MA4112 Aljabar Linear Elementer

Ruang Vektor R_2 dan R_3

Salwa Nursyahida

Outline

1. Definisi Vektor
2. Operasi Vektor
3. Ruang Vektor
4. Subruang
5. Kombinasi Linier
6. Himpunan Merentang
7. Himpunan Bebas Linier
8. Himpunan Basis

Definisi Vektor

Vektor adalah besaran yang mempunyai arah.

Notasi:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$\left\| \bar{a} \right\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$$

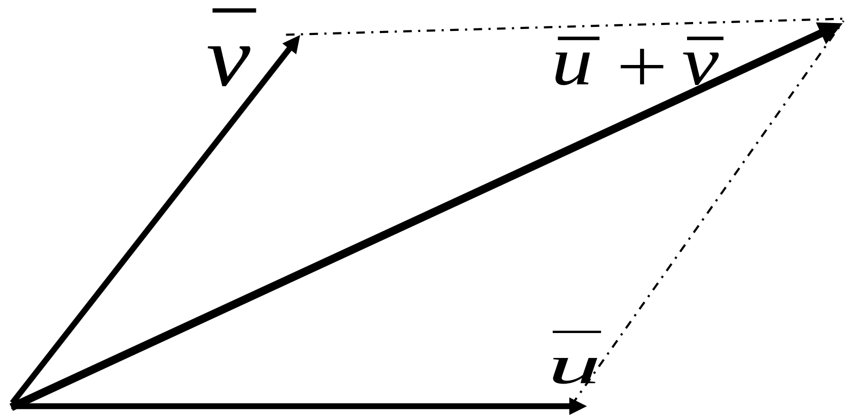
Notasi panjang vektor:

Vektor satuan ➔ Vektor dengan panjang atau norm sama dengan satu

Penjumlahan vektor

Misalkan $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ adalah vektor – vektor yang berada di ruang yang sama,

maka vektor $\bar{u} + \bar{v}$ didefinisikan



$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

Perkalian Vektor dengan Skalar

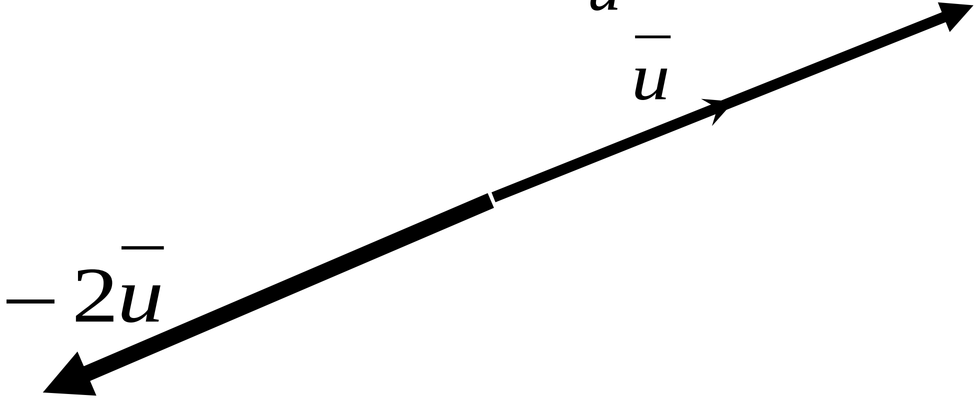
Perkalian vektor $\bar{u}$ dengan skalar k, $\left(k\bar{u}\right)$

didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya k kali panjang vektor $\bar{u}$ dengan arah

Jika $k > 0$ → searah dengan $\bar{u}$

Jika $k < 0$ → berlawanan arah dengan $\bar{u}$

$$k\ \bar{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix} \qquad k\ \bar{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$



Ruang Vektor

Misalkan $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ dan $k, l \in R$

V dikatakan **Ruang Vektor** jika terpenuhi aksioma:

1. $\bar{u}, \bar{v} \in V \rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in V$
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$
4. $\exists \bar{0} \in V \ni \bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}, \forall \bar{u} \in V$
5. $\forall \bar{u} \in V, \exists -\bar{u} \in V \ni \bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$
6. $k \in R, \bar{u} \in V \rightarrow k\bar{u} \in V$
7. $k(l\bar{u}) = (kl)\bar{u}$
8. $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$
9. $(k + l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$
10. $1\bar{u} = \bar{u}$

LATIHAN

1. Misal V=R^2 adalah himpunan vektor-vektor yang didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \\ \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad k\begin{bmatrix} x \\ y \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ y \\ \end{bmatrix}$$

2. Misal $V = M_{2x2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$

dengan penambahan matriks dan perkalian skalar

SUBRUANG

Jika *S* adalah himpunan bagian tidak kosong dari suatu ruang vektor *V* dan *S* memenuhi syarat-syarat berikut ini maka berlaku:

a) $k\overline{u} \in S$ jika $\overline{u} \in S$ Untuk sebarang skalar *k*

b) $\overline{u} + \overline{v} \in S$ jika $\overline{u}, \overline{v} \in S$

Maka *S* disebut **subruang** dari *V*

Definisi Kombinasi linier

Sebuah vektor **w** dinamakan **kombinasi linier** vektor-vektor dari $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_r$ jika vektor tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r$$

dimana $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, ..., $\mathbf{k}_r$ adalah skalar

contoh

Tentukanlah kombinasi linier $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$a. \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $c. \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$b. \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ $d. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Definisi merentang

Jika $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_r$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V dan jika masing-masing vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_r$ maka dapat dikatakan vektor-vektor ini merentang.

contoh

Tentukan apakah vektor-vektor yang diberikan dibawah ini merentang **R**^{3}.

$$a.\, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c.\, v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$b.\, v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad d.\, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definisi Bebas linier

Jika **S = {v$_1$, v$_2$, ..., v$_r$}** adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r = 0$$

Mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_r = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan himpunan **bebas linier**. Tetapi jika ada solusi lain maka S dikatakan himpunan **tak bebas linier**.

Teorema

Himpunan S dengan dua vektor atau lebih adalah

a. ***Tak bebas linier*** jika dan hanya jika paling tidak satu diantara vektor ***S*** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor S lainnya.

b. ***Bebas linier*** jika dan hanya jika tidak ada vektor ***S*** yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dalam vektor ***S*** lainnya.

Teorema

a. Jika sebuah himpunan mengandung vektor nol, maka himpunan itu ***tak bebas linier.***

b. Sebuah himpunan yang mempunyai persis dua vektor ***takbebas linier*** jika dan hanya jika salah satu vektor adalah perkalian vektor lainnya dengan skalar.

contoh

Yang manakah diantara himpunan-himpunan vektor berikut pada R^3 berbentuk tak bebas linier?

$$a.\begin{bmatrix}2\\-1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\10\\-4\end{bmatrix} \qquad c.\begin{bmatrix}6\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$$

$$b.\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\0\\-3\end{bmatrix} \qquad d.\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\6\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\2\\-1\end{bmatrix}$$

Definisi BASIS

Jika *V* adalah sebarang ruang vektor dan

S = {v1, v2, …,vr} merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada *V*, maka ***S*** dinamakan **basis** untuk *V* jika

a. ***S*** bebas linier

b. ***S*** merentang *V*

NB: Basis untuk setiap ruang vektor tidak tunggal