Матан, лекции

1 Повторение

Задачи и темы, которые мы будем обсуждать в новом семестре: многообразия, дифференциальные формы на них, криволинейные интегралы, интегралы от параметров, формула Стокса, формула Остроградского, γ-, β-функции.

Интеграл от функции произвольного знака это разность интегралов компонент. В случаях, когда оба слогаемых не бесконечные, такая разность имеет смысл.

Интеграл комплекснозначной функции это сумма интегралов вещественных компонент функции.

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

Монотонность интеграла.

$$\int_E (f_1 + f_2) \geqslant \int_E f_1 = \infty$$

Теорема 1 (Теорема Леви для последовательности)**.** Если f_n неотрицательные измеримые на E функции и $f_n \uparrow f$ возрастая сходится поточечно к f, то

$$\lim \int_E f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f d\mu$$

Теорема 2 (Теорема Леви для рядов)**.** Если f_n неотрицательные измеримые на E функции, то интеграл от ряда совпадает с суммой ряда из интегралов.

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — частичная сумма. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ ■

Пример 1. Функция, которая не удовлетворяет условиям теоремы Леви:

$$f_k(x) = \xi_{[k,k+1]}(x)$$

$$\int_{[0,+\infty]} f_k(x) d\mu = \int_{[k,k+1]} f_k(x) d\mu = 1$$

$$\int f(x) d\mu = \int_{[0,+\infty]} 0 d\mu = 0$$

Замечание 1.

1. Для $f \in S(E)$ $|f| \in L(E,\mu)$ тогда и только тогда, когда $f \in L(E,\mu)$.
2. Если интеграл $\int_E f d\mu$ определен, то $\int_E |f| d\mu \geqslant |\int_E f d\mu|$.

Доказательство. ■

Отсутпление про суммируемую мажоранту.

Если функция имеет суммируемую мажоранту, то сама она является суммируемой.

... $L_1(E,\mu)$: две функции эквивалентны по мере на E, если они совпадают почти везде на E. Другими словами, мера подмножества E, на котором функции принимают разные значения, равна нулю.

$$\|f\|_1 = \int_E |f| d\mu$$

.

Элементы $L_1(E,\mu)$ могут быть определены не на всём E целиком, но на множестве полной меры.

$$|f+g| \leqslant |f| + |g|$$

Эта норма невырожденная. Если $f \in S_+(E)$ и $\int f\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на E.

Теорема 3 (Счётная аддитивность интеграла)**.** Пусть $f \in S(E)$ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in ?$, определн $\int_E f d\mu$. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$$

Доказательство. ... ■

Теорема 4 (О приближении интеграла интегралом по множеству конечной меры)**.** Пусть мера E конечна и $f \in L(E, \mu)$ суммиурема. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \exists E_0 \subset E : \mu(E_0) < +\infty \text{и} \int_{E \setminus E_0} |f| d\mu < \epsilon$$

Доказательство. Не умаляя общности $f \geqslant 0$ на E. Продложим f нулем вне E. $J(A) = \int_A f d\mu$— мера. $E_K = E\{f > \frac{1}{k}\}$, $E_* = E\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Непрерывность меры снизу E_k — множества конечной меры.

Научились приближать с любой точностью интеграл интегралом по множествам конечной меры. ■

Теорема Фато и теорема Лебега.

Теорема 5. Пусть f_k
$inS_+(E)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\underline{\lim}_{k \in \infty} \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$.

И если $f_k(x) \to f(x)$ на E, то $\int_E f(x) \leqslant \underline{\lim} \int_E f_k(x)$

Теорема 6 (Теорема Лебега о мажорированной сходимости)**.** Пусть $f_n \to f$ сходится почти везде на E и $\Phi \in L(E, \mu)$: $\forall k \in \mathbb{N} |f_k| \leqslant \Phi$ почти везде на E. Тогда $f \in L(E, \mu)$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \int_E f d\mu$.
...

Интеграл положительнозначной функции определяет меру. Интеграл функции это разность мер компонент. Такая разность называется заряд.

