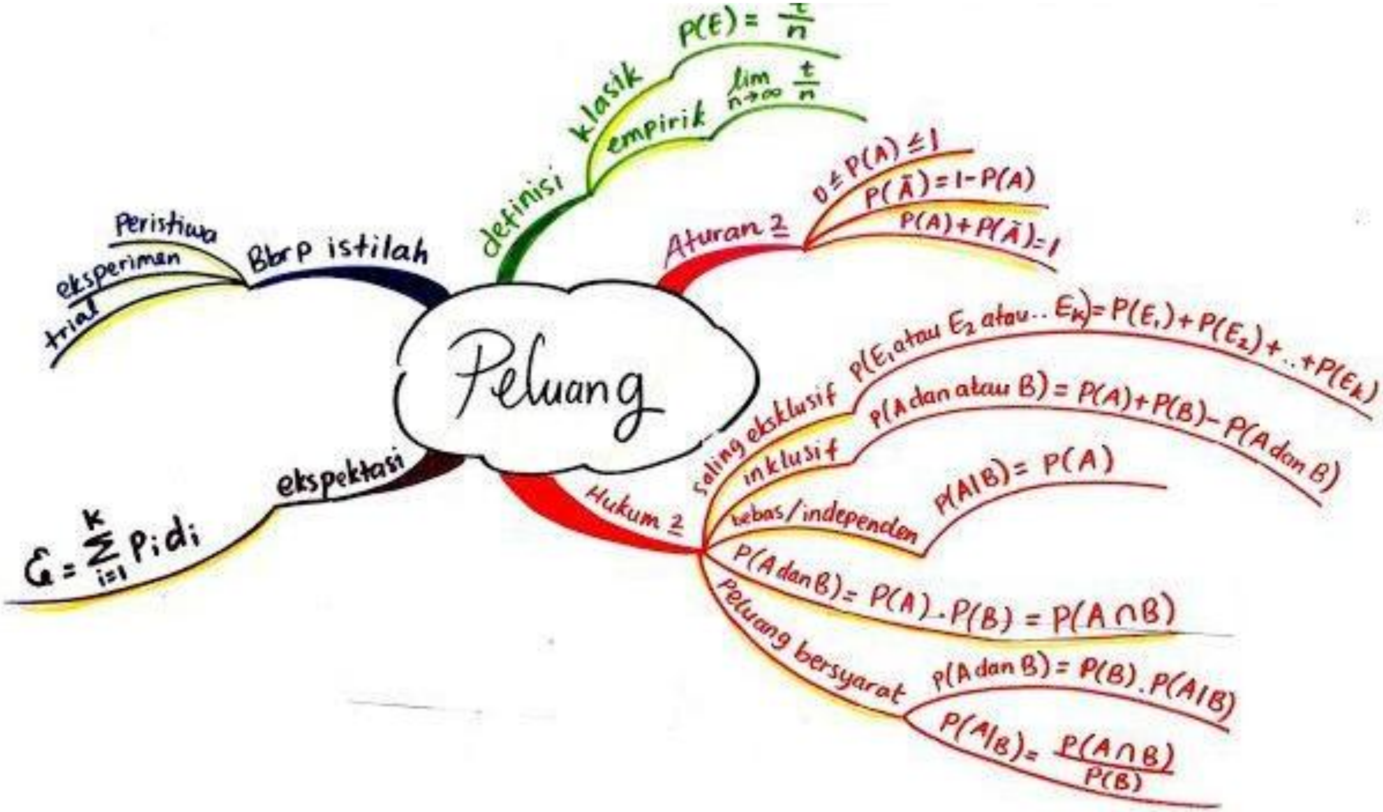
Teori Peluang / Probabilitas



PELUANG (PROBABILITAS)

- Suatu ukuran tentang kemungkinan suatu peristiwa (event) akan terjadi di masa mendatang.

Manfaat:

- Membantu pengambilan keputusan yang tepat, karena kehidupan di dunia tidak ada kepastian, dan informasi yang tidak sempurna.

