

# 解析入門 解答

河村遼

2019 年 7 月 5 日

## 第 I 章実数と連続

### §1 実数

問 1(i)

$a, b \in K$  が両方 (R3) を満たす 0 であると仮定する.

$a$  が (R3) を満たす 0 なので  $b + a = b$

$b$  も (R3) を満たす 0 なので  $a + b = a$

また (R1) より  $a + b = b + a$

以上より  $a = b$  で (R3) を満たす 0 は唯一

(ii)

$a \in K$  に対し  $b, c \in K$  を両方 (R4) を満たす  $-a$  であると仮定する.

$a + b = 0$  より (R3) と合わせ  $c + (a + b) = c + 0 = c$

また  $a + c = 0$

(R1) より  $a + c = c + a$  なので  $c + a = 0$

より

$$\begin{aligned} b &= b + 0 \quad (\because (R3)) \\ &= 0 + b \quad (\because (R1)) \\ &= (c + a) + b \\ &= c + (a + b) \quad (\because (R2)) \\ &= c \end{aligned}$$

つまり (R4) を満たす  $-a$  は唯一

(iii)

$a \in K$  に対し (R4) より  $a + (-a) = 0$

(R1) より  $(-a) + a = a + (-a)$  で  $(-a) + a = 0$  だ.

より (ii) から  $-(-a) = a$

(iv)

\* 注意

$a \in K$  がある  $b \in K$  に対して  $b + a = b$  なら  $a = 0$  だ.

なぜなら

$$\begin{aligned}0 &= b + (-b) \quad (\because (R4)) \\&= (b + a) + (-b) \\&= (a + b) + (-b) \quad (\because (R1) \text{ より } b + a = a + b) \\&= a + (b + (-b)) \quad (\because (R2)) \\&= a + 0 \quad (\because (R4) \text{ より } b + (-b) = 0) \\&= a \quad (\because (R3))\end{aligned}$$

以下これは暗黙の了解として使う.

$a \in K$  に対し

$$\begin{aligned}0a + 0a &= (0 + 0)a \quad (\because (R7)) \\&= 0a \quad (\because (R3) \text{ より } 0 + 0 = 0)\end{aligned}$$

より  $0a = 0$

(v)

$a \in K$  に対し

$$\begin{aligned}a + (-1)a &= a1 + (-1)a \quad (\because (R8) \text{ より } a = a1) \\&= 1a + (-1)a \quad (\because (R5) \text{ より } a1 = 1a) \\&= (1 + (-1))a \quad (\because (R7)) \\&= 0a \quad (\because (R7)) \\&= 0 \quad (\because (iv))\end{aligned}$$

より (ii) から (以下 (ii) も暗黙の了解として使う)  $(-1)a = -a$

(vi)

$$\begin{aligned}(-1)(-1) &= -(-1) \quad (\because (v)) \\&= 1 \quad (\because (iii))\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}ab + a(-b) &= a(b + (-b)) \quad (\because (R7)) \\&= a0 \quad (\because (R4) \text{ より } b + (-b) = 0) \\&= 0a \quad (\because (R5)) \\&= 0 \quad (\because (iv))\end{aligned}$$

より  $a(-b) = -ab$

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= (a + (-a))b \quad (\because (R7)) \\ &= 0b \quad (\because (R4) \text{ より } a + (-a) = 0) \\ &= 0 \quad (\because (iv)) \end{aligned}$$

より  $(-a)b = -ab$   
(viii)

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -a(-b) \quad (\because (vii)) \\ &= -(-ab) \quad (\because (vii) \text{ より } a(-b) = -ab) \\ &= ab \quad (\because (iii)) \end{aligned}$$

(ix)

$b \neq 0$  と仮定する.  $b^{-1}$  が存在し  $bb^{-1} = 1$ .

この時

$$\begin{aligned} a &= a1 \quad (\because (R8)) \\ &= a(bb^{-1}) \quad (\because bb^{-1} = 1) \\ &= ab(b^{-1}) \quad (\because (R6)) \\ &= 0b^{-1} \\ &= 0 \quad (\because (iv)) \end{aligned}$$

つまり  $a = 0$  または  $b = 0$

(x)

$$\begin{aligned} (-a)(-a^{-1}) &= aa^{-1} \quad (\because (R8)) \\ &= 1 \quad (\because (R8)) \end{aligned}$$

(ii) と同様に (R9) を満たす  $a^{-1}$  は各  $a \in K, a \neq 0$  に対し唯一なので (以下これは暗黙の了解として使う).

