解析入門　解答

itleigns

2019 年 7 月 27 日

第 I 章実数と連続

§1 実数

問 1(i)

$a, b \in K$ が両方 (R3) を満たす 0 であると仮定する.

a が (R3) を満たす 0 なので $b + a = b$

b も (R3) を満たす 0 なので $a + b = a$

また (R1) より $a + b = b + a$

以上より $a = b$ で (R3) を満たす 0 は唯一

(ii)

$a \in K$ に対し $b, c \in K$ を両方 (R4) を満たす $-a$ であると仮定する.

$a + b = 0$ より (R3) と合わせ $c + (a + b) = c + 0 = c$

また $a + c = 0$

(R1) より $a + c = c + a$ なので $c + a = 0$

より

$$\begin{aligned}
b &= b + 0 \ (\because (R3)) \\
&= 0 + b \ (\because (R1)) \\
&= (c + a) + b \\
&= c + (a + b) \ (\because (R2)) \\
&= c
\end{aligned}$$

つまり (R4) を満たす $-a$ は唯一

(iii)

$a \in K$ に対し (R4) より $a + (-a) = 0$

(R1) より $(-a) + a = a + (-a)$ で $(-a) + a = 0$ だ.

より (ii) から $-(-a) = a$

(iv)

$*$ 注意

$a \in K$ がある $b \in K$ に対して $b + a = b$ なら $a = 0$ だ.

なぜなら

$$\begin{aligned}0 &= b+(-b)\ (\because (R4))\\ &= (b+a)+(-b)\\ &= (a+b)+(-b)\ (\because (R1) \text{ より } b+a=a+b)\\ &= a+(b+(-b))\ (\because (R2))\\ &= a+0\ (\because (R4) \text{ より } b+(-b)=0)\\ &= a\ (\because (R3))\end{aligned}$$

以下これは暗黙の了解として使う.

$a \in K$ に対し

$$\begin{aligned}0a+0a &= (0+0)a\ (\because (R7))\\ &= 0a\ (\because (R3) \text{ より } 0+0=0)\end{aligned}$$

より $0a=0$

(v)

$a \in K$ に対し

$$\begin{aligned}a+(-1)a &= a1+(-1)a\ (\because (R8) \text{ より } a=a1)\\ &= 1a+(-1)a\ (\because (R5) \text{ より } a1=1a)\\ &= (1+(-1))a\ (\because (R7))\\ &= 0a\ (\because (R4) \text{ より } 1+(-1)=0)\\ &= 0\ (\because (iv))\end{aligned}$$

より (ii) から (以下 (ii) も暗黙の了解として使う)$(-1)a=-a$

(vi)

$$\begin{aligned}(-1)(-1) &= -(-1)\ (\because (v))\\ &= 1\ (\because (iii))\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}ab+a(-b) &= a(b+(-b))\ (\because (R7))\\ &= a0\ (\because (R4) \text{ より } b+(-b)=0)\\ &= 0a\ (\because (R5))\\ &= 0\ (\because (iv))\end{aligned}$$

より $a(-b)=-ab$

$$\begin{aligned}ab+(-a)b &= (a+(-a))b\ (\because (R7))\\ &= 0b\ (\because (R4)\ \text{より}\ a+(-a)=0)\\ &= 0\ (\because (iv))\end{aligned}$$

より $(-a)b=-ab$

(viii)

$$\begin{aligned}(-a)(-b) &= -a(-b)\ (\because (vii))\\ &= -(-ab)\ (\because (vii)\ \text{より}\ a(-b)=-ab)\\ &= ab\ (\because (iii))\end{aligned}$$

(ix)

$b\neq 0$ と仮定する.b^{-1} が存在し $bb^{-1}=1$.

このとき

$$\begin{aligned}a &= a1\ (\because (R8))\\ &= a(bb^{-1})\ (\because bb^{-1}=1)\\ &= ab(b^{-1})\ (\because (R6))\\ &= 0b^{-1}\\ &= 0\ (\because (iv))\end{aligned}$$

つまり $a=0$ または $b=0$

(x)

$$\begin{aligned}(-a)(-(a^{-1})) &= aa^{-1}\ (\because (viii))\\ &= 1\ (\because (R9))\end{aligned}$$

(ii) と同様に (R9) を満たす a^{-1} は各 $a\in K, a\neq 0$ に対し唯一なので (以下これは暗黙の了解として使う).

$(-a)^{-1}=-(a^{-1})$

(xi)

$$\begin{aligned}(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= ((ab)b^{-1})a^{-1}\ (\because (R6))\\ &= (a(bb^{-1}))a^{-1}\ (\because (R6)\ \text{より}\ (ab)b^{-1}=a(bb^{-1}))\\ &= (a1)a^{-1}\ (\because (R9)\ \text{より}\ bb^{-1}=1)\\ &= aa^{-1}\ (\because (R8)\ \text{より}\ a1=a)\\ &= 1\ (\because (R9))\end{aligned}$$

より $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

問 2(i)

$\Rightarrow$

$a \leqq b$ と (R15) より $a + (-a) \leqq b + (-a)$

より $0 \leqq b - a$

$\Leftarrow$

$0 \leqq b - a$ と (R15) より $0 + a \leqq (b - a) + a$ より $a \leqq b$

(ii)

(i) より $a \leqq b \Leftrightarrow 0 \leqq b - a$

さらに (i) より $-b \leqq -a \Leftrightarrow 0 \leqq -a - (-b)$

以上より $-a - (-b) = b - a$ と合わせて $a \leqq b \Leftrightarrow -b \leqq -a$

(iii)

(i) と $a \leqq b$ より $b - a \geqq 0$

(i) と $c \leqq 0, 0 - c = -c$ より $-c \geqq 0$

より (R16) から $(b - a)(-c) \geqq 0$ で $(b - a)(-c) = ac - bc$ と (i) から $ac \geqq bc$

(iv)

$a^{-1} \leqq 0$ と仮定する.

$-a^{-1} \geqq 0$ で $a \geqq 0$ とあわせ (R16) から $a(-a^{-1}) \geqq 0$

より $-1 \geqq 0$ (ii) より $0 \geqq 1$ となり矛盾.

背理法から $a^{-1} > 0$

(v)

$a \leqq b$ と (R15) より $a + c \leqq b + c$

$c \leqq d$ と (R15) より $c + b \leqq d + b$

$b + c = c + b, b + d = d + b$ より $b + c \leqq b + d$

(R13) より $a + c \leqq b + d$

(vi)

(v) より $a + c \leqq b + d$ は言える.

$a + c \neq b + d$ を言えばいい.

$a + c = b + d$ と仮定する.

(R11) より $b + d \leqq a + c$

また $a \leqq b$ と (ii) より $-b \leqq -a$

(v) より $-b + (b + d) = d, -a + (a + c) = c$ と合わせて $d \leqq c$

$c < d$ に矛盾し背理法から $a + c \neq b + d$

以上より $a + c < b + d$

§2 実数列の極限

1)(i)

$N > |a|$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n > N$ のとき $|a_n| = |a_{n-1}|\frac{|a|}{n}$, $\frac{|a|}{n} < 1$ で

$$|a_n| < |a_{n-1}|$$

これを繰り返し用いると $n \geqq N$ で

$$|a_n| \leqq |a_N|$$

$\epsilon > 0$ に対し $n \geqq max(N+1, \frac{|aa_N|}{\epsilon}+1)$ とすると

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_{n-1}|\frac{|a|}{n} \\ &\leqq \frac{|aa_N|}{n} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

より

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(ii)

$\epsilon > 0$ に対し $\epsilon' = min(1, \epsilon)$ とする.

