Конспекты по математическому анализу

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев, Константин Бац

2022 год, семестр 4

1 Повторение

Задачи и темы, которые мы будем обсуждать в новом семестре: многообразия, дифференциальные формы на них, криволинейные интегралы, интегралы от параметров, формула Стокса, формула Остроградского, γ-, β-функции.

Интеграл от функции произвольного знака это разность интегралов компонент. В случаях, когда оба слогаемых не бесконечные, такая разность имеет смысл.

Интеграл комплекснозначной функции это сумма интегралов вещественных компонент функции.

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

Монотонность интеграла.

$$\int_E (f_1 + f_2) \geqslant \int_E f_1 = \infty$$

Теорема 1 (Теорема Леви для последовательности)**.** Если f_n неотрицательные измеримые на E функции и $f_n \uparrow f$ возрастая сходится поточечно к f, то

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f d\mu$$

Теорема 2 (Теорема Леви для рядов)**.** Если f_n неотрицательные измеримые на E функции, то интеграл от ряда совпадает с суммой ряда из интегралов.

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — частичная сумма. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ ∎

Пример. Функция, которая не удовлетворяет условиям теоремы Леви:

$$f_k(x) = \xi_{[k,k+1]}(x)$$

$$\int_{[0,+\infty]} f_k(x) d\mu = \int_{[k,k+1]} f_k(x) d\mu = 1$$

$$\int f(x) d\mu = \int_{[0,+\infty]} 0 d\mu = 0$$

Замечание.

1. Для $f \in S(E)$ $|f| \in L(E,\mu)$ тогда и только тогда, когда $f \in L(E,\mu)$.
2. Если интеграл $\int_E f d\mu$ определен, то $\int_E |f| d\mu \geqslant |\int_E f d\mu|$.

Доказательство. ■

Отсутпление про суммируемую мажоранту.

Если функция имеет суммируемую мажоранту, то сама она является суммируемой.

... $L_1(E,\mu)$: две функиции эквивалентны по мере на E, если они совпадают почти везде на E. Другими словами, мера подмножества E, на котором функции принимают разные значения, равна нулю.

$$\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$$

.

Элементы $L_1(E,\mu)$ могут быть определены не на всём E целиком, но на множестве полной меры.

$$|f+g| \leqslant |f| + |g|$$

Эта норма невырожденная. Если $f \in S_+(E)$ и $\int f\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Теорема 3 (Счётная аддитивность интеграла)**.** Пусть $f \in S(E)$ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in ?$, определн $\int_E f d\mu$. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$$

Доказательство. ... ■

Теорема 4 (О приближении интеграла интегралом по множеству конечной меры)**.** Пусть мера E конечна и $f \in L(E,\mu)$ суммиурема. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_0 \subset E : \mu(E_0) < +\infty \text{и} \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu < \epsilon$$

Доказательство. Не умаляя общности $f \geqslant 0$ на E. Продложим f нулем вне E. $J(A) = \int_A f d\mu$— мера. $E_K = E\{f > \frac{1}{k}\}$, $E_* = E\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Непрерывность меры снизу E_k — множества конечной меры.

Научились приближать с любой точностью интеграл интегралом по множествам конечной меры. ■

Теорема Фато и теорема Лебега.

Теорема 5. Пусть f_k
$inS_+(E)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\underline{\lim}_{k \in \infty} \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$.

И если $f_k(x) \to f(x)$ на E, то $\int_E f(x) \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$

Теорема 6 (Теорема Лебега о мажорированной сходимости)**.** Пусть $f_n \to f$ сходится почти везде на E и $\Phi \in L(E,\mu)$: $\forall k \in \mathbb{N} |f_k| \leqslant \Phi$ почти везде на E. Тогда $f \in L(E,\mu)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f d\mu$. ...

Интеграл положительнозначной функции определяет меру. Интеграл функции это разность мер компонент. Такая разность называется заряд.

Теорема 7 (Фубини).

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_k) \\ y &= (y_1, \dots, y_m) \\ f(x,y) &\in \mathcal{L}\left(E, \lambda_{k+m}\right) \\ E &\in \mathcal{A}_{k+m} \end{aligned}$$

.

то:

1. Для почти всех $x \in \mathbb{R}^k \quad g(\cdot) = f(x, \cdot) \in \mathcal{L}(E(x, \cdot))$
2. $I(x) = \int_{E(x,\cdot)} f(x,y)\, d\lambda_m(y) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^k\right)$
3. $$\int_E f(x,y)\, d\lambda_{k+m}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{E(x,\cdot)} f(x,y)\, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_k(x)$$

.

Пример. $E = A \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{k+m} \quad 0 \in \mathbb{R}^n$
A – неизмеримое в $\mathbb{R}^k$
E – измеримо в $\mathbb{R}^{k+m}$
$Pr_x(E) = A$ – неизмеримое
Если $Pr_x(E)$ измеримо, то вместо интеграла по $\mathbb{R}^k$ можно написать интеграл по проекции

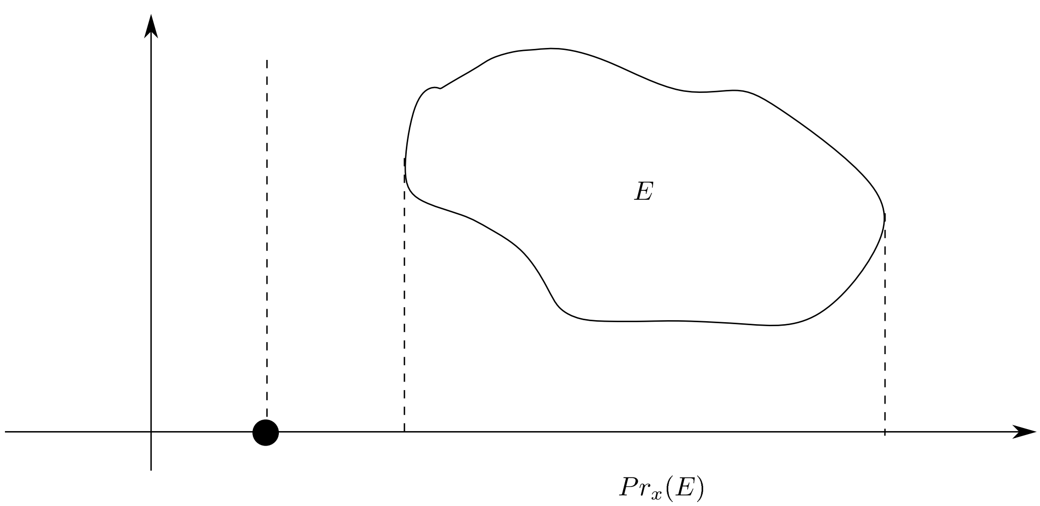

Рис. 1: Переход в интегралу по проекции

Замечание. Если E – компактное или открытое, то $Pr_x(E)$ измеримо.
$Pr_x(E) = \Phi(E)$, где $\Phi(x,y) \equiv x$ – отображение проектирования
Если E – компактное, то $\Phi(E)$ – компактное. Если открытое, то открытое.

