Конспекты по математической логике

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев, Константин Бац

2022 год, семестр 4

1 Введение

Логика – довольно старая наука, но наш предмет довольно молодой В какой-то момент логики как дисциплиниы, которая учит просто правильно рассуждать, стало нехватать. Появилась теория множеств. Общего здравого смысла не хватает, нужен строгий математичесий язык. Это рубеж 19-20 веков.

У нас теория множеств не будет фокусом, как это могло бы быть на мат. факультете.

Теория множеств, когда она была впервые сформулирована, была противоречива (как матан, сформулированный Ньютоном). Чтобы уверенно и эффективно заниматься матаном, нужно суметь его формализовать.

<Парадокс Рассела / парадокс брадобрея> Мы приписываем элементу-человеку свойство, которое невыполнимо. Обьекта, выходит, не существует. Мы смогли очень быстро определить противоречие в этом определении. Но, может быть, мы не смогли его определить в других наших определениях? (конструкциях вещественной прямой, и т.д и т.д)

Программа Гильберта.

1. Формализуем математику! Сформулируем теорию на языке (не на русском или английском), который не будет допускать парадоксов,
2. ... и на котором можно будует доказать непротиворечивость.

В 1930 году становится понятно, что сколько-нибудь сильная (= в ней можно построить формальную арифметику) теория не может быть доказана непротиворечивой.

Возможно, сама наша логика неправильная? Эта идея будет нам полезна, и к ней мы ещё вернемся.

Возможно, что это просто свойство мира, и мы хотим невозможного.

Из этих рассуждений выросло большое множество хороших идей, которые оказались полезны в других местах. Матлогика служит широкому кругу нужд.

Мы можем доказывать, что программа работае корректно. Именно доказывать, а не проверять тестами!

Мы можем изучать свойства самих языков. Изоморфизм Карри-Говарда— доказательство это программа, утверждения это тип. Можно изучать языки программирования и можно развернуть изоморфизм: изучать математкиу как язык программирования.

Функциональные языки: окамль + хаскель. Ознакомление с этими языками преставляет собой способ ознакомиться с предметом немного с другой стороны.

2 Исчисление высказываний

Мы говоирм на двух языках: на предметном языке и метаязыке. Предметный язык – это то, что изучается, а метаязык – это язык, НА котором это изучается.

На уроках английского предметным является сам английский, а метаязыком может быть русский. Метаязык – это язык исследователя, а предметный язык – это язык исследоваемого. Что такое язык вообще? Хороший вопрос.

Высказывание — это одно из двух:

1. Большая латниская буква начала алфавита, возможно с индексами и штрихами — это пропозициональные переменные.
2. Выражение вида $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, $(\neg\alpha)$.

В определении выше альфа и бета это метапеременные— места, куда можно подставить высказывание.

1. α, β, γ — метапеременные для всех высказываний.

2. X, Y, Z — метапеременные для пропозициональных переменных.

Метапеременные являются частью языка исследователя.

В формализации мы останавливаемся до места, в котором мы можем быть уверены, что сможем написать программу, которая всё проверяет.

Сокращение записи, приоритет операций: сначала $\neg$, потом &, потом $\vee$, потом $\rightarrow$. Если скобки опущены, мы восстанавливаем их по приоритетам. Выражение без скобок является частью метаязыка, и становится частью предметного, когда мы восстанавливаем их. Скобки последовательных импликаций расставляются по правилу правой ассоциативности — справа налево.

2.1 Теория моделей

У нас есть истинные значения $\{T, F\}$ в классической логике. И есть оценка высказываний $[\![\alpha]\!]$. Например $[\![A \vee \neg A]\!]$ истинно. Всё, что касается истинности высказываний, касается теории моделей.

Определение 2.1.1. Оценка — это функция, сопоставляющая высказыванию его истинное (истинностное) значение.

2.2 Теория доказательств

Определение 2.2.1. Аксиомы — это список высказываний. Схема аксиомы — высказывание вместе с метопеременными; при любой подстановке высказываний вместо метапеременной получим аксиому.

Определение 2.2.2. Доказательство (вывод) — последовательность высказываний $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$ где γ_i— любая аксиома, либо существуют $j, k < i$ такие что $\gamma_j \equiv (\gamma_k \rightarrow \gamma_i)$. (знак $\equiv$ здесь сокращение для "имеет вид"). Это правило "перехода по следствию" или Modus ponens.

Определим следующие 10 схем аксиом для того исчисления высказываний, которое мы рассматриваем.

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ — добавляет импликацию
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ — удаляет импликацию
3. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ — удаление конъюнкции
4. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$ — удаление конъюнкции
5. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$ — внесение конъюнкции
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ — внесение дизъюнкции
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$ — внесение дизъюнкции
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)$
10. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ — очень спорная штука.

Пример. Доказательство $\vdash A \rightarrow A$.