- Percobaan: Pengamatan terhadap beberapa aktivitas atau proses yang memungkinkan timbulnya paling sedikit dua peristiwa tanpa memperhatikan peristiwa mana yang akan terjadi.

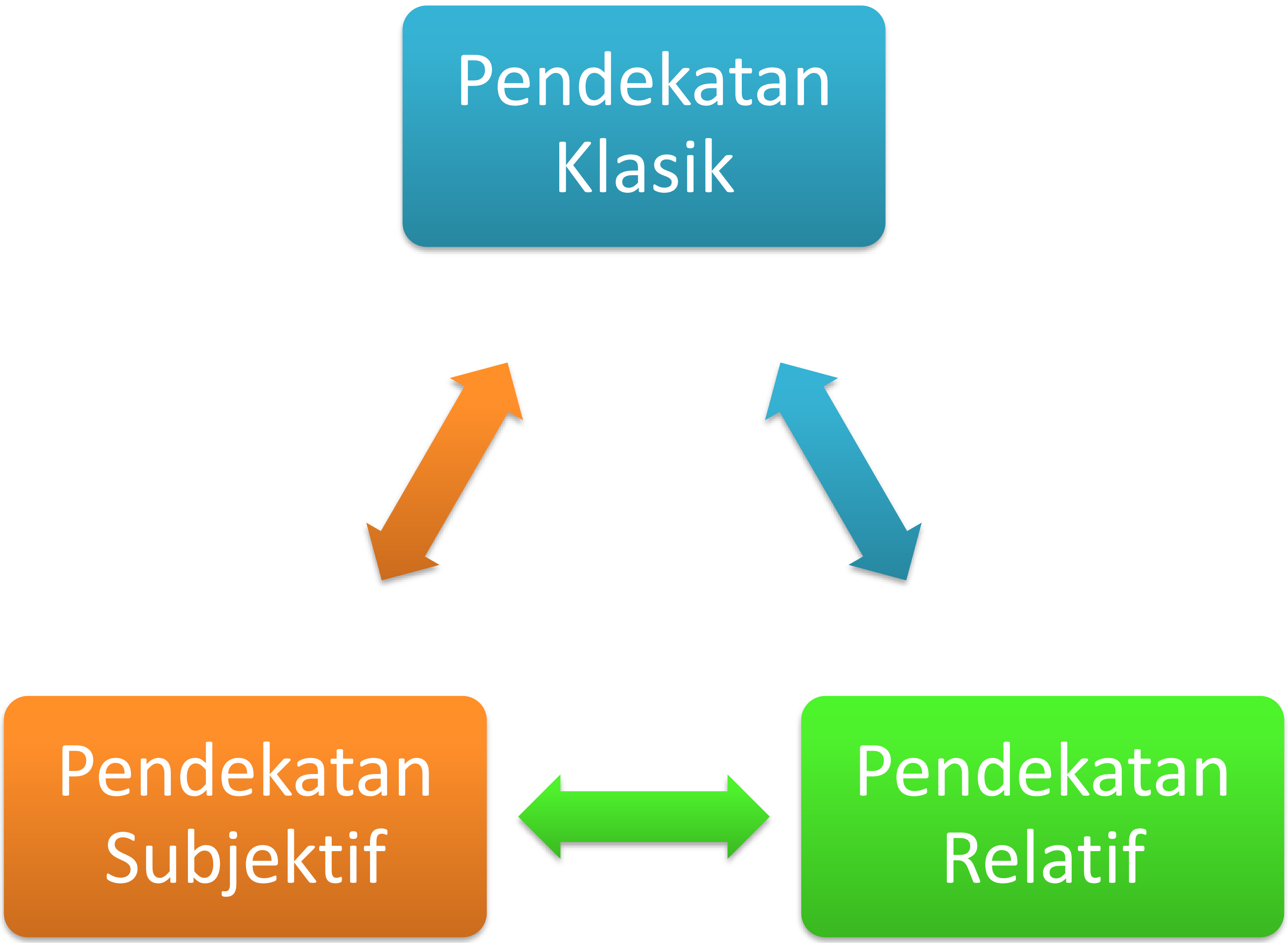
- Hasil (*outcome*): Suatu hasil dari sebuah percobaan

- Peristiwa : Kumpulan dari satu atau lebih hasil yang terjadi pada sebuah percobaan (eksperimen) atau kegiatan.