Теорема 7 (Критерий плотности)**.** $\sqsupset (X, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, μ, ν – опр. (?) $\mathcal{A}$
$h \in S_+(X)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. h – плотность меры ν относительно μ ($\forall E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) = \int_E h d\mu$)

2. $\forall E \in \mathcal{A}$
$$\inf_E h \cdot \mu(E) \leqslant d(E) \leqslant \sup_E h \cdot \mu(E)$$

Если $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \lambda_n)$, тогда $1 \iff 3$:

3
$$\forall P \in \mathcal{P}_n \quad \inf_P h \cdot \mu(P) \leqslant \nu(P) \leqslant \sup_P h \cdot \mu(P)$$

Доказательство. План: $1 \implies 2 \implies 3$

$2 \implies 1$? $\lhd E \in \mathcal{A} \quad \nu(E) \stackrel{?}{=} \int_E h d\mu$

$$E = E\{h = 0\} \coprod E\{h = +\infty\} \coprod E\{0 < h < +\infty\}$$

$$\nu(E) = \nu(E\{h = 0\}) + \nu(E\{h = +\infty\}) + \nu(E\{0 < h < +\infty\})$$
$$\nu(E\{h = 0\}) \leqslant \sup_{E\{h=0\}} = 0 = \int_{E\{h=0\}} h d\mu$$
$$\nu(E\{h = +\infty\}) \leqslant h \cdot \mu(E) + \infty \cdot \mu(E) = \int_{E\{h=+\infty\} h d\mu}.$$

$\triangleleft \dfrac{1}{q} \in (0,1),\ q > 1 \quad (0,+\infty) = \bigvee k \in \mathbb{Z}[q^k, q^{k+1})$
$E\{h \in (0,+\infty)\} = \bigvee E\{q^k \leqslant h < q^{k+1}\}$
$q^k \mu(E_k) \leqslant \nu(E_k) \leqslant q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$
$q^k \mu(E_k) \leqslant \int h d\mu \leqslant q^{k+1} \cdot \mu(E_k)$
$\dfrac{\nu(E_k)}{q} \leqslant q^k \cdot \mu(E_k) \leqslant \int_{E_k} h d\mu = q \cdot q^k \mu(E_k) \leqslant q \cdot \nu(E_k)$
Просуммируем это по всем k.
$\dfrac{1}{q}\nu(E) = \int_E h d\mu \leqslant q \cdot \nu(E),\ \ q \to 1 \implies \nu(E) \leqslant \int_E h d\mu \leqslant \nu(E) \implies \nu(E) = \int_E h d\mu$
$\triangleleft \widetilde{\nu}$ – стандартное продолжение <...> (нужно дополнить) ■

Теорема 8. $\sqsupset \Phi$ – диффеоморфизм множеств $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad G \underset{\Phi}{\to} O$
Тогда $\forall E \in \mathcal{A}_n \quad E \subseteq O$

$$\lambda_n(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \Big|\det \Phi'\Big| d\lambda_n$$

$$\lambda_n(O) = \int_G |\det \Phi'|\, d\lambda_n$$

Если $O \sim \widetilde{O} \quad G \sim \widetilde{G} \quad \Big(\lambda_n(O \setminus \widetilde{O}) = \emptyset \ldots\Big)$, то

$$\lambda_n(\widetilde{O}) = \int_{\widetilde{G}} |\det \Phi'|\, d\lambda_n$$

Замечание.

$$\begin{aligned} \nu(P) \leqslant \sup_P h d\mu(P) \text{ – от противного} \\ \implies \exists \text{ ячейки } P_0: \quad \nu(P) > M \cdot \mu(P) = \sup_{P_0} h \cdot \mu(P) \\ \Phi(x) = \Phi(x_0) + d_{x_0}\Phi(x - x_0) + o(x - x_0) \\ x \approx x_0 \qquad \Phi(x) \approx \Phi(x_0) + d_{x_0}\Phi(x - x_0) \\ . \end{aligned}$$

Если Q – малая ячейка, то

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \approx \lambda_n d_{x_0}\Phi(Q) = \left|\det \Phi'_{x_0}\right| \lambda_n(Q)$$

Следствие 8.1. Если $\Phi : G \to O$ – диффеоморфизм, $G, O \subseteq \mathbb{R}^n \quad \widetilde{G} \sim G, \widetilde{O} \sim O \quad f \in S(O)$, то

$$\int_{\widetilde{O}} f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\widetilde{G}} f(\Phi(u))\, |\det \Phi'(u) d\lambda_n(u)|$$

Пример 2. Полярные координаты.
$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.
$\Phi : (r,\varphi) \to (x,y)$,
$([0,+\infty) \times [-\pi,\pi])) \to \mathbb{R}^n$,
$(0,+\infty] \times (-\pi,\pi))) \to \mathbb{R}^n \setminus (-\infty,0])$.
$\det \Phi' = r; \quad E = \mathbb{R}^2:$

$$\iint_E f(x,y) dxdy = \iint_{\Phi^{-1}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

Пример 3 (интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ I \cdot I &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-ys} \qquad = \iint_{\{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}} e^{-x^2+y^2} dxdy \\ &= \iint_{\left\{0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \quad r>=0\right\}} e^{-r^2} rdrd\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-r^2}}{-2} \mid_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{+\infty} r^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

.

Пример 4. Цилиницрические координаты

$$\begin{aligned} r \cos \varphi &= x \\ r \sin \varphi &= y \\ h &= z \end{aligned}$$

.