Пример. 1.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy = I_1$$
$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx = I_2$$
.

Если интегралы существуют, то они антиравны.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} - 0dx = \operatorname{arctg} x|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Вывод: функция $f(x,y) \notin \mathcal{L}\left([0,1]^2, \lambda_2\right)$

2.

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} dy$$
$$\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx$$

$$f \in \mathcal{L}^2\left([-1,1]^2\right) \iff |f| \in \mathcal{L}\left([-1,1]^2\right) \implies |f| \in \mathcal{L}\left([-1,1]^2\right)$$

$$\iint\limits_{[0,1]^2} f(x,y)\, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} dx$$

<.....>

Утверждение 7.1. Семейство называется суммируемым, если функция суммируема

Утверждение 7.2. Если семейство $(a_x)_{x\in X}$ суммируемо, то $\{x : a_x \neq 0\}$ – не более чем счётное.

Доказательство. Не умаляя общности $a_x \geqslant 0$
$+\infty > \int_X a_x dv = \int_{X_0} a_x dv > \int a_x dv \geqslant \frac{1}{j}\nu\left(x_j\right) \implies \nu(x_j) < +\infty$
$X_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ – не более, чем счётное ■

Утверждение 7.3. $\sqsupset X$ – н.б.ч.с, Y – числовое множество, $(a_x)_{x\in X} \subseteq Y \quad \varphi : \mathbb{N} \to X$

Тогда (a_x) суммируемы $\iff \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ сходится абсолютно.

2 Замена переменной в интеграле по мере

2.1 "Пересадка" меры

$\Phi : X \to Y$. $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой.
$\mathcal{D} = \left\{B \subseteq Y | \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$
$\Phi^{-1}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}\left(B_k\right) \in \mathcal{A}$
$\nu\left(B\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(B\right)\right)$

Пример. $X = [0, 2\pi) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap [0, 2\pi)$
$\Phi(t \in X) = (\cos t, \sin t)$

Теорема 8 (Общая схема замены переменных). $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$
$\Phi : X \to Y$ – не портит измеримость.
$\sqsupset h \in S_+(X) : \forall B \in \mathcal{D}$

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} h d\mu$$

Тогда $\forall f \in f \in S\,(Y, \nu)$

$$\int_Y f d\nu = \int_X f\,(\Phi(x))\,h(x) d\mu(x)$$

Доказательство. $f \circ \Phi$ – измерима?
$X\,\{f \circ \Phi < a\} = \Phi^{-1}\,(Y\,\{f < a\})$. $Y\,\{f < a\} \in \mathcal{L}$, т.к. f измеримо. А тогда $\Phi^{-1}\,(\ldots) \in \mathcal{A}$
Совпадение интегралов:

1. f – ступенчатая, $f = \sum\limits_{k=1}^{K} C_k \chi_{D_k} \quad \{D_k\}$ – разбиение X

$$\int_Y f d\nu = \sum_{k=1}^{K} C_k \nu\,(D_k) = \sum_{k=1}^{K} C_k \int_{\Phi^{-1}(D_k)} h d\mu =$$

$$= \int_X \left(\sum_{k=1}^{K} C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)} <?> \right)$$

$$= \int_X f \circ \Phi(x) h(x) d\mu(x)$$

$$f \circ \Phi(x) = C_k \quad x \in \Phi^{-1}(D_k)$$

$$\sum_{k=1}^{K} C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)}(x) = C_k.$$

2. $f \in S_+(Y) \quad \exists \{g_j\}$ – ступенчатая небобратимая $g_i \uparrow f$

$$\int_Y f d\nu = \lim_{j \to \infty} \int_Y g_j d\nu = \lim_{j \to \infty} \int_X g_j\,(\Phi(x))\,h(x) d\mu$$

$$= \int_X f\,(\Phi(x))\,h(x) dmu(x).$$

3. Общий случай:
   $f = f_+ + f_-$

$$\int_Y f d\nu = \int_Y f_+ - \int_Y f_- d\mu = \int_X f_+\,(\Phi(x))\,h(x) d\mu(x) - \int_Y f_-\,(\Phi(x))\,h(x) d\mu(x)$$

$$= \int f\,(\Phi(x))\,h(x) d\mu(x) \quad (f\,(\Phi)\,h)_+ = f_+\,(\Phi)\,h.$$

∎

Следствие 8.1. $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$
$h \in S_+(X); \quad \Phi : X \to Y \quad \Phi^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}$
и выполняется условие теоремы общей замены переменной. Тогда $\forall E \subseteq \mathcal{D} \quad f \in S\,(E, \nu)$:

$$\int_E f(y) d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(E) f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)}$$

Рассмотрим продолжение нулём f с E на Y

$$\int_E f d\nu = \int_Y (y)\chi_E(y)d\nu(y) = \int_X f\left(\Phi(x)\right) \underbrace{\chi_E\left(\Phi(x)\right)})\chi_{\Phi^{-1}(E)}h(x)d\mu(x) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f\left(\Phi(x)h(x)d\mu(x)\right).$$

Следствие 8.2 (частный случай 1)**.** Если $h \equiv 1$ в условии теоремы.

$(\forall E|in\mathcal{D} \quad \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\mu = \mu\left(\Phi^{-1}\left(E\right)\right))$

мера ν при этом называется образом меры μ

$$\forall f \in S(E) \quad \int_E f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi(x) d\mu(x)$$

Следствие 8.3 (Частный случай 2)**.** $X = Y \quad \Phi = id \quad \nu(E) = \int_E h(x)d\mu(x)$

<..>

Теорема 9. $\sqsupset (X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с мерой, $\Phi : X \to Y \quad h \in S_+(X)$

Следующие утверждения равносильны:

1. h плотность ν относительно μ
2. $\forall E \in \mathcal{A}$
$$\inf_E h\mu E \leqslant \nu(E) \leqslant \sup_D h\mu(E)$$

Доказательство. $I \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$

Т.о. $I \implies II$ ■

Теорема 10 (Критерий плотности)**.** $\sqsupset (X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, μ, ν – опр. (?) $\mathcal{A}$

$h \in S_+(X)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. h – плотность меры ν относительно μ $(\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu)$
2. $\forall E \in \mathcal{A}$
$$\inf_E h \cdot \mu(E) \leqslant d(E) \leqslant \sup_E h \cdot \mu(E)$$

Если $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \lambda_n)$, тогда $1 \iff 3$:

3
$$\forall P \in \mathcal{P}_n \quad \inf_P h \cdot \mu(P) \leqslant \nu(P) \leqslant \sup_P h \cdot \mu(P)$$

