

Конспекты по математической логике

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев, Константин Бац

2022 год, семестр 4

1 Введение

Логика – довольно старая наука, но наш предмет довольно молодой. В какой-то момент логики как дисциплины, которая учит просто правильно рассуждать, стало не хватать. Появилась теория множеств. Общего здравого смысла не хватает, нужен строгий математический язык. Это рубеж 19-20 веков.

У нас теория множеств не будет фокусом, как это могло бы быть на мат. факультете.

Теория множеств, когда она была впервые сформулирована, была противоречива (как матан, сформулированный Ньютоном). Чтобы уверенно и эффективно заниматься матаном, нужно суметь его формализовать.

<Парадокс Рассела / парадокс брадобрея> Мы приписываем элементу-человеку свойство, которое невыполнимо. Объекта, выходит, не существует. Мы смогли очень быстро определить противоречие в этом определении. Но, может быть, мы не смогли его определить в других наших определениях? (конструкциях вещественной прямой, и т.д. и т.д.)

Программа Гильберта.

1. Формализуем математику! Сформулируем теорию на языке (не на русском или английском), который не будет допускать парадоксов,
2. ... и на котором можно будет доказать непротиворечивость.

В 1930 году становится понятно, что сколько-нибудь сильная (= в ней можно построить формальную арифметику) теория не может быть доказана непротиворечивой.

Возможно, сама наша логика неправильная? Эта идея будет нам полезна, и к ней мы ещё вернемся.

Возможно, что это просто свойство мира, и мы хотим невозможного.

Из этих рассуждений выросло большое множество хороших идей, которые оказались полезны в других местах. Матлогика служит широкому кругу нужд.

Мы можем доказывать, что программа работает корректно. Именно доказывать, а не проверять тестами!

Мы можем изучать свойства самих языков. Изоморфизм Карри-Говарда – доказательство это программа, утверждения это тип. Можно изучать языки программирования и можно развернуть изоморфизм: изучать математику как язык программирования.

Функциональные языки: окамль + хаскель. Ознакомление с этими языками представляет собой способ ознакомиться с предметом немного с другой стороны.

2 Исчисление высказываний

Мы говорим на двух языках: на предметном языке и метаязыке. Предметный язык – это то, что изучается, а метаязык – это язык, на котором это изучается.

На уроках английского предметным является сам английский, а метаязыком может быть русский. Метаязык – это язык исследователя, а предметный язык – это язык исследуемого. Что такое язык вообще? Хороший вопрос.

Высказывание – это одно из двух:

1. Большая латинская буква начала алфавита, возможно с индексами и штрихами – это пропозициональные переменные.
2. Выражение вида $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\neg \alpha)$.

В определении выше альфа и бета это метапеременные— места, куда можно подставить высказывание.

1. α, β, γ — метапеременные для всех высказываний.
2. X, Y, Z — метапеременные для пропозициональных переменных.

Метапеременные являются частью языка исследователя.

В формализации мы останавливаемся до места, в котором мы можем быть уверены, что сможем написать программу, которая всё проверяет.

Сокращение записи, приоритет операций: сначала \neg , потом $\&$, потом \vee , потом \rightarrow . Если скобки опущены, мы восстанавливаем их по приоритетам. Выражение без скобок является частью метаязыка, и становится частью предметного, когда мы восстанавливаем их. Скобки последовательных импликаций расставляются по правилу правой ассоциативности — справа налево.

2.1 Теория моделей

У нас есть истинные значения $\{T, F\}$ в классической логике. И есть оценка высказываний $\llbracket \alpha \rrbracket$. Например $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket$ истинно. Всё, что касается истинности высказываний, касается теории моделей.

Определение 1. Оценка — это функция, сопоставляющая высказыванию его истинное (истинностное) значение.

2.2 Теория доказательств

Определение 2. Аксиомы — это список высказываний. Схема аксиомы — высказывание вместе с метопеременными; при любой подстановке высказываний вместо метапеременной получим аксиому.

