# Матан, лекции

## 1 Повторение

Задачи и темы, которые мы будем обсуждать в новом семестре: многообразия, дифференциальные формы на них, криволинейные интегралы, интегралы от параметров, формула Стокса, формула Остроградского, $\gamma$-, $\beta$-функции.

Интеграл от функции произвольного знака это разность интегралов компонент. В случаях, когда оба слогаемых не бесконечные, такая разность имеет смысл.

Интеграл комплекснозначной функции это сумма интегралов вещественных компонент функции.

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

Монотонность интеграла.

$$\int_E (f_1 + f_2) \geqslant \int_E f_1 = \infty$$

**Теорема 1** (Теорема Леви для последовательности)**.** Если $f_n$ неотрицательные измеримые на $E$ функции и $f_n \uparrow f$ возрастая сходится поточечно к $f$, то

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f d\mu$$

**Теорема 2** (Теорема Леви для рядов)**.** Если $f_n$ неотрицательные измеримые на $E$ функции, то интеграл от ряда совпадает с суммой ряда из интегралов.

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

*Доказательство.* Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — частичная сумма. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ ∎

**Пример 1.** Функция, которая не удовлетворяет условиям теоремы Леви:

$$f_k(x) = \xi_{[k,k+1]}(x)$$

$$\int_{[0,+\infty]} f_k(x) d\mu = \int_{[k,k+1]} f_k(x) d\mu = 1$$

$$\int f(x) d\mu = \int_{[0,+\infty]} 0 d\mu = 0$$

**Замечание 1.**
1. Для $f \in S(E)$ $|f| \in L(E,\mu)$ тогда и только тогда, когда $f \in L(E,\mu)$.
2. Если интеграл $\int_E f d\mu$ определен, то $\int_E |f| d\mu \geqslant |\int_E f d\mu|$.

*Доказательство.* ∎

Отсутпление про суммируемую мажоранту.

Если функция имеет суммируемую мажоранту, то сама она является суммируемой.

... $L_1(E,\mu)$: две функции эквивалентны по мере на $E$, если они совпадают почти везде на $E$. Другими словами, мера подмножества $E$, на котором функции принимают разные значения, равна нулю.

$$\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$$

.

Элементы $L_1(E,\mu)$ могут быть определены не на всём $E$ целиком, но на множестве полной меры.

$$|f+g| \leqslant |f| + |g|$$

Эта норма невырожденная. Если $f \in S_+(E)$ и $\int f\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на $E$.

**Теорема 3** (Счётная аддитивность интеграла)**.** Пусть $f \in S(E)$ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in ?$, определн $\int_E f d\mu$. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$$

*Доказательство.* ... ■

**Теорема 4** (О приближении интеграла интегралом по множеству конечной меры)**.** Пусть мера $E$ конечна и $f \in L(E, \mu)$ суммиурема. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_0 \subset E : \mu(E_0) < +\infty \text{и} \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu < \epsilon$$

*Доказательство.* Не умаляя общности $f \geqslant 0$ на $E$. Продложим $f$ нулем вне $E$. $J(A) = \int_A f d\mu$— мера. $E_K = E\{f > \frac{1}{k}\}$, $E_* = E\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Непрерывность меры снизу $E_k$ — множества конечной меры.

Научились приближать с любой точностью интеграл интегралом по множествам конечной меры. ■

Теорема Фато и теорема Лебега.

**Теорема 5.** Пусть $f_k$
$inS_+(E)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\underline{\lim}_{k \in \infty} \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$.

И если $f_k(x) \to f(x)$ на $E$, то $\int_E f(x) \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$

**Теорема 6** (Теорема Лебега о мажорированной сходимости)**.** Пусть $f_n \to f$ сходится почти везде на $E$ и $\Phi \in L(E, \mu)$: $\forall k \in \mathbb{N} |f_k| \leqslant \Phi$ почти везде на $E$. Тогда $f \in L(E, \mu)$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \int_E f d\mu$.
...

Интеграл положительнозначной функции определяет меру. Интеграл функции это разность мер компонент. Такая разность называется заряд.

