Теория Типов

1

1. Рассел пытается спасти теорию множеств

$$X = \{x \mid x \notin x\}$$

Рассел предложил ввести тип множества.

ZF - ранг множеств (неявный аналог типа)
2) "Парадокс" лямбда-исчисления
"Парадокс" — обманывает наши ожидания. Мы хотим чего-то волшебного, а оно не получается
3) Типы в языках программирования.

Темы:

1. Типы в языках программирования

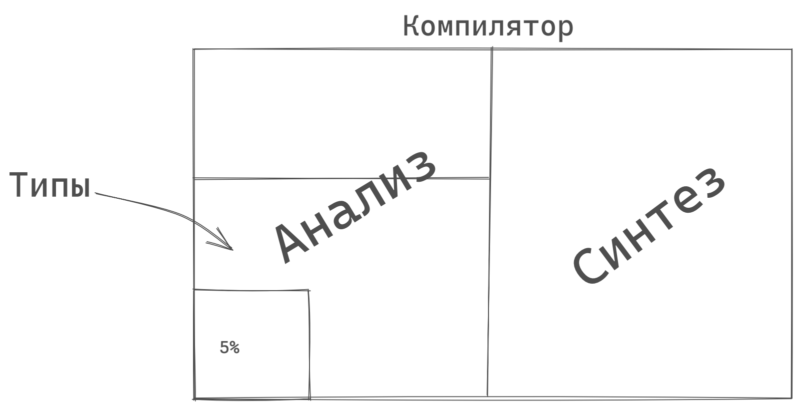
- грамматики - yacc.

```
x → x|y+x
y → (x)|0..9

⇒ программа разбора автоматически
```

Разбор кода это 5% компилятора. Большая часть неформализована.

Java — вывод типа сложен (алгоритмически неразрешим).



Алгол-68. Двухуровневые грамматики.
"Пересмотренное сообщение" — почитать

Применение средств математики к языкам программирования

1. Просто типизированное λ-исчисление (40е)
2. Типовые системы Хинда-Миллера (Haskell, Ocaml, ...)
3. λ-куб и т.п. "продвинутые" вопросы

Теория типов в математике.

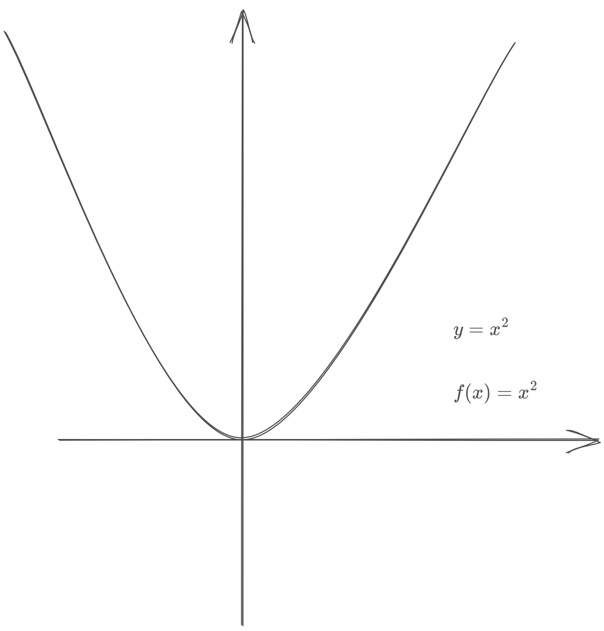
Как доказывать теоремы через написание программ?

- (вне курса) Метод резолюций → Prolog
- Coq, Agda "Теорема о 4 красках"
- Аренд "Гомотопическая теория типов"

λ-исчисление

Алонзо Чёрч (1930-е)
Почему лямбда? Идея берётся из понятия анонимной функции.

Как написать функцию саму по себе?



$\hat{x}.x^2$
$\lambda x.x^2$

Давайте писать аргументы у функции с крышечками сверху.

Идея: давайте построим исчисление настолько простое, чтобы точно без парадоксов. Интуиционисты занимались чем-то похожим.

$\Lambda = \lambda x.\, \Lambda \mid (\Lambda\, \Lambda) \mid X$, где X - метапеременная 'a' ... 'Z'

- лямбда-абстракция $\lambda x.\, \Lambda$ ест всё, что может
- аппликация, применение. $\Lambda\, \Lambda\, \Lambda$ – слева направо

То, что описано выше, называется пред-лямбда-термом.

