Матан, лекции

1 Повторение

Задачи и темы, которые мы будем обсуждать в новом семестре: многообразия, дифференциальные формы на них, криволинейные интегралы, интегралы от параметров, формула Стокса, формула Остроградского, γ-, β-функции.

Интеграл от функции произвольного знака это разность интегралов компонент. В случаях, когда оба слогаемых не бесконечные, такая разность имеет смысл.

Интеграл комплекснозначной функции это сумма интегралов вещественных компонент функции.

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

Монотонность интеграла.

$$\int_E (f_1 + f_2) \geqslant \int_E f_1 = \infty$$

Теорема 1 (Теорема Леви для последовательности)**.** Если f_n неотрицательные измеримые на E функции и $f_n \uparrow f$ возрастая сходится поточечно к f, то

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f d\mu$$

Теорема 2 (Теорема Леви для рядов)**.** Если f_n неотрицательные измеримые на E функции, то интеграл от ряда совпадает с суммой ряда из интегралов.

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — частичная сумма. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ ■

Пример 1. Функция, которая не удовлетворяет условиям теоремы Леви:

$$f_k(x) = \xi_{[k,k+1]}(x)$$

$$\int_{[0,+\infty]} f_k(x) d\mu = \int_{[k,k+1]} f_k(x) d\mu = 1$$

$$\int f(x) d\mu = \int_{[0,+\infty]} 0 d\mu = 0$$

Замечание 1.

1. Для $f \in S(E)$ $|f| \in L(E,\mu)$ тогда и только тогда, когда $f \in L(E,\mu)$.
2. Если интеграл $\int_E f d\mu$ определен, то $\int_E |f| d\mu \geqslant |\int_E f d\mu|$.

Доказательство. ■

Отсутпление про суммируемую мажоранту.

Если функция имеет суммируемую мажоранту, то сама она является суммируемой.

... $L_1(E,\mu)$: две функции эквивалентны по мере на E, если они совпадают почти везде на E. Другими словами, мера подмножества E, на котором функции принимают разные значения, равна нулю.

$$\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$$

.

Элементы $L_1(E,\mu)$ могут быть определены не на всём E целиком, но на множестве полной меры.

$$|f+g| \leqslant |f| + |g|$$

Эта норма невырожденная. Если $f \in S_+(E)$ и $\int f\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Теорема 3 (Счётная аддитивность интеграла)**.** Пусть $f \in S(E)$ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in ?$, определн $\int_E f d\mu$. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$$

Доказательство. ... ■

Теорема 4 (О приближении интеграла интегралом по множеству конечной меры)**.** Пусть мера E конечна и $f \in L(E, \mu)$ суммиурема. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_0 \subset E : \mu(E_0) < +\infty \text{и} \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu < \epsilon$$

Доказательство. Не умаляя общности $f \geqslant 0$ на E. Продложим f нулем вне E. $J(A) = \int_A f d\mu$— мера. $E_K = E\{f > \frac{1}{k}\}$, $E_* = E\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Непрерывность меры снизу E_k — множества конечной меры.

Научились приближать с любой точностью интеграл интегралом по множествам конечной меры. ■

Теорема Фато и теорема Лебега.

Теорема 5. Пусть f_k
$inS_+(E)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\underline{\lim}_{k \in \infty} \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$.

И если $f_k(x) \to f(x)$ на E, то $\int_E f(x) \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$

Теорема 6 (Теорема Лебега о мажорированной сходимости)**.** Пусть $f_n \to f$ сходится почти везде на E и $\Phi \in L(E, \mu)$: $\forall k \in \mathbb{N} |f_k| \leqslant \Phi$ почти везде на E. Тогда $f \in L(E, \mu)$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \int_E f d\mu$.
...

Интеграл положительнозначной функции определяет меру. Интеграл функции это разность мер компонент. Такая разность называется заряд.

Теорема 7 (Критерий плотности)**.** $\sqsupset (X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, μ, ν – опр. (?) $\mathcal{A}$
$h \in S_+(X)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. h – плотность меры ν относительно μ ($\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$)

2. $\forall E \in \mathcal{A}$
$$\inf_E h \cdot \mu(E) \leqslant d(E) \leqslant \sup_E h \cdot \mu(E)$$

Если $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \lambda_n)$, тогда $1 \iff 3$:

3
$$\forall P \in \mathcal{P}_n \quad \inf_P h \cdot \mu(P) \leqslant \nu(P) \leqslant \sup_P h \cdot \mu(P)$$

Доказательство. План: $1 \implies 2 \implies 3$

$2 \implies 1?$ $\triangleleft E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) \stackrel{?}{=} \int_E h d\mu$

$$E = E\{h = 0\} \coprod E\{h = +\infty\} \coprod E\{0 < h < +\infty\}$$

$$\nu(E) = \nu(E\{h = 0\}) + \nu(E\{h = +\infty\}) + \nu(E\{0 < h < +\infty\})$$

$$\nu(E\{h = 0\}) \leqslant \sup_{E\{h=0\}} = 0 = \int_{E\{h=0\}} h d\mu$$

$$\nu(E\{h = +\infty\}) \leqslant h \cdot \mu(E) + \infty \cdot \mu(E) = \int_{E\{h=+\infty\} h d\mu}.$$