Определение 3. Доказательство (вывод) — последовательность высказываний $\gamma_1, \gamma_2 \dots$ где γ_i — любая аксиома, либо существуют $j, k < i$ такие что $\gamma_j \equiv (\gamma_k \rightarrow \gamma_i)$. (знак \equiv здесь сокращение для "имеет вид"). Это правило "перехода по следствию" или Modus ponens.

Определим следующие 10 схем аксиом для того исчисления высказываний, которое мы рассматриваем.

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ — добавляет импликацию
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ — удаляет импликацию
3. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$
4. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
5. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\neg \alpha)$
10. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$ — очень спорная штука.

<вывод $A \rightarrow A$ >

3 Теорема о дедукции

Определение 4. (Метаметаопределение). Будем большими греческими буквами $\Gamma, \Delta, \Sigma \dots$ — списки формул, неупорядоченные.

Определение 5. Вывод из гипотез: $\Gamma \vdash \alpha$ (см. лекцию 1)

Теорема 1. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Доказательство. \Leftarrow Пусть $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n \equiv \alpha \rightarrow \beta$ выводит $\alpha \rightarrow \beta$. Дополним этот вывод двумя новыми высказываниями: $\delta_{n+1} \equiv \alpha$ (дано нам в гипотезе), $\gamma_{n+2} \equiv \beta$ (МР шагов $n, n+1$) — это и требовалось.

- Напишем программу, которая трансформирует один вывод в другой. Инвариант, который мы будем поддерживать: всё до $\alpha \rightarrow \delta_i$ — док-во. Доказательство индукцией по n .

1. База: $n = 1$ — без комментариев.
2. Если $\delta_1, \dots, \gamma_n$ можно перестроить в доказательство $\alpha \rightarrow \gamma_n$, то $\gamma_1 \dots \gamma_{n+1}$ тоже можно перестроить. Разберём случаи:
 - (a) δ_i — аксиома или гипотеза из Γ .
(i-0.6) δ_i
(i-0.3) $\delta_i \rightarrow \alpha \rightarrow \delta_i$
(i) $\alpha \rightarrow \delta_i$
 - (b) $\alpha_i \rightarrow \delta$
(i-0.8, i-0.6, i-0.4, i-0.2) (доказательство $\alpha \rightarrow \alpha$)
(i) $\alpha \rightarrow \alpha$
 - (c) δ_i получено из δ_j и δ_k
(j) $\alpha \rightarrow \dots$

ДОПОЛНИТЬ

■

4 Теория моделей

Мы можем доказывать модели или оценивать их. "Мы можем доказать, что мост не развалится или можем выйти и попрыгать на нём."

Определение 6. \mathbb{V} — истинностное множество.

F — множество высказываний нашего исчисления высказываний.

P — множество пропозициональных переменных.

$\llbracket \cdot \rrbracket : F \rightarrow \mathbb{V}$ — оценка

Определение 7. Для задания оценки необходимо задать оценку пропозициональных переменных.

$\llbracket \cdot \rrbracket : P \rightarrow \mathbb{V} \quad f_P$

Тогда:

$\llbracket x \rrbracket = f_P(x)$

Замечание. Обозначение: значения пропозициональных переменных будем определять в верхнем индексе: $\llbracket \alpha \rrbracket^{A=T, B=F \dots}$

Определение 8. α — общезначна (истинна), если $\llbracket \alpha \rrbracket = T$ при любой оценке P .
 α — невыполнима (ложна), если $\llbracket \alpha \rrbracket = F$ при любой оценке P .
 α — выполнима, если $\llbracket \alpha \rrbracket = T$ при некоторой f_P .
 α — опровержима, если $\llbracket \alpha \rrbracket = F$ при некоторой f_P .

Определение 9. Теория корректна, если доказуемость влечёт общезначимость.
 Теория полна, если общезначимость влечёт доказуемость.

