解析入門　解答

河村遼

2019 年 7 月 4 日

第 I 章実数と連続

§1 実数

問 1(i)

$a, b \in K$ が両方 (R3) を満たす 0 であると仮定する.

a が (R3) を満たす 0 なので $b + a = b$

b も (R3) を満たす 0 なので $a + b = a$

また (R1) より $a + b = b + a$

以上より $a = b$ で (R3) を満たす 0 は唯一

(ii)

$a \in K$ に対し $b, c \in K$ を両方 (R4) を満たす $-a$ であると仮定する.

$a + b = 0$ より (R3) と合わせ $c + (a + b) = c + 0 = c$

また $a + c = 0$

(R1) より $a + c = c + a$ なので $c + a = 0$

より

$$\begin{aligned} b &= b + 0 \ (\because (R3)) \\ &= 0 + b \ (\because (R1)) \\ &= (c + a) + b \\ &= c + (a + b) \ (\because (R2)) \\ &= c \end{aligned}$$

つまり (R4) を満たす $-a$ は唯一

(iii)

$a \in K$ に対し (R4) より $a + (-a) = 0$

(R1) より $(-a) + a = a + (-a)$ で $(-a) + a = 0$ だ.

より (ii) から $-(-a) = a$

(iv)

$*$ 注意

$a \in K$ がある $b \in K$ に対して $b + a = b$ なら $a = 0$ だ.

なぜなら

$$
\begin{aligned}
0 &= b+(-b)\ (\because (R4))\\
&= (b+a)+(-b)\\
&= (a+b)+(-b)\ (\because (R1) \text{ より } b+a=a+b)\\
&= a+(b+(-b))\ (\because (R2))\\
&= a+0\ (\because (R4) \text{ より } b+(-b)=0)\\
&= a\ (\because (R3))
\end{aligned}
$$

以下これは暗黙の了解として使う.

$a \in K$ に対し

$$
\begin{aligned}
0a+0a &= (0+0)a\ (\because (R7))\\
&= 0a\ (\because (R3) \text{ より } 0+0=0)
\end{aligned}
$$

より $0a=0$

(v)

$a \in K$ に対し

$$
\begin{aligned}
a+(-1)a &= a1+(-1)a\ (\because (R8) \text{ より } a=a1)\\
&= 1a+(-1)a\ (\because (R5) \text{ より } a1=1a)\\
&= (1+(-1))a\ (\because (R7))\\
&= 0a\ (\because (R7))\\
&= 0\ (\because (iv))
\end{aligned}
$$

より (ii) から (以下 (ii) も暗黙の了解として使う)$(-1)a=-a$

(vi)

$$
\begin{aligned}
(-1)(-1) &= -(-1)\ (\because (v))\\
&= 1\ (\because (iii))
\end{aligned}
$$

(vii)

$$
\begin{aligned}
ab+a(-b) &= a(b+(-b))\ (\because (R7))\\
&= a0\ (\because (R4) \text{ より } b+(-b)=0)\\
&= 0a\ (\because (R5))\\
&= 0\ (\because (iv))
\end{aligned}
$$

より $a(-b) = -ab$

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= (a + (-a))b \ (\because (R7)) \\ &= 0b \ (\because (R4) \text{ より } a + (-a) = 0) \\ &= 0 \ (\because (iv)) \end{aligned}$$

より $(-a)b = -ab$

(viii)

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -a(-b) \ (\because (vii)) \\ &= -(-ab) \ (\because (vii) \text{ より } a(-b) = -ab) \\ &= ab \ (\because (iii)) \end{aligned}$$

(ix)

$b \neq 0$ と仮定する.b^{-1} が存在し $bb^{-1} = 1$.

この時

$$\begin{aligned} a &= a1 \ (\because (R8)) \\ &= a(bb^{-1}) \ (\because bb^{-1} = 1) \\ &= ab(b^{-1}) \ (\because (R6)) \\ &= 0b^{-1} \\ &= 0 \ (\because (iv)) \end{aligned}$$

つまり $a = 0$ または $b = 0$

(x)

$$\begin{aligned} (-a)(-(a^{-1})) &= aa^{-1} \ (\because (R8)) \\ &= 1 \ (\because (R8)) \end{aligned}$$

(ii) と同様に (R9) を満たす a^{-1} は各 $a \in K, a \neq 0$ に対し唯一なので (以下これは暗黙の了解として使う).
$(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

(xi)

$$\begin{aligned} (ab)(b^{-1}a^{-1}) &= ((ab)b^{-1})a^{-1} \ (\because (R6)) \\ &= (a(bb^{-1}))a^{-1} \ (\because (R6) \text{ より } (ab)b^{-1} = a(bb^{-1})) \\ &= (a1)a^{-1} \ (\because (R9) \text{ より } bb^{-1} = 1) \\ &= aa^{-1} \ (\because (R8) \text{ より } a1 = a) \\ &= 1 \ (\because (R9)) \end{aligned}$$

より $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$

問 2(i)

$\Rightarrow$

$a \leqq b$ と (R15) より $a+(-a) \leqq b+(-a)$

より $0 \leqq b-a$

$\Leftarrow$

$0 \leqq b-a$ と (R15) より $0+a \leqq (b-a)+a$ より $a \leqq b$

(ii)

(i) より $a \leqq b \Leftrightarrow 0 \leqq b-a$

さらに (i) より $-b \leqq -a \Leftrightarrow 0 \leqq -a-(-b)$

以上より $-a-(-b)=b-a$ と合わせて $a \leqq b \Leftrightarrow -b \leqq -a$

(iii)

(i) と $a \leqq b$ より $b-a \geqq 0$

(i) と $c \leqq 0, -0=0$ より $-c \geqq 0$

より (R16) から $(b-a)(-c) \geqq 0$ で $(b-a)(-c)=ac-bc$ と (i) から $ac \geqq bc$

(iv)

$a^{-1} \leqq 0$ と仮定する.

$-a^{-1} \geqq 0$ で $a \geqq 0$ とあわせ (R16) から $a(-a^{-1}) \geqq 0$

より $-1 \geqq 0$ (ii) より $0 \geqq 1$ となり矛盾.

背理法から $a^{-1}>0$

(v)

$a \leqq b$ と (R15) より $a+c \leqq b+c$

$c \leqq d$ と (R15) より $c+b \leqq d+b$

$b+c=c+b, b+d=d+b$ より $b+c \leqq b+d$

(R13) より $a+c \leqq b+d$

(vi)

(v) より $a+c \leqq b+d$ は言える.

$a+c \neq b+d$ を言えばいい.

$a+c=b+d$ と仮定する.

(R11) より $b+d \leqq a+c$

また $a \leqq b$ と (ii) より $-b \leqq -a$

(v) より $-b+(b+d)=d, -a+(a+c)=c$ と合わせて $d \leqq c$

$c<d$ に矛盾し背理法から $a+c \neq b+d$

以上より $a+c<b+d$