

## ロケットの運動と人工衛星の打上げ

富田信之

### 1 ロケット推進(Rocket Propulsion)

#### 1.1 ロケット推進力の構成

#### 1.2 有効排気速度，比推力

「入門」4.1

### 2 ロケット運動の基礎(Fundamentals of Rocket Motion)

#### 2.1 単段ロケットの運動とツィオルコフスキーの公式

「入門」5.1,5.2

#### 2.2 多段ロケットの運動

「入門」5.3

### 3 人工衛星の打ち上げ ( Launching of Spacecraft )

#### 3.1 人工衛星打ち上げの数学的表現

「講義」6.1

#### 3.2 ロケットの運動方程式

「講義」6.3

#### 3.3 人工衛星となる条件

「入門」7

#### 3.4 衛星の軌道投入

「入門」11.5

### 4 ロケットの実際

#### 4.1 航法・誘導・姿勢制御

「講義」7,8,9

#### 4.2 推進システム

「講義」4,5

#### 4.3 打ち上げロケットの評価

「講義」1.4

#### 参考書：

富田信之，鬼頭克巳，幸節雄二，長谷川恵一，前田則一，「ロケット工学基礎講義」コロナ社（文中では「講義」と略称）(N.Tomita et.al, “Fundamentals of Rocket Technology” Corona Publishing Co.)

富田信之，「宇宙システム入門」東京大学出版会（文中では「入門」と略称）(N.Tomita, “Introduction to Space Systems”, Tokyo University Press)

G.P.Sutton, “Rocket Propulsion Elements”, John Wiley & Sons

## 1 ロケット推進(Rocket Propulsion)

(「入門」第 4 章, 第 5 章, 「講義」第 2 章 2 . 1 項)

### 1 . 1 ロケット推進力の構成(Thrust of Rocket)

内部に高温, 高圧のガスを定常的に生成し, ノズルを通じて膨張したガスを流出させるロケット・エンジンについて考える. ロケット・エンジンを囲む検査面を考えると, 検査面を通る物質の出入りは, ノズル出口面のガスの流出のみである. したがって,

- ・単位時間当たり検査面内に流入する運動量 :  $0$
- ・単位時間当たり検査面外に流出する運動量 :  $\int_{\text{Nozzle Exit}} (\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}) \mathbf{u} = \dot{m} \mathbf{u}$
- ・検査面に作用する力 :  $\mathbf{P} - \int_{\text{C.S}} p d\mathbf{A}$

である.  $\rho$  はガスの密度,  $\mathbf{u}$  は流速,  $d\mathbf{A}$  は微小面積要素 (大きさは要素の面積, 方向は要素面の法線方向に平行で外向きが正),  $\mathbf{P}$  は推進力 (Thrust 通常 “推力” と呼んでいる),  $p$  は検査面における圧力, Nozzle Exit はノズル出口, C.S は検査面 (Control Surface) を意味する. この系に ニュートンの第 2 法則を適用すると

$$\mathbf{P} - \int_{\text{C.S}} p d\mathbf{A} = \int_{\text{Nozzle Exit}} (\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}) \mathbf{u} - 0 \quad (1.1)$$

いま ノズル出口面におけるガス流出の平均速度を  $v_e$ , ノズルから流出するガスの単位時間当たりの流量即ち推進薬消費率を  $\dot{m}$ , ノズル出口面の圧力を  $p_e$ , 周辺の圧力を  $p_a$ , ノズル出口面の面積を  $A_e$  とすれば, 推力 (Thrust)  $P$  は式(1.2)のようになる (式(1.1)は 3 次元で表示しているが, 実際は 1 次元と考えて十分であるので以下では 1 次元表記をとる).

$$P = \dot{m} \cdot u_e + (p_e - p_a) \cdot A_e \quad (1.2)$$

となる.

推力は式(1.2)右辺の第 1 項の運動量に起因する推力と第 2 項の圧力に起因する推力とから構成される. 前者を運動量推力 (momentum thrust), 後者を圧力推力 (pressure thrust) という. 式(1.2)は周辺の大気圧の影響で推力は  $p_a \cdot A_e$  だけ低下することを示している. ノズル出口面圧力が周辺の大気圧と同じとなるまで膨張する場合は,  $p_e = p_a$  であり, 推力は運動量推力のみとなる.

### 1 . 2 有効排気速度と比推力(Effective Exhaust Velocity and Specific Impulse)

推力を圧力推力も含めて, 推進薬消費率 (推進薬流量とも言う) と流速の積の表示形式で表すことにすると式(1.2)より

$$P = \dot{m} \cdot u_e + (p_e - p_a) \cdot A_e = \dot{m} u' \quad (1.3)$$

となり,  $u'$  は有効排気速度 (Effective Exhaust Velocity) と呼ばれる (有効排気速度は AIAA の記法では  $C$  である.  $u'$  と表記するのはロシア式である. 本講義では  $u'$  を用いる).

総運動量を消費した全推進薬量で除したものが, 推進機関 (エンジン + 推進薬) の一種の

効率を表すパラメータとして用いられている．このパラメータは比推力 (Specific Impulse 略して  $I_{SP}$ ; アイエスピーと読む) と呼ばれ, 燃焼が行われるのは  $t_0$  から  $t_f$  の間とすると次式で定義される．

$$I_{SP} = \frac{\int_{t_0}^{t_f} P dt}{g_0 \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt} \quad (1.4)$$

式(1.4)は比推力が高い程, 少ない推進薬で大きな力積量が得られる高性能のロケット推進であることを意味している．比推力の単位は秒であり, 単位重量の推進薬で単位推力をどれだけ長く出していただけるかを示す数値であるともいえる．比推力は, エンジン性能の指標としてしばしば使用される量である．

式(1.3)において  $u'$  が一定とすると

$$\int_{t_0}^{t_f} P dt = u' \cdot \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt \quad (1.5)$$

したがって, 式(1.4)は,

$$I_{SP} = \frac{u' \cdot \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt}{g_0 \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt} = \frac{u'}{g_0} \quad (1.6)$$

となる．

通常は式(1.6)が比推力の定義であるとしているが, 最近は,

$$I_{SP} = \frac{u' \cdot \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt}{\int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt} \quad (1.6-1)$$

と定義して用いる傾向にある．この場合,

$$I_{SP} = u'$$

となり, 単位は[m/s]ではなくて[ $N \cdot s / kg$ ]と記す．地球上の重力単位を用いることは, 宇宙空間では意味が無くなるのでこの方が合理的ではある．

同じロケット推進機関でも式(1.3)に示す如く, 推力従って有効排気速度, 比推力は周辺の圧力すなわち使用する高度に依存して変化する．通常, 海面上の大気圧は,  $1.013 \times 10^5 \text{Pa}$  であるとして, 式(1.3)で  $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$  とおいた推力を海面上推力(Thrust at sea level)と呼んで, これに対応する有効排気速度, 比推力も, それぞれ海面上有効排気速度, 海面上比推力と呼ぶ．

式(1.3)において  $P_a = 0$  とした場合を真空中推力(Thrust in vacuum), 対応する排気速度, 比推力を真空中有効排気速度, 真空中比推力と呼ぶ．ロケットの主要目表では, 必ず, これらの値が海面上(sea level)であるか真空中(vacuum)であるか付記するのが通例である．(本講義では, 海面上には suffix "0" をつけ, 真空中には suffix " " を付ける．これはロシア式である．AIAA では記号で区別するのではなく, 数値を区別しているようで, 例えば,

ISP 257 sec SL, 314 sec vac など数字の後に SL, vac などと付けている例が見られる.)

ノズル出口面積  $A_e$  を用い, 海面上の大気圧を  $p_0 (=1.03 \times 10^5 \text{Pa})$  として, 式(1.3)より, 海面上の性能値を真空中の性能値へ次のように変換することができる.

$$P_0 = \dot{m}u_e + (p_e - p_0)A_e = \dot{m} \cdot u'_\infty - p_0A_e = P_\infty - p_0A_e \quad (1.7)$$

$$P_\infty = \dot{m}u_e + p_eA_e = P_0 + p_0A_e = \dot{m} \cdot u'_\infty \quad (1.8)$$

海面上有効排気速度と真空中有効排気速度の関係は,

$$u'_0 = \frac{P_0}{\dot{m}} = u'_\infty - \frac{A_e \cdot p_0}{\dot{m}} \quad (1.9)$$

あるいは,

$$u'_\infty = u'_0 + \frac{A_e \cdot p_0}{\dot{m}} \quad (1.9-1)$$

となる.