Определение 10. $\Gamma \vdash \alpha$ означает, что α следует из $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, если $\llbracket \alpha \rrbracket = T$ всегда при $\llbracket \gamma_i \rrbracket = T$ при любых i .

Теорема 2. Исчисление высказываний корректно

$$\vdash \alpha \text{ влечёт } \vdash \alpha.$$

Доказательство. Индукция по длине доказательства.

Разбор случаев:

1. γ_n аксиома \implies построить таблицу истинности
2. γ_n — м.п. γ_j, γ_k

■

Мы даём доказательство на метаязыке, не пускаясь в отчаянный формализм. Такая строгость нас устраивает.

В матлогике бессмысленно формализовывать русский язык. Она нужна, чтобы дать ответы на сложные вопросы в математике, где здравого смысла недостаточно и нужна формализация.

5 Полнота исчисления высказываний

Теорема 3. Исчисление высказываний полно.

Определение 11. $[\beta]\alpha = \begin{cases} \alpha, & \llbracket \beta \rrbracket = T \\ \neg\alpha, & \llbracket \beta \rrbracket = F \end{cases}$

Лемма 3.1. $[\alpha]\alpha, [\beta]\beta \vdash_{[\alpha \star \beta]} \alpha \star \beta$
 $[\alpha]\alpha \vdash_{[\neg\alpha]} \neg\alpha$

Лемма 3.2. Если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma, \Delta \vdash \alpha$.

Лемма 3.3. Пусть дана α, X_1, \dots, X_n — её переменные.

$$[X_1]X_1, \dots, [X_n]X_n \vdash_{[\alpha]} \alpha$$

Сократим запись и вместо этой кучи X будем писать X' .

Лемма 3.4. Если $\models \alpha$, то $X' \vdash \alpha$.

Лемма 3.5.

$$\Gamma, Y \vdash \alpha, \quad \Gamma, \neg Y \vdash, \quad \text{то } \Gamma \vdash \alpha$$

Теорема 4. Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

6 Интуиционистская логика

Мы не хотим дурацких конструкций вроде парадокса брадобрея. Мы не хотим странных, но логически верных утверждений вроде $A \rightarrow B \vee B \rightarrow A$. Интуиционистская логика предлагает свою математику, в которой своя интерпретация логических связок. ВНК-интерпретация (Брауер-Гейтинг-Колмогоров).

- $\alpha, \beta, \gamma \dots$ — это конструкции.
- $\alpha \wedge \beta$ если мы умеем строить и α , и β .
- $\alpha \vee \beta$, если мы умеем строить α, β и знаем, что именно.
- $\alpha \rightarrow \beta$, если мы умеем перестроить α в β .
- \perp — не имеет построения
- $\neg \alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$

”Теория доказательств”. Рассмотрим классическое исчисление высказываний и заменим схему аксиом 10 на следующую

$$\alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta$$

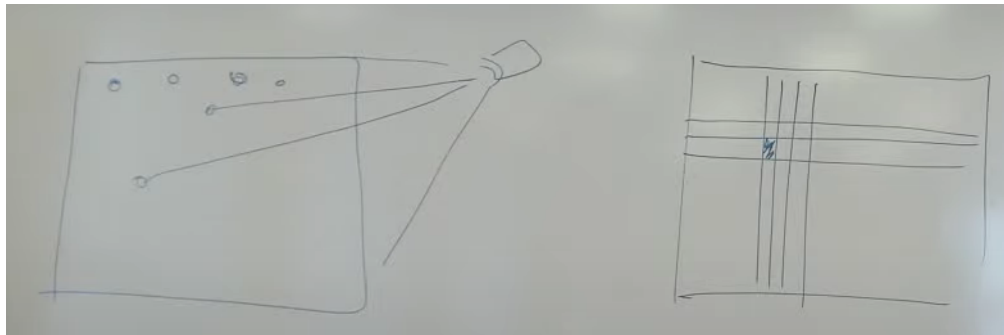
В этой формализации мы следуем не сути интуиционистской логики, а традиции. В интуиционистской логике формализм это не источник логики.