Доказательство. План: $1 \implies 2 \implies 3$

$2 \implies 1?$ $\not\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) \stackrel{?}{=} \int_E h d\mu$

$$E = E\left\{h = 0\right\} \coprod E\left\{h = +\infty\right\} \coprod E\left\{0 < h < +\infty\right\}$$

$$\nu(E) = \nu(E\left\{h = 0\right\}) + \nu(E\left\{h = +\infty\right\}) + \nu(E\left\{0 < h < +\infty\right\})$$

$$\nu(E\left\{h = 0\right\}) \leqslant \sup_{E\{h=0\}} = 0 = \int_{E\{h=0\}} h d\mu$$

$$\nu(E\left\{h = +\infty\right\}) \leqslant h \cdot \mu(E) + \infty \cdot \mu(E) = \int_{E\{h=+\infty\} h d\mu}.$$

$\nless \dfrac{1}{q} \in (0,1),\ q > 1 \quad (0,+\infty) = \bigvee k \in \mathbb{Z}[q^k, q^{k+1})$
$E\{h \in (0,+\infty)\} = \bigvee E\{q^k \leqslant h < q^{k+1}\}$
$q^k\mu(E_k) \leqslant \nu(E_k) \leqslant q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$
$q^k\mu(E_k) \leqslant \int h d\mu \leqslant q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$
$\dfrac{\nu(E_k)}{q} \leqslant q^k \cdot \mu(E_k) \leqslant \int_{E_k} h d\mu = q \cdot q^k \mu(E_k) \leqslant q \cdot \nu(E_k)$
Просуммируем это по всем k.
$\dfrac{1}{q}\nu(E) = \int_E h d\mu \leqslant q \cdot \nu(E),\ \ q \to 1 \implies \nu(E) \leqslant \int_E h d\mu \leqslant \nu(E) \implies \nu(E) = \int_E h d\mu$
$\nless \widetilde{\nu}$ – стандартное продолжение <...> (нужно дополнить) ■

Теорема 11. $\sqsupset \Phi$ – диффеоморфизм множеств $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad G \underset{\Phi}{\to} O$

Тогда $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad E \subseteq O$

$$\lambda_n(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \left|\det \Phi'\right| d\lambda_n$$

$$\lambda_n(O) = \int_G \left|\det \Phi'\right| d\lambda_n$$

Если $O \sim \widetilde{O} \quad G \sim \widetilde{G} \quad \left(\lambda_n(O \backslash \widetilde{O}) = \varnothing \ldots\right)$, то

$$\lambda_n(\widetilde{O}) = \int_{\widetilde{G}} \left|\det \Phi'\right| d\lambda_n$$

Замечание.

$$\nu(P) \leqslant \sup_P h d\mu(P) \text{ – от противного}$$
$$\implies \exists \text{ ячейки } P_0 : \quad \nu(P) > M \cdot \mu(P) = \sup_{P_0} h \cdot \mu(P)$$
$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + d_{x_0}\Phi(x - x_0) + o(x - x_0)$$
$$x \approx x_0 \qquad \Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d_{x_0}\Phi(x - x_0)$$
$$.$$

Если Q – малая ячейка, то

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \approx \lambda_n d_{x_0}\Phi(Q) = \left|\det \Phi'_{x_0}\right| \lambda_n(Q)$$

Следствие 11.1. Если $\Phi : G \to O$ – диффеоморфизм, $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad \widetilde{G} \sim G, \widetilde{O} \sim O \quad f \in S(O)$, то

$$\int_{\widetilde{O}} f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\widetilde{G}} f(\Phi(u)) \left|\det \Phi'(u) d\lambda_n(u)\right|$$

Пример. Полярные координаты.

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

$\Phi : (r,\varphi) \to (x,y)$,

$([0,+\infty) \times [-\pi,\pi])) \to \mathbb{R}^n$,

$(0,+\infty] \times (-\pi,\pi))) \to \mathbb{R}^n \backslash (-\infty, 0])$.

$\det \Phi' = r; \quad E = \mathbb{R}^2 :$

$$\iint\limits_E f(x,y) dx dy = \iint\limits_{\Phi^{-1}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

Пример (интеграл Эйлера-Пуассона).

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \\
I\cdot I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ys} \qquad\qquad = \iint\limits_{\{x\geqslant 0, y\geqslant 0\}} e^{-x^2+y^2}dxdy \\
&= \iint\limits_{\left\{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2} \quad r>=0\right\}} e^{-r^2} r dr d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-r^2}}{-2}\,|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$
I = \int_0^{+\infty} r^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
$$

.

Пример. Цилиницрические координаты

$$
\begin{aligned}
r\cos\varphi &= x \\
r\sin\varphi &= y \\
h &= z
\end{aligned}
$$

.

$\Phi : (r,\varphi,h) \to (x,y,z) \quad \Phi : (0,+\infty)\times(-pi,pi)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\backslash\{(x,0,z)|\mid x\leqslant 0\}\}$
$|\det\Phi'| = r$
$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Phi^1(E)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\cdot r dr d\varphi dh$

Пример. Сферические координаты
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$
\begin{aligned}
r\cos\varphi\cos\psi &= x \\
r\sin\varphi\cos\psi &= y \\
r\sin\psi\varphi\sin\psi &= y
\end{aligned}
$$

$\det\Phi' = r^2\cos\varphi$
Можно обобщить на $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
r &= \|x\| \\
x_1 &= r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\dots\cos\varphi_1 \\
&\dots \\
x_{n-2} &= r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-3} \\
x_{n-1} &= r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2} \\
x_n &= r\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}
$$

.

Пример.

$$
\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant\mathbb{R}^2 \\ x^2+y\leqslant z^2 \\ z\geqslant 0}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz
$$

Преобразовать используя:

- Цилиндрические координаты

  Перепишем множество интегрирования в новых координатах: $\begin{cases} r^2 + h^2 \leqslant R^2 \\ r^2 \leqslant h^2 \implies r \leqslant h \\ h \geqslant 0, r \geqslant 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\substack{r^2+h^2 \leqslant R^2 \\ r \leqslant h \\ h \geqslant 0, r \geqslant 0}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right) r dr d\varphi dh \\ &= \iint\limits_{\substack{\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}}} r \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right) dr \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} r dr \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right) dh \end{aligned}$$
.

- Цилиндрические координаты (второй вариант)

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h r f dr + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} r f dr$$
.

- Сферические координаты

  $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \\ \operatorname{tg}^2\psi \geqslant 0 \\ \sin\psi \geqslant 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant r &\leqslant R \\ r^2\cos^2\psi &\leqslant r^2\sin^2\psi \\ r\sin\psi &\geqslant 0 \end{aligned}$$
.

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_E f\left(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\right) r^2\cos\psi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R f(\ldots) r^2 \cos\psi dr \end{aligned}$$
.

