

Конспекты по математическому анализу

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев, Константин Бац

2022 год, семестр 4

1 Повторение

Задачи и темы, которые мы будем обсуждать в новом семестре: многообразия, дифференциальные формы на них, криволинейные интегралы, интегралы от параметров, формула Стокса, формула Остроградского, γ -, β -функции.

Интеграл от функции произвольного знака это разность интегралов компонент. В случаях, когда оба слагаемых не бесконечные, такая разность имеет смысл.

Интеграл комплекснозначной функции это сумма интегралов вещественных компонент функции.

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

Монотонность интеграла.

$$\int_E (f_1 + f_2) d\mu \geq \int_E f_1 d\mu = \infty$$

Теорема 1 (Теорема Леви для последовательности). Если f_n неотрицательные измеримые на E функции и $f_n \uparrow f$ возрастают сходятся поточечно к f , то

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int_E \lim f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Теорема 2 (Теорема Леви для рядов). Если f_n неотрицательные измеримые на E функции, то интеграл от ряда совпадает с суммой ряда из интегралов.

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — частичная сумма. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ ■

Пример. Функция, которая не удовлетворяет условиям теоремы Леви:

$$f_k(x) = \xi_{[k, k+1]}(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{[0, +\infty]} f_k(x) d\mu &= \int_{[k, k+1]} f_k(x) d\mu = 1 \\ \int f(x) d\mu &= \int_{[0, +\infty]} 0 d\mu = 0 \end{aligned}$$

Замечание. 1. Для $f \in S(E)$ $|f| \in L(E, \mu)$ тогда и только тогда, когда $f \in L(E, \mu)$.

2. Если интеграл $\int_E f d\mu$ определен, то $\int_E |f| d\mu \geq |\int_E f d\mu|$.

Доказательство. ■

Отсутствие про суммируемую мажоранту.

Если функция имеет суммируемую мажоранту, то сама она является суммируемой.

... $L_1(E, \mu)$: две функции эквивалентны по мере на E , если они совпадают почти везде на E . Другими словами, мера подмножества E , на котором функции принимают разные значения, равна нулю.

$$\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$$

Элементы $L_1(E, \mu)$ могут быть определены не на всём E целиком, но на множестве полной меры.

$$|f + g| \leq |f| + |g|$$

Эта норма невырожденная. Если $f \in S_+(E)$ и $\int f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E .

Теорема 3 (Счётная аддитивность интеграла). Пусть $f \in S(E)$ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in \mathcal{F}$, определим $\int_E f d\mu$. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$$

Доказательство. ... ■

Теорема 4 (О приближении интеграла интегралом по множеству конечной меры). Пусть мера E конечна и $f \in L(E, \mu)$ суммируема. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_0 \subset E : \mu(E_0) < +\infty \text{ и } \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu < \epsilon$$

Доказательство. Не умаляя общности $f \geq 0$ на E . Продолжим f нулем вне E . $J(A) = \int_A f d\mu$ — мера. $E_K = E \{f > \frac{1}{K}\}$, $E_* = E \{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Непрерывность меры снизу E_k — множества конечной меры.

Научились приближать с любой точностью интеграл интегралом по множествам конечной меры. ■

Теорема Фато и теорема Лебега.

Теорема 5. Пусть f_k $\in S_+(E)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\liminf_{k \in \mathbb{N}} \int_E f_k(x) \leq \int_E f(x)$.
И если $f_k(x) \rightarrow f(x)$ на E , то $\int_E f(x) \leq \liminf_{k \in \mathbb{N}} \int_E f_k(x)$

Теорема 6 (Теорема Лебега о мажорированной сходимости). Пусть $f_n \rightarrow f$ сходится почти везде на E и $\Phi \in L(E, \mu)$: $\forall k \in \mathbb{N} |f_k| \leq \Phi$ почти везде на E . Тогда $f \in L(E, \mu)$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f d\mu = \int_E f d\mu$

Интеграл положительнозначной функции определяет меру. Интеграл функции это разность мер компонент. Такая разность называется заряд.

