UNIVERSITAS TERBUKA

Interpretasi yang Diperluas dan Validitas

MSIM 4103 – Logika Informatika

Program Studi Sistem Informasi

Jurusan Tehnik, FST

Materi Inisiasi 7

1. Interpretasi yang Diperluas
   - Interpretasi yang Diperluas untuk Kalimat Logika Predikat
   - Aturan untuk Kuantifier
2. Validitas Kalimat
   - Validitas untuk Kalimat Tertutup

1. Interpretasi yang Diperluas

- Interpretasi yang Diperluas untuk Kalimat Logika Predikat
- Aturan untuk Kuantifier

Interpretasi yang Diperluas

Peluasan Interpretasi: proses penggantian nilai terhadap simbol bebas dalam logika predikat dengan nilai yang baru.

Tujuan perluasan interpretasi adalah:

1. Perluasan dilakukan untuk memberikan nilai /menambahkan aturan pemberian nilai baru kepada simbol bebas yang belum diberikan nilai sebelumnya.
2. Perluasan dilakukan untuk memberikan nilai baru kepada simbol bebas yang sudah diberikan nilai sebelumnya.

Interpretasi yang Diperluas

Diketahui I : interpretasi atas suatu domain D ≠ ∅ (himpunan yang tidak kosong). Untuk sebarang variabel x dan elemen d anggota domain D, interpretasi yang diperluas:

$$<x \leftarrow d> \bullet I$$

dari I merupakan interpretasi atas D dimana

- dilakukan pemberian nilai d kepada simbol variabel x
- simbol bebas selain variabel x (konstanta, variabel bebas lain, fungsi, dan predikat) memiliki nilai yang tidak berubah dari interpretasi I.

UNIVERSITAS TERBUKA

Interpretasi yang Diperluas

Diketahui *I* : interpretasi atas suatu domain D ≠ ∅ (himpunan yang tidak kosong). Untuk sebarang konstanta *a* dan elemen *d* anggota domain D, interpretasi yang diperluas:

$$<a \leftarrow d> \bullet I$$

dari *I* merupakan interpretasi atas *D* dimana

- dilakukan pemberian nilai d kepada simbol konstanta *a*
- simbol bebas selain konstanta *a* (konstanta lain, variabel bebas, fungsi, dan predikat) memiliki nilai yang tidak berubah dari interpretasi *I*.

Interpretasi yang Diperluas

Perluasan intrepretasi dapat juga dilakukan dengan melibatkan beberapa pemberian nilai baru terhadap lebih dari satu simbol bebas, yang disebut dengan **perluasan multi *(multiply extended)***. Notasi singkat:

$$<x_n \leftarrow d_n> \bullet \ \ldots \bullet \ <x_2 \leftarrow d_2> \bullet <x_1 \leftarrow d_1> \bullet I$$

artinya interpretasi *I* diperluas dengan

$<x_1 \leftarrow d_1> \bullet I$ kemudian

$<x_2 \leftarrow d_2> \bullet (<x_1 \leftarrow d_1> \bullet I)$ hingga

$<x_n \leftarrow d_n> \bullet(\ldots \bullet(\ <x_2 \leftarrow d_2> \bullet (<x_1 \leftarrow d_1>\bullet I)\ldots)$

Langkah Melakukan Perluasan Interpretasi

1. Tuliskan simbol interpretasi baru.
2. Tuliskan semua perluasan yang akan dilakukan.
3. Tuliskan notasi singkat semua perluasan yang dilakukan.
4. Tuliskan hasil perluasan interpretasi yang telah dilakukan.

Contoh 7.1

Diketahui suatu interpretasi *I* atas himpunan bilangan bulat, sedemikian sehingga I={$a \leftarrow 1$, $b \leftarrow 2$, $x \leftarrow 3$, $y \leftarrow 4$, $z \leftarrow 5$, $f \leftarrow f_I(d_1, d_2) = d_1 + d_2$,$g \leftarrow g_I\,(d_1, d_2, d_3) = 3(d_1 + d_2\,) - d_3\ - 1$, $p \leftarrow p_I(d_1, d_2, d_3)$: $d_1 - d_2 < d_3$, $q \leftarrow q_I\,(d_1, d_2)$: $2d_1 \leq d_2$}. Lakukan perluasan terhadap interpretasi *I* dengan memberi nilai baru terhadap simbol variabel z, simbol fungsi f, dan simbol predikat p.

Jawaban Contoh 7.1

Misalkan hasil perluasan terhadap interpretasi *I* dinotasikan dengan notasi interpretasi baru, yaitu *J*.

