

# Конспекты по математическому анализу

Анатолий Коченюк, Георгий Каданцев, Константин Бац

2022 год, семестр 4

## 1 Повторение

Задачи и темы, которые мы будем обсуждать в новом семестре: многообразия, дифференциальные формы на них, криволинейные интегралы, интегралы от параметров, формула Стокса, формула Остроградского,  $\gamma$ -,  $\beta$ -функции.

Интеграл от функции произвольного знака это разность интегралов компонент. В случаях, когда оба слагаемых не бесконечные, такая разность имеет смысл.

Интеграл комплекснозначной функции это сумма интегралов вещественных компонент функции.

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

Монотонность интеграла.

$$\int_E (f_1 + f_2) d\mu \geq \int_E f_1 d\mu = \infty$$

**Теорема 1** (Теорема Леви для последовательности). Если  $f_n$  неотрицательные измеримые на  $E$  функции и  $f_n \uparrow f$  возрастающая сходится поточечно к  $f$ , то

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f d\mu$$

**Теорема 2** (Теорема Леви для рядов). Если  $f_n$  неотрицательные измеримые на  $E$  функции, то интеграл от ряда совпадает с суммой ряда из интегралов.

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

*Доказательство.* Пусть  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  — частичная сумма.  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$  ■

**Пример.** Функция, которая не удовлетворяет условиям теоремы Леви:

$$f_k(x) = \xi_{[k, k+1]}(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{[0, +\infty]} f_k(x) d\mu &= \int_{[k, k+1]} f_k(x) d\mu = 1 \\ \int f(x) d\mu &= \int_{[0, +\infty]} 0 d\mu = 0 \end{aligned}$$

**Замечание.** 1. Для  $f \in S(E)$   $|f| \in L(E, \mu)$  тогда и только тогда, когда  $f \in L(E, \mu)$ .

2. Если интеграл  $\int_E f d\mu$  определен, то  $\int_E |f| d\mu \geq |\int_E f d\mu|$ .

Доказательство. ■

Отсутствие про суммируемую мажоранту.

Если функция имеет суммируемую мажоранту, то сама она является суммируемой.

...  $L_1(E, \mu)$ : две функции эквивалентны по мере на  $E$ , если они совпадают почти везде на  $E$ . Другими словами, мера подмножества  $E$ , на котором функции принимают разные значения, равна нулю.

$$\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$$

Элементы  $L_1(E, \mu)$  могут быть определены не на всём  $E$  целиком, но на множестве полной меры.

$$|f + g| \leq |f| + |g|$$

Эта норма невырожденная. Если  $f \in S_+(E)$  и  $\int f d\mu = 0$ , то  $f = 0$  почти всюду на  $E$ .

**Теорема 3** (Счётная аддитивность интеграла). Пусть  $f \in S(E)$   $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ,  $E_k \in \mathcal{E}$ , определим  $\int_E f d\mu$ . Тогда

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$$

Доказательство. ... ■

**Теорема 4** (О приближении интеграла интегралом по множеству конечной меры). Пусть мера  $E$  конечна и  $f \in L(E, \mu)$  суммируема. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_0 \subset E : \mu(E_0) < +\infty \text{ и } \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu < \epsilon$$

Доказательство. Не умаляя общности  $f \geq 0$  на  $E$ . Предложим  $f$  нулем вне  $E$ .  $J(A) = \int_A f d\mu$  — мера.  $E_K = E\{f > \frac{1}{K}\}$ ,  $E_* = E\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ .

Непрерывность меры снизу  $E_k$  — множества конечной меры.

Научились приближать с любой точностью интеграл интегралом по множествам конечной меры. ■

Теорема Фато и теорема Лебега.

**Теорема 5.** Пусть  $f_k$

$\text{in} S_+(E)$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$ .

И если  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  на  $E$ , то  $\int_E f d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu$

**Теорема 6** (Теорема Лебега о мажорированной сходимости). Пусть  $f_n \rightarrow f$  сходится почти везде на  $E$  и  $\Phi \in L(E, \mu)$ :  $\forall k \in \mathbb{N} |f_k| \leq \Phi$  почти везде на  $E$ . Тогда  $f \in L(E, \mu)$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu$ . ...

Интеграл положительнозначной функции определяет меру. Интеграл функции это разность мер компонент. Такая разность называется заряд.

**Теорема 7 (Фубини).**

$$\begin{aligned}x &= (x_1, \dots, x_k) \\y &= (y_1, \dots, y_m) \\f(x, y) &\in \mathcal{L}(E, \lambda_{k+m}) \\E &\in \mathcal{A}_{k+m}\end{aligned}$$

то:

1. Для почти всех  $x \in \mathbb{R}^k$   $g(\cdot) = f(x, \cdot) \in \mathcal{L}(E(x, \cdot))$
2.  $I(x) = \int_{E(x, \cdot)} f(x, y) d\lambda_m(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$
- 3.

$$\int_E f(x, y) d\lambda_{k+m}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{E(x, \cdot)} f(x, y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_k(x)$$

**Пример.**  $E = A \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$   $0 \in \mathbb{R}^n$

$A$  – неизмеримое в  $\mathbb{R}^k$

$E$  – измеримо в  $\mathbb{R}^{k+m}$

$Pr_x(E) = A$  – неизмеримое

Если  $Pr_x(E)$  измеримо, то вместо интеграла по  $\mathbb{R}^k$  можно написать интеграл по проекции

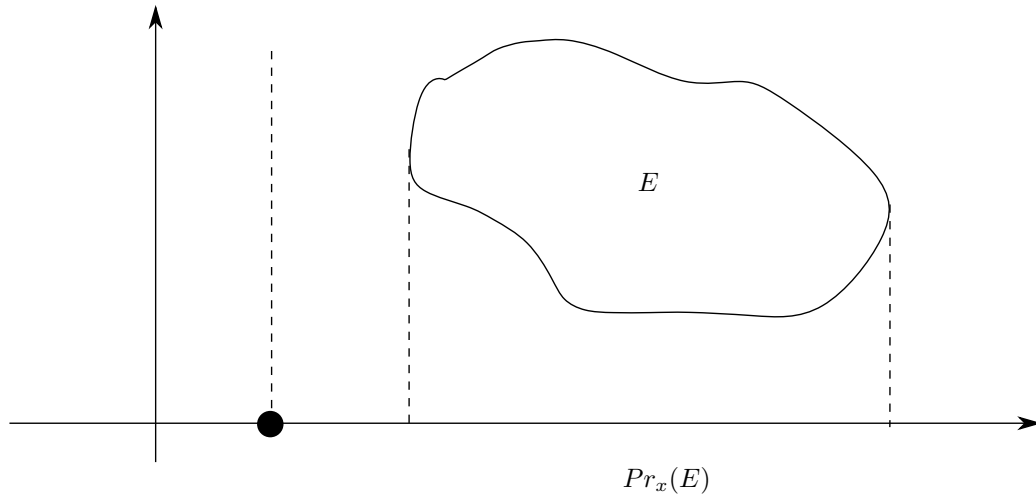


Рис. 1: Переход в интегралу по проекции

**Замечание.** Если  $E$  – компактное или открытое, то  $Pr_x(E)$  измеримо.

$Pr_x(E) = \Phi(E)$ , где  $\Phi(x, y) \equiv x$  – отображение проектирования

Если  $E$  – компактное, то  $\Phi(E)$  – компактное. Если открытое, то открытое.

