INSTITUTO TECNÓLOGICO DE MORELIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

CONTROL I

Practica No. 1
SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Ariadne Paola González Gallegos 13121114
José Abel Gutiérrez Álvarez 13121117

Índice general

Introducción

Para poder analizar un sistema de control es necesario obtener un modelo matemático que describa el funcionamiento del mismo, este modelo matemámtico se obtiene a partir de las leyes fisicas que lo rigen; en este proceso de modelar el sistema se busca hacer una ecuación de balance de energía y asi llegar a conocer su función de transferencia, en este punto se llega a sistemas de ecuaciones diferenciales, las cuales pueden ser complejas de resolver, especialmente si el sistema no es de primer grado. Por otro lado existe la opción de trabajar en el dominio de Laplace que, no solamente es útil para la resolución matemática de ecuaciones sino que se presta especialmente para ser utilizado con el concepto de función de transferencia.

En general un proceso recibe una entrada $u(t)$y genera una salida $y(t)$. Si llevamos estas señales al dominio de Laplace tendremos una entrada $U(s)$ que genera una salida $Y(s)$. La función que relaciona salida con entrada se denomina función de transferencia $H(s)$.

En este trabajo se muestra una función de *Scilab* que permite gráficar la respuesta en el tiempo de un sistema de primer orden de manera general, así como el analisis de un sistema hidráulico y su resolucion con la función generada.

Parte 1

Sistemas de Primer Orden

1.1. Obteniendo la forma general de la función de transferencia

Para comenzar debemos de obtener la ecuación general que describe a todos los sistemas de primer orden, y esto solo sera posible si conocemos la forma estándar de la función de transferencia en los mismos.

Para encontrar esta ultima, analizaremos un par de sistemas de primer orden, uno RC y otro RL.

Iniciemos con RC. En la Figura 1.1 tenemos el circuito a analizar.

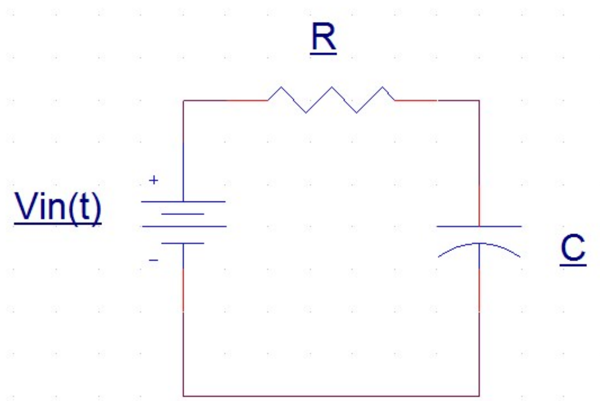

Figura 1.1: Circuito RC

Como vemos, se trata de un circuito básico RC, una fuente de voltaje en serie con una resistencia y un capacitor; y su función de transferencia esta dada de la siguiente manera.

Primero debemos encontrar su formula de balance de energías.

$$v_{in}(t) = v_r(t) + v_c(t)$$

Y esta también se puede escribir como:

$$v_{in}(t) = R \cdot i_c(t) + v_c(t)$$

Pero sabemos que:

$$i_c(t) = \frac{d \cdot v_c(t)}{dt}$$

Y sustituyendo en la anterior.

$$v_{in}(t) = R\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

Por ultimo aplicamos Laplace, y obtenemos lo siguiente:

$$V_{IN}(s) = RCsV_c(s) + V_c(s)$$

Y haciendo el despeje correspondiente para obtener una forma de la ecuación, con la cual podamos aplicar la anti-transformada de Laplace, obtenemos lo siguiente:

$$H(s) = \frac{V_c(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \tag{1.1}$$

Y ahora haremos lo mismo para un circuito RL.

El circuito es el mismo que para RC pero con un inductor en vez de un capacitor. Este es mostrado en la Figura 1.2.

