

Конспекты по математическому анализу

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев, Константин Бац

2022 год, семестр 4

1 Повторение

Задачи и темы, которые мы будем обсуждать в новом семестре: многообразия, дифференциальные формы на них, криволинейные интегралы, интегралы от параметров, формула Стокса, формула Остроградского, γ -, β -функции.

Интеграл от функции произвольного знака это разность интегралов компонент. В случаях, когда оба слагаемых не бесконечные, такая разность имеет смысл.

Интеграл комплекснозначной функции это сумма интегралов вещественных компонент функции.

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

Монотонность интеграла.

$$\int_E (f_1 + f_2) d\mu \geq \int_E f_1 d\mu = \infty$$

Теорема 1.0.1 (Теорема Леви для последовательности). Если f_n неотрицательные измеримые на E функции и $f_n \uparrow f$ возрастающая сходится поточечно к f , то

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int_E \lim f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Теорема 1.0.2 (Теорема Леви для рядов). Если f_n неотрицательные измеримые на E функции, то интеграл от ряда совпадает с суммой ряда из интегралов.

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ — частичная сумма. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ ■

Пример. Функция, которая не удовлетворяет условиям теоремы Леви:

$$f_k(x) = \xi_{[k, k+1]}(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{[0, +\infty]} f_k(x) d\mu &= \int_{[k, k+1]} f_k(x) d\mu = 1 \\ \int f(x) d\mu &= \int_{[0, +\infty]} 0 d\mu = 0 \end{aligned}$$

Замечание. 1. Для $f \in S(E)$ $|f| \in L(E, \mu)$ тогда и только тогда, когда $f \in L(E, \mu)$.

2. Если интеграл $\int_E f d\mu$ определен, то $\int_E |f| d\mu \geq |\int_E f d\mu|$.

Доказательство. ■

Отсутствие про суммируемую мажоранту.

Если функция имеет суммируемую мажоранту, то сама она является суммируемой.

... $L_1(E, \mu)$: две функции эквивалентны по мере на E , если они совпадают почти везде на E . Другими словами, мера подмножества E , на котором функции принимают разные значения, равна нулю.

$$\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$$

Элементы $L_1(E, \mu)$ могут быть определены не на всём E целиком, но на множестве полной меры.

$$|f + g| \leq |f| + |g|$$

Эта норма невырожденная. Если $f \in S_+(E)$ и $\int f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E .

Теорема 1.0.3 (Счётная аддитивность интеграла). Пусть $f \in S(E)$ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in \mathcal{E}$, определим $\int_E f d\mu$. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$$

Доказательство. ... ■

Теорема 1.0.4 (О приближении интеграла интегралом по множеству конечной меры). Пусть мера E конечна и $f \in L(E, \mu)$ суммируема. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_0 \subset E : \mu(E_0) < +\infty \text{ и } \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu < \epsilon$$

Доказательство. Не умаляя общности $f \geq 0$ на E . Предложим f нулем вне E . $J(A) = \int_A f d\mu$ — мера. $E_K = E\{f > \frac{1}{K}\}$, $E_* = E\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Непрерывность меры снизу E_k — множества конечной меры.

Научились приближать с любой точностью интеграл интегралом по множествам конечной меры. ■

Теорема Фато и теорема Лебега.

Теорема 1.0.5. Пусть f_k

$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ для всех $x \in E$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$.

И если $f_k(x) \rightarrow f(x)$ на E , то $\int_E f d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu$

Теорема 1.0.6 (Теорема Лебега о мажорированной сходимости). Пусть $f_n \rightarrow f$ сходится почти везде на E и $\Phi \in L(E, \mu)$: $\forall k \in \mathbb{N} |f_k| \leq \Phi$ почти везде на E . Тогда $f \in L(E, \mu)$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu$

Интеграл положительнозначной функции определяет меру. Интеграл функции это разность мер компонент. Такая разность называется заряд.

Теорема 1.0.7 (Фубини).

$$\begin{aligned}x &= (x_1, \dots, x_k) \\y &= (y_1, \dots, y_m) \\f(x, y) &\in \mathcal{L}(E, \lambda_{k+m}) \\E &\in \mathcal{A}_{k+m}\end{aligned}$$

то:

1. Для почти всех $x \in \mathbb{R}^k$ $g(\cdot) = f(x, \cdot) \in \mathcal{L}(E(x, \cdot))$
2. $I(x) = \int_{E(x, \cdot)} f(x, y) d\lambda_m(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$
- 3.

$$\int_E f(x, y) d\lambda_{k+m}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{E(x, \cdot)} f(x, y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_k(x)$$

Пример. $E = A \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ $0 \in \mathbb{R}^n$

A – неизмеримое в \mathbb{R}^k

E – измеримо в \mathbb{R}^{k+m}

$Pr_x(E) = A$ – неизмеримое

Если $Pr_x(E)$ измеримо, то вместо интеграла по \mathbb{R}^k можно написать интеграл по проекции

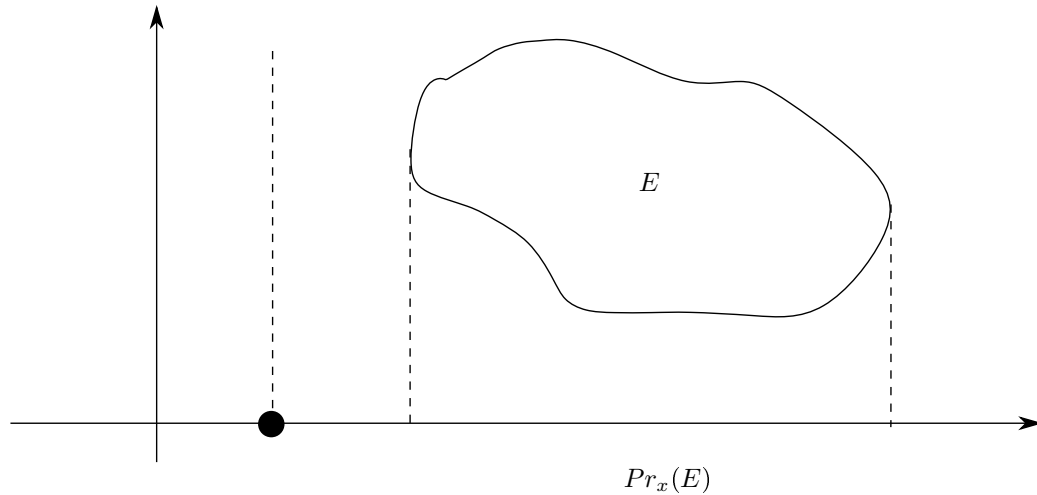


Рис. 1: Переход в интегралу по проекции

Замечание. Если E – компактное или открытое, то $Pr_x(E)$ измеримо.

$Pr_x(E) = \Phi(E)$, где $\Phi(x, y) \equiv x$ – отображение проектирования

Если E – компактное, то $\Phi(E)$ – компактное. Если открытое, то открытое.

Пример. 1.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = I_1$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = I_2$$

Если интегралы существуют, то они антиравны.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y}{(x^2 + y^2)} \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} - 0 dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Вывод: функция $f(x, y) \notin \mathcal{L}([0, 1]^2, \lambda_2)$

2.

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$f \in \mathcal{L}^2([-1, 1]^2) \iff |f| \in \mathcal{L}([-1, 1]^2) \implies |f| \in \mathcal{L}([-1, 1]^2)$$

$$\iint_{[0, 1]^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

<.....>

Утверждение 1.0.1. Семейство называется суммируемым, если функция суммируема

Утверждение 1.0.2. Если семейство $(a_x)_{x \in X}$ суммируемо, то $\{x : a_x \neq 0\}$ – не более чем счётное.

Доказательство. Не умаляя общности $a_x \geq 0$

$$+\infty > \int_X a_x dv = \int_{X_0} a_x dv > \int a_x dv \geq \frac{1}{j} \nu(x_j) \implies \nu(x_j) < +\infty$$

$$X_0 = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \text{ – не более, чем счётное}$$

■

Утверждение 1.0.3. \square X – н.б.ч.с, Y – числовое множество, $(a_x)_{x \in X} \subseteq Y$ $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$

$$\text{Тогда } (a_x) \text{ суммируемы} \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \text{ сходится абсолютно.}$$

2 Замена переменной в интеграле по мере

2.1 “Пересадка” меры

$\Phi : X \rightarrow Y$. \square (X, \mathcal{A}, μ) – пространство с мерой.

$$\mathcal{D} = \{B \subseteq Y | \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

$$\Phi^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}(B_k) \in \mathcal{A}$$

$$\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$$

Пример. $X = [0, 2\pi)$ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap [0, 2\pi)$

$$\Phi(t \in X) = (\cos t, \sin t)$$

Теорема 2.1.1 (Общая схема замены переменных). $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$

$\Phi : X \rightarrow Y$ – не портит измеримость.

$\sqsupset h \in S_+(X) : \forall B \in \mathcal{D}$

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} h d\mu$$

Тогда $\forall f \in f \in S(Y, \nu)$

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)$$

Доказательство. $f \circ \Phi$ – измерима?

$X \{f \circ \Phi < a\} = \Phi^{-1}(Y \{f < a\})$. $Y \{f < a\} \in \mathcal{L}$, т.к. f измеримо. А тогда $\Phi^{-1}(\dots) \in \mathcal{A}$

Совпадение интегралов:

1. f – ступенчатая, $f = \sum_{k=1}^K C_k \chi_{D_k}$ $\{D_k\}$ – разбиение X

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \sum_{k=1}^K C_k \nu(D_k) = \sum_{k=1}^K C_k \int_{\Phi^{-1}(D_k)} h d\mu = \\ &= \int_X \left(\sum_{k=1}^K C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)} \right) h(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f \circ \Phi(x) h(x) d\mu(x) \\ f \circ \Phi(x) &= C_k \quad x \in \Phi^{-1}(D_k) \\ \sum_{k=1}^K C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)}(x) &= C_k. \end{aligned}$$

2. $f \in S_+(Y)$ $\exists \{g_j\}$ – ступенчатая неубывающая $g_i \uparrow f$

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_Y g_j d\nu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X g_j(\Phi(x)) h(x) d\mu \\ &= \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

3. Общий случай:

$$f = f_+ + f_-$$

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \int_Y f_+ - \int_Y f_- d\mu = \int_X f_+(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) - \int_X f_-(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) \\ &= \int f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) \quad (f(\Phi)h)_+ = f_+(\Phi)h. \end{aligned}$$

■

Следствие 2.1.1.1. $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$

$h \in S_+(X)$; $\Phi : X \rightarrow Y \quad \Phi^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}$

и выполняется условие теоремы общей замены переменной. Тогда $\forall E \subseteq \mathcal{D} \quad f \in S(E, \nu)$:

$$\int_E f(y) d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)$$

Рассмотрим продолжение нулём f с E на Y

$$\int_E f d\nu = \int_Y (y)\chi_E(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \underbrace{\chi_E(\Phi(x))}_{\chi_{\Phi^{-1}(E)}} \chi_{\Phi^{-1}(E)} h(x) d\mu(x) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x).$$

Следствие 2.1.1.2 (частный случай 1). Если $h \equiv 1$ в условии теоремы.

$$(\forall E \in \mathcal{D} \quad \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\mu = \mu(\Phi^{-1}(E)))$$

мера ν при этом называется образом меры μ

$$\forall f \in S(E) \quad \int_E f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi(x) d\mu(x)$$

Следствие 2.1.1.3 (Частный случай 2). $X = Y \quad \Phi = id \quad \nu(E) = \int_E h(x) d\mu(x)$

<..>

Теорема 2.1.2. $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой, $\Phi : X \rightarrow Y \quad h \in S_+(X)$

Следующие утверждения равносильны:

1. h плотность ν относительно μ
2. $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\inf_E h \mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_D h \mu(E)$$

Доказательство. $I \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$

Т.о. $I \implies II$ ■

Теорема 2.1.3 (Критерий плотности). $\sqsupset (X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, μ, ν – опр. (?) \mathcal{A} $h \in S_+(X)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. h – плотность меры ν относительно μ ($\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$)
2. $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\inf_E h \cdot \mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_E h \cdot \mu(E)$$

Если $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \lambda_n)$, тогда $1 \iff 3$:

3

$$\forall P \in \mathcal{P}_n \quad \inf_P h \cdot \mu(P) \leq \nu(P) \leq \sup_P h \cdot \mu(P)$$

Доказательство. План: $1 \implies 2 \implies 3$

$$2 \implies 1? \quad \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) \stackrel{?}{=} \int_E h d\mu$$

$$E = E \{h = 0\} \coprod E \{h = +\infty\} \coprod E \{0 < h < +\infty\}$$

$$\nu(E) = \nu(E \{h = 0\}) + \nu(E \{h = +\infty\}) + \nu(E \{0 < h < +\infty\})$$

$$\nu(E \{h = 0\}) \leq \sup_{E \{h=0\}} = 0 = \int_{E \{h=0\}} h d\mu$$

$$\nu(E \{h = +\infty\}) \leq h \cdot \mu(E) + \infty \cdot \mu(E) = \int_{E \{h=+\infty\}} h d\mu.$$

$$\times \frac{1}{q} \in (0, 1), \quad q > 1 \quad (0, +\infty) = \bigvee k \in \mathbb{Z} [q^k, q^{k+1})$$

$$E\{h \in (0, +\infty)\} = \bigvee E\{q^k \leq h < q^{k+1}\}$$

$$q^k \mu(E_k) \leq \nu(E_k) \leq q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$$

$$q^k \mu(E_k) \leq \int h d\mu \leq q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$$

$$\frac{\nu(E_k)}{q} \leq q^k \cdot \mu(E_k) \leq \int_{E_k} h d\mu = q \cdot q^k \mu(E_k) \leq q \cdot \nu(E_k)$$

Просуммируем это по всем k .

$$\frac{1}{q} \nu(E) = \int_E h d\mu \leq q \cdot \nu(E), \quad q \rightarrow 1 \implies \nu(E) \leq \int_E h d\mu \leq \nu(E) \implies \nu(E) = \int_E h d\mu$$

$\times \tilde{\nu}$ – стандартное продолжение $\langle \dots \rangle$ (нужно дополнить) ■

Теорема 2.1.4. \square Φ – диффеоморфизм множеств $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad G \xrightarrow{\Phi} O$

Тогда $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad E \subseteq O$

$$\lambda_n(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \Phi'| d\lambda_n$$

$$\lambda_n(O) = \int_G |\det \Phi'| d\lambda_n$$

Если $O \sim \tilde{O} \quad G \sim \tilde{G} \quad (\lambda_n(O \setminus \tilde{O}) = \emptyset \dots)$, то

$$\lambda_n(\tilde{O}) = \int_{\tilde{G}} |\det \Phi'| d\lambda_n$$

Замечание.

$$\nu(P) \leq \sup_P h d\mu(P) - \text{от противного}$$

$$\implies \exists \text{ ячейки } P_0 : \quad \nu(P) > M \cdot \mu(P) = \sup_{P_0} h \cdot \mu(P)$$

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + d_{x_0} \Phi(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$x \approx x_0 \quad \Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d_{x_0} \Phi(x - x_0)$$

.

Если Q – малая ячейка, то

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \approx \lambda_n d_{x_0} \Phi(Q) = |\det \Phi'_{x_0}| \lambda_n(Q)$$

Следствие 2.1.4.1. Если $\Phi : G \rightarrow O$ – диффеоморфизм, $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad \tilde{G} \sim G, \tilde{O} \sim O \quad f \in S(O)$, то

$$\int_{\tilde{O}} f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\tilde{G}} f(\Phi(u)) |\det \Phi'(u)| d\lambda_n(u)$$

Пример. Полярные координаты.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

$$\Phi : (r, \varphi) \rightarrow (x, y),$$

$$([0, +\infty) \times [-\pi, \pi]) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(0, +\infty] \times (-\pi, \pi)) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus (-\infty, 0].$$

$$\det \Phi' = r; \quad E = \mathbb{R}^2 :$$

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{\Phi^{-1}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

Пример (интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
 I \cdot I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ys} dy = \iint_{\{x \geq 0, y \geq 0\}} e^{-x^2-y^2} dx dy \\
 &= \iint_{\{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, r \geq 0\}} e^{-r^2} r dr d\varphi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-r^2}}{-2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \\
 I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
 \end{aligned}$$

Пример. Цилиндрические координаты

$$\begin{aligned}
 r \cos \varphi &= x \\
 r \sin \varphi &= y \\
 h &= z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi : (r, \varphi, h) &\rightarrow (x, y, z) \quad \Phi : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0\} \\
 |\det \Phi'| &= r \\
 \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Phi^{-1}(E)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh
 \end{aligned}$$

Пример. Сферические координаты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned}
 r \cos \varphi \cos \psi &= x \\
 r \sin \varphi \cos \psi &= y \\
 r \sin \varphi \sin \psi &= z
 \end{aligned}$$

$$\det \Phi' = r^2 \sin \varphi$$

Можно обобщить на \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}
 r &= \|x\| \\
 x_1 &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \dots \cos \varphi_1 \\
 &\dots \\
 x_{n-2} &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-3} \\
 x_{n-1} &= r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-2} \\
 x_n &= r \sin \varphi_{n-1}
 \end{aligned}$$

Пример.