Пример.

$$\iiiint_E z dx dy dz$$

E :

$$\begin{aligned} t^2(x^2+y^2) &\leqslant z^2 \\ 0 \leqslant z \leqslant t &\leqslant 3 \end{aligned}$$
.

$$
\begin{aligned}
\iiiint_E z dx dy dz &= \iint\limits_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} dz dt \iint\limits_{\{x^2+y^2\leqslant \frac{4z^2}{t^2}\}} z dx dy \\
&= \iint\limits_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} dz dt z\pi \cdot \frac{4z^2}{z^2} \\
&= 4\pi \iint\limits_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} \frac{z^3}{t^2} dz dt \\
&= 4\pi \int_0^3 \frac{1}{t^2} dt \int_0^t z^3 dz = \frac{4\pi}{4}\left(\int_0^3 t^2 dt\right) = \pi \cdot 9
\end{aligned}
$$

.

3 Мера Лебега–Стилтьеса

$\sqsupset g(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}$ и непрерывна слева $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} g(x) \equiv g(x_0)\right)$

Задача 1. Если $h(x)$ – произвольная возрастающая функция, то её можно превратить в непрерывную слева исправлением нбчс количества точек.

$\exists \uparrow$ и непрерывная слева $g(x) = h(x)$ всюду кроме точек разрыва $h(x)$
$g(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} h(x)$

Определим $\mu_g([a,b]) = g(b) - g(a) \geqslant 0$. Так же верно, что μ_g обладает счетной аддитивностью на $\mathcal{P}_1$ (доказывается так же, как в случае с мерой Лебега) $\implies$ μ_g – мера на $\mathcal{P}_1$

Стандартное продолжение μ_g, которое также обозначается μ_g называется мерой Лебега-Стилтьеса, порождённой функцией g

$$
\begin{aligned}
\mu_g(\{c\}) &= \mu_g\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} [c, c+\frac{1}{j}]\right) \\
&= \lim_{j\to\infty} \mu_g\left([c, c+\frac{1}{j}]\right) \\
&= \underbrace{\lim_{j\to\infty} g(c+\frac{1}{j})}_{=g(c+0)} - g(c) = g(c+0) - g(c)
\end{aligned}
$$

.

$\implies$ Если c – точка непрерывности, то $\mu_g(\{c\}) = 0$
$\mu_g([a,b]) = \mu_g([a,b]) + \mu_g(\{b\}) = g(b) - g(a) + g(b+0) - g(b) = (g(b+0) - g(a-0))$
$\mu_g((a,b)) = \mu_g([a,b]) - \mu(\{a\}) = g(b) - g(a) - (g(a+0) - g(a)) = g(b) - g(a+0)$
$\mu_g((a,b]) = g(b+0) - g(a+0)$

Определение 1. Пусть $\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k \delta_{a_k}, \quad h_k \geqslant 0, \quad \delta_a(E) = \begin{cases} 1, & a \in E \\ 0, & a \notin E \end{cases}$, тогда μ — дискретная мера.

$E, E_j \in 2^{\mathbb{R}} \quad E = \bigvee\limits_{j=1}^{\infty} E_j \implies \delta_{a_k}(E) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \delta_{a_k}(E_j)$

$$
\begin{aligned}
\mu(E) = \mu(\bigvee_{j=1}^{\infty} E_j) &= \sum_k \sum_j h_k \delta_{a_k}(E_j) \\
&= \sum_j \mu(E_j)
\end{aligned}
$$

.

Последний переход в равенстве по теореме Тонелли.

Замечание. $\sqsupset \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$
$\forall [a,b] \qquad \sum\limits_{k: a_k \in [a,b]} h_k < +\infty$

Пример. Если $\{a_k\}$ – дискретно (без точек сгущения на $\mathbb{R}$), то условие автоматически выполняется, т.к. перечесечения a_k-ых с промежутком будет конечно, а значит и сама сумма будет конечна
$A = \mathbb{Q} \quad h_k = \dfrac{1}{2^k}$

Определение 2 (функция Хэвисайда)**.**

$$
\Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x \leqslant 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}
$$

$\sqsupset x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall C \in \mathbb{R}$

$$
g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cdot (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) + C
$$

1. $g(x)$ возрастает
2. $x \in [a,b] \quad \sum\limits_k h_k(\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \leqslant \sum\limits_{a_k : I_{x,x_0}} h_k$

   Разность Тет ненулевая, если a_k находится между x и x_0 – I_{x,x_0}

Утверждение 11.1. $A = \{a_k\}_k$

1. $g \in C\left(\mathbb{R} \backslash A\right)$
2. Непрерывность слева на A

Доказательство. 1. $\sqsupset x \in \mathbb{R} \backslash A \quad \sqsupset (a,b) \ni x$

$\nless \forall \varepsilon > 0 \qquad \sum\limits_{k: a_k \in [a,b]} h_k < +\infty \implies \exists K : \sum\limits_{\substack{a_k \in [a,b] \\ k \geqslant K}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}.$

$g_k(x) = h_k\left(\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)\right)$ — локально постоянны в точке x ($\exists V_\delta(x) \; : \; g_k \mid_{V_\delta(x)} \equiv const$ для $k = 1, \ldots, k$)

Не умаляя общности $[a,b] \supseteq V_\delta(x)$

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{x}) - g(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x-a_k) - \Theta(x-a_k)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(\widetilde{x}-a_k) - \Theta(x_0-a_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x-a_k) - \Theta(\widetilde{x}-a_k)\right) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{K} h_k \left(\Theta(x-a_k) - \Theta(\widetilde{x}-a_k)\right)}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x-a_k) - \Theta(\widetilde{x}-a_k)\right)}_{=\frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned}
$$

.

$\Longrightarrow$ Непрерываность

Если $x = a_k \quad g(x) = g_{k_0}(x) + \underbrace{\sum_{k \neq k_0} g_k}_{\text{непрерывна как в пред. случае}}$

■

$$
\begin{aligned}
\mu_g\left([a,b]\right) &= g(b) - g(a) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(b-a_k) - \Theta(a-a_k)\right) \qquad a \leqslant a_k \leqslant b \\
&= \sum_{k: a \leqslant a_k < b} h_k = \mu([a,b]])
\end{aligned}
$$

.

μ и μ_g совпадают на совокупности всевозможных промежутков.

Определение 3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Функция f называется локально суммируемой на $\mathbb{R} \iff \forall\, [a,b] \qquad f\Big|_{[a,b]} \in \mathcal{L}(\lambda_1)$.