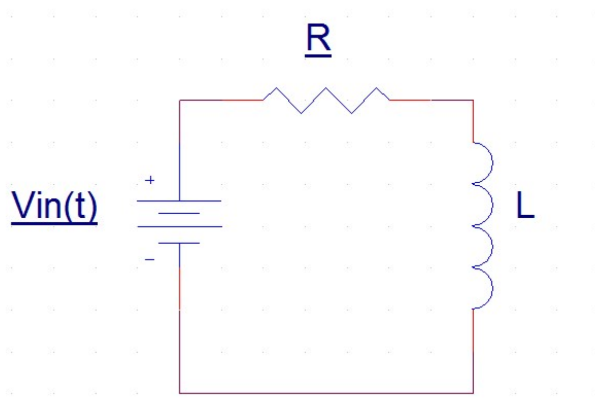

Figura 1.2: Circuito RL

Y para obtener su función de transferencia las ecuaciones serian las siguientes:

$$v_{in}(t) = v_R(t) + v_L(t)$$

Y usando la igualdad de v_L tenemos que:

$$v_{in}(t) = R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

Ahora aplicamos Laplace.

$$V_{IN}(s) = R \cdot I_L(s) + LSI_L(s)$$

Y finalmente obtenemos:

$$H(s) = \frac{I_L(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{R}{L}} \tag{1.2}$$

Esta es la ecuación que nos interesa.

Conociendo la ecuación 1.1 y la ecuación 1.2, entre otras que no pondremos en el reporte por simplicidad, podemos deducir que la forma estándar de una función de transferencia de primer orden tiene la forma:

$$H(s) = \frac{bs + c}{s + a} \tag{1.3}$$

Y ahora que conocemos esta forma pasemos al siguiente paso.

1.2. Deduciendo la forma general para circuitos de primer orden

Para esta sección vamos a seguir justo donde nos quedamos, habiendo encontrado la forma estándar de $H(s)$ podemos encontrar el forma general para la salida de circuitos de primer orden; esta estará dada por:

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

,donde:

$H(s)$ = Función de transferencia

$Y(s)$ = Salida del circuito

$X(s)$ = Señal escalón a la entrada del circuito

Ahora, como ya conocemos la forma estandar de $H(s)$, bastaria con encontrar la de $X(s)$, para nuestra suerte esto es bastante simple ya que al ser un escalon o C, su transformada de Laplace en cualquier caso sera directa, y sera de la forma:

$$X(s) = \frac{1}{s} \tag{1.4}$$

Ahora podemos encontrar la forma estándar de $Y(s)$, y esta esta dada por:

$$Y(s) = \tfrac{1}{s} \cdot \tfrac{bs+c}{s+a}$$

Aplicando fracciones parciales y un poco de álgebra obtenemos:

$$Y(s) = \tfrac{c}{a} + (\tfrac{ab-c}{a})e^{-at}$$

Y finalmente regresando al dominio del tiempo obtenemos que:

$$y(t) = \frac{c}{a} + (b - \frac{c}{a})e^{-at} \tag{1.5}$$

Y esta es la forma estándar de la salida de un circuito de primer orden; donde solo necesitamos encontrar los parámetros a, b y c para conocer la respuesta del circuito.

1.3. Código en SciLab

Para esta seccion en base a la ecuación 1.5 crearemos un código en SciLab que nos de, a partir de los parámentros a, b y c la forma de onda de la salida de cualquier circuito de primer orden.

Y el código que generamos es el siguiente:

```
1  function[y]=EcuGen(a,b,c)
2  tau = 1/a;
3  t = 0:tau/10:10*tau;
4  n=length(t);
5  u = c/a;
6  if a~=0 then
7          for i=1:n
8          y(1,i) = u + ((b-u)*exp(-a*t(i)));
9          end
10 else
11         for i=1:n
12         y(n) = b;
13         end
14 end
15 plot(t,y)
16 endfunction
```

Ahora explicaremos el código a grandes rasgos; primero que nada, la función recibe los parámetros a,b y c, y retorna un valor de y; ahora, después de analizar un poco la función, detectamos que a es en realidad $\frac{1}{\tau}$, por lo cual, en la linea 2 del código, despejando a, podemos obtener el valor de τ; en la siguiente linea generamos un vector de 0 a 10τ, con divisiones que definirán la cantidad de valores que graficaremos en el eje X mas adelante, en este caso esta configurado para 100 valores, sin embargo, podría modificarse cambiando el denominador de los pasos o step que tendrá dicho vector

Después en la linea 4 simplemente medimos el vector generado para conocer el numero de valores que graficaremos; la siguiente linea, la 5 genera una constante recurrente en la formula general de la salida, si revisamos la ecuación 1.5, podemos ver que el termino $\frac{c}{a}$ se repite, y para simplificar el código lo sustituiremos por u.