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ x^2+y^2 \leq z^2 \\ z \geq 0}} f(x, y, z) dx dy dz$$

Преобразовать используя:

- Цилиндрические координаты

Перепишем множество интегрирования в новых координатах:
$$\begin{cases} r^2 + h^2 \leq R^2 \\ r^2 \leq h^2 \implies r \leq h \\ h \geq 0, r \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\substack{r^2 + h^2 \leq R^2 \\ r \leq h \\ h \geq 0, r \geq 0}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh \\ &= \iint_{\substack{\pi \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \frac{R}{\sqrt{2}}}} r \int_r^{\sqrt{R^2 - r^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) dr \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} r dr \int_r^{\sqrt{R^2 - r^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) dh \end{aligned}$$

- Цилиндрические координаты (второй вариант)

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h r f dr + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - h^2}} r f dr$$

- Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \psi \\ y = r \sin \varphi \sin \psi \\ z = r \cos \psi \\ \operatorname{tg}^2 \psi \geq 0 \\ \sin \psi \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ r^2 \cos^2 \psi &\leq r^2 \sin^2 \psi \\ r \sin \psi &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \varphi) r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R f(\dots) r^2 \cos \psi dr \end{aligned}$$

Пример.

$$\iiint_E z dx dy dz$$

$E :$

$$\begin{aligned} t^2(x^2 + y^2) &\leq z^2 \\ 0 &\leq z \leq t \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_E z dx dy dz &= \iint_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} dz dt \iint_{\{x^2 + y^2 \leq \frac{4z^2}{t^2}\}} z dx dy \\
&= \iint_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} dz dt z \pi \cdot \frac{4z^2}{t^2} \\
&= 4\pi \iint_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} \frac{z^3}{t^2} dz dt \\
&= 4\pi \int_0^3 \frac{1}{t^2} dt \int_0^t z^3 dz = \frac{4\pi}{4} \left(\int_0^3 t^2 dt \right) = \pi \cdot 9
\end{aligned}$$

3 Мера Лебега–Стилтьеса

\square $g(x) \uparrow$ на \mathbb{R} и непрерывна слева $\left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} g(x) \equiv g(x_0) \right)$

Задача 1. Если $h(x)$ – произвольная возрастающая функция, то её можно превратить в непрерывную слева исправлением нбчс количества точек.

$\exists \uparrow$ и непрерывна слева $g(x) = h(x)$ всюду кроме точек разрыва $h(x)$

$$g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} h(x)$$

Определим $\mu_g([a, b]) = g(b) - g(a) \geq 0$. Так же верно, что μ_g обладает счетной аддитивностью на \mathcal{P}_1 (доказывается так же, как в случае с мерой Лебега) $\implies \mu_g$ – мера на \mathcal{P}_1

Стандартное продолжение μ_g , которое также обозначается μ_g называется мерой Лебега–Стилтьеса, порождённой функцией g

$$\begin{aligned}
\mu_g(\{c\}) &= \mu_g\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} [c, c + \frac{1}{j}]\right) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_g\left([c, c + \frac{1}{j}]\right) \\
&= \underbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} g(c + \frac{1}{j})}_{=g(c+0)} - g(c) = g(c+0) - g(c)
\end{aligned}$$

\implies Если c – точка непрерывности, то $\mu_g(\{c\}) = 0$

$$\mu_g([a, b]) = \mu_g([a, b]) + \mu_g(\{b\}) = g(b) - g(a) + g(b+0) - g(b) = (g(b+0) - g(a-0))$$

$$\mu_g((a, b)) = \mu_g([a, b]) - \mu(\{a\}) = g(b) - g(a) - (g(a+0) - g(a)) = g(b) - g(a+0)$$

$$\mu_g((a, b]) = g(b+0) - g(a+0)$$

Определение 3.0.1. Пусть $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \delta_{a_k}$, $h_k \geq 0$, $\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & a \in E \\ 0, & a \notin E \end{cases}$, тогда μ – дискретная мера.

$$E, E_j \in 2^{\mathbb{R}} \quad E = \bigvee_{j=1}^{\infty} E_j \implies \delta_{a_k}(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{a_k}(E_j)$$

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu\left(\bigvee_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_k \sum_j h_k \delta_{a_k}(E_j) \\ &= \sum_j \mu(E_j)\end{aligned}$$

Последний переход в равенстве по теореме Тонелли.

Замечание. $\square \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$
 $\forall [a, b] \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty$

Пример. Если $\{a_k\}$ – дискретно (без точек сгущения на \mathbb{R}), то условие автоматически выполняется, т.к. пересечения a_k -ых с промежутком будет конечно, а значит и сама сумма будет конечна

$$A = \mathbb{Q} \quad h_k = \frac{1}{2^k}$$

Определение 3.0.2 (функция Хэвисайда).

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

$$\square x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cdot (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) + C$$

1. $g(x)$ возрастает

$$2. \quad x \in [a, b] \quad \sum_k h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \leq \sum_{a_k \in I_{x, x_0}} h_k$$

Разность Тет ненулевая, если a_k находится между x и $x_0 - I_{x, x_0}$

Утверждение 3.0.1. $A = \{a_k\}_k$

1. $g \in C(\mathbb{R} \setminus A)$

2. Непрерывность слева на A

Доказательство. 1. $\square x \in \mathbb{R} \setminus A \quad \square (a, b) \ni x$

$$\nexists \forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty \implies \exists K : \sum_{\substack{a_k \in [a, b] \\ k \geq K}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$g_k(x) = h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k))$ — локально постоянны в точке x ($\exists V_\delta(x) : g_k|_{V_\delta(x)} \equiv const$ для $k = 1, \dots, K$)

Не умаляя общности $[a, b] \supseteq V_\delta(x)$

$$\begin{aligned}
g(\tilde{x}) - g(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k)) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(\tilde{x} - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k)) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^K h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k))}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k))}_{=\frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned}$$

\implies Непрерывность

Если $x = a_k$ $g(x) = g_{k_0}(x) + \underbrace{\sum_{k \neq k_0} g_k}_{\text{непрерывна как в пред. случае}}$

■

$$\begin{aligned}
\mu_g([a, b]) &= g(b) - g(a) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)) \quad a \leq a_k \leq b \\
&= \sum_{k: a \leq a_k < b} h_k = \mu([a, b])
\end{aligned}$$

μ и μ_g совпадают на совокупности всевозможных промежутков.

Определение 3.0.3. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Функция f называется локально суммируемой на $\mathbb{R} \iff \forall [a, b] \quad f \Big|_{[a, b]} \in \mathcal{L}(\lambda_1)$.

Определение 3.0.4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Функция f называется абсолютно непрерывной, если существует локально суммируемая функция $h(x)$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda$$

(интеграл Лебега. Если $x < x_0$, то $\int_{x_0}^x h d\lambda = - \int_{[x, x_0]} h d\lambda$)

Если h непрерывна в точке x , то $g(x)$ дифференцируема в точке x и $g'(x) = h(x)$. Доказательство – смотри теорему Барроу...

Если $h(x) \geq 0$, то $g(x) \nearrow$

Функция $g(x)$ непрерывна на \mathbb{R} . Следует из абсолютной непрерывности интеграла.

Теорема 3.0.1 (вспоминание).

$$\mu(E) = \int_{\Phi^{-1}} h d\mu \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \inf_E h \mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_E h \mu(E)$$

Замечание.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k))$$

Для этой меры нужно было фиксировать открытый интервал Δ , что

$$\forall [a, b] \subseteq \Delta \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty$$

$$\begin{aligned} g(a_k + 0) - g(a_k - 0) &= h_k (\Theta(a_k - a_k + 0) - \Theta(x_0 - a_k + 0) - \Theta(a_k - a_k - 0) + \Theta(x_0 - a_k - 0)) \\ &= h_k \end{aligned}$$

Утверждение 3.0.2. Если $\nu = \sum_k h_k \delta_{a_k}$, то ν совпадает с μ_g на \mathcal{A}_{μ_g} при условии (*).

Доказательство. Если хочется скорее сослаться на теорему об единственности, то можно сделать так:

$$\text{Рассмотрим } [a, b]. \quad \nu([a, b]) = \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k.$$

$$\mu_g([a, b]) = g(b) - g(a) = \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k (\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)) = \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k.$$

Если $\{a_k\}_k$ — конечное множество, то вопросов с суммируемостью не возникает.

$$g(x) = \sum_k h_k \cdot \Theta(x - a_k) + C$$

■

Замечание. Локально суммируемая функция — это такая, что она будет на любом шаре суммируемой по Лебегу

Теорема 3.0.2. $g(x)$ — абсолютно непрерывная $\iff \exists h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda) \exists x_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda + C$$

По теореме Барроу $g(x)$:

- $g(x) \in C(\mathbb{R})$,
- $g(x)$ дифференцируема в точках ... функции $h(x)$.

Доказательство. • Если $x_1 \in \mathbb{R}$

$$g(x) - g(x_1) = \int_{x_1}^x h(x) dx$$

$$\exists \delta_0 > 0, x \in V_{\delta_0}(x_1), \quad h \in \mathcal{L}(V_{\delta_0})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta (\leq \delta_0) > 0 : \int_E h(x) d\lambda < \varepsilon \forall E \subseteq V_{\delta_0}(x_1) : \lambda_1(E) < \delta$$

$$\implies \text{Если } |x_1 - x| < \delta \quad \left| \int_{x_1}^x h(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

- Пусть x_1 — точка непрерывности для $h(x)$. $h(x) = h(x_1) + \underbrace{\alpha(x - x_1)}_{o(1) \text{ при } x \rightarrow x_1}$

$$\frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x h(x_1) + \alpha(x - x_1) dx = h(x_1) + \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x \alpha(x - x_1) dx \leq \varepsilon(x - x_1)$$

Если “ x достаточно близок к x_1 ”

■

Замечание. В частности, если $h(x) \in C(\mathbb{R}) \implies g \in C^1(\mathbb{R})$ и $g'(x) \equiv h(x)$

Замечание.

$$\int_E f d\nu = \sum_{k: a_k \in E} h_k f(a_k) = \sum_{k: a_k \in E} f(a_k) \cdot \text{скачок } g(a_k)$$

Утверждение 3.0.3. $\sqsupset g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda_1(x) + C \quad h(x) \geq 0 \quad h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)$ абсолютно непрерывная возрастающая функция.

Тогда $\int_E f d\mu_g = \int_E f(x) h(x) d\lambda(x)$.

В частности, \forall возрастающей $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

$$\int_E f d\mu_g = \int_E f \cdot g'(x) d\lambda(x) \left(= \int_E f \cdot dg \right).$$

Доказательство. $\int_E \nu(E) = \int_E h d\lambda_1$.

$$\mu_g(\langle a, b \rangle) = \mu_g([a, b)) = g(b) - g(a) = \int_a^b h(x) d\lambda_1 = \nu([a, b)) = \nu(\langle a, b \rangle).$$

μ_g и ν совпадают на открытых. Если K — компакт, $K = B \setminus (B \setminus K)$

$\nu(K) + \nu(B \setminus K) = \nu(B) \quad \mu_g(K) = \nu(K) = \nu(B) - \nu(B \setminus K)$

$\sqsupset E$ — λ_1 -мера O

$\implies \exists \delta > 0 \exists$ открытое $G : E \subseteq G$ и : $\lambda_1(G) < \delta$

$\implies \int_{G_0} -$ абсолютно непрерывное $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \lambda_1(\tilde{E}) < \delta \quad \tilde{E} \subseteq G$

$\int_{\tilde{E}} h < \varepsilon \quad \tilde{E} = G \implies \nu(G) < \varepsilon \implies \mu_g(G) < \varepsilon \varepsilon - \forall \implies \nu(E) = \mu_g(E) = 0$

Если E — неограничено λ_1 -меры $0 \implies \exists$ ограниченное $E_j : E = \bigcup E_j. \forall i \in \mathbb{N} \lambda_1(E_j) = 0 \implies \nu(E_j) = \mu_g(E_j) = 0 \implies \nu(E) = \mu_g(E)$.

Дальше можно применить теорему о плотности меры. Применяю общую схему замены переменной все доказывается. ■

Задача 2. 1. $g(x) = \arctg x$. Найти:

$$(a) \sup \left\{ \mu_g(I) : I = \langle a, b \rangle, \lambda_1(I) \leq \delta \right\}, \delta > 0.$$

$$(b) \sup \left\{ \lambda_1(I) : I = \langle a, b \rangle, \mu_g(I) \leq \delta \right\}, \delta > 0.$$

2. $g(x) = \arctg x + \Theta(x - 1)$

(a) Для $\delta = 1$

Решение. $\mu_g(I) = g(b) - g(a) = \int_I g'(t) dt = \int_{[a, b]} \frac{dt}{1+t^2}$

1. (a)

$$\sup \{ \mu_g(I) \} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+t^2}$$

.

■

Пример. Пример меры Лебега–Стилтьеса не евклидовой, не дискретной, не абсолютно непрерывной:

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1] \\
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
C_{k+1} &\subseteq C_k \quad C_k - \text{компакт} \\
C &= \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k - \text{компакт} \\
\lambda_1(C) &= \lambda_1([0, 1]) - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \dots - \frac{2^{k-1}}{3^k} = 0
\end{aligned}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{3}x \quad \Theta(x) = 1 - x$$

$$\Phi = \{[0, 1] \cap C, \psi(C), \Theta\psi(C), \psi\psi(C), \psi\Theta(C), \Theta\psi\psi(C), \Theta\psi\Theta\psi(C), \dots\}$$

– полукольцо

$$\mu(C) = 1 \quad \mu(P) = \frac{1}{2^k} - \text{если } P \text{ есть результат применения } k \text{ штук } \psi \text{ и } \Theta$$

$\times \mu$ – стандартное продолжение

4 Интегралы, зависящие от параметра

Пример.

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0, p \in \mathbb{R}; \quad \int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_{\alpha} (y)^{\beta} (y) f(x, y) dx.$$

Пока что мы будем рассматривать интегралы, зависящие от параметра y по фиксированному промежутку: $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$.

Пусть у нас есть пространство с мерой (X, \mathcal{A}, μ) , $f(\cdot, \mu) \in \mathcal{L}(X, \mu)$. $Y \subseteq \bar{Y}$.

Для чего это нужно? Бывает, что просто сформулированные задачи имеют ответ в виде интеграла с параметром. Бывает, что введение параметра упрощает вычисление интеграла.

Утверждение 4.0.1. f удовлетворяет условию Лебега локально относительно y_0 , y_0 — параметр, если \exists открытое $V(y_0)$ в \bar{Y} и $\Phi(x) \in \mathcal{L}(X, \mu) \quad \forall y \in V(y_0)$ для почти всех $x \in X$.

Утверждение 4.0.2. Пусть у нас есть пространство с мерой (X, \mathcal{A}, μ) , \bar{Y} — метрическое пространство, $Y \subseteq \bar{Y}$, y_0 — предельная точка для Y . Почти везде $f(x, y) \rightarrow g(x)$ при $y \rightarrow y_0$, и $f(x, y)$ удовлетворяет локально условию Лебега относительно y_0 .