$D(a, b, c) = b^2 - 4ac$
$D = \lambda a.\, \lambda b.\, \lambda c.\, b^2 - 4ac$ (не совсем формально пока что). после последней точки другой язык.
$D = \lambda abc.\, b^2 - 4ac$

Мета-соглашение

Греческие буквы не используются ни для чего внутри языка.
x, y, z – для переменных
Большие буквы — для термов

α-эквивалентность

$A =_\alpha B$, если $\begin{cases} x \equiv A, y \equiv B & , x \equiv y \\ A \equiv (P\, Q),\, B \equiv (P'\, Q') & , P =_\alpha P',\, Q =_\alpha Q' \\ A = \lambda x.\, P;\, B = \lambda y.\, Q & , P[x := t] =_\alpha Q[y := t] \end{cases}$

$\lambda x.\, \lambda y.\, x =_\alpha \lambda y.\, \lambda x.\, y$

- $(\lambda y.\, x)[x := t] =_\alpha (\lambda x.\, y)[y := t]$
- $\lambda y.\, t =_\alpha \lambda x.\, t$
-

λ-терм (λ-выражения)

Класс эквивалентности по отношению α-эквивалентности

$$\Lambda/_{\approx\alpha}$$

$[\lambda x.\, x] = [\lambda y.\, y]$

Отношение β-редукции

$A \to_\beta B \quad A, B$ – λ-термы

- $A = P\,Q,\ B = P'\,Q'$ и
  - либо $P \to_\beta P',\ Q =_\alpha Q'$
  - либо $P =_\alpha P',\ Q \to_\beta Q'$
- $A = \lambda x.\,P,\ B = \lambda x.\,Q,\ P \to_\beta Q$
- $A = (\lambda x.\,P)Q,\ B = P[x := Q]$ и имеет место свобода для подстановки

$(\lambda x.\,\lambda y.\,x)A \to_\beta \lambda y.\,A$
$(\lambda y.\,A) \to_\beta$ никуда

λ-выражение в нормальной форме — такое, в котором нет редексов.

$(\lambda x.\,\lambda y.\,x)\,y \to_\beta \lambda y.\,y$ - **некорректно**

$(\lambda x.\,\lambda y.\,x)\,y =_\alpha (\lambda x.\,\lambda f.\,x)y \to_\beta \lambda f.\,y \neq_\alpha \lambda y.\,y$

Комбинатор — λ-выражение без свободных переменных.

$I = \lambda x.\,x$ (Identitat)

$((I\,I)\,I)\,I \to_\beta (I\,I)\,I \to_\beta I\,I \to_\beta I$

$(\lambda x.\,x\,x\,x)(I\,I)$ - два β-редекса
$\to_\beta (\lambda x.\,x\,x\,x)\,I \to_\beta (I\,I)\,I \to_\beta I\,I \to_\beta I$
$\to_\beta (I\,I)\,(I\,I)\,(I\,I)$

Теорема Чёрча-Россера

Отношение R обладает ромбовидным (diamond) свойством если при любых a, b, c

$$\begin{cases} R(a,b) \\ R(a,c) \\ b \neq c \end{cases} \implies \exists d \begin{cases} R(b,d) \\ R(c,d) \end{cases}$$

$a > b$ Не обладает $\diamond$
$2 > 0, 2 > 1$ нет $x : 0 > x, 1 > x$

$a < b$ обладает $\diamond$
$a < b, a < c, d = b + c, b < b + c, c < b + c$

β-редуцируемость (многошаговая β-редукция)
$\twoheadrightarrow_\beta$ - транзитивное и рефлексивное замыкания $\to_\beta$

Утверждение: β-редукция не обладает $\diamond$
$(\lambda x.\, x\, x\, x\, x\, x)(I\, I) \to_\beta (\lambda x.\, x\, x\, x\, x\, x)(I)$
$\to_\beta (I\, I)\,(I\, I)\,(I\, I)\,(I\, I)\,(I\, I)$
У двух получившихся выражений нет одного потомка эквивалентного потомка, который можно получить **за один шаг**. Шаг один, потому что определение позволяет сделать только один. Отношение можно замкнуть и тогда несколько шагов можно будет сделать за один шаг:

Теорема: $\twoheadrightarrow_\beta$ обладает $\diamond$

Следствие: Если нормальная форма существует, то она единственна.

1

Теория Типов с 2022-09-07