Примеры моделей.

1. Модели КИВ подходят: корректны, но не полны.
2. Пусть X топологическое пространство.

7 Общая топология

Раньше были телевизоры с *бесконечным* количеством пикселей (это зависит от химических свойств вещества кинескоп).



Возьмем множество X . Определим на нем топологию как подмножество множества всех подмножеств $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ω — топология, если это множество открытых множеств и выполнены следующие условия:

1. $\emptyset, X \in \Omega$;

2. $\bigcup_i \in \Omega$, если все $A_i \in \Omega$;

3. $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \Omega$, если $A_1, \dots, A_n \in \Omega$.

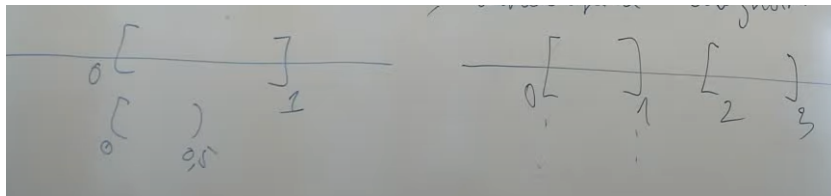
То есть топологическое пространство — пара $\langle X, \Omega \rangle$ и про Ω верны приведенные выше три утверждения.

Определение 12 (Замкнутое множество). Множество B такое, что $X \setminus B \in \Omega$ называется замкнутым.

Определение 13 (Связное топологическое пространство). $\langle X, \Omega \rangle$ связно, если нет $A, B \in \Omega : A \cup B = X$ и $A \cap B = \emptyset$

Определение 14 (Подпространство). $\langle X_1, \Omega_1 \rangle$ — подпространство $\langle X, \Omega \rangle$, если $X_1 \subseteq X$ и $\Omega_1 = \{a \cap X_1 \mid a \in \Omega\}$

Определение 15 (Связное множество). Множество, являющееся связным подпространством.



7.1 Примеры топологических пространств

Возьмем дерево (граф). Множество X — множество вершин. Ω — множество всех вершин, что $B \in \Omega$, если $a \in B$, $x \leq a$ влечет $x \in B$. То есть Ω — семейство множеств вершин, которые входят вместе с поддеревом.

Теорема 5. Граф без цикла связан тогда и только тогда, когда оно связно как топологическое пространство.

Доказательство будет в дз.



Определение 16 (Решетки). X — частично упорядоченное множество отношением \leq .

Множество верхних граней a, b — множество $\{x \in X \mid a \leq x, b \leq x\}$.

Множество нижних граней a, b — $a \sqcup b$ — множество $\{x \in X \mid a \geq x, b \geq x\}$.

A , наименьший элемент A — такой $a \in A$, что нет $b \in A$, $b \leq a$.

$a + b$ = наименьший элемент множества верхних граней.

$a \cdot b$ = наибольший элемент множества нижних граней.

Решетка — частично упорядоченное множество, где для любых двух элементов существуют $a + b$ и $a \cdot b$.

Пример. Дерево — не решетка (в общем случае), так как $a + b$ есть, а $a \cdot b$ может не быть.

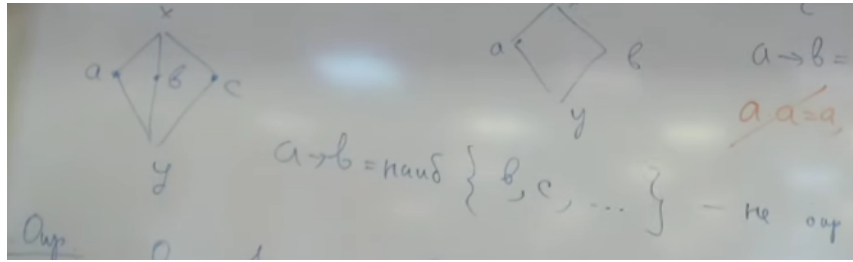
Теорема 6. Пусть $\langle X, \Omega \rangle$ топологическое пространство, $A, B \in \Omega$. $A \leq B$, если $A \subseteq B$.
Тогда $\langle \Omega, \leq \rangle$ — решетка. $A \cdot B = A \cap B$, $A + B = A \cup B$.

