

# Конспекты по математическому анализу

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев, Константин Бац

2022 год, семестр 4

## 1 Повторение

Задачи и темы, которые мы будем обсуждать в новом семестре: многообразия, дифференциальные формы на них, криволинейные интегралы, интегралы от параметров, формула Стокса, формула Остроградского,  $\gamma$ -,  $\beta$ -функции.

Интеграл от функции произвольного знака это разность интегралов компонент. В случаях, когда оба слагаемых не бесконечные, такая разность имеет смысл.

Интеграл комплекснозначной функции это сумма интегралов вещественных компонент функции.

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

Монотонность интеграла.

$$\int_E (f_1 + f_2) d\mu \geq \int_E f_1 d\mu = \infty$$

**Теорема 1** (Теорема Леви для последовательности). Если  $f_n$  неотрицательные измеримые на  $E$  функции и  $f_n \uparrow f$  возрастающая сходится поточечно к  $f$ , то

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int_E \lim f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

**Теорема 2** (Теорема Леви для рядов). Если  $f_n$  неотрицательные измеримые на  $E$  функции, то интеграл от ряда совпадает с суммой ряда из интегралов.

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

*Доказательство.* Пусть  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  — частичная сумма.  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$  ■

**Пример.** Функция, которая не удовлетворяет условиям теоремы Леви:

$$f_k(x) = \xi_{[k, k+1]}(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{[0, +\infty]} f_k(x) d\mu &= \int_{[k, k+1]} f_k(x) d\mu = 1 \\ \int f(x) d\mu &= \int_{[0, +\infty]} 0 d\mu = 0 \end{aligned}$$

**Замечание.** 1. Для  $f \in S(E)$   $|f| \in L(E, \mu)$  тогда и только тогда, когда  $f \in L(E, \mu)$ .

2. Если интеграл  $\int_E f d\mu$  определен, то  $\int_E |f| d\mu \geq |\int_E f d\mu|$ .

Доказательство. ■

Отсутствие про суммируемую мажоранту.

Если функция имеет суммируемую мажоранту, то сама она является суммируемой.

...  $L_1(E, \mu)$ : две функции эквивалентны по мере на  $E$ , если они совпадают почти везде на  $E$ . Другими словами, мера подмножества  $E$ , на котором функции принимают разные значения, равна нулю.

$$\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$$

Элементы  $L_1(E, \mu)$  могут быть определены не на всём  $E$  целиком, но на множестве полной меры.

$$|f + g| \leq |f| + |g|$$

Эта норма невырожденная. Если  $f \in S_+(E)$  и  $\int f d\mu = 0$ , то  $f = 0$  почти всюду на  $E$ .

**Теорема 3** (Счётная аддитивность интеграла). Пусть  $f \in S(E)$   $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ,  $E_k \in \mathcal{E}$ , определим  $\int_E f d\mu$ . Тогда

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$$

Доказательство. ... ■

**Теорема 4** (О приближении интеграла интегралом по множеству конечной меры). Пусть мера  $E$  конечна и  $f \in L(E, \mu)$  суммируема. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_0 \subset E : \mu(E_0) < +\infty \text{ и } \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu < \epsilon$$

Доказательство. Не умаляя общности  $f \geq 0$  на  $E$ . Предложим  $f$  нулем вне  $E$ .  $J(A) = \int_A f d\mu$  — мера.  $E_K = E\{f > \frac{1}{K}\}$ ,  $E_* = E\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ .

Непрерывность меры снизу  $E_k$  — множества конечной меры.

Научились приближать с любой точностью интеграл интегралом по множествам конечной меры. ■

Теорема Фато и теорема Лебега.

**Теорема 5.** Пусть  $f_k$   $\text{in} S_+(E)$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\lim_{k \in \mathbb{N}} \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$ .

И если  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  на  $E$ , то  $\int_E f d\mu \leq \liminf \int_E f_k d\mu$

**Теорема 6** (Теорема Лебега о мажорированной сходимости). Пусть  $f_n \rightarrow f$  сходится почти везде на  $E$  и  $\Phi \in L(E, \mu)$ :  $\forall k \in \mathbb{N} |f_k| \leq \Phi$  почти везде на  $E$ . Тогда  $f \in L(E, \mu)$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu$ . ...

Интеграл положительнозначной функции определяет меру. Интеграл функции это разность мер компонент. Такая разность называется заряд.

**Теорема 7 (Фубини).**

$$\begin{aligned}x &= (x_1, \dots, x_k) \\y &= (y_1, \dots, y_m) \\f(x, y) &\in \mathcal{L}(E, \lambda_{k+m}) \\E &\in \mathcal{A}_{k+m}\end{aligned}$$

то:

1. Для почти всех  $x \in \mathbb{R}^k$   $g(\cdot) = f(x, \cdot) \in \mathcal{L}(E(x, \cdot))$
2.  $I(x) = \int_{E(x, \cdot)} f(x, y) d\lambda_m(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$
- 3.

$$\int_E f(x, y) d\lambda_{k+m}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{E(x, \cdot)} f(x, y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_k(x)$$

**Пример.**  $E = A \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$   $0 \in \mathbb{R}^n$

$A$  – неизмеримое в  $\mathbb{R}^k$

$E$  – измеримо в  $\mathbb{R}^{k+m}$

$Pr_x(E) = A$  – неизмеримое

Если  $Pr_x(E)$  измеримо, то вместо интеграла по  $\mathbb{R}^k$  можно написать интеграл по проекции

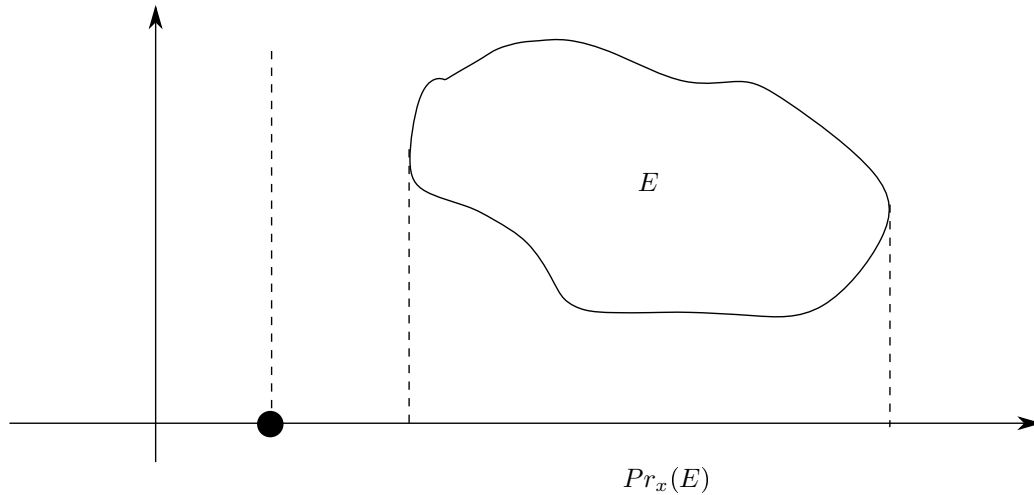


Рис. 1: Переход в интегралу по проекции

**Замечание.** Если  $E$  – компактное или открытое, то  $Pr_x(E)$  измеримо.

$Pr_x(E) = \Phi(E)$ , где  $\Phi(x, y) \equiv x$  – отображение проектирования

Если  $E$  – компактное, то  $\Phi(E)$  – компактное. Если открытое, то открытое.

**Пример.** 1.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = I_1$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = I_2$$

Если интегралы существуют, то они антиравны.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y}{(x^2 + y^2)} \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} - 0 dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Вывод: функция  $f(x, y) \notin \mathcal{L}([0, 1]^2, \lambda_2)$

2.

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$f \in \mathcal{L}^2([-1, 1]^2) \iff |f| \in \mathcal{L}([-1, 1]^2) \implies |f| \in \mathcal{L}([-1, 1]^2)$$

$$\iint_{[0, 1]^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

<.....>

**Утверждение 7.1.** Семейство называется суммируемым, если функция суммируема

**Утверждение 7.2.** Если семейство  $(a_x)_{x \in X}$  суммируемо, то  $\{x : a_x \neq 0\}$  – не более чем счётное.

*Доказательство.* Не умаляя общности  $a_x \geq 0$

$$+\infty > \int_X a_x dv = \int_{X_0} a_x dv > \int a_x dv \geq \frac{1}{j} \nu(x_j) \implies \nu(x_j) < +\infty$$

$$X_0 = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \text{ – не более, чем счётное}$$

■

**Утверждение 7.3.**  $\square$   $X$  – н.б.ч.с,  $Y$  – числовое множество,  $(a_x)_{x \in X} \subseteq Y$   $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$

$$\text{Тогда } (a_x) \text{ суммируемы} \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \text{ сходится абсолютно.}$$

## 2 Замена переменной в интеграле по мере

### 2.1 “Пересадка” меры

$\Phi : X \rightarrow Y$  .  $\square$   $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пространство с мерой.

$$\mathcal{D} = \{B \subseteq Y | \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

$$\Phi^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}(B_k) \in \mathcal{A}$$

$$\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$$

**Пример.**  $X = [0, 2\pi)$   $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap [0, 2\pi)$

$$\Phi(t \in X) = (\cos t, \sin t)$$

**Теорема 8** (Общая схема замены переменных).  $\square (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{D}, \nu)$

$\Phi : X \rightarrow Y$  – не портит измеримость.

$\square h \in S_+(X) : \forall B \in \mathcal{D}$

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} h d\mu$$

Тогда  $\forall f \in f \in S(Y, \nu)$

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)$$

*Доказательство.*  $f \circ \Phi$  – измерима?

$X \{f \circ \Phi < a\} = \Phi^{-1}(Y \{f < a\})$ .  $Y \{f < a\} \in \mathcal{L}$ , т.к.  $f$  измеримо. А тогда  $\Phi^{-1}(\dots) \in \mathcal{A}$

Совпадение интегралов:

1.  $f$  – ступенчатая,  $f = \sum_{k=1}^K C_k \chi_{D_k}$   $\{D_k\}$  – разбиение  $X$

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \sum_{k=1}^K C_k \nu(D_k) = \sum_{k=1}^K C_k \int_{\Phi^{-1}(D_k)} h d\mu = \\ &= \int_X \left( \sum_{k=1}^K C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)} \right) h(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f \circ \Phi(x) h(x) d\mu(x) \\ f \circ \Phi(x) &= C_k \quad x \in \Phi^{-1}(D_k) \\ \sum_{k=1}^K C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)}(x) &= C_k. \end{aligned}$$

2.  $f \in S_+(Y)$   $\exists \{g_j\}$  – ступенчатая неубывающая  $g_i \uparrow f$

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_Y g_j d\nu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X g_j(\Phi(x)) h(x) d\mu \\ &= \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

3. Общий случай:

$$f = f_+ + f_-$$

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \int_Y f_+ - \int_Y f_- d\mu = \int_X f_+(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) - \int_X f_-(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) \quad (f(\Phi)h)_+ = f_+(\Phi)h. \end{aligned}$$

■

**Следствие 8.1.**  $\square (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{D}, \nu)$

$h \in S_+(X)$ ;  $\Phi : X \rightarrow Y$   $\Phi^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}$

и выполняется условие теоремы общей замены переменной. Тогда  $\forall E \in \mathcal{D} \quad f \in S(E, \nu)$ :

$$\int_E f(y) d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)$$

Рассмотрим продолжение нулём  $f$  с  $E$  на  $Y$

$$\int_E f d\nu = \int_Y (y)\chi_E(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \underbrace{\chi_E(\Phi(x))}_{\chi_{\Phi^{-1}(E)}} \chi_{\Phi^{-1}(E)} h(x) d\mu(x) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x).$$

**Следствие 8.2** (частный случай 1). Если  $h \equiv 1$  в условии теоремы.

$$(\forall E \in \mathcal{D} \quad \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\mu = \mu(\Phi^{-1}(E)))$$

мера  $\nu$  при этом называется образом меры  $\mu$

$$\forall f \in S(E) \quad \int_E f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi(x) d\mu(x)$$

**Следствие 8.3** (Частный случай 2).  $X = Y \quad \Phi = id \quad \nu(E) = \int_E h(x) d\mu(x)$

<..>

**Теорема 9.**  $\square (X, \mathcal{A}, \mu)$  – пространство с мерой,  $\Phi : X \rightarrow Y \quad h \in S_+(X)$

Следующие утверждения равносильны:

1.  $h$  плотность  $\nu$  относительно  $\mu$
2.  $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\inf_E h\mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_E h\mu(E)$$

*Доказательство.*  $I \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$

Т.о.  $I \implies II$

■

**Теорема 10** (Критерий плотности).  $\square (X, \mathcal{A})$  – измеримое пространство,  $\mu, \nu$  – опр. (?)  $\mathcal{A}$   
 $h \in S_+(X)$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

1.  $h$  – плотность меры  $\nu$  относительно  $\mu$  ( $\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$ )
2.  $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\inf_E h \cdot \mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_E h \cdot \mu(E)$$

Если  $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \lambda_n)$ , тогда  $1 \iff 3$ :

3

$$\forall P \in \mathcal{P}_n \quad \inf_P h \cdot \mu(P) \leq \nu(P) \leq \sup_P h \cdot \mu(P)$$

*Доказательство.* План:  $1 \implies 2 \implies 3$

$$2 \implies 1? \quad \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) \stackrel{?}{=} \int_E h d\mu$$

$$E = E \{h = 0\} \coprod E \{h = +\infty\} \coprod E \{0 < h < +\infty\}$$

$$\nu(E) = \nu(E \{h = 0\}) + \nu(E \{h = +\infty\}) + \nu(E \{0 < h < +\infty\})$$

$$\nu(E \{h = 0\}) \leq \sup_{E \{h=0\}} = 0 = \int_{E \{h=0\}} h d\mu$$

$$\nu(E \{h = +\infty\}) \leq h \cdot \mu(E) + \infty \cdot \mu(E) = \int_{E \{h=+\infty\}} h d\mu.$$

$$\nexists \frac{1}{q} \in (0, 1), \quad q > 1 \quad (0, +\infty) = \bigvee k \in \mathbb{Z} [q^k, q^{k+1})$$

$$E\{h \in (0, +\infty)\} = \bigvee E\{q^k \leq h < q^{k+1}\}$$

$$q^k \mu(E_k) \leq \nu(E_k) \leq q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$$

$$q^k \mu(E_k) \leq \int h d\mu \leq q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$$

$$\frac{\nu(E_k)}{q} \leq q^k \cdot \mu(E_k) \leq \int_{E_k} h d\mu = q \cdot q^k \mu(E_k) \leq q \cdot \nu(E_k)$$

Просуммируем это по всем  $k$ .

$$\frac{1}{q} \nu(E) = \int_E h d\mu \leq q \cdot \nu(E), \quad q \rightarrow 1 \implies \nu(E) \leq \int_E h d\mu \leq \nu(E) \implies \nu(E) = \int_E h d\mu$$

$\nexists \tilde{\nu}$  – стандартное продолжение  $\langle \dots \rangle$  (нужно дополнить) ■

**Теорема 11.**  $\square$   $\Phi$  – диффеоморфизм множеств  $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad G \xrightarrow{\Phi} O$

Тогда  $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad E \subseteq O$

$$\lambda_n(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \Phi'| d\lambda_n$$

$$\lambda_n(O) = \int_G |\det \Phi'| d\lambda_n$$

Если  $O \sim \tilde{O} \quad G \sim \tilde{G} \quad (\lambda_n(O \setminus \tilde{O}) = \emptyset \dots)$ , то

$$\lambda_n(\tilde{O}) = \int_{\tilde{G}} |\det \Phi'| d\lambda_n$$

**Замечание.**

$$\nu(P) \leq \sup_P h d\mu(P) - \text{от противного}$$

$$\implies \exists \text{ ячейки } P_0 : \quad \nu(P) > M \cdot \mu(P) = \sup_{P_0} h \cdot \mu(P)$$

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + d_{x_0} \Phi(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$x \approx x_0 \quad \Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d_{x_0} \Phi(x - x_0)$$

.