$$(-a)^{-1} = -(a^{-1})$$

(xi)

$$\begin{aligned} (ab)(b^{-1}a^{-1}) &= ((ab)b^{-1})a^{-1} \quad (\because (R6)) \\ &= (a(bb^{-1}))a^{-1} \quad (\because (R6) \text{ より } (ab)b^{-1} = a(bb^{-1})) \\ &= (a1)a^{-1} \quad (\because (R9) \text{ より } bb^{-1} = 1) \\ &= aa^{-1} \quad (\because (R8) \text{ より } a1 = a) \\ &= 1 \quad (\because (R9)) \end{aligned}$$

より  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

問 2(i)

$\Rightarrow$

$a \leq b$  と (R15) より  $a + (-a) \leq b + (-a)$

より  $0 \leq b - a$

$\Leftarrow$

$0 \leq b - a$  と (R15) より  $0 + a \leq (b - a) + a$  より  $a \leq b$

(ii)

(i) より  $a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a$

さらに (i) より  $-b \leq -a \Leftrightarrow 0 \leq -a - (-b)$

以上より  $-a - (-b) = b - a$  と合わせて  $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$

(iii)

(i) と  $a \leq b$  より  $b - a \geq 0$

(i) と  $c \leq 0, -0 = 0$  より  $-c \geq 0$

より (R16) から  $(b - a)(-c) \geq 0$  で  $(b - a)(-c) = ac - bc$  と (i) から  $ac \geq bc$

(iv)

$a^{-1} \leq 0$  と仮定する.

$-a^{-1} \geq 0$  で  $a \geq 0$  とあわせ (R16) から  $a(-a^{-1}) \geq 0$

より  $-1 \geq 0$  (ii) より  $0 \geq 1$  となり矛盾.

背理法から  $a^{-1} > 0$

(v)

$a \leq b$  と (R15) より  $a + c \leq b + c$

$c \leq d$  と (R15) より  $c + b \leq d + b$

$b + c = c + b, b + d = d + b$  より  $b + c \leq b + d$

(R13) より  $a + c \leq b + d$

(vi)

(v) より  $a + c \leq b + d$  は言える.

$a + c \neq b + d$  を言えばいい.

$a + c = b + d$  と仮定する.

(R11) より  $b + d \leq a + c$

また  $a \leq b$  と (ii) より  $-b \leq -a$

(v) より  $-b + (b + d) = d, -a + (a + c) = c$  と合わせて  $d \leq c$

$c < d$  に矛盾し背理法から  $a + c \neq b + d$

以上より  $a + c < b + d$

## §2 実数列の極限

1)(i)

$N > |a|$  となる  $N \in \mathbb{N}$  が存在.

$n > N$  の時  $|a_n| = |a_{n-1}| \frac{|a|}{n}, \frac{|a|}{n} < 1$  で

$$|a_n| < |a_{n-1}|$$

これを繰り返し用いると  $n \geq N$  で

$$|a_n| \leq |a_N|$$

$\epsilon > 0$  に対し  $n \geq \max(N+1, \frac{|aa_N|}{\epsilon} + 1)$  とすると

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_{n-1}| \frac{|a|}{n} \\ &\leq \frac{|aa_N|}{n} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

より

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(ii)

$\epsilon > 0$  に対し  $\epsilon' = \min(1, \epsilon)$  とする.

$0 \leq 1 - \epsilon' < 1$  なので例 6 より  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \epsilon')^n = 0$

より  $a > 0$  より  $N \in \mathbb{N}$  が存在し

$$n \geq N \Rightarrow (1 - \epsilon')^n < a$$

より  $n \geq N$  の時  $-\epsilon \leq -\epsilon' < \sqrt[n]{a} - 1$

また二項定理より  $n \geq 1$  で

$$(1 + \epsilon)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \epsilon^k > n\epsilon$$

$M > \frac{a}{\epsilon}$  を満たすように  $M \in \mathbb{N}$  を取ると

$n \geq M$  で

$$a < n\epsilon < (1 + \epsilon)^n$$

より  $\sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$

$n \geq \max(N, M)$  の時  $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$  で

$$a_n \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(iii)

$k = 2, \dots, n$  で  $\frac{k}{n} \leq 1$  なので辺々掛け合わせて

$$\frac{n!}{n^{n-1}} \leq 1$$

より  $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$

また  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  なのではさみうちの原理から

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(iv)

二項定理より  $n \geq 2$  で

$$2^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k > \frac{n(n-1)}{2}$$

より  $0 < a_n < \frac{2}{n-1}$

また  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$  なのではさみうちの原理から

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(v)

$\epsilon > 0$  に対し  $N > \frac{1}{\epsilon^2}$  となる  $N \in \mathbb{N}$  が存在.

