ДМ, лекции

Последний семестр дискретной математики. Две больших темы: производящие функции (комбинаторика) и введение в теорию вычислимости.

1 Производящие фукнции

Рассмотрим последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\ltimes} \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Назовём эти последовательности A и B и будем почленную сумму обозначать кратко $A+B$. Это несколько неудобно и неестественно, об этих конвенциях нужно договариваться.

Вместо этого давайте рассмотрим формальный степенной ряд, у которого члены последовательности это коэффициенты ряда.

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots a_n t^n + \dots$$

Тогда почленная сумма последовательностей будет соотвествовать обычной сумме рядов $A(t) + B(t)$.

Чтобы сдвинуть последовательность на 1 вправо, можно просто умножить степенной ряд на x.

Можем рассмотреть степенной ряд-композицию $A(t^2) = a_0 + 0t + a_1 t^2 + \dots$. Это степенной ряд, соответвующий последовательности $a_0, 0, a_1, 0, a_2 \dots$.

Таким образом, мы можем "оперировать" над последовательностью как единым целым, и это очень удобно.

Мы не рассматриваем степенные ряды с стороны, с которой на них смотрит мат. анализ: как способ приблизить фукнцию, с некоторым радиусом сходимости и т.д. У нас степенные ряды *формальные* и не всегда (всегда не) должны пониматься как функции, в которой в переменную можно подставить значение.

$\mathbb{R}[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца R, состоящий из формальных многочленов. $\mathbb{R}[x]^+$ — множество формальных степенных рядов.

Определение 1. Формальный степенной ряд $A(t)$ последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется производящей функцией (generating function).

Название неудачное. Оно связано с другими корнями понятия производящей функции (они нужны не только в комбинаторике).

Определена сумма производящих функций и произведение

$$A(t)B(t) = C(t) \quad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Несмотря на то, что мы работаем с бесконечным по размеру обьектом, нам необходимо только конечное число элементов, чтобы посчитать каждый отдельынй его член. Этот раздел дискретной математики не любит предельных переходов.

Определено умножение на скаляр.

$$\lambda A(t) = C(t) \quad c_n = \lambda a_n$$

Определено даже деление!

$$\frac{A(t)}{B(t)} = C(t);\ b_0 \neq 0 \quad c_n = \frac{a_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i b_{n-i}}{b_0}$$

Так можно посчитать, например, что

$$C(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots t^n + \dots; \quad a_n = 1$$

Мы записали короткой (конечной) производящей функцией бесконечную последовательность. Более того, мы можем эту запись взять и производить с ней операции (умножать и складывать с другими производящими функциями).

$$\frac{1}{1-2t} = 1 + 2t + 4t^2 + \ldots + 2^n t^n; \quad c_n = 2^n$$

Обобщая мы видим, что

$$\frac{1}{1-bt} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n t^n = C(bt)$$

Вообще говоря,

$$A(t) = \sum a_n t^n \quad A(bt) = \sum a_n b^n t^n$$

Замечание 1. Если $b_0 = \pm 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, тогда $C = \frac{A}{B}$ с целочисленными коэффициентами $c_i \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{1}{1-t-t^2} = 1 + t + 2t^2 + \ldots + F_n t^n + \ldots$$

Мы одной дробью породили целую последовательность Фиббоначи!

А как быть, если мы хотим взять последовательность и найти представление для её производящей функции? Мы можем поступить так.

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Отсюда $F(t) + F(t)t = \frac{F(t)-1}{t}$ (следует из операций над производящими функциями и рекурентным соотношением последовательности фиббоначи).

А что с дифференцированием? Обыкновенная операция взятия производной (формального) степенного ряда позволяет нам умножать член последовательности на его номер.

$$A(t) \to A(t)' \cdot t$$

Эту операцию можно производить многократно, получая последовательноть членов исходной п-ти в k степени.

Как найти представление производящей функции для последовательности $a_n = n$?

$$a_n = n * 1$$

Производящая функция для п-ти единиц это $\frac{1}{1-t}$. Тогда

$$A(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)' t = \frac{t}{(1-t^2)}$$

Формальное деление это подтверждает.