**Пример.** 1.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = I_1$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = I_2$$

Если интегралы существуют, то они антиравны.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y}{(x^2 + y^2)} \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} - 0 dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Вывод: функция  $f(x, y) \notin \mathcal{L}([0, 1]^2, \lambda_2)$

2.

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$f \in \mathcal{L}^2([-1, 1]^2) \iff |f| \in \mathcal{L}([-1, 1]^2) \implies |f| \in \mathcal{L}([-1, 1]^2)$$

$$\iint_{[0, 1]^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

<.....>

**Утверждение 7.1.** Семейство называется суммируемым, если функция суммируема

**Утверждение 7.2.** Если семейство  $(a_x)_{x \in X}$  суммируемо, то  $\{x : a_x \neq 0\}$  – не более чем счётное.

*Доказательство.* Не умаляя общности  $a_x \geq 0$

$$+\infty > \int_X a_x dv = \int_{X_0} a_x dv > \int a_x dv \geq \frac{1}{j} \nu(x_j) \implies \nu(x_j) < +\infty$$

$$X_0 = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \text{ – не более, чем счётное}$$

■

**Утверждение 7.3.**  $\square$   $X$  – н.б.ч.с,  $Y$  – числовое множество,  $(a_x)_{x \in X} \subseteq Y$   $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$

$$\text{Тогда } (a_x) \text{ суммируемы} \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \text{ сходится абсолютно.}$$

## 2 Замена переменной в интеграле по мере

### 2.1 “Пересадка” меры

$\Phi : X \rightarrow Y$  .  $\square$   $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пространство с мерой.

$$\mathcal{D} = \{B \subseteq Y | \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

$$\Phi^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi^{-1}(B_k) \in \mathcal{A}$$

$$\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$$

**Пример.**  $X = [0, 2\pi)$   $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap [0, 2\pi)$

$$\Phi(t \in X) = (\cos t, \sin t)$$

**Теорема 8** (Общая схема замены переменных).  $\sqsubset (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$

$\Phi : X \rightarrow Y$  – не портит измеримость.

$\sqsubset h \in S_+(X) : \forall B \in \mathcal{D}$

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} h d\mu$$

Тогда  $\forall f \in f \in S(Y, \nu)$

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)$$

*Доказательство.*  $f \circ \Phi$  – измерима?

$X \{f \circ \Phi < a\} = \Phi^{-1}(Y \{f < a\})$ .  $Y \{f < a\} \in \mathcal{L}$ , т.к.  $f$  измеримо. А тогда  $\Phi^{-1}(\dots) \in \mathcal{A}$

Совпадение интегралов:

1.  $f$  – ступенчатая,  $f = \sum_{k=1}^K C_k \chi_{D_k}$   $\{D_k\}$  – разбиение  $X$

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \sum_{k=1}^K C_k \nu(D_k) = \sum_{k=1}^K C_k \int_{\Phi^{-1}(D_k)} h d\mu = \\ &= \int_X \left( \sum_{k=1}^K C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)} \right) h(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f \circ \Phi(x) h(x) d\mu(x) \\ f \circ \Phi(x) &= C_k \quad x \in \Phi^{-1}(D_k) \\ \sum_{k=1}^K C_k \chi_{\Phi^{-1}(D_k)}(x) &= C_k. \end{aligned}$$

2.  $f \in S_+(Y)$   $\exists \{g_j\}$  – ступенчатая неубывающая  $g_i \uparrow f$

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_Y g_j d\nu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X g_j(\Phi(x)) h(x) d\mu \\ &= \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

3. Общий случай:

$$f = f_+ + f_-$$

$$\begin{aligned} \int_Y f d\nu &= \int_Y f_+ - \int_Y f_- d\mu = \int_X f_+(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) - \int_X f_-(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x) \quad (f(\Phi)h)_+ = f_+(\Phi)h. \end{aligned}$$

■

**Следствие 8.1.**  $\sqsubset (X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{D}, \nu)$

$h \in S_+(X)$ ;  $\Phi : X \rightarrow Y \quad \Phi^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}$

и выполняется условие теоремы общей замены переменной. Тогда  $\forall E \subseteq \mathcal{D} \quad f \in S(E, \nu)$ :

$$\int_E f(y) d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x)$$

Рассмотрим продолжение нулём  $f$  с  $E$  на  $Y$

$$\int_E f d\nu = \int_Y (y)\chi_E(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \underbrace{\chi_E(\Phi(x))}_{\chi_{\Phi^{-1}(E)}} \chi_{\Phi^{-1}(E)} h(x) d\mu(x) = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) h(x) d\mu(x).$$

**Следствие 8.2** (частный случай 1). Если  $h \equiv 1$  в условии теоремы.

$$(\forall E \in \mathcal{D} \quad \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\mu = \mu(\Phi^{-1}(E)))$$

мера  $\nu$  при этом называется образом меры  $\mu$

$$\forall f \in S(E) \quad \int_E f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi(x) d\mu(x)$$

**Следствие 8.3** (Частный случай 2).  $X = Y \quad \Phi = id \quad \nu(E) = \int_E h(x) d\mu(x)$

<..>

**Теорема 9.**  $\square (X, \mathcal{A}, \mu)$  – пространство с мерой,  $\Phi : X \rightarrow Y \quad h \in S_+(X)$

Следующие утверждения равносильны:

1.  $h$  плотность  $\nu$  относительно  $\mu$
2.  $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\inf_E h\mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_D h\mu(E)$$

*Доказательство.*  $I \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$

Т.о.  $I \implies II$  ■

**Теорема 10** (Критерий плотности).  $\square (X, \mathcal{A})$  – измеримое пространство,  $\mu, \nu$  – опр. (?)  $\mathcal{A}$   
 $h \in S_+(X)$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