$0 \leqq 1-\epsilon' < 1$ なので例 6 より $\lim_{n\to\infty}(1-\epsilon')^n = 0$

より $a > 0$ より $N \in \mathbb{N}$ が存在し

$$n \geqq N \Rightarrow (1-\epsilon')^n < a$$

より $n \geqq N$ のとき $-\epsilon \leqq -\epsilon' < \sqrt[n]{a} - 1$

また二項定理より $n \geqq 1$ で

$$(1+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\epsilon^k > n\epsilon$$

$M > \frac{a}{\epsilon}$ を満たすように $M \in \mathbb{N}$ を取ると

$n \geqq M$ で

$$a < n\epsilon < (1+\epsilon)^n$$

より $\sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$

$n \geqq max(N, M)$ のとき $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$ で

$$a_n \to 1 \ (n \to \infty)$$

(iii)

$k = 2, \cdots, n$ で $\frac{k}{n} \leqq 1$ なので辺々掛け合わせて

$$\frac{n!}{n^{n-1}} \leqq 1$$

より $0 < a_n \leqq \frac{1}{n}$

また $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ なのではさみうちの原理から

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(iv)

二項定理より $n \geqq 2$ で

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k > \frac{n(n-1)}{2}$$

より $0 < a_n < \frac{2}{n-1}$

また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0$ なのではさみうちの原理から

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

(v)

$\epsilon > 0$ に対し $N > \frac{1}{\epsilon^2}$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n \geqq N$ で

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

$a_n > 0$ も合わせて $n \geqq N$ で $|a_n| < \epsilon$ なので

$$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

2)

$-1 \leqq \cos(n!\pi x) \leqq 1$ だ.

$\cos(n!\pi x) = \pm 1$ のとき $(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$ なので $\displaystyle\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

$-1 < \cos(n!\pi x) < 1$ のとき $0 \leqq (\cos(n!\pi x))^2 < 1$ なので例 6 より $\displaystyle\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

$\cos(n!\pi x) = \pm 1 \Leftrightarrow n!x \in \mathbb{Z}$ だ.

x が有理数のとき $x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ とおけ $n \geqq q$ のとき

$$n!x = n \cdots (q+1) \cdot (q-1) \cdots 1 \cdot p \in \mathbb{Z}$$

より $n \geqq q$ で $\displaystyle\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m}) = 1$

x が無理数のとき

$n!x$ が整数と仮定する.

$x = \frac{n!x}{n!}$ で分母と分子が整数なので x が有理数となり矛盾.

より $n!x$ は整数でなく $\displaystyle\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m}) = 0$

以上より

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数} \\ 0 & x \text{ が無理数} \end{cases}$$

3)

$\epsilon > 0$ とする.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ なので $n \geqq N'$ なら $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ となる $N' \in \mathbb{N}$ が存在.

$N = max(1, N')$ とする.

$n \geqq max(N, \frac{2}{\epsilon}|\sum_{k=1}^{N-1}(a_k - a)|)$ のとき

$$|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - a| \leqq \frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{N-1}(a_k - a)| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|a_k - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-N+1}{2n}\epsilon < \epsilon$$

より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

4)

$a_k\neq 0$ なので $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}$

より $a_k>0$ に注意し $\log a_n=\log a_1+\log\frac{a_2}{a_1}+\log\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\log\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$n\in\mathbb{N}$ に対し $a_n>0$ なので $b_n=\log\frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおける.

$$\log\sqrt[n]{a_n}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}-\frac{b_n}{n}+\frac{\log a_1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$ と $\log x$ が連続なので $\lim_{n\to\infty}b_n=\log a$

より 3) より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=\log a$

また $n\geqq N$ で $|b_n-\log a|<1$ となる $N\in\mathbb{N}$ が存在.

$n\geqq N$ で $\frac{\log a-1}{n}\leqq\frac{b_n}{n}\leqq\frac{\log a+1}{n}$ で $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log a-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log a+1}{n}=0$ なのではさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=0$

さらに $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log a_1}{n}=0$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{a_n}=\log a$$

e^x は連続なので $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{\log a}=a$

5)

$H=A\cup\{0\}\cup\{1\}\cup\cdots\cup\{m-1\}$ とする.

H が継承的であることを示す.

$\{0\}\subset H$ なので $0\in H$

$x\in H$ とする

$x=0,\cdots,m-2$ のとき $\{x+1\}\subset H$ なので $x+1\in H$

$x=m-1$ のときイ) より $m\in A$ で $A\subset H$ なので $x+1=m\in H$

$x\in A$ のときイ) より $x\geqq m$

$x\in A, x\geqq m$ なのでロ) より $x+1\in A$ で $A\subset H$ なので $x+1\in H$

以上より H は継承的.

より $\mathbb{N}\subset H$

$n\in\mathbb{N}$ で $n\geqq m$ とする.

$\mathbb{N}\subset H$ より $n\in H$.

また $n\geqq m$ なので $n\neq 0,1,\cdots,m-1$ で $n\notin\{0\}\cup\{1\}\cup\cdots\cup\{m-1\}$

より $n\in A$ で $\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}\subset A$

次に $n\in A$ とする.

$A\subset\mathbb{N}$ なので $n\in\mathbb{N}$

イ) より $n\geqq m$

より $n\in\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$ で $A\subset\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$

以上より $A=\{n\in\mathbb{N}|n\geqq m\}$

6)

$n\in\mathbb{N}$ に対し $A_n=\{x\in\mathbb{R}|x+n\in\mathbb{N}\}$ とする.

A_n が継承的であることを示す.
$n \in \mathbb{N}$ なので $0+n \in \mathbb{N}$ で $0 \in A_n$
$x \in A_n$ とする.
$x+n \in \mathbb{N}$ で $\mathbb{N}$ が継承的なので $x+1+n \in \mathbb{N}$
より $x+1 \in A_n$
以上より A_n は継承的で $\mathbb{N} \subset A_n$
$m \in \mathbb{N}$ なら $m \in A_n$ で $m+n \in \mathbb{N}$
$n \in \mathbb{N}$ に対し $B_n = \{x \in \mathbb{R} | xn \in \mathbb{N}\}$ とする.
B_n が継承的であることを示す.
$0n = 0 \in \mathbb{N}$ なので $0 \in B_n$
$x \in B_n$ とする.
$xn, n \in \mathbb{N}$ なので上の結果より $xn + n = (x+1)n \in \mathbb{N}$
より $x+1 \in B_n$
以上より B_n は継承的で $\mathbb{N} \subset B_n$
$m \in \mathbb{N}$ なら $m \in B_n$ で $mn \in \mathbb{N}$
$C = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{N} | x-1 \in \mathbb{N}\}$ とする.
C が継承的であることを示す.
$\{0\} \subset C$ より $0 \in C$
$x \in C$ とする.
$x \in \{0\}, x \in \{x \in \mathbb{N} | x-1 \in \mathbb{N}\}$ いずれの場合も $x \in \mathbb{N}$
$\mathbb{N}$ は継承的なので $x+1 \in \mathbb{N}$
また $x+1-1 = x \in \mathbb{N}$ なので $x+1 \in C$
以上より C は継承的で $\mathbb{N} \subset C$
$m \in \mathbb{N}$ に対し $D_m = \{x \in \mathbb{N} | m < x$ または $m - x \in \mathbb{N}\}$ とする.
D_m が継承的であることを示す.
$m \in \mathbb{N}$ なので $m - 0 \in \mathbb{N}$ で $0 \in D_m$
$x \in D_m$ とする.
$m \leqq x$ のとき $m < x+1$ なので $x+1 \in D_m$
$m > x$ のとき $m - x \in \mathbb{N} \subset C$
さらに $m - x \neq 0$ なので $m - x - 1 \in \mathbb{N}$
より $x+1 \in D_m$
いずれの場合も $x+1 \in D_m$ で $0 \in D_m$ と合わせて D_m は継承的で $\mathbb{N} \subset D_m$
より $n \in \mathbb{N}, m \geqq n$ なら $m - n \in \mathbb{N}$
7)
$\mathbb{R}_+$ は継承的なので $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$ で $n \in \mathbb{N}$ なら $n \geqq 0$ なことに注意する.
$n \in \mathbb{N}$ に対して $E_n = \{x \in \mathbb{N} | x \leqq n$ または $n+1 \leqq x\}$ とする.
また $F = \{n \in \mathbb{N} | \mathbb{N} \subset E_n\}$ とする.
F が継承的であることを示したい.
まず E_0 が継承的なことを示す.
$0 \in \mathbb{N}$ で $0 \leqq 0$ より $0 \in E_0$

$x \in E_0$ とする.$x \in \mathbb{N}$ で $x+1 \in \mathbb{N}$

また $x \geqq 0$ なので $1 \leqq x+1$ で $x+1 \in E_0$

より E_0 は継承的で $0 \in F$

次に $n \in F$ を仮定して $n+1 \in F$ を示す.

