Конспекты по математической логике

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев, Константин Бац

2022 год, семестр 4

1 Введение

Логика – довольно старая наука, но наш предмет довольно молодой В какой-то момент логики как дисциплиниы, которая учит просто правильно рассуждать, стало нехватать. Появилась теория множеств. Общего здравого смысла не хватает, нужен строгий математичесий язык. Это рубеж 19-20 веков.

У нас теория множеств не будет фокусом, как это могло бы быть на мат. факультете.

Теория множеств, когда она была впервые сформулирована, была противоречива (как матан, сформулированный Ньютоном). Чтобы уверенно и эффективно заниматься матаном, нужно суметь его формализовать.

<Парадокс Рассела / парадокс брадобрея> Мы приписываем элементу-человеку свойство, которое невыполнимо. Обьекта, выходит, не существует. Мы смогли очень быстро определить противоречие в этом определении. Но, может быть, мы не смогли его определить в других наших определениях? (конструкциях вещественной прямой, и т.д и т.д)

Программа Гильберта.

1. Формализуем математику! Сформулируем теорию на языке (не на русском или английском), который не будет допускать парадоксов,
2. ... и на котором можно будует доказать непротиворечивость.

В 1930 году становится понятно, что сколько-нибудь сильная (= в ней можно построить формальную арифметику) теория не может быть доказана непротиворечивой.

Возможно, сама наша логика неправильная? Эта идея будет нам полезна, и к ней мы ещё вернемся.

Возможно, что это просто свойство мира, и мы хотим невозможного.

Из этих рассуждений выросло большое множество хороших идей, которые оказались полезны в других местах. Матлогика служит широкому кругу нужд.

Мы можем доказывать, что программа работае корректно. Именно доказывать, а не проверять тестами!

Мы можем изучать свойства самих языков. Изоморфизм Карри-Говарда— доказательство это программа, утверждения это тип. Можно изучать языки программирования и можно развернуть изоморфизм: изучать математкиу как язык программирования.

Функциональные языки: окамль + хаскель. Ознакомление с этими языками преставляет собой способ ознакомиться с предметом немного с другой стороны.

2 Исчисление высказываний

Мы говоирм на двух языках: на предметном языке и метаязыке. Предметный язык – это то, что изучается, а метаязык – это язык, НА котором это изучается.

На уроках английского предметным является сам английский, а метаязыком может быть русский. Метаязык – это язык исследователя, а предметный язык – это язык исследоваемого. Что такое язык вообще? Хороший вопрос.

Высказывание — это одно из двух:

1. Большая латниская буква начала алфавита, возможно с индексами и штрихами — это пропозициональные переменные.
2. Выражение вида $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, $(\neg\alpha)$.

В определении выше альфа и бета это метапеременные— места, куда можно подставить высказывание.

1. α, β, γ — метапеременные для всех высказываний.

2. X, Y, Z — метапеременные для пропозициональных переменных.

Метапеременные являются частью языка исследователя.

В формализации мы останавливаемся до места, в котором мы можем быть уверены, что сможем написать программу, которая всё проверяет.

Сокращение записи, приоритет операций: сначала $\neg$, потом &, потом $\vee$, потом $\rightarrow$. Если скобки опущены, мы восстанавливаем их по приоритетам. Выражение без скобок является частью метаязыка, и становится частью предметного, когда мы восстанавливаем их. Скобки последовательных импликаций расставляются по правилу правой ассоциативности — справа налево.

2.1 Теория моделей

У нас есть истинные значения $\{T, F\}$ в классической логике. И есть оценка высказываний $[\![\alpha]\!]$. Например $[\![A \vee \neg A]\!]$ истинно. Всё, что касается истинности высказываний, касается теории моделей.

Определение 2.1.1. Оценка — это функция, сопоставляющая высказыванию его истинное (истинностное) значение.

2.2 Теория доказательств

Определение 2.2.1. Аксиомы — это список высказываний. Схема аксиомы — высказывание вместе с метопеременными; при любой подстановке высказываний вместо метапеременной получим аксиому.

Определение 2.2.2. Доказательство (вывод) — последовательность высказываний $\gamma_1, \gamma_2 \dots$ где γ_i— любая аксиома, либо существуют $j, k < i$ такие что $\gamma_j \equiv (\gamma_k \rightarrow \gamma_i)$. (знак $\equiv$ здесь сокращение для "имеет вид"). Это правило ”перехода по следствию” или Modus ponens.

Определим следующие 10 схем аксиом для того исчисления высказываний, которое мы рассматриваем.

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ — добавляет импликацию
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ — удаляет импликацию
3. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ — удаление конъюнкции
4. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$ — удаление конъюнкции
5. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$ — внесение конъюнкции
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ — внесение дизъюнкции
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$ — внесение дизъюнкции
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)$
10. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ — очень спорная штука.

Пример. Доказательство $\vdash A \rightarrow A$.

1. $A \to (A \to A) \to A$ (схема 1)
2. $A \to A \to A$ (схема 1)
3. $(\underbrace{A}_{\alpha} \to \underbrace{A \to A}_{\beta}) \to (\underbrace{A}_{\alpha} \to \underbrace{(A \to A)}_{\beta} \to \underbrace{A}_{\gamma}) \to (\underbrace{A}_{\alpha} \to \underbrace{A}_{\gamma})$ (схема 2)
4. $(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$ (m.p 2, 3)
5. $A \to A$ (m.p 1, 4)

2.3 Теорема о дедукции

Определение 2.3.1. (Метаметаопределение). Будем большими греческими буквами $\Gamma, \Delta, \Sigma \dots$ — списки формул, неупорядоченные.