1.  $h$  – плотность меры  $\nu$  относительно  $\mu$  ( $\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$ )
2.  $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\inf_E h \cdot \mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_E h \cdot \mu(E)$$

Если  $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \lambda_n)$ , тогда  $1 \iff 3$ :

3

$$\forall P \in \mathcal{P}_n \quad \inf_P h \cdot \mu(P) \leq \nu(P) \leq \sup_P h \cdot \mu(P)$$

*Доказательство.* План:  $1 \implies 2 \implies 3$

$$2 \implies 1? \quad \forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) \stackrel{?}{=} \int_E h d\mu$$

$$E = E \{h = 0\} \coprod E \{h = +\infty\} \coprod E \{0 < h < +\infty\}$$

$$\nu(E) = \nu(E \{h = 0\}) + \nu(E \{h = +\infty\}) + \nu(E \{0 < h < +\infty\})$$

$$\nu(E \{h = 0\}) \leq \sup_{E \{h=0\}} = 0 = \int_{E \{h=0\}} h d\mu$$

$$\nu(E \{h = +\infty\}) \leq h \cdot \mu(E) + \infty \cdot \mu(E) = \int_{E \{h=+\infty\}} h d\mu.$$

$$\times \frac{1}{q} \in (0, 1), \quad q > 1 \quad (0, +\infty) = \bigvee k \in \mathbb{Z} [q^k, q^{k+1})$$

$$E\{h \in (0, +\infty)\} = \bigvee E\{q^k \leq h < q^{k+1}\}$$

$$q^k \mu(E_k) \leq \nu(E_k) \leq q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$$

$$q^k \mu(E_k) \leq \int h d\mu \leq q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$$

$$\frac{\nu(E_k)}{q} \leq q^k \cdot \mu(E_k) \leq \int_{E_k} h d\mu = q \cdot q^k \mu(E_k) \leq q \cdot \nu(E_k)$$

Просуммируем это по всем  $k$ .

$$\frac{1}{q} \nu(E) = \int_E h d\mu \leq q \cdot \nu(E), \quad q \rightarrow 1 \implies \nu(E) \leq \int_E h d\mu \leq \nu(E) \implies \nu(E) = \int_E h d\mu$$

$\times \tilde{\nu}$  – стандартное продолжение  $\langle \dots \rangle$  (нужно дополнить) ■

**Теорема 11.**  $\square \Phi$  – диффеоморфизм множеств  $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad G \xrightarrow{\Phi} O$

Тогда  $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad E \subseteq O$

$$\lambda_n(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \Phi'| d\lambda_n$$

$$\lambda_n(O) = \int_G |\det \Phi'| d\lambda_n$$

Если  $O \sim \tilde{O} \quad G \sim \tilde{G} \quad (\lambda_n(O \setminus \tilde{O}) = \emptyset \dots)$ , то

$$\lambda_n(\tilde{O}) = \int_{\tilde{G}} |\det \Phi'| d\lambda_n$$

**Замечание.**

$$\nu(P) \leq \sup_P h d\mu(P) \text{ – от противного}$$

$$\implies \exists \text{ ячейки } P_0 : \quad \nu(P) > M \cdot \mu(P) = \sup_{P_0} h \cdot \mu(P)$$

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + d_{x_0} \Phi(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$x \approx x_0 \quad \Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d_{x_0} \Phi(x - x_0)$$

.

Если  $Q$  – малая ячейка, то

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \approx \lambda_n d_{x_0} \Phi(Q) = |\det \Phi'_{x_0}| \lambda_n(Q)$$

**Следствие 11.1.** Если  $\Phi : G \rightarrow O$  – диффеоморфизм,  $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad \tilde{G} \sim G, \tilde{O} \sim O \quad f \in S(O)$ , то

$$\int_{\tilde{O}} f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\tilde{G}} f(\Phi(u)) |\det \Phi'(u)| d\lambda_n(u)$$

**Пример.** Полярные координаты.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

$$\Phi : (r, \varphi) \rightarrow (x, y),$$

$$([0, +\infty) \times [-\pi, \pi]) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(0, +\infty] \times (-\pi, \pi)) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus (-\infty, 0].$$

$$\det \Phi' = r; \quad E = \mathbb{R}^2 :$$

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{\Phi^{-1}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

**Пример** (интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
 I \cdot I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ys} dy \\
 &= \iint_{\{x \geq 0, y \geq 0\}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= \iint_{\{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, r \geq 0\}} e^{-r^2} r dr d\varphi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-r^2}}{-2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \\
 I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
 \end{aligned}$$

**Пример.** Цилиндрические координаты

$$\begin{aligned}
 r \cos \varphi &= x \\
 r \sin \varphi &= y \\
 h &= z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi : (r, \varphi, h) &\rightarrow (x, y, z) \quad \Phi : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0\} \\
 |\det \Phi'| &= r \\
 \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Phi^{-1}(E)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) \cdot r dr d\varphi dh
 \end{aligned}$$

**Пример.** Сферические координаты

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned}
 r \cos \varphi \cos \psi &= x \\
 r \sin \varphi \cos \psi &= y \\
 r \sin \varphi \sin \psi &= z
 \end{aligned}$$

$$\det \Phi' = r^2 \sin \varphi$$

Можно обобщить на  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 r &= \|x\| \\
 x_1 &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \dots \cos \varphi_1 \\
 &\dots \\
 x_{n-2} &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-3} \\
 x_{n-1} &= r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-2} \\
 x_n &= r \sin \varphi_{n-1}
 \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ x^2+y^2 \leq z^2 \\ z \geq 0}} f(x, y, z) dx dy dz$$

Преобразовать используя:



- Цилиндрические координаты

Перепишем множество интегрирования в новых координатах: 
$$\begin{cases} r^2 + h^2 \leq R^2 \\ r^2 \leq h^2 \implies r \leq h \\ h \geq 0, r \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\substack{r^2+h^2 \leq R^2 \\ r \leq h \\ h \geq 0, r \geq 0}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh \\ &= \iint_{\substack{\pi \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \frac{R}{\sqrt{2}}}} r \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) dr \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} r dr \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) dh \end{aligned}$$

- Цилиндрические координаты (второй вариант)

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h r f dr + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} r f dr$$

- Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \psi \\ y = r \sin \varphi \sin \psi \\ z = r \cos \psi \\ \operatorname{tg}^2 \psi \geq 0 \\ \sin \psi \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ r^2 \cos^2 \psi &\leq r^2 \sin^2 \psi \\ r \sin \psi &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \varphi) r^2 \cos \psi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R f(\dots) r^2 \cos \psi dr \end{aligned}$$