Contoh:

Percobaan/ Kegiatan	Pertandingan sepak bola Persita VS PSIS di Stadion Tangerang, 5 Maret 2014.
Hasil	Persita menang Persita kalah Seri -- Persita tidak kalah dan tidak menang
Peristiwa	-Persita Menang -PSIS menang

Pendekatan Peluang (Probabilitas)



Pendekatan Klasik

Setiap peristiwa mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi.

Probabilitas suatu peristiwa	=	$\dfrac{\text{jumlah kemungkinan hasil}}{\text{jumlah total kemungkinan hasil}}$

$$P_{(A)} = \frac{n(A)}{n(N)}$$

P(A) = Peluang
N(A) = Peluang kejadian A
n(N) = Peluang seluruh kejadian

CONTOH

Percobaan	Hasil		Probabi-litas
Kegiatan melempar uang	1. Muncul gambar 2. Muncul angka	2	$\frac{1}{2}$
Kegiatan perdagangan saham	1. Menjual saham 2. Membeli saham	2	$\frac{1}{2}$
Perubahan harga	1. Inflasi (harga naik) 2. Deflasi (harga turun)	2	$\frac{1}{2}$
Mahasiswa belajar	1. Lulus memuaskan 2. Lulus sangat memuaskan 3. Lulus terpuji	3	1/3

Contoh

- Berapakah peluang munculnya angka ganjil pada pelemparan sebuah dadu?

  Answer:

  Peluang munculnya angka ganjil pada tiap lemparan adalah 1,3, dan 5. Maka :

$$P_{(ganjil)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Pendekatan Relatif

Probabilitas suatu kejadian tidak dianggap sama, tergantung dari berapa banyak suatu kejadian terjadi/Menghitung probabilita berdasarkan kejadian/data masa lalu

Contoh:

Produksi satu macam barang diperiksa 500 dan terdapat yang rusak 22. Frekuensi relatif produksi = 0,044. Selanjutnya periksa 2000 dimana terdapat yang rusak 82. frekuensi relatifnya = 0,041. Lanjutkan proses demikian, kalau mungkin semua hasil produksi diperiksa dan dicatat berapa yang rusak., misal 0,04. hal ini berarti dalam proses produksi yang cukup lama dengan kondisi yang sama , maka dari setiap 100 barang yang dihasilkan terdapat empat rusak.

Pendekatan Subjektif

Definisi:

Probabilitas suatu kejadian didasarkan pada penilaian pribadi yang dinyatakan dalam suatu derajat kepercayaan.

Berdasarkan tingkat kepercayaan seseorang terhadap suatu kejadian. Orang yang memiliki probabilita 0 = orang pesimis. Probabilita 1 = orang optimis.

- Probabilita = teori kemungkinan atau peluang, nilainya berkisar antara 0 dan 1
- Peluang 0 (nol) = peluang terhadap suatu kejadian yang TIDAK MUNGKIN terjadi
  - Contoh : peluang manusia bisa hidup dengan tidak bernapas selama 24 jam
- Peluang 1 (satu) = peluang terhadap seuatu kejadian yang PASTI terjadi
  - Contoh : peluang manusia meninggal
- Nilai peluang komplemen dari suatu kejadian = 1 – nilai kejadian
  - Contoh :
    - peluang terjadi kebakaran 0.3, maka
    - peluang TIDAK terjadi kebakaran = 1 – peluang terjadi kebakaran = 1 – 0.3 = 0.7