比推力の海面上と真空中の変換式は, 式(1.6)(1.9)より次のようになる.

$$I_{SP,\infty} = \frac{u'_\infty}{g_0} = \frac{u'_0}{g_0} + \frac{A_e p_0}{\dot{m}g_0} = I_{SP,0} + \frac{A_e \cdot p_0}{\dot{m}g} \quad (1.10)$$

すなわち, 変換には,  $A_e$  と  $\dot{m}$  が必要になる.

また, 式(1.9)より,

$$u'_\infty = \frac{P_0 + A_e \cdot p_0}{\dot{m}} \quad (1.11)$$

となり, 燃焼試験の結果から, 直ちに真空中の有効排気速度を求めることができる. 推進系の能力を

$$I_d = w_p \cdot I_{sp} = P \cdot t_b = m_p \cdot g_0 I_{SP} = m_p u' \quad (1.12)$$

ここに  $w_p$  : 推進薬重量,  $t_b$  : 燃焼時間,  $m_p$  : 推進薬質量

で表して  $I_d$  を総推力 (Total Impulse) と呼び推進系の持つエネルギーの指標とすることもあ (かつてはよく用いられたが, 現在はあまり用いられない).

**演習 1.1** LE-7A は H- A の 1 段に用いられている LOX/LH<sub>2</sub> エンジンである. H- A の諸元表に, 1 段の全備質量 113.6 ton、推進薬質量 100.0 ton、真空中推力 1098 kN、真空中比推力 440 sec、燃焼秒時 390 sec というデータがあったが、これらのデータから、海面上推力ならびに比推力を求めよ。海面上の大気圧は  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、ノズル出口径は 1.737m とする。

**解**

真空中推力と海面上推力の換算は式(1.8)により、また、真空中比推力と海面上比推力の換

算は式(1.10)により行うことができる。

ノズル出口面積は、 $A_e = \frac{\pi}{4} \times (1.737)^2 = 2.37 \text{ m}^2$  として求めることができるので、式(1.8)

に、この  $A_e$  と  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  を代入すると

$$P_0 = P_\infty - p_0 A_e = 1098 \times 10^3 - 1.013 \times 10^5 \times 2.37 = 1098 \times 10^3 - 240 \times 10^3 = 858 \times 10^3 \text{ N}$$

となり、海面上推力は 858 kN と求めることができる。

また、海面上比推力は、式(1.10)より求めるが、質量流量が必要となる。質量流量は、推進薬質量を燃焼秒時で除して  $\dot{m} = 100.0 \times 10^3 / 390 = 256.4 \text{ kg/s}$  と求められるので、

$$I_{SP,0} = I_{SP,\infty} - \frac{p_0 A_e}{\dot{m} g} = 440 - \frac{1.013 \times 10^5 \times 2.37}{256.4 \times 9.8} = 344.5 \text{ sec}$$

として求めることができる。

**演習 1.2** あるデータによると、LE-7 エンジン、真空中推力 1098 kN、真空中比推力 440 sec である。推進薬質量 100.0 ton のときの燃焼秒時はいくらか

**解**

式(1.12)より、

$$t_b = \frac{m_p g I_{SP}}{P} = \frac{100.0 \times 10^3 \times 9.8 \times 440}{1098 \times 10^3} = 392.7 \text{ sec}$$

となる。前問の問題中にあった 390 sec とは少し異なるが、式(1.12)はもともと近似式であるので目に角立てる必要はない。ただし、推力時間曲線が平坦とならない固体ロケットモータでは、式(1.12)を用いて、3 個のパラメータの数値を与えて、他の 1 個の値を推定しようとするとき大きな誤差を生ずる。

液体ロケットの場合には、推力時間曲線は推力を意識的に制御しないかぎり推力時間曲線は平坦であるので、式(1.12)でかなり精度よく、4 個のパラメータのうち 3 個が分かっているときに、他の値の推定ができる。

## 2 ロケット運動の基礎(Fundamentals of Motion of Rocket)

### 2.1 単段ロケットの運動とツィオルコフスキーの公式(Rocket Equation)

ニュートンの第 2 法則「物体の運動量の時間変化率は、物体に作用する外力に等しい」は、次の如く表される。

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{V}) = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

ここに、 $M$  は物体の質量、 $\mathbf{V}$  は物体の速度、 $\mathbf{F}$  は物体に作用する外力である。時刻  $t$  において、質量  $M$ 、速度  $\mathbf{V}$  のロケットが微小時間  $\Delta t$  の間に、質量  $\Delta M$  をロケットに対する

相対速度  $\mathbf{V}_e$  で放出し（絶対空間に対する速度は  $\mathbf{V} + \mathbf{V}_e$  ）、ロケット本体の質量は  $(M - \Delta M)$  に、速度は  $(\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V})$  になる場合を考える。

（注） $\mathbf{V}_e$  はの向きは進行方向と逆であることに注意。すなわち、進行方向を向いた単位ベクトルを

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}$$

とすると、

$$\mathbf{V}_e = -|\mathbf{V}_e| \mathbf{e}$$

である。

時刻  $t$  と  $t + \Delta t$  の運動量は次のようになる。

$$\text{時刻 } t \text{ の運動量} \quad (M\mathbf{V})_t = M \mathbf{V}$$

$$\text{時刻 } t + \Delta t \text{ の運動量} \quad (M\mathbf{V})_{t+\Delta t} = (M - \Delta M)(\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) + \Delta M \{\mathbf{V} + \mathbf{V}_e + o(\Delta)\}$$

1 次のオーダーまでを考慮すると運動量の時間変化率は、

$$\frac{\Delta(M\mathbf{V})}{\Delta t} = \frac{(M\mathbf{V})_{t+\Delta t} - (M\mathbf{V})_t}{\Delta t} = \frac{M \Delta \mathbf{V} + \mathbf{V}_e \Delta M + o(\Delta^2)}{\Delta t} \cong M \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} + \mathbf{V}_e \frac{\Delta M}{\Delta t}$$

ここで、

$$\mathbf{V}_e = -|\mathbf{V}_e| \mathbf{e},$$

とおき、また、 $\Delta M$  は正の量であるが、これを  $dM$  におきかえると、 $dM$  は負の量でなければならないから  $-\Delta M = dM$  とし、 $o(\Delta), o(\Delta^2)$  は、それぞれ  $\Delta, \Delta^2$  以下の小さなオーダーの数であるから、従って、式(2.1)は、

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -|\mathbf{V}_e| \frac{dM}{dt} \mathbf{e} + \mathbf{F} \quad (2.2)$$

となる。搭載された推進薬を機体に対し相対速度をもって投棄することによりロケット本体が速度を獲得していることを式(2.2)の右辺第 1 項は示している。

ここで、 $|\mathbf{V}_e|$  は有効排気速度  $u'$  で置き換えることができるので、

$$-(|\mathbf{V}_e| dM / dt) \mathbf{e} = -u' \frac{dM}{dt} \mathbf{e} = \mathbf{F}_T$$

である。式(2.2)は主な外力は、重力と大気飛行中の空気力であることを考慮すると、

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_g \quad (2.3)$$

と表現できる。ここに、 $\mathbf{F}_a$  は空気力、 $\mathbf{F}_g$  は重力である。ロケットに働く空気力は抗力と揚力である。 $\mathbf{F}_T$  は右辺に移行してあるが外力ではない。