Определение 17. Дистрибутивная решетка — это такая решетка, что $a, b, c \in \Omega$, $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

Лемма 6.1. Для дистрибутивной решетки так же верно, что $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Определение 18. Псевдодополнение $a \rightarrow b = \text{наименьшее } \{c \mid a \cdot c \leq b\} = b$.

Определение 19. Диамант — такая решетка, что там нет для кого-то псевдодополнения.



Определение 20. Решетка с псевдодополнением для всех элементов называется импликативной.

Определение 21. Определим 0 и 1 следующим образом:

- 0 — элемент, что $0 \leq x$ при всех x ;
- 1 — элемент, что $x \leq 1$ при всех x .

Теорема 7 (В импликативной решетке 1 есть всегда). $\langle X, \leq \rangle$ — импликативная решетка.
Рассмотрим $a \rightarrow a = \text{наиб}\{c \mid a \cdot c \leq a\} = \text{наиб}\{X\} = 1$.

Теорема 8. Рассмотрим $\langle X, \Omega \rangle$ — импликативная решетка с 0. Рассмотрим И.И.В.
Определим оценки $\mathbb{V} = X$:

- $\llbracket \alpha \& \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket$.
- $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket$.
- $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket$.
- $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0$.

α истинно, если $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$.

Полученная модель — корректная модель И.И.В.

У нас будет натуральный вывод, интуиция и все такое.

$\overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$ (аксиома).

Вывод утверждения в доказательстве $\Gamma \vdash \varphi$.

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}, \quad \frac{\Gamma, \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \varphi}, \quad \frac{\Gamma, \vdash \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}, \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}, \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}, \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}, \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}.$$

В теореме выше нужно добавить, что $\llbracket \perp \rrbracket = 0$.

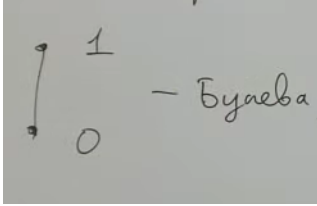
$\neg \alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$.

Определение 22. Алгебра Гейтинга — импликативная решетка с 0.

Введем операцию $\sim a \equiv a \rightarrow 0$ — дополнение до 0.

Определение 23. Булева алгебра — Алгебра Гейтинга, где $a + \sim a = 1$.

Пример. Булева Алгебра



- \cdot соответствует $\&$,
- $+$ соответствует \vee ,
- \rightarrow соответствует \rightarrow ,
- \sim соответствует \neg .

Далее α, β — высказывания в ИИВ.

Определение 24. $\alpha \leq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$

Определение 25. $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$

Определение 26. Пусть ξ — множество всех высказываний ИИВ.

Тогда $[\xi]$ — называется алгеброй Линденбаума \mathcal{L} .

Теорема 9. \mathcal{L} — Алгебра Гейтинга.

Лемма 9.1. $1 = [A \rightarrow A]$

Доказательство. $\alpha \vdash A \rightarrow A$, верно (очевидно), то есть $[\alpha] \leq [A \rightarrow A]$, то есть $[A \rightarrow A] = 1$. ■

Теорема 10. \mathcal{L} — корректная модель ИИВ.

Теорема 11. \mathcal{L} — полная модель ИИВ.

Теорема 12. $\models \alpha$, то есть $[\alpha] = 1$.