Определение 2.3.2. Вывод из гипотез: $\Gamma \vdash \alpha$.
То есть существует $\delta_1, \dots, \delta_n$, $\delta_n \equiv \alpha$, где $delta_i$ или схема аксиом, или m.p. из j и k и $j, k < i$.

Теорема 2.3.1. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$.

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n \equiv \alpha \to \beta$ выводит $\alpha \to \beta$. Дополним этот вывод двумя до доказательства новыми высказываниями: $\delta_{n+1} \equiv \alpha$ (дано нам в гипотезе), $\gamma_{n+2} \equiv \beta$ (MP шагов n, $n+1$) — это и требовалось.

$\Rightarrow$ Пусть $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Напишем программу, которая построит $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Инвариант, который мы будем поддерживать: всё до $\alpha \to \delta_i$ — док-во. Доказательство индукцией по n.

1. База: $n = 1$ — без комментариев.
2. Если $\delta_1, \dots, \gamma_n$ можно перестроить в доказательство $\alpha \to \gamma_n$, то $\gamma_1 \dots \gamma_{n+1}$ тоже можно перестроить. Разберём случаи:
   (a) δ_i — аксиома или гипотиза из Γ.
   $(i - 0.6)$ δ_i
   $(i - 0.3)$ $\delta_i \to \alpha \to \delta_i$
   (i) $\alpha \to \delta_i$ (m.p из $i - 0.6$ и $i - 0.3$)
   (b) $\delta_i = \alpha$, то есть надо построить $\alpha \to \alpha$
   $(i - 0.8, i - 0.6, i - 0.4, i - 0.2)$ (доказательство $\alpha \to \alpha$)
   (i) $\alpha \to \alpha$
   (c) δ_i получено из δ_j и δ_k ($\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$)
   по индукционному предположению, уже есть строчки вида $\alpha \to \delta_j, \alpha \to \delta_k$
   (j) $\alpha \to \delta_j$
   (k) $\alpha \to (\delta_j \to \delta_i)$
   $(i - 0.6)$ $(\alpha \to \delta_j) \to (\alpha \to \delta_j \to \delta_i) \to (\alpha \to \delta_i)$ (схема 2)
   $(i - 0.3)$ $(\alpha \to \delta_j \to \delta_i) \to (\alpha \to \delta_i)$ (m.p.)
   (i) $(\alpha \to \delta_i)$ (m.p.)

∎

3 Теория моделей

Мы можем докаывать модели или оценивать их. "Мы можем доказать, что мост не развалится или можем выйти и попрыгать на нём."

Определение 3.0.1. $\mathbb{V}$ — истинностное множество.
F — множество высказываний нашего исчисления высказываний.
P — множество пропозициональных переменных.

$$[\![\cdot]\!] : F \to \mathbb{V} \text{ — оценка}$$

Определение 3.0.2. Для задания оценки необходимо задать оценку пропозициональных переменных.

$$[\![\cdot]\!] : P \to \mathbb{V} \quad f_P$$

Тогда:

$$[\![x]\!] = f_p(x)$$

Замечание. Обозначение: значения пропозициональных переменных будем определять в верхнем индексе: $[\![\alpha]\!]^{A=T,B=F\dots}$

Определение 3.0.3. α — общезначна (истинна), если $[\![\alpha]\!] = T$ при любой оценке P.
α — невыполнима (ложна), если $[\![\alpha]\!] = F$ при любой оценке P.
α — выполнима, если $[\![\alpha]\!] = T$ при некоторой f_P.
α — опровержима, если $[\![\alpha]\!] = F$ при некоторой f_P.

Определение 3.0.4. Теория корректна, если доказуемость влечёт общезначимость.
Теория полна, если общезначимость влечёт доказуемость.

Определение 3.0.5. $\Gamma \models \alpha$ означает, что α следует из $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, если $[\![\alpha]\!] = T$ всегда при $[\![\gamma_i]\!] = T$ при всех i.

3.1 Корректность исчисления высказываний

Теорема 3.1.1. Исчисление высказываний корректно. $\vdash \alpha$ влечёт $\models \alpha$.

Доказательство. Индукция по длине доказательства $\delta_1, \dots, \delta_n$.
Разбор случаев:

1. δ_i аксиома $\implies$ построить таблицу истинности, проверить, что все верно.
2. δ_i — м.п. δ_j, $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$ $\implies$ также рассмотрим таблицу истинности.

■

Мы даём доказательство на метаязыке, не пускаясь в отчаянный формализм. Такая строгость нас устраевает.

В матлогике бесмысленно формализовывать русский язык. Она нужна, чтобы дать ответы на сложные вопросы в математике, где здравого смысла недостаточно и нужна формализация.

3.2 Полнота исчисления высказываний

Теорема 3.2.1. Исчисление высказываний полно.

Определение 3.2.1. ${}_{[\beta]}\alpha = \begin{cases} \alpha, & [\![\beta]\!] = T \\ \neg\alpha, & [\![\beta]\!] = F \end{cases}$

Лемма 3.2.1.1. ${}_{[\alpha]}\alpha$,
${}_{[\beta]}\beta \vdash_{[\alpha \star \beta]} \alpha \star \beta$,
${}_{[\alpha]}\alpha \vdash_{[\neg\alpha]} \neg\alpha$

Пример. $[\![\alpha]\!] = T, [\![\beta]\!] = F \implies \alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$.