式(2.3)において外力の働かない場合を考えると、

$$M \frac{dV}{dt} = F_T \quad (2.4)$$

以下、一次元の場合についてのみ考えることにし（先に述べたように、1次元の場合のみ考慮すれば通常は十分である）、 $F_T$  を  $|F_T| = -u' \frac{dM}{dt}$  で置き換えると、

$$M \frac{dV}{dt} = -u' \frac{dM}{dt}$$

となつて、

$$dV = -u' \frac{dM}{M} \quad (2.5)$$

から次式をうる、

$$V_f = -u' \ln \frac{M_f}{M_0} \quad (2.6)$$

ここに  $V_f$  は最終（燃焼終了時）速度、 $M_0$  は初期質量、 $M_f$  は燃焼終了時質量である。

$$\frac{M_f}{M_0} = \mu_f \quad (2.7)$$

とにおいて質量比(mass ratio)と呼ぶ。質量比を用いると、

$$V_f = -u' \ln \mu_f \quad (2.8)$$

となる。式(2.8)をツィオルコフスキーの公式(Rocket Equation)と呼んでいる。

## 2.2 多段ロケットの運動(Motion of Multi-stage Rocket)

ところで、一般にはロケットは多段構成で用いられる。何故ならば、多段構成にすると、増速量を増すことが出来、高い最終速度を得ることが出来るからである。

多段ロケットの場合のツィオルコフスキーの公式(Rocket Equation for Multi-stage Rocket)は、次のごとくとなる。

$$V_f = -\sum_{i=1}^N u'_i \ln \mu_{fi} \quad (2.9)$$

ここに、 $u'_i$  : 第  $i$  段の推進機関の有効排気速度

$\mu_{fi}$  :  $i$  段の推進機関で推進されるロケット ( $i+1$  段以上も含む。これを  $i$  段階

ロケットと呼ぶ) の質量比.

第  $i$  段階ロケット全体の質量を  $M_i$ 、第  $i$  段の搭載している推進薬量を  $m_{pi}$  と

すると

$$\mu_{fi} = \frac{M_i - m_{pi}}{M_i} \quad (2.10)$$

### 3 人工衛星の打ち上げ (Launching of Spacecraft)

#### 3.1 人工衛星打ち上げの数学的表現 (Mathematical Expression of Launching of Spacecraft)

地球周回人工衛星打ち上げに際し、ロケットに要求されることは、地球中心を原点とする慣性座標系に置ける初期状態 ( $\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0$ ) から、最終的に地球周回人工衛星になった状態 ( $\mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f$ ) まで、ペイロード (人工衛星) を移行させること (これを「人工衛星を打ち上げる」あるいは「衛星を軌道に投入する」という) である。

初期状態 ( $\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0$ ) は、通常の場合、地球上の打ち上げ地点の位置とその地点でロケットが持つ初速度 (垂直打ち上げの場合、動径方向初速度はゼロであるが、動径に直角方向には、地球自転に伴う初速度を持っている) であり、最終状態 ( $\mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f$ ) は、与えられたミッションに最適な軌道上に人工衛星が入るときの位置とそのときの速度ベクトルとなる。

通常は軌道の近地点 (3.3 項参照) で軌道に投入する。

したがって、ロケットの任務は、衛星の状態に ( $\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_0, \mathbf{V}_f - \mathbf{V}_0$ ) の変化を与えることであると言い換えてもよい。

#### 3.2 ロケットの運動方程式 (Equation of Motion of Rocket)

(「講義」第 6 章より)

##### (1) 直角直交座標系における運動方程式

ロケットによりペイロードを軌道に投入する場合、初期条件 ( $\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0$ ) は既知であり、終端条件 ( $\mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f$ ) は投入軌道の要求より、飛行経路とは独立に設定される。この場合、運動方程式

$$(2.3) \quad (M \, d\mathbf{V}/dt = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_g) \text{ のうちの操作可能な量 } \mathbf{F}_T \text{ の計画 (プログラム) を指定}$$

された評価基準を満足するように決定し、初期状態  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$  から終端状態  $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$  に至る経路を

設定することがロケットの飛行経路形成である。経路形成に用いられるのが上昇の運動方程式である。ロケットの運動は、厳密には柔軟構造物の 3 次元空間での運動である。しかし、ロケットのサイズ設定や地上から周回軌道への飛行計画立案においては、質点の 2 次元の平面運動として取り扱っても、ロケットの上昇運動を十分に記述できる場合が大半であるので、本講義では 2 次元の運動として取り扱う。

ニュートンの運動方程式の表示形式は、用いる座標系により異なる。飛行経路形成では、運動の初期条件、終端条件、飛行中の制約条件等の考慮が簡素になる表示形式の座標系を用いて上昇運動を考える方が便利である。本講では次の如く仮定 (Assumption) してロケッ



トの上昇運動を考えることにする．

- 1) ロケットは質点とする．(Rocket is assumed as a point mass)
- 2) 2 次元の面内運動とする．(Two-dimensional motion)
- 3) 極座標表示を用いる (Polar coordinates Systems)

座標系としては地球中心に原点をおき慣性空間に固定された慣性座標系を用いるが，運動方程式を表示する方法としてデカルト座標系（直角座標系）を用いる場合と極座標系を用いる場合があり，式(2.3)は両座標系を用いるとそれぞれ次のように表される．

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_g = \mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (3.1)$$

ここで  $M$  はロケットの瞬時の質量であり  $dM/dt$  は  $F_T = -u' dM/dt$  としてとりこまれている．デカルト座標系での運動方程式の表示形式として，式(3.1)よりただちに次の式(3.2)を得る．

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_x &= F_x / M \\ \dot{u}_y &= F_y / M \\ \dot{x} &= u_x \\ \dot{y} &= u_y \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

ここに  $u$  は速度，添字は  $x, y$  成分を示す．

(2) 極座標系における運動方程式

極座標系で考えると位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (3.3)$$

である．単位ベクトルの時間微分の  $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$ ， $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r$  なる関係<sup>注</sup>を用いて式(3.3)を微分することにより速度ベクトルは，

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (3.4)$$

となる．動径方向の速度成分を  $u$ ，周方向の速度成分を  $v$  と表すと  $u = \dot{r}$ ， $v = r \dot{\theta}$  であるから速度ベクトルと加速度ベクトルは次式ようになる．

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{u} \mathbf{e}_r + u \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{v} \mathbf{e}_\theta + v \dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &= (\dot{u} - v \dot{\theta}) \mathbf{e}_r + (\dot{v} + u \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta = \left(\dot{u} - \frac{v^2}{r}\right) \mathbf{e}_r + \left(\dot{v} + \frac{uv}{r}\right) \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (3.5)$$

<sup>注</sup>  $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ ， $\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$  と表される．したがって

$\dot{\mathbf{e}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{j} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$ ， $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{i} - \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{j} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r$  となる．

となる．式(3.4)，式(3.5)より，運動方程式(3.1)は，次のように整理される．

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \frac{v^2}{r} + \frac{F_r}{M} \\ \dot{v} &= -\frac{uv}{r} + \frac{F_\theta}{M} \\ \dot{r} &= u \\ \dot{\theta} &= \frac{v}{r} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

デカルト座標系での運動方程式の表示形式は簡素である．軌道投入条件や重力の表示はデカルト座標系では煩雑であるが極座標では簡素になる．重力の表示と地心半径  $r_c$  の円軌道への投入条件をデカルト座標系と極座標系表示で比較すると次のようになる．

一般的には，軌道投入条件や重力表示が簡素になる極座標表示が用いられる．

	<u>デカルト座標系</u>	<u>極座標系</u>
重力表示	$F_x = -\frac{\mu}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $F_y = -\frac{\mu}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$F_r = -\frac{\mu}{r^2}$ $F_\theta = 0$
軌道への投入条件		
地心距離	$\sqrt{x_f^2 + y_f^2} = r_c$	$r_f = r_c$
慣性速度	$\sqrt{u_{xf}^2 + u_{yf}^2} = \sqrt{\mu/r_c}$	$V_f = v = \sqrt{\mu/r_c}$
慣性速度上下角	$\tan^{-1}\left(\frac{u_{yf}}{u_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y_f}{x_f}\right) \pm \frac{\pi}{2}$	$\gamma_f = 0$ もしくは $u = 0$

注 1) 重力については球近似を採用する．

注 2) 添字 f は軌道投入時点を  $u, v$  は速度の動径方向および周方向成分を示す．

注 3) は飛行経路角

### ( 3 ) 風軸基準の運動方程式

式(3.2) (3.6)は方程式は，速度の成分表示で造られているが，宇宙航空では，運動方程式は，速度の大きさ  $V$  と，その局所水平面に対する傾き角  $\gamma$  を用いて表すのが普通である．この運動方程式を風軸 (wind axis) 基準の運動方程式と呼んでいる．

次に風軸基準の運動方程式を求める．速度の大きさ  $V$  と速度上下角  $\gamma$  (飛行経路角ともいう周方向に対する速度ベクトルの角度である) を用いると式(3.4)の速度ベクトルの表示は

$\mathbf{v} = (V \sin \gamma, V \cos \gamma)$  より ,

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = V \sin \gamma \mathbf{e}_r + V \cos \gamma \mathbf{e}_\theta \quad (3.7)$$

となる . 式(3.7)を微分すると加速度ベクトルは , 次式のようになる .