Определение 4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Функция f называется абсолютно непрерывной, если существует локально суммируемая функция $h(x)$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$
g(x) = \int_{x_0}^{x} h(x) d\lambda
$$

(интеграл Лебега. Если $x < x_0$, то $\int_{x_0}^{x} h\, d\lambda = -\int_{[x,x_0]} h\, d\lambda$)

Если h непрерывна в точке x, то $g(x)$ дифференцируема в точке x и $g'(x) = h(x)$. Доказательство – смотри теорему Барроу…

Если $h(x) \geqslant 0$, то $g(x) \nearrow$

Функция $g(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Следует из абсолютной непрерывности интеграла.

Теорема 12 (воспоминание)**.**

$$
\mu(E) = \int_{\Phi^{-1}} h d\mu \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \inf_E h\mu(E) \leqslant \nu(E) \leqslant \sup_E h\mu(E)
$$

Замечание.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x-a_k) - \Theta(x_0 - a_k)\right)$$

Для этой меру нужно было фиксировать открытый интервал Δ, что

$$\forall [a,b] \subseteq \Delta \qquad \sum_{k : a_k \in [a,b]} h_k < +\infty$$

$$\begin{aligned} g(a_k+0) - g(a_k-0) &= h_k \left(\Theta(a_k - a_k + 0) - \Theta(x_0 - a_k + 0) - \Theta(a_k - a_k - 0) + \Theta(x_0 - a_k - 0)\right) \\ &= h_k \end{aligned}$$

.

Утверждение 12.1. Если $\nu = \sum\limits_k h_k \delta_{a_k}$, то ν совпадает с μ_g на $\mathcal{A}_{\mu_g}$ при условии (*).

Доказательство. Если хочется скорее сослаться на теорему об единственности, то можно сделать так: Рассмотрим $[a,b)$. $\nu([a,b)) = \sum\limits_{k \,:\, a_k \in [a,b)} h_k$.

$$\mu_g([a,b)) = g(b) - g(a) = \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k \left(\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)\right) = \sum_{k \,:\, a_k \in [a,b)} h_k.$$

Если $\{a_k\}_k$ — конечное множество, то вопросов с суммируемостью не веознкает.

$$g(x) = \sum_k h_k \cdot \Theta(x - a_k) + C$$

■

Замечание. Локально суммируемая функция – это такая, что она будет на любом шаре суммируемой по Лебегу

Теорема 13. $g(x)$ – абслолютно непрерывная $\iff \exists h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)\, \exists x_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$$(x) = \int_{x_0}^{x} h(x) d\lambda + C$$

По теореме Барроу $g(x)$:

- $g(x) \in C(\mathbb{R})$,
- $g(x)$ дифференцируема в точках ... функции $h(x)$.

Доказательство.

- Если $x_1 \in \mathbb{R}$

$$g(x) - g(x_1) = \int_{x_1}^{x} h(x) dx$$

$\exists \delta_0 > 0, x \in V_{\delta_0}(x_1), \quad h \in \mathcal{L}\left(V_{\delta_0}\right)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta (\leqslant \delta_0) > 0 : \int_E h(x) d\lambda < \varepsilon \forall E \subseteq V_{\delta_0}(x_1) : \lambda_1(E) < \delta$

$\implies$ Если $|x_1 - x| < \delta \quad \left|\int_{x_1}^{x} h(x) dx\right| \leqslant \varepsilon$

- Пусть x_1 — точка непрерывности для $h(x)$. $h(x) = h(x_1) + \underbrace{\alpha(x - x_1)}_{o(1) \text{ при } x \to x_1}$

$$\frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^{x} h(x_1) + \alpha(x - x_1) dx = h(x_1) + \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^{x} \alpha(x - x_1) dx \leqslant \varepsilon(x - x_1)$$

Если “x остаточно близок к x_1”

■

Замечание. В частности, если $h(x) \in C(\mathbb{R}) \implies g \in C^1(\mathbb{R})$ и $g'(x) \equiv h(x)$

Замечание.
$$\int_E f d\nu = \sum_{k\,:\,a_k \in E} h_k f(a_k) = \sum_{k\,:\,a_k \in E} f(a_k) \cdot \text{ скачок } g(a_k)$$

Утверждение 13.1. $\sqsupset g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda_1(x) + C \quad h(x) \geqslant 0 \quad h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)$ абсолютно непрерывная возрастающая функция.

Тогда $\int_E f d\mu_g = \int_E f(x) h(x) d\lambda(x)$.

В частности, $\forall$ возрастающей $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

$$\int_E f d\mu_g = \int_E f \cdot g'(x) d\lambda(x) \left(= \int_E f \cdot dg \right).$$

Доказательство. $\nleftarrow \nu(E) = \int_E h d\lambda_1$.

$$\mu_g(\langle a, b\rangle) = \mu_g([a, b)) = g(b) - g(a) = \int_a^b h(x) d\lambda_1 = \nu([a, b)) = \nu(\langle a, b\rangle).$$

μ_g и ν совпадают на открытых. Если K – компакт, $K = B \backslash (B \backslash K)$

$\nu(K) + +\nu(B \backslash K) = \nu(B) \qquad \mu_g(K) = \nu(K) = \nu(B) - \nu(B \backslash K)$

$\sqsupset E$ – λ_1-мера O

$\implies \exists \delta > 0 \exists$ открытое $G : E \subseteq G$ и : $\lambda_1(G) < \delta$

$\implies \int |_{G_0}$ – абсолютно непрерывное $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \lambda_1(\widetilde{E}) < \delta \quad \widetilde{E} \subseteq G$

$\int_{\widetilde{E}} h < \varepsilon \quad \widetilde{E} = G \implies \nu(G) < \varepsilon \implies \mu_g(G) < \varepsilon\, \varepsilon - \forall \implies \nu(E) = \mu_g(E) = 0$

Если E — неограничено λ_1–меры $0 \implies \exists$ ограниченное $E_j : E = \bigcup E_j$. $\forall i \in \mathbb{N}\ \lambda_1(E_j) = 0 \implies \nu(E_j) = \mu_g(E_j) = 0 \implies \nu(E) = \mu_g(E)$.

Дальше можно применить теорему о плотности меры. Применяю общую мхему замены переменной все доказывается. ∎

Задача 2. 1. $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Найти:

(a) $\sup \left\{ \mu_g(I) \;:\; I = \langle a, b\rangle,\ \lambda_1(I) \leqslant \delta \right\},\ \delta > 0.$

(b) $\sup \left\{ \lambda_1(I) \;:\; I = \langle a, b\rangle,\ \mu_g(I) \leqslant \delta \right\},\ \delta > 0.$

2. $g(x) = \operatorname{arctg} x + \Theta(x - 1)$

   (a) Для $\delta = 1$

Решение. $\mu_g(I) = g(b) - g(a) = \int_I g'(t) dt = \int_{[a,b]} \frac{dt}{1+t^2}$

1. (a)

$$\sup\{\mu_g(I)\} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + t^2}$$

.