Если  $Q$  – малая ячейка, то

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \approx \lambda_n d_{x_0} \Phi(Q) = |\det \Phi'_{x_0}| \lambda_n(Q)$$

**Следствие 11.1.** Если  $\Phi : G \rightarrow O$  – диффеоморфизм,  $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad \tilde{G} \sim G, \tilde{O} \sim O \quad f \in S(O)$ , то

$$\int_{\tilde{O}} f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\tilde{G}} f(\Phi(u)) |\det \Phi'(u)| d\lambda_n(u)$$

**Пример.** Полярные координаты.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

$$\Phi : (r, \varphi) \rightarrow (x, y),$$

$$([0, +\infty) \times [-\pi, \pi]) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(0, +\infty] \times (-\pi, \pi)) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus (-\infty, 0].$$

$$\det \Phi' = r; \quad E = \mathbb{R}^2 :$$

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{\Phi^{-1}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

**Пример** (интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
 I \cdot I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ys} dy = \iint_{\{x \geq 0, y \geq 0\}} e^{-x^2-y^2} dx dy \\
 &= \iint_{\{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, r \geq 0\}} e^{-r^2} r dr d\varphi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-r^2}}{-2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \\
 I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
 \end{aligned}$$

**Пример.** Цилиндрические координаты

$$\begin{aligned}
 r \cos \varphi &= x \\
 r \sin \varphi &= y \\
 h &= z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi : (r, \varphi, h) &\rightarrow (x, y, z) \quad \Phi : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0\} \\
 |\det \Phi'| &= r \\
 \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Phi^{-1}(E)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh
 \end{aligned}$$

**Пример.** Сферические координаты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned}
 r \cos \varphi \cos \psi &= x \\
 r \sin \varphi \cos \psi &= y \\
 r \sin \varphi \sin \psi &= z
 \end{aligned}$$

$$\det \Phi' = r^2 \sin \varphi$$

Можно обобщить на  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 r &= \|x\| \\
 x_1 &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \dots \cos \varphi_1 \\
 &\dots \\
 x_{n-2} &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-3} \\
 x_{n-1} &= r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-2} \\
 x_n &= r \sin \varphi_{n-1}
 \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ x^2+y^2 \leq z^2 \\ z \geq 0}} f(x, y, z) dx dy dz$$

Преобразовать используя:



- Цилиндрические координаты

Перепишем множество интегрирования в новых координатах: 
$$\begin{cases} r^2 + h^2 \leq R^2 \\ r^2 \leq h^2 \implies r \leq h \\ h \geq 0, r \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\substack{r^2 + h^2 \leq R^2 \\ r \leq h \\ h \geq 0, r \geq 0}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh \\ &= \iint_{\substack{\pi \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \frac{R}{\sqrt{2}}}} r \int_r^{\sqrt{R^2 - r^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) dr \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} r dr \int_r^{\sqrt{R^2 - r^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) dh \end{aligned}$$

- Цилиндрические координаты (второй вариант)

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h r f dr + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - h^2}} r f dr$$

- Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \psi \\ y = r \sin \varphi \sin \psi \\ z = r \cos \psi \\ \operatorname{tg}^2 \psi \geq 0 \\ \sin \psi \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ r^2 \cos^2 \psi &\leq r^2 \sin^2 \psi \\ r \sin \psi &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \varphi) r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R f(\dots) r^2 \cos \psi dr \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\iiint_E z dx dy dz$$

$E :$

$$\begin{aligned} t^2(x^2 + y^2) &\leq z^2 \\ 0 &\leq z \leq t \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_E z dx dy dz &= \iint_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} dz dt \iint_{\{x^2 + y^2 \leq \frac{4z^2}{t^2}\}} z dx dy \\
&= \iint_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} dz dt z \pi \cdot \frac{4z^2}{t^2} \\
&= 4\pi \iint_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} \frac{z^3}{t^2} dz dt \\
&= 4\pi \int_0^3 \frac{1}{t^2} dt \int_0^t z^3 dz = \frac{4\pi}{4} \left( \int_0^3 t^2 dt \right) = \pi \cdot 9
\end{aligned}$$

### 3 Мера Лебега–Стилтьеса

$\square$   $g(x) \uparrow$  на  $\mathbb{R}$  и непрерывна слева  $\left( \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} g(x) \equiv g(x_0) \right)$

**Задача 1.** Если  $h(x)$  – произвольная возрастающая функция, то её можно превратить в непрерывную слева исправлением нбчс количества точек.

$\exists \uparrow$  и непрерывна слева  $g(x) = h(x)$  всюду кроме точек разрыва  $h(x)$

$$g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} h(x)$$

Определим  $\mu_g([a, b]) = g(b) - g(a) \geq 0$ . Так же верно, что  $\mu_g$  обладает счетной аддитивностью на  $\mathcal{P}_1$  (доказывается так же, как в случае с мерой Лебега)  $\implies \mu_g$  – мера на  $\mathcal{P}_1$

Стандартное продолжение  $\mu_g$ , которое также обозначается  $\mu_g$  называется мерой Лебега-Стилтьеса, порождённой функцией  $g$

$$\begin{aligned}
\mu_g(\{c\}) &= \mu_g\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} [c, c + \frac{1}{j}]\right) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_g\left([c, c + \frac{1}{j}]\right) \\
&= \underbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} g(c + \frac{1}{j})}_{=g(c+0)} - g(c) = g(c+0) - g(c)
\end{aligned}$$

$\implies$  Если  $c$  – точка непрерывности, то  $\mu_g(\{c\}) = 0$

$$\mu_g([a, b]) = \mu_g([a, b]) + \mu_g(\{b\}) = g(b) - g(a) + g(b+0) - g(b) = (g(b+0) - g(a-0))$$

$$\mu_g((a, b)) = \mu_g([a, b]) - \mu(\{a\}) = g(b) - g(a) - (g(a+0) - g(a)) = g(b) - g(a+0)$$

$$\mu_g((a, b]) = g(b+0) - g(a+0)$$

**Определение 1.** Пусть  $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \delta_{a_k}$ ,  $h_k \geq 0$ ,  $\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & a \in E \\ 0, & a \notin E \end{cases}$ , тогда  $\mu$  – дискретная мера.

$$E, E_j \in 2^{\mathbb{R}} \quad E = \bigvee_{j=1}^{\infty} E_j \implies \delta_{a_k}(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{a_k}(E_j)$$

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu\left(\bigvee_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_k \sum_j h_k \delta_{a_k}(E_j) \\ &= \sum_j \mu(E_j)\end{aligned}$$

Последний переход в равенстве по теореме Тонелли.

**Замечание.**  $\square \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$   
 $\forall [a, b] \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty$

**Пример.** Если  $\{a_k\}$  — дискретно (без точек сгущения на  $\mathbb{R}$ ), то условие автоматически выполняется, т.к. пересечения  $a_k$ -ых с промежутком будет конечно, а значит и сама сумма будет конечна

$$A = \mathbb{Q} \quad h_k = \frac{1}{2^k}$$

**Определение 2** (функция Хэвисайда).

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

$$\square x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cdot (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) + C$$

1.  $g(x)$  возрастает

$$2. \quad x \in [a, b] \quad \sum_k h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \leq \sum_{a_k \in I_{x, x_0}} h_k$$

Разность Тет ненулевая, если  $a_k$  находится между  $x$  и  $x_0 - I_{x, x_0}$

**Утверждение 11.1.**  $A = \{a_k\}_k$

1.  $g \in C(\mathbb{R} \setminus A)$

2. Непрерывность слева на  $A$

*Доказательство.* 1.  $\square x \in \mathbb{R} \setminus A \quad \square (a, b) \ni x$

$$\nexists \forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty \implies \exists K : \sum_{\substack{a_k \in [a, b] \\ k \geq K}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$g_k(x) = h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k))$  — локально постоянны в точке  $x$  ( $\exists V_\delta(x) : g_k|_{V_\delta(x)} \equiv const$  для  $k = 1, \dots, K$ )

Не умаляя общности  $[a, b] \supseteq V_\delta(x)$

$$\begin{aligned}
g(\tilde{x}) - g(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k)) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(\tilde{x} - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k)) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^K h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k))}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k))}_{=\frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned}$$

$\implies$  Непрерывность

Если  $x = a_k$   $g(x) = g_{k_0}(x) + \underbrace{\sum_{k \neq k_0} g_k}_{\text{непрерывна как в пред. случае}}$

■

$$\begin{aligned}
\mu_g([a, b]) &= g(b) - g(a) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)) \quad a \leq a_k \leq b \\
&= \sum_{k: a \leq a_k < b} h_k = \mu([a, b])
\end{aligned}$$

$\mu$  и  $\mu_g$  совпадают на совокупности всевозможных промежутков.

**Определение 3.** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Функция  $f$  называется локально суммируемой на  $\mathbb{R} \iff \forall [a, b] \quad f \Big|_{[a, b]} \in \mathcal{L}(\lambda_1)$ .

**Определение 4.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Функция  $f$  называется абсолютно непрерывной, если существует локально суммируемая функция  $h(x)$  и точка  $x_0 \in \mathbb{R}$ :

$$g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda$$

(интеграл Лебега. Если  $x < x_0$ , то  $\int_{x_0}^x h d\lambda = - \int_{[x, x_0]} h d\lambda$ )

Если  $h$  непрерывна в точке  $x$ , то  $g(x)$  дифференцируема в точке  $x$  и  $g'(x) = h(x)$ . Доказательство – смотри теорему Барроу...

Если  $h(x) \geq 0$ , то  $g(x) \nearrow$

Функция  $g(x)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ . Следует из абсолютной непрерывности интеграла.

**Теорема 12** (воспоминание).

$$\mu(E) = \int_{\Phi^{-1}} h d\mu \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \inf_E h \mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_E h \mu(E)$$

**Замечание.**

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k))$$

Для этой меры нужно было фиксировать открытый интервал  $\Delta$ , что

$$\forall [a, b] \subseteq \Delta \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty$$

$$\begin{aligned} g(a_k + 0) - g(a_k - 0) &= h_k (\Theta(a_k - a_k + 0) - \Theta(x_0 - a_k + 0) - \Theta(a_k - a_k - 0) + \Theta(x_0 - a_k - 0)) \\ &= h_k \end{aligned}$$

**Утверждение 12.1.** Если  $\nu = \sum_k h_k \delta_{a_k}$ , то  $\nu$  совпадает с  $\mu_g$  на  $\mathcal{A}_{\mu_g}$  при условии (\*).

*Доказательство.* Если хочется скорее сослаться на теорему об единственности, то можно сделать так:

Рассмотрим  $[a, b]$ .  $\nu([a, b]) = \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k$ .

$$\mu_g([a, b]) = g(b) - g(a) = \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k (\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)) = \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k.$$

Если  $\{a_k\}_k$  — конечное множество, то вопросов с суммируемостью не возникает.

$$g(x) = \sum_k h_k \cdot \Theta(x - a_k) + C$$

■

**Замечание.** Локально суммируемая функция — это такая, что она будет на любом шаре суммируемой по Лебегу

**Теорема 13.**  $g(x)$  — абсолютно непрерывная  $\iff \exists h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda) \exists x_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda + C$$

По теореме Барроу  $g(x)$ :

- $g(x) \in C(\mathbb{R})$ ,
- $g(x)$  дифференцируема в точках ... функции  $h(x)$ .

*Доказательство.* • Если  $x_1 \in \mathbb{R}$

$$g(x) - g(x_1) = \int_{x_1}^x h(x) dx$$

$$\exists \delta_0 > 0, x \in V_{\delta_0}(x_1), \quad h \in \mathcal{L}(V_{\delta_0})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta (\leq \delta_0) > 0 : \int_E h(x) d\lambda < \varepsilon \forall E \subseteq V_{\delta_0}(x_1) : \lambda_1(E) < \delta$$

$$\implies \text{Если } |x_1 - x| < \delta \quad \left| \int_{x_1}^x h(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

- Пусть  $x_1$  — точка непрерывности для  $h(x)$ .  $h(x) = h(x_1) + \underbrace{\alpha(x - x_1)}_{o(1) \text{ при } x \rightarrow x_1}$

$$\frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x h(x_1) + \alpha(x - x_1) dx = h(x_1) + \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x \alpha(x - x_1) dx \leq \varepsilon(x - x_1)$$

Если “ $x$  достаточно близок к  $x_1$ ”

■

**Замечание.** В частности, если  $h(x) \in C(\mathbb{R}) \implies g \in C^1(\mathbb{R})$  и  $g'(x) \equiv h(x)$

**Замечание.**

$$\int_E f d\nu = \sum_{k: a_k \in E} h_k f(a_k) = \sum_{k: a_k \in E} f(a_k) \cdot \text{скачок } g(a_k)$$

**Утверждение 13.1.**  $\square$   $g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda_1(x) + C$   $h(x) \geq 0$   $h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)$  абсолютно непрерывная возрастающая функция.

Тогда  $\int_E f d\mu_g = \int_E f(x) h(x) d\lambda(x)$ .

В частности,  $\forall$  возрастающей  $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ .

$$\int_E f d\mu_g = \int_E f \cdot g'(x) d\lambda(x) \left( = \int_E f \cdot dg \right).$$

*Доказательство.*  $\int_E \nu(E) = \int_E h d\lambda_1$ .

$$\mu_g(\langle a, b \rangle) = \mu_g([a, b)) = g(b) - g(a) = \int_a^b h(x) d\lambda_1 = \nu([a, b)) = \nu(\langle a, b \rangle).$$

$\mu_g$  и  $\nu$  совпадают на открытых. Если  $K$  – компакт,  $K = B \setminus (B \setminus K)$

$\nu(K) + \nu(B \setminus K) = \nu(B)$   $\mu_g(K) = \nu(K) = \nu(B) - \nu(B \setminus K)$

$\square$   $E$  –  $\lambda_1$ -мера  $O$

$\implies \exists \delta > 0 \exists$  открытое  $G : E \subseteq G$  и :  $\lambda_1(G) < \delta$

$\implies \int_{G_0} -$  абсолютно непрерывное  $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \lambda_1(\tilde{E}) < \delta \implies \tilde{E} \subseteq G$

$\int_{\tilde{E}} h < \varepsilon \implies \tilde{E} = G \implies \nu(G) < \varepsilon \implies \mu_g(G) < \varepsilon \implies \nu(E) = \mu_g(E) = 0$

Если  $E$  – неограничено  $\lambda_1$ -меры  $0 \implies \exists$  ограниченное  $E_j : E = \bigcup E_j. \forall i \in \mathbb{N} \lambda_1(E_j) = 0 \implies \nu(E_j) = \mu_g(E_j) = 0 \implies \nu(E) = \mu_g(E)$ .

