Конспекты по математическому анализу

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев, Константин Бац

2022 год, семестр 4

1 Повторение

Задачи и темы, которые мы будем обсуждать в новом семестре: многообразия, дифференциальные формы на них, криволинейные интегралы, интегралы от параметров, формула Стокса, формула Остроградского, γ-, β-функции.

Интеграл от функции произвольного знака это разность интегралов компонент. В случаях, когда оба слогаемых не бесконечные, такая разность имеет смысл.

Интеграл комплекснозначной функции это сумма интегралов вещественных компонент функции.

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

Монотонность интеграла.

$$\int_E (f_1 + f_2) \geqslant \int_E f_1 = \infty$$

Теорема 1 (Теорема Леви для последовательности)**.** Если f_n неотрицательные измеримые на E функции и $f_n \uparrow f$ возрастая сходится поточечно к f, то

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f d\mu$$

Теорема 2 (Теорема Леви для рядов)**.** Если f_n неотрицательные измеримые на E функции, то интеграл от ряда совпадает с суммой ряда из интегралов.

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — частичная сумма. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ ∎

Пример. Функция, которая не удовлетворяет условиям теоремы Леви:

$$f_k(x) = \xi_{[k,k+1]}(x)$$

$$\int_{[0,+\infty]} f_k(x) d\mu = \int_{[k,k+1]} f_k(x) d\mu = 1$$

$$\int f(x) d\mu = \int_{[0,+\infty]} 0 d\mu = 0$$

Замечание.

1. Для $f \in S(E)$ $|f| \in L(E,\mu)$ тогда и только тогда, когда $f \in L(E,\mu)$.
2. Если интеграл $\int_E f d\mu$ определен, то $\int_E |f| d\mu \geqslant |\int_E f d\mu|$.

Доказательство. ■

Отсутпление про суммируемую мажоранту.

Если функция имеет суммируемую мажоранту, то сама она является суммируемой.

... $L_1(E, \mu)$: две функиции эквивалентны по мере на E, если они совпадают почти везде на E. Другими словами, мера подмножества E, на котором функции принимают разные значения, равна нулю.

$$\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$$

.

Элементы $L_1(E, \mu)$ могут быть определены не на всём E целиком, но на множестве полной меры.

$$|f + g| \leqslant |f| + |g|$$

Эта норма невырожденная. Если $f \in S_+(E)$ и $\int f\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Теорема 3 (Счётная аддитивность интеграла)**.** Пусть $f \in S(E)$ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in ?$, определн $\int_E f d\mu$. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$$

Доказательство. ... ■

Теорема 4 (О приближении интеграла интегралом по множеству конечной меры)**.** Пусть мера E конечна и $f \in L(E, \mu)$ суммиурема. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_0 \subset E : \mu(E_0) < +\infty \text{и} \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu < \epsilon$$

Доказательство. Не умаляя общности $f \geqslant 0$ на E. Продложим f нулем вне E. $J(A) = \int_A f d\mu$— мера. $E_K = E\{f > \frac{1}{k}\}$, $E_* = E\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Непрерывность меры снизу E_k — множества конечной меры.

Научились приближать с любой точностью интеграл интегралом по множествам конечной меры. ■

Теорема Фато и теорема Лебега.

Теорема 5. Пусть f_k
$inS_+(E)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\underline{\lim}_{k \in \infty} \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$.

И если $f_k(x) \to f(x)$ на E, то $\int_E f(x) \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$

Теорема 6 (Теорема Лебега о мажорированной сходимости)**.** Пусть $f_n \to f$ сходится почти везде на E и $\Phi \in L(E, \mu)$: $\forall k \in \mathbb{N} |f_k| \leqslant \Phi$ почти везде на E. Тогда $f \in L(E, \mu)$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \int_E f d\mu$. ...

Интеграл положительнозначной функции определяет меру. Интеграл функции это разность мер компонент. Такая разность называется заряд.

Теорема 7 (Фубини).

$$
\begin{aligned}
x &= (x_1, \ldots, x_k) \\
y &= (y_1, \ldots, y_m) \\
f(x, y) &\in \mathcal{L}\left(E, \lambda_{k+m}\right) \\
E &\in \mathcal{A}_{k+m} \\
&.
\end{aligned}
$$

то:

1. Для почти всех $x \in \mathbb{R}^k \quad g(\cdot) = f(x, \cdot) \in \mathcal{L}\left(E(x, \cdot)\right)$
2. $I(x) = \int_{E(x,\cdot)} f(x, y)\, d\lambda_m(y) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^k\right)$
3. $$\int_E f(x, y)\, d\lambda_{k+m}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{E(x,\cdot)} f(x, y)\, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_k(x)$$.

Пример. $E = A \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{k+m} \quad _0 \in \mathbb{R}^n$
A – неизмеримое в $\mathbb{R}^k$
E – измеримо в $\mathbb{R}^{k+m}$
$Pr_x(E) = A$ – неизмеримое
Если $Pr_x(E)$ измеримо, то вместо интеграла по $\mathbb{R}^k$ можно написать интеграл по проекции

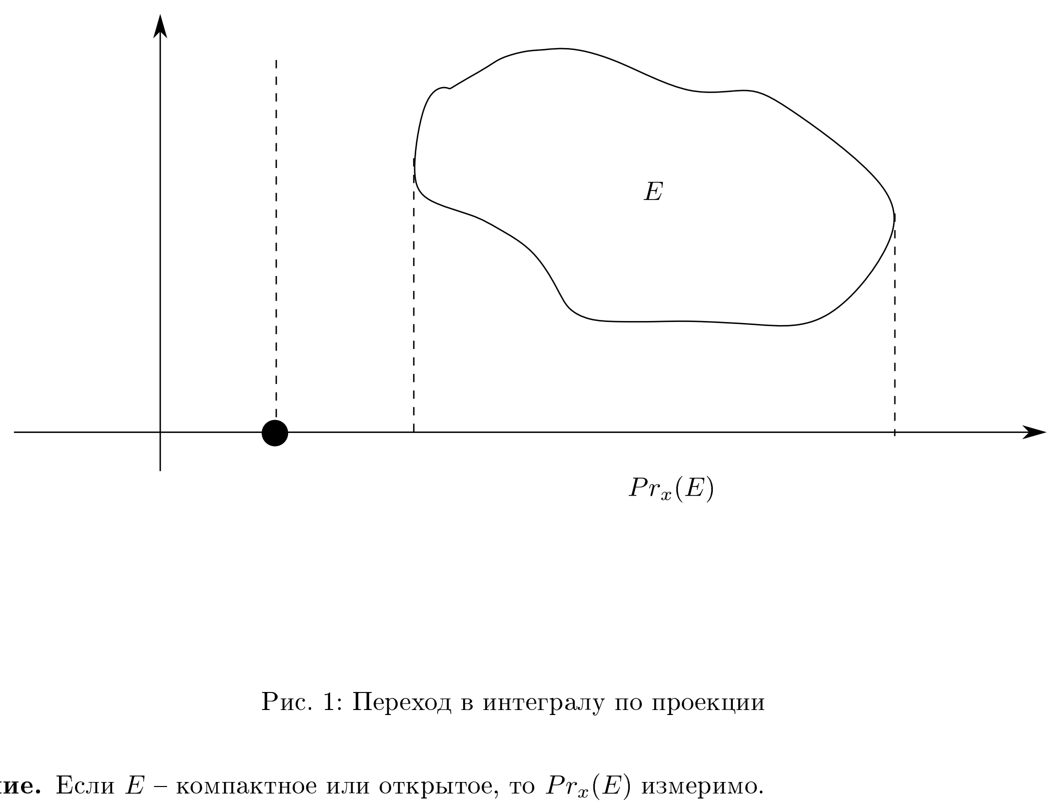


Рис. 1: Переход в интегралу по проекции

Замечание. Если E – компактное или открытое, то $Pr_x(E)$ измеримо.
$Pr_x(E) = \Phi(E)$, где $\Phi(x, y) \equiv x$ – отображение проектирования
Если E – компактное, то $\Phi(E)$ – компактное. Если открытое, то открытое.

Пример. 1.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy = I_1$$
$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = I_2$$
.

Если интегралы существуют, то они антиравны.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y}{(x^2+y^2)}\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} - 0dx = \operatorname{arctg} x|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Вывод: функция $f(x,y) \notin \mathcal{L}\left([0,1]^2, \lambda_2\right)$

2.

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy$$
$$\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx$$

$$f \in \mathcal{L}^2\left([-1,1]^2\right) \iff |f| \in \mathcal{L}\left([-1,1]^2\right) \implies |f| \in \mathcal{L}\left([-1,1]^2\right)$$

$$\iint\limits_{[0,1]^2} f(x,y)\, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx$$

$<\ldots..>$

Утверждение 7.1. Семейство называется суммируемым, если функция суммируема

Утверждение 7.2. Если семейство $(a_x)_{x\in X}$ суммируемо, то $\{x : a_x \neq 0\}$ – не более чем счётное.

Доказательство. Не умаляя общности $a_x \geqslant 0$
$+\infty > \int_X a_x dv = \int_{X_0} a_x dv > \int a_x dv \geqslant \frac{1}{j}\nu(x_j) \implies \nu(x_j) < +\infty$
$X_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ – не более, чем счётное ∎

Утверждение 7.3. $\sqsupset X$ – н.б.ч.с, Y – числовое множество, $(a_x)_{x\in X} \subseteq Y \quad \varphi : \mathbb{N} \to X$

Тогда (a_x) суммируемы $\iff \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ сходится абсолютно.

2 Замена переменной в интеграле по мере

2.1 “Пересадка” меры

$\Phi : X \to Y$. $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой.
$\mathcal{D} = \left\{B \subseteq Y | \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$
$\Phi^{-1}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}(B_k) \in \mathcal{A}$
$\nu(B) = \mu\left(\Phi^{-1}(B)\right)$

Пример. $X = [0, 2\pi) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap [0, 2\pi)$
$\Phi(t \in X) = (\cos t, \sin t)$

Теорема 8 (Общая схема замены переменных)**.** $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$
$\Phi : X \to Y$ – не портит измеримость.
$\sqsupset h \in S_+(X) : \forall B \in \mathcal{D}$

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} h d\mu$$

Тогда $\forall f \in f \in S\left(Y, \nu\right)$

$$\int_Y f d\nu = \int_X f\left(\Phi(x)\right) h(x) d\mu(x)$$

Доказательство. $f \circ \Phi$ – измерима?
$X\left\{f \circ \Phi < a\right\} = \Phi^{-1}\left(Y\left\{f < a\right\}\right)$. $Y\left\{f < a\right\} \in \mathcal{L}$, т.к. f измеримо. А тогда $\Phi^{-1}\left(\ldots\right) \in \mathcal{A}$
Совпадение интегралов:

1. f – ступенчатая, $f = \sum\limits_{k=1}^{K} C_k \chi_{D_k} \quad \{D_k\}$ – разбиение X

$$\int_Y f d\nu = \sum_{k=1}^{K} C_k \nu\left(D_k\right) = \sum_{k=1}^{K} C_k \int_{\Phi^{-1}(D_k)} h d\mu =$$
$$= \int_X \left(\sum_{k=1}^{K} C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)} <?>\right)$$
$$= \int_X f \circ \Phi(x) h(x) d\mu(x)$$

$$f \circ \Phi(x) = C_k \quad x \in \Phi^{-1}(D_k)$$
$$\sum_{k=1}^{K} C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)}(x) = C_k.$$

2. $f \in S_+(Y) \quad \exists \{g_j\}$ – ступенчатая небобратимая $g_i \uparrow f$

$$\int_Y f d\nu = \lim_{j \to \infty} \int_Y g_j d\nu = \lim_{j \to \infty} \int_X g_j\left(\Phi(x)\right) h(x) d\mu$$
$$= \int_X f\left(\Phi(x)\right) h(x) dmu(x).$$

3. Общий случай:
$f = f_+ + f_-$

$$\int_Y f d\nu = \int_Y f_+ - \int_Y f_- d\mu = \int_X f_+\left(\Phi(x)\right) h(x) d\mu(x) - \int_Y f_-\left(\Phi(x)\right) h(x) d\mu(x)$$
$$= \int f\left(\Phi(x)\right) h(x) d\mu(x) \quad \left(f\left(\Phi\right) h\right)_+ = f_+\left(\Phi\right) h.$$

∎

Следствие 8.1. $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$
$h \in S_+(X); \quad \Phi : X \to Y \quad \Phi^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}$
и выполняется условие теоремы общей замены переменной. Тогда $\forall E \subseteq \mathcal{D} \quad f \in S\left(E, \nu\right)$:

$$\int_E f(y) d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(E) f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)}$$

Рассмотрим продолжение нулём f с E на Y

$$\int_E f d\nu = \int_Y (y)\chi_E(y)d\nu(y) = \int_X f\left(\Phi(x)\right) \underbrace{\chi_E\left(\Phi(x)\right)})\chi_{\Phi^{-1}(E)}h(x)d\mu(x) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f\left(\Phi(x)h(x)d\mu(x)\right).$$

Следствие 8.2 (частный случай 1)**.** Если $h \equiv 1$ в условии теоремы.
$(\forall E|in\mathcal{D} \quad \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\mu = \mu\left(\Phi^{-1}\left(E\right)\right))$
мера ν при этом называется образом меры μ

$$\forall f \in S(E) \quad \int_E f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi(x) d\mu(x)$$

Следствие 8.3 (Частный случай 2)**.** $X = Y \quad \Phi = id \quad \nu(E) = \int_E h(x)d\mu(x)$

<..>

Теорема 9. $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой, $\Phi : X \to Y \quad h \in S_+(X)$
Следующие утверждения равносильны:

1. h плотность ν относительно μ
2. $\forall E \in \mathcal{A}$
$$\inf_E h\mu E \leqslant \nu(E) \leqslant \sup_D h\mu(E)$$

Доказательство. $I \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$
Т.о. $I \implies II$ ∎

Теорема 10 (Критерий плотности)**.** $\sqsupset (X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, μ, ν – опр. (?) $\mathcal{A}$
$h \in S_+(X)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. h – плотность меры ν относительно μ $(\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu)$
2. $\forall E \in \mathcal{A}$
$$\inf_E h \cdot \mu(E) \leqslant d(E) \leqslant \sup_E h \cdot \mu(E)$$

Если $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \lambda_n)$, тогда $1 \iff 3$:

3
$$\forall P \in \mathcal{P}_n \quad \inf_P h \cdot \mu(P) \leqslant \nu(P) \leqslant \sup_P h \cdot \mu(P)$$

Доказательство. План: $1 \implies 2 \implies 3$

$2 \implies 1?$ $\sphericalangle E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) \stackrel{?}{=} \int_E h d\mu$

$$E = E\left\{h = 0\right\} \coprod E\left\{h = +\infty\right\} \coprod E\left\{0 < h < +\infty\right\}$$

$$\nu(E) = \nu(E\left\{h = 0\right\}) + \nu(E\left\{h = +\infty\right\}) + \nu(E\left\{0 < h < +\infty\right\})$$
$$\nu(E\left\{h = 0\right\}) \leqslant \sup_{E\{h=0\}} = 0 = \int_{E\{h=0\}} h d\mu$$
$$\nu(E\left\{h = +\infty\right\}) \leqslant h \cdot \mu(E) + \infty \cdot \mu(E) = \int_{E\{h=+\infty\}hd\mu}.$$

$\lessdot \frac{1}{q} \in (0,1),\ q > 1 \quad (0,+\infty) = \bigvee k \in \mathbb{Z}[q^k, q^{k+1})$
$E\{h \in (0,+\infty)\} = \bigvee E\{q^k \leqslant h < q^{k+1}\}$
$q^k \mu(E_k) \leqslant \nu(E_k) \leqslant q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$
$q^k \mu(E_k) \leqslant \int h d\mu \leqslant q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$
$\frac{\nu(E_k)}{q} \leqslant q^k \cdot \mu(E_k) \leqslant \int_{E_k} h d\mu = q \cdot q^k \mu(E_k) \leqslant q \cdot \nu(E_k)$
Просуммируем это по всем k.
$\frac{1}{q}\nu(E) = \int_E h d\mu \leqslant q \cdot \nu(E),\ \ q \to 1 \implies \nu(E) \leqslant \int_E h d\mu \leqslant \nu(E) \implies \nu(E) = \int_E h d\mu$
$\lessdot \widetilde{\nu}$ – стандартное продолжение <...> (нужно дополнить) ■

Теорема 11. $\sqsupset \Phi$ – диффеоморфизм множеств $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad G \underset{\Phi}{\to} O$

Тогда $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad E \subseteq O$

$$\lambda_n(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \left| \det \Phi' \right| d\lambda_n$$

$$\lambda_n(O) = \int_G \left| \det \Phi' \right| d\lambda_n$$

Если $O \sim \widetilde{O} \quad G \sim \widetilde{G} \quad \left(\lambda_n(O \backslash \widetilde{O}) = \varnothing \ldots\right)$, то

$$\lambda_n(\widetilde{O}) = \int_{\widetilde{G}} \left| \det \Phi' \right| d\lambda_n$$

Замечание.

$$\nu(P) \leqslant \sup_P h d\mu(P) \text{ – от противного}$$
$$\implies \exists \text{ ячейки } P_0 : \quad \nu(P) > M \cdot \mu(P) = \sup_{P_0} h \cdot \mu(P)$$
$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + d_{x_0}\Phi(x - x_0) + o(x - x_0)$$
$$x \approx x_0 \qquad \Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d_{x_0}\Phi(x - x_0)$$
$$.$$

Если Q – малая ячейка, то

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \approx \lambda_n d_{x_0}\Phi(Q) = \left| \det \Phi'_{x_0} \right| \lambda_n(Q)$$

Следствие 11.1. Если $\Phi : G \to O$ – диффеоморфизм, $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad \widetilde{G} \sim G, \widetilde{O} \sim O \quad f \in S(O)$, то

$$\int_{\widetilde{O}} f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\widetilde{G}} f(\Phi(u)) \left| \det \Phi'(u) d\lambda_n(u) \right|$$

Пример. Полярные координаты.