Тогда $g(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ и

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

Доказательство. Так как y_0 — предельная, $\exists \{y_k\} \subseteq Y \rightarrow y_0$. $f_k(x) = f(x, y_k)$, $y_k \in V(y_0) \implies |f_k(x)| \leq \Phi(x) \implies$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ и

$$\int_X g(x) d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f(x, y_k) d\mu.$$

$$I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I(y_k) \quad \forall \text{ последовательности } y_k \rightarrow y_0 \implies \exists \lim_{y \rightarrow y_0} I(y).$$

■

Пример. $\square p_0 > 0 \quad \square$

$$\forall p \in V_\delta(p)$$

$$x \in (0, 1] \quad x^{p-1}e^{-x} \leq x^{p_0-\delta}e^{-x}$$

$$x > 1 \quad x^{p-1}e^{-x} \leq x^{p_0+\delta}e^{-x}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^{p_0-\delta}e^{-x} & , x \in (0, 1] \\ x^{p_0+\delta}e^{-x} & , x > 1 \end{cases} \quad \int_0^{+\infty} x^q e^{-x} dx - \text{сходится для любого}$$

Замечание. Если в условиях предыдущего утверждения $f(x, y)$ — непрерывна по y в точке y_0 , то наш интеграл $I(y)$ тоже будет непрерывен в точке y_0 .

Определение 4.0.1. Пусть имеется пространство с мерой (X, \mathcal{A}, μ) , y_0 — предельная точка для $Y \subseteq \bar{Y}$ $f(x, y) \rightrightarrows g(x)$ на X при $y \rightarrow y_0$ если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ окрестность $V(y_0)$:

$$\forall x \in X \quad \forall y \in V(y_0) \quad |f(x, y) - g(x)| < \varepsilon \iff \sup_{x \in X} |f(x, y) - g(x)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0.$$

Пример. 1. (хороший) $f(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \quad y \rightarrow +\infty$

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{1+y^n} \implies y \rightarrow \infty \sup |f(x, y)| = \frac{1}{1+y^n} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0.$$

Сходимость есть и равномерная сходимость тоже есть.

2. (плохой) $xye^{-xy} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$. Сходимость к нулю есть, а

$$\sup_{x > 0} xye^{-xy} \geq f\left(\frac{1}{y}, y\right) = \frac{1}{e} \not\rightarrow 0 \implies \text{равномерно не сходится.}$$

Утверждение 4.0.3. Пусть (X, \mathcal{A}, μ) , $\mu(X) < +\infty$.

$$f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} g(x), \quad f(x, y) \in \mathcal{L}(X, \mu).$$

Тогда $g(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ И

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

Доказательство. Для $\varepsilon = 1 \quad \exists$ окрестность $V(y_0) : \forall x \in X, y \in V(y_0) \quad |f(x, y) - g(x)| \leq 1 :$

$$|g(x)| \leq |f(x, y)| + |g(x) - f(x, y)| \leq |f(x, y)| + 1 \implies g \in \mathcal{L}(X, \mu) \quad \blacksquare$$

Утверждение 4.0.4. (X, \mathcal{A}, μ) — пространство с метрой $y \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C})$, y_0 — предельная точка для Y . Пусть $f(x, y)$, f'_y — удовлетворяет условию Липшица локально, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Тогда $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ дифференцируема в точке y_0 и

$$I'(y_0) = \int_X f'_y(x, y) d\mu(x).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} I'(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_X \underbrace{(f(x, y) - f(x, y_0))}_{f'_y(x, y_0 + \Theta(y - y_0)), \quad \Theta \in (0, 1)} d\mu(x) \\ &= \lim \int_X f'_y(x, y_0 + \Theta(y - y_0)) d\mu(x) \\ &= \int_X \lim_{y \rightarrow y_0} (\dots) d\mu(x) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x). \end{aligned}$$

$y \in V_\delta(y_0)$ – из условия Липшица для $f'_y \implies C(y) \in V_\delta(y_0)$

$$\implies \left| \underbrace{f'_y(x, C(y))}_{f'_y(x, y_0)} \right| \leq \Phi(x)$$

■

Пример. $\Gamma(p) \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} d\mu.$

$$f'_p(x, p) = (p-1)x^{p-2}e^{-x}, \quad p-2 > -1 \implies p > 1.$$

При $p > 1$

$$\Gamma'(p) = (p-1) \int_0^{+\infty} x^{p-2} e^{-x} = (p-1) \cdot \Gamma(p-1) \implies \Gamma'(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1).$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} \frac{(x^p)'}{p} = \frac{1}{p} \left(x^p e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^{+\infty} x^p (e^{-x})' dx \right) = \frac{1}{p} \cdot (p+1).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}.$$

5 Г-функция Эйлера

Определение 5.0.1. $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$
 $p > 0$

Свойство 5.0.1.

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad \forall p > 0$$

– формула приведения

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

– определение для Γ в $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_-)$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(p+1) = p!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \text{ (по индукции)}$$

.

Замечание (Дифференцирование Г-функции).

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{p-1} e^{-x} (\ln x)^k}_{f_k(x, p)} dx.$$

$$\frac{\partial f_k(x, p)}{\partial p} = f_{k+1}(x, p)$$

Замечание. Локальное условие Лебега $\forall p_0$?

$$\exists V_{p_0} : \exists \Phi(x) \in \mathcal{L}((0, +\infty) : |f_k(x, p)| \leq \Phi(x)).$$

$$x^{p-1} \leq x^{2p_0-1} + x^{\frac{p_0}{2}-1}$$

$$\Phi(x) = \left(x^{2p_0-1} + x^{\frac{p_0}{2}-1}\right) e^{-x} |\ln x|^k.$$

Φ – мажоранта для $f_l(x, p) \forall p \in V_{p_0}$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} |\ln x|^k dx &< +\infty \\ x^{p-1} |\ln x|^k &= o(e^{\frac{x}{2}}) \quad x \rightarrow +\infty \\ x^{p-1} e^{-x} |\ln x|^k &\sim x^{p-1} |\ln x|^k = o(x^{p-1-\alpha}) \\ |\ln x|^k &= o(x^{-\alpha}), \quad \alpha > 0 \\ x \rightarrow 0^+ \quad p - \alpha &> 0. \end{aligned}$$

Получается, что Γ – класса C^∞ там, где она определена. $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-)$

Геометрические характеристики γ -функции и элементарные факты

Свойство 5.0.2 (Геометрические свойства). 1. $\gamma(p)$ строго выпукла на любом отрезке, лежащем в её области определения

2. На $(0, +\infty)$ $\Gamma(p)$ имеет единственный экстремум в точке $c \in (1, 2)$

3. $p \rightarrow 0 \quad \Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$

Доказательство. $\Gamma_{p^2}^{(2)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^2 x dx > 0 \implies 1$

$\Gamma(1) = 0! = 1 = 1! = \Gamma(2) \implies$ по теореме Роля $\exists c \in (1, 2) : \Gamma'(c) = 0$. c – точка минимума

$\Gamma'(p) \neq 0$ при $p \neq c, p > 0$ ■

Замечание. Аналог формулы стрилинга. При $p \rightarrow \infty$ верно, что $\Gamma(p) = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p e^{\frac{\Theta}{12}}$, где $\Theta \in (0, 1)$.

6 Бета-функция

Определение 6.0.1. $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$

$$B(p, q) = B(q, p) \forall p, q > 0$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Теорема 6.0.1 (формула Эйлера-Гаусса).

$$\Gamma(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l^p \cdot k!}{p(p-1) \dots (p+k)} \quad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

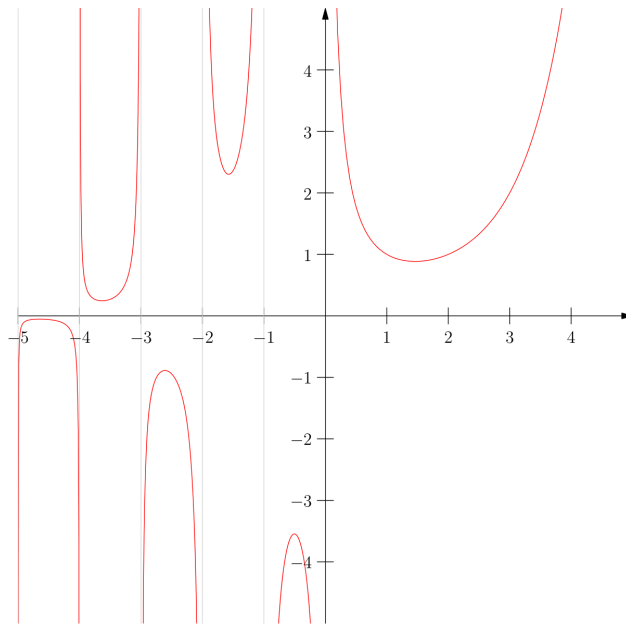


Рис. 2: gamma-function

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Gamma(p) &= \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \left| t = e^{-x}, x = -\ln t, dx = -\frac{dt}{t} \right| \int_0^1 (-\ln t)^{p-1} t \left(-\frac{dt}{t} \right) = \int_0^1 (-\ln t)^{p-1} dt \\
&= \int_0^1 \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{k(1 - t^{1/k})}_{g(k)} \right)^{p-1} dt = \\
g'(k) &= (1 - t^{1/k}) + k(-t^{1/k}) \cdot (\ln t) \cdot \left(+\frac{1}{k^2} \right) \\
&= t^{\frac{1}{k}} \left(t^{-\frac{1}{k}} - 1 + \frac{\ln t}{k} \right) \\
&= \begin{cases} f \uparrow, & \text{если } p \geq 1 \implies \text{Применим теорему Леви} \\ f \downarrow, & \text{если } p \in (0, 1) \implies g(k) \leq g(1) \end{cases} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(k(1 - t^{\frac{1}{k}}) \right)^{p-1} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{p-1} \int_0^1 s^{p-1} (-k)(1-s)^{k-1} ds = \lim_{k \rightarrow \infty} k^p B(p, k) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} k^p \frac{\Gamma(p)\Gamma(k)}{\Gamma(p+k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^p \cdot (k-1)! \frac{\Gamma(p)}{(p+k-1)(p+k-2)\dots p\Gamma(p)} \\
&= \frac{k^p k!}{p(p+1)\dots(p+k)} \cdot \underbrace{\frac{p+k}{k}}_{\rightarrow 1}.
\end{aligned}$$

Для $p < 0$ по индукции по m $p \in (-(m+1), -m)$

Если формула верна для $p+1$, то

$$\begin{aligned}
\Gamma(p) &= \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{1}{p} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{p+1} \cdot k!}{(p+1)(p+2)\dots(p+k+1)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^p \cdot k!}{p(p+1)\dots(p+k)} \cdot \underbrace{\frac{k}{p+k+1}}_{\rightarrow 1}.
\end{aligned}$$

■

Лемма 6.0.1.1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \in C([a, +\infty))$ и f ограничена на $([a, +\infty))$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx \in C([0, +\infty)).$$

Доказательство. $A \in [a, +\infty)$

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx &= \left| F(x) = \int_A^x f(t)dt \right| = (F(x) - F(A)) \cdot e^{-xy} \Big|_A^{+\infty} + \int_A^{+\infty} ye^{-xy} (F(x) - F(A))dx \\ &= \left| \exists \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \left(= \int_A^{+\infty} f(t)dt \right) \right|. \end{aligned}$$

$$\text{Для } \varepsilon > 0 \exists A : \left| \int_X^{+\infty} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \geq A$$

$$\text{Для } x \geq A \quad |F(x) - F(A)| = \left| \int_X^{+\infty} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned} |I_A(y)| &\leq \int_A^{+\infty} ye^{-xy} |F(x) - F(A)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$$I(y) = \overbrace{\int_a^A e^{-xy} f(x)dx}^{J_A(y)} + I_A(y)$$

$$I(y) - I(y_0) = J(y) - J(y_0) + \overbrace{I_A(y) - I_A(y_0)}^{< \frac{\varepsilon}{3}}.$$

$J(y) - J(y_0) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow y_0$ (условие непрерывности собственных интегралов).

$$\exists V(y_0) : \quad \forall y \in V(y_0) \quad |J(y) - J(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

■

Следствие 6.0.1.1.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow 0} e^{-xy} f(x)dx.$$

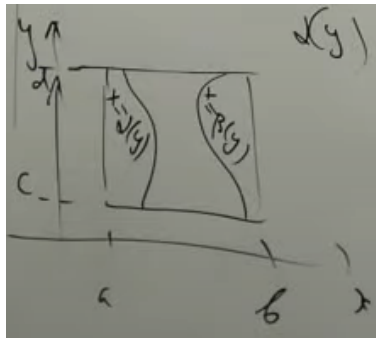


Рис. 3: Интеграл с переменными пределами

Пример (Одно из значений интегрального синуса).

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \\
 I(y) &= \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-xy} \frac{\sin x}{x}}_{f(x,y)} dx \\
 \frac{\partial f}{\partial x} &= -e^{-xy} \sin x \\
 y_0 > 0 \quad V_{y_0} &= \left(\frac{y_0}{2}, 2y_0 \right) \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq e^{-\frac{xy_0}{2}} \\
 \implies \forall y_0 I'(y) &= - \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx \dots \\
 I(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-xy} d \cos x = \cos x \cdot e^{-xy} \Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} (\sin x) e^{-xy} dx \\
 &= -1 + y \left(\sin x e^{-xy} \Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx \right) = -1 + y^2 (-I(y)) \\
 \implies I(y) \cdot (1 + y^2) &= -1. \\
 I'(y) = I(y) &= \left(-\frac{1}{1 + y^2} \right) \implies I(y) = C - \int \frac{dy}{1 + y^2} = C - \operatorname{arctg} y \\
 y \rightarrow +\infty, y \geq 1 & \left| e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-x} - \text{суммируемая мажоранта.} \\
 C - \frac{\pi}{2} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \implies C = \frac{\pi}{2} \\
 I(y) &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \quad \forall y > 0.
 \end{aligned}$$

Но по лемме $I(y)$ неотрицательная в точке $y = 0$.

$$I(0) = \lim_{y \rightarrow 0} I(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \right) = \frac{\pi}{2} \implies \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Дифференцирование интеграла по параметру в случае переменных пределов интегрирования.

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx; \quad f \in C([a, b](x) \ni \times [c, d](y)), \quad \alpha(y), \beta(y) : [c, d] \rightarrow [a, b] \text{ дифф.}$$

Теорема 6.0.2 (Правило Лейбница). Тогда $I(y)$ дифференцируемо на $[c, d]$ и

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y).$$

Доказательство.

$$\Phi(x, y) = \int_a^x f(t, y) dt$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f(x, y) \text{ непрерывна в } Q$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \lim_{\Delta \rightarrow y} \frac{1}{\Delta y} \left(\int_a^x f(t, y + \Delta y) dt - \int_a^x f(t, y) dt \right)$$

$$= \int_a^x f'_y(t, y) dt$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_1, y_1) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \int_a^x f'_y(t, y_1) dt + \left(\int_a^x f'_y(t, y) dt - \int_a^x f'_y(t, y) dt \right) - \int_a^x f'_y(t, y) dt.$$

Таким образом $\Phi(x, y)$ дифференцируема на Q

$$I(y) = \Phi(\beta(y), y) - \Phi(\alpha(y), y)$$

$$I'(y) = P' h_{ix}(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) + \Phi'_y(\beta(y), y) - \Phi'_x(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y) - \Phi'_y(\alpha(y), y).$$

■

Пример.

$$I(p) = \int_{p^2}^{p^3} \frac{x^2 + 2p}{\ln^2 |x| + 1} dx$$

$$\forall p \neq 0, \quad [a, b] = [p - \delta, p + \delta] \quad [c, d]$$

$$I'(p) = \int_{p^2}^{p^3} \frac{2}{\ln^2 |x| + 1} dx + \frac{p^6 + 2p}{\ln^2 |p^3| + 1} \cdot 3p^2 - \frac{p^4 + 2p}{\ln^2 |p^2| + 1} \cdot 2p.$$

7 Интегрирование на многообразиях

Определение 7.0.1. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно-гладкое, простой путь (биекция) или заскнутый простой (единственная точка самопересечения – концы).

Пусть $\Gamma = \gamma([a, b])$ – носитель нашего пути. . .

$$\mathcal{B} = \{B \mid \gamma^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

$$ds = \nu(B) = \int_{\gamma^{-1}(B)} \|\gamma'(t)\| dt.$$

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}). \int_B f ds = \int_{\gamma^{-1}(B)} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt.$$

Интеграл не зависит от выбора параметризации. Также не зависит от ориентации кривой.