Теорема 7 (Фубини).

$$\begin{aligned}x &= (x_1, \dots, x_k) \\y &= (y_1, \dots, y_m) \\f(x, y) &\in \mathcal{L}(E, \lambda_{k+m}) \\E &\in \mathcal{A}_{k+m}\end{aligned}$$

то:

1. Для почти всех $x \in \mathbb{R}^k$ $g(\cdot) = f(x, \cdot) \in \mathcal{L}(E(x, \cdot))$
2. $I(x) = \int_{E(x, \cdot)} f(x, y) d\lambda_m(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$
- 3.

$$\int_E f(x, y) d\lambda_{k+m}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{E(x, \cdot)} f(x, y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_k(x)$$

Пример. $E = A \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ $0 \in \mathbb{R}^n$

A – неизмеримое в \mathbb{R}^k

E – измеримо в \mathbb{R}^{k+m}

$Pr_x(E) = A$ – неизмеримое

Если $Pr_x(E)$ измеримо, то вместо интеграла по \mathbb{R}^k можно написать интеграл по проекции

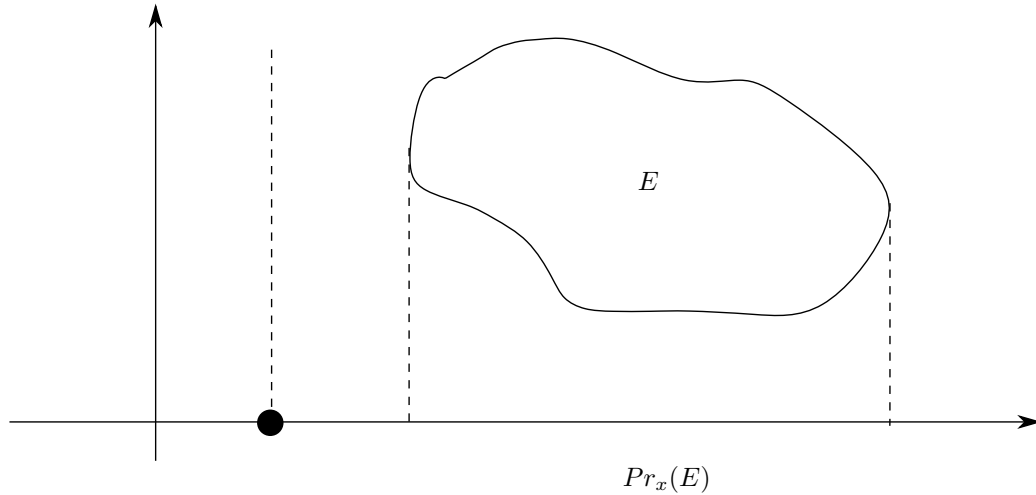


Рис. 1: Переход в интегралу по проекции

Замечание. Если E – компактное или открытое, то $Pr_x(E)$ измеримо.

$Pr_x(E) = \Phi(E)$, где $\Phi(x, y) \equiv x$ – отображение проектирования

Если E – компактное, то $\Phi(E)$ – компактное. Если открытое, то открытое.

Пример. 1.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = I_1$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = I_2$$

Если интегралы существуют, то они антиравны.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y}{(x^2 + y^2)} \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} - 0 dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Вывод: функция $f(x, y) \notin \mathcal{L}([0, 1]^2, \lambda_2)$

2.

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$f \in \mathcal{L}^2([-1, 1]^2) \iff |f| \in \mathcal{L}([-1, 1]^2) \implies |f| \in \mathcal{L}([-1, 1]^2)$$

$$\iint_{[0, 1]^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

<.....>

Утверждение 7.1. Семейство называется суммируемым, если функция суммируема

Утверждение 7.2. Если семейство $(a_x)_{x \in X}$ суммируемо, то $\{x : a_x \neq 0\}$ – не более чем счётное.

Доказательство. Не умаляя общности $a_x \geq 0$

$$+\infty > \int_X a_x dv = \int_{X_0} a_x dv > \int a_x dv \geq \frac{1}{j} \nu(x_j) \implies \nu(x_j) < +\infty$$

$$X_0 = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \text{ – не более, чем счётное}$$

■

Утверждение 7.3. \square X – н.б.ч.с, Y – числовое множество, $(a_x)_{x \in X} \subseteq Y$ $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$

$$\text{Тогда } (a_x) \text{ суммируемы} \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \text{ сходится абсолютно.}$$

2 Замена переменной в интеграле по мере

2.1 “Пересадка” меры

$\Phi : X \rightarrow Y$. \square (X, \mathcal{A}, μ) – пространство с мерой.

$$\mathcal{D} = \{B \subseteq Y | \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

$$\Phi^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}(B_k) \in \mathcal{A}$$

$$\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$$

Пример. $X = [0, 2\pi)$ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap [0, 2\pi)$

$$\Phi(t \in X) = (\cos t, \sin t)$$

Теорема 8 (Общая схема замены переменных). $\square (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$

$\Phi : X \rightarrow Y$ – не портит измеримость.

$\square h \in S_+(X) : \forall B \in \mathcal{D}$

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} h d\mu$$

Тогда $\forall f \in S(Y, \nu)$

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)$$

Доказательство. $f \circ \Phi$ – измерима?