**Теорема 7** (Фубини)**.**

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \ldots, x_k) \\ y &= (y_1, \ldots, y_m) \\ f(x, y) &\in \mathcal{L}\left(E, \lambda_{k+m}\right) \\ E &\in \mathcal{A}_{k+m} \\ &. \end{aligned}$$

то:

1. Для почти всех $x \in \mathbb{R}^k \quad g\left(\cdot\right) = f\left(x, \cdot\right) \in \mathcal{L}\left(E\left(x, \cdot\right)\right)$
2. $I(x) = \int_{E(x, \cdot)} f\left(x, y\right) d\lambda_m(y) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^k\right)$
3. $$\int_E f\left(x, y\right) d\lambda_{k+m}\left(x, y\right) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{E(x, \cdot)} f\left(x, y\right) d\lambda_m(y)\right) d\lambda_k(x)$$
.

**Пример 2.** $E = A \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{k+m} \quad {}_0 \in \mathbb{R}^n$

$A$ – неизмеримое в $\mathbb{R}^k$

$E$ – измеримо в $\mathbb{R}^{k+m}$

$Pr_x(E) = A$ – неизмеримое

Если $Pr_x(E)$ измеримо, то вместо интеграла по $\mathbb{R}^k$ можно написать интеграл по проекции

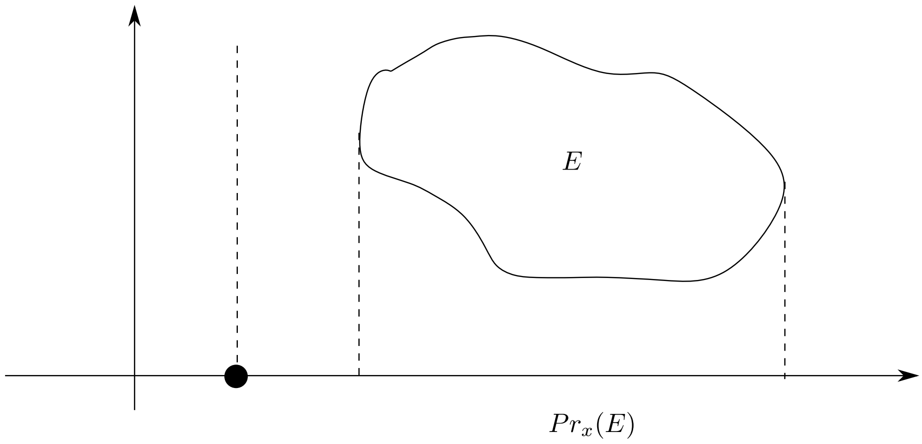


Рис. 1: Переход в интегралу по проекции

**Замечание.** Если $E$ – компактное или открытое, то $Pr_x(E)$ измеримо.

$Pr_x(E) = \Phi(E)$, где $\Phi(x, y) \equiv x$ – отображение проектирования

Если $E$ – компактное, то $\Phi(E)$ – компактное. Если открытое, то открытое.

**Пример 3.** 1.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dy = I_1$$
$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx = I_2$$
.

Если интегралы существуют, то они антиравны.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y}{(x^2 + y^2)}\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} - 0dx = \operatorname{arctg} x|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Вывод: функция $f(x, y) \notin \mathcal{L}\left([0, 1]^2, \lambda_2\right)$

2.

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dy$$
$$\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \frac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx$$

$$f \in \mathcal{L}^2\left([-1, 1]^2\right) \iff |f| \in \mathcal{L}\left([-1, 1]^2\right) \implies |f| \in \mathcal{L}\left([-1, 1]^2\right)$$

$$\iint_{[0,1]^2} f\left(x, y\right) dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx$$

<.....>

**Утверждение 1.** Семейство называется суммируемым, если функция суммируема

**Утверждение 2.** Если семейство $(a_x)_{x\in X}$ суммируемо, то $\{x : a_x \neq 0\}$ – не более чем счётное.

*Доказательство.* Не умаляя общности $a_x \geqslant 0$
$+\infty > \int_X a_x dv = \int_{X_0} a_x dv > \int a_x dv \geqslant \frac{1}{j}\nu\left(x_j\right) \implies \nu(x_j) < +\infty$
$X_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ – не более, чем счётное ■

**Утверждение 3.** $\sqsupset X$ – н.б.ч.с, $Y$ – числовое множество, $(a_x)_{x\in X} \subseteq Y \quad \varphi : \mathbb{N} \to X$
Тогда $(a_x)$ суммируемы $\iff \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ сходится абсолютно.