Asas-asas Peristiwa

- Mutually exclusive (saling terpisah) : suatu peristiwa dimana ada 2 atau lebih kejadian yang terpisah. Tidak ada hubungan dan keterkaitan antara A & B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Independen (bebas) : suatu peristiwa yang tidak mempengaruhi peristiwa lainnya. Contoh dalam melempar mata uang

$$P(A \cap B) = P(A) x P(B)$$

- Dependen : suatu peristiwa tergantung pada peristiwa lain, disebut juga kejadian bersyarat

$$P(G/H) = \frac{P(GnH)}{P(H)}$$

Keterkaitan Antar Kejadian

- Hubungan **atau**

  Peluang akan semakin besar

  Ex:

  Peluang munculnya angka 3 atau 4 pada pelemparan sebuah dadu adalah :

$$P_{(3\ atau\ 4)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Hubungan **dan**

  Peluang akan semakin kecil

  Peluang munculnya angka 3 dan 4 pada pelemparan sebuah dadu adalah :

$$P_{(3\ dan\ 4)} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Kaidah Penjumlahan

- Bila A dan B adalah dua **kejadian sembarang**, maka :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

example:

Peluang seorang mahasiswa lulus statistika adalah 2/3 dan peluang lulus matematika adalah 4/9. Peluang sekurang-kurangnya lulus salah satu pelajaran tersebut adalah 4/5. Berapa peluang lulus kedua pelajaran tersebut?

$$P(S \cup M) = P(S) + P(M) - P(S \cap M)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{5} = \frac{14}{45}$$

Kaidah Penjumlahan

- Bila A dan B adalah dua **kejadian terpisah**, maka :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

example :

Dari pelemparan 2 buah dadu, A adalah kejadian munculnya jumlah 7 dan B adalah kejadian munculnya angka 11. Kejadian A dan B adalah saling terpisah karena tidak mungkin terjadi bersamaan. Berapa peluang jumlah 7 atau jumlah 11?

p(A) = 1/6   p(B)=1/18

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$$

Kaidah Penjumlahan

- Bila A dan A’ adalah dua **kejadian yang satu merupakan komplemen lainnya,** maka :

  $$P(A) + P(A') = 1$$

- Example:

  Peluang tidak munculnya angka 3 pada pelemparan sebuah dadu adalah:

  $$P(3') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Peluang Bersyarat

- Adalah peluang dengan suatu syarat kejadian lain.

  Contoh : Peluang terjadinya kejadian B bila diketahui suatu kejadian A telah terjadi.

  Dilambangkan : P(B|A)

  Didefinisikan :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; if \; P(A) > 0$$

  Contoh : Populasi sarjana berdasarkan jenis kelamin dan status pekerjaan.

	Bekerja	**Menganggur**
Laki-Laki	**300**	**50**
Perempuan	**200**	**30**

Peluang Bersyarat

- Kejadian-kejadian

  A = yang terpilih laki-laki

  B = yang telah bekerja

  Jawaban :

$$P(A|B) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$$

Peluang Bersyarat

- Peluang bersyarat untuk **kejadian bebas**, kejadian satu tidak berhubungan dengan kejadian lain.

  $P(B|A) = P(B)$ atau $P(A|B) = P(A)$

  - Contoh :

    Percobaan pengambilan kartu berturut dengan pengembalian.

    A : Kartu pertama Ace

    B : Kartu kedua sekop

    Karena kartu pertama kemudian dikembalikan, ruang contoh untuk pengembalian pertama dan kedua tetap sama yaitu 52 kartu yang mempunyai 4 ace dan 13 sekop.

Peluang Bersyarat

- Jawab :

$$P(B|A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

atau

$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Jadi A dan B adalah kejadian yang saling bebas.

Kaidah Penggandaan

- Bila dalam suatu percobaan kejadian A dan B keduanya dapat terjadi sekaligus, maka

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

- Contoh :

  A : kejadian bahwa sekering pertama rusak.