∎

Пример. Пример меры Лебега–Стилтьеса не евклидовой, не дискретной, не абсолютно непрерывной:

$$C_0 = [0,1]$$
$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$
$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$
$$C_{k+1} \subseteq C_k \quad C_k - \text{компакт}$$
$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k - \text{компакт}$$
$$\lambda_1(C) = \lambda_1([0,1]) - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \ldots - \frac{2^{k-1}}{3^k} = 0$$
.

$\psi(x) = \frac{1}{3}x \quad \Theta(x) = 1 - x$

$$\Phi = \{[0,1] \cap C, \psi(C), \Theta\psi(C), \psi\psi(C), \psi\Theta(C), \Theta\psi\psi(C), \Theta\psi\Theta\psi(C), \ldots\}$$

– полукольцо

$\mu(C) = 1 \quad \mu(P) = \frac{1}{2^k}$ – если P есть результат применения k штук ψ и Θ

$\measuredangle\mu$ – стандартное продолжение

4 Интегралы, зависящие от параметра

Пример.

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0, p \in \mathbb{R}; \quad \int_a^b f(x,y)dx, \quad \int_\alpha (y)^\beta(y) f(x,y)dx.$$

Пока что мы будем рассматривать интегралы, зависящие от параметра y по фиксированному промежутку: $I(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x)$.

Пусть у нас есть пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f(;\mu) \in \mathcal{L}(X,\mu)$. $Y \subseteq \overline{Y}$.

Для чего это нужно? Бывает, что просто сформулированные задачи имеют ответ в виде интеграла с параметром. Бывает, что введение параметра упрощает вычисление интеграла.

Утверждение 13.2. f уовлетворяет условию Лебега локально относительно y_0, y_0 — параметр, если $\exists$ открытое $V(y_0)$ в $\overline{Y}$ и $\Phi_{(x)} \in \mathcal{L}(X,\mu)$ $\forall y \in V(y_0)$ для почти всех $x \in X$.

Утверждение 13.3. Пусть у нас есть пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\overline{Y}$ — метрическое пространство, $Y \subseteq \overline{Y}$, y_0 — предельная точка для Y. Почти везде $f(x,y) \to g(x)$ при $y \to y_0$, и $f(x,y)$ удовлетворяет локаольно условию Лебега относительно y_0.

Тогда $g(x) \in \mathcal{L}(X,\mu)$ и

$$\lim_{y \to y_0} \int_X f(x,y)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x)$$

Доказательство. Так как y_0 — предельная, $\exists \{y_k\} \subseteq Y \to y_0$. $f_k(x) = f(x, y_k)$, $y_k \in V(y_0) \implies |f_k(x)| \leqslant \Phi(x) \implies$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, $g(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x,y_k) \in \mathcal{L}(X,\mu)$ и

$$\int_X g(x)d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} f(x,y_k)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f(x,y_k)d\mu.$$

$$I(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x); \quad \lim_{k\to\infty} I(y_k)\ \forall \text{ последовательности } y_k \to y_o \implies \exists \lim_{y \to y_0} Y(y).$$

∎

Пример. $\sqsupset p_0 > 0 \quad \sqsupset$

$\forall p \in V_\delta(p)$

$x \in (0,1] \quad x^{p-1}e^{-x} \leqslant x^{p_0-\delta}e^{-x}$

$x > 1 \quad x^{p-1}e^{-x} \leqslant x^{p_0+\delta}e^{-x}$

$\Phi(x) = \begin{cases} x^{p_0-\delta}e^{-x} & , x \in (0,1] \\ x^{p_0+\delta}e^{-x} & , x > 1 \end{cases} \quad \int_0^{+\infty} x^q e^{-x}dx$ – сходится для любого

Замечание. Если в условиях предыдущего утверждения $f(x,y)$ — непрерывна по y в точке y_0, то наш интеграл $I(y)$ тоже будет непрерывен в точке y_0.

Определение 5. Пусть имеется пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$, y_0 — предельная точка для $Y \subseteq \overline{Y}$ $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$ на X при $y \to y_0$ если $\forall \varepsilon > 0 \,\exists$ окрестность $V(y_0)$:

$$\forall x \in X \quad \forall y \in V(y_0) \quad |f(x,y) - g(x)| < \varepsilon \iff \sup_{x \in X} |f(x,y) - g(x)| \underset{y \to y_0}{\to} 0.$$

Пример. 1. (хороший) $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \quad y \to +\infty$

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{1+y^n} \implies y \to \infty \sup |f(x,y)| = \frac{1}{1+y^n} \underset{y\to\infty}{\to} 0.$$

Сходимость есть и равномерная сходимость тоже есть.

2. (плохой) $xye^{-xy} \underset{y \to 0}{\to} 0$. Сходимость к нулю есть, а

$$\sup x > 0 xye^{-xy} \geqslant f(\frac{1}{y}, y) = \frac{1}{e} \nrightarrow 0 \implies \text{равномерно не сходится.}$$

Утверждение 13.4. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu(X) < +\infty$.

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g(x), \quad f(x,y) \in \mathcal{L}(X, \mu).$$

Тогда $g(x) \in \mathcal{L}(X,\mu)$ И

$$\lim_{y \to y_0} \int_X f(x,y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

Доказательство. Для $\varepsilon = 1 \quad \exists$ окрестность $V(y_0)$: $\forall x \in X, y \in V(y_0) \quad |f(x,y) - g(x)| \leqslant 1$:

$|g(x)| \leqslant |f(x,y)| + |g(x) - f(x,y)| \leqslant |f(x,y)| + 1 \implies g \in \mathcal{L}(X,\mu)$ ∎

Утверждение 13.5. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с метрой $y \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $\quad y_0$ — предельная точка для Y. Пусть $f(x,y)$, $\quad f'_y$ — удовлетворяет условию Липшица локально, $f : X \times Y \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Тогда $I(y) = \int_X f(x,y) d\mu(x)$ дифференцируема в точке y_0 и

$$I'(y_0) = \int_X f'_y(x,y) d\mu(x).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} I'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{I(y) - I(y_0)}{y - u_0} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_X \underbrace{(f(x,y) - f(x,y_0))}_{f'_y(x, y_0 + \Theta(y-y_0)),\ \Theta \in (0,1)} \quad d\mu(x) \\ &= \lim \int_X f'_y(x, y_0 + \overset{C(y)}{\Theta}(y - y_0)) d\mu(x) \\ &\underset{\text{Утв}}{=} \int_X \lim(\ldots) d\mu(x) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x). \end{aligned}$$

$y \in V_\delta(y_0)$ – из условия Липшица для $f'_y \implies C(y) \in V_\delta(y_0)$

$$\implies \left|\underbrace{f'_y(x, C(y))}_{f'_y(x,y_0)}\right| \leqslant \Phi(x) \qquad \blacksquare$$

Пример. $\Gamma(p) \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} d\mu$.

$$f'_p(x,p) = (p-1)x^{p-2}e^{-x}, \; p-2 > -1 \implies p > 1.$$

При $p > 1$

$$\Gamma'(p) = (p-1)\int_0^{+\infty} x^{p-2}e^{-x} = (p-1)\cdot\Gamma(p-1) \implies \Gamma'(p) = (p-1)\cdot\Gamma(p-1).$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} \frac{('x^p)}{p} = \frac{1}{p}\left(x^p e^{-x}\Big|_o^\infty - \int_o^{+\infty} x^p('e^{-x})dx\right) = \frac{1}{p}\cdot(p+1).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} = 1$$
$$\Gamma(2) = 1$$
$$\Gamma(3) = 2$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}.$$

5 Γ-функция Эйлера

Определение 6. $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$
$p > 0$

Свойство 1.