# 2 Замена переменной в интеграле по мере

## 2.1 "Пересадка" меры

$\Phi : X \to Y$ . $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой.
$\mathcal{D} = \left\{B \subseteq Y | \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$
$\Phi^{-1}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}\left(B_k\right) \in \mathcal{A}$
$\nu\left(B\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(B\right)\right)$

**Пример 4.** $X = [0, 2\pi) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap [0, 2\pi)$
$\Phi(t \in X) = (\cos t, \sin t)$

**Теорема 8** (Общая схема замены переменных)**.** $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$
$\Phi : X \to Y$ – не портит измеримость.
$\sqsupset h \in S_+(X) : \forall B \in \mathcal{D}$

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} h d\mu$$

Тогда $\forall f \in f \in S\left(Y, \nu\right)$

$$\int_Y f d\nu = \int_X f\left(\Phi(x)\right) h(x) d\mu(x)$$

*Доказательство.* $f \circ \Phi$ – измерима?
$X\left\{f \circ \Phi < a\right\} = \Phi^{-1}\left(Y\left\{f < a\right\}\right)$. $Y\left\{f < a\right\} \in \mathcal{L}$, т.к. $f$ измеримо. А тогда $\Phi^{-1}\left(\ldots\right) \in \mathcal{A}$
Совпадение интегралов:

1. $f$ – ступенчатая, $f = \sum\limits_{k=1}^{K} C_k \chi_{D_k} \quad \{D_k\}$ – разбиение $X$

$$\int_Y f d\nu = \sum_{k=1}^{K} C_k \nu\left(D_k\right) = \sum_{k=1}^{K} C_k \int_{\Phi^{-1}(D_k)} h d\mu =$$

$$= \int_X \left( \sum_{k=1}^{K} C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)} <?> \right)$$

$$= \int_X f \circ \Phi(x) h(x) d\mu(x)$$

$$f \circ \Phi(x) = C_k \quad x \in \Phi^{-1}(D_k)$$

$$\sum_{k=1}^{K} C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)}(x) = C_k.$$

2. $f \in S_+(Y) \quad \exists \{g_j\}$ – ступенчатая небобратимая $g_i \uparrow f$

$$\int_Y f d\nu = \lim_{j \to \infty} \int_Y g_j d\nu = \lim_{j \to \infty} \int_X g_j\left(\Phi(x)\right) h(x) d\mu$$

$$= \int_X f\left(\Phi(x)\right) h(x) dmu(x)$$

.

3. Общий случай:
   $f = f_+ + f_-$

$$\int_Y f d\nu = \int_Y f_+ - \int_Y f_- d\mu = \int_X f_+\left(\Phi(x)\right) h(x) d\mu(x) - \int_Y f_-\left(\Phi(x)\right) h(x) d\mu(x)$$

$$= \int f\left(\Phi(x)\right) h(x) d\mu(x)$$

$$\left(f\left(\Phi\right) h\right)_+ = f_+\left(\Phi\right) h.$$

■

**Следствие 8.1.** $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$
$h \in S_+(X); \quad \Phi : X \to Y \quad \Phi^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}$
и выполняется условие теоремы общей замены переменной. Тогда $\forall E \subseteq \mathcal{D} \quad f \in S\left(E, \nu\right)$:

$$\int_E f(y) d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(E) f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)}$$