A partir de aquí, la linea 6, llegamos a la parte principal del código; creamos un ciclo if que es por seguridad compara a con un 0, ya que si es igual se genera un error en el código, porque en ese caso tendríamos divisiones entre cero y eso es infinito, y eso acarrea problemas mas adelante. Sin embargo este error solo se daría si al calcular a, b o c el usuario se equivoca, ya que fuera de ese caso particular ningún sistema tiene en a un valor de cero, porque eso significaría que el sistema tiene $\tau = \infty$ y obviamente ningún sistema tiene ese valor para τ; ahora, dentro de este ciclo tenemos otro ciclo for anidado, en el colocamos una variable con valor inicial 1, y que aumenta hasta llegar a el número de valores que tiene el vector de valores del eje X a evaluar, dentro de este ciclo se va creando otro vector que genera los valores de la salida para cada uno de los de entrada

Y ya para terminar, en la penúltima linea se genera una gráfica que contrapone los valores de 0 a 10τ(eje X), y los valores que se generan a la salida(eje Y), y se obtiene la respuesta de la salida del sistema evaluado.

1.4. Probando el código

Para terminar con esta primer parte de la practica probamos de manera rápida el código generado. Lo haremos con un circuito RC de iguales características al de la figura 1.1, asignaremos valores típicos; por ejemplo:

Para obtener un $\tau = 1ms$, conociendo que $\tau = RC$ y proponiendo un $C = 1\mu F$, obtenemos un valor de $R = 1k\Omega$.

Conociendo estos valores y sabiendo que la formula general de este circuito en particular es la mostrada en la ecuación 1.1, podemos encontrar los valores de a, b y c de la siguiente manera:

$$a = \frac{1}{RC} = \frac{1}{(1k\Omega)(1\mu F)} = 1000$$

$$b = 0$$

$$c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{(1k\Omega)(1\mu F)} = 1000$$

Y sustituyendo en el código generado obtenemos la función de respuesta.