$X \{f \circ \Phi < a\} = \Phi^{-1}(Y \{f < a\})$. $Y \{f < a\} \in \mathcal{L}$, т.к. f измеримо. А тогда $\Phi^{-1}(\dots) \in \mathcal{A}$

Совпадение интегралов:

1. f – ступенчатая, $f = \sum_{k=1}^K C_k \chi_{D_k}$ $\{D_k\}$ – разбиение X

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \sum_{k=1}^K C_k \nu(D_k) = \sum_{k=1}^K C_k \int_{\Phi^{-1}(D_k)} h d\mu = \\ &= \int_X \left(\sum_{k=1}^K C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)} \right) h(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f \circ \Phi(x) h(x) d\mu(x) \\ f \circ \Phi(x) &= C_k \quad x \in \Phi^{-1}(D_k) \\ \sum_{k=1}^K C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)}(x) &= C_k. \end{aligned}$$

2. $f \in S_+(Y)$ $\exists \{g_j\}$ – ступенчатая неубывающая $g_i \uparrow f$

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_Y g_j d\nu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X g_j(\Phi(x)) h(x) d\mu \\ &= \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

3. Общий случай:

$$f = f_+ + f_-$$

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \int_Y f_+ - \int_Y f_- d\mu = \int_X f_+(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) - \int_X f_-(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) \quad (f(\Phi)h)_+ = f_+(\Phi)h. \end{aligned}$$

■

Следствие 8.1. $\square (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$

$h \in S_+(X)$; $\Phi : X \rightarrow Y$ $\Phi^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}$

и выполняется условие теоремы общей замены переменной. Тогда $\forall E \subseteq \mathcal{D}$ $f \in S(E, \nu)$:

$$\int_E f(y) d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)$$

Рассмотрим продолжение нулём f с E на Y

$$\int_E f d\nu = \int_Y (y)\chi_E(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \underbrace{\chi_E(\Phi(x))}_{\chi_{\Phi^{-1}(E)}} \chi_{\Phi^{-1}(E)} h(x) d\mu(x) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x).$$

Следствие 8.2 (частный случай 1). Если $h \equiv 1$ в условии теоремы.

$$(\forall E \in \mathcal{D} \quad \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\mu = \mu(\Phi^{-1}(E)))$$

мера ν при этом называется образом меры μ

$$\forall f \in S(E) \quad \int_E f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi(x) d\mu(x)$$

Следствие 8.3 (Частный случай 2). $X = Y \quad \Phi = id \quad \nu(E) = \int_E h(x) d\mu(x)$

<..>

Теорема 9. $\square (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой, $\Phi : X \rightarrow Y \quad h \in S_+(X)$

Следующие утверждения равносильны:

1. h плотность ν относительно μ
2. $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\inf_E h\mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_E h\mu(E)$$

Доказательство. $I \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$

Т.о. $I \implies II$ ■

Теорема 10 (Критерий плотности). $\square (X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, μ, ν – опр. (?) \mathcal{A}
 $h \in S_+(X)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. h – плотность меры ν относительно μ ($\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$)
2. $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\inf_E h \cdot \mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_E h \cdot \mu(E)$$

Если $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \lambda_n)$, тогда $1 \iff 3$:

3

$$\forall P \in \mathcal{P}_n \quad \inf_P h \cdot \mu(P) \leq \nu(P) \leq \sup_P h \cdot \mu(P)$$

Доказательство. План: $1 \implies 2 \implies 3$

$$2 \implies 1? \quad \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) \stackrel{?}{=} \int_E h d\mu$$

$$E = E \{h = 0\} \coprod E \{h = +\infty\} \coprod E \{0 < h < +\infty\}$$

$$\nu(E) = \nu(E \{h = 0\}) + \nu(E \{h = +\infty\}) + \nu(E \{0 < h < +\infty\})$$

$$\nu(E \{h = 0\}) \leq \sup_{E \{h=0\}} = 0 = \int_{E \{h=0\}} h d\mu$$

$$\nu(E \{h = +\infty\}) \leq h \cdot \mu(E) + \infty \cdot \mu(E) = \int_{E \{h=+\infty\}} h d\mu.$$

$$\triangleleft \frac{1}{q} \in (0, 1), \quad q > 1 \quad (0, +\infty) = \bigvee k \in \mathbb{Z} [q^k, q^{k+1})$$

$$E\{h \in (0, +\infty)\} = \bigvee E\{q^k \leq h < q^{k+1}\}$$

$$q^k \mu(E_k) \leq \nu(E_k) \leq q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$$

$$q^k \mu(E_k) \leq \int h d\mu \leq q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$$

$$\frac{\nu(E_k)}{q} \leq q^k \cdot \mu(E_k) \leq \int_{E_k} h d\mu = q \cdot q^k \mu(E_k) \leq q \cdot \nu(E_k)$$

Просуммируем это по всем k .