Рассмотрим продолжение нулём $f$ с $E$ на $Y$

$$\int_E f d\nu = \int_Y (y) \chi_E(y) d\nu(y) = \int_X f\left(\Phi(x)\right) \underbrace{\chi_E\left(\Phi(x)\right))}\chi_{\Phi^{-1}(E)} h(x) d\mu(x) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f\left(\Phi(x) h(x) d\mu(x)\right)$$

**Следствие 8.2** (частный случай 1). Если $h \equiv 1$ в условии теоремы.
$\left(\forall E | in \mathcal{D} \quad \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\mu = \mu\left(\Phi^{-1}\left(E\right)\right)\right)$
мера $\nu$ при этом называется образом меры $\mu$

$$\forall f \in S(E) \qquad \int_E f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi(x) d\mu(x)$$

**Следствие 8.3** (Частный случай 2). $X = Y \quad \Phi = id \quad \nu(E) = \int_E h(x) d\mu(x)$

<..>

**Теорема 9.** $\sqsupset (X,\mathcal{A},\mu)$ – пространство с мерой, $\Phi : X \to Y \quad h \in S_+(X)$

Следующие утверждения равносильны:

1. $h$ плотность $\nu$ относительно $\mu$

2. $\forall E \in \mathcal{A}$
$$\inf_E h\mu E \leqslant \nu(E) \leqslant \sup_D h\mu(E)$$

*Доказательство.* $I \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E hd\mu$

Т.о. $I \implies II$ ■

**Теорема 10** (Критерий плотности)**.** $\sqsupset (X,\mathcal{A})$ – измеримое пространство, $\mu,\nu$ – опр. (?) $\mathcal{A}$ $h \in S_+(X)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. $h$ – плотность меры $\nu$ относительно $\mu$ ($\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E hd\mu$)

2. $\forall E \in \mathcal{A}$
$$\inf_E h \cdot \mu(E) \leqslant d(E) \leqslant \sup_E h \cdot \mu(E)$$

Если $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbb{R}^n,\mathcal{A},\lambda_n)$, тогда $1 \iff 3$:

3
$$\forall P \in \mathcal{P}_n \quad \inf_P h \cdot \mu(P) \leqslant \nu(P) \leqslant \sup_P h \cdot \mu(P)$$

*Доказательство.* План: $1 \implies 2 \implies 3$

$2 \implies 1$? $\lhd E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) \stackrel{?}{=} \int_E hd\mu$

$$E = E\{h=0\} \coprod E\{h=+\infty\} \coprod E\{0<h<+\infty\}$$

$$\nu(E) = \nu(E\{h=0\}) + \nu(E\{h=+\infty\}) + \nu(E\{0<h<+\infty\})$$
$$\nu(E\{h=0\}) \leqslant \sup_{E\{h=0\}} = 0 = \int_{E\{h=0\}} hd\mu$$
$$\nu(E\{h=+\infty\}) \leqslant h \cdot \mu(E) + \infty \cdot \mu(E) = \int_{E\{h=+\infty\}hd\mu}.$$

$\lhd \dfrac{1}{q} \in (0,1),\ q>1 \quad (0,+\infty) = \bigvee k \in \mathbb{Z}[q^k, q^{k+1})$
$E\{h \in (0,+\infty)\} = \bigvee E\{q^k \leqslant h < q^{k+1}\}$
$q^k\mu(E_k) \leqslant \nu(E_k) \leqslant q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$
$q^k\mu(E_k) \leqslant \int hd\mu \leqslant q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$
$\dfrac{\nu(E_k)}{q} \leqslant q^k \cdot \mu(E_k) \leqslant \int_{E_k} hd\mu = q \cdot q^k\mu(E_k) \leqslant q \cdot \nu(E_k)$
Просуммируем это по всем $k$.
$\dfrac{1}{q}\nu(E) = \int_E hd\mu \leqslant q \cdot \nu(E),\quad q \to 1 \implies \nu(E) \leqslant \int_E hd\mu \leqslant \nu(E) \implies \nu(E) = \int_E hd\mu$
$\lhd\widetilde{\nu}$ – стандартное продолжение <...> (нужно дополнить) ■

**Теорема 11.** $\sqsupset \Phi$ – диффеоморфизм множеств $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad G \underset{\Phi}{\to} O$