$n \in F \subset \mathbb{N}$ なので $n \geqq 0$ で $0 \leqq n+1$ で $0 \in E_{n+1}$

$x \in E_{n+1}$ とする.$x \in \mathbb{N} \subset E_n$ なので $x \leqq n$ または $n+1 \leqq x$

より $x+1 \leqq n+1$ または $n+2 \leqq x+1$

より $x+1 \in E_{n+1}$

以上より E_{n+1} は継承的で $\mathbb{N} \subset E_{n+1}$

より $n+1 \in F$

以上より F は継承的で $\mathbb{N} \subset F$

より $n \in \mathbb{N}$ なら $\mathbb{N} \subset \{x \in \mathbb{N} | x \leqq n$ または $n+1 \leqq x\}$ で

$n < k < n+1$ となる自然数は存在しない.

§3 実数の連続性

1)(i)

$$a_n = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+\frac{1}{n}) \cdot (2+\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+0) \cdot (2+0) = \frac{1}{3}$$

(ii)

$a \leqq 1$ のとき $M(\in \mathbb{R})$ に対し $N > \sqrt{max(0, M)}$ を満たす $N(\in \mathbb{N})$ が存在.

$n \geqq N$ で

$$a_n = \frac{n^2}{a^n} \geqq \frac{n^2}{1^n} = n^2 \geqq M$$

より $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$a > 1$ のとき二項定理より $n \geqq 3$ で

$$a^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (a-1)^k \cdot 1^{n-k} > \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)(a-1)^3$$

より

$$\frac{n^2}{a^n} < \frac{6}{(1-\frac{1}{n})(1-2\cdot\frac{1}{n})(a-1)^3} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{6}{(1-0)(1-2\cdot 0)(a-1)^3} \cdot 0 = 0$$

$a_n > 0$ と合わせはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

以上より $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & (a \leqq 1) \\ 0 & (a > 1) \end{cases}$

(iii)

$n \geqq 2$ のとき $\sqrt[n]{n} > 1$ で二項定理より

$$n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (\sqrt[n]{n}-1)^k \cdot 1^{n-k} > \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n}-1)^2$$

より

$$|\sqrt[n]{n}-1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$\epsilon > 0$ に対し $N > \frac{2}{\epsilon^2}+1$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在.

$n \geqq max(N,2)$ で $|\sqrt[n]{n}-1| < \epsilon$

つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

(iv)

2) より $e > 1$ で $n \geqq k+1$ で二項定理より

$$e^n = \sum_{l=0}^{n} {}_nC_l(e-1)^l \cdot 1^{n-l} > {}_nC_{k+1}(e-1)^{k+1} > \frac{(n-k)^{k+1}}{(k+1)!}\cdot(e-1)^{k+1}$$

より

$$a_n < (\frac{1}{1-\frac{k}{n}})^k \cdot \frac{(k+1)!}{(e-1)^{k+1}}\frac{1}{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} (\frac{1}{1-0})^k \cdot \frac{(k+1)!}{(e-1)^{k+1}}\cdot 0 = 0$$

$a_n > 0$ と合わせはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(v)

$n \geqq 2$ のとき 2) の e を用いて

$$a_n = (1-\frac{1}{n^2})^n = (\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}})^n = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{((1+\frac{1}{n-1})^{n-1})^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e}{e^1} = 1$$

(vi)

$0 < c < 1$ のとき

$$a_n < \frac{1}{c^{-n}} = c^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$a_n > 0$ と合わせはさみうちの定理から $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$c = 1$ のとき $a_n = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

$c > 1$ のとき $0 < \frac{1}{c} < 1$ で $a_n = \frac{1}{(\frac{1}{c})^{-n}+(\frac{1}{c})^n}$ なので $0 < c < 1$ のときの結果より $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

以上より $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & c = 1 \\ 0 & c \neq 1 \end{cases}$

(vii)

$b_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ とする.

$a_n > 0, b_n > 0$ なので両方下に有界.

$\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} < 1$ より $a_{n+1} < a_n$

$\frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} < 1$ より $b_{n+1} < b_n$

より a_n, b_n は両方単調減少で収束する.

それぞれ a, b に収束するとすると $a \geqq 0, b \geqq 0$

$n \in \mathbb{N} - \{0\}$ に対し $(2n)^2 > (2n)^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$ なので

$n = 1, \cdots, k$ で掛けて $a_k < b_k$ より $a \leqq b$

また $a_n b_n = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ なので $ab = 0$

$0 \leqq a^2 \leqq ab = 0$ より $a = 0$ つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2)

二項定理より

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\frac{1}{n})^k, a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k$$

$l = 0, \cdots, k-1$ に対し $n(n+1) - nl \geqq n(n+1) - (n+1)l \Leftrightarrow \frac{n+1-l}{n+1} \geqq \frac{n-l}{n}$

なので辺々掛けて $\frac{1}{k!}$ で割り ${}_nC_k(\frac{1}{n})^k \leqq {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k$ より

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\frac{1}{n})^k \leqq \sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k < \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k(\frac{1}{n+1})^k = a_{n+1}$$

より a_n は単調増加.

また ${}_nC_k \leqq \frac{n^k}{k!}$ なので

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(\frac{1}{n})^k \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$n \geqq 3$ で $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqq 2.9 - \frac{1}{n!}$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 3$ のとき

(左辺) $= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} < 2.67 < 2.9 - \frac{1}{6} =$ (右辺) で成立.

ii) $n = l(\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する.($l \geqq 3$)

$$\sum_{k=0}^{l+1} \frac{1}{k!} \leqq 2.9 - \frac{1}{l!} + \frac{1}{(l+1)!} = 2.9 - \frac{l}{(l+1)!} < 2.9 - \frac{1}{(l+1)!}$$

より $n = l + 1$ も成立.

i)ii) より示された.

より $a_n \leqq 2.9 - \frac{1}{n!} < 2.9$ で a_n は上に有界. より a_n は e に収束するとしてよく $e \leqq 2.9 < 3$

$n \geqq 2$ で $a_n \geqq a_2 = \frac{9}{4} > 2$ より $e > 2$

3)

$0 < a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 0$ のとき

$a_0 > 0$ だ. また $a < b$ より $a < \frac{a+b}{2} < b$ で $a_0 < a_1 < b_0$

より $\sqrt{a_1} < \sqrt{b_0}$ で $a_1 < \sqrt{a_1 b_0} = b_1 < b_0$

より成立.

ii) $n = k(\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する.

$0 < a_k \leqq a_{k+1} \leqq b_{k+1} \leqq b_k$

まず $a_{k+1} > 0$. また $a_{k+1} \leqq b_{k+1}$ より $a_{k+1} \leqq \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2} = a_{k+2} \leqq b_{k+1}$

より $\sqrt{a_{k+2}} \leqq \sqrt{b_{k+1}}$ で $a_{k+2} \leqq \sqrt{a_{k+2}b_{k+1}} = b_{k+2} \leqq b_{k+1}$

より $n = k + 1$ も成立.

i)ii) より示された.

より区間 $[a_n, b_n]$ は単調減少. また

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqq b_n - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

これを繰り返し用い $b_n - a_n \leqq \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n}(b-a) = 0, b_n - a_n \geqq 0$ よりはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

以上より区間縮小法より a_n, b_n は収束し $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ でこの値を l とおける.

$0 < a < b$ より $0 < x < \frac{\pi}{2}$ としてよい.

$a_n = \frac{\sin x \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} b, b_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} b$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 0$ のとき

$$a_0 = b \cos x = \frac{\sin x \cos \frac{x}{2^0}}{2^0 \sin \frac{x}{2^0}} b, b_0 = b = \frac{\sin x}{2^0 \sin \frac{x}{2^0}} b$$

より成立する.

ii) $n = k(\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する.