  B : kejadian bahwa sekering kedua rusak.

  : A terjadi dan B terjadi setelah A terjadi

$$P(A \cap B)$$

Kaidah Penggandaan

Peluang mendapatkan sekering rusak pada pengambilan pertama adalah ¼ dan peluang mendapatkan sekering rusak pengambilan kedua adalah 4/19. Jadi :

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19}$$

Kaidah Penggandaan

- Bila dua kejadian A dan B **bebas**, maka

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Contoh:

A dan B menyatakan bahwa mobil pemadam kebakaran dan ambulans siap digunakan, maka:

P(A) = 0.98

p(B) = 0.92

$$P(A \cap B) = (0.98)(0.92) = 0.9016$$

A dan B saling bebas.

Kaidah Bayes

- Jika kejadian-kejadian $B_1, B_2, \ldots, B_k$ merupakan sekatan dari ruang contoh S dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk i = 1, 2, …, k maka untuk sembarang kejadian A yang bersifat $P(A) \neq 0$.

$$P(Br \mid A) = \frac{P(Br)P(A \mid Br)}{P(B1)P(A \mid B1) + P(B2)P(A \mid B2) + \ldots + P(Bk)P(A \mid Bk)}$$

untuk r = 1, 2, …, k

Kaidah Bayes

Contoh

- Tiga anggota organisasi A telah dicalonkan sebagai ketua. Peluang Pak Andi terpililih adalah 0.4. Peluang Pak Budi terpilih adalah 0.1. Peluang Pak Dedi terpilih adalah 0.5. Seandainya Pak Andi terpilih kenaikan iuran anggota 0.5, Pak Budi dan Pak Dedi masing-masing 0.3 dan 0.4 Berapa peluang Pak Andi terpilih setelah terjadinya kenaikan iuran anggota.

Jawab:

A : iuran anggota dinaikkan

B1 : Pak Andi terpilih

B2 : Pak Budi terpilih

B3 : Pak Dedi terpilih

Kaidah Bayes

- P(B1) P(A|B1) = (0.4)(0.5) = 0.20
- P(B2) P(A|B2) = (0.1)(0.3) = 0.03
- P(B3) P(A|B3) = (0.5)(0.4) = 0.20

$$P(B1 \mid A) = \frac{0.20}{0.20 + 0.03 + 0.20} = 0.465$$

Permutasi

Permutasi adalah suatu susunan yang dibentuk oleh keseluruhan atau sebagian dari sekumpulan benda.

- Permutasi adalah urutan unsur-unsur dengan memperhatikan urutannya, dan dinotasikan dengan ${}_nP_r$ *, yang artinya 'Permutasi r unsur dari n unsur yang tersedia'*

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh :

Dua kupon lotere diambil dari 20 kupon untuk menentukan hadiah pertama dan kedua. Hitung banyaknya titik contoh dalam ruang contohnya.

$$P_2^{20} = \frac{20!}{18!} = 380$$

Permutasi

- Banyaknya permutasi n benda dari n benda yang berbeda ada n!

  Contoh :

  Banyaknya permutasi empat huruf a, b, c, d adalah 4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

- Bila suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara, dan bila untuk setiap cara tersebut operasi kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara, maka kedua operasi itu secara bersama-sama dapat dilakukan dalam $n_1 n_2$ cara. (peraturan general)

  Contoh :

  Banyaknya permutasi yang mungkin bila kita mengambil 2 huruf dari 4 huruf tersebut.