$n \geq N$  で

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

$a_n > 0$  も合わせて  $n \geq N$  で  $|a_n| < \epsilon$  なので

$$a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

2)

$-1 \leq \cos(n!\pi x) \leq 1$  だ.

$\cos(n!\pi x) = \pm 1$  の時  $(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$  なので  $\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

$-1 < \cos(n!\pi x) < 1$  の時  $0 \leq (\cos(n!\pi x))^2 < 1$  なので例 6 より  $\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

$\cos(n!\pi x) = \pm 1 \Leftrightarrow n!x \in \mathbb{Z}$  だ.

$x$  が有理数の時  $x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$  とおけ  $n \geq q$  の時

$$n!x = n \cdots (q+1) \cdot (q-1) \cdots 1 \cdot p \in \mathbb{Z}$$

より  $n \geq q$  で  $\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

より  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}) = 1$

$x$  が無理数の時

$n!x$  が整数と仮定する.

$x = \frac{n!x}{n!}$  で分母と分子が整数なので  $x$  が有理数となり矛盾.

より  $n!x$  は整数でなく  $\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

より  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}) = 0$

以上より

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数} \\ 0 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

3)

$\epsilon > 0$  とする.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  なので  $n \geq N'$  なら  $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$  となる  $N' \in \mathbb{N}$  が存在.

$N = \max(1, N')$  とする.

$n \geq \max(N, \frac{2}{\epsilon} |\sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a)|)$  の時

$$|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - a| \leq \frac{1}{n} |\sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a)| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |a_k - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n - N + 1}{2n} \epsilon < \epsilon$$

より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$

4)

$a_k \neq 0$  なので  $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}$

より  $a_k > 0$  に注意し  $\log a_n = \log a_1 + \log \frac{a_2}{a_1} + \log \frac{a_3}{a_2} + \dots + \log \frac{a_n}{a_{n-1}}$

$n \in \mathbb{N}$  に対し  $a_n > 0$  なので  $b_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$  とおける.

$$\log \sqrt[n]{a_n} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} - \frac{b_n}{n} + \frac{\log a_1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$  と  $\log x$  が連続なので  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log a$

より 3) より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} = \log a$

また  $n \geq N$  で  $|b_n - \log a| < 1$  となる  $N \in \mathbb{N}$  が存在.

$n \geq N$  で  $\frac{\log a - 1}{n} \leq \frac{b_n}{n} \leq \frac{\log a + 1}{n}$  で  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a - 1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a + 1}{n} = 0$  なのではさみうちの原理から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$

さらに  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_1}{n} = 0$  なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{a_n} = \log a$$

$e^x$  は連続なので  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{\log a} = a$

5)

$H = A \cup \{0\} \cup \{1\} \cup \dots \cup \{m-1\}$  とする.

$H$  が継承的であることを示す.

$\{0\} \subset H$  なので  $0 \in H$

$x \in H$  とする

$x = 0, \dots, m-2$  の時  $\{x+1\} \subset H$  なので  $x+1 \in H$

$x = m-1$  の時イ) より  $m \in A$  で  $A \subset H$  なので  $x+1 = m \in H$

$x \in A$  の時イ) より  $x \geq m$

$x \in A, x \geq m$  なのでロ) より  $x+1 \in A$  で  $A \subset H$  なので  $x+1 \in H$

以上より  $H$  は継承的.

より  $\mathbb{N} \subset H$

$n \in \mathbb{N}$  で  $n \geq m$  とする.

$\mathbb{N} \subset H$  より  $n \in H$ .

また  $n \geq m$  なので  $n \neq 0, 1, \dots, m-1$  で  $n \notin \{0\} \cup \{1\} \cup \dots \cup \{m-1\}$

より  $n \in A$  で  $\{n \in \mathbb{N} | n \geq m\} \subset A$

次に  $n \in A$  とする.

$A \subset \mathbb{N}$  なので  $n \in \mathbb{N}$

イ) より  $n \geq m$

より  $n \in \{n \in \mathbb{N} | n \geq m\}$  で  $A \subset \{n \in \mathbb{N} | n \geq m\}$

以上より  $A = \{n \in \mathbb{N} | n \geq m\}$

6)

$n \in \mathbb{N}$  に対し  $A_n = \{x \in \mathbb{R} | x+n \in \mathbb{N}\}$  とする.