1. $A \to (A \to A) \to A$ (схема 1)
2. $A \to A \to A$ (схема 1)
3. $(\underbrace{A}_{\alpha} \to \underbrace{A \to A}_{\beta}) \to (\underbrace{A}_{\alpha} \to \underbrace{(A \to A)}_{\beta} \to \underbrace{A}_{\gamma}) \to (\underbrace{A}_{\alpha} \to \underbrace{A}_{\gamma})$ (схема 2)
4. $(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$ (m.p 2, 3)
5. $A \to A$ (m.p 1, 4)

2.3 Теорема о дедукции

Определение 2.3.1. (Метаметаопределение). Будем большими греческими буквами $\Gamma, \Delta, \Sigma \ldots$ — списки формул, неупорядоченные.

Определение 2.3.2. Вывод из гипотез: $\Gamma \vdash \alpha$.
То есть существует $\delta_1, \ldots, \delta_n$, $\delta_n \equiv \alpha$, где $delta_i$ или схема аксиом, или m.p. из j и k и $j, k < i$.

Теорема 2.3.1. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$.

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n \equiv \alpha \to \beta$ выводит $\alpha \to \beta$. Дополним этот вывод двумя до доказательства новыми высказываниями: $\delta_{n+1} \equiv \alpha$ (дано нам в гипотезе), $\gamma_{n+2} \equiv \beta$ (MP шагов n, $n+1$) — это и требовалось.

$\Rightarrow$ Пусть $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Напишем программу, которая построит $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Инвариант, который мы будем поддерживать: всё до $\alpha \to \delta_i$ — док-во. Доказательство индукцией по n.

1. База: $n = 1$ — без комментариев.
2. Если $\delta_1, \ldots, \gamma_n$ можно перестроить в доказательство $\alpha \to \gamma_n$, то $\gamma_1 \ldots \gamma_{n+1}$ тоже можно перестроить. Разберём случаи:
   (a) δ_i — аксиома или гипотиза из Γ.
   $(i - 0.6)$ δ_i
   $(i - 0.3)$ $\delta_i \to \alpha \to \delta_i$
   (i) $\alpha \to \delta_i$ (m.p из $i - 0.6$ и $i - 0.3$)
   (b) $\delta_i = \alpha$, то есть надо построить $\alpha \to \alpha$
   $(i - 0.8, i - 0.6, i - 0.4, i - 0.2)$ (доказательство $\alpha \to \alpha$)
   (i) $\alpha \to \alpha$
   (c) δ_i получено из δ_j и δ_k $(\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i)$
   по индукционному предположению, уже есть строчки вида $\alpha \to \delta_j, \alpha \to \delta_k$
   (j) $\alpha \to \delta_j$
   (k) $\alpha \to (\delta_j \to \delta_i)$
   $(i - 0.6)$ $(\alpha \to \delta_j) \to (\alpha \to \delta_j \to \delta_i) \to (\alpha \to \delta_i)$ (схема 2)
   $(i - 0.3)$ $(\alpha \to \delta_j \to \delta_i) \to (\alpha \to \delta_i)$ (m.p.)
   (i) $(\alpha \to \delta_i)$ (m.p.)

■

3 Теория моделей

Мы можем докаывать модели или оценивать их. ”Мы можем доказать, что мост не развалится или можем выйти и попрыгать на нём.”

Определение 3.0.1. $\mathbb{V}$ — истинностное множество.

F — множество высказываний нашего исчисления высказываний.

P — множество пропозициональных переменных.

$$[\![\cdot]\!] : F \to \mathbb{V} \text{ — оценка}$$

Определение 3.0.2. Для задания оценки необходимо задать оценку пропозициональных переменных.

$$[\![\cdot]\!] : P \to \mathbb{V} \quad f_P$$

Тогда:

$$[\![x]\!] = f_p(x)$$

Замечание. Обозначение: значения пропозициональных переменных будем определять в верхнем индексе: $[\![\alpha]\!]^{A=T,B=F\ldots}$

Определение 3.0.3. α — общезначна (истинна), если $[\![\alpha]\!] = T$ при любой оценке P.

α — невыполнима (ложна), если $[\![\alpha]\!] = F$ при любой оценке P.

α — выполнима, если $[\![\alpha]\!] = T$ при некоторой f_P.

α — опровержима, если $[\![\alpha]\!] = F$ при некоторой f_P.

Определение 3.0.4. Теория корректна, если доказуемость влечёт общезначимость.

Теория полна, если общезначимость влечёт доказуемость.

Определение 3.0.5. $\Gamma \models \alpha$ означает, что α следует из $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, если $[\![\alpha]\!] = T$ всегда при $[\![\gamma_i]\!] = T$ при всех i.

3.1 Корректность исчисления высказываний

Теорема 3.1.1. Исчисление высказываний корректно. $\vdash \alpha$ влечёт $\models \alpha$.