**Пример.**

$$\iiint_E z dx dy dz$$

$E :$

$$\begin{aligned} t^2(x^2 + y^2) &\leq z^2 \\ 0 &\leq z \leq t \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_E z dx dy dz &= \iint_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} dz dt \iint_{\{x^2 + y^2 \leq \frac{4z^2}{t^2}\}} z dx dy \\
&= \iint_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} dz dt z \pi \cdot \frac{4z^2}{t^2} \\
&= 4\pi \iint_{\{0 \leq z \leq t \leq 3\}} \frac{z^3}{t^2} dz dt \\
&= 4\pi \int_0^3 \frac{1}{t^2} dt \int_0^t z^3 dz = \frac{4\pi}{4} \left( \int_0^3 t^2 dt \right) = \pi \cdot 9
\end{aligned}$$

### 3 Мера Лебега–Стилтьеса

$\square$   $g(x) \uparrow$  на  $\mathbb{R}$  и непрерывна слева  $\left( \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} g(x) \equiv g(x_0) \right)$

**Задача 1.** Если  $h(x)$  – произвольная возрастающая функция, то её можно превратить в непрерывную слева исправлением нбчс количества точек.

$\exists \uparrow$  и непрерывная слева  $g(x) = h(x)$  всюду кроме точек разрыва  $h(x)$   
 $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} h(x)$

Определим  $\mu_g([a, b]) = g(b) - g(a) \geq 0$ . Так же верно, что  $\mu_g$  обладает счетной аддитивностью на  $\mathcal{P}_1$  (доказывается так же, как в случае с мерой Лебега)  $\implies \mu_g$  – мера на  $\mathcal{P}_1$

Стандартное продолжение  $\mu_g$ , которое также обозначается  $\mu_g$  называется мерой Лебега–Стилтьеса, порождённой функцией  $g$

$$\begin{aligned}
\mu_g(\{c\}) &= \mu_g\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} [c, c + \frac{1}{j}]\right) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_g\left([c, c + \frac{1}{j}]\right) \\
&= \underbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} g(c + \frac{1}{j})}_{=g(c+0)} - g(c) = g(c+0) - g(c)
\end{aligned}$$

$\implies$  Если  $c$  – точка непрерывности, то  $\mu_g(\{c\}) = 0$

$$\mu_g([a, b]) = \mu_g([a, b]) + \mu_g(\{b\}) = g(b) - g(a) + g(b+0) - g(b) = (g(b+0) - g(a+0))$$

$$\mu_g((a, b)) = \mu_g([a, b]) - \mu(\{a\}) = g(b) - g(a) - (g(a+0) - g(a)) = g(b) - g(a+0)$$

$$\mu_g((a, b]) = g(b+0) - g(a+0)$$

**Определение 1.** Пусть  $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \delta_{a_k}$ ,  $h_k \geq 0$ ,  $\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & a \in E \\ 0, & a \notin E \end{cases}$ , тогда  $\mu$  – дискретная мера.

$$E, E_j \in 2^{\mathbb{R}} \quad E = \bigvee_{j=1}^{\infty} E_j \implies \delta_{a_k}(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{a_k}(E_j)$$

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu\left(\bigvee_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_k \sum_j h_k \delta_{a_k}(E_j) \\ &= \sum_j \mu(E_j)\end{aligned}$$

Последний переход в равенстве по теореме Тонелли.

**Замечание.**  $\square \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$   
 $\forall [a, b] \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty$

**Пример.** Если  $\{a_k\}$  – дискретно (без точек сгущения на  $\mathbb{R}$ ), то условие автоматически выполняется, т.к. пересечения  $a_k$ -ых с промежутком будет конечно, а значит и сама сумма будет конечна

$$A = \mathbb{Q} \quad h_k = \frac{1}{2^k}$$

**Определение 2** (функция Хэвисайда).

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

$$\square x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cdot (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) + C$$

1.  $g(x)$  возрастает

$$2. x \in [a, b] \quad \sum_k h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \leq \sum_{a_k \in I_{x, x_0}} h_k$$

Разность Тет ненулевая, если  $a_k$  находится между  $x$  и  $x_0 - I_{x, x_0}$

**Утверждение 11.1.**  $A = \{a_k\}_k$

1.  $g \in C(\mathbb{R} \setminus A)$

2. Непрерывность слева на  $A$

*Доказательство.* 1.  $\square x \in \mathbb{R} \setminus A \quad \square (a, b) \ni x$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty \implies \exists K : \sum_{\substack{a_k \in [a, b] \\ k \geq K}} h_k \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$g_k(x) = h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k))$  — локально постоянны в точке  $x$  ( $\exists V_\delta(x) : g_k|_{V_\delta(x)} \equiv const$  для  $k = 1, \dots, K$ )

Не умаляя общности  $[a, b] \supseteq V_\delta(x)$

$$\begin{aligned}
g(\tilde{x}) - g(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k)) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(\tilde{x} - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k)) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^K h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k))}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(\tilde{x} - a_k))}_{=\frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned}$$

$\implies$  Непрерывность

Если  $x = a_k$   $g(x) = g_{k_0}(x) + \underbrace{\sum_{k \neq k_0} g_k}_{\text{непрерывна как в пред. случае}}$

■

$$\begin{aligned}
\mu_g([a, b]) &= g(b) - g(a) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)) \quad a \leq a_k \leq b \\
&= \sum_{k: a \leq a_k < b} h_k = \mu([a, b])
\end{aligned}$$

$\mu$  и  $\mu_g$  совпадают на совокупности всевозможных промежутков.

**Определение 3.** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Функция  $f$  называется локально суммируемой на  $\mathbb{R} \iff \forall [a, b] \quad f \Big|_{[a, b]} \in \mathcal{L}(\lambda_1)$ .

**Определение 4.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Функция  $f$  называется абсолютно непрерывной, если существует локально суммируемая функция  $h(x)$  и точка  $x_0 \in \mathbb{R}$ :

$$g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda$$

(интеграл Лебега. Если  $x < x_0$ , то  $\int_{x_0}^x h d\lambda = -\int_{[x, x_0]} h d\lambda$ )

Если  $h$  непрерывна в точке  $x$ , то  $g(x)$  дифференцируема в точке  $x$  и  $g'(x) = h(x)$ . Доказательство – смотри теорему Барроу...

Если  $h(x) \geq 0$ , то  $g(x) \nearrow$

Функция  $g(x)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ . Следует из абсолютной непрерывности интеграла.