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$
$\Phi : (r,\varphi) \to (x,y),$
$([0,+\infty) \times [-\pi,\pi])) \to \mathbb{R}^n,$
$(0,+\infty] \times (-\pi,\pi))) \to \mathbb{R}^n \backslash (-\infty, 0]).$
$\det \Phi' = r; \quad E = \mathbb{R}^2 :$

$$\iint\limits_E f(x,y) dx dy = \iint\limits_{\Phi^{-1}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

Пример (интеграл Эйлера-Пуассона).

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \\
I\cdot I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{+\infty} e^{-ys} \qquad\qquad = \iint\limits_{\{x\geqslant 0, y\geqslant 0\}} e^{-x^2+y^2}dxdy \\
&= \iint\limits_{\left\{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2} \quad r>=0\right\}} e^{-r^2}rdrd\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-r^2}}{-2}\ |_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$
I = \int_0^{+\infty} r^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
$$

.

Пример. Цилиницрические координаты

$$
\begin{aligned}
r\cos\varphi &= x \\
r\sin\varphi &= y \\
h &= z
\end{aligned}
$$

.

$\Phi : (r,\varphi,h)\to(x,y,z) \quad \Phi : (0,+\infty)\times(-pi,pi)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\backslash\{(x,0,z)|\mid x\leqslant 0\}\}$
$|\det\Phi'| = r$
$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Phi^1(E)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\cdot rdrd\varphi dh$

Пример. Сферические координаты
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$
\begin{aligned}
r\cos\varphi\cos\psi &= x \\
r\sin\varphi\cos\psi &= y \\
r\sin\psi\varphi\sin\psi &= y
\end{aligned}
$$

$\det\Phi' = r^2\cos\varphi$
Можно обобщить на $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
r &= \|x\| \\
x_1 &= r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\dots\cos\varphi_1 \\
&\dots \\
x_{n-2} &= r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-3} \\
x_{n-1} &= r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2} \\
x_n &= r\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}
$$

.

Пример.

$$
\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant\mathbb{R}^2 \\ x^2+y\leqslant z^2 \\ z\geqslant 0}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz
$$

Преобразовать используя:

- Цилиндрические координаты

  Перепишем множество интегрирования в новых координатах: $\begin{cases} r^2+h^2 \leqslant R^2 \\ r^2 \leqslant h^2 \implies r \leqslant h \\ h \geqslant 0, r \geqslant 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\substack{r^2+h^2\leqslant R^2 \\ r\leqslant h \\ h\geqslant 0, r\geqslant 0}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\, rdrd\varphi dh \\ &= \iint\limits_{\substack{\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi \\ 0\leqslant r\leqslant\frac{R}{\sqrt{2}}}} r\int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\, dr \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} rdr \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\, dh \end{aligned}$$

.

- Цилиндрические координаты (второй вариант)

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h rfdr + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} rfdr$$

.

- Сферические координаты

  $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \\ \operatorname{tg}^2\psi \geqslant 0 \\ \sin\psi \geqslant 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant r \leqslant R \\ r^2\cos^2\psi \leqslant r^2\sin^2\psi \\ r\sin\psi \geqslant 0 \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_E f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi)\, r^2\cos\psi drd\varphi d\psi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R f(\ldots) r^2\cos\psi dr \end{aligned}$$

.

Пример.

$$\iiiint_E zdxdydz$$

E :

$$\begin{aligned} t^2(x^2+y^2) \leqslant z^2 \\ 0 \leqslant z \leqslant t \leqslant 3 \end{aligned}$$

.

$$\iiiint_E zdxdydz = \iint\limits_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} dzdt \iint\limits_{\{x^2+y^2\leqslant \frac{4z^2}{t^2}\}} zdxdy$$
$$= \iint\limits_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} dzdt z\pi \cdot \frac{4z^2}{z^2}$$
$$= 4\pi \iint\limits_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} \frac{z^3}{t^2} dzdt$$
$$= 4\pi \int_0^3 \frac{1}{t^2}dt \int_0^t z^3 dz = \frac{4\pi}{4}\left(\int_0^3 t^2 dt\right) = \pi \cdot 9$$

.

3 Мера Лебега–Стилтьеса

$\sqsupset g(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}$ и непрерывна слева $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} g(x) \equiv g(x_0)\right)$

Задача 1. Если $h(x)$ – произвольная возрастающая функция, то её можно превратить в непрерывную слева исправлением нбчс количества точек.

$\exists \uparrow$ и непрерывная слева $g(x) = h(x)$ всюду кроме точек разрыва $h(x)$
$g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} h(x)$

Определим $\mu_g([a,b]) = g(b) - g(a) \geqslant 0$. Так же верно, что μ_g обладает счетной аддитивностью на $\mathcal{P}_1$ (доказывается так же, как в случае с мерой Лебега) $\implies \mu_g$ – мера на $\mathcal{P}_1$

Стандартное продолжение μ_g, которое также обозначается μ_g называется мерой Лебега-Стилтьеса, порождённой функцией g

$$\mu_g(\{c\}) = \mu_g\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}[c, c+\frac{1}{j}]\right)$$
$$= \lim_{j\to\infty} \mu_g\left([c, c+\frac{1}{j}]\right)$$
$$= \underbrace{\lim_{j\to\infty} g(c+\frac{1}{j})}_{=g(c+0)} - g(c) = g(c+0) - g(c)$$

.

$\implies$ Если c – точка непрерывности, то $\mu_g(\{c\}) = 0$
$\mu_g([a,b]) = \mu_g([a,b]) + \mu_g(\{b\}) = g(b) - g(a) + g(b+0) - g(b) = (g(b+0) - g(a-0))$
$\mu_g((a,b)) = \mu_g([a,b])) - \mu(\{a\}) = g(b) - g(a) - (g(a+0) - g(a)) = g(b) - g(a+0)$
$\mu_g((a,b]) = g(b+0) - g(a+0)$

Определение 1. Пусть $\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k\delta_{a_k}, \quad h_k \geqslant 0, \quad \delta_a(E) = \begin{cases} 1, & a\in E \\ 0, & a\notin E \end{cases}$, тогда μ — дискретная мера.

$E, E_j \in 2^{\mathbb{R}} \quad E = \bigvee\limits_{j=1}^{\infty} E_j \implies \delta_{a_k}(E) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \delta_{a_k}(E_j)$

$$
\begin{aligned}
\mu(E) = \mu(\bigvee_{j=1}^{\infty} E_j) &= \sum_k \sum_j h_k \delta_{a_k}(E_j) \\
&= \sum_j \mu(E_j)
\end{aligned}
$$

.

Последний переход в равенстве по теореме Тонелли.

Замечание. $\sqsupset \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$
$\forall [a,b] \qquad \sum\limits_{k: a_k \in [a,b]} h_k < +\infty$

Пример. Если $\{a_k\}$ – дискретно (без точек сгущения на $\mathbb{R}$), то условие автоматически выполняется, т.к. перечесечения a_k-ых с промежутком будет конечно, а значит и сама сумма будет конечна
$A = \mathbb{Q} \quad h_k = \dfrac{1}{2^k}$

Определение 2 (функция Хэвисайда)**.**

$$
\Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x \leqslant 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}
$$

$\sqsupset x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall C \in \mathbb{R}$

$$
g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cdot (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) + C
$$

1. $g(x)$ возрастает
2. $x \in [a,b] \quad \sum\limits_k h_k(\Theta(x-a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \leqslant \sum\limits_{a_k : I_{x,x_0}} h_k$

   Разность Тет ненулевая, если a_k находится между x и x_0 – I_{x,x_0}

Утверждение 11.1. $A = \{a_k\}_k$

1. $g \in C\left(\mathbb{R} \backslash A\right)$
2. Непрерывность слева на A

Доказательство. 1. $\sqsupset x \in \mathbb{R} \backslash A \quad \sqsupset (a,b) \ni x$

$\not< \forall \varepsilon > 0 \qquad \sum\limits_{k: a_k \in [a,b]} h_k < +\infty \implies \exists K : \sum\limits_{\substack{a_k \in [a,b] \\ k \geqslant K}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}.$

$g_k(x) = h_k\left(\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)\right)$ — локально постоянны в точке x ($\exists V_\delta(x) \ : \ g_k \mid_{V_\delta(x)} \equiv const$ для $k = 1, \ldots, k$)

Не умаляя общности $[a,b] \supseteq V_\delta(x)$

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{x}) - g(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x - a_k) - \Theta(x - a_k)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(\widetilde{x} - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x - a_k) - \Theta(\widetilde{x} - a_k)\right) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{K} h_k \left(\Theta(x - a_k) - \Theta(\widetilde{x} - a_k)\right)}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x - a_k) - \Theta(\widetilde{x} - a_k)\right)}_{=\frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned}
$$

.

$\Longrightarrow$ Непрерываность

Если $x = a_k \quad g(x) = g_{k_0}(x) + \underbrace{\sum_{k \neq k_0} g_k}_{\text{непрерывна как в пред. случае}}$

■

$$
\begin{aligned}
\mu_g\left([a, b]\right) &= g(b) - g(a) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)\right) \qquad a \leqslant a_k \leqslant b \\
&= \sum_{k: a \leqslant a_k < b} h_k = \mu([a, b]])
\end{aligned}
$$

.

μ и μ_g совпадают на совокупности всевозможных промежутков.

Определение 3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Функция f называется локально суммируемой на $\mathbb{R} \iff \forall\, [a, b] \qquad f\Big|_{[a,b]} \in \mathcal{L}(\lambda_1)$.

Определение 4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Функция f называется абсолютно непрерывной, если существует локально суммируемая функция $h(x)$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$
g(x) = \int_{x_0}^{x} h(x) d\lambda
$$

(интеграл Лебега. Если $x < x_0$, то $\int_{x_0}^{x} h\, d\lambda = -\int_{[x, x_0]} h\, d\lambda$)

Если h непрерывна в точке x, то $g(x)$ дифференцируема в точке x и $g'(x) = h(x)$. Доказательство – смотри теорему Барроу...

Если $h(x) \geqslant 0$, то $g(x) \nearrow$

Функция $g(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Следует из абсолютной непрерывности интеграла.

Теорема 12 (воспоминание)**.**

$$
\mu(E) = \int_{\Phi^{-1}} h d\mu \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \inf_E h\mu(E) \leqslant \nu(E) \leqslant \sup_E h\mu(E)
$$

Замечание.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)\right)$$

Для этой меру нужно было фиксировать открытый интервал Δ, что

$$\forall [a,b] \subseteq \Delta \qquad \sum_{k : a_k \in [a,b]} h_k < +\infty$$

$$\begin{aligned} g(a_k + 0) - g(a_k - 0) &= h_k \left(\Theta(a_k - a_k + 0) - \Theta(x_0 - a_k + 0) - \Theta(a_k - a_k - 0) + \Theta(x_0 - a_k - 0)\right) \\ &= h_k \end{aligned}$$

.

Утверждение 12.1. Если $\nu = \sum\limits_k h_k \delta_{a_k}$, то ν совпадает с μ_g на $\mathcal{A}_{\mu_g}$ при условии (*).

Доказательство. Если хочется скорее сослаться на теорему об единственности, то можно сделать так: Рассмотрим $[a,b)$. $\nu([a,b)) = \sum\limits_{k\,:\,a_k \in [a,b)} h_k$.

$$\mu_g([a,b)) = g(b) - g(a) = \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k \left(\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)\right) = \sum_{k\,:\,a_k \in [a,b)} h_k.$$

Если $\{a_k\}_k$ — конечное множество, то вопросов с суммируемостью не веознкает.

$$g(x) = \sum_k h_k \cdot \Theta(x - a_k) + C$$

■

Замечание. Локально суммируемая функция – это такая, что она будет на любом шаре суммируемой по Лебегу

Теорема 13. $g(x)$ – абслолютно непрерывная $\iff \exists h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)\, \exists x_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$$(x) = \int_{x_0}^{x} h(x) d\lambda + C$$

По теореме Барроу $g(x)$:

- $g(x) \in C(\mathbb{R})$,
- $g(x)$ дифференцируема в точках ... функции $h(x)$.

Доказательство.

- Если $x_1 \in \mathbb{R}$

$$g(x) - g(x_1) = \int_{x_1}^{x} h(x) dx$$

$\exists \delta_0 > 0, x \in V_{\delta_0}(x_1), \quad h \in \mathcal{L}(V_{\delta_0})$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta (\leqslant \delta_0) > 0 : \int_E h(x) d\lambda < \varepsilon \forall E \subseteq V_{\delta_0}(x_1) : \lambda_1(E) < \delta$

$\implies$ Если $|x_1 - x| < \delta \quad \left|\int_{x_1}^{x} h(x) dx\right| \leqslant \varepsilon$

- Пусть x_1 — точка непрерывности для $h(x)$. $h(x) = h(x_1) + \underbrace{\alpha(x - x_1)}_{o(1) \text{ при } x \to x_1}$

$$\frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^{x} h(x_1) + \alpha(x - x_1) dx = h(x_1) + \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^{x} \alpha(x - x_1) dx \leqslant \varepsilon(x - x_1)$$

Если "x остаточно близок к x_1"

■

Замечание. В частности, если $h(x) \in C(\mathbb{R}) \implies g \in C^1(\mathbb{R})$ и $g'(x) \equiv h(x)$

Замечание.

$$\int_E f d\nu = \sum_{k\,:\,a_k \in E} h_k f(a_k) = \sum_{k\,:\,a_k\in E} f(a_k) \cdot \text{ скачок } g(a_k)$$

Утверждение 13.1. $\sqsupset g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda_1(x) + C \quad h(x) \geqslant 0 \quad h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)$ абсолютно непрерывная возрастающая функция.

Тогда $\int_E f d\mu_g = \int_E f(x)h(x)d\lambda(x)$.

В частности, $\forall$ возрастающей $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

$$\int_E f d\mu_g = \int_E f \cdot g'(x) d\lambda(x) \left(= \int_E f \cdot dg \right).$$

Доказательство. $\measuredangle \nu(E) = \int_E h d\lambda_1$.

$$\mu_g(\langle a, b\rangle) = \mu_g([a,b)) = g(b) - g(a) = \int_a^b h(x)d\lambda_1 = \nu([a,b)) = \nu(\langle a,b \rangle).$$

μ_g и ν совпадают на открытых. Если K – компакт, $K = B \backslash (B \backslash K)$

$\nu(K) + +\nu(B\backslash K) = \nu(B) \qquad \mu_g(K) = \nu(K) = \nu(B) - \nu(B \backslash K)$

$\sqsupset E$ – λ_1-мера O

$\implies \exists \delta > 0 \exists$ открытое $G : E \subseteq G$ и : $\lambda_1(G) < \delta$

$\implies \int |_{G_0}$ – абсолютно непрерывное $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \lambda_1(\widetilde{E}) < \delta \quad \widetilde{E} \subseteq G$

$\int_{\widetilde{E}} h < \varepsilon \quad \widetilde{E} = G \implies \nu(G) < \varepsilon \implies \mu_g(G) < \varepsilon\, \varepsilon - \forall \implies \nu(E) = \mu_g(E) = 0$

Если E — неограничено λ_1–меры 0 $\implies \exists$ ограниченное E_j : $E = \bigcup E_j$. $\forall i \in \mathbb{N}$ $\lambda_1(E_j) = 0 \implies \nu(E_j) = \mu_g(E_j) = 0 \implies \nu(E) = \mu_g(E)$.