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= (\dot{V} \sin \gamma + \dot{\gamma} V \cos \gamma) \mathbf{e}_r + V \sin \gamma \dot{\mathbf{e}}_r \\ &\quad + (\dot{V} \cos \gamma - \dot{\gamma} V \sin \gamma) \mathbf{e}_\theta + V \cos \gamma \dot{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

再度 , 単位ベクトルの時間微分の  $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$  ,  $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r$  の関係と式(3.7)の  $\mathbf{e}_\theta$  成分に関する  $\dot{\theta} = V \cos \gamma / r$  の関係を用いると式(3.8)は ,

$$\mathbf{a} = \left( \dot{V} \sin \gamma + \dot{\gamma} V \cos \gamma - \frac{V^2 \cos^2 \gamma}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left( \dot{V} \cos \gamma - \dot{\gamma} V \sin \gamma + \frac{V \sin \gamma \cos \gamma}{r} \right) \mathbf{e}_\theta$$

となる . したがって運動方程式は上式と式(3.1)とを用いて次のようになる .

$$\begin{aligned} \dot{V} \sin \gamma + \dot{\gamma} V \cos \gamma - \frac{V^2 \cos^2 \gamma}{r} &= F_r / M \\ \dot{V} \cos \gamma - \dot{\gamma} V \sin \gamma + \frac{V^2 \sin \gamma \cos \gamma}{r} &= F_\theta / M \end{aligned} \quad (3.9)$$

上記の 2 式を ,  $\dot{V}$  ,  $\dot{\gamma}$  について解くと ,  $\dot{V}$  ,  $\dot{\gamma}$  の表示が得られ , 式(3.7) , 式(3.9)より , ロケットの運動方程式(Basic Two-dimensional Equation of Motion of Rocket)は , 下記のように整理される .

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} &= (F_r \sin \gamma + F_\theta \cos \gamma) / M \\ V \dot{\gamma} &= V^2 \cos \gamma / r + (F_r \cos \gamma - F_\theta \sin \gamma) / M \\ \dot{r} &= V \sin \gamma \\ \dot{\theta} &= V \cos \gamma / r \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

式(3.2) , (3.6) , (3.10)のうち問題に適した表示形式を選択し , 初期条件と推力の大きさと方向の計画を用いて運動方程式を積分することにより上昇運動を知ることができる . このように ,  $V, \gamma$  を変数とする座標系を風軸とよんでおり , 式(3.10)は風軸基準の運動方程式と呼ばれる ,

ロケットに働く外力は , 空気力 , 推進力 ( 推進力は厳密に言えば外力ではないが式(2.3)の段階で , 外力と同等に扱ったので , ここでも外力として扱う ) , 重力であり , それぞれ以下のように表される .

(イ) 空気力(Aerodynamic Force)

空気力はよく知られているように , 揚力 (  $L$  ) , 抗力 (  $D$  ) として ,

$$\begin{aligned} L &= q S C_L \\ D &= q S C_D \end{aligned}$$

という形で表される．

ここに，

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

は動圧 (dynamic pressure) と呼ばれ  $[N/m^2]$  すなわち圧力の単位を持つ．

$C_L, C_D$  はそれぞれ揚力係数，抗力係数と呼ばれ，迎え角 (attack angle) の関数である．

$L, D$  は通常機体軸を基準に求められるので，風軸基準の揚力，抗力を添え字 を付けて，

$L_\gamma, D_\gamma$  とあらわすと，外力としての空気力は次のようになる．

$$F_r = L_\gamma \cos \gamma - D_\gamma \sin \gamma \quad (3.11)$$

$$F_\theta = -L_\gamma \sin \gamma - D_\gamma \cos \gamma \quad (3.12)$$

(口) 推進力(Propulsive Force)

$$F_r = P \sin(\gamma + \alpha) \quad (3.13)$$

$$F_\theta = P \cos(\gamma + \alpha)$$

注：推進力は外力ではないことに注意．

(ハ) 重力(Gravitational Force)

$$F_r = -\frac{M\mu}{r^2} = -Mg \quad (3.14)$$

$$F_\theta = 0$$

(二) ロケットに働く外力のまとめ

$$F_r = -Mg + L_\gamma \cos \gamma - D_\gamma \sin \gamma + P \sin(\gamma + \alpha) \quad (3.15)$$

$$F_\theta = -L_\gamma \sin \gamma - D_\gamma \cos \gamma + P \cos(\gamma + \alpha)$$

ここに，

$$L_\gamma = L \cos \alpha - D \sin \alpha \quad (3.16)$$

$$D_\gamma = L \sin \alpha + D \cos \alpha$$

以上を総合して最終的に得られる一般のロケット運動方程式は次のようになる．

$$\frac{dV}{dt} = -g \sin \gamma - \frac{D_\gamma}{M} + \frac{P \cos \alpha}{M} \quad (3.17)$$

$$V \frac{d\gamma}{dt} = -g \cos \gamma + \frac{L_\gamma}{M} + \frac{P \sin \alpha}{M} + \frac{V^2 \cos \gamma}{r}$$

この方程式の解を解析的に得ることは出来ず，数値積分を行って解を求めるしか手はない．数値積分を行う際，飛行経路によって積分値は異なるので，通常，推進薬消費量（上

昇時間), 終端速度, などを最小, あるいは最大になるような条件下での解を求めている.

### 3.3 人工衛星となる条件(Properties of Orbital Motion of Spacecraft)

(「入門」第7章より)

#### (1) 二体問題(Two body Problem)

地球周回人工衛星に働く力には、地球の引力、地球高層大気の摩擦抵抗、太陽・月・他の惑星などからの引力などがあるが、これらの中では、地球の引力がずば抜けて大きい。従って、人工衛星の運動を考えると、通常は、地球の引力のみを受けるものとする。

地球の人工衛星に、地球から働く引力は、地球中心を原点とする慣性座標系で表すと、次のごとく逆自乗則により表される。

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_e m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{m\mu_e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.18)$$

ここに、

$G$ : 万有引力定数 ( $= 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2$ )

$M_e$ : 地球の質量 ( $= 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}$ )

$m$ : 人工衛星の質量

$\mathbf{r}$ : 人工衛星の位置ベクトル (地球中心赤道面基準慣性座標系)

$r$ : 地球中心から人工衛星までの距離 ( $= |\mathbf{r}|$ )

$\mu_e$ : 地心重力定数 ( $= GM_e = 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3 / \text{s}^2$ )

また,  $\mathbf{r}/r$  は, 動径方向の単位ベクトルを表している.

互いに、逆自乗則に基づく力を及ぼしあう二つの物体の運動を調べる問題を、二体問題と言っている。二つの物体が、地球と人工衛星の場合の様に、非常に大きな物体と極めて小さな物体とからなる場合には二体問題は、非常に大きな物体の回りの極めて小さな物体の運動を調べることになり、これを制限二体問題と言っている。

制限二体問題の解は、一般に、円錐曲線で表される軌道運動となるが、それらの中で、円運動を含む楕円運動を行う場合をケプラー (Kepler) 運動と呼んでいる。

地球の人工衛星の場合、静止衛星は円軌道運動を行うが、その他の人工衛星のほとんどが、地球を焦点の一つとする楕円運動を行っている。

地球中心慣性座標系における運動方程式は、

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{m\mu_e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.19)$$

より、

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_e}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (3.20)$$

となる.