**Теорема 12** (воспоминание).

$$\mu(E) = \int_{\Phi^{-1}} h d\mu \iff \forall E \in \mathcal{A} \quad \inf_E h \mu(E) \leq \nu(E) \leq \sup_E h \mu(E)$$

**Замечание.**

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k))$$

Для этой меры нужно было фиксировать открытый интервал  $\Delta$ , что

$$\forall [a, b] \subseteq \Delta \quad \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k < +\infty$$

$$\begin{aligned} g(a_k + 0) - g(a_k - 0) &= h_k (\Theta(a_k - a_k + 0) - \Theta(x_0 - a_k + 0) - \Theta(a_k - a_k - 0) + \Theta(x_0 - a_k - 0)) \\ &= h_k \end{aligned}$$

**Утверждение 12.1.** Если  $\nu = \sum_k h_k \delta_{a_k}$ , то  $\nu$  совпадает с  $\mu_g$  на  $\mathcal{A}_{\mu_g}$  при условии (\*).

*Доказательство.* Если хочется скорее сослаться на теорему об единственности, то можно сделать так:

Рассмотрим  $[a, b]$ .  $\nu([a, b]) = \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k$ .

$$\mu_g([a, b]) = g(b) - g(a) = \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k (\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)) = \sum_{k: a_k \in [a, b]} h_k.$$

Если  $\{a_k\}_k$  — конечное множество, то вопросов с суммируемостью не возникает.

$$g(x) = \sum_k h_k \cdot \Theta(x - a_k) + C$$

■

**Замечание.** Локально суммируемая функция — это такая, что она будет на любом шаре суммируемой по Лебегу

**Теорема 13.**  $g(x)$  — абсолютно непрерывная  $\iff \exists h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda) \exists x_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda + C$$

По теореме Барроу  $g(x)$ :

- $g(x) \in C(\mathbb{R})$ ,
- $g(x)$  дифференцируема в точках ... функции  $h(x)$ .

*Доказательство.* • Если  $x_1 \in \mathbb{R}$

$$g(x) - g(x_1) = \int_{x_1}^x h(x) dx$$

$$\exists \delta_0 > 0, x \in V_{\delta_0}(x_1), \quad h \in \mathcal{L}(V_{\delta_0})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta (\leq \delta_0) > 0 : \int_E h(x) d\lambda < \varepsilon \forall E \subseteq V_{\delta_0}(x_1) : \lambda_1(E) < \delta$$

$$\implies \text{Если } |x_1 - x| < \delta \quad \left| \int_{x_1}^x h(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

- Пусть  $x_1$  — точка непрерывности для  $h(x)$ .  $h(x) = h(x_1) + \underbrace{\alpha(x - x_1)}_{o(1) \text{ при } x \rightarrow x_1}$

$$\frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x h(x_1) + \alpha(x - x_1) dx = h(x_1) + \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x \alpha(x - x_1) dx \leq \varepsilon(x - x_1)$$

Если “ $x$  достаточно близок к  $x_1$ ”

■

**Замечание.** В частности, если  $h(x) \in C(\mathbb{R}) \implies g \in C^1(\mathbb{R})$  и  $g'(x) \equiv h(x)$

**Замечание.**

$$\int_E f d\nu = \sum_{k: a_k \in E} h_k f(a_k) = \sum_{k: a_k \in E} f(a_k) \cdot \text{скачок } g(a_k)$$

**Утверждение 13.1.**  $\square$   $g(x) = \int_{x_0}^x h(x) d\lambda_1(x) + C$   $h(x) \geq 0$   $h \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)$  абсолютно непрерывная возрастающая функция.

Тогда  $\int_E f d\mu_g = \int_E f(x) h(x) d\lambda(x)$ .

В частности,  $\forall$  возрастающей  $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ .

$$\int_E f d\mu_g = \int_E f \cdot g'(x) d\lambda(x) \left( = \int_E f \cdot dg \right).$$

*Доказательство.*  $\int_E \nu(E) = \int_E h d\lambda_1$ .

$$\mu_g(\langle a, b \rangle) = \mu_g([a, b)) = g(b) - g(a) = \int_a^b h(x) d\lambda_1 = \nu([a, b)) = \nu(\langle a, b \rangle).$$

$\mu_g$  и  $\nu$  совпадают на открытых. Если  $K$  – компакт,  $K = B \setminus (B \setminus K)$

$\nu(K) + \nu(B \setminus K) = \nu(B)$   $\mu_g(K) = \nu(K) = \nu(B) - \nu(B \setminus K)$

$\square$   $E$  –  $\lambda_1$ -мера  $O$

$\implies \exists \delta > 0 \exists$  открытое  $G : E \subseteq G$  и :  $\lambda_1(G) < \delta$

$\implies \int_{G_0} -$  абсолютно непрерывное  $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \lambda_1(\tilde{E}) < \delta \implies \tilde{E} \subseteq G$

$\int_{\tilde{E}} h < \varepsilon \implies \tilde{E} = G \implies \nu(G) < \varepsilon \implies \mu_g(G) < \varepsilon \implies \nu(E) = \mu_g(E) = 0$

Если  $E$  – неограничено  $\lambda_1$ -меры  $0 \implies \exists$  ограниченное  $E_j : E = \bigcup E_j. \forall i \in \mathbb{N} \lambda_1(E_j) = 0 \implies \nu(E_j) = \mu_g(E_j) = 0 \implies \nu(E) = \mu_g(E)$ .

Дальше можно применить теорему о плотности меры. Применяю общую схему замены переменной все доказывается. ■

**Задача 2.** 1.  $g(x) = \arctg x$ . Найти:

$$(a) \sup \left\{ \mu_g(I) : I = \langle a, b \rangle, \lambda_1(I) \leq \delta \right\}, \delta > 0.$$

$$(b) \sup \left\{ \lambda_1(I) : I = \langle a, b \rangle, \mu_g(I) \leq \delta \right\}, \delta > 0.$$

2.  $g(x) = \arctg x + \Theta(x - 1)$

(a) Для  $\delta = 1$

*Решение.*  $\mu_g(I) = g(b) - g(a) = \int_I g'(t) dt = \int_{[a, b]} \frac{dt}{1+t^2}$

1. (a)

$$\sup \{ \mu_g(I) \} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+t^2}$$

■

**Пример.** Пример меры Лебега–Стилтьеса не евклидовой, не дискретной, не абсолютно непрерывной:

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1] \\
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
C_{k+1} &\subseteq C_k \quad C_k - \text{компакт} \\
C &= \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k - \text{компакт} \\
\lambda_1(C) &= \lambda_1([0, 1]) - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \dots - \frac{2^{k-1}}{3^k} = 0
\end{aligned}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{3}x \quad \Theta(x) = 1 - x$$

$$\Phi = \{[0, 1] \cap C, \psi(C), \Theta\psi(C), \psi\psi(C), \psi\Theta(C), \Theta\psi\psi(C), \Theta\psi\Theta\psi(C), \dots\}$$

– полукольцо

$$\mu(C) = 1 \quad \mu(P) = \frac{1}{2^k} - \text{если } P \text{ есть результат применения } k \text{ штук } \psi \text{ и } \Theta$$

$\times \mu$  – стандартное продолжение

## 4 Интегралы, зависящие от параметра

**Пример.**

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0, p \in \mathbb{R}; \quad \int_a^b f(x, y) dx, \quad \int_{\alpha} (y)^{\beta} (y) f(x, y) dx.$$

Пока что мы будем рассматривать интегралы, зависящие от параметра  $y$  по фиксированному промежутку:  $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ .

Пусть у нас есть пространство с мерой  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f(\cdot; \mu) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ .  $Y \subseteq \bar{Y}$ .

Для чего это нужно? Бывает, что просто сформулированные задачи имеют ответ в виде интеграла с параметром. Бывает, что введение параметра упрощает вычисление интеграла.

**Утверждение 13.2.**  $f$  удовлетворяет условию Лебега локально относительно  $y_0$ ,  $y_0$  — параметр, если  $\exists$  открытое  $V(y_0)$  в  $\bar{Y}$  и  $\Phi(x) \in \mathcal{L}(X, \mu) \quad \forall y \in V(y_0)$  для почти всех  $x \in X$ .

**Утверждение 13.3.** Пусть у нас есть пространство с мерой  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\bar{Y}$  — метрическое пространство,  $Y \subseteq \bar{Y}$ ,  $y_0$  — предельная точка для  $Y$ . Почти везде  $f(x, y) \rightarrow g(x)$  при  $y \rightarrow y_0$ , и  $f(x, y)$  удовлетворяет локально условию Лебега относительно  $y_0$ .

Тогда  $g(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$  и

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

*Доказательство.* Так как  $y_0$  — предельная,  $\exists \{y_k\} \subseteq Y \rightarrow y_0$ .  $f_k(x) = f(x, y_k)$ ,  $y_k \in V(y_0) \implies |f_k(x)| \leq \Phi(x) \implies$  по теореме Лебега о мажорируемой сходимости,  $g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k) \in \mathcal{L}(X, \mu)$  и

$$\int_X g(x) d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f(x, y_k) d\mu.$$

$$I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I(y_k) \quad \forall \text{ последовательности } y_k \rightarrow y_0 \implies \exists \lim_{y \rightarrow y_0} I(y).$$

■

**Пример.**  $\square p_0 > 0 \quad \square$

$$\forall p \in V_\delta(p)$$

$$x \in (0, 1] \quad x^{p-1}e^{-x} \leq x^{p_0-\delta}e^{-x}$$

$$x > 1 \quad x^{p-1}e^{-x} \leq x^{p_0+\delta}e^{-x}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^{p_0-\delta}e^{-x} & , x \in (0, 1] \\ x^{p_0+\delta}e^{-x} & , x > 1 \end{cases} \quad \int_0^{+\infty} x^q e^{-x} dx - \text{сходится для любого}$$

**Замечание.** Если в условиях предыдущего утверждения  $f(x, y)$  — непрерывна по  $y$  в точке  $y_0$ , то наш интеграл  $I(y)$  тоже будет непрерывен в точке  $y_0$ .

**Определение 5.** Пусть имеется пространство с мерой  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $y_0$  — предельная точка для  $Y \subseteq \bar{Y}$   $f(x, y) \rightrightarrows g(x)$  на  $X$  при  $y \rightarrow y_0$  если  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  окрестность  $V(y_0)$ :

$$\forall x \in X \quad \forall y \in V(y_0) \quad |f(x, y) - g(x)| < \varepsilon \iff \sup_{x \in X} |f(x, y) - g(x)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0.$$

**Пример.** 1. (хороший)  $f(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \quad y \rightarrow +\infty$

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{1+y^n} \implies y \rightarrow \infty \sup |f(x, y)| = \frac{1}{1+y^n} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0.$$

Сходимость есть и равномерная сходимость тоже есть.

2. (плохой)  $xye^{-xy} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ . Сходимость к нулю есть, а

$$\sup x > 0 xye^{-xy} \geq f\left(\frac{1}{y}, y\right) = \frac{1}{e} \not\rightarrow 0 \implies \text{равномерно не сходится.}$$

**Утверждение 13.4.** Пусть  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\mu(X) < +\infty$ .

$$f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} g(x), \quad f(x, y) \in \mathcal{L}(X, \mu).$$

Тогда  $g(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$  И

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$$

*Доказательство.* Для  $\varepsilon = 1 \quad \exists$  окрестность  $V(y_0)$  :  $\forall x \in X, y \in V(y_0) \quad |f(x, y) - g(x)| \leq 1$  :

$$|g(x)| \leq |f(x, y)| + |g(x) - f(x, y)| \leq |f(x, y)| + 1 \implies g \in \mathcal{L}(X, \mu) \quad \blacksquare$$

**Утверждение 13.5.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  — пространство с метрой  $y \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ,  $y_0$  — предельная точка для  $Y$ . Пусть  $f(x, y)$ ,  $f'_y$  — удовлетворяет условию Липшица локально,  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ .

Тогда  $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$  дифференцируема в точке  $y_0$  и

$$I'(y_0) = \int_X f'_y(x, y) d\mu(x).$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} I'(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_X \underbrace{(f(x, y) - f(x, y_0))}_{f'_y(x, y_0 + \Theta(y - y_0)), \quad \Theta \in (0, 1)} d\mu(x) \\ &= \lim \int_X f'_y(x, y_0 + \Theta(y - y_0)) d\mu(x) \\ &= \int_X \lim(\dots) d\mu(x) = \int_X f'_y(x, y_0) d\mu(x). \end{aligned}$$



$y \in V_\delta(y_0)$  – из условия Липшица для  $f'_y \implies C(y) \in V_\delta(y_0)$

$$\implies \left| \underbrace{f'_y(x, C(y))}_{f'_y(x, y_0)} \right| \leq \Phi(x)$$

■

**Пример.**  $\Gamma(p) \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} d\mu.$

$$f'_p(x, p) = (p-1)x^{p-2}e^{-x}, \quad p-2 > -1 \implies p > 1.$$

При  $p > 1$

$$\Gamma'(p) = (p-1) \int_0^{+\infty} x^{p-2} e^{-x} = (p-1) \cdot \Gamma(p-1) \implies \Gamma'(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1).$$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} \frac{(x^p)'}{p} = \frac{1}{p} \left( x^p e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^{+\infty} x^p (e^{-x})' dx \right) = \frac{1}{p} \cdot (p+1).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}.$$

## 5 Г-функция Эйлера

**Определение 6.**  $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$   
 $p > 0$

**Свойство 1.**

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad \forall p > 0$$

– формула приведения

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

– определение для  $\Gamma$  в  $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_-)$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(p+1) = p!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \text{ (по индукции)}$$

.