Доказательство. Индукция по длине доказательства $\delta_1, \ldots, \delta_n$.

Разбор случаев:

1. δ_i аксиома $\implies$ построить таблицу истинности, проверить, что все верно.

2. δ_i — м.п. δ_j, $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$ $\implies$ также рассмотрим таблицу истинности.

∎

Мы даём доказательство на метаязыке, не пускаясь в отчаянный формализм. Такая строгость нас устраевает.

В матлогике бесмысленно формализовывать русский язык. Она нужна, чтобы дать ответы на сложные вопросы в математике, где здравого смысла недостаточно и нужна формализация.

3.2 Полнота исчисления высказываний

Теорема 3.2.1. Исчисление высказываний полно.

Определение 3.2.1. ${}_{[\beta]}\alpha = \begin{cases} \alpha, & [\![\beta]\!] = T \\ \neg\alpha, & [\![\beta]\!] = F \end{cases}$

Лемма 3.2.1.1. ${}_{[\alpha]}\alpha$,
${}_{[\beta]}\beta \vdash_{[\alpha\star\beta]} \alpha \star \beta$,
${}_{[\alpha]}\alpha \vdash_{[\neg\alpha]} \neg\alpha$

Пример. $[\![\alpha]\!] = T, [\![\beta]\!] = F \implies \alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$.

Лемма 3.2.1.2. Если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma, \Delta \vdash \alpha$.

Лемма 3.2.1.3. Пусть дана α, $X_1, \ldots, X_n$ — её переменные.

$${}_{[X_1]}X_1, \ldots {}_{[X_n]}X_n \ \vdash_{[\alpha]} \alpha$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{X} =_{[X_1]} X_i \ldots {}_{[X_n]}X_n$.

Индукция по длинне формулы α.
База: $\alpha = X_i$.
Переход: есть α, β. По предположению $\widetilde{X} \vdash_{[\alpha]} \alpha \quad \widetilde{X} \vdash_{[\beta]} \beta$.

По леме 1 тогда $\widetilde{X} \vdash_{[\alpha\star\beta]} \alpha \star \beta$. ■

Лемма 3.2.1.4. Если $\models \alpha$, то $\widetilde{X} \vdash \alpha$. То есть при любых подстановках значнией α будет истинна.

Лемма 3.2.1.5.

$$\Gamma, Y \vdash \alpha, \quad \Gamma, \neg Y \vdash, \text{ то } \Gamma \vdash \alpha$$

Доказательство было в дз. ■

Лемма 3.2.1.6. Если $\widetilde{X} \vdash \alpha$ при всех оценках $X_1, \ldots, X_n$, то $\vdash \alpha$.

Доказательство индукцией по n. ■

Теорема 3.2.2. Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Доказательство. По лемме 4 и лемме 6. ■

4 Интуиционистская логика

Мы не хотим дурацких коснтрукций вроде парадокса брадобрея. Мы не хотим странных, но логически верных утверждений вроде $A \to B \vee B \to A$. Интуиционисткая логика предлагает свою математику, в которой своя интерпретация логических связок. ВНК-интерпретация (Брауер-Гейтинг-Колмогоров).

- $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ — это конструкции.
- $\alpha \wedge \beta$ если мы умеем строить и α, и β.
- $\alpha \vee \beta$, если мы умеем строить α, β и знаем, что именно.
- $\alpha \to \beta$, если мы умеем перестроить α в β.
- $\perp$ — не имеет построения
- $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$

"Теория доказательств". Рассмотрим классическое исчисление высказываний и заменим схему аксиом 10 на следующую

$$\alpha \to \neg\alpha \to \beta$$

В этой формализации мы следуем не сути интуиционисткой логики, а традиции. В интуиционисткой логике формализм это не источник логики.

Примеры моделей.

1. Модели КИВ подходят: корректны, но не полны ($[\![A \vee \neg A]\!] = И$, но $\not\vdash_И A \vee \neg A$).
2. Пусть X топологическое пространство.

   Пусть истоинностные значения — все открыте пространства в классической топологии.

   - $[\![\alpha \& \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$.
   - $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$.
   - $[\![\alpha \to \beta]\!] = (X \backslash [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!])^o$.
   - $[\![\neg\alpha]\!] = (X \backslash [\![\alpha]\!])^o$.