Тогда $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad E \subseteq O$

$$\lambda_n(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \left|\det \Phi'\right| d\lambda_n$$

$$\lambda_n(O) = \int_G |\det \Phi'| \, d\lambda_n$$

Если $O \sim \widetilde{O} \quad G \sim \widetilde{G} \quad \Big(\lambda_n(O \setminus \widetilde{O}) = \emptyset \dots\Big)$, то

$$\lambda_n(\widetilde{O}) = \int_{\widetilde{G}} |\det \Phi'| \, d\lambda_n$$

**Замечание.**

$$\begin{aligned} \nu(P) \leqslant \sup_P h d\mu(P) \text{ – от противного} \\ \implies \exists \text{ ячейки } P_0 : \quad \nu(P) > M \cdot \mu(P) = \sup_{P_0} h \cdot \mu(P) \\ \Phi(x) = \Phi(x_0) + d_{x_0}\Phi(x - x_0) + o(x - x_0) \\ x \approx x_0 \qquad \Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d_{x_0}\Phi(x - x_0) \\ . \end{aligned}$$

Если $Q$ – малая ячейка, то

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \approx \lambda_n d_{x_0}\Phi(Q) = \left|\det \Phi'_{x_0}\right| \lambda_n(Q)$$

**Следствие 11.1.** Если $\Phi : G \to O$ – диффеоморфизм, $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad \widetilde{G} \sim G, \widetilde{O} \sim O \quad f \in S(O)$, то

$$\int_{\widetilde{O}} f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\widetilde{G}} f(\Phi(u)) \left|\det \Phi'(u) d\lambda_n(u)\right|$$

**Пример 5.** Полярные координаты.

$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi.$

$\Phi : (r, \varphi) \to (x, y),$

$([0, +\infty) \times [-\pi, \pi])) \to \mathbb{R}^n,$

$(0, +\infty] \times (-\pi, \pi))) \to \mathbb{R}^n \setminus (-\infty, 0]).$

$\det \Phi' = r; \quad E = \mathbb{R}^2 :$

$$\iint_E f(x, y) dxdy = \iint_{\Phi^{-1}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

**Пример 6** (интеграл Эйлера-Пуассона)**.**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ I \cdot I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ys} \qquad = \iint_{\{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}} e^{-x^2 + y^2} dxdy \\ &= \iint_{\left\{0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \quad r >= 0\right\}} e^{-r^2} r dr d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-r^2}}{-2} \,|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{+\infty} r^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

.

**Пример 7.** Цилиницрические координаты

$$
\begin{aligned}
r\cos\varphi &= x \\
r\sin\varphi &= y \\
h &= z
\end{aligned}
$$
.

$\Phi : (r, \varphi, h) \to (x, y, z) \quad \Phi : (0, +\infty) \times (-pi, pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z)| \mid x \leqslant 0\}\}$
$|\det \Phi'| = r$
$\iiint_E f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{\Phi^1(E)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h) \cdot rdrd\varphi dh$

**Пример 8.** Сферические координаты
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$
\begin{aligned}
r\cos\varphi\cos\psi &= x \\
r\sin\varphi\cos\psi &= y \\
r\sin\psi\varphi\sin\psi &= y
\end{aligned}
$$

$\det \Phi' = r^2 \cos\varphi$
Можно обобщить на $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
r &= \|x\| \\
x_1 = r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\dots\cos\varphi_1 \\
&\dots \\
x_{n-2} = r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-3} \\
x_{n-1} = r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2} \\
x_n = r\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}
$$
.

**Пример 9.**

$$
\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leqslant \mathbb{R}^2 \\ x^2+y \leqslant z^2 \\ z \geqslant 0}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz
$$

Преобразовать используя:

- Цилиндрические координаты

  Перепишем множество интегрирования в новых координатах: $\begin{cases} r^2 + h^2 \leqslant R^2 \\ r^2 \leqslant h^2 \implies r \leqslant h \\ h \geqslant 0, r \geqslant 0 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\substack{r^2+h^2 \leqslant R^2 \\ r \leqslant h \\ h \geqslant 0, r \geqslant 0}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\, rdrd\varphi dh \\
&= \iint\limits_{\substack{\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}}} r \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\, dr \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} rdr \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\, dh
\end{aligned}
$$
.