Дальше можно применить теорему о плотности меры. Применяю общую схему замены переменной все доказывается. ■

**Задача 2.** 1.  $g(x) = \arctg x$ . Найти:

$$(a) \sup \left\{ \mu_g(I) : I = \langle a, b \rangle, \lambda_1(I) \leq \delta \right\}, \delta > 0.$$

$$(b) \sup \left\{ \lambda_1(I) : I = \langle a, b \rangle, \mu_g(I) \leq \delta \right\}, \delta > 0.$$

2.  $g(x) = \arctg x + \Theta(x - 1)$

(a) Для  $\delta = 1$

*Решение.*  $\mu_g(I) = g(b) - g(a) = \int_I g'(t) dt = \int_{[a, b]} \frac{dt}{1+t^2}$

1. (a)

$$\sup \{ \mu_g(I) \} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+t^2}$$

■

**Пример.** Пример меры Лебега–Стилтьеса не евклидовой, не дискретной, не абсолютно непрерывной:

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1] \\
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
C_{k+1} &\subseteq C_k \quad C_k - \text{компакт} \\
C &= \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k - \text{компакт} \\
\lambda_1(C) &= \lambda_1([0, 1]) - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \dots - \frac{2^{k-1}}{3^k} = 0
\end{aligned}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{3}x \quad \Theta(x) = 1 - x$$

$$\Phi = \{[0, 1] \cap C, \psi(C), \Theta\psi(C), \psi\psi(C), \psi\Theta(C), \Theta\psi\psi(C), \Theta\psi\Theta\psi(C), \dots\}$$

– полукольцо

$$\mu(C) = 1 \quad \mu(P) = \frac{1}{2^k} - \text{если } P \text{ есть результат применения } k \text{ штук } \psi \text{ и } \Theta$$

$\times \mu$  – стандартное продолжение

## 4 Интегралы, зависящие от параметра

**Пример.**

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0, p \in \mathbb{R}; \quad \int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_{\alpha} (y)^{\beta} (y) f(x, y) dx.$$

Пока что мы будем рассматривать интегралы, зависящие от параметра  $y$  по фиксированному промежутку:  $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ .

Пусть у нас есть пространство с мерой  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f(\cdot, \mu) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ .  $Y \subseteq \bar{Y}$ .

Для чего это нужно? Бывает, что просто сформулированные задачи имеют ответ в виде интеграла с параметром. Бывает, что введение параметра упрощает вычисление интеграла.

**Утверждение 13.2.**  $f$  удовлетворяет условию Лебега локально относительно  $y_0$ ,  $y_0$  — параметр, если  $\exists$  открытое  $V(y_0)$  в  $\bar{Y}$  и  $\Phi(x) \in \mathcal{L}(X, \mu) \quad \forall y \in V(y_0)$  для почти всех  $x \in X$ .

**Утверждение 13.3.** Пусть у нас есть пространство с мерой  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\bar{Y}$  — метрическое пространство,  $Y \subseteq \bar{Y}$ ,  $y_0$  — предельная точка для  $Y$ . Почти везде  $f(x, y) \rightarrow g(x)$  при  $y \rightarrow y_0$ , и  $f(x, y)$  удовлетворяет локально условию Лебега относительно  $y_0$ .

Тогда  $g(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$  и

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

*Доказательство.* Так как  $y_0$  — предельная,  $\exists \{y_k\} \subseteq Y \rightarrow y_0$ .  $f_k(x) = f(x, y_k)$ ,  $y_k \in V(y_0) \implies |f_k(x)| \leq \Phi(x) \implies$  по теореме Лебега о мажорируемой сходимости,  $g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k) \in \mathcal{L}(X, \mu)$  и

$$\int_X g(x) d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f(x, y_k) d\mu.$$

$$I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I(y_k) \quad \forall \text{ последовательности } y_k \rightarrow y_0 \implies \exists \lim_{y \rightarrow y_0} I(y).$$

■

**Пример.**  $\square p_0 > 0 \quad \square$

$$\forall p \in V_\delta(p)$$

$$x \in (0, 1] \quad x^{p-1}e^{-x} \leq x^{p_0-\delta}e^{-x}$$

$$x > 1 \quad x^{p-1}e^{-x} \leq x^{p_0+\delta}e^{-x}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^{p_0-\delta}e^{-x} & , x \in (0, 1] \\ x^{p_0+\delta}e^{-x} & , x > 1 \end{cases} \quad \int_0^{+\infty} x^q e^{-x} dx - \text{сходится для любого}$$

**Замечание.** Если в условиях предыдущего утверждения  $f(x, y)$  — непрерывна по  $y$  в точке  $y_0$ , то наш интеграл  $I(y)$  тоже будет непрерывен в точке  $y_0$ .

**Определение 5.** Пусть имеется пространство с мерой  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $y_0$  — предельная точка для  $Y \subseteq \bar{Y}$   $f(x, y) \rightrightarrows g(x)$  на  $X$  при  $y \rightarrow y_0$  если  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  окрестность  $V(y_0)$ :

$$\forall x \in X \quad \forall y \in V(y_0) \quad |f(x, y) - g(x)| < \varepsilon \iff \sup_{x \in X} |f(x, y) - g(x)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0.$$

**Пример.** 1. (хороший)  $f(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \quad y \rightarrow +\infty$

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{1+y^n} \implies y \rightarrow \infty \sup |f(x, y)| = \frac{1}{1+y^n} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0.$$

Сходимость есть и равномерная сходимость тоже есть.

2. (плохой)  $xye^{-xy} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ . Сходимость к нулю есть, а

$$\sup x > 0 xye^{-xy} \geq f\left(\frac{1}{y}, y\right) = \frac{1}{e} \not\rightarrow 0 \implies \text{равномерно не сходится.}$$

**Утверждение 13.4.** Пусть  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\mu(X) < +\infty$ .

$$f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} g(x), \quad f(x, y) \in \mathcal{L}(X, \mu).$$

Тогда  $g(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$  И

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

*Доказательство.* Для  $\varepsilon = 1 \quad \exists$  окрестность  $V(y_0) : \forall x \in X, y \in V(y_0) \quad |f(x, y) - g(x)| \leq 1 :$

$$|g(x)| \leq |f(x, y)| + |g(x) - f(x, y)| \leq |f(x, y)| + 1 \implies g \in \mathcal{L}(X, \mu) \quad \blacksquare$$

**Утверждение 13.5.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  — пространство с метрой  $y \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $y_0$  — предельная точка для  $Y$ . Пусть  $f(x, y)$ ,  $f'_y$  — удовлетворяет условию Липшица локально,  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ .

Тогда  $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$  дифференцируема в точке  $y_0$  и

$$I'(y_0) = \int_X f'_y(x, y) d\mu(x).$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} I'(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_X \underbrace{(f(x, y) - f(x, y_0))}_{f'_y(x, y_0 + \Theta(y - y_0)), \quad \Theta \in (0, 1)} d\mu(x) \\ &= \lim \int_X f'_y(x, y_0 + \Theta(y - y_0)) d\mu(x) \\ &= \int_X \lim_{y \rightarrow y_0} (\dots) d\mu(x) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x). \end{aligned}$$



$y \in V_\delta(y_0)$  – из условия Липшица для  $f'_y \implies C(y) \in V_\delta(y_0)$

$$\implies \left| \underbrace{f'_y(x, C(y))}_{f'_y(x, y_0)} \right| \leq \Phi(x)$$

■

**Пример.**  $\Gamma(p) \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} d\mu.$

$$f'_p(x, p) = (p-1)x^{p-2}e^{-x}, \quad p-2 > -1 \implies p > 1.$$

При  $p > 1$

$$\Gamma'(p) = (p-1) \int_0^{+\infty} x^{p-2} e^{-x} = (p-1) \cdot \Gamma(p-1) \implies \Gamma'(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1).$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} \frac{(x^p)'}{p} = \frac{1}{p} \left( x^p e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^{+\infty} x^p (e^{-x})' dx \right) = \frac{1}{p} \cdot (p+1).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}.$$

## 5 Г-функция Эйлера

**Определение 6.**  $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$   
 $p > 0$

**Свойство 1.**

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad \forall p > 0$$

– формула приведения

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

– определение для  $\Gamma$  в  $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_-)$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(p+1) = p!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \text{ (по индукции)}$$

.

**Замечание** (Дифференцирование Г-функции).

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{p-1} e^{-x} (\ln x)^k}_{f_k(x, p)} dx.$$

$$\frac{\partial f_k(x, p)}{\partial p} = f_{k+1}(x, p)$$

**Замечание.** Локальное условие Лебега  $\forall p_0$ ?

$$\exists V_{p_0} : \exists \Phi(x) \in \mathcal{L}((0, +\infty) : |f_k(x, p)| \leq \Phi(x)).$$

$$x^{p-1} \leq x^{2p_0-1} + x^{\frac{p_0}{2}-1}$$

$$\Phi(x) = \left( x^{2p_0-1} + x^{\frac{p_0}{2}-1} \right) e^{-x} |\ln x|^k.$$

$\Phi$  – мажоранта для  $f_l(x, p) \forall p \in V_{p_0}$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} |\ln x|^k dx &< +\infty \\ x^{p-1} |\ln x|^k &= o(e^{\frac{x}{2}}) \quad x \rightarrow +\infty \\ x^{p-1} e^{-x} |\ln x|^k &\sim x^{p-1} |\ln x|^k = o(x^{p-1-\alpha}) \\ |\ln x|^k &= o(x^{-\alpha}), \quad \alpha > 0 \\ x \rightarrow 0^+ \quad p - \alpha &> 0. \end{aligned}$$

Получается, что  $\Gamma$  – класса  $C^\infty$  там, где она определена.  $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-)$

## Геометрические характеристики $\gamma$ -функции и элементарные факты

**Свойство 2** (Геометрические свойства). 1.  $\gamma(p)$  строго выпукла на любом отрезке, лежащем в её области определения

2. На  $(0, +\infty)$   $\Gamma(p)$  имеет единственный экстремум в точке  $c \in (1, 2)$

3.  $p \rightarrow 0 \quad \Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$

*Доказательство.*  $\Gamma_{p^2}^{(2)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^2 x dx > 0 \implies 1$

$\Gamma(1) = 0! = 1 = 1! = \Gamma(2) \implies$  по теореме Роля  $\exists c \in (1, 2) : \Gamma'(c) = 0$ .  $c$  – точка минимума

$\Gamma'(p) \neq 0$  при  $p \neq c, p > 0$  ■

**Замечание.** Аналог формулы стрилинга. При  $p \rightarrow \infty$  верно, что  $\Gamma(p) = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p e^{\frac{\Theta}{12}}$ , где  $\Theta \in (0, 1)$ .

## 6 Бета-функция

**Определение 7.**  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$

$$B(p, q) = B(q, p) \forall p, q > 0$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

**Теорема 14** (формула Эйлера-Гаусса).

$$\Gamma(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l^p \cdot k!}{p(p-1) \dots (p+k)} \quad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

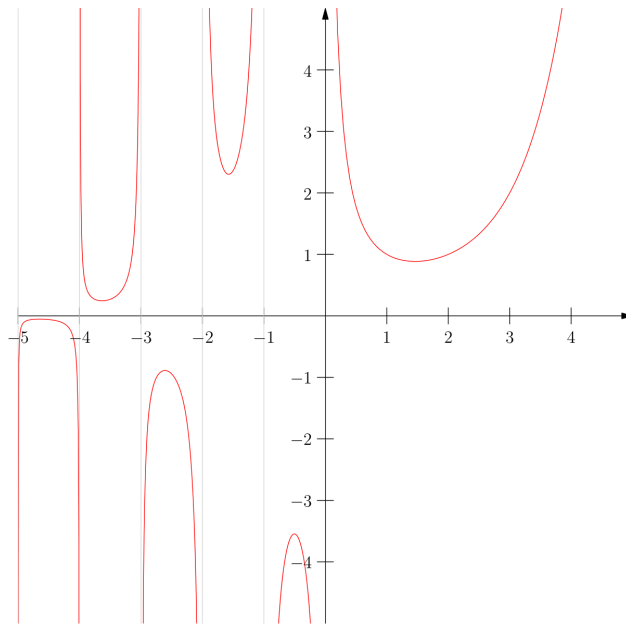


Рис. 2: gamma-function

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\Gamma(p) &= \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \left| t = e^{-x}, x = -\ln t, dx = -\frac{dt}{t} \right| \int_0^1 (-\ln t)^{p-1} t \left( -\frac{dt}{t} \right) = \int_0^1 (-\ln t)^{p-1} dt \\
&= \int_0^1 \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{k(1 - t^{1/k})}_{g(k)} \right)^{p-1} dt = \\
g'(k) &= (1 - t^{1/k}) + k(-t^{1/k}) \cdot (\ln t) \cdot \left( +\frac{1}{k^2} \right) \\
&= t^{\frac{1}{k}} \left( t^{-\frac{1}{k}} - 1 + \frac{\ln t}{k} \right) \\
&= \begin{cases} f \uparrow, & \text{если } p \geq 1 \implies \text{Применим теорему Леви} \\ f \downarrow, & \text{если } p \in (0, 1) \implies g(k) \leq g(1) \end{cases} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \left( k(1 - t^{\frac{1}{k}}) \right)^{p-1} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{p-1} \int_0^1 s^{p-1} (-k)(1-s)^{k-1} ds = \lim_{k \rightarrow \infty} k^p B(p, k) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} k^p \frac{\Gamma(p)\Gamma(k)}{\Gamma(p+k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^p \cdot (k-1)! \frac{\Gamma(p)}{(p+k-1)(p+k-2) \dots p \Gamma(p)} \\
&= \frac{k^p k!}{p(p+1) \dots (p+k)} \cdot \underbrace{\frac{p+k}{k}}_{\rightarrow 1}.
\end{aligned}$$

Для  $p < 0$  по индукции по  $m$   $p \in (-(m+1), -m)$

Если формула верна для  $p+1$ , то

$$\begin{aligned}
\Gamma(p) &= \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{1}{p} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{p+1} \cdot k!}{(p+1)(p+2) \dots (p+k+1)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^p \cdot k!}{p(p+1) \dots (p+k)} \cdot \underbrace{\frac{k}{p+k+1}}_{\rightarrow 1}.
\end{aligned}$$

■

**Лемма 14.1.** Пусть  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \in C([a, +\infty))$  и  $f$  ограничена на  $([a, +\infty))$  :  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится. Тогда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx \in C([0, +\infty)).$$

*Доказательство.*  $A \in [a, +\infty)$

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx &= \left| F(x) = \int_A^x f(t)dt \right| = (F(x) - F(A)) \cdot e^{-xy} \Big|_A^{+\infty} + \int_A^{+\infty} ye^{-xy}(F(x) - F(A))dx \\ &= \left| \exists \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \left( = \int_A^{+\infty} f(t)dt \right) \right|. \end{aligned}$$

$$\text{Для } \varepsilon > 0 \exists A : \left| \int_A^{+\infty} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \geq A$$

$$\text{Для } x \geq A \quad |F(x) - F(A)| = \left| \int_A^{+\infty} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned} |I_A(y)| &\leq \int_A^{+\infty} ye^{-xy} |F(x) - F(A)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$$I(y) = \overbrace{\int_a^A e^{-xy} f(x)dx}^{J_A(y)} + I_A(y)$$

$$I(y) - I(y_0) = J(y) - J(y_0) + \overbrace{I_A(y) - I_A(y_0)}^{< \frac{\varepsilon}{3}}.$$

$J(y) - J(y_0) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow y_0$  (условие непрерывности собственных интегралов).

$$\exists V(y_0) : \quad \forall y \in V(y_0) \quad |J(y) - J(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

■

**Следствие 14.1.**

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow 0} e^{-xy} f(x)dx.$$

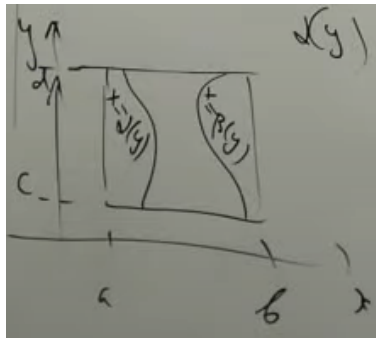


Рис. 3: Интеграл с переменными пределами

**Пример** (Одно из значений интегрального синуса).

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \\
 I(y) &= \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-xy} \frac{\sin x}{x}}_{f(x,y)} dx \\
 \frac{\partial f}{\partial x} &= -e^{-xy} \sin x \\
 y_0 > 0 \quad V_{y_0} &= \left( \frac{y_0}{2}, 2y_0 \right) \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq e^{-\frac{xy_0}{2}} \\
 \implies \forall y_0 I'(y) &= - \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx \dots \\
 I(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-xy} d \cos x = \cos x \cdot e^{-xy} \Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} (\sin x) e^{-xy} dx \\
 &= -1 + y \left( \sin x e^{-xy} \Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx \right) = -1 + y^2 (-I(y)) \\
 \implies I(y) \cdot (1 + y^2) &= -1. \\
 I'(y) = I(y) &= \left( -\frac{1}{1+y^2} \right) \implies I(y) = C - \int \frac{dy}{1+y^2} = C - \operatorname{arctg} y \\
 y \rightarrow +\infty, y \geq 1 & \left| e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-x} - \text{суммируемая мажоранта.} \\
 C - \frac{\pi}{2} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \implies C = \frac{\pi}{2} \\
 I(y) &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \quad \forall y > 0.
 \end{aligned}$$