Лемма 3.2.1.2. Если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma, \Delta \vdash \alpha$.

Лемма 3.2.1.3. Пусть дана α, $X_1, \ldots, X_n$ — её переменные.

$$ {}_{[X_1]}X_1, \ldots {}_{[X_n]}X_n \vdash_{[\alpha]} \alpha $$

Доказательство. Пусть $\widetilde{X} =_{[X_1]} X_i \ldots_{[X_n]} X_n$.
Индукция по длинне формулы α.
База: $\alpha = X_i$.
Переход: есть α, β. По предположению $\widetilde{X} \vdash_{[\alpha]} \alpha \quad \widetilde{X} \vdash_{[\beta]} \beta$.
По леме 1 тогда $\widetilde{X} \vdash_{[\alpha \star \beta]} \alpha \star \beta$. ∎

Лемма 3.2.1.4. Если $\models \alpha$, то $\widetilde{X} \vdash \alpha$. То есть при любых подстановках значнией α будет истинна.

Лемма 3.2.1.5.

$$ \Gamma, Y \vdash \alpha, \quad \Gamma, \neg Y \vdash, \text{ то } \Gamma \vdash \alpha $$

Доказательство было в дз. ∎

Лемма 3.2.1.6. Если $\widetilde{X} \vdash \alpha$ при всех оценках $X_1, \ldots, X_n$, то $\vdash \alpha$.

Доказательство индукцией по n. ∎

Теорема 3.2.2. Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Доказательство. По лемме 4 и лемме 6. ∎

4 Интуиционистская логика

Мы не хотим дурацких коснтрукций вроде парадокса брадобрея. Мы не хотим странных, но логически верных утверждений вроде $A \to B \vee B \to A$. Интуиционисткая логика предлагает свою математику, в которой своя интерпретация логических связок. ВНК-интерпретация (Брауер-Гейтинг-Колмогоров).

- $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ — это конструкции.
- $\alpha \wedge \beta$ если мы умеем строить и α, и β.
- $\alpha \vee \beta$, если мы умеем строить α, β и знаем, что именно.
- $\alpha \to \beta$, если мы умеем перестроить α в β.
- $\perp$ — не имеет построения
- $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$

"Теория доказательств". Рассмотрим классическое исчисление высказываний и заменим схему аксиом 10 на следующую

$$ \alpha \to \neg\alpha \to \beta $$

В этой формализации мы следуем не сути интуиционисткой логики, а традиции. В интуиционисткой логике формализм это не источник логики.

Примеры моделей.

1. Модели КИВ подходят: корректны, но не полны ($[\![A \vee \neg A]\!] = И$, но $\not\vdash_{И} A \vee \neg A$).

2. Пусть X топологическое пространство.

   Пусть истоинностные значения — все открыте пространства в классической топологии.

   - $[\![\alpha \& \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$.
   - $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$.
   - $[\![\alpha \to \beta]\!] = (X \backslash [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!])^o$.
   - $[\![\neg\alpha]\!] = (X \backslash [\![\alpha]\!])^o$.

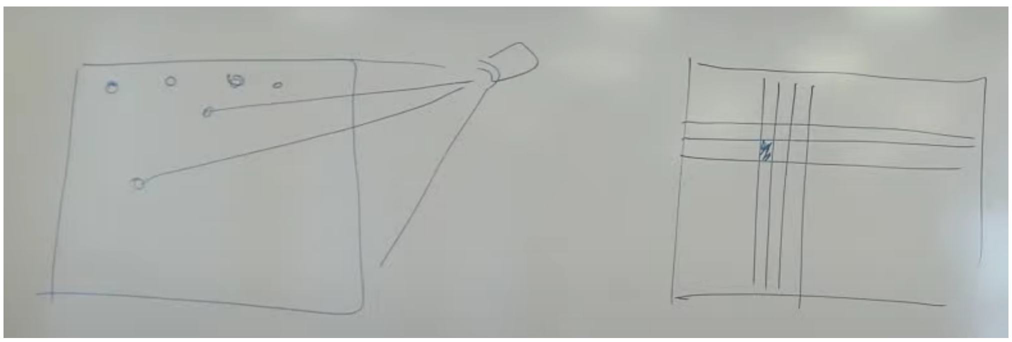
Теорема 4.0.1. Топологические модели — корректные модели ИИВ.

Утверждение 4.0.1. $\not\vdash_{И} A \vee \neg A$.

Доказательство. Пусть $A = (0, +\infty)$, $\neg A = (-\infty, 0)$, $A \vee \neg A = \mathbb{R} \backslash \{0\} \neq \mathbb{R}$. ■

4.1 Общая топология

Раньше были телевизоры с *бесконченым* количеством пикселей (это зависит от химических свойств вещества кинескоп).



Возьмем множество X. Определим на нем топологию как подмножество множества всех подмножеств $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ω — топология, если это множество открытых множеств и выполнены следующие условия:

1. $\varnothing, X \in \Omega$;
2. $\bigcup\limits_i \in \Omega$, если все $A_i \in \Omega$;
3. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \Omega$, если $A_1, \ldots, A_n \in \Omega$.