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad \forall p > 0$$

– формула приведения

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

– определение для Γ в $\mathbb{R}\backslash(\mathbb{Z}_-)$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(p+1) = p!$$
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$
$$\Gamma(\frac{2n+1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}(\text{по индукции})$$
.

Замечание (Дифиренцирование Γ–функции)**.**

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{p-1}e^{-x}(\ln x)^k}_{f_k(x,p)}dx.$$

$\frac{\partial f_k(x,p)}{\partial p} = f_{k+1}(x,p)$

Замечание. Локальное условие Лебега $\forall p_0$?

$$\exists V_{p_0} : \exists \Phi(x) \in \mathcal{L}\left((0,+\infty) : |f_k(x,p)| \leqslant \Phi(x)\right).$$

$$x^{p-1} \leqslant x^{2p_0-1} + x^{\frac{p_0}{2}-1}$$
$$\Phi(x) = \left(x^{2p_0-1} + x^{\frac{p_0}{2}-1}\right) e^{-x} \left|\ln x\right|^k.$$

Φ – мажоранта для $f_l(x,p) \forall p \in V_{p_0}$

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \left|\ln x\right|^k dx < +\infty$$
$$x^{p-1} |\ln x|^k = o(e^{\frac{x}{2}}) \quad x \to +\infty$$
$$x^{p-1} e^{-x} \left|\ln x\right|^k \sim x^{p-1} \left|\ln x\right|^k = o(x^{p-1-\alpha})$$
$$|\ln x|^k = o(x^{-\alpha}), \quad \alpha > 0$$
$$x \to 0^+ \quad p - \alpha > 0.$$

Получается, что Γ – класса C^∞ там, где она определена. $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}_-)$

Геометрические характеристики γ–функции и элементарные факты

Свойство 2 (Геометрические свойства)**.**
1. $\gamma(p)$ строго выпукла на любом отрезке, лежащем в её области определения
2. На $(0,+\infty)$ $\Gamma(p)$ имеет единственный экстремум в точке $c \in (1,2)$
3. $p \to 0 \quad \Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$

Доказательство. $\Gamma^{(2)}_{p^2}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} ln^2 x dx > 0 \implies 1$
$\Gamma(1) = 0! = 1 = 1! = \Gamma(2) \implies$ по теореме Роля $\exists c \in (1,2): \quad \Gamma'(c) = 0$. c – точка минимума
$\Gamma'(p) \neq 0$ при $p \neq c, p > 0$ ∎

Замечание. Аналог формулы стрилинга. При $p \to \infty$ верно, что $\Gamma(p) = \sqrt{2\pi p}\left(\frac{p}{e}\right)^p e^{\frac{\Theta}{12}}$, где $\Theta \in (0,1)$.

6 Бета-функция

Определение 7. $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$
$B(p,q) = B(q,p) \forall p,q > 0$
$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Теорема 14 (формула Эйлера-Гаусса)**.**

$$\Gamma(p) = \lim_{k\to\infty} \frac{l^p \cdot k!}{p(p-1)\dots(p+k)} \quad \forall p \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}_-.$$

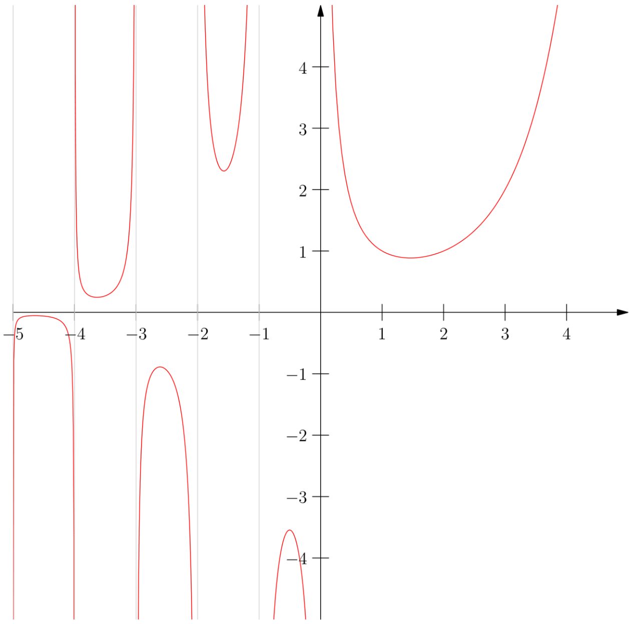

Рис. 2: gamma-function

Доказательство.

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \left| t = e^{-x}, x = -\ln t, dx = -\frac{dt}{t} \right| \int_0^1 (-\ln t)^{p-1} t \left(-\frac{dt}{t} \right) = \int_0^1 (-\ln t)^{p-1)}$$

$$= \int_0^1 \left(\lim_{k\to\infty} \underbrace{k(1 - t^{1/k})}_{g(k)} \right)^{p-1} dt ==$$

$$g'(k) = (1 - t^{1/k}) + k(-t^{1/k}) \cdot (\ln t) \cdot \left(+\frac{1}{k^2} \right)$$

$$= t^{\frac{1}{k}} \left(t^{-\frac{1}{k}} - 1 + \frac{\ln t}{k} \right)$$

$$= \begin{cases} f \uparrow & \text{, если } p \geqslant 1 \implies \text{Применим теорему Леви} \\ f \downarrow & \text{, если } p \in (0,1) \implies g(k) \leqslant g(1) \end{cases}$$

$$== \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \left(k(1 - t^{\frac{1}{k}}) \right)^{p-1} dt = \lim_{k\to\infty} k^{p-1} \int_0^1 s^{p-1}(-k)(1-s)^{k-1} ds = \lim_{k\to\infty} k^p B(p,k)$$

$$= \lim_{k\to\infty} k^p \frac{\Gamma(p)\Gamma(k)}{\Gamma(p+k)} = \lim_{k\to\infty} k^p \cdot (k-1)! \frac{\Gamma(p)}{(p+k-1)(p+k-2)\dots p\Gamma(p)}$$

$$= \frac{k^p k!}{p(p+1)\dots(p+k)} \cdot \underbrace{\frac{p+k}{k}}_{\to 1}.$$

Для $p < 0$ по индукции по m $\quad p \in (-(m+1), -m)$
Если формула верна для $p+1$, то

