Конспекты по теории вероятностей

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев

2022 год, семестр 4

1 Введение

Теория вероятности изучает случайные события, а эксперименты, в ходе которых они случаются, называется нами случайным экспериментом или часто испытанием.

2 Статистическое определение вероятности

n экспериментов, n_a — число появления событий A, $\frac{n_a}{n}$ – относительная частота события A.

Определение 2.0.1. $P(A) = \frac{n_a}{n}$ — вероятность события A при большом n.

Это интуитивное определение, но эта интуиция может быть обманчива. У этого определения есть ряд недостатков (эксперименты часто провести нельзя, в зависимости от числа экспериментов относительная частота разнится и т.д) и мы не будем им пользоваться.

В основе хорошего определения вероятности лежит концепция вероятностного пространства, в котором случайное событие понимается как подмножество.

2.1 Пространство элементарных исходов

Определение 2.1.1. Пространством элементарных исходов Ω назывыается множество, содержащее все возможные исходы случайного эксперимента, из которых при испытании происходит только один.

Определение 2.1.2. Случайными событиями называются подмножества $A \subset \Omega$. В ходе эксперимента событие A наступило, если произошел один из элементарных исходов, входящиъ в множество A.

Не все подмножества пространства исходов понимаются нами как события. Некоторые события могут быть нам попросту неинтересны. Некоторые мы не можем считать событиями. Например, в дискретном случае событие с одним исходом считается событием, но в непрерывном, как правило, нет. <Примеры>

2.2 Операции над событиями

Ω — достоверное событие, или универсальное событие. $\varnothing$ — невозможное событие, или пустое. Никогда не происходит, потому что не содержит исходов.

Определение 2.2.1. Суммой $A + B$ называется событие $A \cup B$, сосоящее в том, что произошло событие A или событие B (хотя бы одно из них).

Определение 2.2.2. Произведением AB называется событие $A \cap B$, сосоящее в том, что произошло событие A и событие B (т.е оба из них, одновременно, в ходе одного эксперимента).

$A_1 + \dots A_n$ — произошло хотя бы одно. $B_1 \cdot \dots \cdot B_n$ — произошли все. Do you get it yet?

Определение 2.2.3. Противоположным к A называется событие $\overline{A} = \Omega \backslash A$, состоящее в том, что событие не произошло.

Заметка: $\overline{\overline{A}} = A$.

Определение 2.2.4. Разницей событий A и B называется событие $A - B = A\overline{B}$.

Определение 2.2.5. События A, B называются несовместными если они не пересекаются, $A \cap B = \varnothing$, т.е одно исключает появление другого в эксперименте.

Определение 2.2.6. Событие A влечёт событие B, если $A \subset B$. В логике это соотвествует импликации: если появилось A, то появилось B.

2.3 Вероятность

Вероятность события A — некая числовая характеристика $P(A)$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, отражающая частоту наступления A в эксперименте.

Пусть Ω содержит конечное число равновозможных исходов (условно, из соображений симметрии). Тогда применимо следующее классическое определение

Определение 2.3.1. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ — вероятность A.

Свойства вероятности.

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\varnothing) = 0$
4. Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$ (доказательство есть— оно простое)

Это определение применимо в очень ограниченном числе случаев.

3 Геометрическое определение вероятности

Пусть Ω — это замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Пусть μ — мера на Ω.

Мы "наугад" бросаем точки в эту Ω. Наугад значит, что вероятность попадание в область зависит только от её меры (длины, площади, обьема и т.д). В этом случае применимо геометрическое определение вероятности.

Определение 3.0.1. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(Omega)}$.

Замечание. Свойства этой вероятности повторяют свойства классических.

<Примеры>

Геометрическая вероятность упускает случай счётного множества элементарных исходов. Она прменяется крайне-крайне редко.

На следующей лекции будет нормальное формальное точное определение вероятности.

Административные вопросы: телеграм-канал потока $tv3234_37$. 3 online контрольных без переписываний (переписывания в крайнем случае с штрафом). Получить 4 до экзамена можно за контрольные. 5 требует экзамен.

Для очников: 10 за посещение, 10 за работу на парах, 60 за контрольные.

4 Сигма алгебра

Определение 4.0.1. Пусть Ω — пространство элементарных исходов, F — σ-алгебра на Ω. Вероятностью на Ω называется функция

- $P(A) \geqslant 0$
- Вероятность (счётной) суммы несовместных событий — сумма вероятностей.
- Нормированность. $P(\Omega) = 1$.

Определение 4.0.2. Вероятностынм пространством называется совокупность пространства элементарных исходов, сигмы алгебра на нём и вероятности.

Формула обратной вероятности $P(A) = 1 - P(\neg A)$.