$$\frac{1}{q} \nu(E) = \int_E h d\mu \leq q \cdot \nu(E), \quad q \rightarrow 1 \implies \nu(E) \leq \int_E h d\mu \leq \nu(E) \implies \nu(E) = \int_E h d\mu$$

$\triangleleft \tilde{\nu}$ – стандартное продолжение $\langle \dots \rangle$ (нужно дополнить) ■

Теорема 11. $\square \Phi$ – диффеоморфизм множеств $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad G \xrightarrow{\Phi} O$

Тогда $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad E \subseteq O$

$$\lambda_n(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \left| \det \Phi' \right| d\lambda_n$$

$$\lambda_n(O) = \int_G |\det \Phi'| d\lambda_n$$

Если $O \sim \tilde{O} \quad G \sim \tilde{G} \quad (\lambda_n(O \setminus \tilde{O}) = \emptyset \dots)$, то

$$\lambda_n(\tilde{O}) = \int_{\tilde{G}} |\det \Phi'| d\lambda_n$$

Замечание.

$$\nu(P) \leq \sup_P h d\mu(P) \text{ – от противного}$$

$$\implies \exists \text{ ячейки } P_0 : \quad \nu(P) > M \cdot \mu(P) = \sup_{P_0} h \cdot \mu(P)$$

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + d_{x_0} \Phi(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$x \approx x_0 \quad \Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d_{x_0} \Phi(x - x_0)$$

.

Если Q – малая ячейка, то

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \approx \lambda_n d_{x_0} \Phi(Q) = |\det \Phi'_{x_0}| \lambda_n(Q)$$

Следствие 11.1. Если $\Phi : G \rightarrow O$ – диффеоморфизм, $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad \tilde{G} \sim G, \tilde{O} \sim O \quad f \in S(O)$, то

$$\int_{\tilde{O}} f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\tilde{G}} f(\Phi(u)) |\det \Phi'(u)| d\lambda_n(u)$$

Пример. Полярные координаты.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

$$\Phi : (r, \varphi) \rightarrow (x, y),$$

$$([0, +\infty) \times [-\pi, \pi]) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(0, +\infty] \times (-\pi, \pi)) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus (-\infty, 0].$$

$$\det \Phi' = r; \quad E = \mathbb{R}^2 :$$

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{\Phi^{-1}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

Пример (интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
 I \cdot I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ys} dy = \iint_{\{x \geq 0, y \geq 0\}} e^{-x^2+y^2} dx dy \\
 &= \iint_{\{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad r \geq 0\}} e^{-r^2} r dr d\varphi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-r^2}}{-2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \\
 I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
 \end{aligned}$$

Пример. Цилиндрические координаты

$$\begin{aligned}
 r \cos \varphi &= x \\
 r \sin \varphi &= y \\
 h &= z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi : (r, \varphi, h) &\rightarrow (x, y, z) \quad \Phi : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0\} \\
 |\det \Phi'| &= r \\
 \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Phi^{-1}(E)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh
 \end{aligned}$$

Пример. Сферические координаты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned}
 r \cos \varphi \cos \psi &= x \\
 r \sin \varphi \cos \psi &= y \\
 r \sin \varphi \sin \psi &= z
 \end{aligned}$$

$$\det \Phi' = r^2 \sin \varphi$$

Можно обобщить на \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}
 r &= \|x\| \\
 x_1 &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \dots \cos \varphi_1 \\
 &\dots \\
 x_{n-2} &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-3} \\
 x_{n-1} &= r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-2} \\
 x_n &= r \sin \varphi_{n-1}
 \end{aligned}$$

Пример.

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ x^2+y^2 \leq z^2 \\ z \geq 0}} f(x, y, z) dx dy dz$$

Преобразовать используя:

- Цилиндрические координаты

Перепишем множество интегрирования в новых координатах:
$$\begin{cases} r^2 + h^2 \leq R^2 \\ r^2 \leq h^2 \implies r \leq h \\ h \geq 0, r \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\substack{r^2+h^2 \leq R^2 \\ r \leq h \\ h \geq 0, r \geq 0}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh \\ &= \iint_{\substack{\pi \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \frac{R}{\sqrt{2}}}} r \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) dr \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} r dr \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) dh \end{aligned}$$

- Цилиндрические координаты (второй вариант)

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h r f dr + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} r f dr$$

- Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \psi \\ y = r \sin \varphi \sin \psi \\ z = r \cos \psi \\ \operatorname{tg}^2 \psi \geq 0 \\ \sin \psi \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ r^2 \cos^2 \psi &\leq r^2 \sin^2 \psi \\ r \sin \psi &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \varphi) r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R f(\dots) r^2 \cos \psi dr \end{aligned}$$

Пример.