Permutasi

- Banyaknya permutasi n benda yang berbeda yang disusun dalam suatu lingkaran adalah (n-1)!

  contoh :

  Banyaknya permutasi empat huruf a, b, c, d jika keempatnya disusun dalam sebuah lingkaran adalah 4-1! = 3 x 2 x 1 = 6

- Banyaknya permutasi yang berbeda dari n benda yang n_1 di antaranya berjenis pertama, n_2 berjenis kedua, n_k berjenis ke-k adalah

$$\frac{n!}{n_1! + n_2! + \cdots + n_k!}$$

Permutasi

Contoh :

Berapa banyak susunan berbeda bila kita ingin membuat sebuah rangkaian lampu hias untuk pohon Natal dari 3 lampu merah, 4 kuning dan 2 biru?

$$\frac{9!}{3! + 4! + 2!} = 1260$$

Kombinasi

Kombinasi adalah urutan r unsur dari n unsur yang tersedia dengan tidak memperhatikan urutannya, dan dirumuskan dengan:

- Banyaknya kombinasi r benda dari n benda yang berbeda adalah :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)} \qquad C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}$$

Contoh:

Dari 4 orang anggota partai Republik dan 3 orang partai Demokrat, hitunglah banyaknya komisi yang terdiri atas 3 orang dengan 2 orang dari partai Republik dan 1 orang dari partai Demokrat yang dapat dibentuk.

Kombinasi

Bayaknya cara memilih 2 orang dari 4 orang partai Republik :

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)} = 6$$

Bayaknya cara memilih 1 orang dari 3 orang partai Demokrat:

$$C_1^3 = \frac{3!}{1!(3-1)} = 3$$

Dengan menggunakan peraturan general, maka banyaknya komisi yang dibentuk dari 2 orang partai Republik dan 1 orang partai Demokrat adalah 6 x 3 = 18.