Пример. $\int_C x^2 ds \quad C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$$I = \int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds \implies I = \frac{1}{3} \int_C \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=R^2} ds = \frac{R^2}{3} \int_C ds = \frac{R^2}{3} \cdot 2\pi R..$$

8 Я чуть чуть опаздал

8.1 Многообразие с краем

Напоминание k -мерную r -гладкую поверхность в \mathbb{R}^n (многообразие без края).

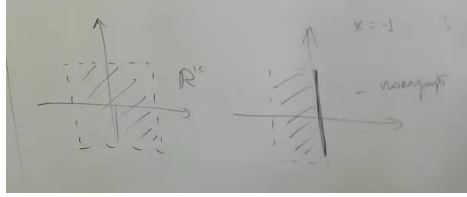
Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n, x^0 \in \mathcal{M}$.

Окрестность $U_M(x^0) = m \cap U(x^0)$, где $U(x^0)$ — открытое в \mathbb{R}^n .

\exists открытое $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\Phi : D \rightarrow U_M(x^0)$, где $\Phi \in C^k(D)$, регулярно.

Определение 8.1.1. Стандартный куб в \mathbb{R}^k — это $(-1, 1)^k$.

Определение 8.1.2. Стандартный полукуб в \mathbb{R}^k — это $[-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$ при $k > 1$ и $(-1, 0]$ или $[0, 1)$ при $k = 1$.



Определение 8.1.3. Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$. \mathcal{M} называется k -мерным многообразием с краем, если $\forall x^0 \in \mathcal{M} \exists$ окрестность $U_M(x^0)$ и $\Phi : \Pi_k \rightarrow U_M(x^0)$, регулярно и $\in C^k$.

Здесь Π_k — стандартный k -мерный куб или стандартный k -мерный полукуб.

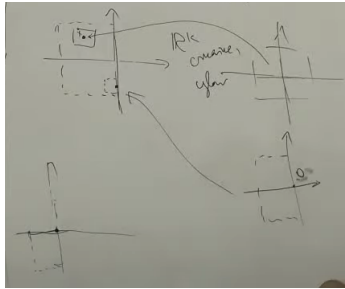
$U_M(x^0)$ — стандартная окрестность точки x^0 в \mathcal{M} .

Φ — локальная параметризация (стандартная).

$\langle U_M(x^0), \Phi \rangle$ — карта; набор карт — атлас.

Пример. Очевидные:

1. $(-1, 1)^k$ — k -мерное многообразие (без края).
2. $(-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$ — k -мерное многообразие с краем.
3. $\mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$ — набор k -мерных многообразий с краем в \mathbb{R}^n гладкости r .



Пример. Чуть менее очевидный пример.

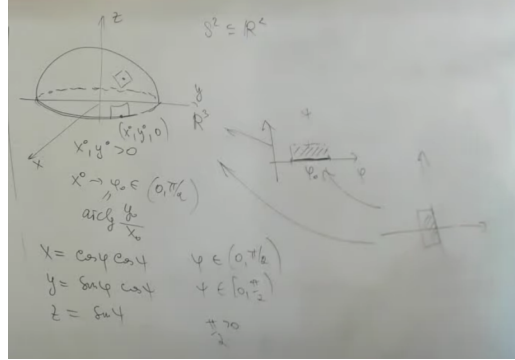
$\mathbb{R}^n \in \mathbb{M}_{n,n}^{(\infty)}$ — многообразие с краем (край пустой).

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \left(\operatorname{tg} \left(x_1 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \operatorname{tg} \left(x_2 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \dots, \operatorname{tg} \left(x_n \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad |x_i| < 1. \right)$$

Определение 8.1.4. Пусть $M \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$. $x^0 \in M$ называется внутренней (относительно многообразия), если \exists стандартная локальная параметризация $\Phi : \Pi \rightarrow U_M(x^0)$, такая, что Π — куб.

Если точка x^0 не является внутренней, то она называется крайней (точкой края).
 ∂M = множество крайних точек M (край M).

Замечание. Если \exists стандартная параметризация $\Phi : \Pi \rightarrow U_M(x^0)$, такая что Π — полукуб, то \forall стандартной параметризации $\psi : \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{U}_M(x^0)$, $\tilde{\Pi}$ — полукуб.



Замечание. $\text{Fz}M \neq \partial M$. То есть множество крайних точек не равно множеству граничных точек.

Определение 8.1.5. Дискретное множество в \mathbb{R}^n — множество без предельных точек в \mathbb{R}^n
 Само множество не более, чем счётно. В любом шаре \mathbb{R}^n лишь конечное множество точек.
 Дискретное множество в \mathbb{R}^n — многообразие размерности 0 в \mathbb{R}^n — $\mathbb{M}_{0,n}$

Пример (Конус).

$$ax^2 + by^2 = z^2.$$

В нуле ранг нарушается. Весь конус целиком не многообразие.

$\sqsupset (U(x_0), \Phi), (\tilde{U}(x_0), \Psi)$ — две карты для $\text{Min} \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}, k \in \mathbb{N}$

$$V = U(x_0) \cap \tilde{U}(x_0)$$

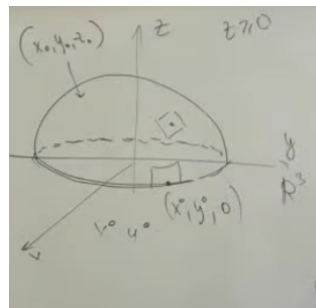
$$\Phi^{-1}(C) = W \quad \Psi^{-1}(V) = \tilde{W}$$

$$\Theta = \Psi^{-1} \circ \Phi \quad \Theta : W \rightarrow \tilde{W} \text{ — отображение перехода.}$$

Утверждение 8.1.1. В условия определения отображения перехода оно есть диффеоморфизм из W в \tilde{W} .

Пример. Параметризация поверхности сферы через полярные координаты.

$$\Phi : (\phi, \psi) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi \\ \sin \phi \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}, \Psi : (x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}.$$



$$\theta : (\varphi, \psi) \rightarrow (x, y), \quad \theta(\varphi, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \end{bmatrix}, \quad \theta' = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi \end{bmatrix}.$$

$$\det \theta' = \cos \varphi \sin \psi$$

$\pi_{x_1, \dots, x_k} \Psi : \Pi \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ — локально диффеоморфизм

$(g = \pi \circ \psi)^{-1} : (x_1, \dots, x_k) \rightarrow (v_1, \dots, v_k)$ x_{k+1}, \dots, x_n — функции от первых координат

$\Theta = g \circ \pi_{x_1, \dots, x_k} \Phi$. Аналогично устроено обратное отображение, значит определители обоих не могут обращаться в ноль.

Следствие 8.1.0.1. Инвариантность типа множества (куб или полукуб) от выбора станратной параметризации вытекает из последнего утверждения,

Следствие 8.1.0.2. $\forall \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)} \quad \forall x^0 \in \mathcal{M}$ локально некоторые $n - k$ координат точки выражаются как функции от остальных координат.

Замечание. Касательное пространство — пространство касательных векторов (векторов принадлежащих какой-то кривой на поверхности).

$$\text{Tr } \mathcal{M} = d_{\Phi^1(p)} \Phi(\mathbb{R}^k)$$

Определение 8.1.6. $\square \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(1)} \quad x^0 \in \mathcal{M} \quad (U(x_0), \Phi)$ — карта
 $T_{x^0} \mathcal{M} = d_0 \Phi(\mathbb{R}^k)$

Замечание. Определение $T_{x^0} \mathcal{M}$ не зависит от параметризации.

$$d_0 \Phi(\mathbb{R}^k) = d_0(\Psi_0 \theta)(\mathbb{R}^k) = f_{\theta(0)} \Psi(d_0 \theta(\mathbb{R}^k)) = d_{\theta(0)=0} \Psi(\mathbb{R}^k).$$

$d_0 \theta$ — изоморфизм, т.к. θ — диффеоморфизм.

Замечание. $N \in \mathbb{R}, N$ — нормальный вектор к \mathcal{M} в точке x^0 , если $N \perp T_{x^0} \mathcal{M}$. (Иногда требуют длину 1, но часто нет)

Замечание. Если $M \in \mathbb{M}_{k,n}^r$ в окрестности x^0 задаётся системой
$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \dots \\ F_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$$

$\nabla F_1, \dots, \nabla F_{n-k}$ — базис $(T_{x^0} \mathcal{M})^\perp$

Замечание. Если $\mathcal{M} \in M_{n-1,n}^{(1)} \quad N \perp T_{x^0} \mathcal{M} \quad N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ & & \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(0) & \\ & & \vdots & \\ & & \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(0) & \end{vmatrix}$

$(U(x_0), \Phi)$ — карта

$$\iff N \perp \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \quad \forall j = 1, \dots, n-1$$

$$\left\langle N, \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \right\rangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(0) \end{vmatrix} = 0, \text{ т.к. совпадают две строки.}$$

Частный случай. Пусть $n = 3, k = 2$. \mathcal{M} — график $z = g(x, y)$, заданный на открытом множестве $D \subseteq \mathbb{R}^2, g \in C^1$.

$$\Phi : (x, y) \rightarrow (x, y, z) = (x, y, g(x, y)), \quad \Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}$$

Таким образом, \mathcal{M} — двумерное многообразие хотя бы класса $C^{(1)}$, то есть $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{2,3}^{(1)}$.

$$N \text{ — нормаль к } \mathcal{M}, \quad N = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & g'_x \\ 0 & 1 & g'_y \end{bmatrix} = (-g'_x, -pg_y, 1) \text{ — направлена вверх.}$$

Определение 8.1.7. $\sqsupset (U(x^0), \Phi), (\tilde{U}(x^0), \Psi)$ – две карты

$$x_0 \in \mathcal{M} \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$$

Скажем, что Φ и Ψ согласованы, если $\det \Theta > 0$, где $\theta = \Psi^{-1} \circ \Phi$ – отображение перехода.

Замечание. Отношение согласованности является отношением эквивалентности.

Определение 8.1.8. $I(x^0)$ называется ориентированной, если зафиксирован один из классов эквивалентности по отношению согласованности.

Замечание. $\sqsupset U(x^0) \cap U(x^1) \neq \emptyset$. $U(x^0)$ и $U(x^1)$ согласованы, если $\Phi \in U_+(x^0), \Psi \in U_+(x^1)$, где U_+ – зафиксированный класс. $\implies \det(\Psi^{-1} \circ \Phi) > 0$

Если $U(x^0) \cap U(x^1) = \emptyset$, то их ориентации согласованы.

Атлас $A = \{(U, \Phi)\}$ многообразия \mathcal{M} называется ориентированным, если ориентации любых двух $U, V \in A$ согласованы.

Многообразие с краем называется ориентиркуемым, если \exists ориентированный атлас.

Определение 8.1.9. Пусть $\Gamma = \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{1,n}^{(1)}$, $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\forall x^0 \in \mathcal{M} : \tau(x^0) \in T_{x^0} \circ \mathcal{M}$, τ – непрерывное, $\|\tau\| \equiv 1$.

Тогда τ называется направлением на \mathcal{M} .

Утверждение 8.1.2. \forall связное 1–мерное, 1–гладкое многообразие с краем имеет ровно два направления.

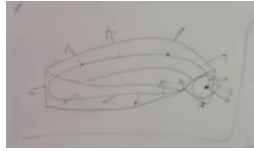
$\tau(x) = \pm \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} (\gamma^{-1}(x))$, где γ – параметризация из выбранного класса эквивалентности (из ориентации окрестности \mathcal{M}).

Определение 8.1.10. $k = n - 1 \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{n-1,n}^{(\perp)}$
 $n(x) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется стороной, если:

1. $n(x) \in C(M)$
2. $\forall x \in \mathcal{M} \quad n(x) \perp T_x \mathcal{M}$
3. $\|n(x)\| = 1$

Замечание. Сторон чётное число.

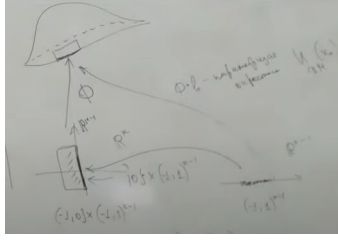
Замечание. Не у всех поверхностей есть сторона. Лента Мёбиуса, бутылка Клейна, ...



Утверждение 8.1.3. Для $k = n - 1$ ориентируемость многообразия с краем $\mathcal{M} \in (\mathbb{M}_{n-1,n}^1)$ равносильно существованию стороны.

Теорема 8.1.1. Пусть $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(1)} \quad K \leq n, k, n \in \mathbb{N}$
 Тогда:

1. $\partial \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k-1,n}^{(1)}; \partial(\partial \mathcal{M}) = \emptyset$
2. Если \mathcal{M} – ориентированно то $\partial \mathcal{M}$ ориентируем.



9 Я чуть чуть опаздал

9.1 Многообразие с краем

Напоминание k -мерную r -гладкую поверхность в \mathbb{R}^n (многообразие без края).

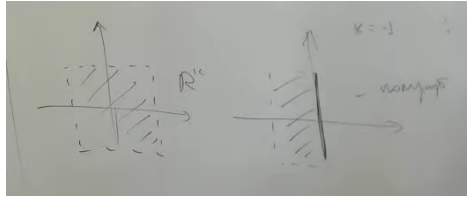
Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n, x^0 \in M$.

Окрестность $U_M(x^0) = m \cap U(x^0)$, где $U(x^0)$ — открытое в \mathbb{R}^n .

\exists открытое $D \subseteq \mathbb{R}^k, \Phi : D \rightarrow U_M(x^0)$, где $\Phi \in C^k(D)$, регулярно.

Определение 9.1.1. Стандартный куб в \mathbb{R}^k — это $(-1, 1)^k$.

Определение 9.1.2. Стандартный полукуб в \mathbb{R}^k — это $[-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$ при $k > 1$ и $(-1, 0]$ или $[0, 1)$ при $k = 1$.



Определение 9.1.3. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M называется k -мерным многообразием с краем, если $\forall x^0 \in M \exists$ окрестность $U_M(x^0)$ и $\Phi : \Pi_k \rightarrow U_M(x^0)$, регулярно и $\in C^k$.

Здесь Π_k — стандартный k -мерный куб или стандартный k -мерный полукуб.

$U_M(x^0)$ — стандартная окрестность точки x^0 в M .

Φ — локальная параметризация (стандартная).

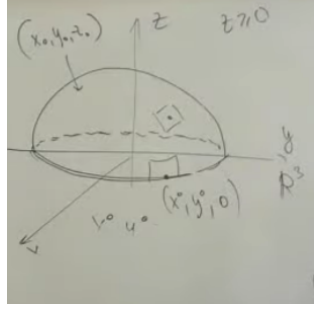
$\langle U_M(x^0), \Phi \rangle$ — карта; набор карт — атлас.

Пример. Очевидные:

1. $(-1, 1)^k$ — k -мерное многообразие (без края).
2. $(-1, 0] \times (-1, 1)^{k-1}$ — k -мерное многообразие с краем.
3. $\mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$ — набор k -мерных многообразий с краем в \mathbb{R}^n гладкости r .

Пример. Параметризация поверхности сферы через полярные координаты.

$$\Phi : (\phi, \psi) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi \\ \sin \phi \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}, \Psi : (x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{bmatrix}.$$



$$\theta : (\phi, \psi) \rightarrow (x, y), \quad \theta(\phi, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi \\ \sin \phi \cos \psi \end{bmatrix}, \quad \theta' = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi \\ \cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \sin \psi \end{bmatrix}.$$

$$\det \theta' = \cos \phi \sin \psi$$

$\pi_{x_1, \dots, x_k} \Psi : \Pi \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ – локально диффеоморфизм

$(g = \pi \circ \psi)^{-1} : (x_1, \dots, x_k) \rightarrow (v_1, \dots, v_k) \quad x_{k+1}, \dots, x_n$ – функции от первых координат

$\Theta = g \circ \pi_{x_1, \dots, x_k} \Phi$. Аналогично устроено обратное отображение, значит определители обоих не могут обращаться в ноль.

Следствие 9.1.0.1. Инвариантность типа множества (куб или полукуб) от выбора стандартной параметризации вытекает из последнего утверждения,

Следствие 9.1.0.2. $\forall \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)} \quad \forall x^0 \in \mathcal{M}$ локально некоторые $n - k$ координат точки выражаются как функции от остальных координат.