**Замечание** (Дифференцирование Г-функции).

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{p-1} e^{-x} (\ln x)^k}_{f_k(x, p)} dx.$$

$$\frac{\partial f_k(x, p)}{\partial p} = f_{k+1}(x, p)$$

**Замечание.** Локальное условие Лебега  $\forall p_0$ ?

$$\exists V_{p_0} : \exists \Phi(x) \in \mathcal{L}((0, +\infty) : |f_k(x, p)| \leq \Phi(x)).$$

$$x^{p-1} \leq x^{2p_0-1} + x^{\frac{p_0}{2}-1}$$

$$\Phi(x) = \left( x^{2p_0-1} + x^{\frac{p_0}{2}-1} \right) e^{-x} |\ln x|^k.$$

$\Phi$  – мажоранта для  $f_l(x, p) \forall p \in V_{p_0}$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} |\ln x|^k dx &< +\infty \\ x^{p-1} |\ln x|^k &= o(e^{\frac{x}{2}}) \quad x \rightarrow +\infty \\ x^{p-1} e^{-x} |\ln x|^k &\sim x^{p-1} |\ln x|^k = o(x^{p-1-\alpha}) \\ |\ln x|^k &= o(x^{-\alpha}), \quad \alpha > 0 \\ x \rightarrow 0^+ \quad p - \alpha &> 0. \end{aligned}$$

Получается, что  $\Gamma$  – класса  $C^\infty$  там, где она определена.  $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-)$

## Геометрические характеристики $\gamma$ -функции и элементарные факты

**Свойство 2** (Геометрические свойства). 1.  $\gamma(p)$  строго выпукла на любом отрезке, лежащем в её области определения

2. На  $(0, +\infty)$   $\Gamma(p)$  имеет единственный экстремум в точке  $c \in (1, 2)$

3.  $p \rightarrow 0 \quad \Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$

*Доказательство.*  $\Gamma_{p^2}^{(2)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^2 x dx > 0 \implies 1$

$\Gamma(1) = 0! = 1 = 1! = \Gamma(2) \implies$  по теореме Роля  $\exists c \in (1, 2) : \Gamma'(c) = 0$ .  $c$  – точка минимума

$\Gamma'(p) \neq 0$  при  $p \neq c, p > 0$  ■

**Замечание.** Аналог формулы стрлинга. При  $p \rightarrow \infty$  верно, что  $\Gamma(p) = \sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p e^{\frac{\Theta}{12}}$ , где  $\Theta \in (0, 1)$ .

## 6 Бета-функция

**Определение 7.**  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$

$$B(p, q) = B(q, p) \forall p, q > 0$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

**Теорема 14** (формула Эйлера-Гаусса).

$$\Gamma(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l^p \cdot k!}{p(p-1) \dots (p+k)} \quad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

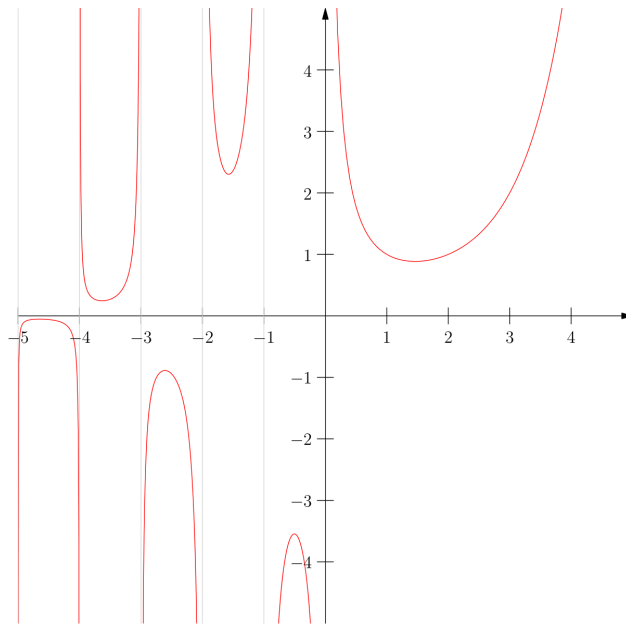


Рис. 2: gamma-function

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Gamma(p) &= \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \left| t = e^{-x}, x = -\ln t, dx = -\frac{dt}{t} \right| \int_0^1 (-\ln t)^{p-1} t \left( -\frac{dt}{t} \right) = \int_0^1 (-\ln t)^{p-1} dt \\
&= \int_0^1 \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{k(1 - t^{1/k})}_{g(k)} \right)^{p-1} dt = \\
g'(k) &= (1 - t^{1/k}) + k(-t^{1/k}) \cdot (\ln t) \cdot \left( +\frac{1}{k^2} \right) \\
&= t^{\frac{1}{k}} \left( t^{-\frac{1}{k}} - 1 + \frac{\ln t}{k} \right) \\
&= \begin{cases} f \uparrow, & \text{если } p \geq 1 \implies \text{Применим теорему Леви} \\ f \downarrow, & \text{если } p \in (0, 1) \implies g(k) \leq g(1) \end{cases} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \left( k(1 - t^{\frac{1}{k}}) \right)^{p-1} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{p-1} \int_0^1 s^{p-1} (-k)(1-s)^{k-1} ds = \lim_{k \rightarrow \infty} k^p B(p, k) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} k^p \frac{\Gamma(p)\Gamma(k)}{\Gamma(p+k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^p \cdot (k-1)! \frac{\Gamma(p)}{(p+k-1)(p+k-2) \dots p\Gamma(p)} \\
&= \frac{k^p k!}{p(p+1) \dots (p+k)} \cdot \underbrace{\frac{p+k}{k}}_{\rightarrow 1}.
\end{aligned}$$

Для  $p < 0$  по индукции по  $m$   $p \in (-(m+1), -m)$

Если формула верна для  $p+1$ , то

$$\begin{aligned}
\Gamma(p) &= \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{1}{p} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{p+1} \cdot k!}{(p+1)(p+2) \dots (p+k+1)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^p \cdot k!}{p(p+1) \dots (p+k)} \cdot \underbrace{\frac{k}{p+k+1}}_{\rightarrow 1}.
\end{aligned}$$