Дальше можно применить теорему о плотности меры. Применяю общую мхему замены переменной все доказывается. ∎

Задача 2. 1. $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Найти:

(a) $\sup \left\{ \mu_g(I) \ : \ I = \langle a, b \rangle, \ \lambda_1(I) \leqslant \delta \right\}, \ \delta > 0.$

(b) $\sup \left\{ \lambda_1(I) \ : \ I = \langle a, b \rangle, \ \mu_g(I) \leqslant \delta \right\}, \ \delta > 0.$

2. $g(x) = \operatorname{arctg} x + \Theta(x-1)$

   (a) Для $\delta = 1$

Решение. $\mu_g(I) = g(b) - g(a) = \int_I g'(t)dt = \int_{[a,b]} \frac{dt}{1+t^2}$

1. (a)

$$\sup\{\mu_g(I)\} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+t^2}$$

.

∎

Пример. Пример меры Лебега–Стилтьеса не евклидовой, не дискретной, не абсолютно непрерывной:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= [0,1]\\
C_1 &= \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]\\
C_2 &= \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]\\
C_{k+1} &\subseteq C_k \quad C_k \text{ -- компакт}\\
C &= \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \text{ -- компакт}\\
\lambda_1(C) &= \lambda_1([0,1]) - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \ldots - \frac{2^{k-1}}{3^k} = 0\\
&.
\end{aligned}
$$

$\psi(x) = \frac{1}{3}x \quad \Theta(x) = 1 - x$

$$\Phi = \{[0,1] \cap C, \psi(C), \Theta\psi(C), \psi\psi(C), \psi\Theta(C), \Theta\psi\psi(C), \Theta\psi\Theta\psi(C), \ldots\}$$

– полукольцо

$\mu(C) = 1 \quad \mu(P) = \frac{1}{2^k}$ – если P есть результат применения k штук ψ и Θ

$\not\exists\mu$ – стандартное продолжение

4 Интегралы, зависящие от параметра

Пример.

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \quad p > 0, p \in \mathbb{R}; \quad \int_a^b f(x,y)dx, \quad \int_\alpha (y)^\beta (y) f(x,y)dx.$$

Пока что мы будем рассматривать интегралы, зависящие от параметра y по фиксированному промежутку: $I(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x)$.

Пусть у нас есть пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f(\cdot, \mu) \in \mathcal{L}(X, \mu)$. $Y \subseteq \overline{Y}$.

Для чего это нужно? Бывает, что просто сформулированные задачи имеют ответ в виде интеграла с параметром. Бывает, что введение параметра упрощает вычисление интеграла.

Утверждение 13.2. f уовлетворяет условию Лебега локально относительно y_0, y_0 — параметр, если $\exists$ открытое $V(y_0)$ в $\overline{Y}$ и $\Phi_{(x)} \in \mathcal{L}(X,\mu)$ $\forall y \in V(y_0)$ для почти всех $x \in X$.

Утверждение 13.3. Пусть у нас есть пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\overline{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subseteq \overline{Y}$, y_0 — предельная точка для Y. Почти везде $f(x,y) \to g(x)$ при $y \to y_0$, и $f(x,y)$ удовлетворяет локаольно условию Лебега относительно y_0.

Тогда $g(x) \in \mathcal{L}(X,\mu)$ и

$$\lim_{y \to y_0} \int_X f(x,y)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x)$$

Доказательство. Так как y_0 — предельная, $\exists\{y_k\} \subseteq Y \to y_0$. $f_k(x) = f(x, y_k)$, $y_k \in V(y_0) \implies |f_k(x)| \leqslant \Phi(x) \implies$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $g(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x,y_k) \in \mathcal{L}(X,\mu)$ и

$$\int_X g(x)d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} f(x,y_k)d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X f(x,y_k)d\mu.$$

$$I(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x); \quad \lim_{k\to\infty} I(y_k) \ \forall \text{ последовательности } y_k \to y_o \implies \exists \lim_{y\to y_0} Y(y).$$

■

Пример. $\sqsupset p_0 > 0 \quad \sqsupset$

$\forall p \in V_\delta(p)$

$x \in (0,1] \quad x^{p-1}e^{-x} \leqslant x^{p_0-\delta}e^{-x}$

$x > 1 \quad x^{p-1}e^{-x} \leqslant x^{p_0+\delta}e^{-x}$

$\Phi(x) = \begin{cases} x^{p_0-\delta}e^{-x} & , x \in (0,1] \\ x^{p_0+\delta}e^{-x} & , x > 1 \end{cases} \quad \int_0^{+\infty} x^q e^{-x}dx$ – сходится для любого

Замечание. Если в условиях предыдущего утверждения $f(x,y)$ — непрерывна по y в точке y_0, то наш интеграл $I(y)$ тоже будет непрерывен в точке y_0.

Определение 5. Пусть имеется пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$, y_0 — предельная точка для $Y \subseteq \overline{Y}$ $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$ на X при $y \to y_0$ если $\forall \varepsilon > 0\, \exists$ окрестность $V(y_0)$:

$$\forall x \in X \quad \forall y \in V(y_0) \quad |f(x,y) - g(x)| < \varepsilon \iff \sup_{x \in X} |f(x,y) - g(x)| \underset{y \to y_0}{\to} 0.$$

Пример. 1. (хороший) $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \quad y \to +\infty$

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{1+y^n} \implies y \to \infty \sup |f(x,y)| = \frac{1}{1+y^n} \underset{y \to \infty}{\to} 0.$$

Сходимость есть и равномерная сходимость тоже есть.

2. (плохой) $xye^{-xy} \underset{y \to 0}{\to} 0$. Сходимость к нулю есть, а

$$\sup x > 0xye^{-xy} \geqslant f(\frac{1}{y}, y) = \frac{1}{e} \nrightarrow 0 \implies \text{равномерно не сходится.}$$

Утверждение 13.4. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu(X) < +\infty$.

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g(x), \quad f(x,y) \in \mathcal{L}(X, \mu).$$

Тогда $g(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ И

$$\lim_{y \to y_0} \int_X f(x,y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

Доказательство. Для $\varepsilon = 1 \quad \exists$ окрестность $V(y_0)$: $\forall x \in X, y \in V(y_0) \quad |f(x,y) - g(x)| \leqslant 1$:
$|g(x)| \leqslant |f(x,y)| + |g(x) - f(x,y)| \leqslant |f(x,y)| + 1 \implies g \in \mathcal{L}(X, \mu)$ ■

Утверждение 13.5. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с метрой $y \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\quad y_0$ — предельная точка для Y. Пусть $f(x,y)$, $\quad f'_y$ — удовлетворяет условию Липшица локально, $f : X \times Y \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Тогда $I(y) = \int_X f(x,y) d\mu(x)$ дифференцируема в точке y_0 и

$$I'(y_0) = \int_X f'_y(x,y) d\mu(x).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} I'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{I(y) - I(y_0)}{y - u_0} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_X \underbrace{(f(x,y) - f(x,y_0))}_{f'_y(x, y_0 + \Theta(y - y_0)),\ \Theta \in (0,1)} d\mu(x) \\ &= \lim \int_X f'_y(x, y_0 + \overset{C(y)}{\Theta}(y - y_0)) d\mu(x) \\ &\underset{\text{Утв}}{=} \int_X \lim(\ldots) d\mu(x) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x). \end{aligned}$$

$y \in V_\delta(y_0)$ – из условия Липшица для $f'_y \implies C(y) \in V_\delta(y_0)$

$$\implies \Bigg|\underbrace{f'_y(x, C(y))}_{f'_y(x,y_0)}\Bigg| \leqslant \Phi(x) \qquad \blacksquare$$

Пример. $\Gamma(p) \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} d\mu$.

$$f'_p(x,p) = (p-1)x^{p-2}e^{-x},\ p-2 > -1 \implies p > 1.$$

При $p > 1$

$$\Gamma'(p) = (p-1)\int_0^{+\infty} x^{p-2}e^{-x} = (p-1)\cdot\Gamma(p-1) \implies \Gamma'(p) = (p-1)\cdot\Gamma(p-1).$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} \frac{('x^p)}{p} = \frac{1}{p}\left(x^p e^{-x}\Big|_o^\infty - \int_o^{+\infty} x^p('e^{-x})dx\right) = \frac{1}{p}\cdot(p+1).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} = 1$$
$$\Gamma(2) = 1$$
$$\Gamma(3) = 2$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}.$$

5 Γ-функция Эйлера

Определение 6. $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$
$p > 0$

Свойство 1.

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad \forall p > 0$$

– формула приведения

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

– определение для Γ в $\mathbb{R}\setminus(\mathbb{Z}_-)$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(p+1) = p!$$
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$
$$\Gamma(\frac{2n+1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}(\text{по индукции})$$

.

Замечание (Дифиренцирование Γ–функции)**.**

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{p-1}e^{-x}(\ln x)^k}_{f_k(x,p)} dx.$$

$\frac{\partial f_k(x,p)}{\partial p} = f_{k+1}(x,p)$

Замечание. Локальное условие Лебега $\forall p_0$?

$$\exists V_{p_0} : \exists \Phi(x) \in \mathcal{L}\left((0,+\infty) : |f_k(x,p)| \leqslant \Phi(x)\right).$$

$$x^{p-1} \leqslant x^{2p_0-1} + x^{\frac{p_0}{2}-1}$$
$$\Phi(x) = \left(x^{2p_0-1} + x^{\frac{p_0}{2}-1}\right) e^{-x} \left|\ln x\right|^k.$$

Φ – мажоранта для $f_l(x,p) \forall p \in V_{p_0}$

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \left|\ln x\right|^k dx < +\infty$$
$$x^{p-1}|\ln x|^k = o(e^{\frac{x}{2}}) \quad x \to +\infty$$
$$x^{p-1}e^{-x}\left|\ln x\right|^k \sim x^{p-1}\left|\ln x\right|^k = o(x^{p-1-\alpha})$$
$$|\ln x|^k = o(x^{-\alpha}), \quad \alpha > 0$$
$$x \to 0^+ \quad p - \alpha > 0.$$

Получается, что Γ – класса C^∞ там, где она определена. $\Gamma \in C^\infty\left(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-\right)$

Геометрические характеристики γ–функции и элементарные факты

Свойство 2 (Геометрические свойства).

1. $\gamma(p)$ строго выпукла на любом отрезке, лежащем в её области определения
2. На $(0,+\infty)$ $\Gamma(p)$ имеет единственный экстремум в точке $c \in (1,2)$
3. $p \to 0 \quad \Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$

Доказательство. $\Gamma^{(2)}_{p^2}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}ln^2xdx > 0 \implies 1$
$\Gamma(1) = 0! = 1 = 1! = \Gamma(2) \implies$ по теореме Роля $\exists c \in (1,2): \quad \Gamma'(c) = 0.$ c – точка минимума
$\Gamma'(p) \neq 0$ при $p \neq c, p > 0$ ∎

Замечание. Аналог формулы стрилинга. При $p \to \infty$ верно, что $\Gamma(p) = \sqrt{2\pi p}\left(\frac{p}{e}\right)^p e^{\frac{\Theta}{12}}$, где $\Theta \in (0,1)$.

6 Бета-функция

Определение 7. $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$
$B(p,q) = B(q,p) \forall p,q > 0$
$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Теорема 14 (формула Эйлера-Гаусса).

$$\Gamma(p) = \lim_{k\to\infty} \frac{l^p \cdot k!}{p(p-1)\dots(p+k)} \quad \forall p \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_-.$$

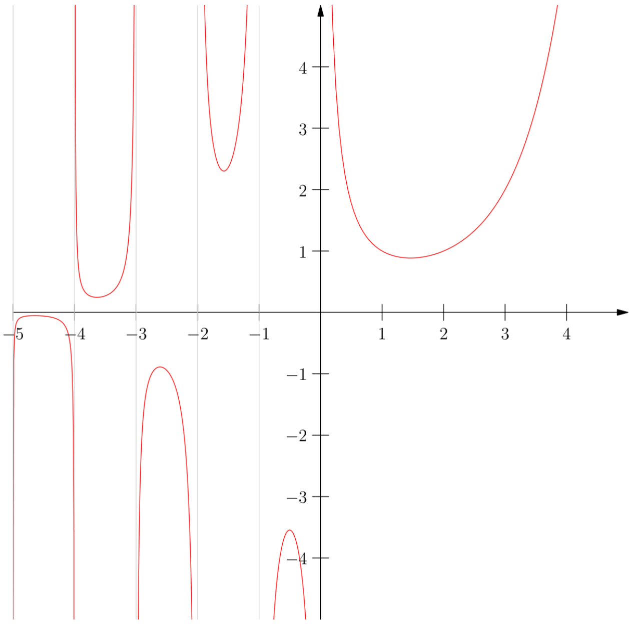


Рис. 2: gamma-function

Доказательство.

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = \left| t = e^{-x}, x = -\ln t, dx = -\frac{dt}{t} \right| \int_0^1 (-\ln t)^{p-1} t \left(-\frac{dt}{t}\right) = \int_0^1 (-\ln t)^{p-1)}$$

$$= \int_0^1 \left(\lim_{k\to\infty} \underbrace{k(1-t^{1/k})}_{g(k)} \right)^{p-1} dt ==$$

$$g'(k) = (1-t^{1/k}) + k(-t^{1/k}) \cdot (\ln t) \cdot \left(+\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= t^{\frac{1}{k}} \left(t^{-\frac{1}{k}} - 1 + \frac{\ln t}{k} \right)$$

$$= \begin{cases} f \uparrow & \text{, если } p \geqslant 1 \implies \text{Применим теорему Леви} \\ f \downarrow & \text{, если } p \in (0,1) \implies g(k) \leqslant g(1) \end{cases}$$

$$== \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \left(k(1-t^{\frac{1}{k}}) \right)^{p-1} dt = \lim_{k\to\infty} k^{p-1} \int_0^1 s^{p-1}(-k)(1-s)^{k-1} ds = \lim_{k\to\infty} k^p B(p,k)$$

$$= \lim_{k\to\infty} k^p \frac{\Gamma(p)\Gamma(k)}{\Gamma(p+k)} = \lim_{k\to\infty} k^p \cdot (k-1)! \frac{\Gamma(p)}{(p+k-1)(p+k-2)\ldots p\Gamma(p)}$$

$$= \frac{k^p k!}{p(p+1)\ldots(p+k)} \cdot \underbrace{\frac{p+k}{k}}_{\to 1}.$$

Для $p < 0$ по индукции по $m \quad p \in (-(m+1), -m)$
Если формула верна для $p+1$, то

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{1}{p} \lim_{k\to\infty} \frac{k^{p+1} \cdot k!}{(p+1)(p+2)\ldots(p+k+1)}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^p \cdot k!}{p(p+1)\ldots(p+k)} \cdot \underbrace{\frac{k}{p+k+1}}_{\to 1}.$$

■

Лемма 14.1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \in C([a, +\infty))$ и f ограничена на $([a, +\infty))$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx \in C([0, +\infty)).$$

Доказательство. $A \in [a, +\infty)$

$$\int_A^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx = \left| F(x) = \int_A^x f(t)dt \right| = (F(x) - F(A)) \cdot e^{-xy} \mid_A^{+\infty} + \int_A^{+\infty} ye^{-xy}(F(x) - F(A))dx$$
$$= \left| \exists \lim_{x \to \infty} F(x) \left(= \int_A^{+\infty} f(t)dt \right) . \right.$$

Для $\varepsilon > 0 \exists A : \left| \int_X^{+\infty} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \geqslant A$
Для $x \geqslant A \quad |F(x) - FA(A)| = \left| \int_X^{+\infty} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|I_A(y)| \leqslant \int_A^{+\infty} ye^{-xy} \left| F(x) - F(A) \right| dx$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx = \frac{\varepsilon}{3}$$
$$I(y) = \overbrace{\int_a^A e^{-xy} f(x)dx}^{J_A(y)} + I_A(y)$$
$$I(y) - I(y_0) = J(y) - J(y_0) + \overbrace{I_A(y) - I_A(y_0)}^{< \frac{\varepsilon}{3}}.$$

$J(y) - J(y_0) \to 0$ при $y \to y_0$ (условие непрерывности собственных интегралов).

$$\exists V(y_0) : \quad \forall y \in V(y_0) \ |J(y) - J(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

■

Следствие 14.1.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \to 0} e^{-xy} f(x)dx.$$

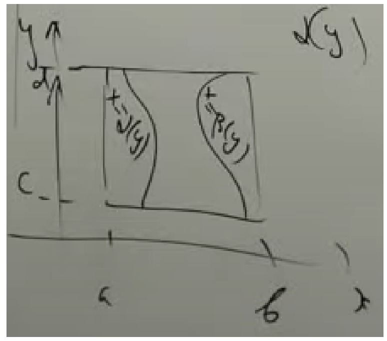


Рис. 3: Инетграл с переменными пределами

Пример (Одно из значений интегрального синуса).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$I(y) = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-xy}\frac{\sin x}{x}}_{f(x,y)} dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-xy}\sin x$$

$$y_0 > 0 \quad V_{y_0} = \left(\frac{y_0}{2}, 2y_0\right) \implies \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant e^{-\frac{xy_0}{2}}$$

$$\implies \forall y_0 I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx \ldots$$

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} dcosx = cosx \cdot e^{-xy} \mid_0^{+\infty} + y\int_0^{+\infty} ('\sin x)e^{-xy}dx$$

$$= -1 + y\left(\sin x e^{-xy} \mid_0^{+\infty} + y\int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy}dx\right) = -1 + y^2\left(-I(y)\right)$$

$$\implies I(y)\cdot(1+y^2) = -1.$$

$$I'(y) = I(y) = \left(-\frac{1}{1+y^2}\right) \implies I(y) = C - \int\frac{dy}{1+y^2} = C - \operatorname{arctg} y$$

$$y \to +\infty, y \geqslant 1 \left|e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant e^{-x} \text{ — суммируемая мажоранта.}$$

$$C - \frac{\pi}{2} = \lim_{y\to\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx = 0 \implies C = \frac{\pi}{2}$$

$$I(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \forall y > 0.$$

Но по лемме $I(y)$ неотрицательная в точке $y = 0$.

$$I(0) = \lim_{y\to 0} I(y) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y\right) = \frac{\pi}{2} \implies \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Дифференцирование интеграла по параметру в случае переменных пределов интегрирования.