А что с интегрированием? С интегрированием всё не очень мило.

А что с композицией?

$$C(t) = A(B(t))$$

Здесь много проблем доставляет свободый коэффициент у B. Давайте его уберем — $b_0 = 0$. Теперь мы можем посчитать

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{n=i_1+i_2+\ldots i_k} b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_k}$$

Пример с доминошками.

Пример с деревьями.

2 Линейные рекуррентые последовательности. Регулярные производящие функции

Определение 2 (Линейные рекуррентные последовательности)**.** Пусть даны первые k членов последовательности $a_0, a_1, \dots, a_k$. А все следующае члены определяются, как линейная комбинации k предыдущих.

$$a_n = a_{n-1} \cdot c_1 + a_{n-2} \cdot c_2 + \dots + a_{n-k} \cdot c_k.$$

Такаяя последовательность называется **линейной рекурентной последовательностью**.

Пример 1. Числа Фибоначч. $F_0 = 1,\ F_1 = 1, \forall\ n \geqslant 2\ :\ F_n = F_{n11} + F_{n-2}$

$$\frac{1}{1-t-t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} F_i t^i.$$

Обозначим $F(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} F_i t^i = F_0 t^0 + F_1 t^1 + \sum_{i=2}^{\infty} F_i t^i =$
$= 1 + t + \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1} t^i + \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-2} t^i = 1 + t + t \cdot \sum_{i=1}^{\infty} F_i t^i + t^2 \sum_{i=0}^{\infty} F_i t^i =$
$= 1 + t + t \cdot (F(t) - 1) + t^2 \cdot F(t) \implies F = 1 + t \cdot F + t^2 F \implies$
$F(t) = \dfrac{1}{1-t-t^2}.$

Теорема 1. Пусть есть линейная рекуррентная последовательность порядка k:
$a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \dots$.

Даны $a_0, \dots, a_{k-1},\ \forall n \geqslant k\ :\ a_n = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i} \cdot c_i$.

Тогда $A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$ — рациональная функция, где
$Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$, а $P(t) = \dots$.

Доказательство. Обозначим

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i + \sum_{n=k}^{\infty} a_i t^n.$$

Сразу заменим последнюю сумму предположеним из теоремы, получим

$$A(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i + \sum_{n=k}^{\infty} t^n \sum_{i=1}^{k} a_{n-i} \cdot c_i = S + \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-i} t^n = S + \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot t^i \cdot \sum_{n=k-1}^{\infty} a_n t^n =$$

$$= S + \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot t^i \cdot (A(t) - A_{k-1}(t)) = X.$$

Пусть $C(t) = \sum_{k=1}^{k} c_i t^i$, тогда $Q(t) = q - C(t)$. $\quad X = S + C(t) \cdot A(t) - \sum_{k=1}^{k} c_i t^i A_{k-i}(t) = Y$.
Пусть $F(t) \,\%\, t^k = \sum_{i=0}^{k-1} f_i t^i$, тогда $A_{k-i}(t) = A(t) \,\%\, t^{k-1}$.

$$\sum_{k=1}^{k} c_i t^i A_{k-i}(t) \cdot Ak - i(t) = A(t) \,\%\, t^{k-i} = (C(t) \cdot A(t)) \,\%\, t^k \implies$$

$$A(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i + C(t) \cdot A(t) - (C(t) \cdot A(t)) \,\%\, t^k \implies A(t)(1 - C(t)) = ((1 - C(t)) \cdot A(t)) \,\%\, t^k$$

$$\implies A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}, \quad \text{где} \ \ Q(t) = 1 - C(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k,$$

$$P(t) = \left(\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i \right) \cdot Q(t) \right) \mod t^k.$$