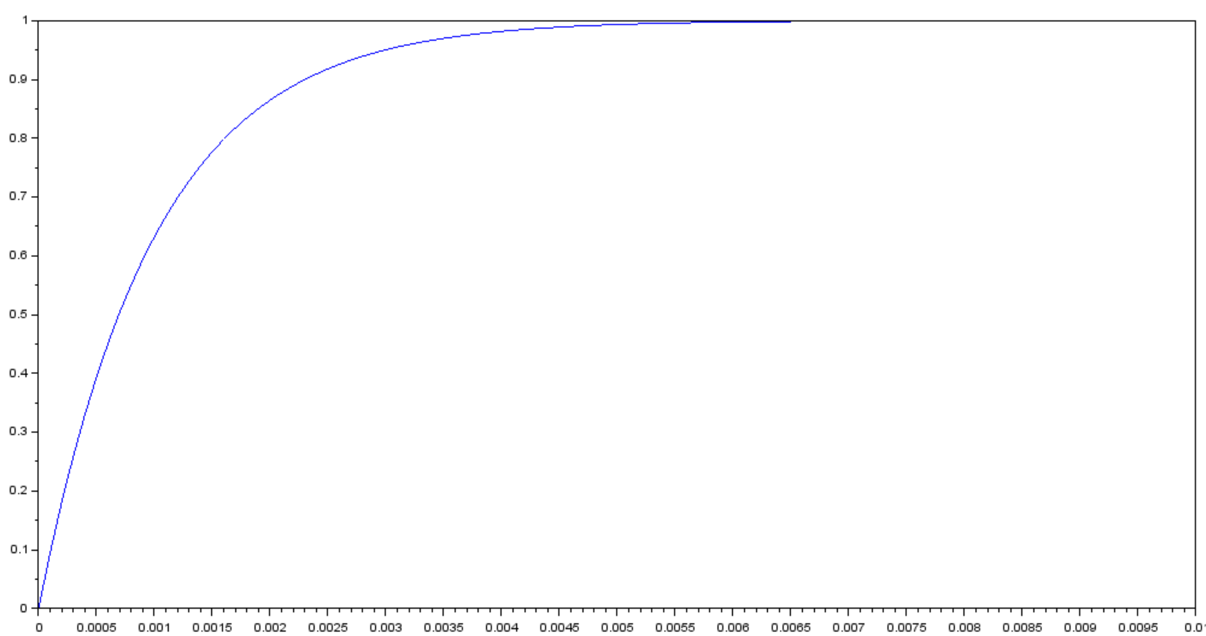

Figura 1.3: Respuesta a la salida del sistema propuesto.

La respuesta de salida del sistema es mostrada en la figura 1.3.

Parte 2

Ejercicio

2.1. Ecuación de balance de energía

Para esta parte del reporte trabajaremos con el sistema hidráulico propuesto en la caratula de la practica.

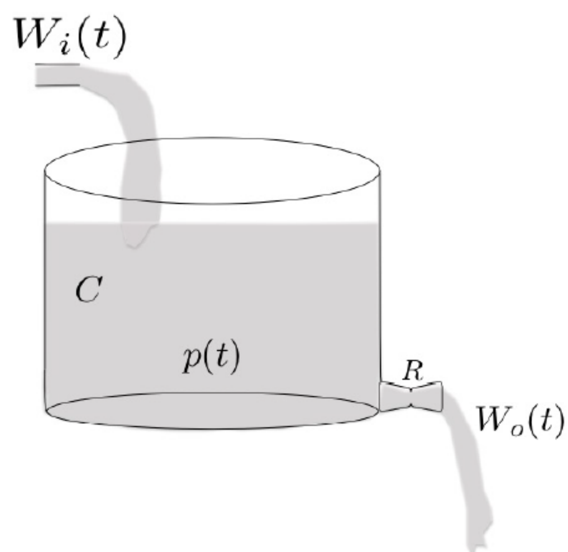

Figura 2.1: Sistema hidráulico propuesto.

Para obtener la ecuación de balance de energía del sistema mostrado en la figura 2.1 necesitamos encontrar una ecuación con la siguiente estructura:

$$Energia_{generada} + Energia_{entrada} = Energia_{acumulada} + Energia_{salida}$$

En el sistema notamos que no existe una energía generada, sin embargo si una energía de entrada, esta es el flujo de entrada del agua, llamada para el sistema $w_i(t)$, también tenemos una energía acumulada, que es el agua en el tanque, esta se describe como $A \cdot \frac{h(t)}{dt}$, ya que depende tanto del area A como de la altura h sin embargo, como la altura es variable dependiendo de la entrada y salida del agua en un tiempo determinado, esta es dependiente del tiempo; y por ultimo tenemos la energía de salida, que es el flujo de agua a la salida, esta esta representada en el sistema como $w_o(t)$, y es proporcional a la resistencia R que oponga la boquilla de salida al flujo, ahora sabemos que este parámetro esta dado por $\frac{rgh}{R}$; por lo tanto sabemos que:

$$w_i(t) = A \cdot \frac{dh(t)}{dt} + \frac{rgh(t)}{R} \tag{2.1}$$

La ecuación 2.1 es la ecuación de balance de energía.

2.2. Función de transferencia

Para obtener la función de transferencia podemos hacer la analogía del sistema anterior a un sistema eléctrico, observando un poco la forma de la función obtenida en la ecuación 2.1 notamos ciertas similitudes entre las variables hidráulicas y las eléctricas, y haciendo la sustitucion de las mismas obtenemos una ecuacion de la siguiente forma: Si $A = c$, $w_i(t) = i_{in}(t)$, $h(t) = v_c(t)$ y $\frac{R}{rg} = R$, entonces:

$$i_(t) = c \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_c(t)}{(R} \tag{2.2}$$

Utilizando esta ecuación podemos definir que:

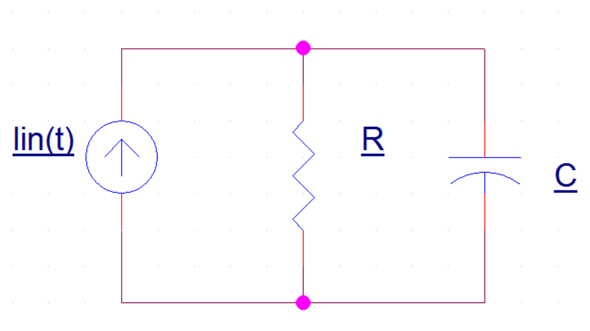

Figura 2.2: Circuito electrico equivalente al sistema hidraulico.

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación 2.2 obtenemos:

$$I_(s) = C \cdot sV_c(s) + \frac{V_c(s)}{R)}$$

Y encontramos entonces que:

$$\frac{V_c(s)}{I_{IN}(s)} = \frac{\frac{1}{C}}{s + (\frac{1}{RC})} \tag{2.3}$$

Entonces es la ecuación 2.3 la función de transferencia del sistema hidráulico propuesto.

2.3. Cálculos con valores

Bien, propongamos valores para el sistema, para no complicarnos entrando en detalles de sistemas hidráulicos que son tardados, y hasta cierto punto innecesarios para el objetivo de la practica, nos aprovecharemos del hecho de que ya obtuvimos el equivalente eléctrico del sistema, por lo cual, propondremos variables hidráulicas, y a partir de ellas encontraremos las variables eléctricas para el ejercicio, cuidando obviamente que sean congruentes con el tipo de sistema.

Ahora que se aclaro ese punto vamos a iniciar; para empezar observemos la ecuación 2.3, aquí vemos que necesitamos valores para R y c, que serán a su vez la resistencia de la salida del tanque y el área del mismo; para el área del tanque o C no hay problema, suponiendo que esta dada en metros podemos imaginar un tanque de muchas medidas, para nuestro caso en especifico lo estableceremos de 50cm o lo que es lo mismo 0.5m, así que $C = 0{,}5$; después necesitamos R(eléctrica), esta esta dada por R(hidráulica), r y g; donde r es el radio de la boquilla de salida del tanque, en nuestro caso sera de 5cm, o 0.05m, ademas necesitamos g, que es la gravedad, y todos sabemos que la gravedad es de $9{,}8m/s^2$ así que esta parte no tiene ningún misterio; sin embargo para R, que es un parámetro dado por la construcción del tanque no conocemos de que depende ni como funciona, así que solo propongamos su valor en 1; y partiendo de esto sabemos que $R = \frac{R}{rg} = \frac{1}{(o{,}05)(9{,}8)} = 2{,}0408163$.

Ahora que conocemos esos valores pasemos a la siguiente sección.

2.4. Graficando en SciLab

Y a partir de los valores anteriores y la ecuación 2.3 podemos encontrar que:

$$a = \frac{R}{C} = 4{,}0816327$$

$$b = 0$$

$$c = \frac{1}{C} = 2$$

Y insertando esto en el código generado en la sección 1.3 obtenemos la respuesta de la salida del tanque mostrada en la figura 2.3.

Y analizando esta figura vemos que el tiempo de respuesta del sistema(eje X) para que el sistema sea estable, o al menos para que este por encima del 90 por ciento de su respuesta máxima es en aproximadamente 5s, y esto es muy conveniente ya que si buscamos τ por medio de la formula RC, tenemos que $\tau = RC = (2{,}04)(0{,}5) = 1{,}02$ por lo que 5τ es en aproximadamente 5s. La presente función de respuesta corresponde al lo que analogamente en un circuito eléctrico seria el proceso de carga de un capacitor, pero para el sistema hidráulico representa la respuesta con respecto al tiempo de como se llena el tanque.