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx; \quad f \in C\left([a,b](x \ni) \times [c,d](\ni y)\right), \quad \alpha(y), \beta(y) : [c,d] \to [a,b] \text{ дифф.}$$

Теорема 15 (Правило Лейбница)**.** Тогда $I(y)$ дифференцируемо на $[c,d]$ и

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f\left(\alpha(y),y\right)\cdot\alpha'(y).$$

Доказательство.

$$\Phi(x,y) = \int_a^x f(t,y)dt$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = f(x,y) \text{ непрерывна в } Q$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \lim_{\Delta\to y}\frac{1}{\Delta y}\left(\int_a^x f(t,y+\Delta y)dt - \int\right.$$
$$= \int_a^x f'_y(t,y)dt$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_1,y_1) - \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y) = \int_a^x f'_y(t,y_1)dx + \left(\int_a^x f'_y(t,y)dx - \int_a^x f'_y(t,y)dx\right) - \int_a^x f'_y(t,y)dx.$$

Таким образом $\Phi(x,y)$ дифферецируема на Q

$$I(y) = \Phi(\beta(y),y) - \Phi(\alpha(y),y)$$
$$I'(y) = P'hi_x(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) + \Phi'_y(\beta(y),y) - \Phi'_x(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) - \Phi'_y(\alpha(y),y).$$

■

Пример.

$$I(p) = \int_{p^2}^{p^3}\frac{x^2+2p}{\ln^2|x|+1}dx$$

$\forall p\neq 0,\quad [a,b] = [p-\delta,p+\delta]\quad [c,d]$

$$I'(p) = \int_{p^2}^{p^3}\frac{2}{\ln^2|x|+1}dx + \frac{p^6+2p}{\ln^2|p^3|+1}\cdot 3p^2 - \frac{p^4+2p}{\ln^2|p^2|+1}\cdot 2p.$$

7 Интегрирование на многообразиях

Определение 8. $\gamma : [a,b]\to\mathbb{R}$ кусочно-гладкое, простой путь (биекция) или заскнутый простой (едиснтвенная точка самопересечния – концы).

Пусть $\Gamma = \gamma([a,b])$ — носитель нашего пути...

$\mathcal{B} = \{B \ \mid\ \gamma^{-1}(B)\in\mathcal{A}$.

$ds = \nu(B) = \int_{\gamma^{-1}(B)}\|\gamma'\|(t)dt$.

$f\ :\ \Gamma\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$. $\int_B fds = \int_{\gamma^{-1}(B)} f(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|$.

Интеграл не зависит от выбора параметризации. Также не зависит от ориентации кривой.

Пример. $\int_C x^2 sd \qquad C : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z = 0\end{cases}$

$$I = \int_C x^2ds = \int_C y^2ds = \int_C z^2ds \implies I = \frac{1}{3}\int_C \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=R^2}ds = \frac{R^2}{3}\int_C ds = \frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R..$$

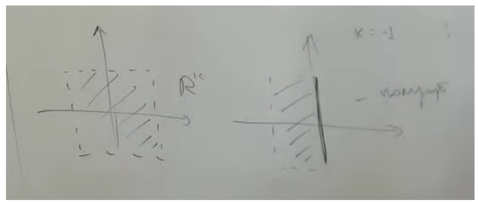
8 Я чуть чуть опаздал

8.1 Многообразие с краем

Напоминание k–мерную r–гладкую поверхность в $\mathbb{R}^n$ (многообразие без края).
Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n, x^0 \in \mathcal{M}$.
Окрестность $U_M(x^0) = m \cap U(x^0)$, где $U(x^0)$ — открытое в $\mathbb{R}^n$.
$\exists$ открытое $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\Phi : D \to U_M(x^0)$, где $\Phi \in C^k(D)$, регулярно.

Определение 9. Стандартный куб в $\mathbb{R}^k$ — это $(-1,1)^k$.

Определение 10. Стандартный полукуб в $\mathbb{R}^k$ — это $[-1,0] \times (-1,1)^{k-1}$ при $k > 1$ и $(-1,0]$ или $[0,1)$ при $k = 1$.

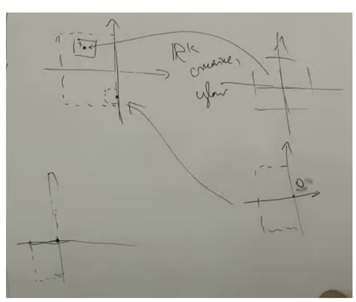


Определение 11. Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$. $\mathcal{M}$ называется k–мерным многообразием с краем, если $\forall x^0 \in \mathcal{M} \exists$ окрестнось $U_M(x^0)$ и $\Phi : \Pi_k \to U_M(x^0)$, регулярно и $\in C^k$.
Здесь Π_k — стандартный k–мерный куб или стандартный k–мерный полукуб.

$U_M(x^0)$ — стандартныя окрестнось точки x^0 в $\mathcal{M}$.
Φ — локальная параметризация (стандартная).
$\langle U_M(x^0), \Phi \rangle$ — карта; набор карт — атлас.

Пример. Очевидные:

1. $(-1,1)^k$ — k–мерное многообразие (без края).
2. $(-1,0] \times (-1,1)^{k-1}$ — k–мерное многообразие с краем.
3. $\mathbb{M}^{(r)}_{k,n}$ — набор k–мерных многообразий с краем в $\mathbb{R}^n$ гладкости r.



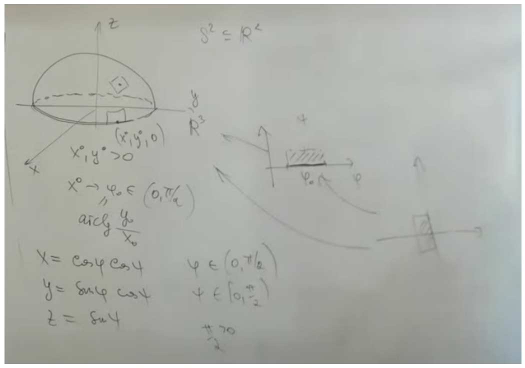
Пример. Чуть менее очевидныей пример.
$\mathbb{R}^n \in \mathbb{M}^{(\infty)}_{n,n}$ — многообразие с краем (край пустой).

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \left(\operatorname{tg}\left(x_1 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg}\left(x_2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right), \dots, \operatorname{tg}\left(x_n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad |x_i| < 1.$$

Определение 12. Пусть $\mathcal{M} \in \mathbb{M}^{(r)}_{k,n}$. $x^0 \in \mathcal{M}$ называется внутренней (относительно многообразия), если $\exists$ стандартная локальная параметризация $\Phi : \Pi \to U_M(x^0)$, такая, что Π — куб.

Если точка x^0 не является внутренней, то она называется крайней (точкой края).
$\partial\mathcal{M}$ = множество крайних точек $\mathcal{M}$ (край $\mathcal{M}$).

Замечание. Если $\exists$ стандартная параметризация $\Phi : \Pi \to U_M(x^0)$, такая что Π — полукуб, то $\forall$ стандатной параметризации $\psi : \widetilde{\Pi} \to \widetilde{U}_M(x^0)$, $\widetilde{\Pi}$ — полукуб.



Замечание. Fz$\mathcal{M} \neq \partial\mathcal{M}$. То есть множество крайних точек не равно множеству граничных точек.

Определение 13. Дискретное множество в $\mathbb{R}^n$ – множество без предельных точек в $\mathbb{R}^n$
Само множество не более, чем счётно. В любом шаре $\mathbb{R}^n$ лишь конечное множество точек.
Дискретное множество в $\mathbb{R}^n$ – многообразие размерности 0 в $\mathbb{R}^n$ – $\mathbb{M}_{0,n}$

Пример (Конус)**.**

$$ax^2 + by^2 = z^2.$$

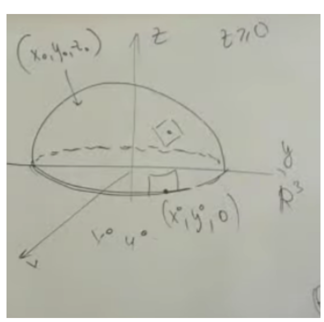
В нуле ранг нарушается. Весь конус целиком не многообразие.

$\sqsupset (U(x_0), \Phi), \left(\widetilde{U}(x_0), \Psi\right)$ – две карты для $Min\mathbb{M}^{(r)}_{k,n}, k \in \mathbb{N}$
$V = U(x_0) \cap \widetilde{U}(x_0)$
$\Phi^{-1}(C) = W \quad \Psi^{-1}(V) = \widetilde{W}$
$\Theta = \Psi^{-1} \circ \Phi \qquad \Theta : W \to \widetilde{W}$ – отображение перехода.

Утверждение 15.1. В условия определения отображения перехода оно есть диффеоморфизм из W в $\widetilde{W}$.

Пример. Параметризация поверхности сферы через полярные координаты.

$$\Phi : (\phi, \psi) \to \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix}, \Psi : (x, y) \to \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}.$$



$$\theta:(\varphi,\psi)\to(x,y),\quad \theta(\varphi,\psi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi\\ \sin\varphi\cos\psi\end{bmatrix},\quad \theta'=\begin{bmatrix}-\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi\\ \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi\end{bmatrix}.$$

$\det\theta'=\cos\pi\sin\psi$

$\pi_{x_1,\dots,x_k}\Psi:\Pi\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ – локально диффеоморфизм

$(g=\pi\circ\psi)^{-1}:(x_1,\dots,x_k)\to(v_1,\dots,v_k)\qquad x_{k+1},\dots,x_n$ – функции от первых координат

$\Theta=g\circ\pi_{x_1,\dots,x_k}\Phi$. Аналогично устроено обратное отображение, значит определители обоих не могут обращаться в ноль.

Следствие 15.1. Инвариантность типа множества (куб или полукуб) от выбора станратной параметриазации вытекает из последнего утверждения,

Следствие 15.2. $\forall\mathcal{M}\in\mathbb{M}^{(r)}_{k,n}\quad\forall x^0\in\mathcal{M}$ лькально некоторые $n-k$ координат точки выражаются как функции от остальных координат.

Замечание. Касательное пространство – пространство касательных векторов (векторов принадлежащих какой-то кривой на поверхности).

$\mathrm{Tp}\,\mathcal{M}=d_{\Phi^1(p)}\Phi(\mathbb{R}^k)$

Определение 14. $\sqsupset\mathcal{M}\in\mathbb{M}^{(1)}_{k,n}\quad x^0\in\mathcal{M}\quad(U(x_0),\Phi)$ – карта

$T_{x_0}\mathcal{M}=d_0\Phi(\mathbb{R}^k)$

Замечание. Определение $T_{x^0}\mathcal{M}$ не зависит от параметризации.

$$d_0\Phi(\mathbb{R}^k)=d_0(\Psi_0\theta)(\mathbb{R}^k)=f_{\theta(0)}\Psi(d_0\theta(\mathbb{R}^k))=d_{\theta(0)=0}\Psi(\mathbb{R}^k).$$

$d_0\theta$ – изоморфизм, т.к. θ – диффеоморфизм.

Замечание. $N\in\mathbb{R},N$ – нормальный вектор к $\mathcal{M}$ в точке x^0, если $N\perp T_{x^0}\mathcal{M}$. (Иногда требуют длину 1, но часто нет)

Замечание. Если $M\in\mathbb{M}^r_{k,n}$ в окрестности x^0 задаётся системой $\begin{cases}F_1(x)=0\\ \dots\\ F_{n-k}(x)=0\end{cases}$

$\nabla F_1,\dots,\nabla F_{n-k}$ – базис $(T_{x^0}\mathcal{M})^\perp$

Замечание. Если $\mathcal{M}\in M^{(1)}_{n-1,n}\quad N\perp T_{x^0}\mathcal{M}\quad N=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & \dots & e_n\\ & & \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}(0) & \\ & & \vdots & \\ & & \frac{\partial\Phi}{\partial u_n}(0) & \end{vmatrix}$

$(U(x_0),\Phi)$ – карта

$\iff N\perp\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}(0)\quad\forall j=1,\dots,n-1$

$\left\langle N,\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}(0)\right\rangle=\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}(0)\\ \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}(0)\\ \vdots\\ \frac{\partial\Phi}{\partial u_n}(0)\end{vmatrix}=0$, т.к. совпадают две строки.

Частный случай. Пусть $n=3$, $k=2$. $\mathcal{M}$ — график $z=g(x,y)$, заданный на открытом множестве $D\subseteq\mathbb{R}^2$, $g\in C^1$.

$$\Phi:(x,y)\to(x,y,z)=(x,y,g(x,y)),\quad \Phi'=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\g'_x&g'_y\end{pmatrix}$$

Таким образом, $\mathcal{M}$ — двумерное многообразе хотя бы класса $C^{(1)}$, то есть $\mathcal{M}\in\mathbb{M}^{(1)}_{2,3}$.

N — нормаль к $\mathcal{M}$, $N=\begin{bmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&g'_x\\0&1&g'_y\end{bmatrix}=(-g'_x,-pg_y,1)$ — направлена вверх.

Определение 15. $\sqsupset (U(x^0), \Phi), (\widetilde{U}(x^0), \Psi)$ – две карты

$x_0 \in \mathcal{M} \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$

Скажем, что Φ и Ψ согласованы, если $\det \Theta > 0$, где $\theta = \Psi^{-1} \circ \Phi$ – отображение перехода.

Замечание. Отношение согласованности является отношение эквивалентности.

Определение 16. $I(x^0)$ называется ориентированной, если зафиксирован один из классов эквивалентности по отношению согласованности.

Замечание. $\sqsupset U(x^0) \cap U(x^1) \neq 0$. $U(x^0)$ И $U(x^1)$ согласованы, если $\Phi \in U_+(x^0), \Psi \in U_+(x^1)$, где U_+ – зафиксирванный класс. $\implies \det(\Psi^{-1} \circ \Phi) > 0$

Если $U(x^0) \cap U(x^1) = \varnothing$, то их ориентации согласованы.

Атлас $A = \{(U, \Phi)\}$ многообразия $\mathcal{M}$ называется ориентированным, если ориентации любых двух $U, V \in A$ согласованы.

Многообразие с краем называется ориентиркемым, если $\exists$ ориентированный атлас.

Определение 17. Пусть $\Gamma = \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{1,n}^{(1)}, \quad \tau : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ и $\forall x^0 \in \mathcal{M} : \tau(x^0) \in T_{x^0} \circ \mathcal{M}, \quad \tau$ — непрерывное, $\|\tau\| \equiv 1$.

Тогда τ называется направлением на $\mathcal{M}$.

Утверждение 15.2. $\forall$ связное 1–менрное, 1–глакое многообразе с краем имеет ровно два направления.

$\tau(x) = \pm \dfrac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \quad (\gamma^{-1}(x))$, где γ — параметризация из выбранного класса эквивалентности (из ориентации окрестности $\mathcal{M}$).