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} b \cdot \frac{1 + \cos \frac{x}{2^k}}{2} = \frac{\sin x \cos^2 \frac{x}{2^{k+1}}}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} b = \frac{\sin x \cos^2 \frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}} \cos \frac{x}{2^{k+1}}} b = \frac{\sin x \cos \frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}}} b$$

$$b_{k+1} = \sqrt{a_{k+1} b_k} = \sqrt{\frac{\sin x \cos \frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}}} b \cdot \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} b} = \sqrt{\frac{\sin x \cos \frac{x}{2^{k+1}}}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}}} b \cdot \frac{\sin x}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}} \cos \frac{x}{2^{k+1}}} b} = \frac{\sin x}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}}} b$$

より $n = k + 1$ も成立.

i)ii) より示された.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ より $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = 1$ で

$$b_n = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} b \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sin x}{x} b$$

より $l = \frac{\sin x}{x} b$

(おまけ)

$a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ のとき $x = \frac{\pi}{4}$

直径 1 の円の中心を O, この円に外接, 内接する正 2^{n+2} 角形の辺の 1 つをそれぞれ $AB, A'B'$ とする.

また $AB, A'B'$ の中点をそれぞれ M, M' とする.

$$\angle AOM = \angle A'OM' = \frac{2\pi}{2 \cdot 2^{n+2}} = \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

$MO, A'O$ は円の半径で $\frac{1}{2}$

$$AM = MO \tan \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}, A'M' = A'O \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

$AB = 2AM, A'B' = 2A'M'$ で 2^{n+2} 個合わせてそれぞれ $2^{n+2} \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}, 2^{n+2} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}$

逆数を取るとそれぞれ

$$\frac{1}{2^{n+2} \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sin x \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} b = a_n$$

$$\frac{1}{2^{n+2} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} b = b_n$$

また $l = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi}$

4)

$\mathbb{Q}$ から順序体 K への同型写像 g を探す.

$x \in \mathbb{N}$ に対し $g(x) = \begin{cases} 0_K & x = 0 \\ g(x-1) + 1_K & x \neq 0 \end{cases}$ とする.

$x, y \in \mathbb{N}$ に対し $g(x+y) = g(x) + g(y)$ を y に関する数学的帰納法で示す.

i) $y = 0$ のとき

$$g(x+0) = g(x) = g(x) + 0_K = g(x) + g(0)$$

より成立.

ii) $y = k(\in \mathbb{N})$ のとき成立すると仮定する.

$$g(x+k+1) = g(x+1) + g(k) = g(x) + 1_K + g(k) = g(x) + g(k+1)$$

より $y = k+1$ のときも成立.

i)ii) より $g(x+y) = g(x) + g(y)$

$x, y \in \mathbb{N}$ に対し $g(xy) = g(x)g(y)$ を y に関する数学的帰納法で示す.

i) $y = 0$ のとき

$$g(x0) = g(0) = 0_K = g(x)0_K = g(x)g(0)$$

より成立.

ii) $y = k(\in \mathbb{N})$ のとき成立すると仮定する.

$$g(x(k+1)) = g(xk) + g(x) = g(x)g(k) + g(x) = g(x)(g(k) + 1_K) = g(x)g(k+1)$$

より $y = k+1$ のときも成立.

i)ii) より $g(xy) = g(x)g(y)$

$x \in \mathbb{N} - \{0\}, y \in \mathbb{N}$ に対し $g(y) < g(x+y)$ を x に関する数学的帰納法で示す.

i) $x = 1$ のとき

$1_K > 0$ より

$g(y) < 1_K + g(y) = g(1) + g(y) = g(1+y)$ より成立.

ii) $x = k(\in \mathbb{N} - \{0\})$ のとき成立すると仮定する.

$1_K > 0$ より

$$g(y) < g(k+y) < 1_K + g(k+y) = g(1) + g(k+y) = g(k+1+y)$$

より $x = k+1$ のときも成立.

i)ii) より $g(y) < g(x+y)$

$x, y \in \mathbb{N}$ に対し $x < y$ なら $y - x \in \mathbb{N} - \{0\}$ で $g(x) < g(x+y-x) = g(y)$

$x = y$ なら $g(x) = g(y)$

$x > y$ なら $x < y$ のときと同様に $g(x) > g(y)$

より $x \leqq y \Leftrightarrow g(x) \leqq g(y)$

以上より g は自然数に対して演算を保存.

$x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ に対して $-x \in \mathbb{N}$ で $g(x) = -g(-x)$ と定義できる.

$x, y \in \mathbb{Z}$ に対し $g(x+y) = g(x) + g(y)$ を示す.

$x \geqq 0, y \geqq 0$ は既に示した.

$x \geqq 0, y \leqq 0, x+y \geqq 0$ のとき $g(x) = g(x+y) + g(-y) = g(x+y) - g(y)$ より成立.

$x \geqq 0, y \leqq 0, x+y \leqq 0$ のとき $g(y) = -g(-y) = -(g(-x-y) + g(x)) = g(x+y) - g(x)$ より成立.

$x \leqq 0, y \geqq 0$ は $x \geqq 0, y \leqq 0$ のときと同様.

$x \leqq 0, y \leqq 0$ のとき $g(x) + g(y) = -(g(-x) + g(-y)) = -g(-x-y) = g(x+y)$ より成立.

より $g(x+y) = g(x) + g(y)$

次に $x, y \in \mathbb{Z}$ に対し $g(xy) = g(x)g(y)$ を示す.

$x \geqq 0, y \geqq 0$ は既に示した.

$x \geqq 0, y \leqq 0$ のとき $g(xy) = -g(x(-y)) = -(g(x)g(-y)) = g(x)g(y)$ より成立.

$x \leqq 0, y \geqq 0$ のとき $g(xy) = -g((-x)y) = -(g(-x)g(y)) = g(x)g(y)$ より成立.

$x \leqq 0, y \leqq 0$ のとき $g(xy) = g((-x)(-y)) = g(-x)g(-y) = g(x)g(y)$ より成立.

より $g(xy) = g(x)g(y)$

$x \in \mathbb{Z}, x \leqq 0$ とすると $0 \leqq -x$ より $g(0) \leqq g(-x) = -g(x)$ で $g(x) \leqq g(0) = 0_K$ に注意する.

$x, y \in \mathbb{Z}$ に対し $x \leqq y \Leftrightarrow g(x) \leqq g(y)$ を示す.

$x \geqq 0, y \geqq 0$ は既に示した.

$x \geqq 0, y \leqq 0$ のとき $y \leqq x, g(y) \leqq g(x)$ が常に成り立ち成立.

$x \leqq 0, y \geqq 0$ のとき $x \geqq 0, y \leqq 0$ のときと同様に成立.

$x \leqq 0, y \leqq 0$ のとき

$$g(x) \leqq g(y) \Leftrightarrow -g(x) \geqq -g(y) \Leftrightarrow g(-x) \geqq g(-y) \Leftrightarrow -x \geqq -y \Leftrightarrow x \leqq y$$

より成立.

より $x \leqq y \Leftrightarrow g(x) \leqq g(y)$

以上より g は整数に対して演算を保存.

$x \in \mathbb{Q}$ とすると $x = \frac{p}{q}$ とおける. $(q \in \mathbb{N} - \{0\}, p \in \mathbb{Z})$

$q > 0$ なので $g(q) \neq 0_K$ で $g(x) = \frac{g(p)}{g(q)}$ と定義できる.

$q, s \in \mathbb{N} - \{0\}, p, r \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \\
\Leftrightarrow& ps - qr = 0 \\
\Leftrightarrow& g(ps - qr) = 0_K \\
\Leftrightarrow& \frac{g(ps - qr)}{g(qs)} = 0_K \ (\because \frac{1_K}{g(qs)} \neq 0_K) \\
\Leftrightarrow& \frac{g(p)g(s) - g(q)g(r)}{g(q)g(s)} = 0_K \\
\Leftrightarrow& \frac{g(p)}{g(q)} = \frac{g(r)}{g(s)}
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ から g が well-defined なことが言え $\Rightarrow$ から g が単射なことが言える.