Аксиома непрерывности. При непрерывном изменении области соотвествующая вероятность также должна изменяться непрерывно.

Аксиома непрерывности следует из аксиомы счётной аддитивности.

Независимые события. Независимость набора событий. Пример Бернштейна.

5 Стандартные непрерывные распределения

Определение 5.0.1. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, если $\xi \in U(a, b)$, если её плотность на этом отрезке постоянна.

$$f_\delta = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & , a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & , x > b \end{cases}.$$

Замечание.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty} f_\delta(x)dx.$$

При $x < a \quad F(x) = 0$
При $a \leqslant x \leqslant b \quad F_\xi(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$
При $x > b \quad F_\xi(x) = 1$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & , x > b \end{cases}.$$

$$
\begin{aligned}
E\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x b_\delta(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-q} dx \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \mid_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \\
E\xi^2 &= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^3+ab+a^3}{3} \\
D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \ldots = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}
$$

$$
P(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a} \quad \alpha, \beta \in [a, b].
$$

Определение 5.0.2 (Показательное (экспоненциальное) распределение)**.** Случайная величина ξ имеет показательное распредлениес параметром $\alpha > 0$, $\xi \in E_\alpha$, если её плотность имеет вид:

$$
f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & , x \geqslant 0 \end{cases}.
$$

Числовые характеристики:

1. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & , x \geqslant 0 \end{cases}$

2.

$$
\begin{aligned}
E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = \int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x} = \ldots &= \frac{1}{\alpha} \\
D\xi &= \frac{1}{\alpha^2} \\
\sigma &= \frac{1}{\alpha} \\
P(a < \xi < b) &= e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha}.
\end{aligned}
$$

Пример. 1. Время работы надёжной микросхемы до поломки

2. Время между появлениями двух соседних редких событий во временном потоке

Теорема 5.0.1 (Свойство нестарения)**.** $\sqsupset \xi \in E_\alpha$ Тогда $P(\xi > x + y | \xi > x) = P(\xi > y) \quad \forall x, y > 0$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
P(\xi > x + y | \xi > x) = \frac{P(\xi > x + y, \xi > x)}{P(\xi > x)} \\
&= \frac{P(\xi > x+y)}{P(\xi > x)} = \frac{1 - P(\xi < x+y)}{1 - P(\xi < x)} \\
&= \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)} = \frac{1 - \left(1 - e^{-\alpha(x+y)}\right)}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} \\
&= \frac{e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha y} \\
&= 1 - \left(1 - e^{-\alpha y}\right) = 1 - F(y) = P(\xi > y)
\end{aligned}
$$

.

■

Определение 5.0.3 (Нормальное (Гауссовское распределение))**.** Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2, обозначается $\xi \in N_{a,\sigma^2}$ или $g \in N(a, \sigma^2)$, если её плотность имеет вид:

$$
f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in (-\infty, \infty).
$$

Определение 5.0.4 (Стандартное нрормальное распределение)**.** Нормальное распределение с параметрами $a = 0 \quad \sigma = 1 \quad \xi \in N(0,1)$

Плотность $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса

Числовые характеристики:

1. $E\xi = 0$
2. $E\xi^2 = 1$
3. $D\xi = 1$

Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями

1. $\sqsupset \xi \in N(a, \sigma^2)$ Тогда $F_\xi(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$
2. $\sqsupset \xi \in N(a, \sigma^2)$ Тогда $\nu = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0,1)$
3. $\sqsupset \xi \in N(a, \sigma^2$ Тогда $E\xi = a \quad D_\xi = \sigma^2$
4. Вероятность попадания в заданый интервал.
$$
P(\alpha < \xi < \beta) = \phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).
$$
5. Вероятность отклонения случайной величины от её среднего значения (попадание в интервал симметричный относительно a)
$$
P(|\xi - a| < t) = 2\phi\left(\frac{t}{\sigma}\right).
$$

Правило трёх сигм:

$$
P(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973.
$$

Свойство линейности: Если $\xi \in N\left(a, \sigma^2\right)$. Тогда $\xi = \gamma\nu + b \in N\left(\gamma a + b, \gamma^2\sigma^2\right)$ Устойчивость относительно суммирования: Если δ_1, δ_2 – назвисимы, то $\delta_1 + \delta_2 \in N\left(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$ Коэффициенты ассиметрии и эксцесаа:

- Ассиметрией распределения называется число $As = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right) = \frac{M_3}{\sigma^3}$

  Если $As > 0$, то график плотности имеет более крутой спуск слева. При $As < 0$ наоборот.

- Эксцессом распределения называется число $E_k = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{M^4}{\sigma^4} - 3$

  $E_k > 0$ – более острая вершина, чем у нормального распределения. При $E_k < 0$ наоборот.