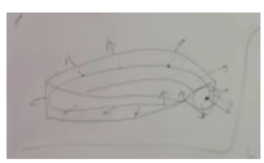
Определение 18. $k = n - 1 \quad n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{n-1,n}^{(\perp)}$

$n(x) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ называется стороной, если:

1. $n(x) \in C(M)$
2. $\forall x \in \mathcal{M} \quad n(x) \perp T_x\mathcal{M}$
3. $\|n(x)\| = 1$

Замечание. Сторон чётное число.

Замечание. Не у всех поверхностей есть сторона. Лента Мёбиуса, бутылка Клейна, ...



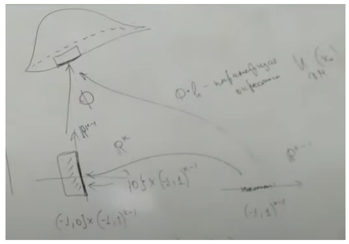
Утверждение 15.3. Для $k = n-1$ ориентируемость многообразия с краем $\mathcal{M} \in (\mathbb{M}_{n-1,n}^1)$ равносильно существоавнию стороны.

Теорема 16. Пусть $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(1)} \quad K \leqslant n, k, n \in \mathbb{N}$

Тогда:

1. $\partial \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k-1,n}^{(1)}$; $\partial(\partial \mathcal{M}) = \varnothing$
2. Если $\mathcal{M}$ – ориентированно то $\partial \mathcal{M}$ ориентируем.

Доказательство. $\partial\mathcal{M}$ – многообразие без края. ■



9 Я чуть чуть опаздал

9.1 Многообразие с краем

Напоминание k–мерную r–гладкую поверхность в $\mathbb{R}^n$ (многообразие без края).

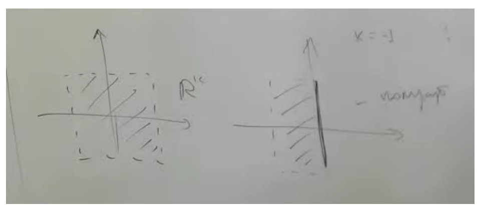
Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n, x^0 \in \mathcal{M}$.

Окрестность $U_M(x^0) = m \cap U(x^0)$, где $U(x^0)$ — открытое в $\mathbb{R}^n$.

$\exists$ открытое $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\Phi : D \to U_M(x^0)$, где $\Phi \in C^k(D)$, регулярно.

Определение 19. Стандартный куб в $\mathbb{R}^k$ — это $(-1,1)^k$.

Определение 20. Стандартный полукуб в $\mathbb{R}^k$ — это $[-1,0] \times (-1,1)^{k-1}$ при $k > 1$ и $(-1,0]$ или $[0,1)$ при $k = 1$.



Определение 21. Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$. $\mathcal{M}$ называется k–мерным многообразием с краем, если $\forall x^0 \in \mathcal{M} \exists$ окрестнось $U_M(x^0)$ и $\Phi : \Pi_k \to U_M(x^0)$, регулярно и $\in C^k$.

Здесь Π_k — стандартный k–мерный куб или стандартный k–мерный полукуб.

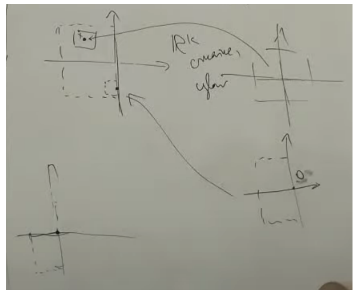
$U_M(x^0)$ — стандартныя окрестнось точки x^0 в $\mathcal{M}$.

Φ — локальная параметризация (стандартная).

$\langle U_M(x^0), \Phi\rangle$ — карта; набор карт — атлас.

Пример. Очевидные:

1. $(-1,1)^k$ — k–мерное многообразие (без края).
2. $(-1,0] \times (-1,1)^{k-1}$ — k–мерное многообразие с краем.
3. $\mathbb{M}^{(r)}_{k,n}$ — набор k–мерных многообразий с краем в $\mathbb{R}^n$ гладкости r.



Пример. Чуть менее очевидныей пример.

$\mathbb{R}^n \in \mathbb{M}_{n,n}^{(\infty)}$ — многообразие с краем (край пустой).

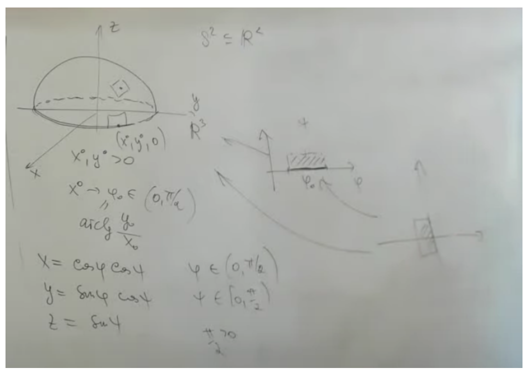
$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \left(\operatorname{tg}\left(x_1 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg}\left(x_2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right), \dots, \operatorname{tg}\left(x_n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad |x_i| < 1.$$

Определение 22. Пусть $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$. $x^0 \in \mathcal{M}$ называется внутренней (относительно многообразия), если $\exists$ стандартная локальная параметризация $\Phi \,:\, \Pi \to U_M(x^0)$, такая, что Π — куб.

Если точка x^0 не является внутренней, то она называется крайней (точкой края).

$\partial\mathcal{M}$ = множество крайних точек $\mathcal{M}$ (край $\mathcal{M}$).

Замечание. Если $\exists$ стандартная параметризация $\Phi \,:\, \Pi \to U_M(x^0)$, такая что Π — полукуб, то $\forall$ стандатной параметризации $\psi \,:\, \widetilde{\Pi} \to \widetilde{U}_M(x^0)$, $\widetilde{\Pi}$ — полукуб.



Замечание. $\mathrm{Fz}\mathcal{M} \neq \partial\mathcal{M}$. То есть множество крайних точек не равно множеству граничных точек.

Определение 23. Дискретное множество в $\mathbb{R}^n$ – множество без предельных точек в $\mathbb{R}^n$

Само множество не более, чем счётно. В любом шаре $\mathbb{R}^n$ лишь конечное множество точек.

Дискретное множество в $\mathbb{R}^n$ – многообразие размерности 0 в $\mathbb{R}^n$ – $\mathbb{M}_{0,n}$

Пример (Конус)**.**

$$ax^2 + by^2 = z^2.$$

В нуле ранг нарушается. Весь конус целиком не многообразие.

$\sqsupset (U(x_0), \Phi), \left(\widetilde{U}(x_0), \Psi\right)$ – две карты для $Min\mathbb{M}_{k,n}^{(r)}, k \in \mathbb{N}$

$V = U(x_0) \cap \widetilde{U}(x_0)$

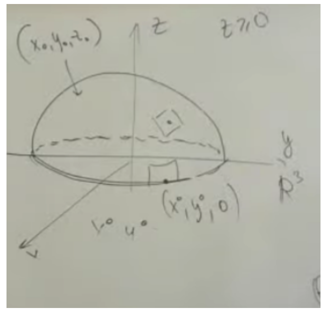
$\Phi^{-1}(C) = W \quad \Psi^{-1}(V) = \widetilde{W}$

$\Theta = \Psi^{-1} \circ \Phi \qquad \Theta : W \to \widetilde{W}$ – отображение перехода.

Утверждение 16.1. В условия определения отображения перехода оно есть диффеоморфизм из W в $\widetilde{W}$.

Пример. Параметризация поверхности сферы через полярные координаты.

$$\Phi : (\phi, \psi) \to \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix}, \Psi : (x, y) \to \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}.$$



$$\theta : (\varphi, \psi) \to (x, y), \quad \theta(\varphi, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \end{bmatrix}, \quad \theta' = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi \end{bmatrix}.$$

$\det\theta' = \cos\pi\sin\psi$

$\pi_{x_1,\dots,x_k}\Psi : \Pi \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ – локально диффеоморфизм

$(g = \pi \circ \psi)^{-1} : (x_1, \dots, x_k) \to (v_1, \dots, v_k) \qquad x_{k+1}, \dots, x_n$ – функции от первых координат

$\Theta = g \circ \pi_{x_1,\dots,x_k}\Phi$. Аналогично устроено обратное отображение, значит определители обоих не могут обращаться в ноль.

Следствие 16.1. Инвариантность типа множества (куб или полукуб) от выбора станратной параметриазации вытекает из последнего утверждения,

Следствие 16.2. $\forall \mathcal{M} \in \mathbb{M}^{(r)}_{k,n} \quad \forall x^0 \in \mathcal{M}$ лькально некоторые $n - k$ координат точки выражаются как функции от остальных координат.

Замечание. Касательное пространство – пространство касательных векторов (векторов принадлежащих какой-то кривой на поверхности).

$\mathrm{Tp}\,\mathcal{M} = d_{\Phi^1(p)}\Phi(\mathbb{R}^k)$

Определение 24. $\sqsupset \mathcal{M} \in \mathbb{M}^{(1)}_{k,n} \quad x^0 \in \mathcal{M} \quad (U(x_0), \Phi)$ – карта

$T_{x_0}\mathcal{M} = d_0\Phi(\mathbb{R}^k)$

Замечание. Определение $T_{x^0}\mathcal{M}$ не зависит от параметризации.

$$d_0\Phi(\mathbb{R}^k) = d_0(\Psi_0\theta)(\mathbb{R}^k) = f_{\theta(0)}\Psi(d_0\theta(\mathbb{R}^k)) = d_{\theta(0)=0}\Psi(\mathbb{R}^k).$$

$d_0\theta$ – изоморфизм, т.к. θ – диффеоморфизм.

Замечание. $N \in \mathbb{R}, N$ – нормальный вектор к $\mathcal{M}$ в точке x^0, если $N \perp T_{x^0}\mathcal{M}$. (Иногда требуют длину 1, но часто нет)

Замечание. Если $M \in \mathbb{M}^r_{k,n}$ в окрестности x^0 задаётся системой $\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \dots \\ F_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$

$\nabla F_1, \dots, \nabla F_{n-k}$ – базис $(T_{x^0}\mathcal{M})^\perp$

Замечание. Если $\mathcal{M} \in M^{(1)}_{n-1,n} \quad N \perp T_{x^0}\mathcal{M} \quad N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ & & \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}(0) & \\ & & \vdots & \\ & & \frac{\partial\Phi}{\partial u_n}(0) & \end{vmatrix}$

$(U(x_0), \Phi)$ – карта
$\iff N \perp \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \quad \forall j = 1, \ldots, n-1$

$$\left\langle N, \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \right\rangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(0) \end{vmatrix} = 0, \text{ т.к. совпадают две строки.}$$

Частный случай. Пусть $n = 3$, $k = 2$. $\mathcal{M}$ — график $z = g(x, y)$, заданный на открытом множестве $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $g \in C^1$.

$$\Phi : (x, y) \to (x, y, z) = (x, y, g(x, y)), \quad \Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}$$

Таким образом, $\mathcal{M}$ — двумерное многообразе хотя бы класса $C^{(1)}$, то есть $\mathcal{M} \in \mathbb{M}^{(1)}_{2,3}$.

N — нормаль к $\mathcal{M}$, $N = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & g'_x \\ 0 & 1 & g'_y \end{bmatrix} = (-g'_x, -pg_y, 1)$ — направлена вверх.

Определение 25. $\sqsupset (U(x^0), \Phi), (\widetilde{U}(x^0), \Psi)$ – две карты
$x_0 \in \mathcal{M} \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}^{(r)}_{k,n}$
Скажем, что Φ и Ψ согласованы, если $\det \Theta > 0$, где $\theta = \Psi^{-1} \circ \Phi$ – отображение перехода.

Замечание. Отношение согласованности является отношение эквивалентности.

Определение 26. $I(x^0)$ называется ориентированной, если зафиксирован один из классов эквивалентности по отношению согласованности.

Замечание. $\sqsupset U(x^0) \cap U(x^1) \neq 0$. $U(x^0)$ И $U(x^1)$ согласованы, если $\Phi \in U_+(x^0), \Psi \in U_+(x^1)$, где U_+ – зафиксирванный класс. $\implies \det(\Psi^{-1} \circ \Phi) > 0$

Если $U(x^0) \cap U(x^1) = \varnothing$, то их ориентации согласованы.

Атлас $A = \{(U, \Phi)\}$ многообразия $\mathcal{M}$ называется ориентированным, если ориентации любых двух $U, V \in A$ согласованы.

Многообразие с краем называется ориентиркемым, если $\exists$ ориентированный атлас.

Определение 27. Пусть $\Gamma = \mathcal{M} \in \mathbb{M}^{(1)}_{1,n}$, $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ и $\forall x^0 \in \mathcal{M} : \tau(x^0) \in T_{x^0} \circ \mathcal{M}$, τ — непрерывное, $\|\tau\| \equiv 1$.
Тогда τ называется направлением на $\mathcal{M}$.

Утверждение 16.2. $\forall$ связное 1–менрное, 1–глакое многообразе с краем имеет ровно два направления.

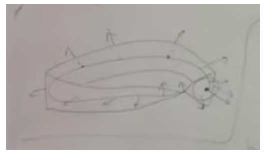
$\tau(x) = \pm \dfrac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \; (\gamma^{-1}(x))$, где γ — параметризация из выбранного класса эквивалентности (из ориентации окрестности $\mathcal{M}$).

Определение 28. $k = n - 1 \quad n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}^{(\perp)}_{n-1,n}$
$n(x) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ называется стороной, если:

1. $n(x) \in C(M)$
2. $\forall x \in \mathcal{M} \quad n(x) \perp T_x\mathcal{M}$
3. $\|n(x)\| = 1$

Замечание. Сторон чётное число.

Замечание. Не у всех поверхностей есть сторона. Лента Мёбиуса, бутылка Клейна, ...

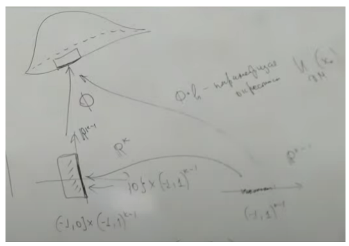


Утверждение 16.3. Для $k = n-1$ ориентируемость многобразия с краем $\mathcal{M} \in (\mathbb{M}^1_{n-1,n})$ равносильно существоавнию стороны.

Теорема 17. Пусть $\mathcal{M} \in \mathbb{M}^{(1)}_{k,n} \quad K \leqslant n, k, n \in \mathbb{N}$
Тогда:

1. $\partial\mathcal{M} \in \mathbb{M}^{(1)}_{k-1,n}$; $\partial(\partial\mathcal{M}) = \varnothing$
2. Если $\mathcal{M}$ – ориентированно то $\partial\mathcal{M}$ ориентируем.

Доказательство. $\partial\mathcal{M}$ – многообразие без края. ■



Замечание (Воспоминания)**.** Многообразие – локально гомеоморфно кубу.
С краем – есть точки геомеоморфные половине куба.
Пусть у нас есть две параметризации окрестности: $\Phi, \Psi . \Phi = \Psi \circ \Theta \qquad \Phi \sim \Psi \iff \det \Theta' > 0$
Класс эквивалентности $[\Phi]$ – ориентация окрестности
U, V – окрестности в M. Они согласованы если:

- они не перескекаются
- они пересекаются и $\det \theta' > 0$, где θ – отображение перехода от Φ к Ψ, где Φ – из ориентации U, Ψ – из ориентации V и $\Phi(\Pi) \cap \Psi(\Pi) \neq \varnothing$

Пример. $S_1 = S \cap \{z > 0\} \quad S_2 = S \cap \{x > 0\}$
$\theta : (x, y) \to (y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
$$\theta' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix}$$
$\det' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} > 0$ на области определения $(\Phi^{-1}(S_1 \cap S_2)\ )$
$S_3 = S \cap \{z < 0\}$
$\widetilde{\theta}(x, y) = (y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$
И здесь уже всё плохо с определиителем.