式 (3.20) を積分すると、以下 (イ) から (ヘ) に記す結果が得られる。式(3.20)はベク

トル微分方程式であり，ベクトル微分方程式には一般的な解法はない．．

(イ) 軌道面ベクトル(Orbital Surface Vector of Angular Momentum Vector)

式(3.20)と $\mathbf{r}$ とのベクトル積より，軌道面に垂直な次の定ベクトルが定義される。これを軌道面ベクトルという。

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (3.21)$$

式(3.21)は、ベクトル微分方程式(3.20)の解の一つで，角運動量 ( $= m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$ ) が保存されることを示している。

(ロ) ラプラスベクトル(Laplace-Runge-Lenz Vector)

$\ddot{\mathbf{r}}$ と軌道面ベクトルのベクトル積を造ることにより，軌道面内にあって、軌道の長半径を与える、次の定ベクトルが定義される。これをラプラスベクトルと言う。

$$\mathbf{f} = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} - \mu_e \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.22)$$

(ハ) エネルギー積分(Energy Integration)

式(3.20)と $2\dot{\mathbf{r}}$ のスカラー積を造ることにより，エネルギーに関する次の式が得られる。これをエネルギー積分と言う。

$$v^2 - \frac{2\mu_e}{r} = h \quad (3.23)$$

ここに、

$$h = -\frac{\mu_e}{a} \quad (3.24)$$

は、エネルギー積分定数と呼ばれる。

式(3.23)、(3.24)より、

$$v = \sqrt{\mu_e \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (3.25)$$

式(3.25)は、軌道上の任意の点における人工衛星の速度を求めるには極めて便利な式である。

(二) 軌道方程式(Equation of Orbital Motion of Spacecraft)

面積ベクトルとラプラスベクトルの内積より，次の人工衛星の軌道の式を得ることが出来る．

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (3.26)$$

ここに、

p：半直弦 (Semi-latus rectum)

e：離心率 (Eccentricity)

：真近点角 (True anomaly)

式(3.26)は円錐曲線を表すが、 $e$  (あるいは  $h$ ) の値にしたがって、その表す円錐曲線は次のように変化する。

$e = 0 (h = -\frac{2\mu_e}{r})$	円(Circle)
$0 < e < 1 (-\frac{2\mu_e}{r} \leq h < 0)$	楕円(Ellipse)
$e = 1$	放物線(Parabola)
$e > 1$	双曲線(Hyperbola)

我々の当面の対象は、円と楕円で、放物線、双曲線は必要ではない。半直弦、離心率、軌道面ベクトルの大きさ (角運動量)、ラプラスベクトルの大きさ、地心重力定数、エネルギー定数などの間に次の関係式が成り立つ。

$$p = \frac{c^2}{\mu_e} \quad (3.27)$$

$$e = \frac{f}{\mu_e} \quad (3.28)$$

$$\mu_e^2 (e^2 - 1) = hc^2 \quad (3.29)$$

$$h = -\frac{\mu_e^2}{c^2} \quad (3.30)$$

#### (ホ) ケプラー運動の関係式(Formulae for Kepler Motion)

ケプラー運動軌道を描く楕円の二焦点のうち一つに引力を及ぼす物体があり、ここが座標系の原点となる。もう一つの焦点を虚焦点という。最大径を長半径、最小径を短半径とよび、引力を及ぼす物体に最も近い点、すなわち座標系の原点に最も近い軌道上の点を近地点 (Perigee)、最も遠い点を遠地点 (Apogee) という。

近地点半径 ( $r_p$ )、遠地点半径 ( $r_a$ )、長半径 ( $a$ )、短半径 ( $b$ )、半直弦 ( $p$ )、離心率 ( $e$ )、焦点距離 ( $f_e$ )、任意の点の速度 ( $v$ )、近地点速度 ( $v_p$ )、遠地点速度 ( $v_a$ ) の間に、次の諸関係式が成り立つ。

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \quad (3.31)$$

$$p = \frac{2r_a r_p}{r_a + r_p} \quad (3.32)$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (3.33)$$

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad (3.34)$$

$$r_a = a(1+e)$$

$$r_p = a(1-e) \quad (3.35)$$

$$e = \frac{f_e}{a}, \quad f_e = ae \quad (3.36)$$

$$b = a\sqrt{1-e^2} \quad (3.37)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu_e}{p}}(1+e) = \sqrt{\frac{\mu_e}{r_p}} \sqrt{\frac{2r_a}{r_a+r_p}} \quad 3.38$$

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu_e}{p}}(1-e) = \sqrt{\frac{\mu_e}{r_a}} \sqrt{\frac{2r_p}{r_a+r_p}} \quad (3.39)$$

$$v = \sqrt{\mu_e \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (3.40)$$

人工衛星が地球周回軌道上を周回運動する場合，地球中心からの距離とその点における速度は上の関係式を満たしている必要がある．

(ヘ) ケプラーの方程式(Kepler Equation)

時間と、軌道上の衛星の位置に関して、次のケプラーの方程式が成り立つ。

$$t - t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_e}}(E - e \sin E) = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_e}}M \quad (3.41)$$

ここに、 $t_p$ は衛星の近地点通過時刻、 $E$ は離心近点角 (Eccentric anomaly)、 $M$ は平均近点角 (Mean anomaly) で、離心近点角 ( $E$ ) と平均近点角 ( $M$ ) は、それぞれ次の式で定義される。

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (3.42)$$

$$M = E - e \sin E \quad (3.43)$$

また、人工衛星の周期 ( $T$ ) は、次の式から求めることができる．

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_e}} \quad (3.44)$$



**演習 3.1** 人工衛星「はるか」(Muses-B)は、最初、近地点高度 247km、遠地点高度 21,410km、軌道傾斜角 31.3 度の軌道に投入され、その後、近地点高度が 575km に引き上げられた。最終軌道の長半径、半直弦、離心率、近地点速度、遠地点速度および周期を求めよ。また、最初の軌道の遠地点速度を求め、修正前後の遠地点速度の速度差を求めよ。ただし、地球の半径は 6378km として計算のこと。

**解**

初期軌道の近地点半径は  $r_p=247+6,378=6,625\text{km}$ 、遠地点半径は  $r_a=21,410+6,378=27,788\text{km}$ 、最終軌道の近地点半径は  $r_p=575+6378=6953\text{km}$  である。

最初に、最終軌道の軌道パラメータを計算する。

(イ) 長半径：式(3.31)より、 $a = (6,953 + 27,788)/2 = 1.74 \times 10^4 \text{ km}$

(ロ) 半直弦：式(3.32)より、

$$p = \frac{2 \times 6,953 \times 27,788}{6,953 + 27,788} = 1.11 \times 10^4 \text{ km}$$

(ハ) 離心率：式(3.33)より、

$$e = \frac{27,788 - 6,953}{27,788 + 6,953} = 0.60$$

(ニ) 近地点速度：式(3.38)より、

$$v_p = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5}{6,953}} \sqrt{\frac{2 \times 27,788}{6,953 + 27,788}} = 9.576 \text{ km/s}$$

ただし、地球重力定数； $\mu_e = 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$  を用いた。

(ホ) 遠地点速度：式(3.39)より、

$$v_a = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5}{27,788}} \sqrt{\frac{2 \times 6,953}{6,953 + 27,788}} = 2.396 \text{ km/s}$$

次に、軌道修正後の遠地点速度と、軌道修正前の遠地点速度の差を求める。実は、これが、軌道修正のための遠地点における必要増速量となる。

(ヘ) 周期：式(3.44)より、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1.74 \times 10^4)^3}{3.986 \times 10^5}} = 22,842 \text{ s} = 6^h 20^m 42^s$$