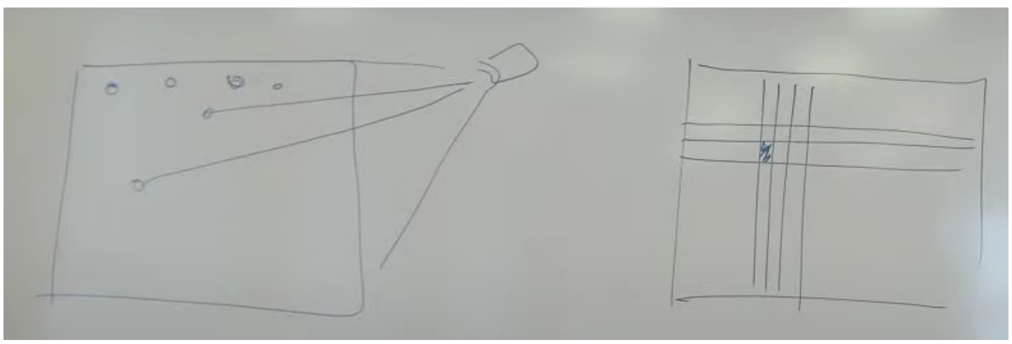
Теорема 4.0.1. Топологические модели — корректные модели ИИВ.

Утверждение 4.0.1. $\not\vdash_И A \vee \neg A$.

Доказательство. Пусть $A = (0, +\infty)$, $\neg A = (-\infty, 0)$, $A \vee \neg A = \mathbb{R} \backslash \{0\} \neq \mathbb{R}$. ■

4.1 Общая топология

Раньше были телевизоры с *бесконченым* количеством пикселей (это зависит от химических свойств вещества кинескоп).



Возьмем множество X. Определим на нем топологию как подмножество множества всех подмножеств $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ω — топология, если это множество открытых множеств и выполнены следующие условия:

1. $\varnothing, X \in \Omega$;
2. $\bigcup\limits_i \in \Omega$, если все $A_i \in \Omega$;
3. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \Omega$, если $A_1, \ldots, A_n \in \Omega$.

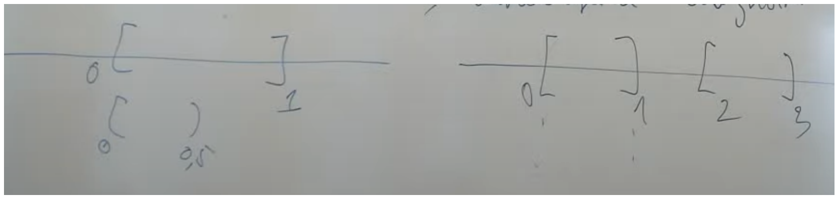
То есть топологическое пространство — пара $\langle X, \Omega \rangle$ и про Ω верны приведенные выше три утверждения.

Определение 4.1.1 (Замкнутое мноежство)**.** Множество B такое, что $X \backslash B \in \Omega$ называется замкнутым.

Определение 4.1.2 (Связное топологическое пространство)**.** $\langle X, \Omega \rangle$ связно, если нет $A, B \in \Omega : A \cup B = X$ и $A \cap B = \varnothing$

Определение 4.1.3 (Подпространство). $\langle X_1, \Omega_1 \rangle$ — подпространство $\langle X, \Omega \rangle$, если $X_1 \subseteq X$ и $\Omega_1 = \{a \cap X_1 \mid a \in \Omega\}$

Определение 4.1.4 (Связное множество). Множество, являющееся связным подпространством.



4.2 Примеры топологических пространств

Возьмем дерево (граф). Множество X — множество вержин. Ω — множество всех вершин, что $B \in \Omega$, если $a \in B$, $x \leqslant a$ влечет $x \in B$. То есть Ω — семейство множеств вершин, которые входят вместе с поддеревом.

Теорема 4.2.1. Граф без цикла свяен тогда и только тогда, когда оно своязно как топологическое пространство.

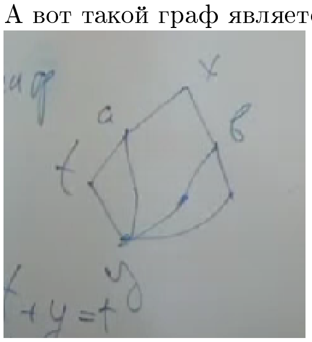
Доказательство будет в дз. ■

Определение 4.2.1 (Решетки). X — частично упорядоченное множество отношением $\leqslant$.
Множество верхних граней a, b $a \sqcap b$ — множество $\{x \in X \mid a \leqslant x, b \leqslant x\}$.
Множество нижних граней a, b: $a \sqcup b$ — множество $\{x \in X \mid a \geqslant x, b \geqslant x\}$.
a — наименьший элемент $A \iff a \in A$ и не существует $b \in A$, $b \leqslant a$.
a — наибольший элемент $A \iff a \in A$ и не существует $b \in A$, $b \geqslant a$.
$a + b =$ наименьший элемент множества верхних граний.
$a \cdot b =$ наибольший элемент множества нижних граний.

Решетка — частично упорядоченное множество, где для каждых двух элементов существуют $a + b$ и $a \cdot b$.

Пример. Дерево — не решетка (в общем случае), так как $a + b$ есть, а $a * b$ может не быть.

А вот такой граф является решеткой.



Теорема 4.2.2. Пусть $\langle X, \Omega \rangle$ топологическое пространство, $A, B \in \Omega$. $A \leqslant B$, если $A \subseteq B$.

