Control I

Práctica 1: Análisis de un sistema de primer orden

Instituto Tecnologíco de Morelia

Departamento de Ingeniería Electrónica

Profesor: Gerardo Marx Chávez Campos

Alumnos:

Jorge Zamudio Ferreira 14121146

Miguel Angel Guillén Martínez 14121090

27 de octubre del 2017

Contents

1 Introducción

El objetivo de esta práctica fue relacionarnos con el ambiente de desarrollo de ”scilab” y al mismo tiempo realizar un análisis de un sistema de primer orden; en este caso el sistema propuesto fúe el de un recipiente que posee un area determinada, tiene un flujo de líquido de entrada así como un flujo de salida, el cual se ve afectado por el díametro del tubo de salida, así como de una llave que presenta una oposición al flujo de dicho liquido.

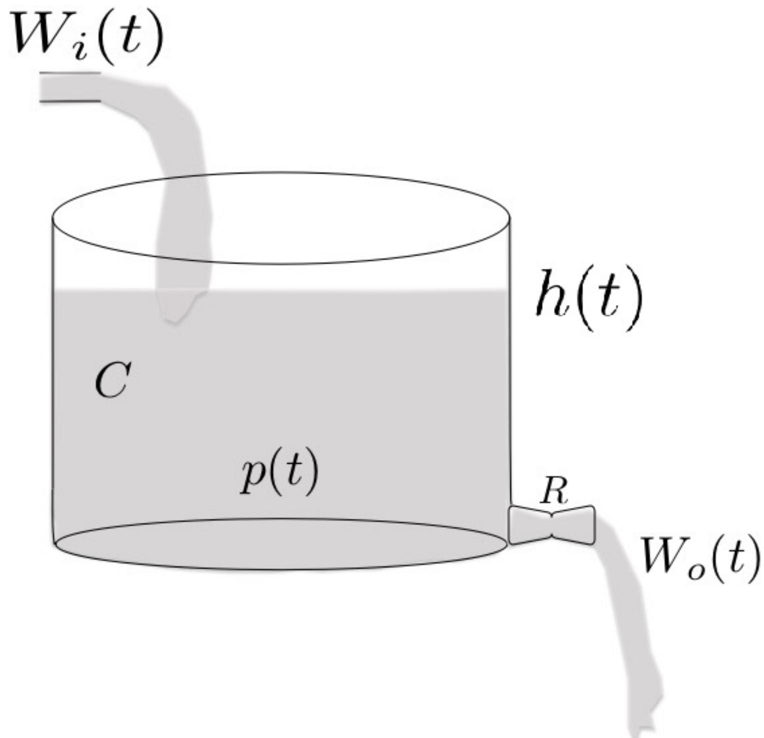

Figure 1: Modelo de un sistema hidraulico

En la figura anterior podemos ver el modelo físico del problema mencionado, donde podemos apreciar: el flujo de entrada $W_i(t)$, el flujo de salida $W_o(t)$ y $h(t)$, que es el nivel o altura del liquido, que como veremos, mas adelante depende de la relación existente entre $W_i(t)$ y $W_o(t)$.

2 Metodología

2.1 Análisis del sistema (ecuación de balance de energía) y función de transferencia

Lo primero que se realizó fue encontrar la ecuación de balance de energia de nuestro sistema, para esto partimos de que:

$$\sum E_{IN} + \sum E_{GEN} = \sum E_{OUT} + \sum E_{ACC}$$

Lo anterior quiere decir que la energía que ingresa al sistema mas la energia que el sistema genera es igual a la energía que sale del sistema mas la energía que el sistema acumula. En este caso el sistema no genera ninguna energía(no se puede generar un liquido instantaneamente), por lo tanto ese término se anula y nuestra ecuación quedaria de la siguiente manera:

$$\sum E_{IN} = \sum E_{OUT} + \sum E_{ACC}$$

Al interpretar las equivalencias de la ecuación anterior para nuestro sistema, la ecuacion equivalente seria la siguiente:

$$W_i(t) = W_o(t) + A\frac{dh(t)}{dt}$$

Al tratarse de un sistema físico, lo anterior depende a su vez de otros factores; la ***ecuación de Bernoulli*** es la que determina el flujo de salida de nuestro sistema. En base a lo anterior, nuestra ecuacion de balance de energía quedaria de la siguiente manera:

$$W_i(t) = \frac{rg}{R}h(t) + C\frac{dh(t)}{dt}$$

Donde: "r" es el diametro del tubo de salida, "g" es la constante de gravedad, "R" es la constante de oposicion de la llave y "C" es el equivalente al área del recipiente.

2.1.1 Analogía Flujo-Corriente

Lo que se procede a realizar ahora es una analogía electrica, con la finalidad de tener una comprensión mas sencilla del problema.

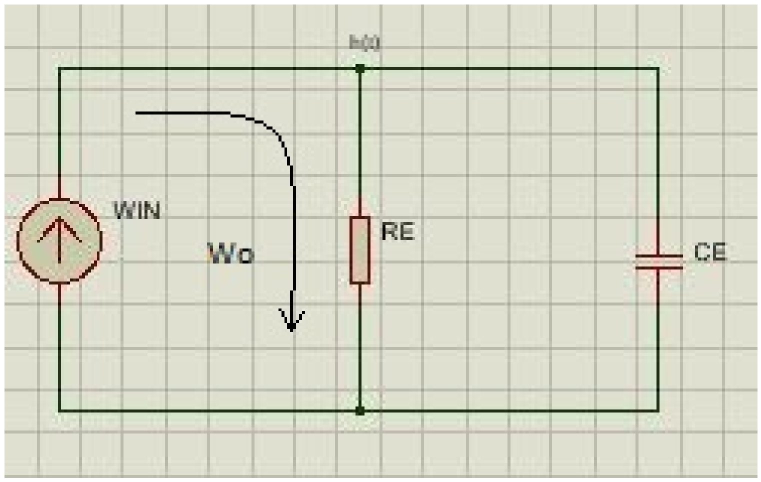

Figure 2: Analogía Flujo-Corriente

Analizando la figura 1, podemos comparar nuestro flujo de entrada W_i con una fuente de corriente, asi mimso nuestro flujo de salida W_o podemos compararlo con una resistencia y en paralelo a esta un capacitor el cual puede ser la representacion del nivel del liquido acumulado, una vez dicho lo anterior las ecuaciones que representan dicha analogía son:

$$I_{Re} = \frac{h(t)}{\frac{R}{rg}}$$

$$I_{Re} = \frac{h(t)}{R_e}$$

$$R_e = \frac{R}{rg}$$

$$I_{Ce} = A\frac{dh(t)}{dt}$$

Actualizando nuestra ecuación de balance de energía para nuestra analogía tenemos que:

$$W_{in}(s) = \frac{h(s)}{R_e} + C_eSh(s) + h(0)$$

De la ecuacion anterior proponemos una condicion inicial de 0, es decir, que el recipiente esta vacio.

Procedemos a sumar los terminos del lado derecho:

$$W_{in}(s) = \frac{h(s) + C_e S h(s) R_e}{R_e}$$

$$R_e W_{in}(s) = h(s)(1 + R_e CeS)$$

$$\frac{W_{in}(s)}{h(s)} = \frac{(1 + R_e C_e S)}{R_e}$$

Multiplicamos por la funcion escalon, que seria nuestra entrada:

$$h(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{R_e}{1 + R_e C_e s}\right)$$