Замечание. Касательное пространство – пространство касательных векторов (векторов принадлежащих какой-то кривой на поверхности).

$$\text{Tr } \mathcal{M} = d_{\Phi^{-1}(p)} \Phi(\mathbb{R}^k)$$

Определение 9.1.6. $\exists \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(1)} \quad x^0 \in \mathcal{M} \quad (U(x_0), \Phi) - \text{карта}$
 $T_{x^0} \mathcal{M} = d_0 \Phi(\mathbb{R}^k)$

Замечание. Определение $T_{x^0} \mathcal{M}$ не зависит от параметризации.

$$d_0 \Phi(\mathbb{R}^k) = d_0(\Psi_0 \theta)(\mathbb{R}^k) = f_{\theta(0)} \Psi(d_0 \theta(\mathbb{R}^k)) = d_{\theta(0)=0} \Psi(\mathbb{R}^k).$$

$d_0 \theta$ – изоморфизм, т.к. θ – диффеоморфизм.

Замечание. $N \in \mathbb{R}, N$ – нормальный вектор к \mathcal{M} в точке x^0 , если $N \perp T_{x^0} \mathcal{M}$. (Иногда требуют длину 1, но часто нет)

Замечание. Если $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^r$ в окрестности x^0 задаётся системой
$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \dots \\ F_{n-k}(x) = 0 \end{cases}$$

$\nabla F_1, \dots, \nabla F_{n-k}$ – базис $(T_{x^0} \mathcal{M})^\perp$

Замечание. Если $\mathcal{M} \in M_{n-1,n}^{(1)} \quad N \perp T_{x^0} \mathcal{M} \quad N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ & & \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(0) & \\ & & \vdots & \\ & & \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(0) & \end{vmatrix}$

$(U(x_0), \Phi)$ – карта

$$\iff N \perp \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \quad \forall j = 1, \dots, n-1$$

$$\left\langle N, \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \right\rangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(0) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(0) \end{vmatrix} = 0, \text{ т.к. совпадают две строки.}$$

Частный случай. Пусть $n = 3, k = 2$. \mathcal{M} – график $z = g(x, y)$, заданный на открытом множестве $D \subseteq \mathbb{R}^2, g \in C^1$.

$$\Phi : (x, y) \rightarrow (x, y, z) = (x, y, g(x, y)), \quad \Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}$$

Таким образом, \mathcal{M} – двумерное многообразие хотя бы класса $C^{(1)}$, то есть $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{2,3}^{(1)}$.

$$N \text{ — нормаль к } \mathcal{M}, \quad N = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & g'_x \\ 0 & 1 & g'_y \end{bmatrix} = (-g'_x, -g'_y, 1) \text{ — направлена вверх.}$$

Определение 9.1.7. $\sqsupset (U(x^0), \Phi), (\tilde{U}(x^0), \Psi)$ – две карты

$$x_0 \in \mathcal{M} \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(r)}$$

Скажем, что Φ и Ψ согласованы, если $\det \Theta > 0$, где $\theta = \Psi^{-1} \circ \Phi$ – отображение перехода.

Замечание. Отношение согласованности является отношением эквивалентности.

Определение 9.1.8. $I(x^0)$ называется ориентированной, если зафиксирован один из классов эквивалентности по отношению согласованности.

Замечание. $\sqsupset U(x^0) \cap U(x^1) \neq \emptyset$. $U(x^0)$ и $U(x^1)$ согласованы, если $\Phi \in U_+(x^0), \Psi \in U_+(x^1)$, где U_+ – зафиксированный класс. $\implies \det(\Psi^{-1} \circ \Phi) > 0$

Если $U(x^0) \cap U(x^1) = \emptyset$, то их ориентации согласованы.

Атлас $A = \{(U, \Phi)\}$ многообразия \mathcal{M} называется ориентированным, если ориентации любых двух $U, V \in A$ согласованы.

Многообразие с краем называется ориентиркемым, если \exists ориентированный атлас.

Определение 9.1.9. Пусть $\Gamma = \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{1,n}^{(1)}$, $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\forall x^0 \in \mathcal{M} : \tau(x^0) \in T_{x^0} \circ \mathcal{M}$, τ – непрерывное, $\|\tau\| \equiv 1$.

Тогда τ называется направлением на \mathcal{M} .

Утверждение 9.1.2. \forall связное 1–мерное, 1–гладкое многообразие с краем имеет ровно два направления.

$\tau(x) = \pm \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} (\gamma^{-1}(x))$, где γ – параметризация из выбранного класса эквивалентности (из ориентации окрестности \mathcal{M}).

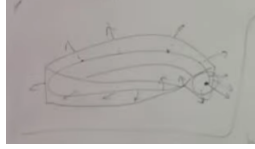
Определение 9.1.10. $k = n - 1 \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{n-1,n}^{(\perp)}$

$n(x) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется стороной, если:

1. $n(x) \in C(M)$
2. $\forall x \in \mathcal{M} \quad n(x) \perp T_x \mathcal{M}$
3. $\|n(x)\| = 1$

Замечание. Сторон чётное число.

Замечание. Не у всех поверхностей есть сторона. Лента Мёбиуса, бутылка Клейна, ...

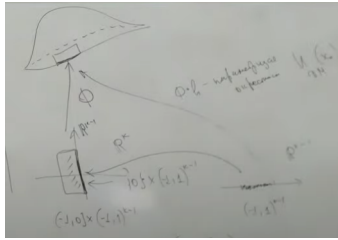


Утверждение 9.1.3. Для $k = n - 1$ ориентируемость многообразия с краем $\mathcal{M} \in (\mathbb{M}_{n-1,n}^1)$ равносильно существованию стороны.

Теорема 9.1.1. Пусть $\mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k,n}^{(1)}$ $K \leq n, k, n \in \mathbb{N}$
Тогда:

1. $\partial \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{k-1,n}^{(1)}$; $\partial(\partial \mathcal{M}) = \emptyset$
2. Если \mathcal{M} – ориентированно то $\partial \mathcal{M}$ ориентируем.

Доказательство. $\partial \mathcal{M}$ – многообразие без края. ■



Замечание (Воспоминания). Многообразие – локально гомеоморфно кубу.

С краем – есть точки гомеоморфные половине куба.

Пусть у нас есть две параметризации окрестности: $\Phi, \Psi, \Phi = \Psi \circ \Theta$ $\Phi \sim \Psi \iff \det \Theta' > 0$

Класс эквивалентности $[\Phi]$ – ориентация окрестности

U, V – окрестности в M . Они согласованы если:

- они не пересекаются
- они пересекаются и $\det \theta' > 0$, где θ – отображение перехода от Φ к Ψ , где Φ – из ориентации U , Ψ – из ориентации V и $\Phi(\Pi) \cap \Psi(\Pi) \neq \emptyset$

Пример. $S_1 = S \cap \{z > 0\}$ $S_2 = S \cap \{x > 0\}$

$$\theta : (x, y) \rightarrow (y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$\theta' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix}$$

$$\det' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} > 0 \text{ на области определения } (\Phi^{-1}(S_1 \cap S_2))$$

$$S_3 = S \cap \{z < 0\}$$

$$\tilde{\theta}(x, y) = (y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$$

И здесь уже всё плохо с определителем.

Утверждение 9.1.4. $\sqsupset \gamma : \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, регулярно ($\iff \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \langle a, b \rangle$). γ – простой путь (без самопересечений, инъективность)

$\Gamma = \gamma(\langle a, b \rangle)$ – Одномерное многообразие.

Край не пуст, если $\{a, b\} \cap \langle a, b \rangle \neq \emptyset$

Направление – непрерывное отображение $\tau : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$:

1. непрерывно $\tau \in C(\Gamma)$

$$2. \tau(x) \in T_x \Gamma \forall x \in \Gamma$$

$$3. \|\tau(x)\| = 1 \forall x \in \Gamma$$

Для любой гладкой кривой Γ (из определения выше) существует ровно два направления на этой кривой, и любая такая Γ ориентируема

Доказательство. Ориентация порождается сужениями одного и того же отображения λ на различные кубы и полукубы.

$$\tau_\gamma = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} (\gamma^{-1}(x)).$$

$\tau(x)$ — ещё одно направление

$$t \in (a, b) \quad h(t) = \langle \tau_\gamma(\gamma(t)), \tau(\gamma(t)) \rangle = \pm \|\tau_\gamma(\gamma(t))\| \|\tau(\gamma(t))\| = \pm 1$$

$h : \langle a, b \rangle \rightarrow \{-1, +1\}$ — непрерывно, но $h(\langle a, b \rangle)$ должно быть промежутком:

$$1. h(\langle a, b \rangle) = \{1\} \implies \tau = \tau_\gamma$$

$$2. h(\langle a, b \rangle) = \{-1\} \implies \tau = -\tau_\gamma$$

■

Утверждение 9.1.5. $k = n - 1 \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Сторона на многообразии $M \in \mathbb{M}_{n-1,n}^1$ — отображение $N : M \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$1. n \in C(M)$$

$$2. N(x) \perp T_x M$$

$$3. \|N\| = 1$$

Если $M \in \mathbb{M}_{n-1,n}^1$. Тогда M двусторонняя $\iff M$ ориентируема. Если M двусторонняя, то любая сторона представима в виде:

$$N = \pm \frac{N_\Phi}{\|N_\Phi\|} (\varphi^{-1}(x)).$$

Φ — параметризация окрестности точки x Из выбранной ориентации

$$N_\Phi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \\ \dots & \Phi'_{u_1} & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \Phi'_{u_{n-1}} & \dots \end{vmatrix}$$

$$\|N_\Phi\| \neq 0$$

$$\Phi \sim \tilde{\Phi}$$

Замечание (Напоминание). $\mathcal{E}_p(X)$ — набор кососимметрических p форм из X в \mathbb{R}^n

$$\omega : O \rightarrow \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$$

$$\omega(x, h^1, \dots, h^p) \quad h_i \in \mathbb{R}^n$$

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \sum_I \omega_I(x) dx^I$$

$$\Omega_p^{(r)} = \Omega_{p,n}^{(r)} \text{ — набор всех дифференцируемых } p\text{-форм гладкости } r \text{ в } O$$

Пример. 1. $f \in C^k(O), \quad \omega = f \in \Omega_0^{(k)}(O)$

$$2. f \in C^k(O), \quad dx f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \in \Omega_1^{(k-1)}(O)$$

$$3. \square F \text{ — поле в } \mathbb{R}^3 \quad F = (P, Q, R) : O \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \omega_F = Pdx + Qdy + Rfz$$

$$\omega_F(h \in \mathbb{R}^3) = P(x, y, z)h_1 + Q(x, y, z)h_2 + R(x, y, z)h_3$$

Если $h \approx 0 \implies \omega_F(h) \approx$ элементарная работа поля F на перемещение h

$$\omega_F^* = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

$dy \wedge dz \dots$ — задают базис $\Omega_{2,3}$

$$\Omega_1^n \text{ изоморфно } \Omega_{n-1}^n$$

$$4. V = (P, Q, R) \in C^r(O)$$

$$\omega(x, h^1, h^2) = \begin{vmatrix} v \\ h^1 \\ h^2 \end{vmatrix} \in \Omega_{2,3}^{(r)}(O), \quad h^1, h^2 \in \mathbb{R}^3 - \text{смешанное произведение } (h^1, h^2, v)$$

Смысл: Если V – поле скоростей, а $h^1, h^2 \approx 0$, то (h^1, h^2, v) – поток поля V через площадку, натянутую на h^1 и h^2

$$\begin{aligned} \omega &= p \begin{vmatrix} h_2^1 & h_3^1 \\ h_2^2 & h_3^2 \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} h_3^1 & h_1^1 \\ h_3^2 & h_1^2 \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} h_1^1 & h_2^1 \\ h_1^2 & h_2^2 \end{vmatrix} \\ \omega &= Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \omega_V^* \end{aligned}$$

10 Внешнее дифференцирование дифференциальных форм

“ d ” — внешний дифференциал

Определение 10.0.1 (Внешний дифференциал для форм). $\omega \in \Omega_{0,n}^{(1)}(O)$, $d_x \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx_i$

$$\omega \in \Omega_p^{(1)}(O) \quad \omega = \sum_I \omega_I dx^I, \omega_I \in \Omega_0^{(1)}(O) \implies d\omega = \sum_I (d\omega_I) \wedge dx^I$$

$$d\omega \in \Omega_{p+1}^{(0)}(O) \quad d\omega = \sum_{k=1}^n \sum_I \frac{\omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx^I$$

Пример. 1. $\omega \in \Omega_{n-1,n}^{(r)}(O)$.

Для $n = 3$: $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

$$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + Q \wedge dz \wedge dx + R \wedge dx \wedge dy = P'_x dx \wedge dy \wedge dz + Q'_y dy \wedge dz \wedge dx + R'_z dz \wedge dx \wedge dy = (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz \implies d\omega = \operatorname{div}(P, Q, R) dx \wedge dy \wedge dz.$$

$$d\omega = \div(P, Q, R) \cdot dx \wedge dy \wedge dz = d\omega_{(P,Q,R)}^*.$$

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

$$d\omega = (R'_y - Q'_z) dy \wedge dz + (P'_z - R'_x) dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y) dx \wedge dy$$

$$\operatorname{rot}(P, Q, R) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\omega_{\operatorname{rot}(P,Q,R)}^* = d\omega_{P,Q,R}$$

Свойства внешнего дифференциала:

$$1. \text{Линейность. } d(C_1\omega + C_2\theta) = C_1d\omega + C_2d\theta \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall \omega, \theta \in \Omega_{p,n}^{(1)}(O).$$

$$2. \text{Внешнее дифференцирование произведения. } \omega = \sum_{I(1\dots p)} \omega_I dx^I \quad \theta = \sum_{J(1\dots q)} \theta_J dx^J \quad \omega \wedge \theta = \sum_I \sum_J \omega_I \theta_J \cdot dx^I \wedge dx^J$$

$$\text{Если } \omega \in \Omega_p^{(1)}(O) \quad \theta \in \Omega_q^{(1)}(O)$$

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (d\theta).$$

$$\text{Если } \omega, \theta - \text{одночленные функции, } \omega = f dx^I \quad \theta = g \cdot dx^J \quad f, g \in C^1(O)$$

$$\begin{aligned} d(f dx^I \wedge g dx^J) &= d(f \cdot g dx^I \wedge dx^J) \\ &= d(f \cdot g) \wedge dx^I \wedge dx^J = g df \wedge dx^I \wedge dx^J + f dg \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (d\theta) \end{aligned}$$

Последнее равенство, потому что нужно перетащить dg через dx^I с помощью p транспозиций.

$$\tilde{2}. \omega \in \Omega_P^{(1)}(O) \quad f \in C^1(O)$$

$$d(f \cdot \omega)' = (df) \wedge \omega + f \wedge d\omega.$$

$$3. d(d\omega) \equiv 0 \quad \omega \in C_p^{(2)}$$

$$(a) \quad \omega = f \quad p = 0$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= d \left(\sum_{i=1}^n f'_{x_i} dx_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n d(f'_{x_i}) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i,j=1}^n f''_{x_i x_j} dx_j \wedge dx_i = 0 \end{aligned}$$

11 Перенос (пересадка) дифференциальной формы

O – открытое в \mathbb{R}^n U – открытое в \mathbb{R}^k

$$\Phi \in C^1(U \rightarrow O)$$

$$\omega \in \Omega_p$$

$$\Phi_*(\omega)(u, v_1, \dots, v_p) = \omega(\Phi(u), d_u \Phi(v^1), \dots, d_u \Phi(v^p))$$

Пример. 1. $\omega \in \Omega_0$

$$\Phi_*(\omega)(\omega) = \omega \circ \Phi$$

$$2. \quad k = 1, n \in \mathbb{N}, p = 1$$

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i d(x) x_i$$

$$\Phi = \gamma$$

$$\begin{aligned} \gamma_*(\omega)(u, v) &= \sum \omega_i(\gamma(u)) dx_i(\gamma'(u) \cdot v) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(u)) \cdot \gamma'_i(u) \right) \end{aligned}$$

Утверждение 11.0.1 (Свойства пересадки дифференциальных форм)

$$\Phi_*(C_1\omega + C_2\theta) = C_1\Phi_*(\omega) + C_2\Phi_*(\theta), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \omega, \theta \in \Omega_p(O).$$

$$1. \quad \omega \in \Omega_p(O) \quad f \in C^1(O)$$

$$(\Phi_*(f \cdot \omega))(u, v^1, \dots, v^p) = (f \circ \Phi) \cdot \Phi(\omega).$$

$$\Phi_*(f\omega) = f\omega(\Phi(u), d_n\Phi(v^1), \dots, d_n\Phi(v^1)) = f(\Phi(u)) \cdot \underbrace{\omega(\Phi(u), d_n\Phi(v^1), \dots, d_n\Phi(v^p))}_{\Phi_*(\omega)}$$

$$2. \quad \Phi_*(\omega \wedge \theta) = \Phi_*(\omega) \wedge \Phi_*(\theta), \quad \omega \in \Omega_p(O), \theta \in \Omega_q.$$