$$\iiint_E z dx dy dz$$

$E :$

$$\begin{aligned} t^2(x^2 + y^2) &\leq z^2 \\ 0 &\leq z \leq t \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_E z dx dy dz &= \iint\limits_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} dz dt \iint\limits_{\{x^2+y^2 \leq \frac{4z^2}{t^2}\}} z dx dy \\
&= \iint\limits_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} dz dt z \pi \cdot \frac{4z^2}{z^2} \\
&= 4\pi \iint\limits_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} \frac{z^3}{t^2} dz dt \\
&= 4\pi \int_0^3 \frac{1}{t^2} dt \int_0^t z^3 dz = \frac{4\pi}{4} \left(\int_0^3 t^2 dt \right) = \pi \cdot 9
\end{aligned}$$

3 Мера Лебега–Стилтьеса

\square $g(x) \uparrow$ на \mathbb{R} и непрерывна слева $\left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} g(x) \equiv g(x_0) \right)$

Задача 1. Если $h(x)$ – произвольная возрастающая функция, то её можно превратить в непрерывную слева исправлением нбч количества точек.

$\exists \uparrow$ и непрерывная слева $g(x) = h(x)$ всюду кроме точек разрыва $h(x)$

$$g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} h(x)$$

Определим $\mu_g([a, b]) = g(b) - g(a) \geq 0$. Так же верно, что μ_g обладает счетной аддитивностью на \mathcal{P}_1 (доказывается так же, как в случае с мерой Лебега) $\implies \mu_g$ – мера на \mathcal{P}_1

Стандартное продолжение μ_g , которое также обозначается μ_g называется мерой Лебега-Стилтьеса, порождённой функцией g

$$\begin{aligned}
\mu_g(\{c\}) &= \mu_g\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} [c, c + \frac{1}{j}]\right) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_g\left([c, c + \frac{1}{j}]\right) \\
&= \underbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} g(c + \frac{1}{j})}_{=g(c+0)} - g(c) = g(c+0) - g(c)
\end{aligned}$$

\implies Если c – точка непрерывности, то $\mu_g(\{c\}) = 0$

$$\mu_g([a, b]) = \mu_g([a, b]) + \mu_g(\{b\}) = g(b) - g(a) + g(b+0) - g(b) = (g(b+0) - g(a+0))$$

$$\mu_g((a, b)) = \mu_g([a, b]) - \mu(\{a\}) = g(b) - g(a) - (g(a+0) - g(a)) = g(b) - g(a+0)$$

$$\mu_g((a, b]) = g(b+0) - g(a+0)$$

Определение 1. Пусть $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \delta_{a_k}$, $h_k \geq 0$, $\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & a \in E \\ 0, & a \notin E \end{cases}$, тогда μ – дискретная мера.

$$E, E_j \in 2^{\mathbb{R}} \quad E = \bigvee_{j=1}^{\infty} E_j \implies \delta_{a_k}(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{a_k}(E_j)$$

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu\left(\bigvee_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_k \sum_j h_k \delta_{a_k}(E_j) \\ &= \sum_j \mu(E_j)\end{aligned}$$

Последний переход в равенстве по теореме Тонелли.

Замечание. $\sqsubset \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$
 $\forall [a, b] \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty$

Пример. Если $\{a_k\}$ – дискретно (без точек сгущения на \mathbb{R}), то условие автоматически выполняется, т.к. пересечения a_k -ых с промежутком будет конечно, а значит и сама сумма будет конечна

$$A = \mathbb{Q} \quad h_k = \frac{1}{2^k}$$

Определение 2 (функция Хэвисайда).

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

$$\sqsubset x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cdot (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) + C$$

1. $g(x)$ возрастает

$$2. \quad x \in [a, b] \quad \sum_k h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \leq \sum_{a_k: I_{x, x_0}} h_k$$

Разность Тет ненулевая, если a_k находится между x и $x_0 - I_{x, x_0}$

Утверждение 11.1. $A = \{a_k\}_k$

1. $g \in C(\mathbb{R} \setminus A)$

2. Непрерывность слева на A

Доказательство. 1. $\sqsubset x \in \mathbb{R} \setminus A \quad \sqsubset (a, b) \ni x$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty \implies \exists K : \sum_{\substack{a_k \in [a, b] \\ k \geq K}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$g_k(x) = h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k))$ — локально постоянны в точке x ($\exists V_\delta(x) : g_k|_{V_\delta(x)} \equiv const$ для $k = 1, \dots, K$)

Не умаляя общности $[a, b] \supseteq V_\delta(x)$

$$\begin{aligned}
g(\tilde{x}) - g(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k)) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(\tilde{x} - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k)) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^K h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k))}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k))}_{=\frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned}$$

\Rightarrow Непрерывность

Если $x = a_k$ $g(x) = g_{k_0}(x) + \underbrace{\sum_{k \neq k_0} g_k}_{\text{непрерывна как в пред. случае}}$

■

$$\begin{aligned}
\mu_g([a, b]) &= g(b) - g(a) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)) \quad a \leq a_k \leq b \\
&= \sum_{k: a \leq a_k < b} h_k = \mu([a, b])
\end{aligned}$$

μ и μ_g совпадают на совокупности всевозможных промежутков.