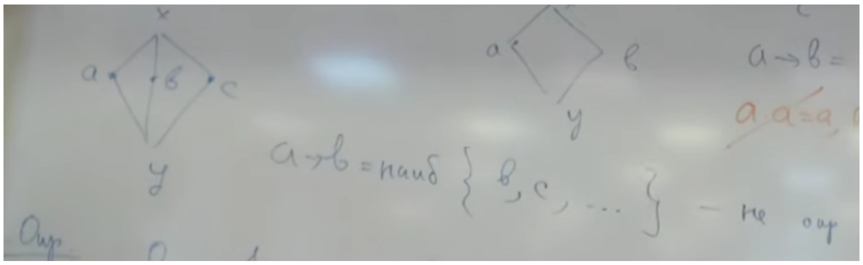
Тогда $\langle \Omega, \leqslant \rangle$ — решетка. $A \cdot B = A \cap B$, $A + B = A \cup B$.

Определение 4.2.2. Дистрибутивная решетка — это такая решетка, что $a, b, c \in \Omega$, $\;a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

Лемма 4.2.2.1. Для дистрибутивной решетки так же верно, что $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Определение 4.2.3. Псевдодополнение $a \to b =$ наибольшее$\{c \mid a \cdot c \leqslant b\}$.

Определение 4.2.4. Диамант — такая решетка, что там нет для кого-то псевдодопллнения.



Определение 4.2.5. Решетка с псевдодополнением для всех элементов называется импликативной.

Определение 4.2.6. Определим 0 и 1 следующим образом:

- 0 — элемент, что $0 \leqslant x$ при всех x;
- 1 — элемент, что $x \leqslant 1$ при всех x.

Теорема 4.2.3 (В импликативной решетке 1 есть всегда)**.** $\langle X, \leqslant \rangle$ — импликативная решетка.

Доказательство. Рассмотрим $a \to a =$ наиб$\{c \mid a \cdot c \leqslant a\} =$ наиб$\{X\} = 1$. ■

Теорема 4.2.4. Рассмотрим $\langle X, \Omega \rangle$ — импликативная решетка с 0. Рассмотрим И.И.В.

Определим оценки $\mathbb{V} = X$:

- $[\![\alpha \& \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!]$.
- $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!]$.
- $[\![\alpha \to \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!]$.
- $[\![\neg \alpha]\!] = [\![\alpha]\!] \to 0$.

α истинно, если $[\![\alpha]\!] = 1$.
$[\![\perp]\!] = 0$. $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$.
Полученная модель — корректная модель И.И.В.

У нас будет натуральный вывод, интуиция и все такое.

$\overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$ (аксиома).

Вывод утверждения в доказательстве $\Gamma \vdash \varphi$.

Правила вывода (сверху — посылка, снизу — заключение):

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}, \quad \frac{\Gamma, \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \varphi}, \quad \frac{\Gamma, \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}, \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \rho}, \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}.$$

Вот они, слева направо: введение $\to$, исключение $\to$, введение $\&$, два исключения $\&$, введения $\vee$ в двух видах, исключение $\vee$ и специальное правило для лжи.

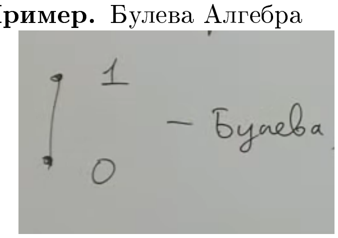
Теорема 4.2.5. Если $\vdash_{\text{И}} \alpha \vee \beta$, то $\vdash_{\text{И}} \alpha$ или $\vdash_{\text{И}} \beta$.

Определение 4.2.7. Алгебра Гейтинга — импликативная решетка с 0.

Определение 4.2.8. Введем операцию $\sim a \equiv a \to 0$ — дополнение до 0.

Определение 4.2.9. Булева алегбра — Алгебра Гейтинга, где $a + \sim a = 1$.

Пример. Булева Алгебра



- $\cdot$ соответствует $\&$,
- $+$ соответствует $\vee$,
- $\to$ соответствует $\to$,
- $\sim$ соответствует $\neg$.

Далее α, β — высказывания в ИИВ.

Определение 4.2.10. $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha \vdash \beta$

Определение 4.2.11. $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$

Определение 4.2.12. Пусть ξ — множество всех высказываний ИИВ.
Тогда $[\xi]$ — называется алгеброй Линденбаума $\mathcal{L}$.

Теорема 4.2.6. $\mathcal{L}$ — Алгебра Гейтинга.

Лемма 4.2.6.1. $\mathbb{1} = [A \to A]$

Доказательство. $\alpha \vdash A \to A$, верно (очевидно), то есть $[\alpha] \leqslant [A \to A]$, то есть $[A \to A] = 1$. ■

Теорема 4.2.7. $\mathcal{L}$ — корректная модель ИИВ.