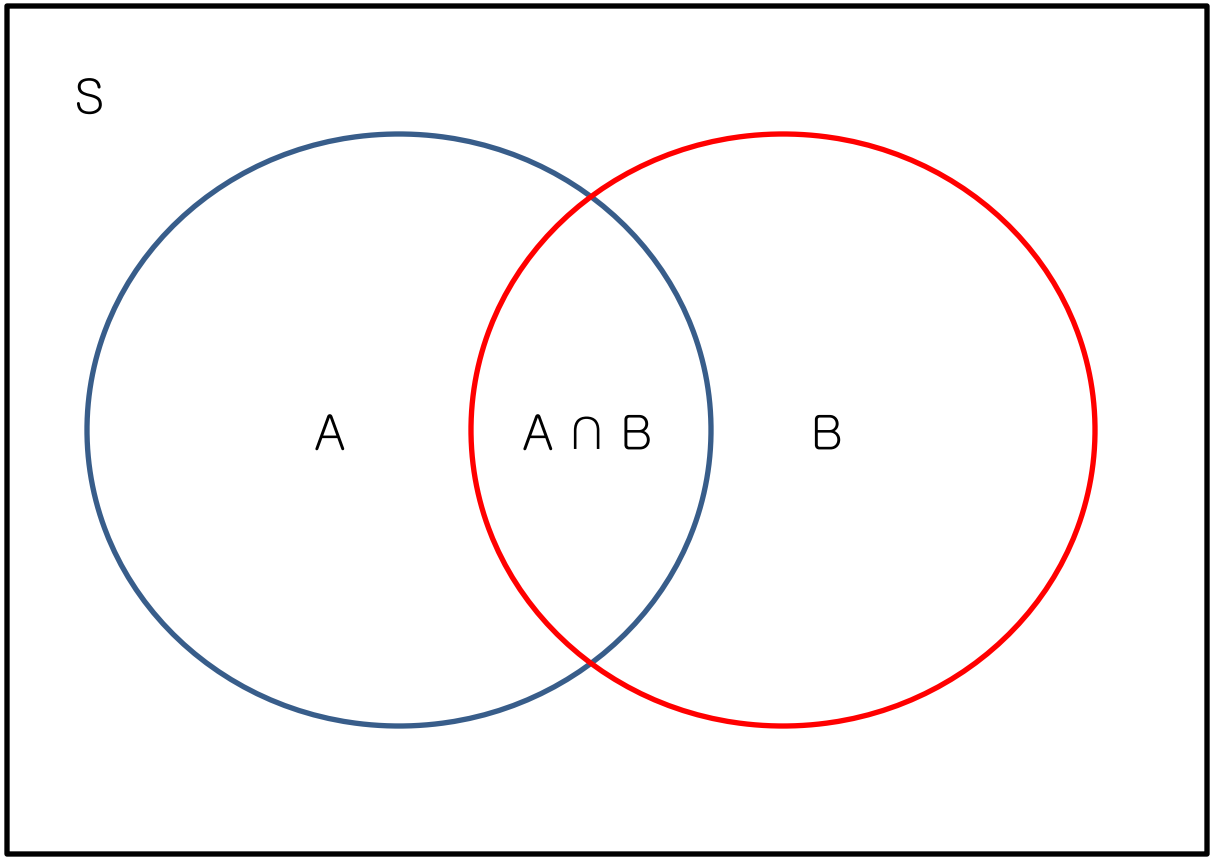
Resource

- Walpole, Ronald E., Myers, Raymond H. 2003. Ilmu Peluang dan Statistik untuk Insinyur dan Ilmuwan, Edisi 6. Bandung: Penerbit ITB.

Pengertian Probabilita

- Secara matematis ditulis

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



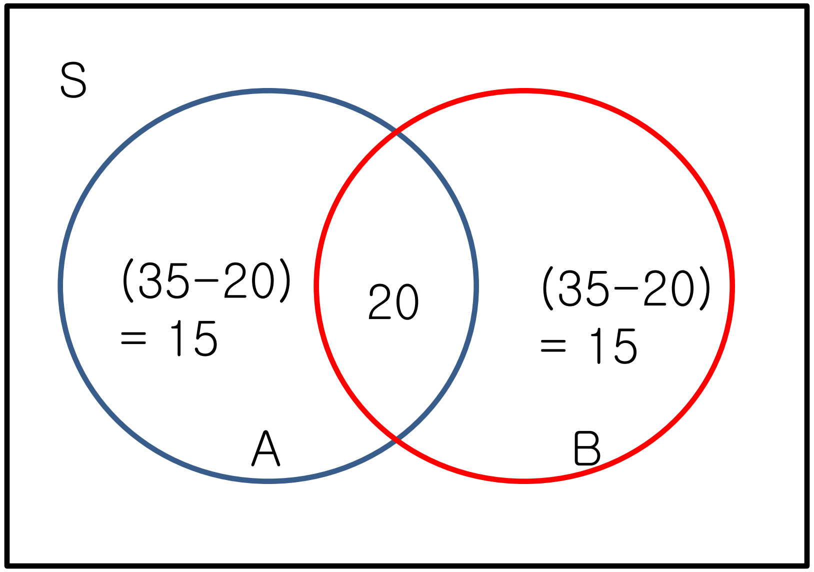
Contoh Soal

- Apabila dalam 1 kelas terdapat 50 orang mahasiswa, 35 diantaranya mengambil mata kuliah statistik, dan 35 lainnya mengambil mata kuliah metode penelitian. 20 dari mereka mengambil mata kuliah statistik dan metode penelitian. Berapa peluang mereka yang mengambil statistik saja atau metode penelitian saja? Apabila mereka yang mengambill statistik kita anggap kelompok A, dan mereka yang mengambil metode penelitian kelompok B.

Jawaban Contoh Soal

- Tentukan S atau ukuran populasi (sampel)nya = jumlah mahasiswa dalam kelas = 50 orang
- A = mahasiswa statistik = 35 orang
- B = mahasiswa metode penelitian = 35 orang
- A ∩ B = mahasiswa statistik DAN metode penelitian = 20 orang
- LIHAT! A+B ≠ S → 35+35 ≠ 50 → 35+35-20 = 50

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Peluang statistik P(A) = A/S = 35/50

Peluang metode penelitian P(B) = B/S = 35/50

Peluang statistik DAN metode penelitian =

P (A∩B) = 20/50

Total peluang = P (AUB) = P(A)+P(B)-P(A∩B)

= (35+35-20)/50 = 1