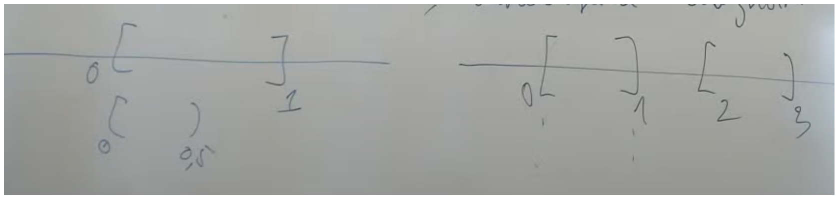
То есть топологическое пространство — пара $\langle X, \Omega \rangle$ и про Ω верны приведенные выше три утверждения.

Определение 4.1.1 (Замкнутое мноежство)**.** Множество B такое, что $X \backslash B \in \Omega$ называется замкнутым.

Определение 4.1.2 (Связное топологическое пространство)**.** $\langle X, \Omega \rangle$ связно, если нет $A, B \in \Omega \;:\; A \cup B = X$ и $A \cap B = \varnothing$

Определение 4.1.3 (Подпространство)**.** $\langle X_1, \Omega_1 \rangle$ — подпространство $\langle X, \Omega \rangle$, если $X_1 \subseteq X$ и $\Omega_1 = \{a \cap X_1 \mid a \in \Omega\ \}$

Определение 4.1.4 (Связное множество)**.** Множество, являющееся связным подпространством.



4.2 Примеры топологических пространств

Возьмем дерево (граф). Множество X — множество вержин. Ω — множество всех вершин, что $B \in \Omega$, если $a \in B$, $x \leqslant a$ влечет $x \in B$. То есть Ω — семейство множеств вершин, которые входят вместе с поддеревом.

Теорема 4.2.1. Граф без цикла свяен тогда и только тогда, когда оно своязно как топологическое пространство.

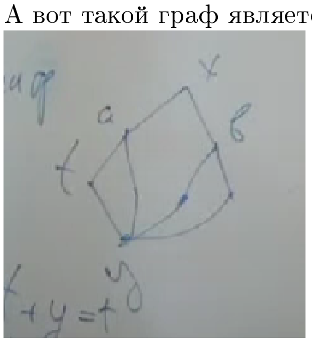
Доказательство будет в дз. ■

Определение 4.2.1 (Решетки)**.** X — частично упорядоченное множество отношением $\leqslant$.
Множество верхних граней a, b $a \sqcap b$ — множество $\{x \in X \mid a \leqslant x, b \leqslant x\}$.
Множество нижних граней a, b: $a \sqcup b$ — множество $\{x \in X \mid a \geqslant x, b \geqslant x\}$.
a — наименьший элемент $A \iff a \in A$ и не существует $b \in A$, $b \leqslant a$.
a — наибольший элемент $A \iff a \in A$ и не существует $b \in A$, $b \geqslant a$.
$a + b =$ наименьший элемент множества верхних граней.
$a \cdot b =$ наибольший элемент множества нижних граней.

Решетка — частично упорядоченное множество, где для каждых двух элементов существуют $a + b$ и $a \cdot b$.

Пример. Дерево — не решетка (в общем случае), так как $a + b$ есть, а $a * b$ может не быть.

А вот такой граф является решеткой.



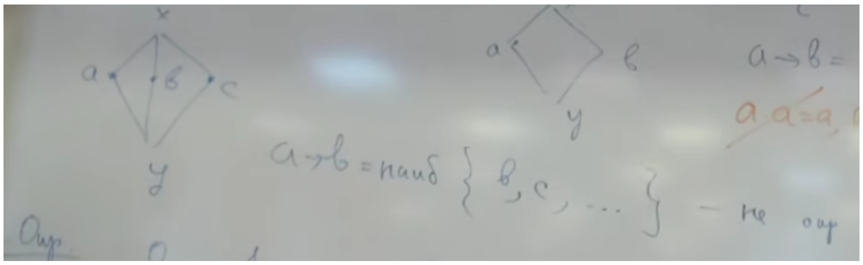
Теорема 4.2.2. Пусть $\langle X, \Omega \rangle$ топологическое пространство, $A, B \in \Omega$. $A \leqslant B$, если $A \subseteq B$.
Тогда $\langle \Omega, \leqslant \rangle$ — решетка. $A \cdot B = A \cap B$, $A + B = A \cup B$.

Определение 4.2.2. Дистрибутивная решетка — это такая решетка, что $a, b, c \in \Omega, \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

Лемма 4.2.2.1. Для дистрибутивной решетки так же верно, что $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Определение 4.2.3. Псевдодополнение $a \to b =$ наибольшее$\{c \mid a \cdot c \leqslant b\}$.

Определение 4.2.4. Диамант — такая решетка, что там нет для кого-то псевдодопллнения.



Определение 4.2.5. Решетка с псевдодополнением для всех элементов называется импликативной.

Определение 4.2.6. Определим 0 и 1 следующим образом:

- 0 — элемент, что $0 \leqslant x$ при всех x;
- 1 — элемент, что $x \leqslant 1$ при всех x.

Теорема 4.2.3 (В импликативной решетке 1 есть всегда)**.** $\langle X, \leqslant\rangle$ — импликативная решетка.

Доказательство. Рассмотрим $a \to a =$ наиб$\{c \mid a \cdot c \leqslant a\} =$ наиб$\{X\} = 1$. ■

Теорема 4.2.4. Рассмотрим $\langle X, \Omega\rangle$ — импликативная решетка с 0. Рассмотрим И.И.В.

Определим оценки $\mathbb{V} = X$:

- $[\![\alpha \& \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!]$.
- $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!]$.
- $[\![\alpha \to \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!]$.
- $[\![\neg\alpha]\!] = [\![\alpha]\!] \to 0$.