$\lhd \dfrac{1}{q} \in (0,1),\ q > 1 \quad (0,+\infty) = \bigvee k \in \mathbb{Z}[q^k, q^{k+1})$
$E\{h \in (0,+\infty)\} = \bigvee E\{q^k \leqslant h < q^{k+1}\}$
$q^k \mu(E_k) \leqslant \nu(E_k) \leqslant q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$
$q^k \mu(E_k) \leqslant \int h d\mu \leqslant q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$
$\dfrac{\nu(E_k)}{q} \leqslant q^k \cdot \mu(E_k) \leqslant \int_{E_k} h d\mu = q \cdot q^k \mu(E_k) \leqslant q \cdot \nu(E_k)$
Просуммируем это по всем k.
$\dfrac{1}{q}\nu(E) = \int_E h d\mu \leqslant q \cdot \nu(E),\ \ q \to 1 \implies \nu(E) \leqslant \int_E h d\mu \leqslant \nu(E) \implies \nu(E) = \int_E h d\mu$
$\lhd \widetilde{\nu}$ – стандартное продолжение <...> (нужно дополнить) ■

Теорема 8. $\sqsupset \Phi$ – диффеоморфизм множеств $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad G \underset{\Phi}{\to} O$
Тогда $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad E \subseteq O$

$$\lambda_n(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \Big|\det \Phi'\Big| d\lambda_n$$

$$\lambda_n(O) = \int_G |\det \Phi'| \, d\lambda_n$$

Если $O \sim \widetilde{O} \quad G \sim \widetilde{G} \quad \Big(\lambda_n(O \setminus \widetilde{O}) = \emptyset \dots\Big)$, то

$$\lambda_n(\widetilde{O}) = \int_{\widetilde{G}} |\det \Phi'| \, d\lambda_n$$

Замечание.

$$\begin{aligned} \nu(P) &\leqslant \sup_P h d\mu(P) \text{ – от противного} \\ \implies \exists \text{ ячейки } P_0: \quad \nu(P) &> M \cdot \mu(P) = \sup_{P_0} h \cdot \mu(P) \\ \Phi(x) &= \Phi(x_0) + d_{x_0}\Phi(x - x_0) + o(x - x_0) \\ x \approx x_0 \qquad \Phi(x) &\approx \Phi(x_0) + d_{x_0}\Phi(x - x_0) \\ &. \end{aligned}$$

Если Q – малая ячейка, то

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \approx \lambda_n d_{x_0}\Phi(Q) = \left|\det \Phi'_{x_0}\right| \lambda_n(Q)$$

Следствие 8.1. Если $\Phi : G \to O$ – диффеоморфизм, $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad \widetilde{G} \sim G, \widetilde{O} \sim O \quad f \in S(O)$, то

$$\int_{\widetilde{O}} f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\widetilde{G}} f(\Phi(u)) \left|\det \Phi'(u) d\lambda_n(u)\right|$$

Пример 2. Полярные координаты.
$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$
$\Phi : (r,\varphi) \to (x,y),$
$([0,+\infty) \times [-\pi,\pi])) \to \mathbb{R}^n,$
$(0,+\infty] \times (-\pi,\pi))) \to \mathbb{R}^n \setminus (-\infty, 0]).$
$\det \Phi' = r; \quad E = \mathbb{R}^2:$

$$\iint_E f(x,y) dx dy = \iint_{\Phi^{-1}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

Пример 3 (интеграл Эйлера-Пуассона).

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
I \cdot I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ys} \qquad = \iint_{\{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}} e^{-x^2+y^2} dxdy \\
&= \iint_{\left\{0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \quad r>=0\right\}} e^{-r^2} r dr d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-r^2}}{-2} \mid_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$I = \int_0^{+\infty} r^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

.

Пример 4. Цилиницрические координаты

$$
\begin{aligned}
r \cos \varphi &= x \\
r \sin \varphi &= y \\
h &= z
\end{aligned}
$$

.

$\Phi : (r, \varphi, h) \to (x, y, z) \quad \Phi : (0, +\infty) \times (-pi, pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) | \mid x \leqslant 0\}\}$
$|\det \Phi'| = r$
$\iiint_E f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{\Phi^1(E)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh$

Пример 5. Сферические координаты
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$
\begin{aligned}
r \cos \varphi \cos \psi &= x \\
r \sin \varphi \cos \psi &= y \\
r \sin \psi \varphi \sin \psi &= y
\end{aligned}
$$

$\det \Phi' = r^2 \cos \varphi$
Можно обобщить на $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
r &= \|x\| \\
x_1 &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \ldots \cos \varphi_1 \\
&\ldots \\
x_{n-2} &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-3} \\
x_{n-1} &= r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-2} \\
x_n &= r \sin \varphi_{n-1}
\end{aligned}
$$

.

Пример 6.

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leqslant \mathbb{R}^2 \\ x^2+y \leqslant z^2 \\ z \geqslant 0}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Преобразовать используя:

- Цилиндрические координаты

  Перепишем множество интегрирования в новых координатах: $\begin{cases} r^2 + h^2 \leqslant R^2 \\ r^2 \leqslant h^2 \implies r \leqslant h \\ h \geqslant 0, r \geqslant 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\substack{r^2+h^2\leqslant R^2 \\ r\leqslant h \\ h\geqslant 0, r\geqslant 0}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right) r dr d\varphi dh \\ &= \iint\limits_{\substack{\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi \\ 0\leqslant r\leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}}} r \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right) dr \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} r dr \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right) dh \end{aligned}$$

.

- Цилиндрические координаты (второй вариант)

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{h} r f dr + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} r f dr$$

.

- Сферические координаты