$1 = [A \rightarrow A]$, то есть $[\alpha] = 1$, то есть $\beta \leq [\alpha]$ при всех β .

Возьмем $\beta = A \rightarrow A$, $A \rightarrow A \vdash \alpha$, то есть $A \rightarrow A, (A \rightarrow A) \rightarrow \alpha$.

Теорема 13. Алгебра Гейтинга — полная и корректная модель ИИВ.

Определение 27. Исчисление дизъюнктно, если для любых α, β $\vdash \alpha \vee \beta$ влечёт $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$.

Теорема 14. ИИВ дизъюнктно.

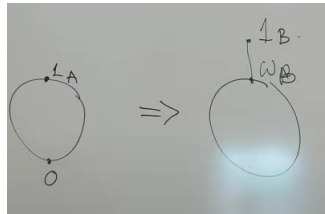
Определение 28. Пусть существует $f : A \rightarrow B$, A, B — алгебры Гейтинга.

f — гомоморфизм, если $f(0_A) = 0_B$, $f(1_A) = 1_B$ и $f(\alpha \star_A \beta) = f(\alpha) \star_B f(\beta)$

Определение 29 (Гёделева Алгебра). Это такая алгебра, где $a + b = 1$ влечет $a = 1$ или $b = 1$.

Определение 30 ($\Gamma(A)$). Пусть A — алгебра Гейтинга.

Определим $\gamma : A \rightarrow \Gamma(A)$ так: $\gamma(x) = \begin{cases} \omega, & x = 1_A \\ x, & x < 1_A \end{cases}$ и добавим $1_{\Gamma(A)}$: $t \leq 1_{\Gamma(A)}$, если $t \in \Gamma(A)$.



Замечание. $\Gamma(A)$ неофициально называется Гёделеризацией.

Теорема 15. $\Gamma(A)$ — Гёделева алгебра.

Доказательство. Пусть $a + b = 1_{\Gamma(A)}$, посмотрим на картинку. ■

Утверждение 15.1. $\Gamma(\mathcal{L})$ — Гёделева алгебра.

Доказательство. Определим каноническое отображение $g(x) : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x = 1 \text{ или } \omega \\ x & , \text{ иначе} \end{cases}$$

Утверждение 15.2. $g(x)$ – гомоморфизм

■

Теорема 16. Рассмотрим ИИВ и алгебры Гейтинга $\mathcal{L}, \Gamma(\mathcal{L})$

Утверждение 16.1. Если $g : A \rightarrow B$ и $\llbracket \alpha \rrbracket_A = 1_A$, то $\llbracket \alpha \rrbracket_B = g(1_A)$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим $\vdash \alpha \vee \beta$.

$\Gamma(\mathcal{L})$ — Геделва алгебра, то есть алгебра Гейтинга.

$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$, т.е. либо $\llbracket \alpha \rrbracket = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$ либо $\llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$

Рассмотрим $g : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$

$\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1_{\Gamma(\mathcal{L})}$, тогда $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}} = g(1_{\Gamma(\mathcal{L})}) = 1_{\mathcal{L}}$

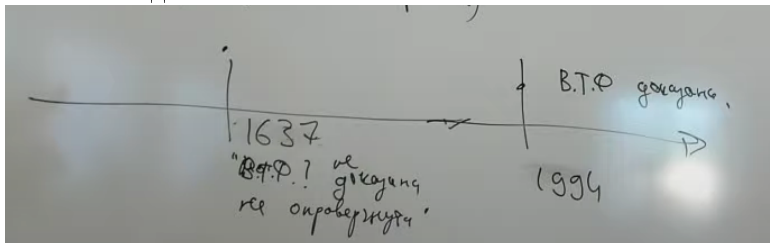
т.е. $\vdash \alpha$.