Но по лемме  $I(y)$  неотрицательная в точке  $y = 0$ .

$$I(0) = \lim_{y \rightarrow 0} I(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \right) = \frac{\pi}{2} \implies \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**Дифференцирование интеграла по параметру в случае переменных пределов интегрирования.**

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx; \quad f \in C([a, b](x) \ni \times [c, d](y)), \quad \alpha(y), \beta(y) : [c, d] \rightarrow [a, b] \text{ дифф.}$$

**Теорема 15** (Правило Лейбница). Тогда  $I(y)$  дифференцируемо на  $[c, d]$  и

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y).$$

*Доказательство.*

$$\Phi(x, y) = \int_a^x f(t, y) dt$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f(x, y) \text{ непрерывна в } Q$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \lim_{\Delta \rightarrow y} \frac{1}{\Delta y} \left( \int_a^x f(t, y + \Delta y) dt - \int_a^x f(t, y) dt \right)$$

$$= \int_a^x f'_y(t, y) dt$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_1, y_1) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \int_a^x f'_y(t, y_1) dx + \left( \int_a^x f'_y(t, y) dx - \int_a^x f'_y(t, y) dx \right) - \int_a^x f'_y(t, y) dx.$$

Таким образом  $\Phi(x, y)$  дифференцируема на  $Q$

$$I(y) = \Phi(\beta(y), y) - \Phi(\alpha(y), y)$$

$$I'(y) = P' h_{ix}(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) + \Phi'_y(\beta(y), y) - \Phi'_x(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y) - \Phi'_y(\alpha(y), y).$$

■

**Пример.**

$$I(p) = \int_{p^2}^{p^3} \frac{x^2 + 2p}{\ln^2 |x| + 1} dx$$

$$\forall p \neq 0, \quad [a, b] = [p - \delta, p + \delta] \quad [c, d]$$

$$I'(p) = \int_{p^2}^{p^3} \frac{2}{\ln^2 |x| + 1} dx + \frac{p^6 + 2p}{\ln^2 |p^3| + 1} \cdot 3p^2 - \frac{p^4 + 2p}{\ln^2 |p^2| + 1} \cdot 2p.$$

## 7 Интегрирование на многообразиях

**Определение 8.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  кусочно-гладкое, простой путь (биекция) или заскнутый простой (единственная точка самопересечения – концы).

Пусть  $\Gamma = \gamma([a, b])$  — носитель нашего пути. . .

$$\mathcal{B} = \{B \mid \gamma^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

$$ds = \nu(B) = \int_{\gamma^{-1}(B)} \|\gamma'(t)\| dt.$$

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}). \int_B f ds = \int_{\gamma^{-1}(B)} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt.$$

Интеграл не зависит от выбора параметризации. Также не зависит от ориентации кривой.

**Пример.**  $\int_C x^2 ds \quad C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$$I = \int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds \implies I = \frac{1}{3} \int_C \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=R^2} ds = \frac{R^2}{3} \int_C ds = \frac{R^2}{3} \cdot 2\pi R..$$

## 8 Я чуть чуть опаздал

### 8.1 Многообразие с краем

**Напоминание**  $k$ -мерную  $r$ -гладкую поверхность в  $\mathbb{R}^n$  (многообразие без края).

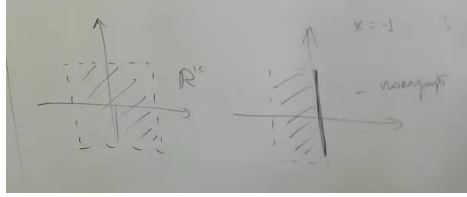
Пусть  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n, x^0 \in \mathcal{M}$ .

Окрестность  $U_M(x^0) = m \cap U(x^0)$ , где  $U(x^0)$  — открытое в  $\mathbb{R}^n$ .

$\exists$  открытое  $D \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $\Phi : D \rightarrow U_M(x^0)$ , где  $\Phi \in C^k(D)$ , регулярно.

**Определение 9.** Стандартный куб в  $\mathbb{R}^k$  — это  $(-1, 1)^k$ .

**Определение 10.** Стандартный полукуб в  $\mathbb{R}^k$  — это  $[-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$  при  $k > 1$  и  $(-1, 0]$  или  $[0, 1)$  при  $k = 1$ .



**Определение 11.** Пусть  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{M}$  называется  $k$ -мерным многообразием с краем, если  $\forall x^0 \in \mathcal{M} \exists$  окрестность  $U_M(x^0)$  и  $\Phi : \Pi_k \rightarrow U_M(x^0)$ , регулярно и  $\in C^k$ .

Здесь  $\Pi_k$  — стандартный  $k$ -мерный куб или стандартный  $k$ -мерный полукуб.

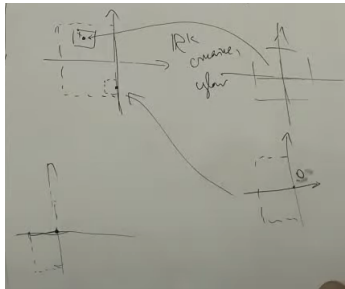
$U_M(x^0)$  — стандартная окрестность точки  $x^0$  в  $\mathcal{M}$ .

$\Phi$  — локальная параметризация (стандартная).

$\langle U_M(x^0), \Phi \rangle$  — карта; набор карт — атлас.

**Пример.** Очевидные:

1.  $(-1, 1)^k$  —  $k$ -мерное многообразие (без края).
2.  $(-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$  —  $k$ -мерное многообразие с краем.
3.  $\mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$  — набор  $k$ -мерных многообразий с краем в  $\mathbb{R}^n$  гладкости  $r$ .



**Пример.** Чуть менее очевидный пример.

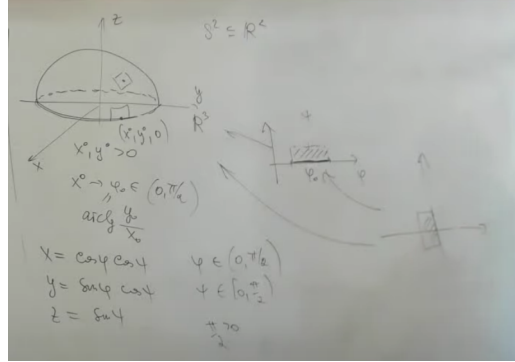
$\mathbb{R}^n \in \mathbb{M}_{n,n}^{(\infty)}$  — многообразие с краем (край пустой).

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \left( \operatorname{tg} \left( x_1 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \operatorname{tg} \left( x_2 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \dots, \operatorname{tg} \left( x_n \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad |x_i| < 1. \right.$$

**Определение 12.** Пусть  $M \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$ .  $x^0 \in M$  называется внутренней (относительно многообразия), если  $\exists$  стандартная локальная параметризация  $\Phi : \Pi \rightarrow U_M(x^0)$ , такая, что  $\Pi$  — куб.

Если точка  $x^0$  не является внутренней, то она называется крайней (точкой края).  
 $\partial M$  — множество крайних точек  $M$  (край  $M$ ).

**Замечание.** Если  $\exists$  стандартная параметризация  $\Phi : \Pi \rightarrow U_M(x^0)$ , такая что  $\Pi$  — полукуб, то  $\forall$  стандартной параметризации  $\psi : \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{U}_M(x^0)$ ,  $\tilde{\Pi}$  — полукуб.



**Замечание.**  $\text{Fz}M \neq \partial M$ . То есть множество крайних точек не равно множеству граничных точек.

**Определение 13.** Дискретное множество в  $\mathbb{R}^n$  — множество без предельных точек в  $\mathbb{R}^n$ .  
 Само множество не более, чем счётно. В любом шаре  $\mathbb{R}^n$  лишь конечное множество точек.  
 Дискретное множество в  $\mathbb{R}^n$  — многообразие размерности 0 в  $\mathbb{R}^n - \mathbb{M}_{0,n}$

**Пример (Конус).**

$$ax^2 + by^2 = z^2.$$

В нуле ранг нарушается. Весь конус целиком не многообразие.

$\sqsupset (U(x_0), \Phi), (\tilde{U}(x_0), \Psi)$  — две карты для  $\text{Min} \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}, k \in \mathbb{N}$

$$V = U(x_0) \cap \tilde{U}(x_0)$$

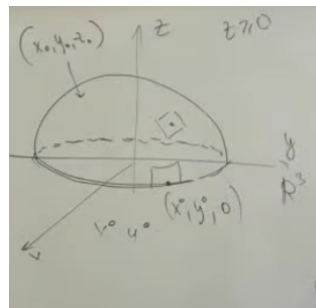
$$\Phi^{-1}(C) = W \quad \Psi^{-1}(V) = \tilde{W}$$

$$\Theta = \Psi^{-1} \circ \Phi \quad \Theta : W \rightarrow \tilde{W} \text{ — отображение перехода.}$$

**Утверждение 15.1.** В условия определения отображения перехода оно есть диффеоморфизм из  $W$  в  $\tilde{W}$ .

**Пример.** Параметризация поверхности сферы через полярные координаты.

$$\Phi : (\phi, \psi) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi \\ \sin \phi \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}, \Psi : (x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}.$$





$$\theta : (\varphi, \psi) \rightarrow (x, y), \quad \theta(\varphi, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \end{bmatrix}, \quad \theta' = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi \end{bmatrix}.$$

$$\det \theta' = \cos \varphi \sin \psi$$

$\pi_{x_1, \dots, x_k} \Psi : \Pi \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  – локально диффеоморфизм

$(g = \pi \circ \psi)^{-1} : (x_1, \dots, x_k) \rightarrow (v_1, \dots, v_k)$   $x_{k+1}, \dots, x_n$  – функции от первых координат

$\Theta = g \circ \pi_{x_1, \dots, x_k} \Phi$ . Аналогично устроено обратное отображение, значит определители обоих не могут обращаться в ноль.

**Следствие 15.1.** Инвариантность типа множества (куб или полукуб) от выбора станратной параметризации вытекает из последнего утверждения,

**Следствие 15.2.**  $\forall \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)} \quad \forall x^0 \in \mathcal{M}$  льякольно некоторые  $n - k$  координат точки выражаются как функции от остальных координат.

**Замечание.** Касательное пространство – пространство касательных векторов (векторов принадлежащих какой-то кривой на поверхности).

$$\text{Tr } \mathcal{M} = d_{\Phi^1(p)} \Phi(\mathbb{R}^k)$$

**Определение 14.**  $\square \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(1)} \quad x^0 \in \mathcal{M} \quad (U(x_0), \Phi) - \text{карта}$   
 $T_{x^0} \mathcal{M} = d_0 \Phi(\mathbb{R}^k)$

**Замечание.** Определение  $T_{x^0} \mathcal{M}$  не зависит от параметризации.

$$d_0 \Phi(\mathbb{R}^k) = d_0(\Psi_0 \theta)(\mathbb{R}^k) = f_{\theta(0)} \Psi(d_0 \theta(\mathbb{R}^k)) = d_{\theta(0)=0} \Psi(\mathbb{R}^k).$$

$d_0 \theta$  – изоморфизм, т.к.  $\theta$  – диффеоморфизм.

**Замечание.**  $N \in \mathbb{R}, N$  – нормальный вектор к  $\mathcal{M}$  в точке  $x^0$ , если  $N \perp T_{x^0} \mathcal{M}$ . (Иногда требуют длину 1, но часто нет)

**Замечание.** Если  $M \in \mathbb{M}_{k,n}^r$  в окрестности  $x^0$  задаётся системой 
$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \dots \\ F_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$$

$\nabla F_1, \dots, \nabla F_{n-k}$  – базис  $(T_{x^0} \mathcal{M})^\perp$

**Замечание.** Если  $\mathcal{M} \in M_{n-1,n}^{(1)} \quad N \perp T_{x^0} \mathcal{M} \quad N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ & & \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(0) & \\ & & \vdots & \\ & & \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(0) & \end{vmatrix}$

$(U(x_0), \Phi) - \text{карта}$

$$\iff N \perp \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \quad \forall j = 1, \dots, n-1$$

$$\left\langle N, \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \right\rangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(0) \end{vmatrix} = 0, \text{ т.к. совпадают две строки.}$$

Частный случай. Пусть  $n = 3, k = 2$ .  $\mathcal{M}$  – график  $z = g(x, y)$ , заданный на открытом множестве  $D \subseteq \mathbb{R}^2, g \in C^1$ .

$$\Phi : (x, y) \rightarrow (x, y, z) = (x, y, g(x, y)), \quad \Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}$$

Таким образом,  $\mathcal{M}$  – двумерное многообразе хотя бы класса  $C^{(1)}$ , то есть  $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{2,3}^{(1)}$ .

$$N - \text{нормаль к } \mathcal{M}, \quad N = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & g'_x \\ 0 & 1 & g'_y \end{bmatrix} = (-g'_x, -pg_y, 1) - \text{направлена вверх.}$$

**Определение 15.**  $\sqsupset (U(x^0), \Phi), (\tilde{U}(x^0), \Psi)$  – две карты

$$x_0 \in \mathcal{M} \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$$

Скажем, что  $\Phi$  и  $\Psi$  согласованы, если  $\det \Theta > 0$ , где  $\theta = \Psi^{-1} \circ \Phi$  – отображение перехода.

**Замечание.** Отношение согласованности является отношением эквивалентности.

**Определение 16.**  $I(x^0)$  называется ориентированной, если зафиксирован один из классов эквивалентности по отношению согласованности.

**Замечание.**  $\sqsupset U(x^0) \cap U(x^1) \neq \emptyset$ .  $U(x^0)$  и  $U(x^1)$  согласованы, если  $\Phi \in U_+(x^0), \Psi \in U_+(x^1)$ , где  $U_+$  – зафиксированный класс.  $\implies \det(\Psi^{-1} \circ \Phi) > 0$

Если  $U(x^0) \cap U(x^1) = \emptyset$ , то их ориентации согласованы.

Атлас  $A = \{(U, \Phi)\}$  многообразия  $\mathcal{M}$  называется ориентированным, если ориентации любых двух  $U, V \in A$  согласованы.

Многообразие с краем называется ориентируемым, если  $\exists$  ориентированный атлас.

**Определение 17.** Пусть  $\Gamma = \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{1,n}^{(1)}$ ,  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\forall x^0 \in \mathcal{M} : \tau(x^0) \in T_{x^0} \circ \mathcal{M}$ ,  $\tau$  – непрерывное,  $\|\tau\| \equiv 1$ .

Тогда  $\tau$  называется направлением на  $\mathcal{M}$ .

**Утверждение 15.2.**  $\forall$  связное 1-мерное, 1-гладкое многообразие с краем имеет ровно два направления.

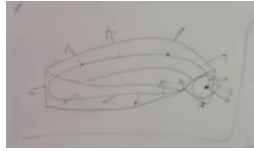
$\tau(x) = \pm \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} (\gamma^{-1}(x))$ , где  $\gamma$  – параметризация из выбранного класса эквивалентности (из ориентации окрестности  $\mathcal{M}$ ).