Теорема 4.2.8. $\mathcal{L}$ — полная модель ИИВ.

Теорема 4.2.9. $\vDash \alpha$, то есть $[\alpha] = 1$.
$1 = [A \to A]$, то есть $[\alpha] = 1$, то есть $\beta \leqslant [\alpha]$ при всех β.
Возьмем $\beta = A \to A$, $A \to A \vdash \alpha$, то есть $A \to A$, $(A \to A) \to \alpha$.

Теорема 4.2.10. Алгебра Гейтинга — полная и корректная модель ИИВ.

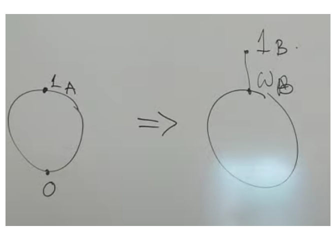
Определение 4.2.13. Исчисление дизъюнктно, если для любых $\alpha, \beta \quad \vdash \alpha \vee \beta$ влечёт $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$.

Теорема 4.2.11. ИИВ дизъюнктно.

Определение 4.2.14. Пусть существует $f : A \to B$, $\quad A, B$ – алгебры Гейтинга.
f – гомоморфизм, если $f(0_A) = 0_B \quad f(1_A) = 1_B$ и $f(\alpha \star_A \beta) = f(\alpha) \star_B f(\beta)$

Определение 4.2.15 (Геделева Алгебра)**.** Это такая алгебра, где $a + b = 1$ влечет $a = 1$ или $b = 1$.

Определение 4.2.16 ($\Gamma(A)$)**.** Пусть A — алгебра Гейтинга.
Определим $\gamma : A \to \Gamma(A)$ так: $\gamma(x) = \begin{cases} \omega, & x = 1_A \\ x, & x < 1_A \end{cases}$ и добавим $1_{\Gamma(A)}$: $t \leqslant 1_\Gamma(A)$, если $t \in \Gamma(A)$.



Замечание. $\Gamma(A)$ неофициально называется Геделеризацией.

Теорема 4.2.12. $\Gamma(A)$ – Гёделева алгебра.

Доказательство. Пусть $a + b = 1_{\Gamma(A)}$, посмотрим на картинку. ∎

Утверждение 4.2.1. $\Gamma(\mathcal{L})$ — Гёделева алгебра.

Доказательство. Определим каноническое отображение $g(x) : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x = 1 \text{ или } \omega \\ x & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Утверждение 4.2.2. $g(x)$ – гомоморфизм

∎

Теорема 4.2.13. Рассмотрим ИИВ и алгебры Гейтинга $\mathcal{L}, \Gamma(\mathcal{L})$

Утверждение 4.2.3. Если $g : A \to B$ и $[\![\alpha]\!]_A = 1_A$, то $[\![\alpha]\!]_B = g(1_A)$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим $\vdash \alpha \vee \beta$.

$\Gamma(\mathcal{L})$ — Геделва алгеба, то есть алгебра Гейтинга.

$[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$, т.е. либо $[\![\alpha]\!] = 1_{\gamma}\mathcal{L}$ либо $[\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$

Рассмотрим $g : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$

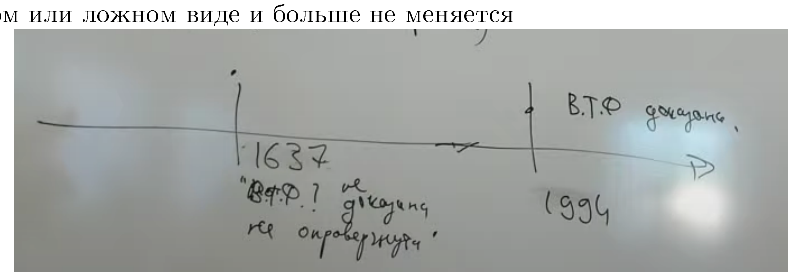
$[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$, тогда $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}} = g(1_{\Gamma(\mathcal{L})}) = 1_{\mathcal{L}}$