По линейности докажем это для одночленных.

$$\Phi_*(dx^I \wedge dx^J) = \Phi_*(dx^I) \wedge \Phi_*(dx^J).$$

$$\begin{aligned}
\Phi_*(dx^I \wedge dx^J)(v^1, \dots, v^{p+q}) &= (dx^I \wedge dx^J) (d\Phi(v^1), \dots, d\Phi(v^{p+q})) \\
&= \begin{vmatrix} h_{i_1}^1 & \dots & h_{i_p}^1 & \dots & h_{j_q}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{i_1}^{p+q} & \dots & \dots & \dots & h_{j_q}^{p+q} \end{vmatrix} \\
&= \Phi_*(dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge \Phi_*(dx_{i_p}) \wedge \dots \wedge \Phi_*(dx_{j_q})(h^1, \dots, h^{p+q}) \\
\Phi_*(dx_I)(h) &= dx_i (\Phi' \cdot h) \omega = f dx^I \\
\theta &= g dx^J \\
\Phi_*(f dx^I \wedge g dx^J) &= (f \cdot g) \circ \Phi \dots \Phi_*(dx^I \wedge dx^J) \\
&= (f \circ \Phi) \circ (g \circ \Phi) \Phi_* dx^I \wedge \Phi_* dx^J = P_*(\omega) \wedge \Phi_*(\theta)
\end{aligned}$$

3.

$$\forall \omega \in \Omega_p^{(1)}(O) \quad d(\Phi_*(\omega)) = \Phi_*(d\omega).$$

$$4. \quad \psi : V \rightarrow U, \in C^1 \quad (\Phi\psi)_*(\omega) = \psi_*(\Phi_*(\omega))$$

$$5. \quad \omega \in \Omega_p^{(1)} \quad \omega = \sum_I \omega_I dx^I$$

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\omega) &= \sum_{I(1\dots p)} \sum_{\substack{J(1\dots p) \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq k}} \\
&= \omega_I(\Phi(u)) \cdot \det \frac{\partial (x_{i_1}, \dots, i_p)}{\partial (u_{j_1}, \dots, u_{j_p})} du_{j_1} \wedge \dots \wedge du_{j_p}
\end{aligned}$$

$$\omega = \sum P_i dx_i \quad \gamma^*(\omega) = \sum_{i=1}^n P_i (\gamma(t)) \cdot g' amma_i(t) dt = \langle P(\gamma(t), g' amma(t)) \rangle dt$$

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \quad \Phi : (u,v) \rightarrow (x,y,z)$$

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\omega) &= P(\Phi(u,v)) \cdot \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + Q(\Phi(u,v)) \cdot \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u + x_v \end{vmatrix} + R(\Phi(u,v)) \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ P' h i_u & \Phi'_v \end{vmatrix} = (V \circ \Phi, \Phi'_u, \Phi'_v)
\end{aligned}$$

Определение 11.0.1 (Интеграл от дифференциальной формы). 1. Если $\omega \in \Omega_{n,n}(O)$, $E \in \mathcal{A}_n$,

$$E \subseteq O. \omega = f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\text{Тогда } \int_E \omega = \int_E f d\lambda_n = \int_E f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n.$$

2. Φ – регулярное отображение, $U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow O \subseteq \mathbb{R}^n$ $E \subseteq \Phi(U)$ $\Phi^{-1}(E) \subseteq \mathcal{A}_k$

$$\omega \in \Omega_{k,n}$$

Если M – k -мерное ориентируемое многообразие

E – “малое” множество (т.е. существует стандартная параметризация Φ , которая положительно ориентирует)

$\Phi : U \rightarrow M$ И $E \subseteq \Phi(U)$. Тогда применима формула:

$$\int_{\substack{E \\ \text{вдоль } \Phi}} = \int_{\Phi^{-1}(E)} \Phi_*(\omega).$$

Замечание (Факт). $\int_E \omega$ не зависит от выбора положительной ориентирующей параметризации.

Замечание. E называется измеримым в $M \iff E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ E_j – малые измеримые

$$E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j \implies \int_E \omega = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} \omega \text{ – поверхностный интеграл второго рода}$$

Частные случаи:

1. $p = k = 1$ $\Phi = \gamma$ – простой кусочно-гладкий путь (замкнутый) с заданным направлением обхода (с ориентацией)

$$\omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$$

$$\begin{aligned} \int_E \omega &= \int_{\langle c, d \rangle} \langle P(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \text{ – криволинейный интеграл} \\ &= \int_{\langle c, d \rangle} \langle P(\gamma(t)), \tau \rangle \|\gamma'\| dt \\ &= \int_{\langle c, d \rangle} \langle P(\gamma(t)), \tau \rangle ds \text{ – криволинейный интеграл 1-го рода} \end{aligned}$$

2. $p = k = 2$ $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

$$V = (P, Q, R)$$

$$\begin{aligned} \int_E \omega &= \int_E Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \\ &= \int_{\Phi^{-1}(E)} \Phi_*(\omega) \\ &= \iint_{\Phi^{-1}(E)} \underbrace{\begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ \Phi'_u & & \\ \Phi'_v & & \end{vmatrix}}_{\langle V \circ \Phi, n \rangle \|\Phi'_u \times \Phi'_v\|} dudv \\ &= \iint_{\Phi^{-1}(E)} \langle V \circ \Phi, n \rangle \|\Phi'_u \times \Phi'_v\| dudv \text{ – двойной интеграл} \\ &= \iint_E \langle V, n \rangle d\mu_M \text{ – поверхностный интеграл первого рода} \end{aligned}$$

$$E = \Phi(U) \quad n = \pm \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{\|\Phi'_u \times \Phi'_v\|}$$

Пример. $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$

$$\begin{aligned} \int_{S_{\text{вн}}} &= \int_S \langle (x, y, z), \frac{(x, y, z)}{R} \rangle d\mu_S = R \cdot \int_S d\mu_S = \left| \begin{array}{l} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ d\mu_S = \sqrt{1 + z'_x + z'_y} dxdy \end{array} \right| = 2R \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \\ &= 2R^2 \int_{\pi}^{\pi} d\phi \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 2R^2 \cdot 2\pi \left(\sqrt{R^2 - r^2} \right) \Big|_{r=R}^{r=0}. \end{aligned}$$

Замечание. Площадь сферы $S^2(R) = 4R^2\pi$.

12 Общая формула Стокса

Теорема 12.0.1. ориентируемое компактное $M \subseteq \mathbb{M}_{n,k}$. Ориентация ∂M согласована с ориентацией M , $\omega \in \Omega_{k-1}^{(1)}(O), M \subseteq O$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Замечание (Наводящие соображения). $k = 1 \quad \omega = f$

$\gamma : [a, b] \rightarrow M$ — биекция

$$\begin{aligned} \int_M df &= \int_{\gamma^{-1}(M)} \gamma_*(df) \\ &= \int_{[a,b] d\gamma_*(f)} = \gamma_*(f) \Big|_a^b \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

$\partial M = a, b$, интеграл будет разностью произведений знаков и значений функции (− для входа, + для выхода)

Теорема 12.0.2.

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

M — компактное (гладкое C^2), $M \in \mathbb{M}_{q,n}^{(2)}$ — многообразие с краем ∂M , ориентируемое, ориентации на M и ∂M согласованы, $\omega \in \Omega_{q-1,n}^{(1)}$

Замечание. $n = 2, q = 2$

$$\omega = Pdx + Qdy \quad P = P(x, y), \quad Q = Q(x, y)$$

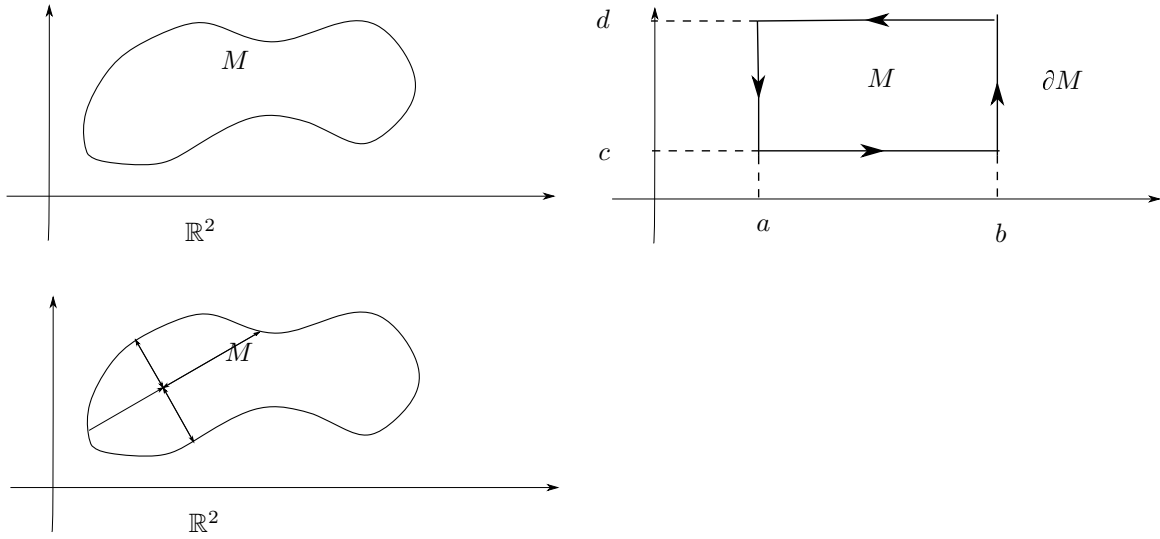


Рис. 4: stocks22

$$\begin{aligned}
 d\omega &= P'_y dy \wedge dx + Q'_x dx \wedge dy = (Q'_x - P'_y) dx \wedge dy \\
 \int_M d\omega &= \iint_{[a,b] \times [c,d]} Q'_x - P'_y dx dy \\
 &= \int_c^d \int_a^b Q'_x(x, y) dx dy - \int_a^b dx \left(\int_c^d P'_y dy \right) \\
 &= \int_c^d Q(b, y) - Q(a, y) dy - \int_a^b P(x, d) - P(x, c) dx \\
 \int_{\partial M} &= \int_{I_1, I_2, I_3, I_4} P dx + Q dy \\
 &= \left(\int_{I_1} + \int_{I_3} \right) P dx + \left(\int_{I_2} + \int_{I_4} \right) Q dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial M} \omega &= \sum \int_{\partial M_j} \omega \\
 &= \sum \int_{M_j} d\omega \\
 &= \int_M d\omega
 \end{aligned}$$

Замечание. При $n = 2k = 2q = 1$ формула Стокса называется формулой Грина. O – кусочно-гладкая область в \mathbb{R}^2 , ∂O – граница, ориентируемая положительно.

$$\int_{\partial P} P dx + Q dy = \iint_O Q'_x - P'_y dx dy.$$

Замечание. $n = 3k = 2q = k - 1 = 1$

$$\omega = Pdx + Qdy + Rsz$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{\Phi^{-1}(\partial M)} \Phi_*(M) \\ &= \int_{\partial \Pi} \Phi_*(\omega) \\ &= \int_{\Pi} \underbrace{d(\Phi_*(\omega))}_{\Phi_*(d\omega)} = \int_{\Phi(\Pi)=M} d\omega \\ \Phi : \Pi &\rightarrow (M \cup \partial M) \\ \int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_{M_n} \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dz & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \int_M \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

n – выбранная сторона, относительно которой обход ∂M против часовой стрелки.

$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz = \int_M \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds.$$

– классическая формула Стокса. M – 2-мерная поверхность с краем в \mathbb{R}^3 , ориентируемая, $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, обход края – стандартный (против часовой стрелки при наблюдении из n)

Пример.

$$\int_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz.$$

C – кривая $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx \\ x^2 + y^2 = 2rx, r < R \\ z \geq 0 \end{cases}$, обход кривой положительный относительно внешней стороны,

“меньшей” части сферы, высекаемой цилиндром.

$$n(x, y, z) = \frac{(x-R, y, z)}{R}$$

$$\begin{aligned} \int_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz &= \frac{1}{R} \iint \begin{vmatrix} x-R & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} ds \\ &= \frac{2}{R} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2rx} \frac{R}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}} ((x-R)(y-z) + y(z-x) + z(x-y)) dx dy \\ &= -2R \iint_{x^2 + y^2 \leq 2rx} \frac{y}{\sqrt{\dots}} - 1 dx dy \\ &= 2R\pi r^2 \end{aligned}$$

слагаемое с корнем обросилось, потому что это нечётная функция по y , а круг обладает симметрией относительно оси Ox

Замечание. $n = 3k = 3q = k - 1 = 2$

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

$$d\omega = dic(P, Q, R) dx \wedge dy \wedge dz \quad dic = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\int_{\partial M} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint_M \operatorname{div}(P, Q, R) dx dy dz.$$

M – трёхмерное гладкое многообразие.

$$\int_{\partial M} \langle (P, Q, R), n \rangle ds$$

Пример. $\iint x^2 \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma ds$

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

$$n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Формула ГО не применяется напрямую, т.к. поверхность незамкнута.

$$\begin{aligned} \int_S f + \int_{S_+} f &= \iiint \operatorname{div}(P, Q, R) dx dy dz \\ &= 2 \iiint z \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_r^h z dz \\ &= 2 \cdot 2\pi \int_0^h z dz \int_0^z r dr \\ &= 2 \cdot \frac{\pi h^4}{4} = \frac{\pi h^4}{2} \\ \int_{S_+} f &= \iint_{S_1} \langle (P, Q, R), (0, 0, 1) \rangle dS - 1 \\ &= \iint h^2 dS_1 = h^2 \pi h^2 = \pi h^4 \end{aligned}$$

$$I = J - I_1 = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}$$

Замечание (Случай комплексной переменной). $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ называется \mathbb{C} -дифференцируемой в точке $a \in O$, если $d_a f - \mathbb{C}$ -линеен. $f(a+h) - f(a) = l(h) + o(h)$ l – линейное отображение, $o(h) = \alpha(h) \cdot h$ $\alpha(h) \rightarrow 0, h \rightarrow 0$

линейное отображение – можно выносить комплексные множители $L(cz) = cL(z)$

Теорема 12.0.3 (теорема об условиях равносильных \mathbb{C} -дифференцируемости). $f : O \rightarrow \mathbb{C}$. \square f – дифференцируемо в вещественном смысле в точке $a \in O$ Тогда следующее равносильно:

1. f – \mathbb{C} -дифференцируема

$$2. \exists f'(a) = \lim_{z \rightarrow 0, z \in \mathbb{C}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

$$3. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$$

$$4. f = u + iv \quad u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$$

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \quad \text{в точке } a \quad f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ -u'_y & u'_x \end{pmatrix}$$

Замечание.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Замечание. g — \mathbb{R} -дифференцируемо в точке $a \implies \exists! A, B \in \mathbb{C}$
 $d_a g = Adz + Bd\bar{z} \quad A = \frac{\partial f}{\partial z}(a) \quad B = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)$

Замечание.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

γ — простой кусочно-гладкий путь $\gamma : [a, b] \rightarrow C$, f измерима на $\Gamma = \gamma([a, b])$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))) (\gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)) dt \\ &= \int_{[a,b]} (u(\dots)\gamma'_1 - v\gamma'_2) + i(v\gamma'_1 + u\gamma'_2) dt \\ &= \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy \\ &= \iint_O (-v'_x - u'_y) + i(u'_x - v'_y)\end{aligned}$$

Теорема 12.0.4 (Коши). \square f — \mathbb{C} -дифференцируема в кусочно-гладкой области O вплоть до границы. Тогда

$$\int_{\partial O} f(z) dz = 0.$$

Пример. $f(z) = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}f'(z)(a) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(a+z) - f(a)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+z} - \frac{1}{a}}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{1}{a(a+z)} = -\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \quad \forall z \neq 0$$

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R} \frac{dz}{z} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{it} dt}{Re^{ei}} \\ &= i2\pi \neq 0\end{aligned}$$

При этом если взять другой контур, который не будет содержать нуля внутри, то интеграл по контуру будет равен нулю.