■

**Лемма 14.1.** Пусть  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \in C([a, +\infty))$  и  $f$  ограничена на  $([a, +\infty))$  :  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится. Тогда

$$I(y) = \int_a^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx \in C([0, +\infty)).$$

*Доказательство.*  $A \in [a, +\infty)$

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} e^{-xy} f(x)dx &= \left| F(x) = \int_A^x f(t)dt \right| = (F(x) - F(A)) \cdot e^{-xy} \Big|_A^{+\infty} + \int_A^{+\infty} ye^{-xy} (F(x) - F(A))dx \\ &= \left| \exists \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \left( = \int_A^{+\infty} f(t)dt \right) \right|. \end{aligned}$$

$$\text{Для } \varepsilon > 0 \exists A : \left| \int_A^{+\infty} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \geq A$$

$$\text{Для } x \geq A \quad |F(x) - F(A)| = \left| \int_A^{+\infty} f(t)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned} |I_A(y)| &\leq \int_A^{+\infty} ye^{-xy} |F(x) - F(A)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$$I(y) = \overbrace{\int_a^A e^{-xy} f(x)dx}^{J_A(y)} + I_A(y)$$

$$I(y) - I(y_0) = J(y) - J(y_0) + \overbrace{I_A(y) - I_A(y_0)}^{< \frac{\varepsilon}{3}}.$$

$J(y) - J(y_0) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow y_0$  (условие непрерывности собственных интегралов).

$$\exists V(y_0) : \quad \forall y \in V(y_0) \quad |J(y) - J(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

■

**Следствие 14.1.**

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow 0} e^{-xy} f(x)dx.$$

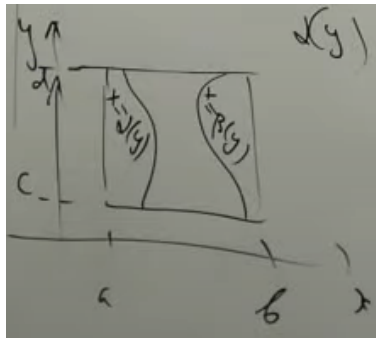


Рис. 3: Интеграл с переменными пределами

**Пример** (Одно из значений интегрального синуса).

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \\
 I(y) &= \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-xy} \frac{\sin x}{x}}_{f(x,y)} dx \\
 \frac{\partial f}{\partial x} &= -e^{-xy} \sin x \\
 y_0 > 0 \quad V_{y_0} &= \left( \frac{y_0}{2}, 2y_0 \right) \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq e^{-\frac{xy_0}{2}} \\
 \implies \forall y_0 I'(y) &= - \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx \dots \\
 I(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-xy} d \cos x = \cos x \cdot e^{-xy} \Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} (\sin x) e^{-xy} dx \\
 &= -1 + y \left( \sin x e^{-xy} \Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx \right) = -1 + y^2 (-I(y)) \\
 \implies I(y) \cdot (1 + y^2) &= -1. \\
 I'(y) = I(y) &= \left( -\frac{1}{1+y^2} \right) \implies I(y) = C - \int \frac{dy}{1+y^2} = C - \operatorname{arctg} y \\
 y \rightarrow +\infty, y \geq 1 & \left| e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-x} - \text{суммируемая мажоранта.} \\
 C - \frac{\pi}{2} &= \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \implies C = \frac{\pi}{2} \\
 I(y) &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \quad \forall y > 0.
 \end{aligned}$$

Но по лемме  $I(y)$  неотрицательная в точке  $y = 0$ .

$$I(0) = \lim_{y \rightarrow 0} I(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \right) = \frac{\pi}{2} \implies \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**Дифференцирование интеграла по параметру в случае переменных пределов интегрирования.**

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx; \quad f \in C([a, b](x) \ni \times [c, d](y)), \quad \alpha(y), \beta(y) : [c, d] \rightarrow [a, b] \text{ дифф.}$$

**Теорема 15** (Правило Лейбница). Тогда  $I(y)$  дифференцируемо на  $[c, d]$  и

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y).$$

*Доказательство.*

$$\Phi(x, y) = \int_a^x f(t, y) dt$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f(x, y) \text{ непрерывна в } Q$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow y} \frac{1}{\Delta y} \left( \int_a^x f(t, y + \Delta y) dt - \int_a^x f(t, y) dt \right) \\ &= \int_a^x f'_y(t, y) dt \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_1, y_1) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \int_a^x f'_y(t, y_1) dx + \left( \int_a^x f'_y(t, y) dx - \int_a^x f'_y(t, y) dx \right) - \int_a^x f'_y(t, y) dx.$$

Таким образом  $\Phi(x, y)$  дифференцируема на  $Q$

$$I(y) = \Phi(\beta(y), y) - \Phi(\alpha(y), y)$$

$$I'(y) = P' h_{ix}(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) + \Phi'_y(\beta(y), y) - \Phi'_x(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y) - \Phi'_y(\alpha(y), y).$$

■

**Пример.**

$$I(p) = \int_{p^2}^{p^3} \frac{x^2 + 2p}{\ln^2 |x| + 1} dx$$

$$\forall p \neq 0, \quad [a, b] = [p - \delta, p + \delta] \quad [c, d]$$

$$I'(p) = \int_{p^2}^{p^3} \frac{2}{\ln^2 |x| + 1} dx + \frac{p^6 + 2p}{\ln^2 |p^3| + 1} \cdot 3p^2 - \frac{p^4 + 2p}{\ln^2 |p^2| + 1} \cdot 2p.$$

## 7 Интегрирование на многообразиях

**Определение 8.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  кусочно-гладкое, простой путь (биекция) или замкнутый простой (единственная точка самопересечения – концы).

Пусть  $\Gamma = \gamma([a, b])$  – носитель нашего пути. . .

$$\mathcal{B} = \{B \mid \gamma^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

$$ds = \nu(B) = \int_{\gamma^{-1}(B)} \|\gamma'(t)\| dt.$$

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}). \int_B f ds = \int_{\gamma^{-1}(B)} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt.$$

Интеграл не зависит от выбора параметризации. Также не зависит от ориентации кривой.

**Пример.**  $\int_C x^2 ds \quad C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$$I = \int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds \implies I = \frac{1}{3} \int_C \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{=R^2} ds = \frac{R^2}{3} \int_C ds = \frac{R^2}{3} \cdot 2\pi R..$$