т.е. $\vdash \alpha$. ∎

Определение 4.2.17. Модель ИИВ называется табличной, если

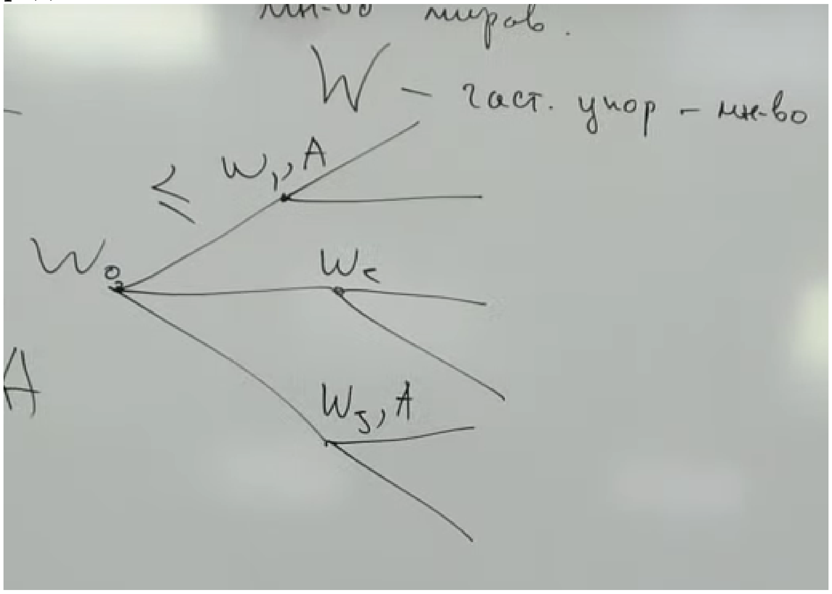
- $\mathbb{V} = \mathcal{S}$;
- $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_{\star}([\![\alpha]\!], [\![\alpha, \beta]\!])$,
- Существует $И \in \mathcal{S}$ – выделенная истина $[\![\alpha]\!] = И$ тогда и только тогда, когда $\models \alpha$

Определение 4.2.18 (Модель Крипки)**.** Некоторые факты, появившиеся на оси времени в истинном или ложном виде и больше не меняется



Замечание. W – частично упорядоченное множество миров.

Определение 4.2.19. $\Vdash$



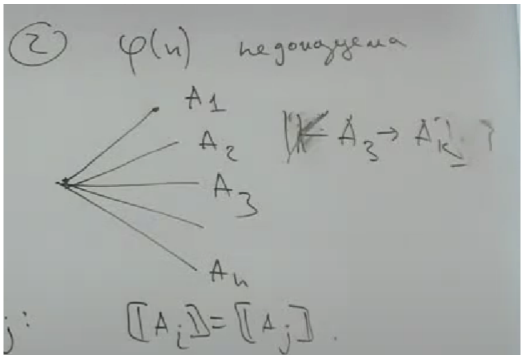
1. Вынужденность переменной A определяется моделью. При этом, если $W_x \leqslant W_y$, $W_x \Vdash A$, то $W_y \vDash A$.
2. Доопределим $\Vdash$ на все выражения:
   (a) $W \Vdash A \land B$, если $W \Vdash A$ и $W \Vdash B$
   (b) $W \Vdash A \lor B$, если $W \Vdash A$ или $W \Vdash B$
   (c) $W \Vdash \neg A$, если нет $W \leqslant W_x$, что $W_x \Vdash A$
   (d) $W \Vdash A \to B$, если во всех $W \leqslant W_x$ из $W_x \Vdash A$ следует $W_x \Vdash B$

Определение 4.2.20. $\vDash \alpha$ если $W \vdash \alpha$.

Теорема 4.2.14. У ИИВ нет полной конечной табличной модели.

Доказательство. $\varphi(u) = \bigvee\limits_{i=1,j=1,i\neq j}^{n,n} A_i \to A_j$.

Пусть T — модель, $|\mathbb{V}| = n$.
Рассмотрим $\varphi(n+1)$. По принципу Дирихле. Есть A_j и A_i: $[\![A_j]\!] = [\![A_i]\!]$.
Несложно показать $[\![A_i \to A_j]\!] = И \implies [\![\varphi(n+1)]\!] = И$.
Рассмотрим модель, где $\varphi(n)$ не доказуемо ни при каком n.



$[\![A_3 \to A_k]\!] = Л$. ■

Теорема 4.2.15. Модель Крипке — корректная модель ИИВ.

4.3 Изоморфизм Кари–Ховарда

Утверждение 4.3.1. τ, σ – типы.

$\tau \to \sigma$

```
f(x : τ): σ {
    return g(x);
}
```

$\tau \& \sigma$

```
f(x: τ, y: σ)
```

$\tau \vee \sigma$

```
f(x: std:variant<τ, σ>)
```

Определение 4.3.1 (Изоморфизм Кари–Ховарда)**.** Программа соответствует доказательству. Тип соответствует утверждению. ...
(всё в интуиционисткой логике)

Замечание. $f : \neg\neg\alpha \to \alpha$ – потом подумаем как это интерпретировать.

5 Исчисление предикатов

Нам нужен новый язык. В текущем языке всё хорошо, но он имеет малую выразитеьную силу. Косвенным свидетельством этого является то, что в нём всё легко разрешается.

В чём была исходная цель Гильберта: формализовать всю математику и доказывать всё, не боясь того, что будет противоречие где-нибудь.

Пример. $\dfrac{\text{Каждый человек смертен} \quad \text{Сократ человк}}{\text{Сократ смертен}}$

$\dfrac{\text{Каждый объект, если он – человек, то он – смертен} \quad \text{Сократ – человк}}{\text{Сократ – смертен}}$

Цель: кванторы и предикаты.

$$\frac{\forall x.H(x) \to S(x) \quad H(\text{Сократ})}{S(\text{Сократ})}.$$

Идея: нам нужно построить некоторый язык и затем поверх него построить теорию моделей и теорию доказательств.