Ln — многозначный логарифм $E \subseteq C \rightarrow 2^{\mathbb{C}} \quad z \rightarrow \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$

Замечание. Если в области, по контуру которой берётся интеграл, есть конечное число особых точек, можно окружить эти точки достаточно маленькими окрестностями и посмотреть на интеграл по итоговому контуру

Теорема 12.0.5 (теорема Коши о вычетах).

$$\int_C f(z)dz = \sum_{a \in A} \oint_{C(a)} f(z)dz.$$

$C(a)$ – набор окружностей $\{B(a)\}$, которые не пересекаются
вычет функции в точке a называется $\text{res}_a f = \oint_{C(a)} f(z)dz$

Замечание (частные случаи формула Стокса).

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

1. Если ω замкнута в $O \supset M \implies \int_{\partial M} \omega = 0$
2. Если $\partial M = \emptyset$, то $\int_M d\omega = 0$

Определение 12.0.1. ω называется замкнутой в области O , если $d\omega = 0$ в любой $p \in O$

Определение 12.0.2. ω называется точной в области O , если существует первообразная для ω в области O

$\omega \in \Omega_{q,n}(O)$, первообразная $\tilde{\omega} \in Q_{q-1,n}(O)$

Замечание. ω – Точная, то ω – замкнута

$$\omega = d\tilde{\omega} \quad d\omega = dd\tilde{\omega} = 0$$

Утверждение 12.0.1. Если $\omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$ точна в области $O \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\omega = dF \implies \forall \gamma : [a, b] \rightarrow O$$

$$\int_{\gamma} \omega = F|_A^B.$$

, где $A = \gamma(a), B = \gamma(b)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n P_i dx_i &= \int_{[a,b]} \sum_{i=1}^n P_i \circ \gamma(t) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_{[a,b]} \langle P \circ \gamma, \gamma' \rangle \\ &= \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= F(B) - F(A) \\ dF(\gamma'(t)) &= d\left(\overbrace{F \circ \gamma(t)}^{\Phi}\right) \end{aligned}$$

Выводы:

1. Если $\omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$ точна в O , то $\int_{\gamma} \omega$ не зависит от пути γ с носителем в O

2. $-\|-\gamma$ — замкнута, то $\int_{\gamma} \omega = 0$

Пример. $\int_{\gamma} \underbrace{\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}}_{\omega} \quad P = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$

ω — локально точна, значит замкнута всюду в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{xdy - ydx}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \\ &= -d\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{\left(\frac{x}{y} + 1\right)} \\ &= -d\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

$$\omega = d\left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

Так мы предъявили первообразные на полуплоскостях.

$$\int_{\|(x,y)\|=R} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{R^2} d\varphi = 2\pi \neq 0.$$

Значит форма не точна (потому что в противном случае это был бы интеграл по замкнутому контуру, локально точная в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, но не точная).

$$\operatorname{Hol}(O) = \{f : \forall z \in O \exists f'(z)\}$$

Теорема 12.0.6 (Коши). $f \in \operatorname{Hol}(\overline{O})$, O — кусочно-гладкая область (граница O — кочкный набор кусочно гладких непересекающихся простых замкнутых контуров).

∂O — стандартно ориентированная граница.

Теорема 12.0.7 (“Теорема Коши о вычетах”, Теорема 2). $f \in \operatorname{Hol}(\overline{O} \setminus A)$ A — конечное множество. O — кусочно-гладкая область (как в предыдущей теореме). $A \subseteq O$

$$\int_{\partial O} f(z) dz = \sum_{a \in A} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz.$$

r : замкнутые круги $\{\overline{B}(a)\}$ попарно не пересекающиеся и содержащиеся в O

Утверждение 12.0.2 (Интегральная формула Коши). Пусть $f(z) \in \operatorname{Hol}(\overline{O})$, O — кусочно-гладкая форму в \mathbb{C} , $a \in O$.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial O} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Доказательство. $\frac{f(z)}{z-a} \in \operatorname{Hol}(\overline{O} \setminus \{a\})$

$$A = \{a\} \implies \int_{\partial O} \frac{f(z)}{z-a} = \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{z-a}, \text{ где } \rho \in (0, \rho_0)$$

f дифференцируема в точке a , $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \alpha(z)(z-a)$, где $\alpha(z) \rightarrow 0$, $z \rightarrow a$.

$$= \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(a)}{z-a} dz + \int_{|z-a|=\rho} f'(a) + \alpha(z) dz.$$

Т.к. $\alpha(z) \rightarrow 0 \quad \exists M : |f'(\alpha) + \alpha(z)| \leq M, \forall z \in B_{\rho_0}(a)$.

$$\begin{aligned} r(t) &= a + \rho e^{it} \\ r'(t) &= i\rho = i\rho e^{it} \\ |\rho'(t)| &= \rho \end{aligned}$$

$$f(a) \cdot \int_{|z-a|=0} \frac{dz}{z-a} = 1\pi i.$$

■

Теорема 12.0.8 (О разложении в ряд Тейлора). $\square a \in \mathbb{C}, R > 0, f \in \text{Hol}(B_R(a))$

Тогда существует единственный набор $(C_k)_{k=0}^{+\infty}$:

$$\forall z \in B_R(a) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$$

$$\square z \in B_R(a) \quad r = |z-a| \quad \square \rho \in (r, R)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta-z} &= \frac{1}{(\zeta-a) - (z-a)} \\ &= \frac{1}{\zeta-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} W = \frac{z-a}{\zeta-a} \\ \frac{1}{1-W} = \sum_{k=0}^{\infty} W^k \end{array} \right| \quad |W| = \frac{r}{\rho} < 1$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \underbrace{\frac{f(\zeta)}{???}}_{\text{отр}} \underbrace{\zeta-a \sum_{k=0}^{\infty} W^k}_{\text{сх. равн. на } \xi: |\zeta-a|=\rho} - \text{сходится равномерно}$$

$$\oint_{\zeta-z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \int s.$$

Следствие 12.0.8.1. Голоморфность = комплексная аналитичность.

Следствие 12.0.8.2. Неравенства Коши для тейлоровских коэффициентов.

Пусть $f \in \text{Hol}(B_R(a)), a \in \mathbb{C}, R > 0$.

$$\text{Для } r \in (0, R) \quad M_r = \sup_{\{z : |z-a|=r\}} |f(z)| \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad |c_k| \leq \frac{M_r}{r^k} \cdot 2\pi.$$

$$\text{Было показано, что } c_k = \int_{|\zeta-a|=\rho=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta \implies$$

$$|c_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a + \rho e^{it})}{\rho^{k+1} e^{i(k+1)t}} i\rho e^{it} dt \right| \leq \frac{1}{1\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M_\rho}{\rho^{k+1}} dt = \frac{M_\rho}{\rho^k}.$$

Определение 12.0.3. Функция, аналитическая во всей комплексной плоскости, называется целой.

Пример. $e^z, P(z), \sin z, \cos z, \text{ch } z, \text{sh } z$

Теорема 12.0.9 (Лиувилли). Любая целая ограниченная функция является константой

Доказательство. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ — сходится всюду, где функция голоморфна, т.е. в \mathbb{C}

По неравенству Коши $|C_k| \leq \frac{M_r}{r^k}$, где $M_r = \max_{|t|=r} |f(t)| \leq C$, если C ограничивает $|f|$

Получается, что $\forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall r > 0 \quad C_k \leq \frac{C}{r^k}$

Устемляя r к бесконечности для $k \in \mathbb{N}$, получаем, что $|C_k| = 0$

А тогда $f(z) = C_0$ ■

Следствие 12.0.9.1. Синус целая функции, не константа. Следовательно неограничен.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{sh} it = \frac{e^{-t} - e^t}{2i}$$

$$|\sin z| = |\operatorname{sh} it|$$

Определение 12.0.4 (Ряд Лорана).

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k (z - a)^k := \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} (z - a)^{-k}.$$

Теорема 12.0.10 (О сумме ряда Лорана). $\square R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}} \quad r = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_{-k}|}$

Тогда ряд Лорана $\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k (z - a)^k$ сходится в кольце $R_{r,R}(a) = \{z : r < |z - a| < R\}$

Доказательство. Ряд с нетрицательными коэффициентами сходится в круге $B_R(a)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} (z - a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} w^k \text{ сходится относительно } w \text{ в } B_{\frac{1}{r}}(0) \quad w = \frac{1}{z-a}$$

$$|w| < \frac{1}{r} \iff \frac{1}{|z-a|} < r \iff |z-a| > r$$
 ■

Утверждение 12.0.3. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$. $f \in \operatorname{Hol}(\mathcal{R}_{r,R}(a))$. Тогда \exists единственный $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $\forall z \in \mathcal{R}_{r,R}(a)$ верно $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k (z - a)^k$.

Пусть $z \in \mathcal{R}_{r,R}(a)$, пусть $r_1, R_1 : r < r_1 < |z - a| < R_1 < R$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R(u)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|z-a|=R_1} -|| - + \oint_{|z-a|=r_1} -|| - \right) \\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{-(z - a)} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}}. \end{aligned}$$

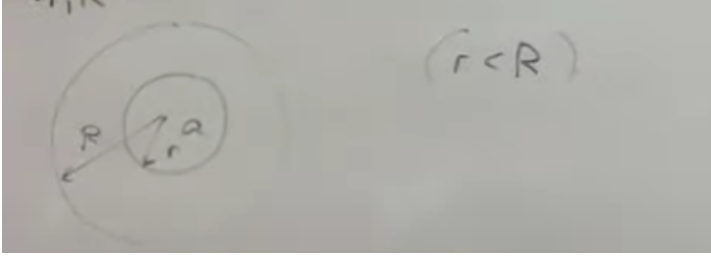
$$\text{Для любого } k \in \mathbb{Z} \quad C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz$$

Пример. $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \quad \mathbb{C} \setminus \{0\} = R_{0,+\infty}\}(0)$ — функция Жуковского

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z} \left(\cos z \cdot \frac{z}{\sin z} \right)$$

$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$ — аналитическая. Значит обратная к ней аналитическая, значит $\cos z \cdot \frac{z}{\sin z}$ — аналитическая.

$$\mathcal{R}_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}.$$



$a \in \mathbb{C}; f \in \text{Hol}(\mathcal{R}_{r,R}(a))$, где $-\infty \leq r < R \leq +\infty \implies \exists$ единственный $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$:

$$\forall z \in \mathcal{R}_{r,R}(a), \quad f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - a)^k.$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}, \quad \rho \in (r, R).$$

Определение 12.0.5. $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называют изолированной особой точкой $f(z)$, если \exists окрестность $U(a)$:

$$f(z) \in \text{Hol}(U(a)).$$

Пример. 1. $f(z) = z$, $A = \{\infty\}$.

2. $f(z) = \bar{z}$, $A = \emptyset$ (все точки дифференцируемы).

3. $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $A = \{0, \infty\}$.

Определение 12.0.6. Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — и.о.т. $f(z)$. Тогда a называется

- Полюсом $\iff \exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.
- Существенно особой $\iff \nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Пример. 1. $f(z) = z$, $A = \{\infty\}$, ∞ — полюс.

2. $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $A = \{0, \infty\}$, 0 и ∞ — полюсы.

3. $f(z) = e^z$, $A = \{\infty\}$, ∞ — существенно особая точка.

Утверждение 12.0.4. Пусть $a \in \mathbb{C}$, a — и.о.т. $f(z)$. $\exists R : f \in \text{Hol}(\dot{B}_R(a))$.

$$\text{Пусть } f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k}_{\text{регулярная часть}} + \underbrace{\sum_{k \in -\mathbb{N}} c_k (z-a)^k}_{\text{главная часть лорановского разложения } f(z) \text{ при } z \rightarrow a} \quad \forall z \in \dot{B}_R(a).$$

Пример. $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

В точке $z = 0$. Так как $f(z) \in \text{Hol}(B_1(0)) \implies f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $\forall z \in z \in B_1(0)$. Регулярная часть есть, а главная отсутствует.

В точке $z = 1$. $f(z) = (-1)(z-1)^{-1}$ — главная часть.

z в окрестности ∞ $\frac{1}{1-z} = \left(\frac{-1}{z} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \left(-1 \frac{1}{z} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^k$. Все регулярная часть, главная отсутствует.

Утверждение 12.0.5 (Характеристика изолированных особых точек в терминах Лорановского разложения). Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$, a — и.о.т. $f(z)$. Тогда

1. a — устранимая $\iff \exists$ окрестность $U(a) : f|_{U(a)}$ — ограниченная \iff главная часть лорановского разложения отсутствует.
2. a — полюс \iff главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности a содержит конечное число членов.
3. a — существенно устранимая \iff главная часть лорановского разложения $f(z)$ содержит бесконечное число слагаемых.

Неравенство Коши : $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(z-a)^k, \quad a \in \mathbb{C}. M_r = \sup_{z: |z-a|=r} |f|, \quad |c_k| \leq \frac{M_r}{r^k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

Доказательство. ... ■

Замечание. Если $a \in \mathbb{C}$ — и.о.т., то $\exists A : \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a \\ A, & \end{cases} \in \text{Hol}(U(A)).$

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ в проколотой окрестности a .

Проще говоря, можно исправить функцию в плохих точках и она станет хорошей.

Пример. $f(z) = \frac{\sin z}{z} \in \text{Hol}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$ — сходится всюду в \mathbb{C} . Значит это продолжение функции $\frac{\sin z}{z}$

Замечание (Отступление).

Лемма 12.0.10.1 (О кратности нуля). $f(z) \in \text{Hol}(B_k(a)), a \in \mathbb{C}, R > 0$

$f(a) = 0$ Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : f(z) = (z-a)^N \cdot g(z)$, где $g(z) \in \text{Hol}(B_k(a)), g(a) \neq 0 \implies f(z) \sim A \cdot (z-a)^N$, где $A = g(a)$

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ в окрестности точки $a, c_0 = 0$

Замечание. Если точка $a \in \mathbb{C}$ — полюс, то $\Re g(z) = \frac{1}{f(z)} \rightarrow 0, z \rightarrow a, a$ — устранимая для $g(z) \implies g(z) = (z-a)^N \cdot \tilde{g}(z) \quad \tilde{g}(a) \neq 0, \tilde{g} \in \text{Hol}(\text{окрестности т. } a)$

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{g} = \frac{1}{(z-a)^N} \frac{1}{\tilde{g}(z)} \\ &= \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k \right) \\ &= \frac{b_0}{(z-a)^N} + \frac{b_1}{(z-a)^{N-1}} + \dots \end{aligned}$$

Определение 12.0.7. $\square a \in \mathbb{C}$ — полюс для $f(z), N \in \mathbb{N}$

a — полюс порядка N для $f(z) \iff f(z) \sim \frac{C}{(z-a)^N} \left(\iff f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^N} \right.$ где $g(z)$ голоморфна в некоторой окрестности

Для бесконечных точек рассматриваем $g(w) = \frac{1}{f(w)}$

Замечание. Любой полюс обладает порядком.

Пример. 1. $f(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Полюс 0 имеет порядок 1, полюс ∞ имеет порядок 1. Полюсы с порядком 1 называют **простыми**.

2. $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2} = \frac{-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z^2} = -\frac{1}{2} + \dots$ 0 – простой полюс (порядок 1), ∞ – существенно особая.

3. $f(z) = \operatorname{tg} z = \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \sim \frac{\frac{\pi}{2} - z}{\frac{\pi}{2} - z} \quad z = \frac{\pi}{2} \implies$ эти точки простые особые. ∞ – не изолированная особая.

Замечание. Почему может быть полезно знать какие особенности у функции в конкретной точке?