(ト) 軌道修正前の近地点半径は 6,625 km であるから、軌道修正前の遠地点速度は、式(3.39)に、 $r_p=6,625 \text{ km}$ 、 $r_a=27,788 \text{ km}$  を代入すると、

$$v'_a = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5}{27,788}} \sqrt{\frac{2 \times 6,625}{6,625 + 27,788}} = 2.350 \text{ km/s}$$

従って、求める速度差は、

$$v_a - v'_a = 2.396 - 2.350 = 0.046 \text{ km/s}$$

### 3.4 衛星の軌道投入(Ascent to Orbit around the Earth)

#### (1) 衛星の軌道投入方式(Patterns of Payload Launch)

人工衛星をロケットで軌道に投入する場合、次の 2 つの方式が一般的に用いられる。

##### (イ) ダイレクト・アセント(direct ascent)

##### (ロ) パーキング軌道 / 遷移軌道(parking orbit / transfer orbit)方式

ダイレクト・アセント方式は、途中一服せずに目指す軌道に直接投入するもので、その中にダイレクト・バーン(direct burn)と呼ばれる方式がある。ダイレクト・バーン方式は、ロケットの 1 段、2 段、(3 段)の推進機関を連続的に働かせて、最終段の燃焼終了時に目標軌道へ投入する方式である。

一般のダイレクト・アセント方式は、1 段燃焼終了後、しばらく弾道飛行(コースティング)させて、飛行経路角が十分小さくなってから 2 段に着火して加速する方式で、一般に低軌道への衛星の投入に広く用いられている。

エネルギー面からは、ダイレクト・バーン方式は損であるが、地上追跡管制ステーションが、射点近傍に限られるときにまれに用いられる。我が国では、1992 年 2 月、H-I ロケットで太陽同期準回帰軌道に「ふよう 1 号」を打上げたときに用いられた。

なお、2 段燃焼終了時に、軌道に投入する方式の変形として、2 段ロケット・エンジンの燃焼を一旦停止して、しばらくの間弾道飛行させ、目標軌道に近くなってから再度 2 段エンジンを着火して軌道投入する方式があり、これを再着火方式と呼んでいる。再着火の場合の技術的問題点は、最着火の際、タンク・システムとエンジンとの間のインターフェース条件が確保されていること、具体的には、気泡が入らずに、圧力条件と温度条件を満たす推進薬がタンクからエンジンに送り込まれることで、このために、coasting 飛行中、推進薬をタンク出口に集めておく手段がとられている。

また、ロケットが 2 段ではなく、3 段、4 段に増加しても上述のことはそのまま当てはまる。

ダイレクト・バーン方式をとるか、通常のダイレクト・アセント方式をとるかは、ダウンレンジ局の配置、飛行安全、推進薬の有効利用などを考慮して総合的に判断される。

パーキング軌道 / 遷移軌道方式は、静止衛星打上げの際に用いられる。すなわち、衛星を一旦、高度 200 ~ 300km の地球周回円軌道に投入した後、ここからこの円軌道高度を近地点、目標高度を遠地点とする長楕円軌道(この長楕円軌道を遷移軌道(transfer orbit)という)に入れ、さらに、長楕円軌道の遠地点で加速して、目標軌道に投入する方式である。

なお、通常の静止衛星打上げ時、遷移軌道は、軌道傾斜角をもっており、遷移軌道の遠地点で加速するとき、同時に軌道面変更も行う。これをアポジー・キックと呼んでいる。

通常、アポジー・キックは衛星側の担当であり、ロケット側は静止遷移軌道に入れるまでが任務となる。

パーキング軌道を静止衛星打ち上げに用いる理由は、静止衛星の静止位置を選べる利点がある。

あること（衛星を静止軌道に入れる地点が衛星の静止位置となる．静止遷移軌道の遠地点が日本の経度上に来るまでには，通常，静止遷移軌道上を三周あるいは7周させる必要がある）と，長楕円軌道の遠地点で軌道傾斜角変更をすると，必要な速度インパルスが近地点での傾斜角変更に比べて少なく済む利点があるからである．

## （２）人工衛星の簡易軌道投入解析（Analysis of Payload Launch Capability）

人工衛星の軌道投入は，初期状態( $\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0$ )から，最終的に地球周回人工衛星になった状態( $\mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f$ )まで，ペイロード（人工衛星）を移行させることであると述べたが（3.1 項参照），厳密には，運動方程式(3.17)を最適化法を用いて数値積分しなければならないので，ロケットとペイロード（衛星）を与えて，その組み合わせで人工衛星とすることができるかという解析は簡単にはできない．

しかし，概念設計におけるサイジング・スタディの際に，いちいち数値積分しては，手間が掛かって仕方がない．

そこで，比較的精度よく打ち上げ能力を計算できる簡便法が用いられているので，それを以下に紹介する．

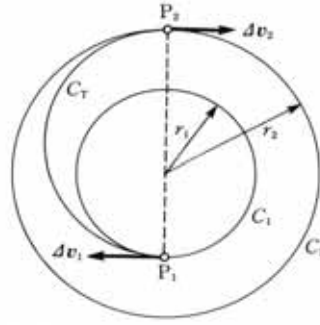
軌道投入解析において，キーとなるのは増速量である．人工衛星の軌道の形が決まっているとき，その軌道上の位置（動径）と速度は既知となり，初期位置における速度から，軌道上の位置における速度まで持ってゆくこと（増速する）が人工衛星となる条件であるからである．以下に示す方法は，人工衛星となるのに必要な増速量をホーマン移行と呼ばれる軌道変換方式で，また，ロケットの増速量をツィオルコフスキーの方程式を応用した近似法で計算することによって行う人工衛星の軌道投入解析近似計算法である．

### （イ）ホーマン型移行(Hohmann Transfer)

同一飛行面内にある 2 つの円軌道の間で，一方の軌道から他の軌道に移行するときに，もっとも増速量の少ない移行方式をホーマン型移行と呼んでいる。実際に，パーキング軌道から静止軌道に移すときなどは，ホーマン移行が用いられているが，簡便法は，地上からの打ち上げにもこの移行法を適用しているので，ここではまずホーマン移行について説明する．

ホーマン型移行は半径  $r_1$  の軌道  $C_1$  から，半径  $r_2$  の軌道  $C_2$  に移行するときに， $C_1$  に外接， $C_2$  に内接する移行（楕円）軌道を作り，移行軌道の近地点  $P_1$  と遠地点  $P_2$  の 2 点で推進機関を作動させて軌道間の移行を行なわせるので，2 インパルスホーマン型移行と呼ばれている。の場合には，2 インパルス移行がインパルス量最小である。 $r_2/r_1 > 11.94$  になると，3 インパルスホーマン型移行が有利になるが，地球周回軌道はほとんどが  $r_2/r_1 < 11.94$  であるので，（静止軌道の場合  $r_2/r_1 = 6.61$ ）2 インパルスホーマン型移行が専ら用いられる。ホーマン移行の場合、 $P_1, P_2$  点における増速量は次のようになる。

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= \sqrt{\frac{2\mu_e r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{\mu_e}{r_1}} \\ \Delta v_2 &= \sqrt{\frac{\mu_e}{r_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_e r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}\end{aligned}\quad (3.45)$$



ホーマン移行

(口) 必要増速量(Required Velocity for Spacecraft)

ホーマン移行を用いて，地上から半径  $R_p$  のパーキング軌道と静止軌道を利用して，半径  $R_T$  の同期軌道へ投入する場合に必要な増速量の計算を行う。この場合，まず地表面で軌道速度まで加速して，半径が地球半径に等しい軌道にロケットを投入してから，漸次ホーマン移行を適用すると考える。

静止遷移軌道への投入を例にとりて，各増速点における増速量を求めると次のごとくなる。ただし，軌道面の変更は考慮してない。

$$\begin{aligned}v_{ce} &= \sqrt{\frac{\mu_e}{R_e}} \\ \Delta v_{1e} &= \sqrt{\frac{\mu_e}{R_e}} \left( \sqrt{\frac{2R_p}{R_e + R_p}} - 1 \right) \\ \Delta v_{2p} &= \sqrt{\frac{\mu_e}{R_p}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2R_e}{R_e + R_p}} \right) \\ \Delta v_{3p} &= \sqrt{\frac{\mu_e}{R_p}} \left( \sqrt{\frac{2R_T}{R_p + R_T}} - 1 \right) \\ \Delta v_{4T} &= \sqrt{\frac{\mu_e}{R_T}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2R_p}{R_p + R_T}} \right)\end{aligned}\quad (3.46)$$