また $x \in \mathbb{Z}$ に対し $x = \frac{x}{1}$ で $\frac{g(x)}{g(1)} = \frac{g(x)}{1_K} = g(x)$ なので g の有理数での定義は整数での定義と矛盾しない.

$q, s \in \mathbb{N} - \{0\}, p, r \in \mathbb{Z}$ に対し

$$
\begin{aligned}
&g(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}) \\
=&g(\frac{ps + qr}{qs}) \\
=&\frac{g(p)g(s) + g(q)g(r)}{g(q)g(s)} \\
=&\frac{g(p)}{g(q)} + \frac{g(r)}{g(s)} \\
=&g(\frac{p}{q}) + g(\frac{r}{s})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}) \\
=&\frac{g(p)g(r)}{g(q)g(s)} \\
=&g(\frac{p}{q})g(\frac{r}{s})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{p}{q} \leqq \frac{r}{s} \\
\Leftrightarrow &ps - qr \leqq 0 \\
\Leftrightarrow &g(ps - qr) \leqq 0_K \\
\Leftrightarrow &\frac{g(ps - qr)}{g(qs)} \leqq 0_K \ (\because \frac{1_K}{g(qs)} > 0_K) \\
\Leftrightarrow &\frac{g(p)g(s) - g(q)g(r)}{g(q)g(s)} \leqq 0_K \\
\Leftrightarrow &\frac{g(p)}{g(q)} \leqq \frac{g(r)}{g(s)}
\end{aligned}
$$

以上より g は有理数に対して演算を保存.

より g は $\mathbb{Q}$ から K への準同型写像.

g を $\mathbb{Q}$ から $g(\mathbb{Q})$ への関数に制限すると g の単射性から同型写像.

つまり $g(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ と同型な順序体.

5)

K, K' は実数の性質がすべて成り立つので実数と同じように扱えることに注意する.

K, K' に対する自然数をそれぞれ $K_{\mathbb{N}}, K'_{\mathbb{N}}$ 有理数をそれぞれ $K_{\mathbb{Q}}, K'_{\mathbb{Q}}$ とする.

この $K_{\mathbb{Q}}, K'_{\mathbb{Q}}$ がそれぞれ 4) の $\mathbb{Q}$ に同型な順序体であることは後で示しまずはこれを仮定して示す.

$K_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q} \cong K'_{\mathbb{Q}}$ となり $K_{\mathbb{Q}}$ から $K'_{\mathbb{Q}}$ への同型写像 f が存在.

f を K に拡張することを考える.

$x \in K$ に対して定理 3.9 より $K_{\mathbb{Q}}$ の数列で x に収束する a_n がある.

$\epsilon \in K'_{\mathbb{Q}}$ が $\epsilon > 0_{K'}$ のときアルキメデスの原理から $N' \in K'_{\mathbb{N}}$ で $\epsilon > \frac{1_{K'}}{N'}$ となるものが存在.

f は全単射なので $N \in K_{\mathbb{Q}}$ で $f(N) = N'$ となるものがただ 1 つ存在.$N' > 0_{K'}$ より $N > 0_K$

a_n は収束列なのでコーシー列でもあり $M \in \mathbb{N}$ が存在し $n, m \geqq M$ で $|a_n - a_m| < \frac{1_K}{N}$

このとき $n,m \geqq M$ で $|f(a_n)-f(a_m)| < \frac{1_{K'}}{f(N)} = \frac{1_{K'}}{N'} < \epsilon$

つまり $f(a_n)$ はコーシー列で収束する. その収束先を $f(x)$ とする.

この定義が well-defined であることを言う.

$K_{\mathbb{Q}}$ の数列 a_n, b_n が共に x に収束するとして $f(a_n), f(b_n)$ の収束先が同じであることを言えばいい.

ϵ, N, N' を上と同様に定義する.

$a_n - b_n$ は 0_K に収束するので $M \in \mathbb{N}$ が存在し $n \geqq M$ で $|a_n - b_n| < \frac{1_K}{N}$

$n \geqq M$ で $|f(a_n)-f(b_n)| < \frac{1_{K'}}{N'} < \epsilon$

より $\lim_{n\to\infty} f(a_n)-f(b_n) = 0_{K'}$ で $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$

より f は well-defined

$K_{\mathbb{Q}}$ の数列 a_n, b_n がそれぞれ $a, b (\in K)$ に収束するとして $a<b$ なら $f(a_n), f(b_n)$ の収束先 $f(a), f(b)$ は $f(a) < f(b)$ を満たすことを言う.

定理 3.8 を 2 度使い $a<x<y<b$ となる $x, y \in K_{\mathbb{Q}}$ が存在することが言える.

$n \geqq M$ で $|a_n - a| < x - a, |b_n - b| < b - y$ となる $M \in \mathbb{N}$ が存在.

$n \geqq M$ で $a_n < x < y < b_n$ なので $f(a_n) < f(x) < f(y) < f(b_n)$

より $n \to \infty$ として $f(a) \leqq f(x) < f(y) \leqq f(b)$ で示せた.

特に f は単射.

$a<b$ なら $f(a)<f(b)$ で $a=b$ なら $f(a)=f(b)$ で $b<a$ なら $f(b)<f(a)$ より $a \leqq b \Leftrightarrow f(a) \leqq f(b)$

$K_{\mathbb{Q}}$ の数列 a_n, b_n がそれぞれ $a, b (\in K)$ に収束するとすると $a_n + b_n$ は $a+b$ に $a_n b_n$ は ab に収束する

$$f(a_n+b_n) = f(a_n)+f(b_n), f(a_n b_n) = f(a_n)f(b_n)$$

で $n \to \infty$ とし

$$f(a+b) = f(a)+f(b), f(ab) = f(a)f(b)$$

以上より f は K から K' への同型写像.

最後に 4) で存在を示した K の含む $\mathbb{Q}$ と同型な体が $K_{\mathbb{Q}}$ であることを言う.

以下 g は 4) で定義した g を表す.

$g(\mathbb{N}) = K_{\mathbb{N}}$ を言えば g の整数, 有理数への拡張の仕方から $g(\mathbb{Q}) = K_{\mathbb{Q}}$ が言えるのでこれを言えばいい.

$g(\mathbb{N})$ が帰納的集合であることを言う.

$g(0) = 0_K$ より $0_K \in g(\mathbb{N})$

$x \in g(\mathbb{N})$ なら $g(y) = x$ となる $y \in \mathbb{N}$ が存在.$g(y+1) = x + 1_K$ で $x + 1_K \in g(\mathbb{N})$

以上より $g(\mathbb{N})$ が帰納的集合で $K_{\mathbb{N}} \subset g(\mathbb{N})$

$A = \{n \in \mathbb{N} | g(n) \in K_{\mathbb{N}}\}$ としこれが帰納的集合であることを言う.

$g(0) = 0_K \in K_{\mathbb{N}}$ で $0 \in A$

$x \in A$ のとき $g(x) \in K_{\mathbb{N}}$ で $g(x+1) = g(x) + 1_K \in K_{\mathbb{N}}$ より $x+1 \in A$

より A は帰納的集合で $\mathbb{N} \subset A$

つまり $n \in \mathbb{N}$ で $g(n) \in K_{\mathbb{N}}$

より $g(\mathbb{N}) \subset K_{\mathbb{N}}$

以上より $g(\mathbb{N}) = K_{\mathbb{N}}$

6)

(IV) と仮定する.$a \in A, b \in B$ より $a < b$

$a < \frac{a+b}{2_K} < b$ が言える. ただし $2_K = 1_K + 1_K$

$\frac{a+b}{2_K} \in K$ なので $\frac{a+b}{2_K} \in A \cup B$

しかし a は A の最大元なので $\frac{a+b}{2_K} \notin A$

b は B の最小元なので $\frac{a+b}{2_K} \notin B$

より矛盾し (IV) となることはない.

7)

6) より連続の公理と順序体 K の任意の切断 $< A, B >$ が (III) の形にならないことが同値であることを示せばいい.

