Математическая статистика

> ## 1
>
> Баллы:
>
> - баллы: задание + теор тест + посещение
> - очно: 45 + 20 + 20
> - дист: 45 + 40 + 0
> - экзамен: 25
> - распределение: очно/дистанционно по формату — старосты #todo
>
> - [ ] сделать опрос дист/очно
>
> Необходимо знать:
>
> - законы больших чисел
> - типы распределений
>
> ---
>
> Задача Математической Статистики: вы знаете только частично о том, что вы изучаете. Возникает чёрный ящик. На основе экспериментальных данных нужно дать оценки на числовые характеристики распределения. Отвечает не на теоретические вопросы, а на практические с некоторой вероятностью.
> Возможно построение модели, которая с некоторой надёжностью предсказывает распределение.
>
> Работаем с экспериментальными данными.
>
> **Генеральная совокупность** — все результаты данной серии экспериментов (или экспериментальных значений случайно величины).
>
> Если эксперимент чистый, независимый, то эти данные должны в точности соответствовать случайной величине. Но нюанс - вы не можете посмотреть всевозможные результаты экспериментов.

Выборочная совокупность — имеющиеся у нас данные (выборка из генеральной совокупности, возможно неполная).

Выборочная совокупность может не отражать реальное поведение случайно величины. *байка про самолёты-бомбардировщики в вмв*. (ошибка выжившего)

Репрезентативная выборка — выборка, имеющая то же самое распределение, что и теоретическая.

В дальнейшем предполагаем, что все выборки репрезентативные.

Выборка объёма n — набор экспериментальных данных $(x_1, \dots, x_n)$.
Выборка объёма n — набор $(X_1, \dots, X_n)$ независимых одинаково распределённых случайных величин.

Note: поэтому $EX_i = EX_2, DX_i = Dx_2$ и используем обозначения EX_1, DX_1 и т.д.

Выборочные характеристики

Выборку можно рассматривать как дискретную случайную величину

X	x_1	$\dots$	x_n
p^*	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

Среднее выборочное — число

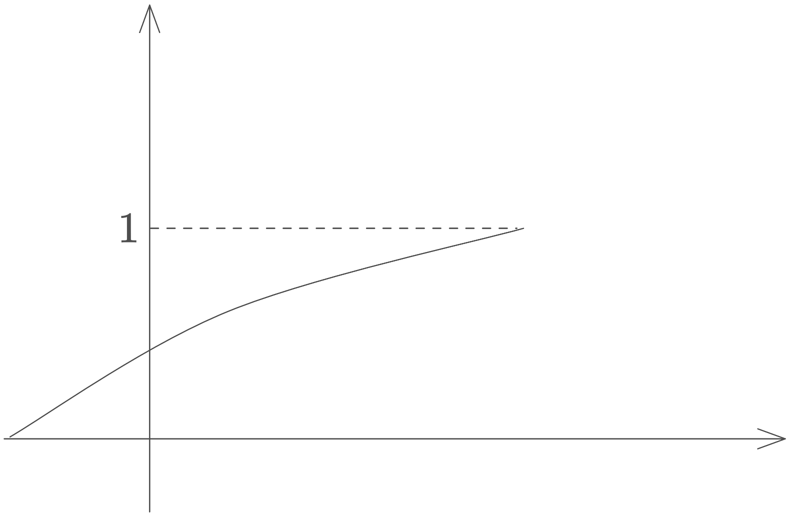
$$\overline{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Выборочная дисперсия — число

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Выборочная функция распределения —

$$F^*(y) = \frac{\text{число данных } x_i \in (-\infty, y)}{n}$$



Теорема Гливенко-Кантелли:
$\overline{X} = (x_1, \dots, x_n)$ объёма n, $F^*(y), F(y)$ – выборочная и теоретическая функции распределения
Тогда $\sup_{y \in \mathbb{R}} |F^*(y) - F(y)| \to 0$ при $p \to \infty$

Начальная обработка статистических данных

Данные могут быть неоднородные.
Пусть однородные, тогда её можно **ранжировать** (упорядочить данные по возрастанию). В результате получаем **вариационный ряд**

- $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$

i-ая порядковая статистика — $X_{(i)}$.

Статистика – некоторая процедура, обрабатывающая статистические данные.

Данные могут повторятся. Например считать оценки (2,3,4,5) среди большого количества людей.

Note: Если мы объединяем повторяющиеся результаты с учётом числа повторов, то получаем частотный вариационный ряд. (надо ли это делать или нет – смотрят по ситуации)

Другой нюанс: всё таки могут быть искажения в выборке. Бывает, что отбрасывается часть первых и часть последних (уже в вариационном ряду).

Если данных много и они не повторяются разумно разбить выборку на интервалы и составить так называем **интервально-вариационный ряд**.

Интервалы:

- равной длины (гистограммы, выдвижение гипотезы о типе распределения)
- равнонаполненные (проверка гипотез о типе распределения)

Число интервалов обычно (не всегда) берётся по формуле

$$K \approx 1 + \log_2 n$$

(иногда $\sqrt[3]{n}$ или что-то зависящее не от n, а от системы, например система оценивая итмо)

В результате получаем К интервалов $[a_{i-1}, a_i)$.
ν_i — число данных попавших в i-ый интервал.
$\frac{\nu_i}{n}$ — относительная частота. (оценка теоретической вероятности попадания случайно величины в данный интервал)

Чтобы получить из этого дискретную величине можно взять середины каждого интервала, которым будет соответствовать вероятность $\frac{\nu_i}{n}$.

$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum c_i \nu_i \quad c_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$

$D_B = \frac{1}{n} \sum (c_{i - \overline{x}})^2 \cdot \nu_i$

Геометрическая интерпретация данных

Обычно удобнее рисовать гистограммы.

Гистограмма — набор прямоугольников для каждого интервала. Основание $[a_{i-1}, a_i)$ длины $l = a_i - a_{i-1}$, а высоту берём пропорционально частоте, причём, чтобы суммарная площадь равнялась 1. высота: $\frac{\nu_i}{nl}$

Гистограмма является приближением плотности распределения (если она непрерывная) и по её виду можно выдвинуть гипотезу о типе распределения. Именно поэтому для этих целей лучше брать интервалы одинаковой длины.

гистограмма.png

Теорема:
Если число интервалов $k(n) \to \infty$ и при этом $\frac{k(n)}{n} \to 0$, то гистограмма по вероятности поточечно сходится к теоретической плотности.

Полигон — кусочно-линейная функция соединяющая точки вида (x_i, ν_i)

1

Математическая статистика с 2022-09-05

Сделать то, что мы делали на практике с ценами акций

- разбить на промежутки длины 1 + log_2(n)
- посчитать частоты
- посчитать частоты/n
- центры отрезков
- функция распределения
- гистограмму + полигон