Утверждение 17.1. $\sqsupset \gamma : \langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, регулярно ($\iff \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \langle a, b\rangle$). γ – простой путь (без самопересечений, инъективность)
$\Gamma = \gamma(\langle a, b\rangle)$ – Одномерное многобразие.
Край не пуст, если $\{a, b\} \cap \langle a, b\rangle \neq \varnothing$
Направление – непрерывное отображение $\tau : \Gamma \to \mathbb{R}^n$:

1. непрерывно $\tau \in C(\Gamma)$

2. $\tau(x) \in T_x\Gamma \forall x \in \Gamma$

3. $\|\tau(x)\| = 1 \forall x \in \Gamma$

Для любой гладкой кривой Γ (из определения выше) существует ровно два направления на этой кривой, и любая такая Γ ориентируема

Доказательство. Ориентация порождается сужениями одного и того же отображения λ на различные кубы и полукубы.

$$\tau_\gamma = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}\left(\gamma^{-1}(x)\right).$$

$\tau(x)$ – ещё одно направление

$t \in (a,b) \quad h(t) = \langle \tau_\gamma\left(\gamma(t)\right), \tau(\gamma(t))\rangle = \pm\|\tau_\gamma\left(\gamma(t)\right)\|\|\tau\left(\gamma(t)\right)\| = \pm 1$

$h : \langle a,b\rangle \to \{-1,+1\}$ – непрерывно, но $h(\langle a,b\rangle)$ должно быть промежутком:

1. $h\left(\langle a,b\rangle\right) = \{1\} \implies \tau = \tau_\gamma$

2. $h\left(\langle a,b\rangle\right) = \{-1\} \implies \tau = -\tau_\gamma$

■

Утверждение 17.2. $k = n-1 \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$

Сторона на многообразии $M \in \mathbb{M}^1_{n-1,n}$ – отображение $N : M \to \mathbb{R}^n$:

1. $n \in C\left(M\right)$

2. $N(x) \perp T_xM$

3. $\|N\| = 1$

Если $M \in \mathbb{M}^1_{n-1,n}$. Тогда M двусторонняя $\iff$ M ориентируема. Если M двустороняя, то любая сторона представима в виде:

$$N = \pm\frac{N_\Phi}{\|N_\Phi\|}\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Φ – параметризация окрестности точки x Из выбранной ориентации

$$N_\Phi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \\ \dots & \Phi'_{u_1} & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \Phi'_{u_{n-1}} & \dots \end{vmatrix}$$

$\|N_\Phi\| \neq 0$

$\Phi \sim \widetilde{\Phi}$

Замечание (Напоминание)**.** $\mathcal{E}_p(X)$ – набор кососимметрических p форм из X в $\mathbb{R}^n$

$\omega : O \to \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$

$\omega(x, h^1, \dots, h^p) \quad h_i \in \mathbb{R}^n$

$\omega = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n} \omega_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1}(x) \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = \sum\limits_I \omega_I(x) dx^I$

$\Omega_p^{(r)} = \Omega_{p,n}^{(r)}$ – набор всех дифференцируемых p-форм гладкости r в O

Пример.

1. $f \in C^k(O), \quad \omega = f \in \Omega_0^{(k)}(O)$

2. $f \in C^k(O), \quad d_xf = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \in \Omega_1^{(k-1)}(O)$

3. $\sqsupset F$ – поле в $\mathbb{R}^3 \quad F = (P,Q,R) : O \to \mathbb{R}^3$ $\omega_F = Pdx + Qdy + Rfz$

   $\omega_F(h \in \mathbb{R}^3) = P(x,y,z)h_1 + Q(x,y,z)h^2 + R(x,y,z)h^3$

   Если $h \approx 0 \implies \omega_F(h) \approx$ элементарная работа поля F на перемещение h

   $\omega_F^* = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

   $dy \wedge dz \ldots$ – задают базис $\Omega_{2,3}$

   Ω_1^n изоморфно Ω_{n-1}^n

4. $V = (P, Q, R) \in C^r(O)$

$\omega(x, h^1, h^2) = \begin{vmatrix} v \\ h^1 \\ h^2 \end{vmatrix} \in \Omega^{(r)}_{2,3}(O), \quad h61, h^2 \in \mathbb{R}^3$ – смешанное произведение (h^1, h^2, v)

Смысл: Если V – поле скоростей, а $h^1, h^2 \approx 0$, то $\left(h^1, h^2, v\right)$ – поток поля V через площадку, натянутую на h^1 и h^2

$\omega = p \begin{vmatrix} h^1_2 & h^1_3 \\ h^2_2 & h^2_3 \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} h^1_3 & h^1_1 \\ h^2_3 & h^2_1 \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} h^1_1 & h^1_2 \\ h^2_1 & h^2_2 \end{vmatrix}$

$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \omega^*_V$

10 Внешнее дифференцирование дифференциальных форм

"d" — внещний дифференциал

Определение 29 (Внешний дифференцал для форм)**.** $\omega \in \Omega^{(1)}_{0,n}(O), \quad d_x\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_i}(x)dx_i$

$\omega \in \Omega^(_p 1)(O) \quad \omega = \sum\limits_I \omega_I dx^I, \omega_I \in \Omega^{(1)}_0(O) \implies dw = \sum\limits_I (d\omega_I) \wedge dx^I$

$d\omega \in \Omega^{(0)}_{p+1}(O) \quad dw = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_I \frac{\omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx^I$

Пример. 1. $\omega \in \Omega^{(r)}_{n-1,n}(O)$.

Для $n = 3$: $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + Q \wedge dz \wedge dx + R \wedge dx \wedge dy = P'_x dx \wedge dy \wedge dz + Q'_y dy \wedge dz \wedge dx + R'_z dz \wedge dx \wedge dy = \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right) dxdydz \implies d\omega = \operatorname{div}(P, Q, R) dx \wedge dy \wedge dz$.

$d\omega = \div (P, Q, R) \cdot dx \wedge dy \wedge dz = d\omega^*_{(P,Q,R)}$.

$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$

$d\omega = \left(R'_y - Q'_z\right) dy \wedge dz + \left(P'_z - R'_x\right) dz \wedge dx + \left(Q'_x - P'_y\right) dx \wedge dy$

$\operatorname{rot}(P, Q, R) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

$\omega^*_{\operatorname{rot}(P,Q,R)} = d\omega_{P,Q,R}$

Свойства внешнего дифференциала:

1. Линейность. $d(C_1\omega + C_2\theta) = C_1 d\omega + C_2 d\theta \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall \omega, \theta \in \Omega^{(1)}_{p,n}())$.
2. Внешнее дифферецнирование произведения. $\omega = \sum\limits_{I(1\ldots p)} \omega_I dx^I \quad \theta = \sum\limits_{J(1\ldots q)} \theta_J dx^J \; \omega \wedge \theta = \sum\limits_I \sum\limits_J \omega_I \theta_j \cdot dx^I \wedge dx^J$

   Если $\omega \in \Omega^{(1)}_p(O) \quad \theta \in \Omega^q_q(O)$

   $$d\left(\omega \wedge \theta\right) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (d\theta).$$

   Если ω, θ – одночленные функции, $\omega = fdx^I \quad \theta = g \cdot dx^J \quad f, g \in C^1(O)$

   $$\begin{aligned} d\left(fdx^I \wedge gdx^J\right) &= d\left(f \cdot gdx^I \wedge dx^J\right) \\ &= d\left(f \cdot g\right) \wedge dx^I \wedge dx^J = gdf \wedge dx^I \wedge dx^J + fdg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (d\theta) \end{aligned}$$

   .

Последнее равенство, потому что нужно перетащить dg через dx^I с помощью p транспозиций.

$\tilde{2}$. $\omega \in \Omega_P^{(1)}(O) \quad f \in C^1(O)$

$$d\left(f \cdot \omega\right)' = (df) \wedge \omega + f \wedge d\omega.$$

3. $d\left(d\omega\right) \equiv 0 \quad \omega \in C_p^{(2)}$

   (a) $\omega = f \quad p = 0$

$$\begin{aligned} d^2 f &= d\left(\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} dx_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d\left(f'_{x_i}\right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j} dx_J \wedge dx_i = 0 \end{aligned}$$

.

11 Перенос (пересадка) дифферецнивальной формы

O – открытое в $\mathbb{R}^n \quad U$ – открытое в $\mathbb{R}^k$

$\Phi \in C^1\left(U \to O\right)$

$\omega \in \Omega_p$

$$\Phi_*(\omega)(u, v_1, \ldots, v_p) = \omega\left(\Phi(u), d_u\Phi(v^1), \ldots., d_u\Phi(v^p)\right)$$

.

Пример. 1. $\omega \in \Omega_0$

   $\Phi_*(\omega)(\omega) = \omega \circ \Phi$

2. $k = 1, n \in \mathbb{N}, p = 1$

   $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i d(x) x_i$

   $\Phi = \gamma$

$$\begin{aligned} \gamma_*(\omega)(u, v) = \sum \omega_i\left(\gamma(u)\right) dx_i\left(\gamma'(u) \cdot v\right) \\ = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\left(\gamma\left(u\right)\right) \cdot \gamma'_i(u)\right) \end{aligned}$$

.

Утверждение 17.3 (Свойства пересадки дифференциальных форм) Линейность

$$\Phi_*\left(C_1\omega + C_2\theta\right) = C_1\Phi_*(\omega) + C_2\Phi_*(\theta), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \omega, \theta \in \Omega_p(O).$$

1. $\omega \in \Omega_p(O) \quad f \in C^1(O)$

$$(\Phi_*(f \cdot \omega))(u, v^1, \ldots, v^p) = (f \circ \Phi) \cdot \Phi(\omega).$$

   $\Phi_*(f\omega) = f\omega(\Phi(u), d_n\Phi(v^1), \ldots, d_n\Phi(v^1)) = f\left(\Phi(u)\right) \cdot \underbrace{\omega\left(\Phi(u), d_n\Phi(v^1), \ldots, d_n\Phi(v^p)\right)}_{\Phi_*(\omega)}$

2. $\Phi_*(w \wedge \theta) = \Phi_*(\omega) \wedge \Phi_*(\theta), \quad \omega \in \Omega_p(O), \theta \in \Omega_q.$

   По линейности докажем это для одночленных.

   $\Phi_*(dx^I \wedge dx^J) = \Phi_*(dx^I) \wedge \Phi_*(dx^J).$

$$
\begin{aligned}
\Phi_*(dx^I \wedge dx^J)(v^1,\ldots,v^{p+q}) &= \left(dx^I \wedge dx^J\right)\left(d\Phi(v^1),\ldots,d\Phi(v^{p+q})\right) \\
&= \begin{vmatrix} h^1_{i_1} & \ldots & h^1_{i_p} & \ldots & h^1_{j_q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h^{p+q}_{i_1} & \ldots & \ldots & \ldots & h^{p+q}_{j_q} \end{vmatrix} \\
&= \Phi_*(dx_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \Phi_*(dx_{i_p}) \wedge \ldots \wedge \Phi_*(dx_{j_q})(h^1,\ldots,h^{p+q}) \\
\Phi_*(dx_I)(h) = dx_i\left(\Phi'\cdot h\right)\omega &= f dx^I \\
\theta &= g dx^J \\
\Phi_*\left(f dx^I \wedge g dx^J\right) = (f\cdot g)\circ\Phi \ldots \Phi_*\left(dx^I \wedge dx^J\right) \\
&= (f\circ\Phi)\circ(g\circ\Phi)\Phi_* dx^I \wedge \Phi_* dx^J = P_*(\omega)\wedge\Phi_*()\theta)
\end{aligned}
$$
.

3.
$$
\forall\omega\in\Omega_p^{(1)}(O) \quad d\left(\Phi_*(\omega)\right) = \Phi_*\left(d\omega\right).
$$

4. $\psi : V \to U, \in C^1 \qquad \left(\Phi\psi\right)_*(\omega) = \psi_*(\Phi_*(\omega))$

5. $\omega \in \Omega_p^{(1)}$ $\omega = \sum\limits_I \omega_I dx^I$

$$
\begin{aligned}
\Phi^*(\omega) &= \sum_{I(1\ldots p)} \sum_{\substack{J(1\ldots p)\\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_p\leqslant k}} \\
&= \omega_I(\Phi(u))\cdot\det\frac{\partial\left(x_{i_1},\ldots,i_p\right)}{\partial\left(u_{j_1},\ldots,u_{j_p}\right)} du_{j_1}\wedge\ldots\wedge du_{j_p}
\end{aligned}
$$
.

$\omega = \sum P_i dx_i \quad \gamma^*(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i\left(\gamma(t)\right)\cdot g'amma_i(t)dt = \left\langle P\left(\gamma(t), g'amma(t)\right)\right\rangle dt$

$\omega = P dy\wedge dz + Q dz\wedge dx + R dx\wedge dy \quad \Phi : (u,v)\to(x,y,z)$

$$
\begin{aligned}
\Phi^*(\omega) = P\left(\Phi(u,v)\right)\cdot\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v\end{vmatrix} + Q(\Phi(u,v))\cdot\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u + x_v & \end{vmatrix} + R(\Phi(u,v))\cdot\begin{vmatrix} x_i & x_v \\ y_u & y_v\end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} P\circ\Phi & Q\circ\Phi & R\circ\Phi \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} P\circ\Phi & Q\circ\Phi & R\circ\Phi \\ & P'hi_u & \\ & \Phi'_v & \end{vmatrix} = \left(V\circ\Phi, \Phi'_u, \Phi'_v\right)
\end{aligned}
$$
.

Определение 30 (Интеграл от дифференциальной формы). 1. Если $\omega \in \Omega_{n,n}(O)$, $E \in \mathcal{A}_n$, $E \subseteq O$. $\omega = f \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

Тогда $\int_E \omega = \int_E f d\lambda_n = int_E \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n) = dx_1, \ldots, dx_n$.

2. Φ – регулярное отображение, $U \subseteq \mathbb{R}^k \to O \subseteq \mathbb{R}^n$ $E \subseteq \Phi(U)$ $\Phi^{-1}(E) \subseteq \mathcal{A}_k$

   $\omega \in_{k,n}$

   Если M – k-мерное ориентируемое многообразие

   E –"малое" множество (т.е сущетвует стандартная параметризация Φ, которая положительно ориентирует)

   $\Phi : U \to M$ И $E \subseteq \Phi(U)$. Тогда применима формула:

$$\int_{\substack{E \\ \text{вдоль} \Phi}} = \int_{\Phi^{-1}(E)} \Phi_*(\omega).$$

Замечание (Факт). $\int_E \omega$ не зависит от выбора положительной ориентирующей параметризации.

Замечание. E называется измеримым в $M \iff E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ E_j – малые измеримые

$E = \coprod_{j=1}^{\infty} E_j \implies \int_E \omega = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} \omega$ – поверхностный интеграл второго рода

Частные случаи:

1. $p = k = 1$ $\Phi = \gamma$ – простой кусочно-гладкий путь (замкнутый) с заданным напралением обхода (с ориентацией)

   $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i dx_i$

$$\begin{aligned}
\int_E \omega &= \int_{\langle c,d \rangle} \big\langle P(\gamma(t)), \gamma'(t)) \big\rangle \, dt \text{ – криволинейный интеграл} \\
&= \int_{\langle c,d \rangle} \langle P\left(\gamma(t)\right), \tau \rangle \, \|\gamma'\| dt \\
&= \int_{\langle c,d \rangle} \langle P(\gamma(t)), \tau \rangle \, ds \text{ – криполинейный интеграл 1-го рода}
\end{aligned}$$

.

2. $p = k = 2$ $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

   $V = (P, Q, E)$

$$\begin{aligned}
\int_E \omega &= \int_E Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rsx \wedge dy \\
&= \int_{\Phi^{-1}} \Phi_*(\omega) \\
&= \iint\limits_{\Phi^{-1}(E)} \underbrace{\begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ & \Phi'_u & \\ & \Phi'_v & \end{vmatrix}}_{\langle V \circ \Phi, n \| \Phi'_u \times \Phi'_v \| \rangle} dudv \\
&= \iint\limits_{\Phi^{-1}(E)} \langle V \circ \Phi, n \rangle \, \|\Phi'_u \times \Phi'_v\| dudv \text{ – двойной интеграл} \\
&= \iint\limits_{E} \langle V, n \rangle \, d\mu_M \text{ – поверхностный интеграл первого рода}
\end{aligned}$$

.

$E = \Phi(U) \quad n = \pm \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{\|\Phi'_u \times \Phi'_v\|}$

Пример. $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.'

$$\int_{S \text{ вн}} = \int_S < (x,y,z), \frac{(x,y,z)}{R} d\mu_S = R \cdot \int_S d\mu_S = \left| \begin{array}{l} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ d\mu_S = \sqrt{1 + z'_x + z'_y} dxdy \end{array} \right| = 2R \int_{\{x^2+y^2 \leqslant R^2\}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

$$= 2R^2 \int_\pi^\pi d\phi \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 2R^2 \cdot 2\pi \left(\sqrt{R^2 - r^2}\right) \Big|_{r=R}^{r=0}.$$

Замечание. Площадь сферы $S^2(R) = 4R^2\pi$.