$\Rightarrow$

$B \neq \emptyset$ なので $b \in B$ が存在. 任意の $a \in A$ に対し $a < b$ なので b は A の上界.

より A は上に有界で $A \neq \emptyset$ なので A の上限 $s \in K$ が存在.$K = A \cup B$ なので $s \in A$ か $s \in B$

$s \in A$ と仮定する.s は A の上限なので特に上界で $a \in A$ に対し $a \leqq s$ より s は A の最大元.A に最大元が存在し (III) にはならない.

$s \in B$ と仮定する.$b \in B$ とすると任意の $a \in A$ に対し $a < b$ で b は A の上界. より S が A の上限なことより $s \leqq b$ で s は B の最小元.B に最小元が存在し (III) にならない.

以上より示された.

$\Leftarrow$

上に有界な K の部分集合 $S(\neq \emptyset)$ を考える.S は上に有界なので $U(\subset K)$ を S の上界の集合とすると $U \neq \emptyset$

$s \in S$ が存在し $s - 1_K \in K$ で $s - 1_K < s$ より $s - 1_K$ は S の上界でない. より $D = \{x \in K | x \notin U\}$ とすると $D \neq \emptyset$

$x \in D$ とすると $s \in S$ が存在し $x < s$ で $u \in U$ に対し $s \leqq u$ なので $x < u$

$D \cup U = K, D \cap U = \emptyset$ だ

より仮定から (III) にならなく D に最大元が存在するか U に最小元が存在する.

D に最大元が存在すると仮定する. 最大元を d とすると $d \notin U$ より $d < s$ となる $s \in S$ が存在. $\frac{s+d}{2_K} < s$ より $\frac{s+d}{2_K} \in D$ で $\frac{s+d}{2_K} > d$ より d が最大元なことに矛盾. より背理法から D に最大元は存在しない.

より U に最小元が存在する. つまり連続の公理が示された.

8)

問題文で定義された R を R 教科書での定義の R を $\mathbb{R}$ と表す. 解析入門では $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ から定義されているのでそれに従う. つまりこの問題では $\mathbb{R}$ の性質を用いて R を得る.

A の要素は $\mathbb{Q}$ のコーシー列だが $\mathbb{R}$ の数列とみると収束列であることに注意する.

0_A を $0_A = (0)$,$-(a_n) = (-a_n)$ とすると A が問題文で与えられた演算で可換環になることは有理数が体で特に可換環であることから示せる.

まず R の加算と乗算が well-defined であることを言う.

$(a_n), (a'_n)$ が同値で $(b_n), (b'_n)$ も同値であるとする.A の要素はコーシー列なので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a'_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b'_n = b \ (a, b \in \mathbb{R})$$

とできる. 定理 2.5 より

$$\lim_{n\to\infty}((a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)) = (a+b) - (a+b) = 0, \lim_{n\to\infty}(a_n b_n - a'_n b'_n) = ab - ab = 0$$

より $(a_n + b_n)$ と $(a'_n + b'_n), (a_n b_n)$ と $(a'_n b'_n)$ はそれぞれ同値で well-defined

A が可換環なので R も可換環.

(e_n) を $e_n = 1$ となる数列とすると明らかに $(e_n) \in A$

$(a_n) \in A$ が $[a_n] \neq [0]$ としたとき $b_n = \begin{cases} 1 & a_n = 0 \\ \frac{1}{a_n} & a_n \neq 0 \end{cases}$ とする.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とすると $[a_n] \neq [0]$ より $a \neq 0$ で $n \geqq M$ で $|a_n - a| < |a|$ となる $M \in \mathbb{N}$ が存在.

$n \geqq M$ で $a_n \neq 0$ より $b_n = \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{a}$ で (b_n) も $\mathbb{R}$ のコーシー列.$b_n \in \mathbb{Q}$ より $(b_n) \in A$

$a_n b_n = \begin{cases} 0 & a_n = 0 \\ 1 & a_n \neq 0 \end{cases}$ で $n \geqq M$ で $a_n b_n = 1 = e_n$

より $1_R = [e_n], [b_n] = [a_n]^{-1}$ とすると R は (R-8),(R-9) を満たす.(R-10) は $\mathbb{Q}$ の $1, 0$ が $1 \neq 0$ なことから $1_R \neq 0_R$ で満たされる.

R の $[a_n] \leqq [b_n]$ は問題文の $[a_n] < [b_n]$ または $[a_n] = [b_n]$ が成り立つという意味であることに注意する.

$[a_n] < [b_n]$ なら $M(\in \mathbb{N}), \epsilon(> 0)$ が存在して $n \geqq M$ で $a_n + \epsilon < b_n$ より $n \to \infty$ とし $\lim_{n\to\infty} a_n + \epsilon \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$ で $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$

また $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ としたとき $a < b$ なら $n \geqq M$ で $|a_n - a| < \frac{b-a}{3}, |b_n - b| < \frac{b-a}{3}$ となる $M \in \mathbb{N}$ が存在.

$n \geqq M$ で $a_n < a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3} < b_n$ で特に $a_n + \frac{b-a}{3} < b_n$

より $[a_n] < [b_n]$

以上より

$$[a_n] < [b_n] \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

$[a_n] = [b_n]$ なら $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ なので R の $<$ は well-defined

$a_n \in A$ に対し $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ で $\mathbb{R}$ は順序体の性質を満たすので R も順序体の性質を満たす.

$a, b \in R$ を $a > 0_R, b > 0_R$ とする.

$\frac{b}{a} \in R$ でこれの代表元を $(q_n)(\in A)$ とする.$n, m \geqq M$ で $|q_n - q_m| < \frac{1}{2}$ となる $M \in \mathbb{N}$ が存在.

$n \geqq M$ で $q_n < q_M + \frac{1}{2}$ より $\lim_{n\to\infty} q_n \leqq q_M + \dfrac{1}{2} < q_M + 1$

$q_M + 1 \in \mathbb{Q}$ で $\frac{p}{q}$ とおける.$(q \in \mathbb{N} - \{0\}, p \in \mathbb{Z})$

$p \leqq 0$ で $\lim_{n\to\infty} q_n < 0$ で $\frac{b}{a} < 0_R \Leftrightarrow b < 0_R a$

$p > 0$ で $\lim_{n\to\infty} q_n < p$ で $\frac{b}{a} < (p) \Leftrightarrow b < (p)a$ だ. ただし (p) はすべての自然数に対して p を返す数列.

$(p), 0_R \in R_{\mathbb{N}}$ よりアルキメデスの原理は成立.

(r_n) を R のコーシー数列とする.(r_{in}) を r_i の代表元の有理数列とする.

(r_{in}) の収束先を $d_i(\in \mathbb{R})$ とする.

$n \geqq M_i$ で $|r_{in} - d_i| < \frac{1}{i+1}$ となる $M_i \in \mathbb{N}$ が存在. 有理数列 (a_i) を $a_i = r_{iM_i}$ と定義する.

(r_n) はコーシー列なので $\epsilon > 0$ に対し $i, j \geqq M$ で $|r_i - r_j| < \frac{\epsilon}{4_R}$ となる $M \in \mathbb{N}$ が存在.

このとき $|(r_{in}) - (r_{jn})| < \frac{\epsilon}{4_R} \Leftrightarrow |d_i - d_j| < \frac{\epsilon}{4}$

$i, j \geqq max(M, \frac{4}{\epsilon})$ で $|a_i - d_i| = |r_{iM_i} - d_i| < \frac{1}{i+1} < \frac{\epsilon}{4}, |a_j - d_j| = |r_{jM_j} - d_j| < \frac{1}{j+1} < \frac{\epsilon}{4}, |d_i - d_j| < \frac{\epsilon}{4}$

$|a_i - a_j| < \frac{3\epsilon}{4} < \epsilon$ で (a_n) はコーシー列で $(a_n) \in A$

$i \geqq max(M, \frac{4}{\epsilon})$ とし $|(r_{in}) - (a_n)|$ を考える.