α истинно, если $[\![\alpha]\!] = 1$.
$[\![\perp]\!] = 0$. $\neg\alpha \equiv \alpha \to \perp$.
Полученная модель — корректная модель И.И.В.

У нас будет натуральный вывод, интуиция и все такое.

$\overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$ (аксиома).

Вывод утверждения в доказательстве $\Gamma \vdash \varphi$.

Правила вывода (сверху — посылка, снизу — заключение):

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}, \quad \frac{\Gamma, \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \varphi}, \quad \frac{\Gamma, \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}, \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \rho}, \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}.$$

Вот они, слева направо: введение $\to$, исключение $\to$, введение $\&$, два исключения $\&$, введения $\vee$ в двух видах, исключение $\vee$ и специальное правило для лжи.

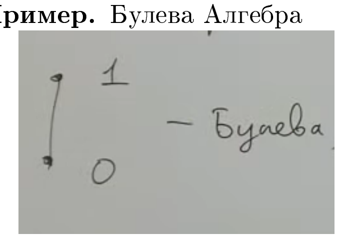
Теорема 4.2.5. Если $\vdash_И \alpha \vee \beta$, то $\vdash_И \alpha$ или $\vdash_И \beta$.

Определение 4.2.7. Алгебра Гейтинга — импликативная решетка с 0.

Определение 4.2.8. Введем операцию $\sim a \equiv a \to 0$ — дополнение до 0.

Определение 4.2.9. Булева алегбра — Алгебра Гейтинга, где $a + \sim a = 1$.

Пример. Булева Алгебра



- $\cdot$ соответствует $\&$,
- $+$ соответствует $\vee$,
- $\to$ соответствует $\to$,
- $\sim$ соответствует $\neg$.

Далее α, β — выссказывания в ИИВ.

Определение 4.2.10. $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha \vdash \beta$

Определение 4.2.11. $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$

Определение 4.2.12. Пусть ξ — множество всех высказываний ИИВ.
Тогда $[\xi]$ — называется алгеброй Линденбаума $\mathcal{L}$.

Теорема 4.2.6. $\mathcal{L}$ — Алгебра Гейтинга.

Лемма 4.2.6.1. $\mathbb{1} = [A \to A]$

Доказательство. $\alpha \vdash A \to A$, верно (очевидно), то есть $[\alpha] \leqslant [A \to A]$, то есть $[A \to A] = 1$. ∎

Теорема 4.2.7. $\mathcal{L}$ — корректная модель ИИВ.

Теорема 4.2.8. $\mathcal{L}$ — полная модель ИИВ.

Теорема 4.2.9. $\vDash \alpha$, то есть $[\alpha] = 1$.
$1 = [A \to A]$, то есть $[\alpha] = 1$, то есть $\beta \leqslant [\alpha]$ при всех β.
Возьмем $\beta = A \to A$, $A \to A \vdash \alpha$, то есть $A \to A$, $(A \to A) \to \alpha$.

Теорема 4.2.10. Алгебра Гейтинга — полная и корректная модель ИИВ.

Определение 4.2.13. Исчисление дизъюнктно, если для любых $\alpha, \beta \quad \vdash \alpha \vee \beta$ влечёт $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$.

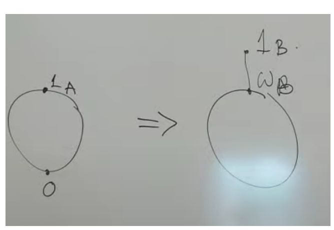
Теорема 4.2.11. ИИВ дизъюнктно.

Определение 4.2.14. Пусть существует $f : A \to B, \quad A, B$ – алгебры Гейтинга.
f – гомоморфизм, если $f(0_A) = 0_B \quad f(1_A) = 1_B$ и $f(\alpha \star_A \beta) = f(\alpha) \star_B f(\beta)$

Определение 4.2.15 (Геделева Алгебра)**.** Это такая алгебра, где $a + b = 1$ влечет $a = 1$ или $b = 1$.

Определение 4.2.16 ($\Gamma(A)$)**.** Пусть A — алгебра Гейтинга.

Определим $\gamma : A \to \Gamma(A)$ так: $\gamma(x) = \begin{cases} \omega, & x = 1_A \\ x, & x < 1_A \end{cases}$ и добавим $1_{\Gamma(A)}$: $t \leqslant 1_\Gamma(A)$, если $t \in \Gamma(A)$.



Замечание. $\Gamma(A)$ неофициально называется Геделеризацией.

Теорема 4.2.12. $\Gamma(A)$ – Гёделева алгебра.

Доказательство. Пусть $a + b = 1_{\Gamma(A)}$, посмотрим на картинку. ■

Утверждение 4.2.1. $\Gamma(\mathcal{L})$ — Гёделева алгебра.