**Определение 18.**  $k = n - 1 \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{n-1,n}^{(\perp)}$   
 $n(x) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется стороной, если:

1.  $n(x) \in C(M)$
2.  $\forall x \in \mathcal{M} \quad n(x) \perp T_x \mathcal{M}$
3.  $\|n(x)\| = 1$

**Замечание.** Сторон чётное число.

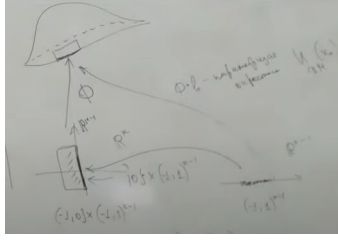
**Замечание.** Не у всех поверхностей есть сторона. Лента Мёбиуса, бутылка Клейна, ...



**Утверждение 15.3.** Для  $k = n - 1$  ориентируемость многообразия с краем  $\mathcal{M} \in (\mathbb{M}_{n-1,n}^1)$  равносильно существованию стороны.

**Теорема 16.** Пусть  $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(1)} \quad K \leq n, k, n \in \mathbb{N}$   
 Тогда:

1.  $\partial \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k-1,n}^{(1)}; \partial(\partial \mathcal{M}) = \emptyset$
2. Если  $\mathcal{M}$  – ориентированно то  $\partial \mathcal{M}$  ориентируем.



## 9 Я чуть чуть опаздал

### 9.1 Многообразие с краем

**Напоминание**  $k$ -мерную  $r$ -гладкую поверхность в  $\mathbb{R}^n$  (многообразие без края).

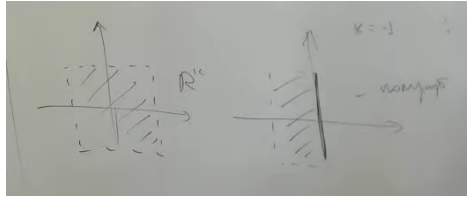
Пусть  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n, x^0 \in \mathcal{M}$ .

Окрестность  $U_M(x^0) = \mathcal{M} \cap U(x^0)$ , где  $U(x^0)$  — открытое в  $\mathbb{R}^n$ .

$\exists$  открытое  $D \subseteq \mathbb{R}^k, \Phi : D \rightarrow U_M(x^0)$ , где  $\Phi \in C^k(D)$ , регулярно.

**Определение 19.** Стандартный куб в  $\mathbb{R}^k$  — это  $(-1, 1)^k$ .

**Определение 20.** Стандартный полукуб в  $\mathbb{R}^k$  — это  $[-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$  при  $k > 1$  и  $(-1, 0]$  или  $[0, 1)$  при  $k = 1$ .



**Определение 21.** Пусть  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{M}$  называется  $k$ -мерным многообразием с краем, если  $\forall x^0 \in \mathcal{M} \exists$  окрестность  $U_M(x^0)$  и  $\Phi : \Pi_k \rightarrow U_M(x^0)$ , регулярно и  $\in C^k$ .

Здесь  $\Pi_k$  — стандартный  $k$ -мерный куб или стандартный  $k$ -мерный полукуб.

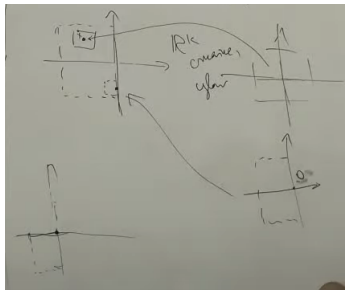
$U_M(x^0)$  — стандартная окрестность точки  $x^0$  в  $\mathcal{M}$ .

$\Phi$  — локальная параметризация (стандартная).

$\langle U_M(x^0), \Phi \rangle$  — карта; набор карт — атлас.

**Пример.** Очевидные:

1.  $(-1, 1)^k$  —  $k$ -мерное многообразие (без края).
2.  $(-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$  —  $k$ -мерное многообразие с краем.
3.  $\mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$  — набор  $k$ -мерных многообразий с краем в  $\mathbb{R}^n$  гладкости  $r$ .



**Пример.** Чуть менее очевидный пример.

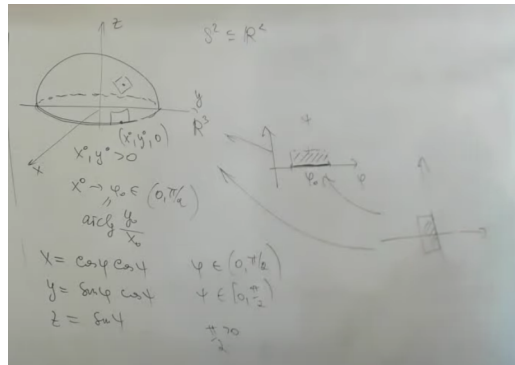
$\mathbb{R}^n \in \mathbb{M}_{n,n}^{(x)}$  — многообразие с краем (край пустой).

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \left( \operatorname{tg} \left( x_1 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \operatorname{tg} \left( x_2 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \dots, \operatorname{tg} \left( x_n \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad |x_i| < 1. \right.$$

**Определение 22.** Пусть  $M \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$ .  $x^0 \in M$  называется внутренней (относительно многообразия), если  $\exists$  стандартная локальная параметризация  $\Phi : \Pi \rightarrow U_M(x^0)$ , такая, что  $\Pi$  — куб.

Если точка  $x^0$  не является внутренней, то она называется крайней (точкой края).  
 $\partial M$  = множество крайних точек  $M$  (край  $M$ ).

**Замечание.** Если  $\exists$  стандартная параметризация  $\Phi : \Pi \rightarrow U_M(x^0)$ , такая что  $\Pi$  — полукуб, то  $\forall$  стандартной параметризации  $\psi : \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{U}_M(x^0)$ ,  $\tilde{\Pi}$  — полукуб.



**Замечание.**  $\operatorname{Fz} M \neq \partial M$ . То есть множество крайних точек не равно множеству граничных точек.

**Определение 23.** Дискретное множество в  $\mathbb{R}^n$  — множество без предельных точек в  $\mathbb{R}^n$

Само множество не более, чем счётно. В любом шаре  $\mathbb{R}^n$  лишь конечное множество точек.  
 Дискретное множество в  $\mathbb{R}^n$  — многообразие размерности 0 в  $\mathbb{R}^n - \mathbb{M}_{0,n}$

**Пример** (Конус).

$$ax^2 + by^2 = z^2.$$

В нуле ранг нарушается. Весь конус целиком не многообразие.

$\square (U(x_0), \Phi), (\tilde{U}(x_0), \Psi)$  — две карты для  $\operatorname{Min} \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}, k \in \mathbb{N}$

$$V = U(x_0) \cap \tilde{U}(x_0)$$

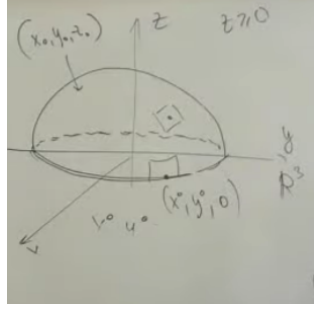
$$\Phi^{-1}(C) = W \quad \Psi^{-1}(V) = \tilde{W}$$

$$\Theta = \Psi^{-1} \circ \Phi \quad \Theta : W \rightarrow \tilde{W} \text{ — отображение перехода.}$$

**Утверждение 16.1.** В условия определения отображения перехода оно есть диффеоморфизм из  $W$  в  $\tilde{W}$ .

**Пример.** Параметризация поверхности сферы через полярные координаты.

$$\Phi : (\phi, \psi) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi \\ \sin \phi \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}, \Psi : (x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{bmatrix}.$$



$$\theta : (\phi, \psi) \rightarrow (x, y), \quad \theta(\phi, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi \\ \sin \phi \cos \psi \end{bmatrix}, \quad \theta' = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi \\ \cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \sin \psi \end{bmatrix}.$$

$$\det \theta' = \cos \phi \sin \psi$$

$\pi_{x_1, \dots, x_k} \Psi : \Pi \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  – локально диффеоморфизм

$(g = \pi \circ \psi)^{-1} : (x_1, \dots, x_k) \rightarrow (v_1, \dots, v_k)$   $x_{k+1}, \dots, x_n$  – функции от первых координат

$\Theta = g \circ \pi_{x_1, \dots, x_k} \Phi$ . Аналогично устроено обратное отображение, значит определители обоих не могут обращаться в ноль.

**Следствие 16.1.** Инвариантность типа множества (куб или полукуб) от выбора стандартной параметризации вытекает из последнего утверждения,

**Следствие 16.2.**  $\forall \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)} \quad \forall x^0 \in \mathcal{M}$  локально некоторые  $n - k$  координат точки выражаются как функции от остальных координат.

**Замечание.** Касательное пространство – пространство касательных векторов (векторов принадлежащих какой-то кривой на поверхности).

$$\text{Tr} \mathcal{M} = d_{\Phi^{-1}(p)} \Phi(\mathbb{R}^k)$$

**Определение 24.**  $\square \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(1)} \quad x^0 \in \mathcal{M} \quad (U(x_0), \Phi) - \text{карта}$   
 $T_{x^0} \mathcal{M} = d_0 \Phi(\mathbb{R}^k)$

**Замечание.** Определение  $T_{x^0} \mathcal{M}$  не зависит от параметризации.

$$d_0 \Phi(\mathbb{R}^k) = d_0(\Psi_0 \theta)(\mathbb{R}^k) = f_{\theta(0)} \Psi(d_0 \theta(\mathbb{R}^k)) = d_{\theta(0)=0} \Psi(\mathbb{R}^k).$$

$d_0 \theta$  – изоморфизм, т.к.  $\theta$  – диффеоморфизм.

**Замечание.**  $N \in \mathbb{R}, N$  – нормальный вектор к  $\mathcal{M}$  в точке  $x^0$ , если  $N \perp T_{x^0} \mathcal{M}$ . (Иногда требуют длину 1, но часто нет)

**Замечание.** Если  $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^r$  в окрестности  $x^0$  задаётся системой 
$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \dots \\ F_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$$

$\nabla F_1, \dots, \nabla F_{n-k}$  – базис  $(T_{x^0} \mathcal{M})^\perp$

**Замечание.** Если  $\mathcal{M} \in M_{n-1,n}^{(1)} \quad N \perp T_{x^0} \mathcal{M} \quad N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ & & \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(0) & \\ & & \vdots & \\ & & \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(0) & \end{vmatrix}$

$(U(x_0), \Phi)$  – карта

$$\iff N \perp \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \quad \forall j = 1, \dots, n-1$$

$$\left\langle N, \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \right\rangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(0) \end{vmatrix} = 0, \text{ т.к. совпадают две строки.}$$

Частный случай. Пусть  $n = 3, k = 2$ .  $\mathcal{M}$  – график  $z = g(x, y)$ , заданный на открытом множестве  $D \subseteq \mathbb{R}^2, g \in C^1$ .

$$\Phi : (x, y) \rightarrow (x, y, z) = (x, y, g(x, y)), \quad \Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}$$

Таким образом,  $\mathcal{M}$  – двумерное многообразие хотя бы класса  $C^{(1)}$ , то есть  $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{2,3}^{(1)}$ .

$$N \text{ — нормаль к } \mathcal{M}, \quad N = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & g'_x \\ 0 & 1 & g'_y \end{bmatrix} = (-g'_x, -g'_y, 1) \text{ — направлена вверх.}$$

**Определение 25.**  $\sqsupset (U(x^0), \Phi), (\tilde{U}(x^0), \Psi)$  – две карты

$$x_0 \in \mathcal{M} \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$$

Скажем, что  $\Phi$  и  $\Psi$  согласованы, если  $\det \Theta > 0$ , где  $\theta = \Psi^{-1} \circ \Phi$  – отображение перехода.

**Замечание.** Отношение согласованности является отношением эквивалентности.

**Определение 26.**  $I(x^0)$  называется ориентированной, если зафиксирован один из классов эквивалентности по отношению согласованности.

**Замечание.**  $\sqsupset U(x^0) \cap U(x^1) \neq \emptyset$ .  $U(x^0)$  и  $U(x^1)$  согласованы, если  $\Phi \in U_+(x^0), \Psi \in U_+(x^1)$ , где  $U_+$  – зафиксированный класс.  $\implies \det(\Psi^{-1} \circ \Phi) > 0$

Если  $U(x^0) \cap U(x^1) = \emptyset$ , то их ориентации согласованы.

Атлас  $A = \{(U, \Phi)\}$  многообразия  $\mathcal{M}$  называется ориентированным, если ориентации любых двух  $U, V \in A$  согласованы.

Многообразие с краем называется ориентиркемым, если  $\exists$  ориентированный атлас.

**Определение 27.** Пусть  $\Gamma = \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{1,n}^{(1)}$ ,  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $\forall x^0 \in \mathcal{M} : \tau(x^0) \in T_{x^0} \circ \mathcal{M}$ ,  $\tau$  – непрерывное,  $\|\tau\| \equiv 1$ .

Тогда  $\tau$  называется направлением на  $\mathcal{M}$ .

**Утверждение 16.2.**  $\forall$  связное 1–мерное, 1–гладкое многообразие с краем имеет ровно два направления.

$\tau(x) = \pm \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} (\gamma^{-1}(x))$ , где  $\gamma$  – параметризация из выбранного класса эквивалентности (из ориентации окрестности  $\mathcal{M}$ ).

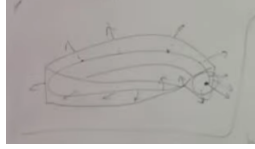
**Определение 28.**  $k = n - 1 \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{n-1,n}^{(\perp)}$

$n(x) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется стороной, если:

1.  $n(x) \in C(\mathcal{M})$
2.  $\forall x \in \mathcal{M} \quad n(x) \perp T_x \mathcal{M}$
3.  $\|n(x)\| = 1$

**Замечание.** Сторон чётное число.

**Замечание.** Не у всех поверхностей есть сторона. Лента Мёбиуса, бутылка Клейна, ...



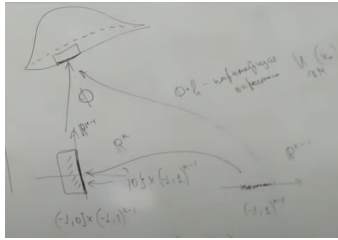
**Утверждение 16.3.** Для  $k = n - 1$  ориентируемость многообразия с краем  $\mathcal{M} \in (\mathbb{M}_{n-1,n}^1)$  равносильно существованию стороны.

**Теорема 17.** Пусть  $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(1)}$   $K \leq n, k, n \in \mathbb{N}$

Тогда:

1.  $\partial \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k-1,n}^{(1)}$ ;  $\partial(\partial \mathcal{M}) = \emptyset$
2. Если  $\mathcal{M}$  – ориентированно то  $\partial \mathcal{M}$  ориентируем.

*Доказательство.*  $\partial \mathcal{M}$  – многообразие без края. ■



**Замечание** (Воспоминания). Многообразие – локально гомеоморфно кубу.

С краем – есть точки гомеоморфные половине куба.

Пусть у нас есть две параметризации окрестности:  $\Phi, \Psi, \Phi = \Psi \circ \Theta$   $\Phi \sim \Psi \iff \det \Theta' > 0$

Класс эквивалентности  $[\Phi]$  – ориентация окрестности

$U, V$  – окрестности в  $M$ . Они согласованы если:

- они не пересекаются
- они пересекаются и  $\det \theta' > 0$ , где  $\theta$  – отображение перехода от  $\Phi$  к  $\Psi$ , где  $\Phi$  – из ориентации  $U$ ,  $\Psi$  – из ориентации  $V$  и  $\Phi(\Pi) \cap \Psi(\Pi) \neq \emptyset$

**Пример.**  $S_1 = S \cap \{z > 0\}$   $S_2 = S \cap \{x > 0\}$

$$\theta : (x, y) \rightarrow (y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$\theta' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix}$$

$$\det' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} > 0 \text{ на области определения } (\Phi^{-1}(S_1 \cap S_2))$$

$$S_3 = S \cap \{z < 0\}$$

$$\tilde{\theta}(x, y) = (y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$$

И здесь уже всё плохо с определителем.

