Конспекты по теории вероятностей

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев

2022 год, семестр 4

1 Введение

Теория вероятности изучает случайные события, а эксперименты, в ходе которых они случаются, называется нами случайным экспериментом или часто испытанием.

2 Статистическое определение вероятности

n экспериментов, n_a — число появления событий A, $\frac{n_a}{n}$ – относительная частота события A.

Определение 1. $P(A) = \frac{n_a}{n}$ — вероятность события A при большом n.

Это интуитивное определение, но эта интуиция может быть обманчива. У этого определения есть ряд недостатков (эксперименты часто провести нельзя, в зависимости от числа экспериментов относительная частота разнится и т.д) и мы не будем им пользоваться.

В основе хорошего определения вероятности лежит концепция вероятностного пространства, в котором случайное событие понимается как подмножество.

2.1 Пространство элементарных исходов

Определение 2. Пространством элементарных исходов Ω назывыается множество, содержащее все возможные исходы случайного эксперимента, из которых при испытании происходит только один.

Определение 3. Случайными событиями называются подмножества $A \subset \Omega$. В ходе эксперимента событие A наступило, если произошел один из элементарных исходов, входящиъ в множество A.

Не все подмножества пространства исходов понимаются нами как события. Некоторые события могут быть нам попросту неинтересны. Некоторые мы не можем считать событиями. Например, в дискретном случае событие с одним исходом считается событием, но в непрерывном, как правило, нет. <Примеры>

2.2 Операции над событиями

Ω — достоверное событие, или универсальное событие. $\emptyset$ — невозможное событие, или пустое. Никогда не происходит, потому что не содержит исходов.

Определение 4. Суммой $A+B$ называется событие $A \cup B$, сосоящее в том, что произошло событие A или событие B (хотя бы одно из них).

Определение 5. Произведением AB называется событие $A \cap B$, сосоящее в том, что произошло событие A и событие B (т.е оба из них, одновременно, в ходе одного эксперимента).

$A_1 + \dots A_n$ — произошло хотя бы одно. $B_1 \cdot \dots \cdot B_n$ — произошли все. Do you get it yet?

Определение 6. Противоположным к A называется событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$, состоящее в том, что событие не произошло.

Заметка: $\overline{\overline{A}} = A$.

Определение 7. Разницей событий A и B называется событие $A - B = A\overline{B}$.

Определение 8. События A, B называются несовместными если они не пересекаются, $A \cap B = \emptyset$, т.е одно исключает появление другого в эксперименте.

Определение 9. Событие A влечёт событие B, если $A \subset B$. В логике это соотвествует импликации: если появилось A, то появилось B.

2.3 Вероятность

Вероятность события A — некая числовая характеристика $P(A)$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, отражающая частоту наступления A в эксперименте.

Пусть Ω содержит конечное число равновозможных исходов (условно, из соображений симметрии). Тогда применимо следующее классическое определение

Определение 10. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ — вероятность A.

Свойства вероятности.

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\emptyset) = 0$
4. Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$ (доказательство есть— оно простое)

Это определение применимо в очень ограниченном числе случаев.

3 Геометрическое определение вероятности

Пусть Ω — это замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Пусть μ — мера на Ω.

Мы "наугад" бросаем точки в эту Ω. Наугад значит, что вероятность попадание в область зависит только от её меры (длины, площади, обьема и т.д). В этом случае применимо геометрическое определение вероятности.

Определение 11. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(Omega)}$.

Замечание. Свойства этой вероятности повторяют свойства классических.

<Примеры>

Геометрическая вероятность упускает случай счётного множества элементарных исходов. Она применяется крайне-крайне редко.

На следующей лекции будет нормальное формальное точное определение вероятности.

Административные вопросы: телеграм-канал потока $tv3234_37$. 3 online контрольных без переписываний (переписывания в крайнем случае с штрафом). Получить 4 до экзамена можно за контрольные. 5 требует экзамен.

Для очников: 10 за посещение, 10 за работу на парах, 60 за контрольные.

4 Сигма алгебра

Определение 12. Пусть Ω — пространство элементарных исходов, F — σ-алгебра на Ω. Вероятностью на Ω называется функция

- $P(A) \geqslant 0$
- Вероятность (счётной) суммы несовместных событий — сумма вероятностей.
- Нормированность. $P(\Omega) = 1$.

Определение 13. Вероятностынм пространством называется совокупность пространства элементарных исходов, сигмы алгебра на нём и вероятности.

Формула обратной вероятности $P(A) = 1 - P(\neg A)$.

Аксиома непрерывности. При непрерывном изменении области соотвествующая вероятность также должна изменяться непрерывно.

Аксиома непрерывности следует из аксиомы счётной аддитивности.

Независимые события. Независимость набора событий. Пример Бернштейна.