$n \geqq max(M_i, i)$ で $|a_n - d_n| = |r_{nM_n} - d_n| < \frac{1}{n+1} < \frac{\epsilon}{4}, |d_i - d_n| < \frac{\epsilon}{4}, |r_{in} - d_i| < \frac{1}{i+1} < \frac{\epsilon}{4}$

より $|a_n - r_{in}| < \frac{3\epsilon}{4}$ で $n \to \infty$ とし $|\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} r_{in}| \leqq \dfrac{3\epsilon}{4} < \epsilon$ つまり $|(a_n) - r_i| < \epsilon$

より (r_n) は $[a_n]$ に収束. つまり R のコーシー列は収束する. より連続の公理も満たされる.

9)

$k_0+\frac{1}{k_1+\frac{1}{k_2+\cdots\frac{1}{k_n}}}$ を $[k_0;k_1,k_2,\cdots,k_n]$ と書く事にする.

$k_n>0\ (n>0)$ を満たす整数列 $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}},(q'_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ を以下のように定義する.

$$p'_n=\begin{cases}k_0 & n=1\\ k_0k_1+1 & n=2\\ p'_{n-1}k_{n-1}+p'_{n-2} & n\geqq 3\end{cases},\ q'_n=\begin{cases}1 & n=1\\ k_1 & n=2\\ q'_{n-1}k_{n-1}+q'_{n-2} & n\geqq 3\end{cases}$$

$n\in\mathbb{N}-\{0\},t>1$ に対し $[k_0;\cdots,k_n,t]=\frac{p'_{n+1}t+p'_n}{q'_{n+1}t+q'_n}$ を数学的帰納法で示す.

i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}[k_0;k_1,t]&=k_0+\frac{1}{k_1+\frac{1}{t}}\\&=k_0+\frac{t}{tk_1+1}\\&=\frac{(k_0k_1+1)t+k_0}{k_1t+1}\\&=\frac{p'_2t+p'_1}{q'_2t+q'_1}\end{aligned}$$

ii) $n=m(\in\mathbb{N}-\{0\})$ のときに成立すると仮定する.

$$\begin{aligned}[k_0;\cdots,k_{m+1},t]&=[k_0;\cdots,k_m,k_{m+1}+\frac{1}{t}]\\&=\frac{p'_{m+1}(k_{m+1}+\frac{1}{t})+p'_m}{q'_{m+1}(k_{m+1}+\frac{1}{t})+q'_m}\ (\because \text{帰納法の仮定})\\&=\frac{(p'_{m+1}k_{m+1}+p'_m)t+p'_{m+1}}{(q'_{m+1}k_{m+1}+q'_m)t+q'_{m+1}}\\&=\frac{p'_{m+2}t+p'_{m+1}}{q'_{m+2}t+q'_{m+1}}\end{aligned}$$

i)ii) より示された.

特に $t=k_{n+1}$ として $[k_0;\cdots,k_{n+1}]=\frac{p'_{n+1}k_{n+1}+p'_n}{q'_{n+1}k_{n+1}+q'_n}=\frac{p'_{n+2}}{q'_{n+2}}$

$[k_0;]=\frac{p'_1}{q'_1},[k_0;k_1]=\frac{p'_2}{q'_2}$ と合わせて

$[k_0;\cdots,k_n]=\frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}}$ が任意の自然数で成り立つ.

次に $p'_{n+2}q'_{n+1}-p'_{n+1}q'_{n+2}=(-1)^n$ を数学的帰納法で示す.

i) $n=0$ のとき

$p'_2q'_1-p'_1q'_2=(k_0k_1+1)\cdot 1-k_0k_1=1=(-1)^0$ で成立.

ii) $n=m(\in\mathbb{N})$ のときに成立すると仮定する.

$$\begin{aligned}p'_{m+3}q'_{m+2}-p'_{m+2}q'_{m+3}&=(p'_{m+2}k_{m+2}+p'_{m+1})q'_{m+2}-p'_{m+2}(q'_{m+2}k_{m+2}+q'_{m+1})\\&=-(p'_{m+2}q'_{m+1}-p'_{m+1}q'_{m+2})\\&=(-1)^{m+1}\end{aligned}$$

で $n=m+1$ も成立.

i)ii) より示された.

より p'_n, q'_n の公約数は 1 の約数で 1. つまり p'_n, q'_n は互いに素.

$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ に対し問題文のように変数を設定すると x の連分数展開は $k_0 = [x]$ として $[k_0; \cdots, k_n, \cdots]$

上で示したことより $a_n = \frac{q'_n}{p'_n}$

p'_n, q'_n は互いに素なので $p_n = p'_n, q_n = q'_n$

より $x = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}}$

$q_n \geqq n-1$ を数学的帰納法で示す.

i) $n = 1, 2, 3$ のとき

$q_1 = 1 \geqq 0$

k_1 は正整数なので $q_2 = k_1 \geqq 1$

k_2 は正整数なので $q_3 = q_2 k_2 + q_1 \geqq 1 \cdot 1 + 1 \geqq 2$

ii) $n = m, m+1, m+2 (m \in \mathbb{N} - \{0\})$ のときに成立すると仮定する.

k_{m+2} は正整数なので $q_{m+3} = q_{m+2} k_{m+2} + q_{m+1} \geqq (m+1) \cdot 1 + m = 2m+1 \geqq m+2$

で $n = m+3$ も成立.

i)ii) より示された.

$n > 1$ で

$$\begin{aligned}
|x - a_n| &= |\frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}| \\
&= |\frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n (q_n x_n + q_{n-1})}| \\
&= |\frac{1}{q_n (q_n x_n + q_{n-1})}| \ (\because p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}) \\
&\leqq |\frac{1}{q_n^2}| \ (\because x_n > 1, q_{n-1} \geqq n-2 \geqq 0)
\end{aligned}$$

$n = 0$ も

$$|x - a_1| = x - [x] \leq 1 = \frac{1}{q_1^2}$$

$\epsilon (> 0)$ に対し $N \in \mathbb{N}$ が $N > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + 1$ を満たすとする.

$n \geqq N$ なら $q_n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ で $|x - a_n| \leqq \frac{1}{q_1^2} < \epsilon$

つまり $\lim_{n \to \infty} a_n = x$

(補足)

上の答案は無理数の連分数展開が無限に続くことを既知としている. その証明をここに書く.

$[k_0; k_1, k_2, \cdots, k_n]$ が有理数なことを数学的帰納法で示す. ただし k_i は $i = 0, \cdots, n$ で整数で $k_i > 0 \ (i > 0)$

i) $n = 0$ のとき

$k_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ で成立.

ii) $n = m (\in \mathbb{N})$ で成立すると仮定する.

$$[k_0; k_1, k_2, \cdots, k_{m+1}] = k_0 + \frac{1}{[k_1; k_2, \cdots, k_{m+1}]}$$

帰納法の仮定より $[k_1; k_2, \cdots, k_{m+1}] = \frac{q}{p} \ (p, q \in \mathbb{Z})$ とおけ $[k_0; k_1, k_2, \cdots, k_{m+1}] = \frac{k_0 q + p}{q}$ でこれは有理数.

より $n = m+1$ のときも成立.

i)ii) より示された.

つまり x の連分数展開が有限なら x は有理数.

対偶を取り無理数の連分数展開は無限.

(おまけ)

有理数の連分数展開が有限の証明

$p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} - \{0\}$ に対し $\frac{p}{q}$ の連分数展開が有限であることを q に関する数学的帰納法で示す.

i) $q = 1$ のとき

$\frac{p}{q} = p$ で連分数展開は $[p;]$ より成立.

ii) $q = 1, \cdots, m$ で成立すると仮定する.

p が $m+1$ の倍数のとき $\frac{p}{m+1} = [\frac{p}{m+1};]$

そうでないとき $p = (m+1)a + b$ とおける. $(a \in \mathbb{Z}, b = 1, \cdots, m)$

$$\frac{p}{m+1} = a + \frac{1}{\frac{m+1}{b}}$$

帰納法の仮定から $\frac{m+1}{b} = [k_1; k_2, \cdots, k_n]$ とおける.

$\frac{p}{m+1} = [a; k_1, k_2, \cdots, k_n]$ で連分数展開は有限.