- Цилиндрические координаты (второй вариант)

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h rfdr + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} rfdr$$

.

- Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \\ \mathrm{tg}^2\,\psi \geqslant 0 \\ \sin\psi \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant r \leqslant R \\ r^2\cos^2\psi \leqslant r^2\sin^2\psi \\ r\sin\psi \geqslant 0 \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E f\left(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\right) r^2\cos\psi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R f(\ldots) r^2\cos\psi dr \end{aligned}$$

.

**Пример 10.**

$$\iiiint_E zdxdydz$$

$E$ :

$$\begin{aligned} t^2(x^2+y^2) \leqslant z^2 \\ 0 \leqslant z \leqslant t \leqslant 3 \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} \iiiint_E zdxdydz &= \iint_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} dzdt \iint_{\{x^2+y^2\leqslant \frac{4z^2}{t^2}\}} zdxdy \\ &= \iint_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} dzdt z\pi\cdot\frac{4z^2}{z^2} \\ &= 4\pi \iint_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} \frac{z^3}{t^2} dzdt \\ &= 4\pi \int_0^3 \frac{1}{t^2} dt \int_0^t z^3 dz = \frac{4\pi}{4}\left(\int_0^3 t^2 dt\right) = \pi\cdot 9 \end{aligned}$$

.

# 3 Мера Лебега–Стилтьеса

$\sqsupset g(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}$ и непрерывна слева $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} g(x) \equiv g(x_0)\right)$

**Задача 1.** Если $h(x)$ – произвольная возрастающая функция, то её можно превратить в непрерывную слева исправлением нбчс количества точек.

$\exists \uparrow$ и непрерывная слева $g(x) = h(x)$ всюду кроме точек разрыва $h(x)$

$g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} h(x)$

Определим $\mu_g([a,b]) = g(b) - g(a) \geqslant 0$. Так же верно, что $\mu_g$ обладает счетной аддитивностью на $\mathcal{P}_1$ (доказывается так же, как в случае с мерой Лебега) $\implies$ $\mu_g$ – мера на $\mathcal{P}_1$

Стандартное продолжение $\mu_g$, которое также обозначается $\mu_g$ называется мерой Лебега-Стилтьеса, порождённой функцией $g$

$$\begin{aligned}\mu_g(\{c\}) &= \mu_g\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}[c, c+\frac{1}{j}]\right)\\ &= \lim_{j\to\infty}\mu_g\left([c,c+\frac{1}{j}]\right)\\ &= \underbrace{\lim_{j\to\infty} g(c+\frac{1}{j})}_{=g(c+0)} - g(c) = g(c+0) - g(c)\end{aligned}$$

.

$\implies$ Если $c$ – точка непрерывности, то $\mu_g(\{c\}) = 0$

$\mu_g([a,b]) = \mu_g([a,b]) + \mu_g(\{b\}) = g(b) - g(a) + g(b+0) - g(b) = (g(b+0) - g(a-0))$

$\mu_g((a,b)) = \mu_g([a,b)]) - \mu(\{a\}) = g(b) - g(a) - (g(a+0) - g(a)) = g(b) - g(a+0)$

$\mu_g((a,b]) = g(b+0) - g(a+0)$

**Определение 1.** Пусть $\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k\delta_{a_k}, \quad h_k \geqslant 0, \quad \delta_a(E) = \begin{cases}1, & a\in E\\ 0, & a\notin E\end{cases}$, тогда $\mu$ — дискретная мера.

$E, E_j \in 2^{\mathbb{R}} \quad E = \bigvee\limits_{j=1}^{\infty} E_j \implies \delta_{a_k}(E) = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\delta_{a_k}(E_j)$

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu(\bigvee_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_k\sum_j h_k\delta_{a_k}(E_j)\\ &= \sum_j \mu(E_j)\end{aligned}$$

.