Доказательство. Определим каноническое отображение $g(x) : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x = 1 \text{ или } \omega \\ x & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Утверждение 4.2.2. $g(x)$ – гомоморфизм

■

Теорема 4.2.13. Рассмотрим ИИВ и алгебры Гейтинга $\mathcal{L}, \Gamma(\mathcal{L})$

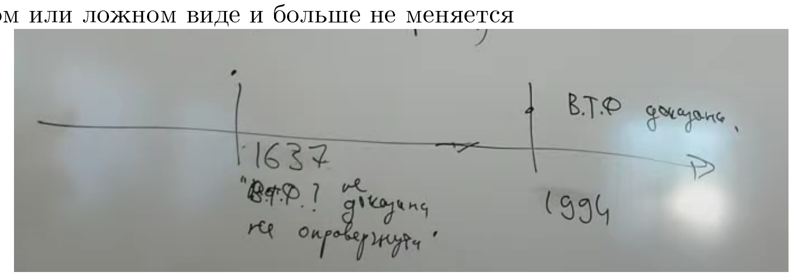
Утверждение 4.2.3. Если $g : A \to B$ и $[\![\alpha]\!]_A = 1_A$, то $[\![\alpha]\!]_B = g(1_A)$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим $\vdash \alpha \vee \beta$.
$\Gamma(\mathcal{L})$ — Геделва алгеба, то есть алгебра Гейтинга.
$[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$, т.е. либо $[\![\alpha]\!] = 1_\gamma \mathcal{L}$ либо $[\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$
Рассмотрим $g : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$
$[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$, тогда $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}} = g(1_{\Gamma(\mathcal{L})}) = 1_{\mathcal{L}}$
т.е. $\vdash \alpha$. ■

Определение 4.2.17. Модель ИИВ называется табличной, если

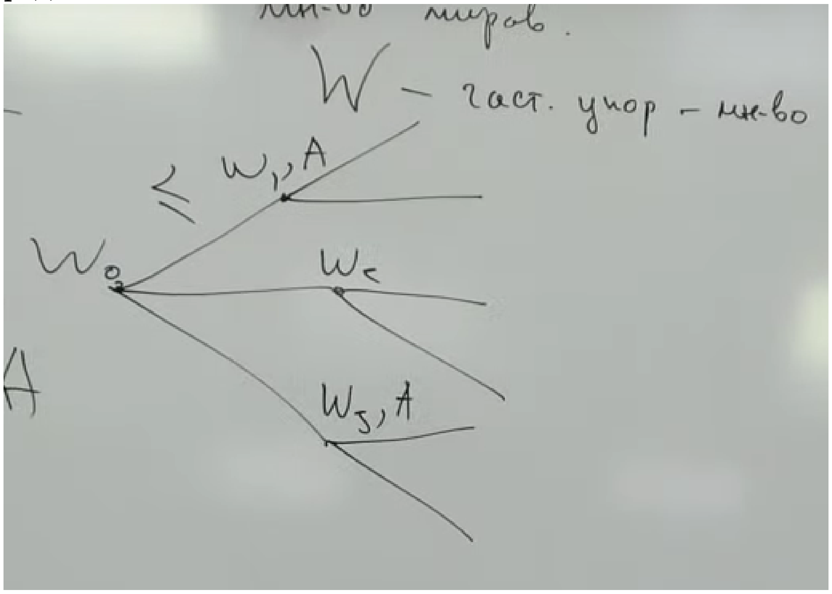
- $\mathbb{V} = \mathcal{S}$;
- $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_\star([\![\alpha]\!], [\![\alpha, \beta]\!])$,
- Существует $И \in \mathcal{S}$ – выделенная истина $[\![\alpha]\!] = И$ тогда и только тогда, когда $\models \alpha$

Определение 4.2.18 (Модель Крипки)**.** Некоторые факты, появившиеся на оси времени в истинном или ложном виде и больше не меняется



Замечание. W – частично упорядоченное множество миров.

Определение 4.2.19. $\Vdash$



1. Вынужденность переменной A определяется моделью. При этом, если $W_x \leqslant W_y$, $W_x \Vdash A$, то $W_y \vDash A$.

2. Доопределим $\Vdash$ на все выражения:

   (a) $W \Vdash A \wedge B$, если $W \Vdash A$ и $W \Vdash B$

   (b) $W \Vdash A \vee B$, если $W \Vdash A$ или $W \Vdash B$

   (c) $W \Vdash \neg A$, если нет $W \leqslant W_x$, что $W_x \Vdash A$

   (d) $W \Vdash A \to B$, если во всех $W \leqslant W_x$ из $W_x \Vdash A$ следует $W_x \Vdash B$

Определение 4.2.20. $\vDash \alpha$ если $W \vdash \alpha$.

Теорема 4.2.14. У ИИВ нет полной конечной табличной модели.

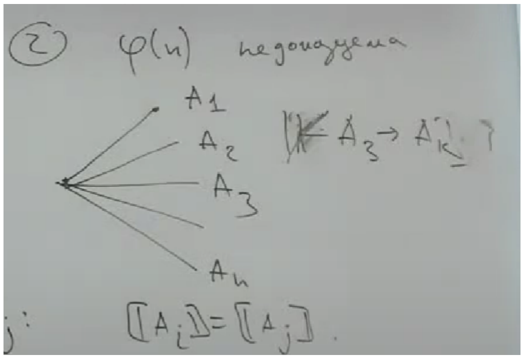
Доказательство. $\varphi(u) = \bigvee\limits_{i=1, j=1, i \neq j}^{n,n} A_i \to A_j$.

Пусть T — модель, $|\mathbb{V}| = n$.

Рассмотрим $\varphi(n+1)$. По принципу Дирихле. Есть A_j и A_i: $[\![A_j]\!] = [\![A_i]\!]$.

Несложно показать $[\![A_i \to A_j]\!] = \textit{И} \implies [\![\varphi(n+1)]\!] = \textit{И}$.

Рассмотрим модель, где $\varphi(n)$ не доказуемо ни при каком n.



$[\![A_3 \to A_k]\!] =$ Л. ■

Теорема 4.2.15. Модель Крипке — корректная модель ИИВ.