Определение 3. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Функция f называется локально суммируемой на $\mathbb{R} \iff \forall [a, b] \quad f \Big|_{[a, b]} \in \mathcal{L}(\lambda_1)$.

Определение 4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Функция f называется абсолютно непрерывной, если существует локально суммируемая функция $h(x)$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda$$

(интеграл Лебега. Если $x < x_0$, то $\int_{x_0}^x h d\lambda = - \int_{[x, x_0]} h d\lambda$)

Если h непрерывна в точке x , то $g(x)$ дифференцируема в точке x и $g'(x) = h(x)$. Доказательство – смотри теорему Барроу...

Если $h(x) \geq 0$, то $g(x) \nearrow$

Функция $g(x)$ непрерывна на \mathbb{R} . Следует из абсолютной непрерывности интеграла.

Теорема 12 (воспоминание).

$$\mu(E) = \int_{\Phi^{-1}} h d\mu \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \inf_E h \mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_E h \mu(E)$$

Замечание.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k))$$

Для этой меры нужно было фиксировать открытый интервал Δ , что

$$\forall [a, b] \subseteq \Delta \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty$$

$$\begin{aligned} g(a_k + 0) - g(a_k - 0) &= h_k (\Theta(a_k - a_k + 0) - \Theta(x_0 - a_k + 0) - \Theta(a_k - a_k - 0) + \Theta(x_0 - a_k - 0)) \\ &= h_k \end{aligned}$$

Утверждение 12.1. Если $\nu = \sum_k h_k \delta_{a_k}$, то ν совпадает с μ_g на \mathcal{A}_{μ_g} при условии (*).

Доказательство. Если хочется скорее сослаться на теорему об единственности, то можно сделать так:

$$\text{Рассмотрим } [a, b]. \quad \nu([a, b]) = \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k.$$

$$\mu_g([a, b]) = g(b) - g(a) = \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k (\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)) = \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k.$$

Если $\{a_k\}_k$ — конечное множество, то вопросов с суммируемостью не возникает.

$$g(x) = \sum_k h_k \cdot \Theta(x - a_k) + C$$

■

Замечание. Локально суммируемая функция — это такая, что она будет на любом шаре суммируемой по Лебегу

Теорема 13. $g(x)$ — абсолютно непрерывная $\iff \exists h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda) \exists x_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda + C$$

По теореме Барроу $g(x)$:

- $g(x) \in C(\mathbb{R})$,
- $g(x)$ дифференцируема в точках ... функции $h(x)$.

Доказательство. • Если $x_1 \in \mathbb{R}$

$$g(x) - g(x_1) = \int_{x_1}^x h(x) dx$$

$$\exists \delta_0 > 0, x \in V_{\delta_0}(x_1), \quad h \in \mathcal{L}(V_{\delta_0})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\leq \delta_0) > 0 : \int_E h(x) d\lambda < \varepsilon \forall E \subseteq V_{\delta_0}(x_1) : \lambda_1(E) < \delta$$

$$\implies \text{Если } |x_1 - x| < \delta \quad \left| \int_{x_1}^x h(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

- Пусть x_1 — точка непрерывности для $h(x)$. $h(x) = h(x_1) + \underbrace{\alpha(x - x_1)}_{o(1) \text{ при } x \rightarrow x_1}$

$$\frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x h(x_1) + \alpha(x - x_1) dx = h(x_1) + \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x \alpha(x - x_1) dx \leq \varepsilon(x - x_1)$$

Если “ x достаточно близок к x_1 ”

■

Замечание. В частности, если $h(x) \in C(\mathbb{R}) \implies g \in C^1(\mathbb{R})$ и $g'(x) \equiv h(x)$

Замечание.

$$\int_E f d\nu = \sum_{k: a_k \in E} h_k f(a_k) = \sum_{k: a_k \in E} f(a_k) \cdot \text{скачок } g(a_k)$$

Утверждение 13.1. $\square g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda_1(x) + C \quad h(x) \geq 0 \quad h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)$ абсолютно непрерывная возрастающая функция.

Тогда $\int_E f d\mu_g = \int_E f(x) h(x) d\lambda(x)$.