Определение 12.0.8. $\square a \in \tilde{\mathbb{C}}, a$ – изолированная особая точка $f(z)$

$$\operatorname{res}_a f = \begin{cases} c_{-1} & , \text{коэффициент в Лорановском разложении } f(z) \text{ в окрестности точки } a \in \mathbb{C} \\ -C_{-1} & , \text{коэффициент в Лорановском разложении } f(z) \text{ в окрестности } \infty, a = \infty \end{cases}.$$

Пример. 1. $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \quad \operatorname{res}_0 f = \frac{1}{2}, \operatorname{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2}$

$$2. f(z) = \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1}$$

$$\operatorname{res}_1 f = \operatorname{res}_1 \frac{\frac{1}{2}}{z-1} = \frac{1}{2} \quad \operatorname{res}_{-1} f = -\frac{1}{2} \quad \operatorname{res}_{\infty} f = 0, \text{ т.к. } f - \text{чётная}$$

Замечание. Чем хороши вычеты?

c_k – коэффициенты лорановского разложения в окрестности точки $a, f \in \operatorname{Hol}(B_R^\circ(a))$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \quad \rho \in (0, R).$$

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

Теорема 12.0.11 (Коши о вычетах). Пусть O – кусочно-гладкая область в $\tilde{\mathbb{C}}$
 A – конечное множество, $A \subseteq O, f \in \operatorname{Hol}(\tilde{O} \setminus A)$ Тогда:

$$\int_{\partial O} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{res}_a f = 2\pi i \sum_{z \in O} \operatorname{res}_z f.$$

Теорема 12.0.12 (о полной сумме вычетов). $\square A \ni \infty, A \subseteq \tilde{\mathbb{C}}, A$ – конечно
 $\square f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C} \setminus A)$ Тогда:

$$\sum_{a \in A} \operatorname{res}_a f = \sum_{z \in \tilde{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_z f = 0.$$

Доказательство. $\square A_0 = A \setminus \{\infty\}$

Т.к. A_0 – конечно, то $\exists B_R(0) \supset A_0$

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=R} f(z) dz &= \left(\sum_{a \in A_0} \operatorname{res}_a f \right) \cdot 2\pi i \\ &= (-\operatorname{res}_{\infty} f) \cdot 2\pi i \end{aligned}$$

■

Приёмы вычисления вычетов (a – изолированная особая точка $f(z)$):

1. a – устарнимая особая точка.

$$(a) \quad a \in \mathbb{C} \implies \operatorname{res}_a f = 0$$

$$(b) \quad a = \infty \quad f(z) = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = C_0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)) = \operatorname{res}_{\infty} f$$

2. $a \in \mathbb{C}$ – полюс. Тогда: $f(z) = \frac{C_{-N}}{(z-a)^N} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z-a)} + C_0 + C_1(z-a) + \dots$

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(N+1)!} \left(z_0 a^N f(z) \right)_{z=a}^{(N-1)}$$

$$\text{Если полюс простой, то } \operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)$$

Частный случай: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi, \psi \in \operatorname{Hol}$, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$

$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

$$\operatorname{res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

3. Теорема о полной сумме вычетов.

4. Если $f(z)$ чётная функция, то $\operatorname{res}_a f = -\operatorname{res}_{-a} f$, в частности $\operatorname{res}_0 = 0 = \operatorname{res}_{\infty}$

5. Если $f(z)$ нечётная, то $\operatorname{res}_a f = \operatorname{res}_{-a} f$

Пример. 1. $\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}$

$$z^4 = -1$$

$$z_1, z_4 - \text{простые полюсы. } \operatorname{res}_{z_1} f = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{z_1}{4z_1^4} = -\frac{z_1}{4}$$

$$\operatorname{res}_{z_2} f = -\frac{z_2}{4}$$

$$\begin{aligned} \int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1} &= 2\pi i (\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_4} f) \\ &= -\frac{\pi i}{2} (z_1 + z_4) \\ &= -\frac{\pi i}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Приложение теоремы о вычетах к вычислению определённых и несобственных интегралов.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$

$$z = e^{i\varphi}$$

$$\frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$dz = de^{i\varphi} = ie^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi.$$

Пример. $z^2 + 6z + 1 = 0$

$$z_{12} = -2 \pm \sqrt{9-1} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

$z_1 z_2 = 1$ (по теореме Виета, о которой полезно помнить)

$$|z_1| = \frac{1}{|z_2|}$$

z_1 – полюс второго порядка

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi + 2}{(\cos \varphi + 3)^2} d\varphi &= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z+\frac{1}{z}}{2} + 2}{\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2} + 3\right)^3} \\
&= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^4 + 4z + 1}{(z^2 + 6z + 1)^2} dz \\
&= \frac{2}{i} 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_1} f(z) \\
\operatorname{res}_{z_1} f &= \frac{1}{(N-1)!} (f(z)(z-a)^N)_{z=a}^{(N-1)} \\
&= (f(z)(z-1)^2)' \big|_{z=z_1} \\
&= \frac{z^2 + 4z + 1}{(z-z_2)^2} \big|_{z=z_1} \\
&= \left(\frac{2z+4}{(z-z_2)^2} - 2 \frac{z^2+4z+1}{(z-z_2)^3} \right) \big|_{z=z_1} = \dots
\end{aligned}$$

2. Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C} \setminus A$, A — конечное множество особых точек, $A \cap \mathbb{R} = \emptyset$

$$\sup_{|z|=R} |f(z)| = o\left(\frac{1}{R}\right) \quad R \rightarrow +\infty$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z f.$$

Мы можем рассмотреть семейство полукругов и брать интегралы по их контурам.

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{\substack{z: \operatorname{Im} z > 0 \\ |z| < R}} \operatorname{res}_z f + 2\pi i \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z f \\
&= \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{|z|=R} f(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + 0
\end{aligned}$$

Пример. особые точки: $z^1 + 1 = 0$; $z^4 + 4 = 4$ $z = \pm i$ $z = \pm 2i$ $|z| = R$

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^4+1||z^2+4|}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$M(R) = \sup_{|z|=R} \sup |f(z)| = o\left(\frac{1}{R}\right)$, $R \rightarrow +\infty$ — условие на применение формулы для несобственного интеграла

Лемма 12.0.12.1 (Жордана). Пусть f непрерывна в $|z| > R_0, \operatorname{Im} z > 0$. $M(R) = \sup \{|f(z)| : z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $\Gamma_R = \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$

Если $M(R) \rightarrow 0$, то $\forall m > 0 \quad \int_{\Gamma_R} f(z) e^{i \operatorname{Im} z dz} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$.

Лемма 12.0.12.2 (О полувыците). Пусть $\Gamma = \{a + re^{i\phi} : \phi \in [\phi_0, \phi_0 + \pi]\}$. $a \in \mathbb{C}$ — простой полюс $f(x)$.

Тогда $\int_{\Gamma(r)} f(z) dz \xrightarrow{r \rightarrow 0+} \pi i \operatorname{res}_a f$.

Доказательство. При достаточно малых r , т.к. a – простой множитель

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(r)} f(z) dz &= \int_{\Gamma(r)} \frac{C_{-1}}{z-a} + \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k}^{\varphi(z)} dz \\ &= \overbrace{C_{-1}}^{\text{res}_a f} \underbrace{\int_{\Gamma(r)} \frac{dz}{z-a}}_{I_1} + \overbrace{\int_{\Gamma(r)} \varphi(z) dz}^J \\ I_1 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} \frac{ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} = \pi i \\ |J| &\leq C \cdot \pi r \rightarrow 0 \quad r \rightarrow 0.\end{aligned}$$

■

13 Интегралы в смысле главного значения

Пусть $f \in C([a, b] \setminus \{c\})$, $c \in (a, b)$.

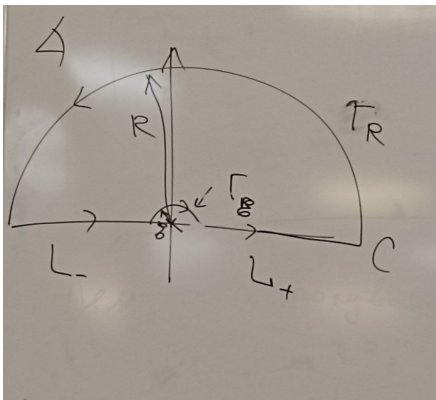
$$v.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Особенных точек может быть много, поэтому там может возникнуть несколько таких пределов.

Пример. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I$.

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{1}{2} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overbrace{\sin x}^{\text{Im } e^{ix}}}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} v.p. \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2i} \pi i = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$\frac{\cos x}{x}$ – нечётная функция, значит интеграл в смысле главного значения по области без особых точек сходится и равен 0.



✕ контур из двух верхних полуокружностей с радиусами R, ε и прямыми вдоль оси Ox , соединяющими их, обходимый против часовой стрелки.

$$0 = \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \underbrace{\int_{\Gamma_R} f dz}_{\rightarrow 0; \text{Жордан}} + \overbrace{\int_{\Gamma_\varepsilon} f dz}^{-\pi i \operatorname{res}_0 f} + \int_{L_+} f dz + \int_{L_-} f dz$$

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi i \operatorname{res}_0 f = \pi i.$$

14 Возвращение к дифференциальным формам

Определение 14.0.1. ω – замкнутая форма если $d\omega = 0$

Определение 14.0.2. ω – точная в области O , если существует форма Ω – дифференциальная форма в области O , т.ч. $d\Omega = \omega$

Лемма 14.0.0.1. Точность влечёт замкнутость. Потому что $d(d(\Omega)) \equiv 0$

Лемма 14.0.0.2. Если ω замкнута в шаре $B(a) \subseteq \mathbb{R}^n$, то она там точна.

Замечание. Если ω – точная 1 форма, $\omega = dF \implies \int_\gamma \omega = F|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}$, если $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \underbrace{dF \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt}_{F(\gamma(t))'} = F(\gamma(t))_a^b$$

Интеграл не зависит от пути, соединяющего точки a и b

проверка леммы для 1-форм, $n = 2$. $F(p) = \int_{a,p} \omega$

$$\omega = Pdx + Qdy \quad p' = Q'_x - P'_y dx dy$$

Рассмотрим контур по прямоугольному треугольнику с гипотенузой ap . Интеграл по этой этому контуру равен 0. По формуле Грина:

$$0 = \int_{\partial O_1} \omega = - \int_{ap} \omega + \int_{aq} \omega + \int_{qp} \omega$$

$$F(x, y) = F(p) = \int_a^q \omega + \int_q^p \omega = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, s) ds$$

$$F'_x(x, y) = P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \underbrace{Q'_x(x, s)}_{P'_y(x, s)} ds = P(x, y)$$

$$F'_y(x, y) = Q(x, y)$$

Следовательно F – первообразная для f в круге $B_R(a)$

■

Теорема 14.0.1 (Пуанкаре). Всякая замкнутая в (односвязной) выпуклой области точна в этой области.

показательство . $\Phi(p) = \int_{ap} \omega$

$$\Phi(p) = \int_{ap_1} \omega + \int_{p_1 p} \omega \quad \Phi'(p) = \Phi_1(p) = \omega \quad \forall p \in B_R(p_1)$$

■

Задача 3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \not\asymp \frac{e^{2it}-1}{z^2}$

Замечание. Существуют замкнутые, но не точные дифференциальные формы.

$$w = \frac{xdy - ydx}{x^2}, \quad w = d\left(\frac{y}{x} + C\right), x > 0.$$

$$w = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{xdy - ydx}{y^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}, \quad ((x, y) \neq 0,)$$

$$\oint_{|(x,y)|=R} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}{R^2} = 2\pi \neq 0 \implies$$

w не точна в $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

15 Пространства $L^p(X, \mu), e^p$

Замечание. Неравенство Минковского:

- для сумм $x_1, \dots, x_k \quad y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R} \quad p \geq 1$

$$\left(\sum_{k=1}^K |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^K |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^K |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- $\left(\int_a^b |f + g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \dots \quad f, g \in C([a, b])$

Теорема 15.0.1. $\square (X, \mu)$ – пространство с мерой, $f, g \in \mathcal{L}(X, \mu)$

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^K |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^K |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. 1. f, g – ступенчатые и неотрицательные. Тогда существует общее допустимое разбиение $\{E_k\}_{k=1}^K \quad X = \bigsqcup_{k=1}^K E_k \quad f|_{E_k} \equiv f_k \quad g|_{E_k} \equiv g_k$ – числа, постоянные

$$f(x) = \sum_{k=1}^K f_k \chi_{E_k}(x) \quad g(x) = \sum_{k=1}^K g_k \chi_{E_k}(x)$$

$$\int_X |f + g|^p d\mu = \sum_{k=1}^K \int_{E_k} |f + g|^p d\mu = (f_k + g_k)^p \cdot \underbrace{\mu(E_k)}_{m_k}$$

$$x_k = f_k m_k^{\frac{1}{p}} \quad y_k = g_k m_k^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} ((A)!(B)!(C))$$

■

Доказательство. 1. f, g – ступенчатые и неотрицательные. Тогда существует общее допустимое разбиение $\{E_k\}_{k=1}^K \quad X = \bigsqcup_{k=1}^K E_k \quad f|_{E_k} \equiv f_k \quad g|_{E_k} \equiv g_k$ – числа, постоянные

$$f(x) = \sum_{k=1}^K f_k \chi_{E_k}(x) \quad g(x) = \sum_{k=1}^K g_k \chi_{E_k}(x)$$

$$\int_X |f + g|^p d\mu = \sum_{k=1}^K \int_{E_k} |f + g|^p d\mu = (f_k + g_k)^p \cdot \underbrace{\mu(E_k)}_{m_k}$$

$$x_k = f_k m_k^{\frac{1}{p}} \quad y_k = g_k m_k^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^K \int_{E_k} (f + g) d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^K f_k^p m_k \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^K g_k^p m_k \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \int_X f^p d\mu + \int_X g^p d\mu \end{aligned}$$

2. f, g – неотрицательные, измеримые. Они приближаются последовательностями ступенчатых.
3. f, g – комплекснозначные

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X (|f| + |g|)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \text{неравенство для модуля}$$

■

Замечание. Аналогично неравенство Гёльдера $p, q > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Определение 15.0.1.

$$\text{esssup}_x f = \inf \{ M \in \mathbb{R} : \text{для п.в. } x \in X]quad f(x) \leq M \}$$

существенный супремум.

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff f = g \text{ почти везде на } X \\ g \sim f &\implies \|f\|_p = \|g\|_p \end{aligned}$$

Определение 15.0.2.

$$L^p(X, \mu) = \{ [f] : \|f\|_p < +\infty \}$$

Утверждение 15.0.1. Если $\mu(X) < +\infty$, то $L^p(X, \mu)$ “убывает” по p

$$\begin{aligned} \tilde{p} > p \geq 1 &\implies L^{\tilde{p}}(X, \mu) \subseteq L^p(X, \mu) \\ L^\infty(X, \mu) &\subseteq \dots \subseteq L^2(X, \mu) \subseteq L^1(X, \mu) \\ C^0([a, b]) &\subseteq L^\infty([a, b]) \subseteq \dots \subseteq L^2([a, b]) \subseteq \dots \subseteq L^1([a, b]) \end{aligned}$$

Если $\mu(X) = +\infty$, то $L^2(\langle a, b \rangle) \not\subseteq \emptyset$

$$1. \quad f(x) = \chi_{(1, +\infty)}(x) \frac{1}{x} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$$

$$2. \quad f(x) = \chi_{(0, 1)}(x) \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$$

Утверждение 15.0.2. $f \in L^{\tilde{p}} \implies f \in L^p \quad \tilde{p} > p \geq 1$

Замечание. Факт:

1. $\forall p \in [1, +\infty] \quad L^p(X, \mu)$ полно, $C([a, b])$ плотно в $L^p([a, b])$
2. $C([a, b])$ плотно в $L^p(a, b) \quad \forall p \in [1, +\infty]$

Определение 15.0.3.

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \nu)$$

$$l^p = \left\{ \begin{aligned} &\{(x_k)_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < +\infty\} \\ &\{x = (x_k)_{k=1}^\infty - \text{огр} \\ &l^p \text{ "возрастает" по } p \end{aligned} \right.$$

Определение 15.0.4 (Скалярное произведение в $L^2(X, \mu)$). $\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot \bar{g} d\mu$

По неравенству Гёльдера этот интеграл конечен.

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Определение 15.0.5. $f_j \in L^2(X, \mu)$ – счётное множество, $f_i \neq 0$ в L^2 $f_j \perp f_k$ при $j \neq k$

Тогда $\{f_j\}$ называется ортогональной системой

$$\text{ОНС } \|f_j\| = 1$$

Пример. $L^2[-\pi, \pi]$ $f_j(t) = e^{ijt}$

$$\begin{aligned} \langle f_j, f_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} e^{-ikt} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} d\mu \\ &= \begin{cases} 2\pi & k = j \\ \frac{e^{i(j-k)t}}{i(j-k)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \end{cases} \end{aligned}$$