$\Phi : (r, \varphi, h) \to (x, y, z) \quad \Phi : (0, +\infty) \times (-pi, pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z)| \mid x \leqslant 0\}\}$
$|\det \Phi'| = r$
$\iiint_E f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{\Phi^1(E)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h) \cdot rdrd\varphi dh$

Пример 5. Сферические координаты
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\begin{aligned} r \cos \varphi \cos \psi &= x \\ r \sin \varphi \cos \psi &= y \\ r \sin \psi \varphi \sin \psi &= y \end{aligned}$$

$\det \Phi' = r^2 \cos \varphi$
Можно обобщить на $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} r &= \|x\| \\ x_1 &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \ldots \cos \varphi_1 \\ &\ldots \\ x_{n-2} &= r \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-3} \\ x_{n-1} &= r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-2} \\ x_n &= r \sin \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

.

Пример 6.

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leqslant \mathbb{R}^2 \\ x^2+y \leqslant z^2 \\ z \geqslant 0}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Преобразовать используя:

- Цилиндрические координаты

  Перепишем множество интегрирования в новых координатах: $\begin{cases} r^2+h^2 \leqslant R^2 \\ r^2 \leqslant h^2 \implies r \leqslant h \\ h \geqslant 0, r \geqslant 0 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\substack{r^2+h^2\leqslant R^2 \\ r\leqslant h \\ h\geqslant 0, r\geqslant 0}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right) r dr d\varphi dh \\
&= \iint\limits_{\substack{\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi \\ 0\leqslant r\leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}}} r \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right) dr \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} r dr \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\right) dh
\end{aligned}
$$

.

- Цилиндрические координаты (второй вариант)

$$
\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^h r f dr + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}} dh \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2-h^2}} r f dr
$$

.

- Сферические координаты

  $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \\ \operatorname{tg}^2\psi \geqslant 0 \\ \sin\psi \geqslant 0 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant r &\leqslant R \\
r^2\cos^2\psi &\leqslant r^2\sin^2\psi \\
r\sin\psi &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

.

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_E f\left(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\right) r^2\cos\psi dr d\varphi d\psi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R f(\ldots) r^2 \cos\psi dr
\end{aligned}
$$

.

Пример 7.

$$
\iiiint_E z dx dy dz
$$

E :

$$
\begin{aligned}
t^2(x^2+y^2) &\leqslant z^2 \\
0 \leqslant z \leqslant t &\leqslant 3
\end{aligned}
$$

.

$$\iiiint_E zdxdydz = \iint_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} dzdt \iint_{\{x^2+y^2\leqslant \frac{4z^2}{t^2}\}} zdxdy$$
$$= \iint_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} dzdtz\pi\cdot\frac{4z^2}{z^2}$$
$$= 4\pi \iint_{\{0\leqslant z\leqslant t\leqslant 3\}} \frac{z^3}{t^2}dzdt$$
$$= 4\pi \int_0^3 \frac{1}{t^2}dt \int_0^t z^3dz = \frac{4\pi}{4}\left(\int_0^3 t^2dt\right) = \pi\cdot 9$$
.

2 Мера Лебега–Стилтьеса

$\sqsupset g(x)\uparrow$ на $\mathbb{R}$ и непрерывна слева $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} g(x)\equiv g(x_0)\right)$

Задача 1. Если $h(x)$ – произвольная возрастающая функция, то её можно превратить в непрерывную слева исправлением нбчс количества точек.

$\exists\uparrow$ и непрерывная слева $g(x)=h(x)$ всюду кроме точек разрыва $h(x)$

$g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} h(x)$

Определим $\mu_g([a,b]) = g(b)-g(a)\geqslant 0$. Так же верно, что μ_g обладает счетной аддитивностью на $\mathcal{P}_1$ (доказывается так же, как в случае с мерой Лебега) $\implies$ μ_g – мера на $\mathcal{P}_1$

Стандартное продолжение μ_g, которое также обозначается μ_g называется мерой Лебега-Стилтьеса, порождённой функцией g

$$\mu_g(\{c\}) = \mu_g\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}[c,c+\frac{1}{j}]\right)$$
$$= \lim_{j\to\infty}\mu_g\left([c,c+\frac{1}{j}]\right)$$
$$= \underbrace{\lim_{j\to\infty} g(c+\frac{1}{j})}_{=g(c+0)} - g(c) = g(c+0)-g(c)$$
.