4.3 Изоморфизм Кари–Ховарда

Утверждение 4.3.1. τ, σ – типы.

$\tau \to \sigma$

```
f(x : τ): σ {
    return g(x);
}
```

$\tau \& \sigma$

```
f(x: τ, y: σ)
```

$\tau \vee \sigma$

```
f(x: std:variant<τ, σ>)
```

Определение 4.3.1 (Изоморфизм Кари–Ховарда)**.** Программа соответствует доказательству. Тип соответствует утверждению. ...

(всё в интуиционисткой логике)

Замечание. $f : \neg\neg\alpha \to \alpha$ – потом подумаем как это интерпретировать.

5 Исчисление предикатов

Нам нужен новый язык. В текущем языке всё хорошо, но он имеет малую выразитеьную силу. Косвенным свидетельством этого является то, что в нём всё легко разрешается.

В чём была исходная цель Гильберта: формализовать всю математику и доказывать всё, не боясь того, что будет противоречие где-нибудь.

Пример. $\frac{\text{Каждый человек смертен} \quad \text{Сократ человк}}{\text{Сократ смертен}}$
$\frac{\text{Каждый объект, если он – человек, то он – смертен} \quad \text{Сократ – человк}}{\text{Сократ – смертен}}$

Цель: кванторы и предикаты.

$$\frac{\forall x.H(x) \to S(x) \quad H(\text{Сократ})}{S(\text{Сократ})}.$$

Идея: нам нужно построить некоторый язык и затем поверх него построить теорию моделей и теорию доказательств.

Пример. $\forall x.\sin x = 0 \vee (\sin^2 x) + 1 > 1$.

- Предметные (здесь: числовые) выражения

– Предметные переменные x.

– Одно– и двуместные функциональные символы «синусы», «возведение в квадрат» и «сложение».

– Нульместные функциональные символы «ноль» (0) и «один» (1).

- Логическе выражения

  – Предикатные символы «равно» и «больше».

5.1 Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения
2. Предметные выражения: метапеременная θ
   - Предметные переменные: a, b, c, ..., метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные f, g, ...
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, ...
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременная P.
     Имена: A, B, C, ...,
   - Связки: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\neg\varphi)$
   - Кванторы: $(\forall x.\varphi)$ и $(\exists x.\varphi)$.

Сокращенные записи, метаязык

1. Метепаременные:
   - ψ, ϕ, π, ... — формулы
   - P, Q, ... — предикатные символы
   - θ, ... — термы
   - f, g, ... — функциональные символы
   - x, y, ... — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$(\forall a. \underbrace{A \vee B \vee C \to \exists b. \underbrace{D \& \neg E}_{\exists b....}}_{\forall a....}) \& F$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:
   - $(\theta_1 = \theta_2)$ вместо $E(\theta_1, \theta_2)$.
   - $(\theta_1 + \theta_2)$ вместо $p(\theta_1, \theta_2)$.
   - 0 вместо z.

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x.E(f(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

5.2 Два вида значений

1. Истинностные (логические) значения:
   (a) предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   (b) логические связки и кванторы.
2. Предметные значения:
   (a) предметные переменные;
   (b) функциональные символы (в том числе константы = нульместные функциональные символы)

5.3 Оценка исчисления предикатов

Определение 5.3.1. Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, T, E\rangle$, где:

1. D — предметное множество;
2. F — оценка для функциональных символов. Пусть f_n — n-местный функциональный символ:
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. T — оценка для предикатных символов. Пусть P_n — n-местный предикатный символ:
$$T_{P_n} : D^n \to V \qquad V = \{\text{И}, \text{Л}\}$$
4. E — оценка для свободных предметных переменных.
$$E(x) \in D$$

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![E(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=\text{И}} = \text{И}$$

1. Правила для связок $\vee$, &, $\neg$, $\to$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = T_{P_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
4. $[\![\forall x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И} \text{ при всех } t \in D \\ \text{Л}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л} \end{cases}$
5. $[\![\exists x.\phi]\!] = \begin{cases} \text{И}, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{И} \\ \text{Л}, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = \text{Л} \text{ при всех } t \in D \end{cases}$

Пример. $[\![\forall x.\exists y.\neg x + 1 = y]\!]$
Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $x \in \mathbb{N}$. Тогда $[\![x + 1 = y]\!]^{y:=x} = \text{Л}$ поэтому при любом $x \in \mathbb{N}$:

$$[\![\exists y.\neg x + 1 = y]\!] = \text{И}.$$

Итого: $[\![\forall x.\exists y.\neg x + 1 = y]\!] = \text{И}$

Пример. Странная интерпретация $[\![\forall x.\exists y.\neg(x+1=y)]\!]$.

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(x,y) := \square$;
- $P_{(=)}(x,y) :=$ *И*.

Тогда: $[\![x+1=y]\!]^{x\in D, y\in D} =$ *И*.
Итого: $[\![\forall x.\exists y.\neg x+1=y]\!] =$ *Л*.
Поэтому формулам оценки предикатов верить нельзя. Никакой интуиции за ними может и не стоять.

Определение 5.3.2. Формула общезначима, если истинна при любой оценке.

Утверждение 5.3.1. $[\![\forall x.Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!] =$ *И*.

Доказательство. Фиксируем D, F, P, E. Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за t. Ясно, что $t \in V$. Разберём случаи.