より $q = m+1$ も成立.

i)ii) より有理数の連分数展開が有限

10)

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$$

より $[a_0; a_1, \cdots]$ を $\sqrt{2} - 1$ の連分数展開とすると $a_0 = 0, a_1 = 2, a_n = a_{n-1} (n \geqq 2)$

つまり $a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 2 & n \neq 0 \end{cases}$

より $\sqrt{2}$ の連分数展開は $\begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \neq 0 \end{cases}$

$$\sqrt{3} - 1 = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{1}{2 + (\sqrt{3} - 1)}$$

より b_n, c_n をそれぞれ $\sqrt{3} - 1, \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ の連分数展開とすると

$$b_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ c_{n-1} & n > 1 \end{cases}, c_n = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ b_{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

より $b_1 = 1, b_2 = 2, b_n = b_{n-2} (n > 2)$ で $\sqrt{3}$ の連分数展開は $\begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & n \text{ が正の奇数} \\ 2 & n \text{ が正の偶数} \end{cases}$

$$\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{4 + (\sqrt{5} - 2)}$$

より d_n を $\sqrt{5} - 2$ の連分数展開とすると $d_n = \begin{cases} 4 & n = 1 \\ d_{n-1} & n > 1 \end{cases}$

つまり $d_n = 4(n > 0)$ で $\sqrt{5}$ の連分数展開は $\begin{cases} 2 & n = 0 \\ 4 & n \geq 0 \end{cases}$

$$\sqrt{6} - 2 = \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{6}-2}{2}}, \frac{\sqrt{6}-2}{2} = \frac{1}{4 + (\sqrt{6}-2)}$$

より e_n, f_n を $\sqrt{6} - 2, \frac{\sqrt{6}-2}{2}$ の連分数展開とすると

$$e_n = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ f_{n-1} & n > 1 \end{cases}, f_n = \begin{cases} 4 & n = 1 \\ e_{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

より $e_1 = 2, e_2 = 4, e_n = e_{n-2}(n > 2)$ で $\sqrt{6}$ の連分数展開は $\begin{cases} 2 & n = 0 \\ 2 & n \text{ が正の奇数} \\ 4 & n \text{ が正の偶数} \end{cases}$

$$\sqrt{7} - 2 = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{7}-1}{3}}, \frac{\sqrt{7}-1}{3} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{7}-1}{2}}, \frac{\sqrt{7}-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{7}-2}{3}}, \frac{\sqrt{7}-2}{3} = \frac{1}{4 + (\sqrt{7}-2)}$$

より g_n, h_n, k_n, l_n を $\sqrt{7} - 2, \frac{\sqrt{7}-1}{3}, \frac{\sqrt{7}-1}{2}, \frac{\sqrt{7}-2}{3}$ の連分数展開とすると

$$g_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ h_{n-1} & n > 1 \end{cases}, h_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ k_{n-1} & n > 1 \end{cases}, k_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ l_{n-1} & n > 1 \end{cases}, l_n = \begin{cases} 4 & n = 1 \\ g_{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

より $g_1 = 1, g_2 = 1, g_3 = 1, g_4 = 4, g_n = g_{n-4}(n > 4)$ で $\sqrt{7}$ の連分数展開は $\begin{cases} 2 & n = 0 \\ 1 & n \text{ が正で 4 の倍数でない} \\ 4 & n \text{ が正で 4 の倍数} \end{cases}$

11)

成り立たない有理数が存在するとしそれを a とする.$\epsilon(> 0)$ が存在し $x \in \mathbb{R}$ に対し $|x - a| < \epsilon$ なら $x \in \mathbb{Q}$

例えば $\sqrt{2}$ は無理数なので無理数は存在し $p(\in \mathbb{R})$ を無理数としてもいい.

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密なので $|q - p| < \epsilon$ を満たす $q \in \mathbb{Q}$ が存在.

$|(a + q - p) - a| = |q - p| < \epsilon$ なので $a + q - p$ は有理数.a, q は有理数で有理数は加算について閉じているので p も有理数となり矛盾. より背理法から示された.

§4 $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{C}$

1)

i) を満たすことを言う.

$A, B \in \mathbb{R}^n$ に対し $B - A \in \mathbb{R}^n$ が唯一定まることを言えばいいが $\mathbb{R}^n$ が加群であることから明らか.

ii) を満たすことを言う.

$a, A \in \mathbb{R}^n$ に対し $B - A = a$ を満たす $B \in \mathbb{R}^n$ が唯一存在することを言えばいい.$B = A + a$ のときのみ成立するので ii) も満たす.

iii) を満たすことを言う.

$A, B, C \in \mathbb{R}^n$ に対し $(B - A) + (C - B) = C - A$ なので成立.

以上より示された.

2)

$x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$|g(x) - g(y)| = |(f(x) - f(0)) - (f(y) - f(0))| = |f(x) - f(y)| = |x - y|$$
$$|g(x)| = |f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x|$$
$$|g(y)| = |f(y) - f(0)| = |y - 0| = |y|$$

(4.15) より

$$|g(x) - g(y)|^2 = |g(x)|^2 - 2(g(x)|g(y)) + |g(y)|^2$$
$$|x - y|^2 = |x|^2 - 2(x|y) + |y|^2$$

以上より

$$-2(g(x)|g(y)) = -2(x|y) \Leftrightarrow (g(x)|g(y)) = (x|y)$$

$(g(x)|g(y)) = (x|y)$ と命題 4.2 を用いると $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned}
&(g(x+y) - g(x) - g(y)|g(x+y) - g(x) - g(y)) \\
=&(g(x+y)|g(x+y)) + (g(x)|g(x)) + (g(y)|g(y)) - 2(g(x)|g(x+y)) - 2(g(y)|g(x+y)) + 2(g(x)|g(y)) \\
=&(x+y|x+y) + (x|x) + (y|y) - 2(x|x+y) - 2(y|x+y) + 2(x|y) \\
=&((x+y) - x - y|(x+y) - x - y) = (0|0) = 0
\end{aligned}$$

より命題 4.2 4) より $g(x+y) - g(x) - g(y) = 0$ つまり $g(x+y) = g(x) + g(y)$

$(g(x)|g(y)) = (x|y)$ と命題 4.2 を用いると $x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}
&(g(ax) - ag(x)|g(ax) - ag(x)) \\
=&(g(ax)|g(ax)) + a^2(g(x)|g(x)) - 2a(g(x)|g(ax)) \\
=&(ax|ax) + a^2(x|x) - 2a(x|ax) = (a^2 + a^2 - 2a^2)(x|x) = 0(x|x) = 0
\end{aligned}$$

より命題 4.2 4) より $g(ax) - ag(x) = 0$ つまり $g(ax) = ag(x)$

$e_i(\in \mathbb{R}^n)$ を $i = 1, \cdots, n$ で以下のように定義する.

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$x(\in \mathbb{R}^n)$ は

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

なので $g(x+y) = g(x) + g(y), g(ax) = ag(x)$ を用いて

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i)$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を以下のように定義する.

$$A_{ij} = g(e_j)_i \ (i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, n)$$

以下が $j = 1, \cdots, n$ で成り立つ.

$$(Ax)_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ji} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i)_j = g(x)_j$$

より $Ax = g(x)$ また

$$(A^t A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} g(e_i)_k g(e_j)_k = (g(e_i)|g(e_j)) = (e_i|e_j)$$

ここで $(e_i|e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ なので $(A^t A)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

つまり $A^t A = I_n$ で A は直交行列.

さらに $f(x) = g(x) + f(0) = Ax + f(0)$ で $b = f(0)$ とすると $f(x) = Ax + b$ で示された.

逆に $A(\in \mathbb{R}^{n\times n})$ が直交行列で $b \in \mathbb{R}^n$ のとき $f(x) = Ax + b$ とすると $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$|f(x)-f(y)|^2 = |(Ax+b)-(Ay+b)|^2 = |A(x-y)|^2 = (x-y)^t A^t A(x-y) = (x-y)^t I_n (x-y) = (x-y)^t (x-y) = |x-y|^2$$

つまり $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ で f は合同変換.