В частности, \forall возрастающей $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

$$\int_E f d\mu_g = \int_E f \cdot g'(x) d\lambda(x) \left(= \int_E f \cdot dg \right).$$

Доказательство. $\triangleleft \nu(E) = \int_E h d\lambda_1$.

$$\mu_g(\langle a, b \rangle) = \mu_g([a, b)) = g(b) - g(a) = \int_a^b h(x) d\lambda_1 = \nu([a, b)) = \nu(\langle a, b \rangle).$$

μ_g и ν совпадают на открытых. Если K – компакт, $K = B \setminus (B \setminus K)$

$$\nu(K) + \nu(B \setminus K) = \nu(B) \quad \mu_g(K) = \nu(K) = \nu(B) - \nu(B \setminus K)$$

$\square E$ – λ_1 -мера O

$$\implies \exists \delta > 0 \exists \text{ открытое } G : E \subseteq G \text{ и } : \lambda_1(G) < \delta$$

$$\implies \int_{G_0} |g_0| - \text{абсолютно непрерывное} \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \lambda_1(\tilde{E}) < \delta \quad \tilde{E} \subseteq G$$

$$\int_{\tilde{E}} h < \varepsilon \quad \tilde{E} = G \implies \nu(G) < \varepsilon \implies \mu_g(G) < \varepsilon \quad \forall \implies \nu(E) = \mu_g(E) = 0$$

Если E – неограничено λ_1 -меры $0 \implies \exists$ ограниченное $E_j : E = \bigcup E_j. \forall i \in \mathbb{N} \lambda_1(E_j) = 0 \implies \nu(E_j) = \mu_g(E_j) = 0 \implies \nu(E) = \mu_g(E)$.

Дальше можно применить теорему о плотности меры. Применяю общую схему замены переменной все доказывается. ■

Задача 2. 1. $g(x) = \arctg x$. Найти:

$$(a) \sup \left\{ \mu_g(I) : I = \langle a, b \rangle, \lambda_1(I) \leq \delta \right\}, \delta > 0.$$

$$(b) \sup \left\{ \lambda_1(I) : I = \langle a, b \rangle, \mu_g(I) \leq \delta \right\}, \delta > 0.$$

2. $g(x) = \arctg x + \Theta(x - 1)$

(a) Для $\delta = 1$

Решение. $\mu_g(I) = g(b) - g(a) = \int_I g'(t) dt = \int_{[a,b]} \frac{dt}{1+t^2}$

1. (a)

$$\sup \{ \mu_g(I) \} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+t^2}$$

■

Пример. Пример меры Лебега–Стилтьеса не евклидовой, не дискретной, не абсолютно непрерывной:

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1] \\
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
C_{k+1} &\subseteq C_k \quad C_k - \text{компакт} \\
C &= \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k - \text{компакт} \\
\lambda_1(C) &= \lambda_1([0, 1]) - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \dots - \frac{2^{k-1}}{3^k} = 0
\end{aligned}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{3}x \quad \Theta(x) = 1 - x$$

$$\Phi = \{[0, 1] \cap C, \psi(C), \Theta\psi(C), \psi\psi(C), \psi\Theta(C), \Theta\psi\psi(C), \Theta\psi\Theta\psi(C), \dots\}$$

— полукольцо

$$\mu(C) = 1 \quad \mu(P) = \frac{1}{2^k} - \text{если } P \text{ есть результат применения } k \text{ штук } \psi \text{ и } \Theta$$

$\triangleleft \mu$ — стандартное продолжение

4 Интегралы, зависящие от параметра

Пример.

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0, p \in \mathbb{R}; \quad \int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_{\alpha}^{\beta} (y)^{\beta} (y) f(x, y) dx.$$

Пока что мы будем рассматривать интегралы, зависящие от параметра y по фиксированному промежутку: $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$.

Пусть у нас есть пространство с мерой (X, \mathcal{A}, μ) , $f(\cdot; \mu) \in \mathcal{L}(X, \mu)$. $Y \subseteq \bar{Y}$.

Для чего это нужно? Бывает, что просто сформулированные задачи имеют ответ в виде интеграла с параметром. Бывает, что введение параметра упрощает вычисление интеграла.

Утверждение 13.2. f удовлетворяет условию Лебега локально относительно y_0 , y_0 — параметр, если \exists открытое $V(y_0)$ в \bar{Y} и $\Phi(x) \in \mathcal{L}(X, \mu) \quad \forall y \in V(y_0)$ для почти всех $x \in X$.

Утверждение 13.3. Пусть у нас есть пространство с мерой (X, \mathcal{A}, μ) , \bar{Y} — метрическое пространство, $Y \subseteq \bar{Y}$, y_0 — предельная точка для Y . Почти везде $f(x, y) \rightarrow g(x)$ при $y \rightarrow y_0$, и $f(x, y)$ удовлетворяет локально условию Лебега относительно y_0 .