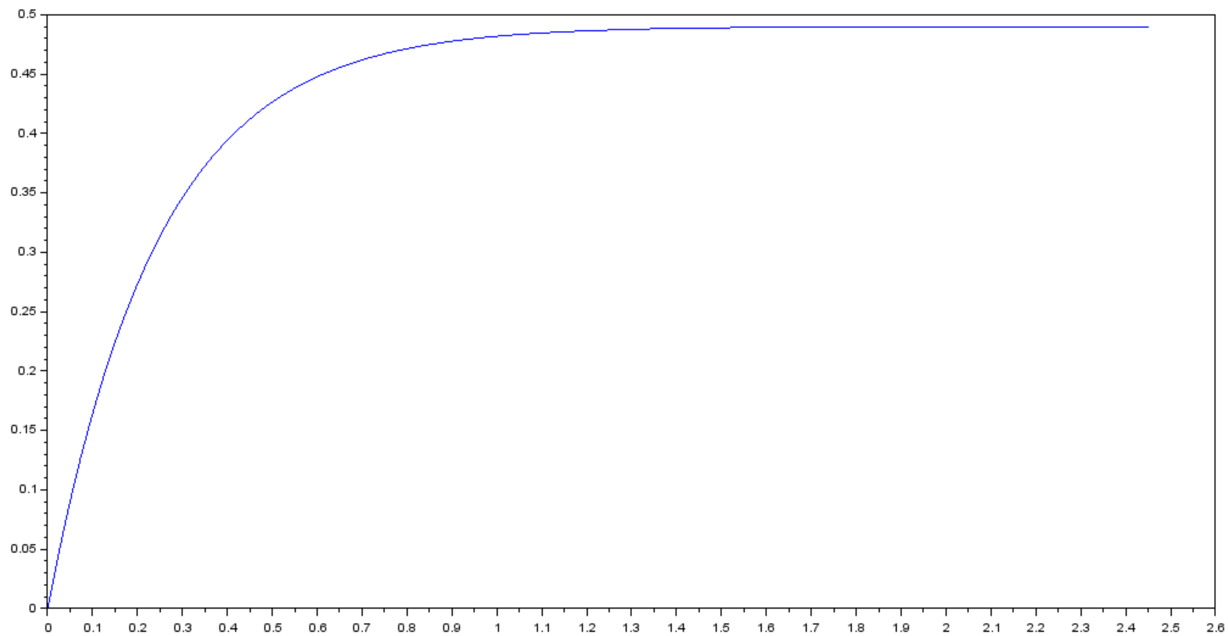

Figura 2.3: Respuesta de salida del sistema hidraulico propuesto.

Parte 3

Resultados y Conclusiónes

3.1. Resultados

Durante la practica se obtuvo la capacidad para plantear el modelo matematico de un sistema de control de primer orden, así como una funcion para scilab que permite obtener la respuesta en el tiempo de cualquier sistema de primer orden en base a los coeficientes de la ecuacion general de la funcion de transferencia. Gracias al codigo generado se pudo comprobar el comportamiento teórico de un sistema de primer orden, tambien pudo verse que el coeficiente a siempre resulta ser el inverso de la constante de tiempo τ. Todos los sistemas tienen a simple vista la misma forma para carga y descarga.

3.2. Discusión

Para los sistemas de primer orden los resultados obtenidos pueden ser intuidos con facilidad ya que solo cuentan con un elemento que depende del tiempo, de tal modo que sin importar el tipo de sistema con el que se este trabajando el modelo matemático en el dominio de la frecuencia es practicamente igual y se pueden hacer analogías entre ellos.

3.3. Conclusiónes

Despues de todo el proceso llevado a cabo en esta práctica, podemos ver la utilidad que tiene el conocer y comprender la metodología para establecer el modelo matemtíco de un sistema en base a las leyes físicas que lo rigen, y aun mas importante saber establecer analogias entre sistemas para poder trasladarlos a su analogo eléctrico y así desarrollarlos de manera simple, y poder saber si los resultados obtenidos son congruentes.

Referencias

[1] Classic Control Theory 101 Laboratory session 1. Gerardo Marx Chávez Campos web site: sagitario.itmorelia.edu.mx/gmarx/, descargado Oct. 25 de 2017.

[2] Dinamica y Control de procesos. Función de transferencia. web site: www.grupovirtus.org, descargado Oct. 26 de 2017.