ここに、必要増速量は、

$$\Delta v_N = v_{ce} + \Delta v_{1e} + \Delta v_{2p} + \Delta v_{3p} + \Delta v_{4T} \quad (3.47)$$

である。

ここで、6.1 項で述べたことを振り返ってみると、衛星に必要な増速量は、最終速度と初期速度の差であった。ロケットに搭載された人工衛星は、慣性空間から見れば地球と一緒に回転するので、打ち上げ点の緯度に対応する周速度(打ち上げ点を通り赤道面に平行な面内の速度)

$$v_\phi = R_e \omega_e \cos \phi_e \quad (3.48)$$

を持っている。打上げの際に地球の自転方向に打ち出すことにすれば、人工衛星となるために必要な速度は、式(3.47)から式(3.48)に対応する速度  $v_\phi$  を減じたものとなる。

すなわち、最初、地表面で地球半径を半径とする円軌道まで加速するときに、式(3.48)で与えられる速度を持っているので、

$$\Delta v'_N = \Delta v_N - v_\phi \quad (3.49)$$

が、軌道投入までに必要な増速量である。

ロケットを軌道に投入する場合、式(3.49)の増速量  $v'_N$  に見合った増速量  $v_f$  を与えるロケットでなければペイロードの軌道投入はできないことになる。

**演習 3.2** 種子島射場から高度 200km のパーキング軌道を用いて、軌道傾斜角  $31^\circ$  の同期軌道(高度 35786km)への遷移軌道にペイロードを投入するための必要増速度を求めよ。ただし、地球半径は 6378.142km とする。

**解**

式(3.46)と式(3.48)を用いればよいのであるが、遷移軌道に投入すればよいので、 $\Delta v_{4T}$  は必要ないことに注意する必要がある。また、「軌道傾斜角  $31^\circ$  の同期軌道」と断っているのは、種子島射場から真東に打ち出せば、軌道傾斜角  $31^\circ$  の軌道に入るので、必要増速度の計算のときに軌道面の変更を考慮しなくてよいという意味である。

式(3.46)の計算に必要な数字を次のように準備する。

$$\mu_e = 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3 / \text{s}^2$$

$$\omega_e = 0.729211586 \times 10^{-4} \text{ rad} / \text{s}$$

$$R_e = 6378.14 \text{ km}$$

$$R_p = 6378.14 + 200 = 6578.14 \text{ km}$$

$$R_T = 6378.14 + 35786 = 42164.14 \text{ km}$$

これらを用いて、式(3.46)の  $v_{ce}, \Delta v_{1e}, \Delta v_{2p}, \Delta v_{3p}$  を計算すると次のようになる。

$$v_{ce} = \sqrt{\frac{\mu_e}{R_e}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5}{6378.14}} = 7.905 \text{ km} / \text{s}$$

$$\Delta v_{1e} = \sqrt{\frac{\mu_e}{R_e}} \left( \sqrt{\frac{2R_p}{R_e + R_p}} - 1 \right) = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5}{6378.14}} \left( \sqrt{\frac{2 \times 6578.14}{6378.14 + 6578.14}} - 1 \right) = 0.0608 \text{ km} / \text{s}$$

$$\Delta v_{2p} = \sqrt{\frac{\mu_e}{R_p}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2 \times R_e}{R_e + R_p}} \right) = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5}{6578.14}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2 \times 6378.14}{6378.14 + 6578.14}} \right) = 0.0603 \text{ km} / \text{s}$$

$$\Delta v_{3p} = \sqrt{\frac{\mu_e}{R_p}} \left( \sqrt{\frac{2 \times R_T}{R_p + R_T}} - 1 \right) = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5}{6578.14}} \left( \sqrt{\frac{2 \times 42164.14}{6578.14 + 42164.14}} - 1 \right) = 2.455 \text{ km} / \text{s}$$

ここで、式(3.48)から、

$$v_\phi = R_e \omega_e \cos \phi_e = 6378.14 \times 0.7292 \times 10^{-4} \times \cos 31^\circ = 0.399 \text{ km} / \text{s}$$

となるので、必要増速量は、

$$\begin{aligned} \Delta v'_N &= v_{ce} + \Delta v_{1e} + \Delta v_{2p} + \Delta v_{3p} - v_\phi \\ &= 7.905 + 0.0608 + 0.0603 + 2.455 - 0.399 = 10.082 \text{ km} / \text{s} \end{aligned}$$

となる。

#### (ハ) アポジー・キック(Apogee Kick)

静止遷移軌道から静止軌道への投入は、ロケットの担当ではないと先に述べたが、ついでに少し触れておくことにする。静止軌道に投入するとき、まず、静止遷移軌道から同期軌道に投入し、ついで、軌道面変更を行って静止軌道に入れるのが順序であるが、実際は、静止遷移軌道から移行するとき、同時に、軌道面変更を行っている。これを、アポジー・キックといっている。すなわち、最後の増速を行う点でロケットの姿勢を進行方向に対し傾けて推進機関を噴射し、増速と姿勢変更を同時に行うのである。

静止遷移軌道上の遠地点速度を  $v_a$ 、軌道傾斜角を  $i$ 、静止軌道速度を  $v_s$  とすると、静止軌道へ投入する必要な増速量  $\Delta v_s$ 、推進機関を向ける方向  $\beta$  は次の式から求められる。

$$\Delta v_s = \sqrt{v_a^2 + v_s^2 - 2v_a v_s \cos i}$$

$$\beta = \pi - \alpha - i \quad (3.50)$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{v_a}{\Delta v_s} \sin i \right) \quad (3.51)-$$

**演習 3.3** 演習 3.2 において，静止遷移軌道から静止軌道に投入するに必要な増速量を求めよ．また，アポジー・キック時に推進機関をどの方向に向けるべきか．

解 静止遷移軌道遠地点速度は式(3.39)に， $r_a = R_T = 42164.14 \text{ km}$ ,  $r_p = R_p = 6578.14 \text{ km}$ を用いて，

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu_e}{R_p}} \sqrt{\frac{2 \times R_T}{P_p + R_T}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5}{6578.14}} \sqrt{\frac{2 \times 42164.14}{6578.14 + 42164.14}} = 10.239 \text{ km/s}$$

また，静止軌道速度は，静止軌道の円軌道速度であるから，たとえば式(3.38)において， $e=0, r=R$ （円軌道半径）とにおいて，

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu_e}{R}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5}{42164.14}} = 3.075 \text{ km/s}$$

となる．したがって，式(3.50)より，増速量は

$$\Delta v = \sqrt{v_a^2 + v_s^2 - 2 \times v_a \times v_s \cos i} = \sqrt{10.239^2 + 3.075^2 - 2 \times 10.239 \times 3.075 \cos 31^\circ} = 7.767 \text{ km/s}$$

また，推進機関を向ける方向は，式(3.50)(3.51)より，

$$\beta = \pi - \sin^{-1} \left( \frac{v_a}{v_s} \sin i \right) - i = 180 - \sin^{-1} \left( \frac{10.239}{7.767} \sin^{-1} 31^\circ \right) = 106.24^\circ$$

となる．

## (二) ロケット理想増速量 (Ideal Velocity Increment of Rocket)

(「講義」第 6 章，「入門」第 11 章)

本節では，ロケット増速量の簡易計算法について述べる．

ロケットの概念構想時に，あるロケットのコンフィギュレーションでの増速量を知りたいときに一々数値積分を実行するのは手間がかかるので，運動方程式(3.17)の第 1 式から簡易にロケットの増速量を計算する方法が考案されている．

