_{m+2}t + p'_{m+1}}{q'_{m+2}t + q'_{m+1}}
\end{aligned}
$$

i)ii) より示された.

特に $t = k_{n+1}$ として $[k_0; \cdots, k_{n+1}] = \frac{p'_{n+1}k_{n+1} + p'_n}{q'_{n+1}k_{n+1} + q'_n} = \frac{p'_{n+2}}{q'_{n+2}}$

$[k_0;] = \frac{p'_1}{q'_1}, [k_0; k_1] = \frac{p'_2}{q'_2}$ と合わせて

$[k_0; \cdots, k_n] = \frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}}$ が任意の自然数で成り立つ.

次に $p'_{n+2}q'_{n+1} - p'_{n+1}q'_{n+2} = (-1)^n$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 0$ のとき

$p'_2 q'_1 - p'_1 q'_2 = (k_0 k_1 + 1) \cdot 1 - k_0 k_1 = 1 = (-1)^0$ で成立.

ii) $n = m(\in \mathbb{N})$ のときに成立すると仮定する.

$$
\begin{aligned}
p'_{m+3}q'_{m+2} - p'_{m+2}q'_{m+3} &= (p'_{m+2}k_{m+2} + p'_{m+1})q'_{m+2} - p'_{m+2}(q'_{m+2}k_{m+2} + q'_{m+1}) \\
&= -(p'_{m+2}q'_{m+1} - p'_{m+1}q'_{m+2}) \\
&= (-1)^{m+1}
\end{aligned}
$$

で $n = m + 1$ も成立.

i)ii) より示された.

より p'_n, q'_n の公約数は 1 の約数で 1. つまり p'_n, q'_n は互いに素.

$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ に対し問題文のように変数を設定すると x の連分数展開は $k_0 = [x]$ として $[k_0; \cdots, k_n, \cdots]$

上で示したことより $a_n = \frac{q'_n}{p'_n}$

p'_n, q'_n は互いに素なので $p_n = p'_n, q_n = q'_n$

より $x = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}}$

$q_n \geqq n - 1$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 1, 2, 3$ のとき

$q_1 = 1 \geqq 0$

k_1 は正整数なので $q_2 = k_1 \geqq 1$

k_2 は正整数なので $q_3 = q_2 k_2 + q_1 \geqq 1 \cdot 1 + 1 \geqq 2$

ii) $n = m, m+1, m+2 (m \in \mathbb{N} - \{0\})$ のときに成立すると仮定する.

k_{m+2} は正整数なので $q_{m+3} = q_{m+2} k_{m+2} + q_{m+1} \geqq (m+1) \cdot 1 + m = 2m+1 \geqq m+2$

で $n = m+3$ も成立.

i)ii) より示された.

$n > 1$ で

$$\begin{aligned}
|x - a_n| &= |\frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}| \\
&= |\frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n(q_n x_n + q_{n-1})}| \\
&= |\frac{1}{q_n(q_n x_n + q_{n-1})}| \ (\because p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}) \\
&\leqq |\frac{1}{q_n^2}| \ (\because x_n > 1, q_{n-1} \geqq n-2 \geqq 0)
\end{aligned}$$

$n = 0$ も

$$|x - a_1| = x - [x] \leq 1 = \frac{1}{q_1^2}$$

$\epsilon (> 0)$ に対し $N \in \mathbb{N}$ が $N > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 1$ を満たすとする.

$n \geqq N$ なら $q_n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ で $|x - a_n| \leqq \frac{1}{q_1^2} < \epsilon$

つまり $\lim_{n \to \infty} a_n = x$

(補足)

上の答案は無理数の連分数展開が無限に続くことを既知としている. その証明をここに書く.

$[k_0; k_1, k_2, \cdots, k_n]$ が有理数なことを数学的帰納法で示す. ただし k_i は $i = 0, \cdots, n$ で整数で $k_i > 0 \ (i > 0)$

i) $n = 0$ のとき

$k_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ で成立.

ii) $n = m (\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する.

$$[k_0; k_1, k_2, \cdots, k_{m+1}] = k_0 + \frac{1}{[k_1; k_2, \cdots, k_{m+1}]}$$

帰納法の仮定より $[k_1; k_2, \cdots, k_{m+1}] = \frac{q}{p} \ (p, q \in \mathbb{Z})$ とおけ $[k_0; k_1, k_2, \cdots, k_{m+1}] = \frac{k_0 q + p}{q}$ でこれは有理数.

より $n = m+1$ のときも成立.

i)ii) より示された.

つまり x の連分数展開が有限なら x は有理数.

対偶を取り無理数の連分数展開は無限.

(おまけ)

有理数の連分数展開が有限の証明

$p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} - \{0\}$ に対し $\frac{p}{q}$ の連分数展開が有限であることを q に関する数学的帰納法で示す.

i) $q = 1$ のとき

$\frac{p}{q} = p$ で連分数展開は $[p;]$ より成立.

ii) $q = 1, \cdots, m$ で成立すると仮定する.

p が $m+1$ の倍数のとき $\frac{p}{m+1} = [\frac{p}{m+1};]$

そうでないとき $p=(m+1)a+b$ とおける．$(a\in\mathbb{Z}, b=1,\cdots,m)$

$$\frac{p}{m+1}=a+\frac{1}{\frac{m+1}{b}}$$

帰納法の仮定から $\frac{m+1}{b}=[k_1;k_2,\cdots,k_n]$ とおける.

$\frac{p}{m+1}=[a;k_1,k_2,\cdots,k_n]$ で連分数展開は有限.

より $q=m+1$ も成立.

i)ii) より有理数の連分数展開が有限