□

Пример 2. Для чисел фибоначчи: $a_0 = a_1 = 1,\ c_1 = c_2 = 1 \implies$

$$A(t) = \frac{(1+t)\cdot(1-t-t^2) \mod t^2}{1-t-t^2}.$$

$$a_0 = 6,\ a_1 = -3,\ c_1 = c_2 = 1 \quad \implies \quad A(t) = \frac{(6-3t)\cdot(1-t) \mod t^2}{1-t-t^2} = \frac{6-9t}{1-t-t^2}.$$

Доказательство в обратном направлении. Частный случай:

$$\frac{1}{1-C(t)} = A(t),\ A(t)\cdot(1-C(t)) = 1,$$

$$t^0 = a_0 = 1,\ t^1 : a_1 \cdot 1 - a_0 c_1 = 0,\ t^2 : a_2 \cdot 1 - a_1 \cdot c_1 - a_0 c_2 = 0.$$

Посмотрим на некоторую производящую функцию, например $\frac{1-3t+6t^3}{1-t-t^2-t^4}$. Понимаем, что $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-4}$.

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1-3 = -2,\ a_2 = 1-2 = -1,\ = -1-2+6 = 3$$

$$A(t)\cdot Q(t) = P(t). \quad \sum_{i=0}^{n} q_i \cdot a_{n-i} = p_n \quad a_n = p_n - \sum_{i=1}^{k} q_i \cdot a_{n-i}.$$

□

Пусть $a_0, a_1, \dots, a_{k-1},\ \forall n \geqslant k\ : a_n \sum_{i=1}^{k} a_{n-i} \cdot c_i$.

Задача: посчитать a_n.

Можно явно за $\mathcal{O}(n \cdot k)$.

Можно через возведение матрицы в степень за $\mathcal{O}(k^3 \log_2 n)$.

Потом мы научимся делать это за $\mathcal{O}(k^2 \log_2 n)$.

На самом деле, для одной и той же числовой последовательности можно получить несколько производящих функций.

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \cdot \frac{Q(-t)}{Q(-t)} = \frac{P(t)\cdot Q(-t)}{Q(t)\cdot Q(-t)}.$$

Например, для чисел Фибоначчи:

$$\frac{1}{1-t-t^2} \cdot \frac{1+t+t^2}{1+t+t^2} = \frac{1+t-t^2}{1-3t^2+t^4}. \quad F_n = F_{n-2}\cdot 3 - F_{n-4}.$$

Теорема 2. Для производящих функций, задающих рекурентные соотношения эквивалентны следующие высказывания

- $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots +$
- $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$
- $a_n = \sum_{i=1}^{b} p_i(n) \cdot r^i$, где $r_i \in \mathbb{C}$

$Q(t) = 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k$

$P(t)$ определяет то, как надо подправить первые члены, чтобы получились те, которые нужны.

$A(t)Q(t) - P(t) = 0$.

Как посчитать r?

Пусь $Q(t) = 1 - rt$,

$a_n = r \cdot a_{n-1}$

$a_m = r \cdot a_{m-1}$

$a_{m+1} = r \cdot a_m$

$\dots$

$a_n = r^n \cdot \dfrac{a_{m-1}}{r^{m-1}}$

Пусть $Q(t) = (1 - r_1 t)(1 - r_2 t), \;\; r_1 \neq r_2$.

Лемма 2.1. $Q(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - r_i t)$, где $r_i \neq r_j$ $\dfrac{P(t)}{Q(t)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{P_i(t)}{1 - r_i t}$

$Q(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i r_i^n$.

r_i — числа, обратные корням многочлена Q. Если степень Q равно k, то Q имеет ровно k корней (с учетом кратности).

Таким образом, $Q(t) = q_k \prod_{i=1}^{k}(t - t_i) = (-1)^k q_k \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \dfrac{t}{t_i}\right) \cdot t_i =$

$= \left[(-1)^k q_k \cdot \prod_{i=1}^{k} t_k\right] \prod_{i=1}^{k}(1 - r_i t) = \alpha \prod_{i=1}^{k}(1 - R_i t)$.

Почему нет корня 0? Потому что $Q(t)$ имеет вид $Q(t) = 1 - c_1 t - \dots$.