**Утверждение 17.1.**  $\gamma : \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , регулярно ( $\iff \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$ ).  $\gamma$  – простой путь (без самопересечений, инъективность)

$\Gamma = \gamma(\langle a, b \rangle)$  – Одномерное многообразие.

Край не пуст, если  $\{a, b\} \cap \langle a, b \rangle \neq \emptyset$

Направление – непрерывное отображение  $\tau : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

1. непрерывно  $\tau \in C(\Gamma)$

$$2. \tau(x) \in T_x \Gamma \forall x \in \Gamma$$

$$3. \|\tau(x)\| = 1 \forall x \in \Gamma$$

Для любой гладкой кривой  $\Gamma$  (из определения выше) существует ровно два направления на этой кривой, и любая такая  $\Gamma$  ориентируема

*Доказательство.* Ориентация порождается сужениями одного и того же отображения  $\lambda$  на различные кубы и полукубы.

$$\tau_\gamma = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} (\gamma^{-1}(x)).$$

$\tau(x)$  – ещё одно направление

$$t \in (a, b) \quad h(t) = \langle \tau_\gamma(\gamma(t)), \tau(\gamma(t)) \rangle = \pm \|\tau_\gamma(\gamma(t))\| \|\tau(\gamma(t))\| = \pm 1$$

$h : \langle a, b \rangle \rightarrow \{-1, +1\}$  – непрерывно, но  $h(\langle a, b \rangle)$  должно быть промежутком:

$$1. h(\langle a, b \rangle) = \{1\} \implies \tau = \tau_\gamma$$

$$2. h(\langle a, b \rangle) = \{-1\} \implies \tau = -\tau_\gamma$$

■

**Утверждение 17.2.**  $k = n - 1 \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Сторона на многообразии  $M \in \mathbb{M}_{n-1,n}^1$  – отображение  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$1. n \in C(M)$$

$$2. N(x) \perp T_x M$$

$$3. \|N\| = 1$$

Если  $M \in \mathbb{M}_{n-1,n}^1$ . Тогда  $M$  двусторонняя  $\iff M$  ориентируема. Если  $M$  двусторонняя, то любая сторона представима в виде:

$$N = \pm \frac{N_\Phi}{\|N_\Phi\|} (\varphi^{-1}(x)).$$

$\Phi$  – параметризация окрестности точки  $x$  Из выбранной ориентации

$$N_\Phi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \\ \dots & \Phi'_{u_1} & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \Phi'_{u_{n-1}} & \dots \end{vmatrix}$$

$$\|N_\Phi\| \neq 0$$

$$\Phi \sim \tilde{\Phi}$$

**Замечание** (Напоминание).  $\mathcal{E}_p(X)$  – набор кососимметрических  $p$  форм из  $X$  в  $\mathbb{R}^n$

$$\omega : O \rightarrow \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$$

$$\omega(x, h^1, \dots, h^p) \quad h_i \in \mathbb{R}^n$$

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \sum_I \omega_I(x) dx^I$$

$$\Omega_p^{(r)} = \Omega_{p,n}^{(r)} - \text{набор всех дифференцируемых } p\text{-форм гладкости } r \text{ в } O$$

**Пример.** 1.  $f \in C^k(O), \quad \omega = f \in \Omega_0^{(k)}(O)$

$$2. f \in C^k(O), \quad d_x f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \in \Omega_1^{(k-1)}(O)$$

$$3. \square F - \text{поле в } \mathbb{R}^3 \quad F = (P, Q, R) : O \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \omega_F = Pdx + Qdy + Rfz$$

$$\omega_F(h \in \mathbb{R}^3) = P(x, y, z)h_1 + Q(x, y, z)h_2 + R(x, y, z)h_3$$

Если  $h \approx 0 \implies \omega_F(h) \approx$  элементарная работа поля  $F$  на перемещение  $h$

$$\omega_F^* = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

$dy \wedge dz \dots$  – задают базис  $\Omega_{2,3}$

$$\Omega_1^n \text{ изоморфно } \Omega_{n-1}^n$$



$$4. V = (P, Q, R) \in C^r(O)$$

$$\omega(x, h^1, h^2) = \begin{vmatrix} v \\ h^1 \\ h^2 \end{vmatrix} \in \Omega_{2,3}^{(r)}(O), \quad h^1, h^2 \in \mathbb{R}^3 - \text{смешанное произведение } (h^1, h^2, v)$$

Смысл: Если  $V$  – поле скоростей, а  $h^1, h^2 \approx 0$ , то  $(h^1, h^2, v)$  – поток поля  $V$  через площадку, натянутую на  $h^1$  и  $h^2$

$$\begin{aligned} \omega &= p \begin{vmatrix} h_2^1 & h_3^1 \\ h_2^2 & h_3^2 \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} h_3^1 & h_1^1 \\ h_3^2 & h_1^2 \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} h_1^1 & h_2^1 \\ h_1^2 & h_2^2 \end{vmatrix} \\ \omega &= Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \omega_V^* \end{aligned}$$

## 10 Внешнее дифференцирование дифференциальных форм

“ $d$ ” — внешний дифференциал

**Определение 29** (Внешний дифференциал для форм).  $\omega \in \Omega_{0,n}^{(1)}(O), \quad d_x \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx_i$

$$\omega \in \Omega_p^{(1)}(O) \quad \omega = \sum_I \omega_I dx^I, \omega_I \in \Omega_0^{(1)}(O) \implies d\omega = \sum_I (d\omega_I) \wedge dx^I$$

$$d\omega \in \Omega_{p+1}^{(0)}(O) \quad d\omega = \sum_{k=1}^n \sum_I \frac{\omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx^I$$

**Пример.** 1.  $\omega \in \Omega_{n-1,n}^{(r)}(O)$ .

Для  $n = 3$ :  $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ .

$$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + Q \wedge dz \wedge dx + R \wedge dx \wedge dy = P'_x dx \wedge dy \wedge dz + Q'_y dy \wedge dz \wedge dx + R'_z dz \wedge dx \wedge dy = (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz \implies d\omega = \operatorname{div}(P, Q, R) dx \wedge dy \wedge dz.$$

$$d\omega = \div(P, Q, R) \cdot dx \wedge dy \wedge dz = d\omega_{(P,Q,R)}^*.$$

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

$$d\omega = (R'_y - Q'_z) dy \wedge dz + (P'_z - R'_x) dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y) dx \wedge dy$$

$$\operatorname{rot}(P, Q, R) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\omega_{\operatorname{rot}(P,Q,R)}^* = d\omega_{P,Q,R}$$

Свойства внешнего дифференциала:

$$1. \text{Линейность. } d(C_1\omega + C_2\theta) = C_1d\omega + C_2d\theta \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall \omega, \theta \in \Omega_{p,n}^{(1)}(O).$$

$$2. \text{Внешнее дифференцирование произведения. } \omega = \sum_{I(1\dots p)} \omega_I dx^I \quad \theta = \sum_{J(1\dots q)} \theta_J dx^J \quad \omega \wedge \theta = \sum_I \sum_J \omega_I \theta_J \cdot dx^I \wedge dx^J$$

$$\text{Если } \omega \in \Omega_p^{(1)}(O) \quad \theta \in \Omega_q^{(1)}(O)$$

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (d\theta).$$

$$\text{Если } \omega, \theta - \text{одночленные функции, } \omega = f dx^I \quad \theta = g \cdot dx^J \quad f, g \in C^1(O)$$

$$\begin{aligned} d(f dx^I \wedge g dx^J) &= d(f \cdot g dx^I \wedge dx^J) \\ &= d(f \cdot g) \wedge dx^I \wedge dx^J = g df \wedge dx^I \wedge dx^J + f dg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (d\theta) \end{aligned}$$

Последнее равенство, потому что нужно перетящить  $dg$  через  $dx^I$  с помощью  $p$  транспозиций.

$$\tilde{2}. \omega \in \Omega_P^{(1)}(O) \quad f \in C^1(O)$$

$$d(f \cdot \omega)' = (df) \wedge \omega + f \wedge d\omega.$$

$$3. d(d\omega) \equiv 0 \quad \omega \in C_p^{(2)}$$

$$(a) \quad \omega = f \quad p = 0$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= d \left( \sum_{i=1}^n f'_{x_i} dx_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n d(f'_{x_i}) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i,j=1}^n f''_{x_i x_j} dx_j \wedge dx_i = 0 \end{aligned}$$

## 11 Перенос (пересадка) дифференциальной формы

$O$  – открытое в  $\mathbb{R}^n$      $U$  – открытое в  $\mathbb{R}^k$

$$\Phi \in C^1(U \rightarrow O)$$

$$\omega \in \Omega_p$$

$$\Phi_*(\omega)(u, v_1, \dots, v_p) = \omega(\Phi(u), d_u \Phi(v^1), \dots, d_u \Phi(v^p))$$

**Пример.**    1.  $\omega \in \Omega_0$

$$\Phi_*(\omega)(\omega) = \omega \circ \Phi$$

$$2. k = 1, n \in \mathbb{N}, p = 1$$

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i d(x) x_i$$

$$\Phi = \gamma$$

$$\begin{aligned} \gamma_*(\omega)(u, v) &= \sum \omega_i(\gamma(u)) dx_i(\gamma'(u) \cdot v) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(u)) \cdot \gamma'_i(u) \right) \end{aligned}$$

**Утверждение 17.3** (Свойства пересадки дифференциальных форм)

$$\Phi_*(C_1\omega + C_2\theta) = C_1\Phi_*(\omega) + C_2\Phi_*(\theta), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \omega, \theta \in \Omega_p(O).$$

$$1. \omega \in \Omega_p(O) \quad f \in C^1(O)$$

$$(\Phi_*(f \cdot \omega))(u, v^1, \dots, v^p) = (f \circ \Phi) \cdot \Phi(\omega).$$

$$\Phi_*(f\omega) = f\omega(\Phi(u), d_n \Phi(v^1), \dots, d_n \Phi(v^1)) = f(\Phi(u)) \cdot \underbrace{\omega(\Phi(u), d_n \Phi(v^1), \dots, d_n \Phi(v^p))}_{\Phi_*(\omega)}$$

$$2. \Phi_*(w \wedge \theta) = \Phi_*(\omega) \wedge \Phi_*(\theta), \quad \omega \in \Omega_p(O), \theta \in \Omega_q.$$

По линейности докажем это для одночленных.

$$\Phi_*(dx^I \wedge dx^J) = \Phi_*(dx^I) \wedge \Phi_*(dx^J).$$

$$\begin{aligned}
\Phi_*(dx^I \wedge dx^J)(v^1, \dots, v^{p+q}) &= (dx^I \wedge dx^J) (d\Phi(v^1), \dots, d\Phi(v^{p+q})) \\
&= \begin{vmatrix} h_{i_1}^1 & \dots & h_{i_p}^1 & \dots & h_{j_q}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{i_1}^{p+q} & \dots & \dots & \dots & h_{j_q}^{p+q} \end{vmatrix} \\
&= \Phi_*(dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge \Phi_*(dx_{i_p}) \wedge \dots \wedge \Phi_*(dx_{j_q})(h^1, \dots, h^{p+q}) \\
\Phi_*(dx_I)(h) &= dx_i (\Phi' \cdot h) \omega = f dx^I \\
\theta &= g dx^J \\
\Phi_*(f dx^I \wedge g dx^J) &= (f \cdot g) \circ \Phi \dots \Phi_*(dx^I \wedge dx^J) \\
&= (f \circ \Phi) \circ (g \circ \Phi) \Phi_* dx^I \wedge \Phi_* dx^J = P_*(\omega) \wedge \Phi_*(\theta)
\end{aligned}$$

3.

$$\forall \omega \in \Omega_p^{(1)}(O) \quad d(\Phi_*(\omega)) = \Phi_*(d\omega).$$

$$4. \quad \psi : V \rightarrow U, \in C^1 \quad (\Phi\psi)_*(\omega) = \psi_*(\Phi_*(\omega))$$

$$5. \quad \omega \in \Omega_p^{(1)} \quad \omega = \sum_I \omega_I dx^I$$

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\omega) &= \sum_{I(1\dots p)} \sum_{\substack{J(1\dots p) \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq k}} \\
&= \omega_I(\Phi(u)) \cdot \det \frac{\partial (x_{i_1}, \dots, i_p)}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})} du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_p}
\end{aligned}$$

$$\omega = \sum P_i dx_i \quad \gamma^*(\omega) = \sum_{i=1}^n P_i(\gamma(t)) \cdot g' amma_i(t) dt = \langle P(\gamma(t), g' amma(t)) \rangle dt$$

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \quad \Phi : (u,v) \rightarrow (x,y,z)$$

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\omega) &= P(\Phi(u,v)) \cdot \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + Q(\Phi(u,v)) \cdot \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u + x_v \end{vmatrix} + R(\Phi(u,v)) \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ P'hi_u & P'hi_v & \Phi'_v \end{vmatrix} = (V \circ \Phi, \Phi'_u, \Phi'_v)
\end{aligned}$$

**Определение 30** (Интеграл от дифференциальной формы). 1. Если  $\omega \in \Omega_{n,n}(O)$ ,  $E \in \mathcal{A}_n$ ,

$$E \subseteq O. \omega = f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\text{Тогда } \int_E \omega = \int_E f d\lambda_n = \int_E f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n.$$

2.  $\Phi$  – регулярное отображение,  $U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow O \subseteq \mathbb{R}^n$   $E \subseteq \Phi(U)$   $\Phi^{-1}(E) \subseteq \mathcal{A}_k$

$$\omega \in \Omega_{k,n}$$

Если  $M$  –  $k$ -мерное ориентируемое многообразие

$E$  – “малое” множество (т.е. существует стандартная параметризация  $\Phi$ , которая положительно ориентирует)

$\Phi : U \rightarrow M$  И  $E \subseteq \Phi(U)$ . Тогда применима формула:

$$\int_{\substack{E \\ \text{вдоль } \Phi}} = \int_{\Phi^{-1}(E)} \Phi_*(\omega).$$

**Замечание** (Факт).  $\int_E \omega$  не зависит от выбора положительной ориентирующей параметризации.

**Замечание.**  $E$  называется измеримым в  $M \iff E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$   $E_j$  – малые измеримые

$$E = \coprod_{j=1}^{\infty} E_j \implies \int_E \omega = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} \omega \text{ – поверхностный интеграл второго рода}$$

Частные случаи:

1.  $p = k = 1$   $\Phi = \gamma$  – простой кусочно-гладкий путь (замкнутый) с заданным направлением обхода (с ориентацией)

$$\omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$$

$$\begin{aligned} \int_E \omega &= \int_{\langle c, d \rangle} \langle P(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \text{ – криволинейный интеграл} \\ &= \int_{\langle c, d \rangle} \langle P(\gamma(t)), \tau \rangle \|\gamma'\| dt \\ &= \int_{\langle c, d \rangle} \langle P(\gamma(t)), \tau \rangle ds \text{ – криволинейный интеграл 1-го рода} \end{aligned}$$

2.  $p = k = 2$   $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

$$V = (P, Q, R)$$

$$\begin{aligned} \int_E \omega &= \int_E Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \\ &= \int_{\Phi^{-1}(E)} \Phi_*(\omega) \\ &= \iint_{\Phi^{-1}(E)} \underbrace{\begin{pmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ \Phi'_u & & \\ \Phi'_v & & \end{pmatrix}}_{\langle V \circ \Phi, n \rangle \|\Phi'_u \times \Phi'_v\|} dudv \\ &= \iint_{\Phi^{-1}(E)} \langle V \circ \Phi, n \rangle \|\Phi'_u \times \Phi'_v\| dudv \text{ – двойной интеграл} \\ &= \iint_E \langle V, n \rangle d\mu_M \text{ – поверхностный интеграл первого рода} \end{aligned}$$

$$E = \Phi(U) \quad n = \pm \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{\|\Phi'_u \times \Phi'_v\|}$$