■

Определение 31. Модель ИИВ называется табличной, если

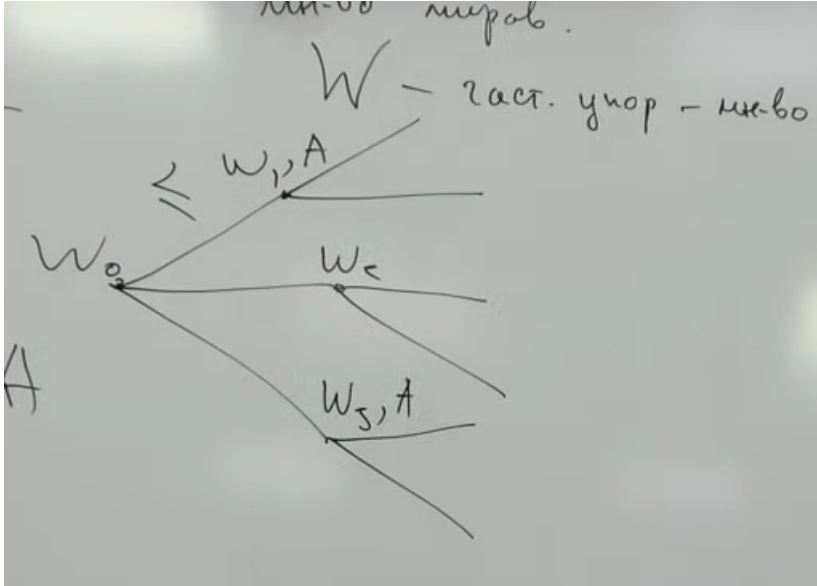
- $\mathbb{V} = \mathcal{S}$;
- $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$,
- Существует $I \in \mathcal{S}$ – выделенная истина $\llbracket \alpha \rrbracket = I$ тогда и только тогда, когда $\vdash \alpha$

Определение 32 (Модель Крипки). Некоторые факты, появившиеся на оси времени в истинном или ложном виде и больше не меняется



Замечание. W – частично упорядоченное множество миров.

Определение 33. \Vdash



1. Вынужденность переменной A определяется моделью. При этом, если $W_x \leq W_y$, $W_x \Vdash A$, то $W_y \Vdash A$.
2. Доопределим \Vdash на все выражения:
 - (a) $W \Vdash A \wedge B$, если $W \Vdash A$ и $W \Vdash B$
 - (b) $W \Vdash A \vee B$, если $W \Vdash A$ или $W \Vdash B$
 - (c) $W \Vdash \neg A$, если нет $W \leq W_x$, что $W_x \Vdash A$
 - (d) $W \Vdash A \rightarrow B$, если во всех $W \leq W_x$ из $W_x \Vdash A$ следует $W_x \Vdash B$

Теорема 17. У ИИВ нет полной конечной табличной модели.

Доказательство. $\varphi(u) \bigvee_{i \neq j}^n A_i \rightarrow A_j$

Пусть T — модель, $|\mathbb{V}| = n$.

Рассмотрим $\varphi(n+1)$. По принципу Дирихле. Есть A_j и A_i : $\llbracket A_j \rrbracket = \llbracket A_i \rrbracket$.

Несложно показать $\llbracket A_i \rightarrow A_j \rrbracket = I$. $\llbracket \varphi(n+1) \rrbracket = I$. ■

Теорема 18. Модель Крипке — корректная модель ИИВ.

7.2 Изоморфизм Кари–Ховарда

Утверждение 18.1. τ, σ — типы.

$\tau \rightarrow \sigma$

```

1  f(x :  $\tau$ ) :  $\sigma$  {
2      return g(x);
3  }
```

$\tau \& \sigma$

```

1  f(x :  $\tau$ , y :  $\sigma$ )
```

$\tau \vee \sigma$

1 `f(x: std:variant< τ , σ >)`

Определение 34 (Изоморфизм Кари–Ховарда). Программа соответствует доказательству. Тип соответствует утверждению. ...
(всё в интуиционистской логике)

Замечание. $f : \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ – потом подумаем как это интерпретировать.