- Если $t =$ *И*, то $[\![P(f(x))]\!]^{P(f(x)):=t} =$ *И*, потому $[\![P(f(x)) \vee \neg P(f(x))]\!]^{P(f(x)):=t} =$ *И*.
- Если $t =$ *Л*, то $\neg P(f(x))]\!]^{P(f(x)):=t} =$ *И* потому всё равно $[\![P(f(x)) \vee \neg P(f(x))]\!]^{P(f(x)):=t} =$ *И*.

■

5.4 Подстановки, свобода и связность

Определение 5.4.1. Рассмотрим формулу $\forall x.\psi$ (или $\exists x.\psi$). Здесь переменная x связзана в ψ. Все вхождения переменой x в ψ – **связанные**.

Определение 5.4.2. Переменная x входит свободно в ψ, если не находится в области действия никакого квантора по x. Все её вхождения в ψ — **свободные**.

Пример. $\exists y.(\forall x.P(x)) \vee P(x) \vee Q(y)$.

Единственное свободное вхождение прееменной x помеченно синим цветом.

Определение 5.4.3. Подстановка — это ...

$$\psi[x:=\theta] := \begin{cases} \psi, & \psi \equiv y, y \not\equiv x \\ \psi, & \psi \equiv \forall x.\pi \text{ или } \psi \equiv \exists x.\pi \\ \pi[x:=\theta] \star \rho[x:=\theta], & \psi \equiv \pi \star \rho \\ \theta, & \psi \equiv x \\ \forall y.\pi[x:=\theta], & \psi \equiv \forall y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \\ \exists y.\pi[x:=\theta], & \psi \equiv \exists y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \end{cases}$$

Определение 5.4.4. Терм θ свободен для подстановки вместо x в ψ ($\psi[x:=\Theta]$), если ни одно свободное вхождение переменной в Θ не станет связным после подстановки.

Свобода есть: $(\forall x.P(y))[y:=z]$ или $(\forall x.\forall y.P(x))[y:=z]$.
Свободы нет: $(\forall x.P(y))[y:=x]$ и $(\forall y.\forall x.P(t))[t:=y]$.

5.5 Теория доказательств

Рассмотрим язык исчисления предикатов. АксиомыЁ— все схемы аксиом для классического исчисления высказываний в данном языке.

1. $\alpha \to \beta \to \alpha$
2. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
3. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$
4. $\alpha \wedge \beta \to \beta$
5. $\alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$
6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$
7. $\beta \to \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\alpha)$
10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

Добавим ещё две схемы аксиом (здесь везде θ свободен для подстановки вместо x в φ):

11. $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta]$
12. $\varphi[x := \theta] \to \exists x.\varphi$

Добавим ещё два правила вывода (здесь везде x не входит свободно в φ):

1. Введение $\forall$: $\dfrac{\varphi \to \forall x.\psi}{\varphi \to \psi}$,
2. Введение $\exists$: $\dfrac{(\exists x.\psi) \to \varphi}{\psi \to \varphi}$.

Утверждение 5.5.1. Доказыуемость, выводимость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказыаваний.

5.6 Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема 5.6.1. Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из α, то $\gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ также как в К.И.В

$\Longleftarrow$ та же схема. У нас появились два новых случая аксиом. Ничего страшного, с ним проблем не возникнет.

Однако таже слоедует обработать два новых правила вывода.

Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \ldots, \alpha \to \delta_n$.

Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы (по индукции).

Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$. Для квантора существования аналогично.

Доказываем переходи к (n). $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано на шаге k, что $\alpha \to \psi \to \varphi$.

$(n-0.9)\ldots(n-0.8)$	$(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \& \psi) \to \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n-0.6)$	$(\alpha \to \psi) \to \varphi$	М.Р. k,$n-0.8$
$(n-0.4)$	$(\alpha \to \psi) \to \forall x.\varphi$	Правило для $\forall$, $n-0.6$
$(n-0.3)\ldots(n-0.2)$	$((\alpha \to \psi) \to \forall x.\varphi) \to (\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi)$	Т. о полноте КИВ
(n)	$\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$	М.Р. $n-0.4$, $n-0.2$

■

5.7 Отношение следования

Определение 5.7.1 (Следование). $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \models \alpha$, если выполнено два условия:

1. α выполнено всегда, когда выполнено $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$;
2. α не использует кванторов по переменным, входящим свободно в $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Теорема 5.7.1. Если $\Gamma \vdash \alpha$ и в доказательстве не используется кванторов по свободным переменным из Γ, то $\Gamma \models \alpha$.

Влажность второго условия.

Пример. Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ ведёт себя неестественно, если в α используются кванторы по переменным, входящим свободно в Γ.

Легко показать, что $P(x) \vdash \forall x.P(x)$.

(1)	$P(x)$	Гипотеза
(2)	$P(x) \to (A \to A \to A) \to P(x)$	Сх. акс. 1
(3)	$(A \to A \to A) \to P(x)$	M.P. 1, 2
(4)	$(A \to A \to A) \to \forall x.P(x)$	Правило для $\forall$, 3
(5)	$(A \to A \to A)$	Сх. акс. 1
(6)	$\forall x.P(x)$	M.P. 5, 4

Пусть $D = \mathbb{Z}$ и $P(x) = x > 0$. Тогда не будет выполнено $P(x) \models \forall x.P(x)$.

Зачем нам это потребовалось? Мы будем пользоваться, но не злоупотреблять.

Мы не хотим заранее сильно ограничивать язык. Поэтому мы выбираем такой вариант, чтобы он разрешал некоторые.