**Пример.**  $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$

$$\begin{aligned} \int_{S_{\text{вн}}} &= \int_S \langle (x, y, z), \frac{(x, y, z)}{R} d\mu_S = R \cdot \int_S d\mu_S = \left| \begin{array}{l} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ d\mu_S = \sqrt{1 + z'_x + z'_y} dx dy \end{array} \right| = 2R \int_{\{x^2 + y^2 \leq R^2\}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ &= 2R^2 \int_{\pi}^{\pi} d\phi \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 2R^2 \cdot 2\pi (\sqrt{R^2 - r^2}) \Big|_{r=R}^{r=0}. \end{aligned}$$

**Замечание.** Площадь сферы  $S^2(R) = 4R^2\pi$ .

## 12 Общая формула Стокса

**Теорема 18.** ориентируемое компактное  $M \subseteq \mathbb{M}_{n,k}$ . Ориентация  $\partial M$  согласована с ориентацией  $M$ ,  $\omega \in \Omega_{k-1}^{(1)}(O), M \subseteq O$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

**Замечание** (Наводящие соображения).  $k = 1 \quad \omega = f$

$\gamma : [a, b] \rightarrow M$  — биекция

$$\begin{aligned} \int_M df &= \int_{\gamma^{-1}(M)} \gamma_*(df) \\ &= \int_{[a,b] d\gamma_*(f)} = \gamma_*(f) \Big|_a^b \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

$\partial M = a, b$ , интеграл будет разностью произведений знаков и значений функции (− для входа, + для выхода)

**Теорема 19.**

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

$M$  — компактное (гладкое  $C^2$ ),  $M \in \mathbb{M}_{q,n}^{(2)}$  — многообразие с краем  $\partial M$ , ориентируемое, ориентации на  $M$  и  $\partial M$  согласованы,  $\omega \in \Omega_{q-1,n}^{(1)}$

**Замечание.**  $n = 2, q = 2$

$$\omega = Pdx + Qdy \quad P = P(x, y), \quad Q = Q(x, y)$$

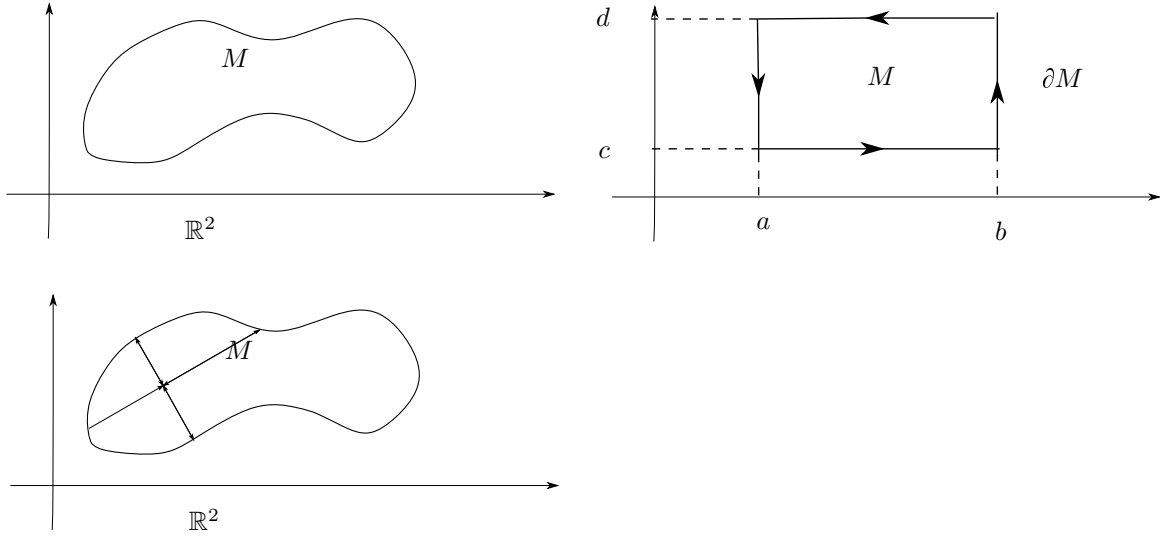


Рис. 4: stocks22

$$\begin{aligned}
 d\omega &= P'_y dy \wedge dx + Q'_x dx \wedge dy = (Q'_x - P'_y) dx \wedge dy \\
 \int_M d\omega &= \iint_{[a,b] \times [c,d]} Q'_x - P'_y dx dy \\
 &= \int_c^d \int_a^b Q'_x(x, y) dx dy - \int_a^b dx \left( \int_c^d P'_y dy \right) \\
 &= \int_c^d Q(b, y) - Q(a, y) dy - \int_a^b P(x, d) - P(x, c) dx \\
 \int_{\partial M} &= \int_{I_1, I_2, I_3, I_4} P dx + Q dy \\
 &= \left( \int_{I_1} + \int_{I_3} \right) P dx + \left( \int_{I_2} + \int_{I_4} \right) Q dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial M} \omega &= \sum \int_{\partial M_j} \omega \\
 &= \sum \int_{M_j} d\omega \\
 &= \int_M d\omega
 \end{aligned}$$

**Замечание.** При  $n = 2k = 2q = 1$  формула Стокса называется формулой Грина.  $O$  – кусочно-гладкая область в  $\mathbb{R}^2$ ,  $\partial O$  – граница, ориентируемая положительно.

$$\int_{\partial P} P dx + Q dy = \iint_O Q'_x - P'_y dx dy.$$

**Замечание.**  $n = 3k = 2q = k - 1 = 1$

$$\omega = Pdx + Qdy + Rsz$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{\Phi^{-1}(\partial M)} \Phi_*(M) \\ &= \int_{\partial \Pi} \Phi_*(\omega) \\ &= \int_{\Pi} \underbrace{d(\Phi_*(\omega))}_{\Phi_*(d\omega)} = \int_{\Phi(\Pi)=M} d\omega \\ \Phi : \Pi &\rightarrow (M \cup \partial M) \\ \int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_{M_n} \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dz & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \int_M \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$n$  – выбранная сторона, относительно которой обход  $\partial M$  против часовой стрелки.

$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz = \int_M \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds.$$

– классическая формула Стокса.  $M$  – 2-мерная поверхность с краем в  $\mathbb{R}^3$ , ориентируемая,  $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , обход края – стандартный (против часовой стрелки при наблюдении из  $n$ )

**Пример.**

$$\int_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz.$$

$C$  – кривая  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx \\ x^2 + y^2 = 2rx, r < R \\ z \geq 0 \end{cases}$ , обход кривой положительный относительно внешней стороны,

“меньшей” части сферы, высекаемой цилиндром.

$$n(x, y, z) = \frac{(x-R, y, z)}{R}$$

$$\begin{aligned} \int_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz &= \frac{1}{R} \iint \begin{vmatrix} x-R & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} ds \\ &= \frac{2}{R} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2rx} \frac{R}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} ((x-R)(y-z) + y(z-x) + z(x-y)) dx dy \\ &= -2R \iint_{x^2 + y^2 \leq 2rx} \frac{y}{\sqrt{\dots}} - 1 dx dy \\ &= 2R\pi r^2 \end{aligned}$$

слагаемое с корнем обросилось, потому что это нечётная функция по  $y$ , а круг обладает симметрией относительно оси  $Ox$

**Замечание.**  $n = 3k = 3q = k - 1 = 2$

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

$$d\omega = dic(P, Q, R) dx \wedge dy \wedge dz \quad dic = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\int_{\partial M} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint_M \operatorname{div}(P, Q, R) dx dy dz.$$

$M$  – трёхмерное гладкое многообразие.

$$\int_{\partial M} \langle (P, Q, R), n \rangle ds$$

**Пример.**  $\iint x^2 \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma ds$

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

$$n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Формула ГО не применяется напрямую, т.к. поверхность незамкнута.

$$\begin{aligned} \int_S f + \int_{S_+} f &= \iiint \operatorname{div}(P, Q, R) dx dy dz \\ &= 2 \iiint z \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h z dz \\ &= 2 \cdot 2\pi \int_0^h z dz \int_0^z r dr \\ &= 2 \cdot \frac{\pi h^4}{4} = \frac{\pi h^4}{2} \\ \int_{S_+} f &= \iint_{S_1} \langle (P, Q, R), (0, 0, 1) \rangle dS - 1 \\ &= \iint h^2 dS_1 = h^2 \pi h^2 = \pi h^4 \end{aligned}$$

$$I = J - I_1 = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}$$

**Замечание** (Случай комплексной переменной).  $f : O \rightarrow \mathbb{C}$  называется  $\mathbb{C}$ -дифференцируемой в точке  $a \in O$ , если  $d_a f - \mathbb{C}$ -линеен.  $f(a+h) - f(a) = l(h) + o(h)$   $l$  – линейное отображение,  $o(h) = \alpha(h) \cdot h$   $\alpha(h) \rightarrow 0, h \rightarrow 0$

линейное отображение – можно выносить комплексные множители  $L(cz) = cL(z)$

**Теорема 20** (теорема об условиях равносильных  $\mathbb{C}$ -дифференцируемости).  $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ .  $\square$   $f$  – дифференцируемо в вещественном смысле в точке  $a \in O$  Тогда следующее равносильно:

1.  $f$  –  $\mathbb{C}$ -дифференцируема

$$2. \exists f'(a) = \lim_{z \rightarrow 0, z \in \mathbb{C}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

$$3. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$$

$$4. f = u + iv \quad u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$$

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \quad \text{в точке } a \quad f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ -u'_y & u'_x \end{pmatrix}$$



**Замечание.**

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

**Замечание.**  $g$  —  $\mathbb{R}$ -дифференцируемо в точке  $a \implies \exists! A, B \in \mathbb{C}$   
 $d_a g = Adz + Bd\bar{z} \quad A = \frac{\partial f}{\partial z}(a) \quad B = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)$

**Замечание.**

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

$\gamma$  — простой кусочно-гладкий путь  $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ ,  $f$  измерима на  $\Gamma = \gamma([a, b])$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) (\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)) dt \\ &= \int_{[a,b]} (u(\dots)\gamma_1' - v\gamma_2') + i(v\gamma_1' + u\gamma_2') dt \\ &= \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy \\ &= \iint_O (-v'_x - u'_y) + i(u'_x - v'_y)\end{aligned}$$

**Теорема 21** (Коши).  $\square f$  —  $\mathbb{C}$ -дифференцируема в кусочно-гладкой области  $O$  вплоть до границы. Тогда

$$\int_{\partial O} f(z) dz = 0.$$

**Пример.**  $f(z) = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}f'(z)(a) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(a+z) - f(a)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+z} - \frac{1}{a}}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{1}{a(a+z)} = -\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \quad \forall z \neq 0$$

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R} \frac{dz}{z} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{it} dt}{Re^{ei}} \\ &= i2\pi \neq 0\end{aligned}$$

При этом если взять другой контур, который не будет содержать нуля внутри, то интеграл по контуру будет равен нулю.

$Ln$  — многозначный логарифм  $E \subseteq C \rightarrow 2^{\mathbb{C}} \quad z \rightarrow \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$

**Замечание.** Если в области, по контуру которой берётся интеграл, есть конечное число особых точек, можно окружить эти точки достаточно маленькими окрестностями и посмотреть на интеграл по итоговому контуру

**Теорема 22** (теорема Коши о вычетах).

$$\int_C f(z)dz = \sum_{a \in A} \oint_{C(a)} f(z)dz.$$

$C(a)$  – набор окружностей  $\{B(a)\}$ , которые не пересекаются  
вычет функции в точке  $a$  называется  $\text{res}_a f = \oint_{C(a)} f(z)dz$

**Замечание** (частные случаи формула Стокса).

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

1. Если  $\omega$  замкнута в  $O \supset M \implies \int_{\partial M} \omega = 0$
2. Если  $\partial M = \emptyset$ , то  $\int_M d\omega = 0$

**Определение 31.**  $\omega$  называется замкнутой в области  $O$ , если  $d\omega = 0$  в любой  $p \in O$

**Определение 32.**  $\omega$  называется точной в области  $O$ , если существует первообразная для  $\omega$  в области  $O$

$\omega \in \Omega_{q,n}(O)$ , первообразная  $\tilde{\omega} \in Q_{q-1,n}(O)$

**Замечание.**  $\omega$  – Точная, то  $\omega$  – замкнута

$$\omega = d\tilde{\omega} \quad d\omega = dd\tilde{\omega} = 0$$

**Утверждение 22.1.** Если  $\omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$  точна в области  $O \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\omega = dF \implies \forall \gamma : [a, b] \rightarrow O$$

$$\int_{\gamma} \omega = F|_A^B.$$

, где  $A = \gamma(a), B = \gamma(b)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n P_i dx_i &= \int_{[a,b]} \sum_{i=1}^n P_i \circ \gamma(t) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_{[a,b]} \langle P \circ \gamma, \gamma' \rangle \\ &= \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= F(B) - F(A) \\ dF(\gamma'(t)) &= d\left(\overbrace{F \circ \gamma(t)}^{\Phi}\right) \end{aligned}$$

Выводы:

1. Если  $\omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$  точна в  $O$ , то  $\int_{\gamma} \omega$  не зависит от пути  $\gamma$  с носителем в  $O$

2.  $-\|-\gamma$  — замкнута, то  $\int_{\gamma} \omega = 0$

**Пример.**  $\int_{\gamma} \underbrace{\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}}_{\omega} \quad P = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$

$\omega$  — локально точна, значит замкнута всюду в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{xdy - ydx}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \\ &= -d\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{\left(\frac{x}{y} + 1\right)} \\ &= -d\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

$$\omega = d\left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

Так мы предъявили первообразные на полуплоскостях.

$$\int_{\|(x,y)\|=R} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{R^2} d\varphi = 2\pi \neq 0.$$

Значит форма не точна (потому что в противном случае это был бы интеграл по замкнутому контуру, локально точная в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , но не точная).

$$\operatorname{Hol}(O) = \{f : \forall z \in O \exists f'(z)\}$$

**Теорема 23** (Коши).  $f \in \operatorname{Hol}(\overline{O})$ ,  $O$  — кусочно-гладкая область (граница  $O$  — кочкный набор кусочно гладких непересекающихся простых замкнутых контуров).

$\partial O$  — стандартно ориентированная граница.

**Теорема 24** (“Теорема Коши о вычетах”, Теорема 2).  $f \in \operatorname{Hol}(\overline{O} \setminus A)$   $A$  — конечное множество.  $O$  — кусочно-гладкая область (как в предыдущей теореме).  $A \subseteq O$

$$\int_{\partial O} f(z) dz = \sum_{a \in A} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz.$$

$r$  : замкнутые круги  $\{\overline{B}(a)\}$  попарно не пересекающиеся и содержащиеся в  $O$

**Утверждение 24.1** (Интегральная формула Коши). Пусть  $f(z) \in \operatorname{Hol}(\overline{O})$ ,  $O$  — кусочно-гладкая форму в  $\mathbb{C}$ ,  $a \in O$ .