運動方程式(3.17)の第 1 式を積分すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
 V &= - \int_{t=0}^{t=t_f} g \sin \gamma dt + \int_{t=0}^{t=t_f} \frac{P}{M} \cos \alpha dt - \int_{t=0}^{t=t_f} \frac{D_\gamma}{M} dt \\
 &= - \int_{t=0}^{t=t_f} g \sin \gamma dt - \int_{t=0}^{t=t_f} \frac{D_\gamma}{M} dt - \int_{t=0}^{t=t_f} \frac{P}{M} (1 - \cos \alpha) dt + \int_{t=0}^{t=t_f} \frac{P}{M} dt
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

上式の最初の 3 項は損失項であって、それぞれ重力損失(gravity loss)、抗力損失(drag loss)、制御損失 (maneuvering margin) と名づけられており、合わせて速度損失(velocity loss)と呼んでいる。これらをそれぞれ  $\Delta v_g, \Delta v_d, \Delta v_m$  とあらわすと、速度損失は、

$$\Delta v = \Delta v_g + \Delta v_d + \Delta v_m \tag{3.53}$$

となる。

式(3.53)右辺最後の項は、エンジンの推力で得られる増速度分を表している。この増速量は簡易的に多段ロケットに対するツィオルコフスキーの式(2.9)で表すことが出来るので式(3.53)は次のようになる。

$$\Delta v_A = -\Delta v - \sum_{i=1}^N u'_i \ln \mu_{f,i} \tag{3.54}$$

式(3.54)がロケット増速量の簡易計算式となる。速度損失としては経験的に 1.85 ~ 2.0 km/s が用いられている。

式(3.54)を用いる場合、1 段、2 段ときれいに分かれている場合、問題はないが、補助ブースタが、1 段燃焼中のある期間作動している場合の扱いに工夫を要する。一つの考え方は、推力は 1 段エンジンと補助ブースタの推力をあわせ、これを 1 段エンジンと補助ブースタの推進薬流量で除したものを等価有効排気速度とするものであって、H- ロケット増速量の計算例が、富田信之「宇宙システム入門」p.83-86 にあるので参考とされたい。

また、この計算に用いる推進系データは、すべて真空中のものであり、それゆえに、式(3.54)で求められる増速量を理想増速量と呼んでいる。名前は、理想増速量であるが、速度損失には、シミュレーション計算あるいは実際の飛行結果から分かった増速量と理想増速量の差の経験値を用いているので、結果としては、実際の増速度に極めて近い値が得られるのである。

#### (ホ) 衛星軌道投入可能性の簡易推定

以上述べてきたことから、ある衛星を、あるロケットで軌道に投入できるかどうかの簡易推定を行なうことが可能である。

式(5.39)を用いれば、与えられたミッション(軌道)を達成する人工衛星の打ち上げに必要な速度  $\Delta v'_N$  が計算できる。一方、式(5.54)を用いれば、与えられたロケットが、与えられ



た質量の人工衛星を加速できる能力  $v_A$  が計算できる。

両者を比較して、 $\Delta v_A \geq \Delta v'_N$  ならば人工衛星を軌道に投入することが可能と判断できる  
るのである。

**演習 3.4** 下表のデータは、H- を用いてある衛星を打ち上げたときのものである。これ  
らのデータを用いて H- の理想増速度を計算せよ。ただし、次を条件とせよ。

(イ) 1 段の燃焼開始と同時にリフトオフする (実際は 4~6 秒後である)。

(ロ) SRB は燃焼終了後すぐ切り離される

(ハ) 衛星フェアリングは 1 段燃焼終了後すぐ切り離される

H- データ

	質量(kg)	推進薬質量(kg)	比推力(s)	燃焼秒時(s)
リフトオフ時	$263.9 \times 10^3$			
1 段	$98.1 \times 10^3$	$86.3 \times 10^3$	445.4(vac)	348
2 段	$19.7 \times 10^3$	$16.7 \times 10^3$	452(vac.)	609
SRB(2 基分)	$140.9 \times 10^3$	$118.2 \times 10^3$	273(vac.)	94
ペイロード(衛星)	$3.8 \times 10^3$			
衛星フェアリング	$1.4 \times 10^3$			

解

SRB は 1 段燃焼中に燃焼を終了するので、1 段延焼中を、1 段と SRB が共に燃焼してい  
るフェーズと、1 段のみが燃焼しているフェーズに分ける必要がある。前者をフェーズ A、  
後者をフェーズ B と名づける。飛行中のフェーズは、これに 2 段燃焼中のフェーズ を加  
えて 3 フェーズとなる。

次のような表に整理して計算すると間違いが少ない。

フェーズ	$M_0$	$M_f$	$\mu_f$	$u'$	$\Delta v$
A	263.9	122.4	0.464	2955	2270
B	99.7	35.7	0.368	4365	4364
	23.5	6.8	0.289	4430	5499

フェーズ A:

$$M_f = 263.9 - 118.2 - 86.3 \times \frac{94}{348} = 122.4 \text{ ton}$$

$$\mu_f = \frac{M_f}{M_0} = \frac{122.4}{263.9} = 0.4638$$

$$P_1 = \frac{I_{SP} w_p}{t_b} = \frac{445.4 \times 86.3 \times 9.8}{348} = 1082.5 \text{ kN}$$

$$P_s = \frac{I_{SP} w_p}{t_b} = \frac{273 \times 118.2 \times 9.8}{94} = 3364.2 \text{ kN}$$

$$u' = \frac{P_1 + P_s}{\frac{w_{p,1}}{t_{b,1}} + \frac{w_{p,s}}{t_{b,s}}} = \frac{1082.4 + 3364.3}{\frac{86.3}{348} + \frac{118.2}{94}} = \frac{4446.7}{1.505} = 2954.6 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = -2954.6 \ln 0.4638 = 2270 \text{ m/s}$$

#### フェーズ B

$$M_0 = 122.4 - (140.9 - 118.2) = 99.7 \text{ ton}$$

$$M_f = 99.7 - 86.3 \times \frac{348 - 94}{348} = 36.7 \text{ ton}$$

$$\mu_f = \frac{M_f}{M_0} = 0.3681$$

$$u' = g I_{SP} = 445.4 \times 9.8 = 4364.9 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = -u' \ln \mu_f = -4364.9 \times \ln 0.3681 = 4362 \text{ m/s}$$

#### フェーズ

$$M_0 = 36.7 - (98.1 - 86.3) - 1.4 = 23.5 \text{ ton}$$

$$M_f = 23.5 - 16.7 = 6.8 \text{ ton}$$

$$\mu_f = \frac{6.8}{23.5} = 0.2894$$

$$u' = g I_{SP} = 9.8 \times 452 = 4430 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = -u' \ln \mu_f = -4430 \times \ln 0.289 = 5494 \text{ m/s}$$

以上を総合すると、増速度分は

$$\Delta v = 2270 + 4362 + 5494 = 12126 \text{ m/s} = 12.12 \times 10^3 \text{ km/s}$$

となる。

#### (ト) 制約条件

実際のロケット打上げには、多くの制約条件がある。コンピュータを用いて行う解析には約 100 件の制約条件が課せられるが、概念設計段階の実現可能性解析の段階で必要な制約条件は次のようなものである。

(a) 初期推重比

打上げ時に、エンジンの推力が機体の重量よりも大きくないと機体は、予定された時刻にランチャを離れることが出来ない。また、ロケットの速度はすぐに増大し、空気抵抗が増えるので、初期推力（海面上）の値は打上げ時の機体総重量よりもかなり大きくしなければならない。推進薬に液体水素を用いていないときには、エンジン初期推力と機体重量の比（これを初期推重比という）は 1.1 以上あればよいが、液体水素を用いている場合にはタンク体積が大きいので空気抵抗も大きく 1.3 以上必要である。

(b) 最大加速度

ロケット飛行中に生ずる最大加速度は、ペイロード保護のため、通常無人の場合 4g、有人の場合には 3g に制限されている。

(c) 最大動圧

簡易計算の場合にはあまり問題とはならないが、飛行中の最大動圧は 50 kPa 以下に採るのが普通である。これは空力加熱上の制約である。