Si comparamos lo anterior con:

$$y(s) = \frac{1}{s}\frac{bs + c}{ds + a}$$

Resolvemos por fracciones parciales:

$$\frac{1}{s}\frac{bs + c}{ds + a} = \frac{A}{s} + \frac{B}{ds + a}$$

$$bs + c = A(ds + a) + Bs$$

$$\therefore Ad + B = b \to \frac{cd}{a} + D = b \to B = b - \frac{cd}{a}$$

$$Aa = c \to A = \frac{c}{a}$$

$$y(s) = \frac{c}{as} + \frac{b - \frac{cd}{a}}{ds + a}$$

Multiplicamos por $\frac{1}{d}$:

$$\frac{b - \frac{cd}{a}}{ds + a}\frac{\frac{1}{d}}{\frac{1}{d}}$$

Nuestro resultado es el siguiente:

$$y(s) = \frac{c}{as} + \frac{\frac{b}{d} - \frac{c}{a}}{s + \frac{a}{d}}$$

Con esta ultima ecuación, hacemos uso de la ***transformada inversa de Laplace*** y con esto obtenemos la función de transferencia del sistema.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{c}{as} + \frac{\frac{b}{d} - \frac{c}{a}}{s + \frac{a}{d}}\right\} = \frac{c}{a} + \left[\frac{b}{d} - \frac{c}{a}\right] e^{-\frac{a}{d}t}$$

3 Resultados

Lo primero que se realizó fue la utilización del código de scilab proporcionado por el profesor, el cual nos sirve para comprobar la respuesta de un sitema de primer orden al aplicarle una función escalon, dicho codigo es el mostrado en la siguiente figura:

```
//Definig a first order system:
s=%s // The quicker altenative to using s=
poly (0,'s')
// gain and time constant
k=10;
Tau=1;
simpleSys=syslin('c',k/(1+Tau*s))
t=0:0.01:15;
y=csim('step',t,simpleSys)
plot(t,y)
```

A partir de la funcion de transferencia que obtuvimos al realizar la analogía "flujo-corriente" realizamos una función en scilab, la cual unicamente se le introducen los valores de de las constantes a,b,c y d. Dicho código es el siguiente:

```
function[y]=funcion_de_transferencia(a,b,c,d)
t=0:0.01:15;
y=(c/a)+(((b/d)-(c/a))*(exp(-(a/d)*t)));
plot(t,y)
endfunction
```

A continuación, mostraremos los resultados obtenidos con la función de scilab con $Win = Wo$, $Win < Wo$ y $Win > Wo$ y de igual manera con nuestra función. para encontrar los valores de a, b, c y d utilizamos la siguiente analogía: $W_{in} = W_o h(s) + CsH(s)$ donde $W_o = R_e$, entonces damos valores para que la entrada del flujo sea igual a la salida del flujo y proponemos h(s) y H(s) sean iguales a 1 entonces tenemos que:

$1 = 1 + C$ despajamos C y tenemos que C=0, ahora sustituimos C en la ecuación que obtuvimos de nuestra analogía que es:

$$\frac{K}{1+\tau s} = \frac{R_e}{1+R_eC_es}$$

Y comparando lo obtenido para cada caso con nuestra ecuación general:

$$\frac{K}{1+\tau s} = \frac{bs+c}{ds+a}$$

Obtuvimos que para cuando $W_{in} = W_o$, a=1, b=0, c=1 y d=0

Para cando $W_{in} < W_o$, a=1, b=0, c=1 y d=-1

Y por ultimo $W_{in} > W_o$, a=1, b=0, c=1 y d=1

Con $W_{in} > W_o$ obtuvimos lo siguiente:

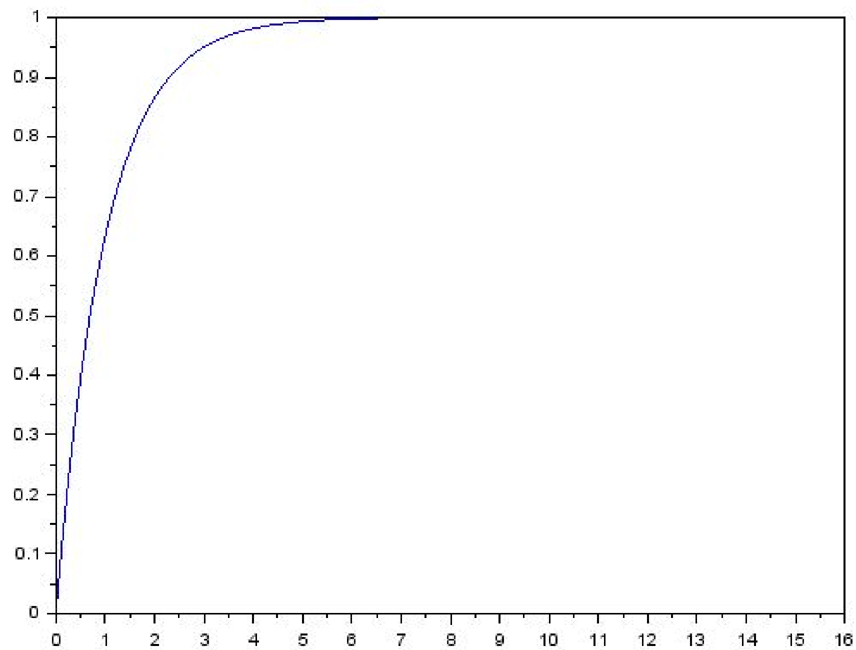

Figure 3: Resultado obtenido con la función de scilab

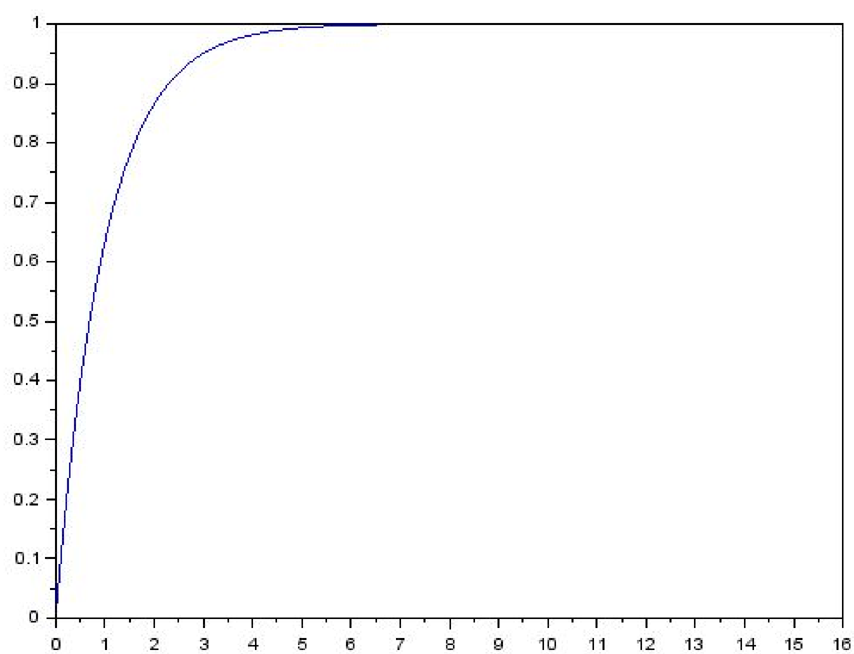

Figure 4: Resultado obtenido con nuestra función

Los resultados obtenidos fueron los esperados ya que al ser más grande el flujo de entrada que el flujo que sale, esperábamos un incremento del flujo en el tanque lo cual en las gráficas se puede observar muy claramente.

Como podemos observar nuestra respuesta es similar a la respuesta que nos entrega la función de scilab.

Con $W_{in} < W_o$ obtuvimos lo siguiente:

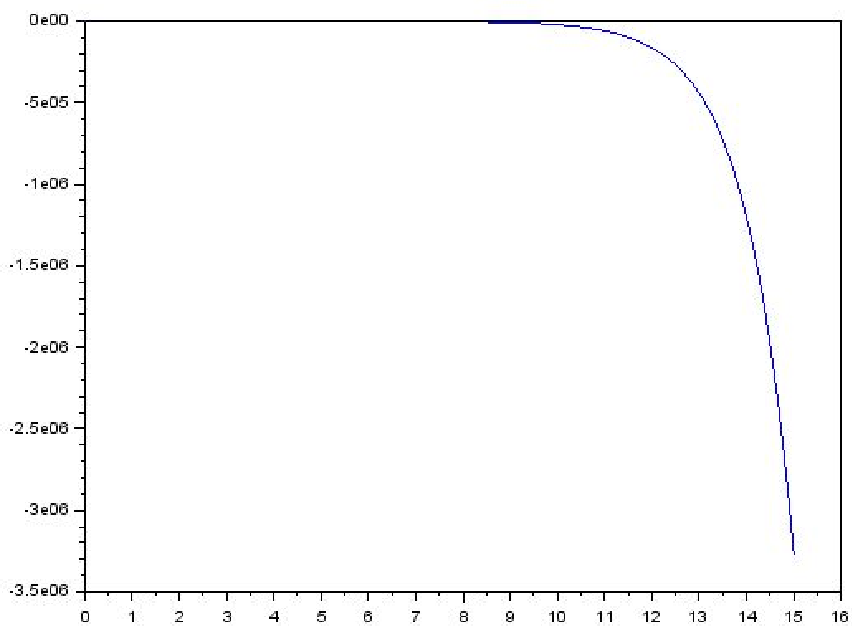

Figure 5: Resultado obtenido con la función de scilab

Figure 6: Resultado obtenido con nuestra función

Los resultados obtenidos son los esperados ya que al ser mayor la salida de flujo que la entrada la gráfica debería de mostrar un decrecimiento en el flujo del tanque lo cual, las gráficas lo muestran claramente.

Con $W_{in} = W_o$ obtuvimos lo siguiente:

En este caso nuestra función y la función de scilab no nos mostraron gráfica por lo cual para este caso hay una ecepción que describiremos a continuación:

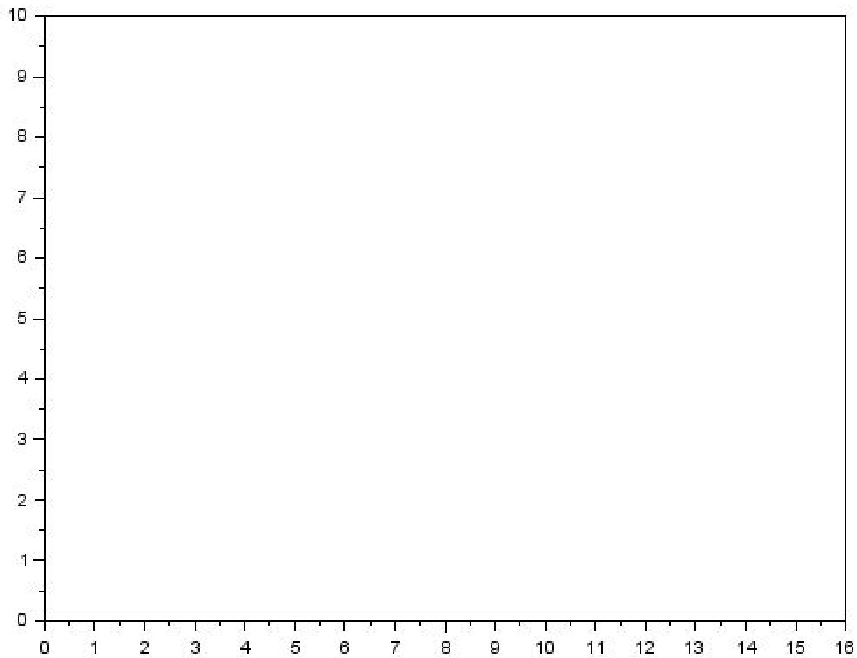

Figure 7: Resulta obtenido cuando la entrada del flujo y la salida del flujo son iguales

Por ultimo mostraremos la analogía que obtuvimos:

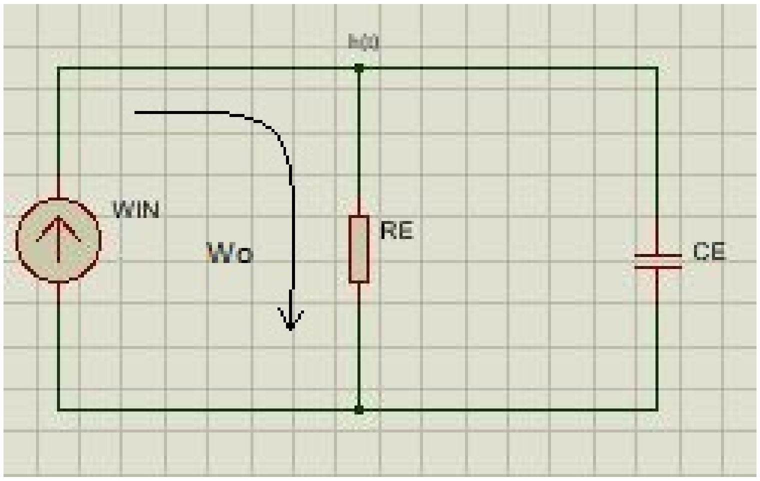

Figure 8: Analogía en circuito con fuente de corriente.

Asiendo la analogía de nuestro circuito concluimos que si debe de haber una constante en la gráfica por local si queremos obtener esto en nuestra función cuando la entrada y salida de flujo sean iguales concluimos que b debe de ser 1 a continuación mostraremos la respuesta con este valor:

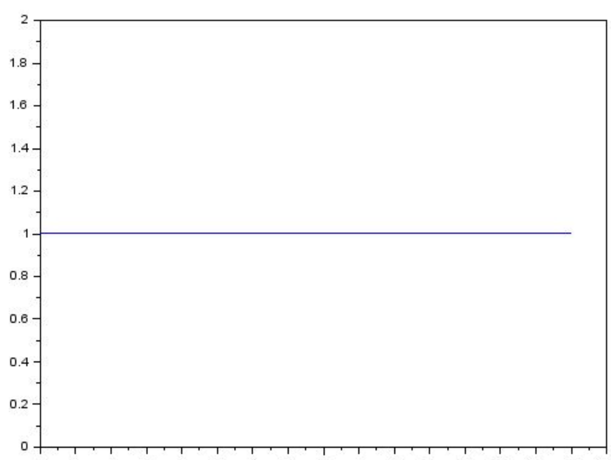

Figure 9: Respuesta con b=1 solo cundo la entrada y salida del flujo sean iguales.

4 Conclusiones

Jorge Zamudio Ferreira:

Concluyo que para analizar sistemas de control es muy buena ayuda generar una analogía con circuitos ya que como estamos más relacionados con este tipo de sistemas su visualización y comprensión se facilitan mucho más. Sobre la practica algo que nos genero problemas fue cuando tratamos de graficar la respuesta del sistema cuando la entrada del flujo y su salida eran iguales ya que no podíamos hacer τ igual a 0 porque esto nos generaba indeterminaciones, por lo cual tuvimos que analizar nuestra función de trasferencia y llegamos a la conclusión de que para este cado b debía ser igual a 1 para que las indeterminaciones no nos afectaran, algo también muy interesante fue que la función de scilab tampoco podía generar la respuesta para este caso. en los demás casos nuestra fusión tenía la misma respuesta que la función de scilab.

Miguel Angel Guillén Martínez:

Esta práctica me parecio muy útil para lograr comprender de una manera diferente los conceptos vistos en la clase teoríca. Algo que en la teoría no encontraba una relación o un buen motivo de realizar fueron las analogías, sin embargo en el ejercicio del sistema hidraulico me resulto mas sencillo entender el problema mediante un circuito eléctrico. También pudimos comprobar como todos los sitemas de primer orden reaccion de la misma forma al aplicarles una función escalon, esto lo podemos comprobar con el codigo que nos proporciono el profesor en scilab, el cual corresponde a la respuesta de un sistema cualquiera de primer orden y al realizar el codigo para nuestro problema en especifico, pudimos ver que la respuesta es la misma, lo anterior por tratarse de un sitema de primer orden.