Тогда $g(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ и

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

Доказательство. Так как y_0 — предельная, $\exists \{y_k\} \subseteq Y \rightarrow y_0$. $f_k(x) = f(x, y_k)$, $y_k \in V(y_0) \implies |f_k(x)| \leq \Phi(x) \implies$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ и

$$\int_X g(x) d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f(x, y_k) d\mu.$$

$$I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I(y_k) \quad \forall \text{ последовательности } y_k \rightarrow y_0 \implies \exists \lim_{y \rightarrow y_0} I(y).$$

■

Пример. $\square p_0 > 0 \quad \square$

$$\forall p \in V_\delta(p)$$

$$x \in (0, 1] \quad x^{p-1}e^{-x} \leq x^{p_0-\delta}e^{-x}$$

$$x > 1 \quad x^{p-1}e^{-x} \leq x^{p_0+\delta}e^{-x}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^{p_0-\delta}e^{-x} & , x \in (0, 1] \\ x^{p_0+\delta}e^{-x} & , x > 1 \end{cases} \quad \int_0^{+\infty} x^q e^{-x} dx - \text{сходится для любого}$$

Замечание. Если в условиях предыдущего утверждения $f(x, y)$ — непрерывна по y в точке y_0 , то наш интеграл $I(y)$ тоже будет непрерывен в точке y_0 .

Определение 5. Пусть имеется пространство с мерой (X, \mathcal{A}, μ) , y_0 — предельная точка для $Y \subseteq \bar{Y}$ $f(x, y) \rightrightarrows g(x)$ на X при $y \rightarrow y_0$ если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ окрестность $V(y_0)$:

$$\forall x \in X \quad \forall y \in V(y_0) \quad |f(x, y) - g(x)| < \varepsilon \iff \sup_{x \in X} |f(x, y) - g(x)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0.$$

Пример. 1. (хороший) $f(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \quad y \rightarrow +\infty$

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{1+y^n} \implies y \rightarrow \infty \sup |f(x, y)| = \frac{1}{1+y^n} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0.$$

Сходимость есть и равномерная сходимость тоже есть.

2. (плохой) $xye^{-xy} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$. Сходимость к нулю есть, а

$$\sup_{x > 0} xye^{-xy} \geq f\left(\frac{1}{y}, y\right) = \frac{1}{e} \not\rightarrow 0 \implies \text{равномерно не сходится.}$$

Утверждение 13.4. Пусть (X, \mathcal{A}, μ) , $\mu(X) < +\infty$.

$$f(x, y) \rightrightarrows g(x), \quad f(x, y) \in \mathcal{L}(X, \mu).$$

Тогда $g(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ И

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

Доказательство. Для $\varepsilon = 1 \quad \exists$ окрестность $V(y_0)$: $\forall x \in X, y \in V(y_0) \quad |f(x, y) - g(x)| \leq 1$:

$$|g(x)| \leq |f(x, y)| + |g(x) - f(x, y)| \leq |f(x, y)| + 1 \implies g \in \mathcal{L}(X, \mu) \quad \blacksquare$$

Утверждение 13.5. (X, \mathcal{A}, μ) — пространство с метрой $Y \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C})$, y_0 — предельная точка для Y . Пусть $f(x, y)$, f'_y — удовлетворяет условию Липшица локально, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Тогда $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ дифференцируема в точке y_0 и

$$I'(y_0) = \int_X f'_y(x, y) d\mu(x).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} I'(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_X \underbrace{(f(x, y) - f(x, y_0))}_{f'_y(x, y_0 + \Theta(y - y_0)), \quad \Theta \in (0, 1)} d\mu(x) \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f'_y(x, y_0 + \Theta(y - y_0)) d\mu(x) \\ &\stackrel{\text{УТВ}}{=} \int_X \lim(\dots) d\mu(x) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x). \end{aligned}$$

$y \in V_\delta(y_0)$ – из условия Липшица для $f'_y \implies C(y) \in V_\delta(y_0)$

$$\implies \left| \underbrace{f'_y(x, C(y))}_{f'_y(x, y_0)} \right| \leq \Phi(x)$$

■

Пример. $\Gamma(p) \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} d\mu.$

$$f'_p(x, p) = (p-1)x^{p-2}e^{-x}, \quad p-2 > -1 \implies p > 1.$$

При $p > 1$

$$\Gamma'(p) = (p-1) \int_0^{+\infty} x^{p-2} e^{-x} = (p-1) \cdot \Gamma(p-1) \implies \Gamma'(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1).$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} \frac{(x^p)'}{p} = \frac{1}{p} \left(x^p e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^{+\infty} x^p (e^{-x})' dx \right) = \frac{1}{p} \cdot (p+1).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}.$$