$\implies$ Если c – точка непрерывности, то $\mu_g(\{c\})=0$

$\mu_g([a,b]) = \mu_g([a,b]) + \mu_g(\{b\}) = g(b)-g(a)+g(b+0)-g(b) = (g(b+0)-g(a-0))$

$\mu_g((a,b)) = \mu_g([a,b])) - \mu(\{a\}) = g(b)-g(a)-(g(a+0)-g(a)) = g(b)-g(a+0)$

$\mu_g((a,b]) = g(b+0)-g(a+0)$

Определение 1. Пусть $\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k\delta_{a_k}$, $\quad h_k\geqslant 0$, $\quad \delta_a(E) = \begin{cases}1, & a\in E\\ 0, & a\notin E\end{cases}$, тогда μ — дискретная мера.

$$E, E_j\in 2^{\mathbb{R}} \quad E = \bigvee_{j=1}^{\infty} E_j \implies \delta_{a_k}(E) = \sum_{j=1}^{\infty}\delta_{a_k}(E_j)$$

$$\mu(E) = \mu(\bigvee_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_k \sum_j h_k \delta_{a_k}(E_j)$$
$$= \sum_j \mu(E_j)$$

.

Последний переход в равенстве по теореме Тонелли.

Замечание. $\sqsupset \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$
$\forall [a,b] \quad \sum\limits_{k: a_k \in [a,b]} h_k < +\infty$

Пример 8. Если $\{a_k\}$ – дискретно (без точек сгущения на $\mathbb{R}$), то условие автоматически выполняется, т.к. перечесечения a_k-ых с промежутком будет конечно, а значит и сама сумма будет конечна
$A = \mathbb{Q} \quad h_k = \dfrac{1}{2^k}$

Определение 2 (функция Хэвисайда)**.**

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & , x \leqslant 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

$\sqsupset x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall C \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cdot (\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) + C$$

1. $g(x)$ возрастает
2. $x \in [a,b] \quad \sum\limits_k h_k(\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)) \leqslant \sum\limits_{a_k : I_{x,x_0}} h_k$

   Разность Тет ненулевая, если a_k находится между x и x_0 – I_{x,x_0}

Утверждение 1. $A = \{a_k\}_k$

1. $g \in C\left(\mathbb{R} \setminus A\right)$
2. Непрерывность слева на A

Доказательство. 1. $\sqsupset x \in \mathbb{R} \setminus A \quad \sqsupset (a,b) \ni x$

$\triangleleft \forall \varepsilon > 0 \quad \sum\limits_{k: a_k \in [a,b]} h_k < +\infty \implies \exists K : \sum\limits_{\substack{a_k \in [a,b] \\ k \geqslant K}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}.$

$g_k(x) = h_k\left(\Theta(x - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)\right)$ — локально постоянны в точке x ($\exists V_\delta(x) \ : \ g_k \mid_{V_\delta(x)} \equiv const$ для $k = 1, \dots, k$)

Не умаляя общности $[a,b] \supseteq V_\delta(x)$

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{x}) - g(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x - a_k) - \Theta(x - a_k)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(\widetilde{x} - a_k) - \Theta(x_0 - a_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x - a_k) - \Theta(\widetilde{x} - a_k)\right) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{K} h_k \left(\Theta(x - a_k) - \Theta(\widetilde{x} - a_k)\right)}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=K+1}^{\infty} h_k \left(\Theta(x - a_k) - \Theta(\widetilde{x} - a_k)\right)}_{=\frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned}
$$

.

$\Longrightarrow$ Непрерываность

Если $x = a_k \quad g(x) = g_{k_0}(x) + \underbrace{\sum_{k \neq k_0} g_k}_{\text{непрерывна как в пред. случае}}$

■

$$
\begin{aligned}
\mu_g\left([a, b)]\right) &= g(b) - g(a) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\Theta(b - a_k) - \Theta(a - a_k)\right) \qquad a \leqslant a_k \leqslant b \\
&= \sum_{k: a \leqslant a_k < b} h_k = \mu([a, b)])
\end{aligned}
$$

.

μ и μ_g совпадают на совокупности всевозможных промежутков.

Определение 3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Функция f называется локально суммируемой на $\mathbb{R} \iff \forall\, [a, b] \qquad f\Big|_{[a,b]} \in \mathcal{L}(\lambda_1)$.

Определение 4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Функция f называется абсолютно непрерывной, если существует локально суммируемая функция $h(x)$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$
g(x) = \int_{x_0}^{x} h(x) d\lambda
$$

(интеграл Лебега. Если $x < x_0$, то $\int_{x_0}^{x} h\, d\lambda = -\int_{[x, x_0]} h\, d\lambda$)

Если h непрерывна в точке x, то $g(x)$ дифференцируема в точке x и $g'(x) = h(x)$. Доказательство – смотри теорему Барроу. . .

Если $h(x) \geqslant 0$, то $g(x) \nearrow$

Функция $g(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Следует из абсолютной непрерывности интеграла.