Пример 3. Рассмотрим числа Фибоначчии. $F(t) = \dfrac{1}{1 - t - t^2}$.

Корни $t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$, обратные корини $r_{1,2} = \dfrac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$. Обратные корни разные — нам очень приятно.

$$Q(t) = \left(1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

$$\frac{1}{(1 - r_1 t)(1 - r_2 t)} = \frac{c_1}{1 - r_1 t} + \frac{c_2}{1 - r_2 t}, \quad c_1(1 - r_2 t) + c_2(1 - r_1 t) = 1 \implies$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1(-r_2) + c_2(-r_1) = 0 \end{cases} \implies c_2 = \frac{-r_2}{r_1 - r_2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \cdot (-\sqrt{5})} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}, \quad c_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}.$$

$$a_n = c_1 r_1^n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n b_n = c_2 r_2^n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \implies$$

$$f_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n = \Theta\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Замечание 2. Если λ — единсвенный минимальный по модулю комплексный корень $Q(t)$, $A(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$, то $a_n = \Theta\left(\dfrac{1}{\lambda^n}\right)$.

$\dfrac{1}{(1 - rt)^2} = \dfrac{1}{1 - 2rt + r^2 t^2}$. $a_0 = 1, \;\; a_1 = 2r, \;\; a_2 = 3r^2, \; a_3 = 4r^3, \quad \dots, \; a_n = (n+1)r^n$.

$\dfrac{1}{r}\left(r^n t^n\right)' = \dfrac{1}{r} \sum n r^n t^{n-1} = \sum n r^{n-1} t^{n-1} = \sum (n+1) r^n t^n$.

Лемма 2.2. $\frac{1}{1-rt}^s = \sum_{n=0}^{\infty} p_s(n) r^n t^n$

Доказательство. Докажем по индукции.

1. База. $s = 0$ — просто

2. Переход. Далее много формул. $\left(\frac{1}{(1-rt)^s}\right)' = \frac{-r(-s)}{(1-rt)^{s+1}}$. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_s(n) r^n t^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n p_s(n) r^n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_s(n+1) r^{n+1} t^n$. $\frac{1}{(1-rt)^{s+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{s} p_s(n+1) r^n t^n$, $p_{s+1}(n) = p_s(n+1)\frac{n+1}{s} = \sum_{i=0}^{s-1} p_{s,i}(n+1)^i \frac{n+1}{s}$.

$$p_{s,i} = \frac{a_{s,i}}{b}, \quad b = s!,\ a_{s,i} \in \mathbb{Z}$$

□

Теорема 3. Пусть $A(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$, r_i — обратный корень кратности s_i Q_i, количество различных корней b. Тогда начиная с некоторого места (но точно, начиная с k) $a_n = \sum_{i=1}^{b} p_i(n) r_i^n$, $\deg p_i = s_i - 1$, $\quad \sum_{i=1}^{b} s_i = k$.

Доказательство.

$$Q(t) = \prod_{i=1}^{b} (1 - r_i t)^{s_i}, \quad \frac{P(t)}{Q(t)} = \sum_{i=1}^{b} \frac{P_i(t)}{(1 - r_i t)^{s_i}}.$$

□

Если λ_i — единственный минимальный комплексный корень $Q(t)$ кратности s_i. Тогда $a_n = \Theta\left(\dfrac{n^{s_i - 1}}{\lambda_i^n}\right)$.

Пример 4. $a_n = n^3, \quad a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot a_{n-3} - a_{n-4}$.

Подберем поправку первых членов: $P(n) = t + 4t^2 + t^3$.

Утверждение 1. Асимптотическое поведение рекуррентности не зависит от начальных значений, оно зависит только от коэффициентов соотношений.

Утверждение 2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_z$ — минимальные корни максимальной кратности.

$\lambda_j = \dfrac{e^{i\varphi_j}}{r}$. $\varphi_j = \dfrac{p_j}{q_j} \cdot 2\pi$.

Пусть $\overline{q} = LCM(q_j)$. Тогда последовательность a_i имеет асимптотическое поведение при $i \% \overline{q} = const$.