12 Общая формуа Стокса

Теорема 18. ориентируемое компактное $M \subseteq \mathbb{M}_{n,k}$. Ориентация ∂M согласована с ориентацией M, $\omega \in \Omega^{(1)}_{k-1}(O), M \subseteq O$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Замечание (Наводящие соображения). $k = 1 \quad \omega = f$

$\gamma : [a,b] \to M$ – биекция

$$\int_M df = \int_{\gamma^{-1}(M)} \gamma_*(df)$$

$$= \int_{[a,b] d\gamma_*(f)} = \gamma_*(f) \mid_a^b$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

$\partial M = a, b$, интеграл будет разностью произвдений знаков и заначений функции ($-$ для входа, $+$ для выхода)

Теорема 19.

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

M – компактное (гладкое C^2), $M \in \mathbb{M}^{(2)}_{q,n}$ – многообразие с краем ∂M, ориентируемое, ориентации на M и ∂M согласованы, $\omega \in \Omega^{(1)}_{q-1.m}$

Замечание. $n = 2, q = 2$

$\omega = Pdx + Qdy \quad P = P(x,y), \quad Q = Q(x,y)$

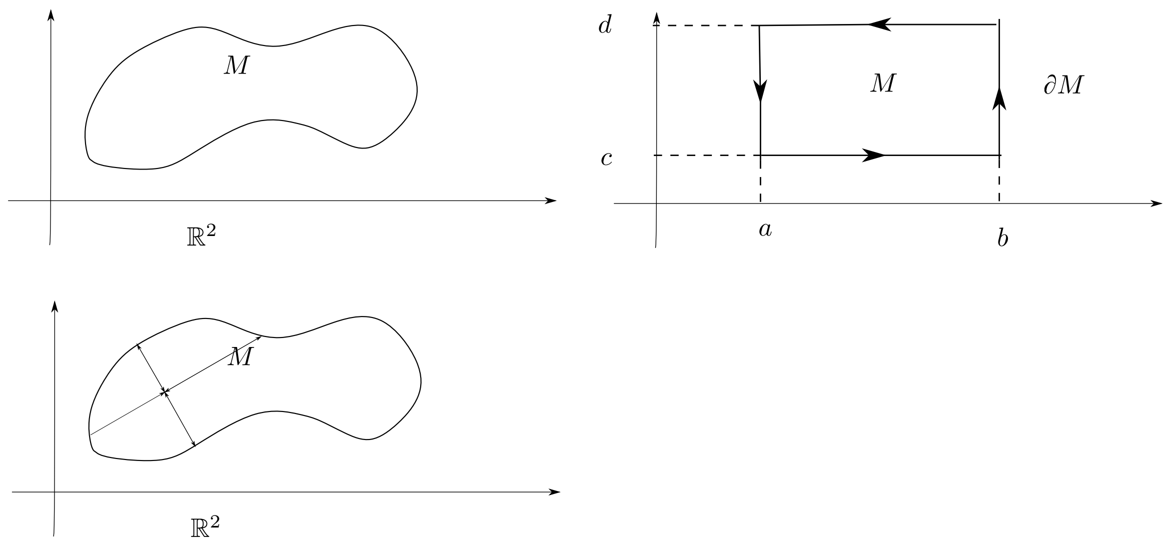


Рис. 4: stocks22

$$
\begin{aligned}
d\omega &= P'_y dy \wedge dx + Q'_x dx \wedge dy = \left(Q'_x - P'_y\right) dx \wedge dy \\
\int_M d\omega &= \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} Q'_x - P'_y dxdy \\
&= \int_c^d \int_a^b Q'_x(x,y) dxdy - \int_a^b dx \left(\int_c^d P'_y dy \right) \\
&= \int_c^d Q(b,y) - Q(a,y) dy - \int_a^b P(x,d) - P(x,c) dx \\
\int_{\partial M} &= \int_{\substack{I_1, I_2, I_3, I_4 \\ \text{ориентация}}} Pdx + Qdy \\
&= \left(\int_{I_1} + \int_{I_3} \right) Pdx + \left(\int_{I_2} + \int_{I_4} \right) Qdy
\end{aligned}
$$

.

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \sum \int_{\partial M_j} \omega \\
&= \sum \int_{M_j} d\omega \\
&= \int_M d\omega
\end{aligned}
$$

.

Замечание. При $n = 2\, k = 2\, q = 1$ формула Стокса называется формулой Грина. O – кусочно-гладкая область в $\mathbb{R}^2$, ∂O – граница, ориентируемая положительно.

$$\int_{\partial P} Pdx + Qdy = \iint\limits_O Q'_x - P'_y dxdy.$$

Замечание. $n = 3\,k = 2\,q = k - 1 = 1$

$\omega = Pdx + Qdy + Rsz$

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} \omega &= \int_{\Phi^{-1}(\partial M)} \Phi_*(M) \\ &= \int_{\partial \Pi} \Phi_*(\omega) \\ &= \int_{\Pi} \underbrace{d\left(\Phi_*(\omega)\right)}_{\Phi_*(d\omega)} = \int_{\Phi(\Pi)=M} d\omega\end{aligned}$$

$$\Phi : \Pi \to (M\,(\cup \partial M))$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_{M_n} \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dz & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \int_M \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

n – выбранная сторорона, относительно которой обход ∂M против часовой стрелки.

$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz = \int_M \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds.$$

– класическая формула Стокса. M – 2-мерная поверхность с краем в $\mathbb{R}^3$, ориентируемая, $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,обход края – стандартный (против часовой стрелки принаблюдении из n)

Пример.

$$\int_C \left(y^2 + z^2\right) dx + \left(x^2 + z^2\right) dy + \left(x^2 + y^2\right) dz.$$

C – кривая $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx \\ x^2 + y^2 = 2rx, r < R \\ z \geqslant 0 \end{cases}$, обход кривой положительный относительно внешней стороны, "меньшей" части сферы, высекаемой цилиндром.

$n(x, y, z) = \frac{(x-R, y, z)}{R}$

$$\begin{aligned}\int_C \left(y^2 + z^2\right) dx + \left(x^2 + z^2\right) dy + \left(x^2 + y^2\right) dz &= \frac{1}{R} \iint \begin{vmatrix} x - R & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} ds \\ &= \frac{2}{R} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 2rx} \frac{R}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} \left((x - R)(y - z) + y(z - x) + z(x - y)\right) dxdy \\ &= -2R \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 2rx} \frac{y}{\sqrt{\ldots}} - 1 dxdy \\ &= 2R\pi r^2\end{aligned}$$

.

слагаемое с корнем обросилось, потому что это нечётная функция по y, а круг обладает симметрией относительноси оси Ox

Замечание. $n = 3\,k = 3\,q = k - 1 = 2$

$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

$d\omega = dic\,(P, Q, R)\, dx \wedge dy \wedge dz \quad dic = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial Y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Формула Гаусса-Отроградского:

$$\int_{\partial M} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint\limits_{M} div(P,Q,R)dxdydz.$$

M – трёхмерное гладкое многообразие.

$\int_{\partial M} \langle (P,Q,R), n\rangle\, ds$

Пример. $\iint x^2\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma ds$

$S: \begin{cases} x^2+y^2=z \\ 0 \leqslant z \leqslant h \end{cases}$

$n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Формула ГО не применяется напрямую, т.к. поверхность незамкнута.

$$\begin{aligned} \int_S f + \int_{S_+} f = \iiint div\,(P,Q,R)\,dxdydz & \\ &= 2\iiint z \\ &= 2\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h rdr \int_r^h zdz \\ &= 2\cdot 2\pi \int_0^h zdz \int_0^z rdr \\ &= 2\cdot\frac{\pi h^4}{4} = \frac{\pi h^4}{2} \\ \int_{S_+} f = \iint\limits_{S_1} \langle (P,Q,R), (0,0,1)\rangle\, dS - 1 & \\ &= \iint h^2 dS_1 = h^2\pi h^2 = \pi h^4 \end{aligned}$$

.

$I = J - I_1 = \frac{\pi h^4}{2} - ouh^4 = -\frac{\pi h^4}{2}$

Замечание (Случай комплексной переменнной)**.** $f : O \to \mathbb{C}$ называется $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $a \in O$, если $d_a f$ – $\mathbb{C}$ -линеен. $f(a+h) - f(a) = l(h) + o(h) \quad l$ – линейное отображение, $o(h) \quad \alpha(h)\cdot h \quad \alpha(h) \to 0, h \to 0$

линейное отобрание – можно выносить комплексные множители $L(cz) = cL(z)$

Теорема 20 (теорема об условиях равносильных $\mathbb{C}$-диффренцируемости)**.** $f : O \to \mathbb{C}$. $\sqsupset f$ – дифференцируемо в вещественном смысле в точке $a \in O$ Тогда следующее равносильно:

1. f – $\mathbb{C}$-дифференцируема
2. $\exists f'(a) = \lim\limits_{z\to 0, z\in\mathbb{C}} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$
3. $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$
4. $f = u + iv \quad u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$

   $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$ в точке $a \quad f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ -u'_y & u'_x \end{pmatrix}$

Замечание.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

.

Замечание. g – $\mathbb{R}$-дифференцируемо в точке $a \implies \exists! A, B \in \mathbb{C}$
$d_a g = Adz + Bd\overline{z} \qquad A = \frac{\partial f}{\partial z}(a) \quad B = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)$

Замечание.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

γ – простой кусочно-гладкий путь $\gamma : [a,b] \to C$, f измерима на $\Gamma = \gamma([a,b])$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))))\left(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\right)dt \\
&= \int_{[a,b]} \left(u(\dots)\gamma_1' - v\gamma_2'\right) + i\left(v\gamma_1' + u\gamma_2'\right)dt \\
&= \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy \\
&= \iint\limits_O \left(-v_x' - u_y'\right) + i\left(u_x' - v_y'\right)
\end{aligned}$$

.

Теорема 21 (Коши)**.** $\sqsupset f$ – $\mathbb{C}$-дифференцируема в кусочно-гладкой области O вплоть до границы. Тогда

$$\int_{\partial O} f(z)dz = 0.$$

Пример. $f(z) = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}
f'(z)(a) &= \lim_{z\to 0}\frac{f(a+z) - f(a)}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{a+z} - \frac{1}{a}}{z} \\
&= \lim_{z\to 0} -\frac{1}{a(a+z)} = -\frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

.

$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \quad \forall z \neq 0$

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=R}\frac{dz}{z} &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{Rie^{it}dt}{Re^{ei}} \\
&= i2\pi \neq 0
\end{aligned}$$

.

При этом если взять другой контур, который не будет содержать нуля внутри, то интеграл по контуру будет равен нулю.

Ln – многозначный логарифм $E \subseteq C \to 2^{\mathbb{C}} \quad z \to \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$

Замечание. Если в области, по контуру которой берётся интеграл, есть конечное число особых точек, можно окружить эти точки достаточно маленькеми окрестности и посмотреть на интеграл по итоговому контору

Теорема 22 (теорема Коши о вычетах)**.**

$$\int_C f(z)dz = \sum_{a\in A} \oint_{C(a)} f(z)dz.$$

$C(a)$ – набор окружностей $\{B(a)\}$, которые не пересекаются
вычет функции в точке a называется $\operatorname{res}_a f = \oint_{C(a)} f(z)dz$

Замечание (частные случаи формула Стокса)**.**

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

1. Если ω замкнута в $O \supset M \implies \int_{\partial M} \omega = 0$
2. Если $\partial M = \varnothing$, то $\int_M d\omega = 0$

Определение 31. ω называется замкнутой в области O, если $d\omega = 0$ в любой $p \in O$

Определение 32. ω называется точной в области O, если существует первообразная для ω в области O
$\omega \in \Omega_{q,n}(O)$, перообразная $\widetilde{\omega} \in Q_{q-1,n}(O)$

Замечание. ω – Точная, то ω – замкнута
$\omega = d\widetilde{\omega} \quad d\omega = dd\widetilde{\omega} = 0$

Утверждение 22.1. Если $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i dx_i$ точна в области $O \subseteq \mathbb{R}^n$
$\omega = dF \implies \forall \gamma : [a, b] \to O$

$$\int_\gamma \omega = F \mid_A^B .$$

, где $A = \gamma(a), = \gamma(b)$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i &= \int_{[a,b]} \sum_{i=1}^{n} P_i \circ \gamma(t) \cdot \gamma_i'(t)dt \\
&= \int_{[a,b]} \left\langle P \circ \gamma, \gamma' \right\rangle \\
&= \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a) \\
&= F\left(\gamma(b)\right) - F\left(\gamma(a)\right) \\
&= F(B) - F(A) \\
dF\left(\gamma'(t)\right) &= d\left(\overbrace{F \circ \gamma(t)}^{\Phi}\right)
\end{aligned}$$

.

Выводы:

1. Если $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i dx_i$ точна в O, то $\int_\gamma \omega$ не зависит от пути γ с носителем в O

2. –||–? γ –замкнута, то $\int_\gamma \omega = 0$

Пример. $\int_\gamma \underbrace{\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}}_{\omega}$ $\quad P = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

ω – локально точна, значит замкнута всюду в $C\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{xdy - ydx}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \\ &= -d\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{\left(\frac{x}{y}+1\right)} \\ &= -d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

$$\omega = d\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

Так мы предъявили первообразные на полуплоскостях.

$$\int_{\|(x,y)\|=R} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = R^2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{R^2} d\varphi = 2\pi \neq 0.$$

Значит форма не точна (потому что в противном случае это был бы интеграл по замкнутому контуру, локально точная в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, но не точная.

$\mathrm{Hol}(O) = \{f \ : \ \forall z \in O \ \exists f'(z)\}$

Теорема 23 (Коши)**.** $f \in \mathrm{Hol}(\overline{O})$, O — кусочно–гладкая область (граница O — кочкчный набор кусночно гладких непересекающихся простых замкнутых контуров).

∂O — стандартно ориентированная граница.

Теорема 24 (“Теорема Коши о вычетах”, Теорема 2)**.** $f \in \mathrm{Hol}(\overline{O}\backslash A)$ $\quad A$ – конечное множество. O – кусочно-гладкая область (как в предыдущей теореме). $A \subseteq O$

$$\int_{\partial O} f(z)dz = \sum_{a\in A} \oint_{|z-a|=r} f(z)dz.$$

r : замкнутые круги $\{\overline{B}(a)\}$ попарно не пересекающиеся и содержащиеся в O

Утверждение 24.1 (Интегральная формула Коши)**.** Пусть $f(z) \in \mathrm{Hol}(\overline{O})$, O — кусочно–гладкая форму в $\mathbb{C}$, $\quad a \in O$.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial O} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Доказательство. $\frac{f(z)}{z-a} \in \mathrm{Hol}\left(\overline{O}\backslash\{a\}\right)$

$A = \{a\} \implies \int_{\partial O} \frac{f(z)}{z-a} = \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{z-a}$, где $\rho \in (0, \rho_0)$

f дифференцируема в точке a, $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \alpha(z)(z-a)$, где $\alpha(z) \to 0, \ z \to a$.

$$= \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(a))}{z-a}dz + \int_{|z-a|=\rho} f'(a) + \alpha(z)dz.$$

Т.к. $\alpha(z) \to 0 \quad \exists M : |f'(\alpha) + \alpha(z)|| \leqslant M, \, \forall z \in B_{\rho_0}(a).$

$$\begin{aligned} r(t) &= a + \rho e^{it} \\ r'(t) &= i\rho = i\rho e^{it} \\ \left|\rho'(t)\right| &= \rho \\ &. \end{aligned}$$

$$f(a) \cdot \int_{|z-a|=0} \frac{dz}{z-a} = 1\pi i.$$

■

Теорема 25 (О разложении в ряд Тейлора)**.** $\sqsupset a \in \mathbb{C}, R > 0, f \in \operatorname{Hol}(B_R(a))$

Тогда существует единственный набор $(C_k)_{k=0}^{+\infty}$:

$\forall z \in B_R(a) \quad f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$

$\sqsupset z \in B_R(a) \quad r = |z-a| \qquad \sqsupset \rho \in (r, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} \\ &= \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{ll} W = \frac{z-a}{\zeta-a} & |W| = \frac{r}{q} < 1 \\ \frac{1}{1-W} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} W^k & \end{array} \right|$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \underbrace{\frac{f(\zeta)}{???}}_{\text{огр}} \quad \underbrace{\zeta - a \sum_{k=0}^{\infty} W^k}_{\text{сх. равн. на} \xi : |\zeta - a| = \rho} \quad \text{– сходится равномерно}$$

$$\oint\limits_{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \int s.$$

Следствие 25.1. Голоморфность = комплексная аналитичность.

Следствие 25.2. Неравенства Коши для тейлоровских коэффициентов.