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{1}{p} \lim_{k\to\infty} \frac{k^{p+1} \cdot k!}{(p+1)(p+2)\dots(p+k+1)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^p \cdot k!}{p(p+1)\dots(p+k)} \cdot \underbrace{\frac{k}{p+k+1}}_{\to 1}.$$

■

Лемма 14.1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \in C([a, +\infty))$ и f ограничена на $([a, +\infty))$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx \in C([0, +\infty)).$$

Доказательство. $A \in [a, +\infty)$

$$\int_A^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx = \left| F(x) = \int_A^x f(t)dt \right| = (F(x) - F(A)) \cdot e^{-xy} \mid_A^{+\infty} + \int_A^{+\infty} ye^{-xy}(F(x) - F(A))dx$$
$$= \left| \exists \lim_{x\to\infty} F(x) \left(= \int_A^{+\infty} f(t)dt \right) \right..$$

Для $\varepsilon > 0 \exists A : \left|\int_X^{+\infty} f(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \geqslant A$
Для $x \geqslant A \quad |F(x) - FA(A)| = \left|\int_X^{+\infty} f(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|I_A(y)| \leqslant \int_A^{+\infty} ye^{-xy} \left| F(x) - F(A) \right| dx$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx = \frac{\varepsilon}{3}$$
$$I(y) = \overbrace{\int_a^A e^{-xy} f(x)dx}^{J_A(y)} + I_A(y)$$
$$I(y) - I(y_0) = J(y) - J(y_0) + \overbrace{I_A(y) - I_A(y_0)}^{< \frac{\varepsilon}{3}}.$$

$J(y) - J(y_0) \to 0$ при $y \to y_0$ (условие непрерывности собственных интегралов).

$$\exists V(y_0) : \quad \forall y \in V(y_0)\ |J(y) - J(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

■

Следствие 14.1.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y\to 0} e^{-xy} f(x)dx.$$

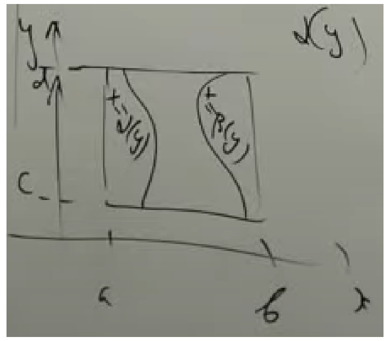

Рис. 3: Инетграл с переменными пределами

Пример (Одно из значений интегрального синуса)**.**

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \\
&\qquad I(y) = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-xy}\frac{\sin x}{x}}_{f(x,y)} dx \\
&\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-xy}\sin x \\
y_0 > 0 \quad & V_{y_0} = \left(\frac{y_0}{2}, 2y_0\right) \implies \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant e^{-\frac{xy_0}{2}} \\
&\implies \forall y_0 I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx \ldots \\
&\qquad I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} dcosx = cosx \cdot e^{-xy} \mid_0^{+\infty} + y\int_0^{+\infty} ('\sin x) e^{-xy} dx \\
&\qquad = -1 + y\left(\sin x e^{-xy} \mid_0^{+\infty} + y\int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx\right) = -1 + y^2\left(-I(y)\right) \\
&\qquad \implies I(y)\cdot(1+y^2) = -1. \\
&\qquad I'(y) = I(y) = \left(-\frac{1}{1+y^2}\right) \implies I(y) = C - \int \frac{dy}{1+y^2} = C - \operatorname{arctg} y \\
y \to +\infty, y \geqslant 1 & \left|e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant e^{-x} \text{ — суммируемая мажоранта.} \\
&\qquad C - \frac{\pi}{2} = \lim_{y\to\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x} dx = 0 \implies C = \frac{\pi}{2} \\
&\qquad I(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \forall y > 0.
\end{aligned}
$$

Но по лемме $I(y)$ неотрицательная в точке $y = 0$.

$$
I(0) = \lim_{y\to 0} I(y) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y\right) = \frac{\pi}{2} \implies \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.
$$

Дифференцирование интеграла по параметру в случае переменных пределов интегрирования.

$$
I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx; \quad f \in C\left([a,b](x \ni) \times [c,d](\ni y)\right), \quad \alpha(y), \beta(y) : [c,d] \to [a,b] \text{ дифф.}
$$

Теорема 15 (Правило Лейбница)**.** Тогда $I(y)$ дифференцируемо на $[c,d]$ и

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y).$$

Доказательство.

$$\Phi(x,y) = \int_a^x f(t,y)dt$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = f(x,y) \text{ непрерывна в } Q$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \lim_{\Delta\to y}\frac{1}{\Delta y}\left(\int_a^x f(t,y+\Delta y)dt - \int\right.$$

$$= \int_a^x f'_y(t,y)dt$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x_1,y_1) - \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y) = \int_a^x f'_y(t,y_1)dx + \left(\int_a^x f'_y(t,y)dx - \int_a^x f'_y(t,y)dx\right) - \int_a^x f'_y(t,y)dx.$$

Таким образом $\Phi(x,y)$ дифферецируема на Q

$$I(y) = \Phi(\beta(y),y) - \Phi(\alpha(y),y)$$

$$I'(y) = P'hi_x(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) + \Phi'_y(\beta(y),y) - \Phi'_x(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) - \Phi'_y(\alpha(y),y).$$

∎

Пример.

$$I(p) = \int_{p^2}^{p^3}\frac{x^2+2p}{\ln^2|x|+1}dx$$

$\forall p \neq 0, \quad [a,b] = [p-\delta, p+\delta] \quad [c,d]$

$$I'(p) = \int_{p^2}^{p^3}\frac{2}{\ln^2|x|+1}dx + \frac{p^6+2p}{\ln^2|p^3|+1}\cdot 3p^2 - \frac{p^4+2p}{\ln^2|p^2|+1}\cdot 2p.$$

7 Интегрирование на многообразиях

Определение 8. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ кусочно-гладкое, простой путь (биекция) или заскнутый простой (единственная точка самопересечния – концы).

Пусть $\Gamma = \gamma([a,b])$ — носитель нашего пути...

$\mathcal{B} = \{B \mid \gamma^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

$ds = \nu(B) = \int_{\gamma^{-1}(B)} \|\gamma'\|(t)dt$.

$f : \Gamma \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. $\int_B f ds = \int_{\gamma^{-1}(B)} f(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|$.

Интеграл не зависит от выбора параметризации. Также не зависит от ориентации кривой.

Пример. $\int_C x^2 sd \qquad C : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$$I = \int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds \implies I = \frac{1}{3}\int_C \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=R^2} ds = \frac{R^2}{3}\int_C ds = \frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R..$$