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial O} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

*Доказательство.*  $\frac{f(z)}{z-a} \in \operatorname{Hol}(\overline{O} \setminus \{a\})$

$$A = \{a\} \implies \int_{\partial O} \frac{f(z)}{z-a} = \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{z-a}, \text{ где } \rho \in (0, \rho_0)$$

$f$  дифференцируема в точке  $a$ ,  $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \alpha(z)(z-a)$ , где  $\alpha(z) \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow a$ .

$$= \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(a)}{z-a} dz + \int_{|z-a|=\rho} f'(a) + \alpha(z) dz.$$

Т.к.  $\alpha(z) \rightarrow 0 \quad \exists M : |f'(\alpha) + \alpha(z)| \leq M, \forall z \in B_{\rho_0}(a)$ .

$$\begin{aligned} r(t) &= a + \rho e^{it} \\ r'(t) &= i\rho = i\rho e^{it} \\ |\rho'(t)| &= \rho \end{aligned}$$

$$f(a) \cdot \int_{|z-a|=0} \frac{dz}{z-a} = 1\pi i.$$

■

**Теорема 25** (О разложении в ряд Тейлора).  $\square a \in \mathbb{C}, R > 0, f \in \text{Hol}(B_R(a))$

Тогда существует единственный набор  $(C_k)_{k=0}^{+\infty}$ :

$$\forall z \in B_R(a) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$$

$$\square z \in B_R(a) \quad r = |z-a| \quad \square \rho \in (r, R)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta-z} &= \frac{1}{(\zeta-a) - (z-a)} \\ &= \frac{1}{\zeta-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} W = \frac{z-a}{\zeta-a} \\ \frac{1}{1-W} = \sum_{k=0}^{\infty} W^k \end{array} \right| \quad |W| = \frac{r}{\rho} < 1$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \underbrace{\frac{f(\zeta)}{???}}_{\text{огр}} \underbrace{\zeta-a \sum_{k=0}^{\infty} W^k}_{\text{сх. равн. на } \xi: |z-a|=\rho} \quad - \text{сходится равномерно}$$

$$\oint_{\zeta-z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \int s.$$

**Следствие 25.1.** Голоморфность = комплексная аналитичность.

**Следствие 25.2.** Неравенства Коши для тейлоровских коэффициентов.

Пусть  $f \in \text{Hol}(B_R(a)), a \in \mathbb{C}, R > 0$ .

$$\text{Для } r \in (0, R) \quad M_r = \sup_{\{z : |z-a|=r\}} |f(z)| \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad |c_k| \leq \frac{M_r}{r^k} \cdot 2\pi.$$

$$\text{Было показано, что } c_k = \int_{|\zeta-a|=\rho=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta \implies$$

$$|c_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a + \rho e^{it})}{\rho^{k+1} e^{i(k+1)t}} i\rho e^{it} dt \right| \leq \frac{1}{1\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M_\rho}{\rho^{k+1}} dt = \frac{M_\rho}{\rho^k}.$$

**Определение 33.** Функция, аналитическая во всей комплексной плоскости, называется целой.

**Пример.**  $e^z, P(z), \sin z, \cos z, \text{ch } z, \text{sh } z$

**Теорема 26** (Лиувилли). Любая целая ограниченная функция является константной

*Доказательство.*  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$  — сходится всюду, где функция голоморфна, т.е. в  $\mathbb{C}$

По неравенству Коши  $|C_k| \leq \frac{M_r}{r^k}$ , где  $M_r = \max_{|t|=r} |f(t)| \leq C$ , если  $C$  ограничивает  $|f|$

Получается, что  $\forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall r > 0 \quad C_k \leq \frac{C}{r^k}$

Устремляя  $r$  к бесконечности для  $k \in \mathbb{N}$ , получаем, что  $|C_k| = 0$

А тогда  $f(z) = C_0$  ■

**Следствие 26.1.** Синус целая функции, не константа. Следовательно неограничен.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{sh} it = \frac{e^{-t} - e^t}{2i}$$

$$|\sin z| = |\operatorname{sh} it|$$

**Определение 34** (Ряд Лорана).

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k (z - a)^k := \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} (z - a)^{-k}.$$

**Теорема 27** (О сумме ряда Лорана).  $\square R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}} \quad r = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_{-k}|}$

Тогда ряд Лорана  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k (z - a)^k$  сходится в кольце  $R_{r,R}(a) = \{z : r < |z - a| < R\}$

*Доказательство.* Ряд с нетрицательными коэффициентами сходится в круге  $B_R(a)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} (z - a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} w^k \text{ сходится относительно } w \text{ в } B_{\frac{1}{r}}(0) \quad w = \frac{1}{z-a}$$

$$|w| < \frac{1}{r} \iff \frac{1}{|z-a|} < r \iff |z-a| > r$$
 ■

**Утверждение 27.1.** Пусть  $a \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq r < R \leq +\infty$ .  $f \in \operatorname{Hol}(\mathcal{R}_{r,R}(a))$ . Тогда  $\exists$  единственный  $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $\forall z \in \mathcal{R}_{r,R}(a)$  верно  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k (z - a)^k$ .

Пусть  $z \in \mathcal{R}_{r,R}(a)$ , пусть  $r_1, R_1 : r < r_1 < |z - a| < R_1 < R$ .

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(u)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{|z-a|=R_1} -|| - + \oint_{|z-a|=r_1} -|| - \right) \\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{-(z - a)} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}}. \end{aligned}$$

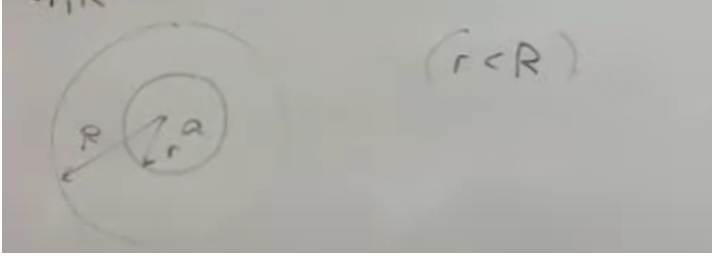
$$\text{Для любого } k \in \mathbb{Z} \quad C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz$$

**Пример.**  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \quad \mathbb{C} \setminus \{0\} = R_{0,+\infty}(0)$  — функция Жуковского

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z} \left( \cos z \cdot \frac{z}{\sin z} \right)$$

$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$  — аналитическая. Значит обратная к ней аналитическая, значит  $\cos z \cdot \frac{z}{\sin z}$  — аналитическая.

$$\mathcal{R}_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}.$$



$a \in \mathbb{C}; f \in \text{Hol}(\mathcal{R}_{r,R}(a))$ , где  $-\infty \leq r < R \leq +\infty \implies \exists$  единственный  $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ :

$$\forall z \in \mathcal{R}_{r,R}(a), \quad f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - a)^k.$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}, \quad \rho \in (r, R).$$

**Определение 35.**  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  называют изолированной особой точкой  $f(z)$ , если  $\exists$  окрестность  $U(a)$ :

$$f(z) \in \text{Hol}(U(a)).$$

**Пример.** 1.  $f(z) = z, \quad A = \{\infty\}$ .

2.  $f(z) = \bar{z}, \quad A = \emptyset$  (все точки дифференцируемы).

3.  $f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad A = \{0, \infty\}$ .

**Определение 36.** Пусть  $a \in \overline{\mathbb{C}}$  — и.о.т.  $f(z)$ . Тогда  $a$  называется

- Полюсом  $\iff \exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ .
- Существенно особой  $\iff \nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ .

**Пример.** 1.  $f(z) = z, \quad A = \{\infty\}, \quad \infty$  — полюс.

2.  $f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad A = \{0, \infty\}, \quad 0$  и  $\infty$  — полюсы.

3.  $f(z) = e^z, \quad A = \{\infty\}, \quad \infty$  — существенно особая точка.

**Утверждение 27.2.** Пусть  $a \in \mathbb{C}, \quad a$  — и.о.т.  $f(z)$ .  $\exists R : f \in \text{Hol}(\dot{B}_R(a))$ .

$$\text{Пусть } f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k}_{\text{регулярная часть}} + \underbrace{\sum_{k \in -\mathbb{N}} c_k (z-a)^k}_{\text{главная часть лорановского разложения } f(z) \text{ при } z \rightarrow a} \quad \forall z \in \dot{B}_R(a).$$

**Пример.**  $f(z) = \frac{1}{1-z}$ .

В точке  $z = 0$ . Так как  $f(z) \in \text{Hol}(B_1(0)) \implies f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \forall z \in z \in B_1(0)$ . Регулярная часть есть, а главная отсутствует.

В точке  $z = 1$ .  $f(z) = (-1)(z-1)^{-1}$  — главная часть.

$z$  в окрестности  $\infty$   $\frac{1}{1-z} = \left( \frac{-1}{z} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \left( -1 \frac{1}{z} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z} \right)^k$ . Все регулярная часть, главная отсутствует.

**Утверждение 27.3** (Характеристика изолированных особых точек в терминах Лорановского разложения). Пусть  $a \in \overline{\mathbb{C}}$ ,  $a$  — и.о.т.  $f(z)$ . Тогда

1.  $a$  — устранимая  $\iff \exists$  окрестность  $U(a) : f|_{U(a)}$  — ограниченная  $\iff$  главная часть лорановского разложения отсутствует.
2.  $a$  — полюс  $\iff$  главная часть лорановского разложения  $f(z)$  в окрестности  $a$  содержит конечное число членов.
3.  $a$  — существенно устранимая  $\iff$  главная часть лорановского разложения  $f(z)$  содержит бесконечное число слагаемых.

Неравенство Коши :  $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(z-a)^k, \quad a \in \mathbb{C}. M_r = \sup_{z: |z-a|=r} |f|, \quad |c_k| \leq \frac{M_r}{r^k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

*Доказательство.* ... ■

**Замечание.** Если  $a \in \mathbb{C}$  — и.о.т., то  $\exists A : \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a \\ A. & \end{cases} \in \text{Hol}(U(A)).$

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$  в проколотой окрестности  $a$ .

Проще говоря, можно исправить функцию в плохих точках и она станет хорошей.

**Пример.**  $f(z) = \frac{\sin z}{z} \in \text{Hol}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$  — сходится всюду в  $\mathbb{C}$ . Значит это продолжение функции  $\frac{\sin z}{z}$

**Замечание** (Отступление).

**Лемма 27.1** (О кратности нуля).  $f(z) \in \text{Hol}(B_k(a)), a \in \mathbb{C}, R > 0$

$f(a) = 0$  Тогда  $\exists N \in \mathbb{N} : f(z) = (z-a)^N \cdot g(z)$ , где  $g(z) \in \text{Hol}(B_k(a)), g(a) \neq 0 \implies f(z) \sim A \cdot (z-a)^N$ , где  $A = g(a)$

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$  в окрестности точки  $a, c_0 = 0$

**Замечание.** Если точка  $a \in \mathbb{C}$  — полюс, то  $\Re g(z) = \frac{1}{f(z)} \rightarrow 0, z \rightarrow a, a$  — устранимая для  $g(z) \implies g(z) = (z-a)^N \cdot \tilde{g}(z) \quad \tilde{g}(a) \neq 0, \tilde{g} \in \text{Hol}(\text{окрестности т. } a)$

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{g} = \frac{1}{(z-a)^N} \frac{1}{\tilde{g}(z)} \\ &= \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k \right) \\ &= \frac{b_0}{(z-a)^N} + \frac{b_1}{(z-a)^{N-1}} + \dots \end{aligned}$$

**Определение 37.**  $\square a \in \mathbb{C}$  — полюс для  $f(z), N \in \mathbb{N}$

$a$  — полюс порядка  $N$  для  $f(z) \iff f(z) \sim \frac{C}{(z-a)^N} \left( \iff f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^N} \right.$  где  $g(z)$  голоморфна в некоторой окрестности

Для бесконечных точек рассматриваем  $g(w) = \frac{1}{f(w)}$

**Замечание.** Любой полюс обладает порядком.

**Пример.** 1.  $f(z) = \frac{1}{2} \cdot \left( z + \frac{1}{z} \right)$ . Полюс 0 имеет порядок 1, полюс  $\infty$  имеет порядок 1. Полюсы с порядком 1 называют **простыми**.

2.  $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2} = \frac{-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z^2} = -\frac{1}{2} + \dots$  0 – простой полюс (порядок 1),  $\infty$  – существенно особая.

3.  $f(z) = \operatorname{tg} z = \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \sim \frac{\sin z}{\frac{\pi}{2} - z} \quad z = \frac{\pi}{2} \implies$  эти точки простые особые.  $\infty$  – не изолированная особая.

**Замечание.** Почему может быть полезно знать какие особенности у функции в конкретной точке?

**Определение 38.**  $\square a \in \tilde{\mathbb{C}}, a$  – изолированная особая точка  $f(z)$

$$\operatorname{res}_a f = \begin{cases} c_{-1} & , \text{коэффициент в Лорановском разложении } f(z) \text{ в окрестности точки } a \in \mathbb{C} \\ -c_{-1} & , \text{коэффициент в Лорановском разложении } f(z) \text{ в окрестности } \infty, a = \infty \end{cases}.$$

**Пример.** 1.  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \quad \operatorname{res}_0 f = \frac{1}{2}, \operatorname{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2}$

$$2. f(z) = \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1}$$

$$\operatorname{res}_1 f = \operatorname{res}_1 \frac{\frac{1}{2}}{z-1} = \frac{1}{2} \quad \operatorname{res}_{-1} f = -\frac{1}{2} \quad \operatorname{res}_{\infty} f = 0, \text{ т.к. } f - \text{чётная}$$

**Замечание.** Чем хороши вычеты?

$c_k$  – коэффициенты лорановского разложения в окрестности точки  $a, f \in \operatorname{Hol}(B_R^\circ(a))$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \quad \rho \in (0, R).$$

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

**Теорема 28** (Коши о вычетах). Пусть  $O$  – кусочно-гладкая область в  $\tilde{\mathbb{C}}$   
 $A$  – конечное множество,  $A \subseteq O, f \in \operatorname{Hol}(\tilde{O} \setminus A)$  Тогда:

$$\int_{\partial O} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{res}_a f = 2\pi i \sum_{z \in O} \operatorname{res}_z f.$$

**Теорема 29** (о полной сумме вычетов).  $\square A \ni \infty, A \subseteq \tilde{\mathbb{C}}, A$  – конечно  
 $\square f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C} \setminus A)$  Тогда:

$$\sum_{a \in A} \operatorname{res}_a f = \sum_{z \in \tilde{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_z f = 0.$$

*Доказательство.*  $\square A_0 = A \setminus \{\infty\}$

Т.к.  $A_0$  – конечно, то  $\exists B_R(0) \supset A_0$

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=R} f(z) dz &= \left( \sum_{a \in A_0} \operatorname{res}_a f \right) \cdot 2\pi i \\ &= (-\operatorname{res}_{\infty} f) \cdot 2\pi i \end{aligned}$$

■



Приёмы вычисления вычетов ( $a$  – изолированная особая точка  $f(z)$ ):

1.  $a$  – устарнимая особая точка.

$$(a) \quad a \in \mathbb{C} \implies \operatorname{res}_a f = 0$$

$$(b) \quad a = \infty \quad f(z) = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = C_0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)) = \operatorname{res}_{\infty} f$$

2.  $a \in \mathbb{C}$  – полюс. Тогда:  $f(z) = \frac{C_{-N}}{(z-a)^N} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z-a)} + C_0 + C_1(z-a) + \dots$

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(N+1)!} (z_0 a^N f(z))_{z=a}^{(N-1)}$$

$$\text{Если полюс простой, то } \operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$$

Частный случай:  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ,  $\varphi, \psi \in \operatorname{Hol}$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ ,  $\psi(a) = 0$ ,  $\psi'(a) \neq 0$

$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

$$\operatorname{res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

3. Теорема о полной сумме вычетов.

4. Если  $f(z)$  чётная функция, то  $\operatorname{res}_a f = -\operatorname{res}_{-a} f$ , в частности  $\operatorname{res}_0 = 0 = \operatorname{res}_{\infty}$

5. Если  $f(z)$  нечётная, то  $\operatorname{res}_a f = \operatorname{res}_{-a} f$

**Пример.** 1.  $\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}$

$$z^4 = -1$$

$$z_1, z_4 - \text{простые полюсы. } \operatorname{res}_{z_1} f = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{z_1}{4z_1^4} = -\frac{z_1}{4}$$

$$\operatorname{res}_{z_2} f = -\frac{z_2}{4}$$

$$\begin{aligned} \int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1} &= 2\pi i (\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f) \\ &= -\frac{\pi i}{2} (z_1 + z_4) \\ &= -\frac{\pi i}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Приложение теоремы о вычетах к вычислению определённых и несобственных интегралов.

$$1. \quad \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

$z = e^{i\varphi}$