Последний переход в равенстве по теореме Тонелли.

**Замечание.** $\sqsupset \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$

$\forall [a,b] \qquad \sum\limits_{k:a_k\in[a,b]} h_k < +\infty$

**Пример 11.** Если $\{a_k\}$ – дискретно (без точек сгущения на $\mathbb{R}$), то условие автоматически выполняется, т.к. перечесечения $a_k$-ых с промежутком будет конечно, а значит и сама сумма будет конечна

$A = \mathbb{Q} \quad h_k = \dfrac{1}{2^k}$

**Определение 2** (функция Хэвисайда).

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x \leqslant 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

$\sqsupset x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall C \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cdot (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) + C$$

1. $g(x)$ возрастает
2. $x \in [a, b] \quad \sum\limits_k h_k(\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \leqslant \sum\limits_{a_k : I_{x,x_0}} h_k$

   Разность Тет ненулевая, если $a_k$ находится между $x$ и $x_0$ – $I_{x,x_0}$

---

**Утверждение 4.** $A = \{a_k\}_k$

1. $g \in C\left(\mathbb{R} \setminus A\right)$
2. Непрерывность слева на $A$

---

*Доказательство.* 1. $\sqsupset x \in \mathbb{R} \setminus A \quad \sqsupset (a, b) \ni x$

$\triangleleft \forall \varepsilon > 0 \quad \sum\limits_{k : a_k \in [a,b]} h_k < +\infty \implies \exists K : \sum\limits_{\substack{a_k \in [a,b] \\ k \geqslant K}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$g_k(x) = h_k\left(\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)\right)$ — локально постоянны в точке $x$ ($\exists V_\delta(x)\ :\ g_k \mid_{V_\delta(x)} \equiv$ $const$ для $k = 1, \ldots, k$)

Не умаляя общности $[a, b] \supseteq V_\delta(x)$

$$\begin{aligned} g(\widetilde{x}) - g(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k\left(\Theta(x - a_k) - \Theta(x - a_k)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k\left(\Theta(\widetilde{x} - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k\left(\Theta(x - a_k) - \Theta(\widetilde{x} - a_k)\right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{K} h_k\left(\Theta(x - a_k) - \Theta(\widetilde{x} - a_k)\right)}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} h_k\left(\Theta(x - a_k) - \Theta(\widetilde{x} - a_k)\right)}_{= \frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

.

$\implies$ Непрерываность

Если $x = a_k \quad g(x) = g_{k_0}(x) + \underbrace{\sum\limits_{k \neq k_0} g_k}_{\text{непрерывна как в пред. случае}}$

■

$$
\begin{aligned}
\mu_g\left([a,b)\right) &= g(b)-g(a)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k\left(\Theta(b-a_k)-\Theta(a-a_k)\right) \qquad a \leqslant a_k \leqslant b\\
&= \sum_{k: a\leqslant a_k<b} h_k = \mu([a,b))
\end{aligned}
$$

.

$\mu$ и $\mu_g$ совпадают на совокупности всевозможных промежутков.

**Определение 3.** Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Функция $f$ называется локально суммируемой на $\mathbb{R}$ $\iff \forall\,[a,b] \qquad f\Big|_{[a,b]} \in \mathcal{L}(\lambda_1)$.

**Определение 4.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Функция $f$ называется абсолютно непрерывной, если существует локально суммируемая функция $h(x)$ и точка $x_0\in\mathbb{R}$:

$$g(x)=\int_{x_0}^{x} h(x)d\lambda$$

(интеграл Лебега. Если $x<x_0$, то $\int_{x_0}^{x} h\,d\lambda = -\int_{[x,x_0]} h\,d\lambda$)

Если $h$ непрерывна в точке $x$, то $g(x)$ дифференцируема в точке $x$ и $g'(x)=h(x)$. Доказательство – смотри теорему Барроу...

Если $h(x)\geqslant 0$, то $g(x)\nearrow$

Функция $g(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Следует из абсолютной непрерывности интеграла.