$A_n$  が継承的であることを示す.

$n \in \mathbb{N}$  なので  $0 + n \in \mathbb{N}$  で  $0 \in A_n$

$x \in A_n$  とする.

$x + n \in \mathbb{N}$  で  $\mathbb{N}$  が継承的なので  $x + 1 + n \in \mathbb{N}$

より  $x + 1 \in A_n$

以上より  $A_n$  は継承的で  $\mathbb{N} \subset A_n$

$m \in \mathbb{N}$  なら  $m \in A_n$  で  $m + n \in \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}$  に対し  $B_n = \{x \in \mathbb{R} | xn \in \mathbb{N}\}$  とする.

$B_n$  が継承的であることを示す.

$0n = 0 \in \mathbb{N}$  なので  $0 \in B_n$

$x \in B_n$  とする.

$xn, n \in \mathbb{N}$  なので上の結果より  $xn + n = (x + 1)n \in \mathbb{N}$

より  $x + 1 \in B_n$

以上より  $B_n$  は継承的で  $\mathbb{N} \subset B_n$

$m \in \mathbb{N}$  なら  $m \in B_n$  で  $mn \in \mathbb{N}$

$C = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{N} | x - 1 \in \mathbb{N}\}$  とする.

$C$  が継承的であることを示す.

$\{0\} \subset C$  より  $0 \in C$

$x \in C$  とする.

$x \in \{0\}, x \in \{x \in \mathbb{N} | x - 1 \in \mathbb{N}\}$  いずれの場合も  $x \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$  は継承的なので  $x + 1 \in \mathbb{N}$

また  $x + 1 - 1 = x \in \mathbb{N}$  なので  $x + 1 \in C$

以上より  $C$  は継承的で  $\mathbb{N} \subset C$

$m \in \mathbb{N}$  に対し  $D_m = \{x \in \mathbb{N} | m < x \text{ または } m - x \in \mathbb{N}\}$  とする.

$D_m$  が継承的であることを示す.

$m \in \mathbb{N}$  なので  $m - 0 \in \mathbb{N}$  で  $0 \in D_m$

$x \in D_m$  とする.

$m \leq x$  の時  $m < x + 1$  なので  $x + 1 \in D_m$

$m > x$  の時  $m - x \in \mathbb{N} \subset C$

さらに  $m - x \neq 0$  なので  $m - x - 1 \in \mathbb{N}$

より  $x + 1 \in D_m$

いずれの場合も  $x + 1 \in D_m$  で  $0 \in D_m$  と合わせて  $D_m$  は継承的で  $\mathbb{N} \subset D_m$

より  $n \in \mathbb{N}, m \geq n$  なら  $m - n \in \mathbb{N}$

7)

$\mathbb{R}_+$  は継承的なので  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$  で  $n \in \mathbb{N}$  なら  $n \geq 0$  なことに注意する.

$n \in \mathbb{N}$  に対して  $E_n = \{x \in \mathbb{N} | x \leq n \text{ または } n + 1 \leq x\}$  とする.

また  $F = \{n \in \mathbb{N} | \mathbb{N} \subset E_n\}$  とする.

$F$  が継承的であることを示したい.

まず  $E_0$  が継承的なことを示す.

$0 \in \mathbb{N}$  で  $0 \leq 0$  より  $0 \in E_0$

$x \in E_0$  とする.  $x \in \mathbb{N}$  で  $x + 1 \in \mathbb{N}$



また  $x \geq 0$  なので  $1 \leq x+1$  で  $x+1 \in E_0$

より  $E_0$  は継承的で  $0 \in F$

次に  $n \in F$  を仮定して  $n+1 \in F$  を示す.

$n \in F \subset \mathbb{N}$  なので  $n \geq 0$  で  $0 \leq n+1$  で  $0 \in E_{n+1}$

$x \in E_{n+1}$  とする.  $x \in \mathbb{N} \subset E_n$  なので  $x \leq n$  または  $n+1 \leq x$

より  $x+1 \leq n+1$  または  $n+2 \leq x+1$

より  $x+1 \in E_{n+1}$

以上より  $E_{n+1}$  は継承的で  $\mathbb{N} \subset E_{n+1}$

より  $n+1 \in F$

以上より  $F$  は継承的で  $\mathbb{N} \subset F$

より  $n \in \mathbb{N}$  なら  $\mathbb{N} \subset \{x \in \mathbb{N} | x \leq n \text{ または } n+1 \leq x\}$  で

$n < k < n+1$  となる自然数は存在しない.