Пусть $f \in \operatorname{Hol}(B_R(a)), \; a \in \mathbb{C}, \; R > 0.$

Для $r \in (0, R) \qquad M_r = \sup\limits_{\{z \,:\, |z-a|=r\}} |f(z)| \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad |c_k| \leqslant \dfrac{M_r}{r^k} \cdot 2\pi.$

Было показано, что $c_k = \int_{|\zeta - a| = \rho = r} \dfrac{f(S)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \implies$

$|c_k| = \dfrac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{f(a + \rho e^{it})}{\rho^{k+1} e^{i(k+1)t}} i\rho e^{it} dt \right| \leqslant \dfrac{1}{1\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{M_\rho}{\rho^{k+1}} dt = \dfrac{M_\rho}{\rho^k}.$

Определение 33. Функция, аналитическая во всей коплексной плоскости, называется целой.

Пример. $e^z, \, P(z), \, \sin z, \cos z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$

Теорема 26 (Лиувили)**.** Любая целая ограниченная функция является константной

Доказательство. $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ – сходится всюду, где функция голоморфна, т.е. в $\mathbb{C}$

По неравенству Коши $|C_k| \leqslant \frac{M_r}{r^k}$, где $M_r = \max_{|t|=r} |f(t)| \leqslant C$, если C ограничивает $|f|$

Получается, что $\forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall r > 0 \quad C_k \leqslant \frac{C}{r^k}$

Устемляя r к бесконечности для $k \in \mathbb{N}$, получаем, что $|C_k| = 0$

А тогда $f(z) = C_0$ ∎

Следствие 26.1. Синус целая функции, не константа. Следовательно неограничен.

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\operatorname{sh} it = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2i}$

$|\sin z| = |\operatorname{sh} it|$

Определение 34 (Ряд Лорана)**.**

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k (z-a)^k := \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} (z-a)^{-k}.$$

Теорема 27 (О сумме ряда Лорана)**.** $\exists\ R = \frac{1}{]lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|}} \quad r = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_{-k}|}$

Тогда ряд Лорана $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} C_k (z-a)^k$ сходится в кольце $R_{r,R}(a) = \{z : r < |z-a| < R\}$

Доказательство. Ряд с неторицательными коэффициенами сходится в круге $B_R(a)$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_{-k}(z-a)^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_{-k} w^k$ сходится относительно w в $B_{\frac{1}{r}}(0) \quad w = \frac{1}{z-a}$

$|w| < \frac{1}{r} \iff \frac{1}{|z-a|} < r \iff |z-a| > r$ ∎

Утверждение 27.1. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$. $f \in \operatorname{Hol}(\mathcal{R}_{r,R}(a))$. Тогда $\exists$ единственный $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $\forall z \in \mathcal{R}_{r,R(a)}$ верно $f(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} C_k(z-a)^k$.

Пусть $z \in \mathcal{R}_{r,R}(a)$, пусть $r_1, R_1\ :\ r < r_1 < |z-a| < R_1 < R$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(u)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint\limits_{|z-a|=R_1} -||- + \oint\limits_{|z-a|=r_1} -||- \right)$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{-(z-a)} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}}.$$

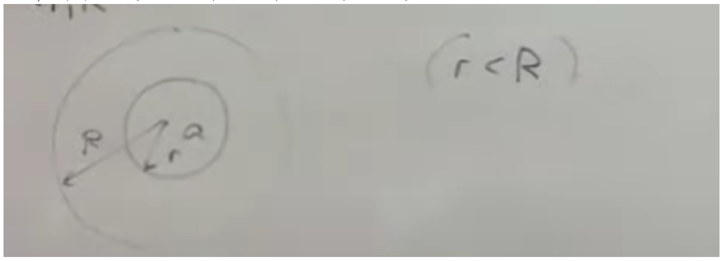
Для любого $k \in \mathbb{Z} \quad C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz$

Пример. $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \quad \mathbb{C}\backslash\{0\} = R_{0,+\infty}\}(0)$ – функция Жуковского

$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z}\left(\cos z \cdot \frac{z}{\sin z}\right)$

$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$ – аналитическая. Значит обратная к ней аналитическая, значит $\cos z \cdot \frac{z}{\sin z}$ – аналитическая.

$\mathcal{R}_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid q < |z-a| < R\}$.



$a \in \mathbb{C}; f \in mathrmHal\,(mathcalR_{r,R}(a))$, где $-\infty \leqslant r < R \leqslant +\infty \implies \exists$ едиственный $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$:

$$\forall z \in \mathcal{R}_{r,R}(a), \quad f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z0a)^k.$$

$c_k = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \oint_{|z-a|\rho} \dfrac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}, \quad \rho \in (r, R)$.

Определение 35. $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называют изолированной особой точке $f(z)$, если $\exists$ окрестность $U(a)$:

$$f(z) \in \mathrm{Hol}(\dot{U}(a)).$$

Пример. 1. $f(z) = z, \quad A = \{\infty\}$.

2. $f(z) = \overline{z}, \quad A = \varnothing$ (все точки дифференцируемы).

3. $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \quad A = \{0, \infty\}$.

Определение 36. Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — и.о.т. $f(z)$. Тогда a называется

- Полюсом $\iff \exists \lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.
- Существенно особой $\iff \nexists \lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Пример. 1. $f(z) = z, \quad A = \{\infty\}$, ∞ — полюс.

2. $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \quad A = \{0, \infty\}$, 0 и ∞ — полюсы.

3. $f(z) = e^z, \quad A = \{\infty\}, \quad \infty$ — существенно особая точка.

Утверждение 27.2. Пусть $a \in \mathbb{C}, \quad a$ — и.о.т. $f(z)$. $\exists R\ : f \in \mathrm{Hol}\left(\dot{B}_R(a)\right)$.

Пусть $f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k}_{\text{регулярная часть}} + \underbrace{\sum_{k\in -\mathbb{N}} c_k(z-a)^k}_{\text{главная часть лорановского разложения } f(z) \text{при} z\to a} \quad \forall z \in \dot{B}_R(a)$.

Пример. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

В точке $z = 0$. Так как $f(z) \in \mathrm{Hol}\,(B_1(0)) \implies f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \forall z \in z \in B_1(0)$. Регулярная часть есть, а главная отсутствует.

В точке $z = 1$. $f(z) = (-1)(z-1)^{-1}$ — главная часть.

z в окрестности ∞ $\dfrac{1}{1-z} = \left(\dfrac{-1}{z}\right) \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{z}} = \left(-1\dfrac{1}{z}\right) \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{z}\right)^k$. Все регулярная часть, главная отсутствует.

Утверждение 27.3 (Характеристика изолированных особых точек в терминах Лорановского разложения)**.** Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $\quad a$ — и.о.т. $f(z)$. Тогда

1. a — устранимая $\iff$ $\exists$ окрестность $U(a)$: $f\big|_{\dot{U}(a)}$ — ограниченная $\iff$ главная часть лорановского разложения отстутствует.
2. a — полюс $\iff$ главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности a содержит конечное число членов.
3. a — существенно устранимая $\iff$ главная часть лорановского разложения $f(z)$ содержит бесконечное число слогаемых.

Неравенство Коши : $f(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} c_k(z-a)^k, \quad a \in \mathbb{C}$. $M_r = \sup\limits_{z \,:\, |z-a|=r} |f|, \quad |c_k| \leqslant \dfrac{M_r}{r^k}, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. ... ■

Замечание. Если $a \in \mathbb{C}$ — и.о.т., то $\exists A$: $\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a \\ A. \end{cases} \in \mathrm{Hol}(U(A))$.

$f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ в проколотой окрестности a.

Проще говоря, можно исправить функцию в плохих точках и она станет хорошей.

Пример. $f(z) = \frac{sinz}{z} \in \mathrm{Hol}\left(\mathbb{R} \backslash \varnothing\right)$

$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$ – сходится всюду в $\mathbb{C}$. Значит это продолжение функции $\frac{sinz}{z}$

Замечание (Отступление)**.**

Лемма 27.1 (О кратности нуля)**.** $f(z) \in \mathrm{Hol}\left(B_k(a)\right), a \in \mathbb{C}, R > 0$

$f(a) = 0$ Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : f(z) = (z-a)^N \cdot g(z)$, где $g(z) \in \mathrm{Hol}(B_k(a)), g(a) \neq 0 \implies f(z) \sim A \cdot (z-a)^N$, где $A = g(a)$

$f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ в окрестности точки a, $c_0 = 0$

Замечание. Если точка $a \in \mathbb{C}$ – полюс, то $\measuredangle g(z) = \frac{1}{f(z)} \to 0, z \to a$, a – устранимая для $g(z) \implies g(z) = (z-a)^N \cdot \widetilde{g}(z) \quad \widetilde{g}(a) \neq 0, \widetilde{g} \in \mathrm{Hol}$(окрестности т.$a$)

$$
\begin{aligned}
f = \frac{1}{g} &= \frac{1}{(z-a)^N}\frac{1}{\widetilde{g}(z)} \\
&= \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k\right) \\
&= \frac{b_0}{(z-a)^N} + \frac{b_1}{(z-a)^{N-1}} + \ldots
\end{aligned}
$$
.

Определение 37. $\sqsupset a \in \mathbb{C}$ – полюс для $f(z), N \in \mathbb{N}$

a – полюс порядка N для $f(z) \iff f(a) \sim \frac{C}{(z-a)^N} \Bigg(\iff f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$ где $g(z)$голоморфна в некоторой окрестнос

Для бесконечных точекрассматриваем $g(w) = \frac{1}{f(w)}$

Замечание. Любой полюс обладает порядком.

Пример. 1. $f(z) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. Полюс 0 имеет порядок 1, полюс ∞ имеет порядок 1. Полюсы с порядком 1 называют **простыми**.

2. $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2} = \frac{-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z^3} = -\frac{1}{2z} + \dots$. 0 – простой полюс (порядок 1), ∞ – существенно особая.

3. $f(z) = \operatorname{tg} z$. $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

   $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \sim \frac{}{\frac{\pi}{2} - z} \quad z = \frac{\pi}{2}$. $\implies$ эти точки простые особые. ∞ – не изолированная особая.

Замечание. Почему может быть полезно знать какие особенности у функции в конкретной точке?

Определение 38. $\sqsupset a \in \widetilde{\mathbb{C}}, a$ – изолированная особая точка $f(z)$

$$\operatorname{res}_a f = \begin{cases} c_{-1} & \text{, коэффициент в Лорановском разложении} f(z) \text{в окрестности точки} a \in \mathbb{C} \\ -C_{-1} & \text{, коэффициент в Лорановском разложении} f(z) \text{в окрестности} \infty, a = \infty \end{cases}.$$

Пример. 1. $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \quad \operatorname{res}_0 f = \frac{1}{2}, \operatorname{res}_\infty f = -\frac{1}{2}$

2. $f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1}$

   $\operatorname{res}_1 f = \operatorname{res}_1 \frac{\frac{1}{2}}{z-1} = \frac{1}{2} \quad \operatorname{res}_{-1} f = -1 \quad \operatorname{res}_\infty f = 0$, т.к. f – чётная

Замечание. Чем хороши вычеты?

c_k – коэффициенты лорановского разложения в окрестности точки a, $f \in \operatorname{Hol}(B_R^\circ(a))$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z+a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \quad \rho \in (0, R).$$

$\operatorname{res}_a f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z) dz$

Теорема 28 (Коши о вычетах)**.** Пусть O – кусочно-гладкая область в $\widetilde{\mathbb{C}}$

A – конечное множество, $A \subseteq O, f \in \operatorname{Hol}\left(\widetilde{O} \backslash A\right)$ Тогда:

$$\int_{\partial O} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{res}_a f = 2\pi i \sum_{z \in O} \operatorname{res}_z f.$$

Теорема 29 (о полной сумме вычетов)**.** $\sqsupset A \ni \infty, A \subseteq \widetilde{\mathbb{C}}, A$ – конечно

$\sqsupset f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C} \backslash A)$ Тогда:

$$\sum_{a \in A} \operatorname{res}_a f = \sum_{z \in \widetilde{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_z f = 0.$$

Доказательство. $\sqsupset A_0 = A \backslash \{\infty\}$

Т.к. A_0 – конечно, то $\exists B_R(0) \supset A_0$

$$\oint\limits_{|z|=R} f(z) dz = \left(\sum_{a \in A_0} \operatorname{res}_a f\right) \cdot 2\pi i$$
$$= (-\operatorname{res}_\infty \cdot 2\pi i)$$
.

■

Приёмы вычсления вычетов (a – изолированная особая точка $f(z)$):

1. a – устарнимая особая точка.
   (a) $a \in \mathbb{C} \implies \operatorname{res}_a f = 0$
   (b) $a = \infty \quad f(z) = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots$
   $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = C_0$
   $\lim\limits_{z\to\infty} z\left(f(\infty) - f(z)\right) = \operatorname{res}_\infty f$
2. $a \in \mathbb{C}$ – полюс. Тогда: $f(z) = \frac{C_{-N}}{(z-a)^N} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z-a)} + C_0 + C_1(z-a) + \dots$
   $\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(N+1)!}\left(z_0 a^N f(z)\right)^{(N-1)}_{z=a}$
   Если полюс простой, то $\operatorname{res}_a f = \lim\limits_{z\to a} f(z)(z-a)$
   Частный случай: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \varphi, \psi \in \mathrm{Hol}, \varphi(a) \neq 0, \psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$
   $\operatorname{res}_a f = \lim\limits_{z\to a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a) = \lim\limits_{z\to a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$
   $$\operatorname{res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$
3. Теорема о полной сумме вычетов.
4. Если $f(z)$ чётная функция, то $\operatorname{res}_a f = -\operatorname{res}_{-a} f$, в частности $\operatorname{res}_0 = 0 = \operatorname{res}_\infty$
5. Если $f(z)$ нечётная, то $\operatorname{res}_a f = \operatorname{res}_{-a} f$

Пример. 1. $\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}$

$z^4 = -1$

z_1, z_4 – простые полюсы. $\operatorname{res}_{z_1} f = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{z_1}{4z_1^4} = -\frac{z_1}{4}$

$\operatorname{res}_{z_2} f = -\frac{z_2}{4}$

$$\begin{aligned}\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1} &= 2\pi i\left(\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f\right)\\ &= -\frac{\pi i}{2}(z_1+z_4)\\ &= -\frac{\pi i}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

.

Приложение теоремы о вычетах к вычислению определённых и несобственных интегралов.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{dz}{iz}$

$$\begin{aligned} z &= e^{i\varphi}\\ \frac{z+\frac{1}{2}}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} &= \cos z\\ dz = de^{i\varphi} = ie^{i\varphi}d\varphi &= izd\varphi.\end{aligned}$$

Пример. $z^2 + 6z + 1 = 0$

$z_{12} = -2 \pm \sqrt{9-1} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$z_1 z_2 = 1$ (по теореме Виета, о которой полезно помнить)

$|z_1| = \frac{1}{|z_2|}$

z_1 – полюс второго порядка

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi + 2}{(\cos\varphi+3)^2} d\varphi = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{z+\frac{1}{z}}{2}+2}{\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}+3\right)^3}$$

$$= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{z^4+4z+1}{(z^2+6z+1)^2} dz$$

$$= \frac{2}{i} 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_1} f(z)$$

$$\operatorname{res}_{z_1} f = \frac{1}{(N-1)!}(f(z)(z-a)^N)^{(N-1)}_{z=a}$$

$$= (f(z)(z-1)^2)' \,|_{z=z_1}$$

$$= \frac{z^2+4z+1}{(z-z_2)^2} \,|_{z=z_1}$$

$$= \left(\frac{2z+4}{(z-z_2)^2} - 2\frac{z^2+4z+1}{(z-z_2)^3}\right) |_{z=z_1} = \ldots.$$

2. Несобтсвенный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ $f(x)$ допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C}\backslash A$, A – конечное множество особыз точек, $A \cap \mathbb{R} = \varnothing$

   $\sup\limits_{|z|=R} |f(z)| = o(\frac{1}{R}) \quad R \to +\infty$

   Тогда:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z:\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z f.$$

   Мы можем рассмотреть семейство полукругов и брать интегралы по их контурам.

   $\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{\substack{z:\operatorname{Im} z>0\\ |z|<R}} \operatorname{res}_z f 2\pi i \sum\limits_{z:\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z f$

   $= \int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z)dz \to \int_{-\infty}^{\infty} d(x)dx + 0$

   Пример. особые точки: $z^1+1=0; z^4+4=4 \qquad z=\pm i \; z=\pm 2i \quad |z|=R$

   $|f(z)| = \frac{1}{|z^1+1||z^2+4|}$

   $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^4+4)}.$$

$M(R) = \sup\limits_{|z|=R} \sup |f(z)| = o\left(\frac{1}{R}\right), R \to +\infty$ — условие на применение формулы для несобственного интеграла