Пример. $\forall x.\sin x = 0 \vee (\sin^2 x) + 1 > 1$.

- Предметные (здесь: числовые) выражения

– Предметные переменные x.
– Одно– и двуместные функциональные символы «синусы», «возведение в квадрат» и «сложение».
– Нульместные <...>

- Логическе выражения

  – Предикатные символы «равно» и «больше».

Язык исчисления предикатов:

1. Два типа: предметные и логические выражения
2. Предметные выражения: матепеременная Θ
   - Предметные переменные: $a, b, c, \ldots$, метапеременне x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$, метапеременные $f, g, \ldots$
3. Логические выражения: метапеременные $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.
   - Предикатные выражения: метампеременная, имена
   - Связки
   - Кванторы

Сокращенные записи, метаязык

1. Метепаременные:
   - ψ, ϕ, π – формулы
   - P, Q – предикатные символы
   - Θ – функциональные символы
   - <...>
2. Скобки – как в И.В.; квантор – жадный:

$$(\forall a.\, \underbrace{A \vee B \vee C \to \exists b.\, \underbrace{D \& \neg E}})\& F$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:
   - $(\Theta_1 = \Theta_2)$ вместо $E(\Theta_1, \Theta_2)$.
   - $(\Theta_1 + \Theta_2)$ вместо $p(\Theta_1, \Theta_2)$.
   - 0 вместо z.

Оценка формулы...
< todo >

Пример. $[\![\forall x.\exists y.\neg x + 1 = y]\!]$
Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$
- $F_1 := 1, F_+$ – сложение в $\mathbb{N}$
-

Фиксируем $x \in \mathbb{N}$ Тогда:

$$[\![x + 1 = y]\!]^{y:=x} = Л.$$

Поэтому при любом $x \in \mathbb{N}$:

....

Итого:

$$[\![\forall x.\exists y.\neg x + 1 = y]\!] = И$$

Пример. Странная интерпретация

$$[\![\forall x.\exists y.\neg x + 1 = y]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \{\square\},\ F_{(+)}(x, y) = \square$;
- $P_{(=)}(x, y) = И$

Тогда $[\![x + 1 = y]\!]^{x \in D, y \in D} = И$. x Итого $[\![\forall x.\exists y.\neg x + 1 = y]\!]^{x \in D, y \in D} = Л$.
Поэтому формулам оценки предикатов верить нельзя. Никакой интуиции за ними может и не стоять

Определение 5.0.1. Формула общезначима, если истинна при любой оценке

Теорема 5.0.1.

$$[\![\forall x.Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!].$$

Доказательство. Перебор случаев ■

Определение 5.0.2. Рассмотрим формулу $\forall x.\psi$ (или $\exists x.\psi$). Здесь переменная x связзана в ψ Все вхождения переменой x в ψ – связанные

Определение 5.0.3. Переменная x входит свободно в ψ <..aa>

Определение 5.0.4. Терм Θ свободен для подстановки вместо x в ψ ($\psi[x := \Theta]$), если ни одно свободное вхождение переменной в Θ не станет связным после подстановки.

Свобода есть: $(\forall x.P(y))[y := z]$ или $(\forall x.\forall y.P(x))$.
Свободы нет: $(\forall x.P(y))[y := x]$ и $(\forall y.\forall x.P(t))[t := y]$.

6 Теория доказательств

11. $(\forall x.\phi) \to \phi[x := \Theta]$
12 $(\exists x.\phi) \to$ fix me
Добавим еще два правила вывода (здесь везде x не входит свободно в φ):

- Введение $\forall$. $\frac{2}{2}$.

Определение 6.0.1. Доказыуемость, выводисость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказываний.

7 Теорема о едукции для исчисления предикатов

Теорема 7.0.1. Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из α, то $\gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ также как в К.И.В

$\Longleftarrow$ та же схема, два новых случая.аксиомы те же, но нужно обработать два новых правила вывода. ∎

валмлдоыауова лдоваы оафлдов флва пло щзвдфыфа ф спасите
хехехе модус понос
короче все докажется

Следование

Определение 7.0.1 (Следование). $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \models \alpha$, если выполнено два условия:

1. α выполнено всегда, когда выполнено

...

Влажность второго условия.
Зачем нам это потребовалось? Мы будем пользоваться, но не злоупотреблять.
Мы не хотим заранее сильно ограничивать язык. ПОэтому мы выбираем такой вариант, чтобы он разрешал некоторые.

Пример. $\vdash \exists x.P(x) \to P(x)\ldots$
(1) $A \to (A \to A) \to A \implies P()$

Пример. $\vdash x.P(x) \to P(x)$