- Perluasan simbol variabel dilakukan dengan memberikan nilai baru yang berasal dari domain D = himpunan semua bilangan bulat. Misalkan perluasan variabel *z* dilakukan dengan memberikan nilai 0.
- Perluasan kembali dilakukan dengan memberikan nilai baru terhadap simbol fungsi *f*. Perluasan yang dilakukan dalam fungsi harus memiliki domain dan hasil dalam himpunan D=himpunan semua bilangan bulat. Misalkan perluasan yang dilakukan adalah menggantinya dengan fungsi sebagai berikut:

$$f_J(d_1, d_2) = 2d_1 + d_2$$

Jawaban Contoh 7.1

- Perluasan kembali dilakukan dengan memberikan nilai baru terhadap simbol predikat *p*. Perluasan yang dilakukan dalam fungsi harus memiliki domain dalam himpunan D = himpunan semua bilangan bulat dan hasil nilai kebenaran true atau false. Misalkan perluasan yang dilakukan adalah menggantinya dengan predikat sebagai berikut:

$$p_J(d_1, d_2, d_3) : d_1 > (d_2 + d_3)$$

Jawaban Contoh 7.1

Cara menuliskan semua perluasan yang dilakukan

Ketiga perluasan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$<p \leftarrow p_J(d_1, d_2, d_3) : d_1 > (d_2 + d_3)> \bullet <f \leftarrow f_J(d_1, d_2, d_3) = 2d_1 + d_2 > \bullet$$
$$<z \leftarrow 0> \bullet I$$

Cara penulisan hasil perluasan interpretasi

Hasil perluasan tersebut dapat dinotasikan dengan notasi interpretasi baru, yaitu J, dengan

$J = \{a \leftarrow 1, b \leftarrow 2, x \leftarrow 3, y \leftarrow 4, z \leftarrow 0, f \leftarrow f_J(d_1, d_2) = 2d_1 + d_2, g \leftarrow g_I(d_1, d_2, d_3) = 3(d_1 + d_2) - d_3 - 1, p \leftarrow p_j(d_1, d_2, d_3): d_1 > d_2 + d_3, q \leftarrow q_I(d_1, d_2): 2d_1 \leq d_2\}$

UNIVERSITAS TERBUKA

Aturan untuk Kuantifier Universal

- (For all x) $\mathcal{F}$ bernilai **true** di bawah interpretasi *I* yang diberikan **jika untuk setiap** elemen *d* dalam *D* menyebabkan kalimat $\mathcal{F}$ bernilai **true** di bawah interpretasi yang diperluas

$$<x \leftarrow d> \bullet I$$

- (For all x) $\mathcal{F}$ bernilai **false** di bawah interpretasi *I* yang diberikan **jika ada** elemen d dalam D menyebabkan kalimat $\mathcal{F}$ bernilai **false** di bawah interpretasi yang diperluas

$$<x \leftarrow d> \bullet I$$

UNIVERSITAS TERBUKA

Aturan untuk Kuantifier Eksistensial

- (For some x) $\mathcal{F}$ bernilai **true** di bawah interpretasi *I* yang diberikan **jika ada suatu** elemen *d* dalam *D* menyebabkan kalimat $\mathcal{F}$ bernilai **true** di bawah interpretasi yang diperluas

$$<x \leftarrow d> \bullet I$$

- (For some x) $\mathcal{F}$ bernilai **false** di bawah interpretasi *I* yang diberikan **jika untuk setiap** elemen d dalam D menyebabkan kalimat $\mathcal{F}$ bernilai **false** di bawah interpretasi yang diperluas

$$<x \leftarrow d> \bullet I$$

Menentukan Nilai Kebenaran Kalimat dengan Kuantifier

1. Tuliskan pengertian kuantifier yang ingin ditunjukan sesuai aturan
2. Tentukan domain, simbol bebas, dan interpretasi.
3. Selesaikan interpretasi sesuai kalimat, hingga diperoleh pengertian kuantifier yang ingin ditunjukan.

Contoh 7.2

Jelaskan bahwa kalimat (**for all** *x*) (**not** *p*(*a, f*(*y*)) **or** *q*(x)) bernilai false di bawah suatu interpretasi *I* atas domain *D.*

Jawaban Contoh 7.2

Untuk memperlihatkan bahwa kalimat bernilai false di bawah interpretasi *I*, maka dengan menggunakan aturan (for all x) harus ditunjukan **ada** elemen d dalam D menyebabkan kalimat (**for all** *x*) **(not** *p*(*a, f*(*y*)) **or** *q*(x)) bernilai **false** di bawah interpretasi yang diperluas

$$<x \leftarrow d> \bullet I$$

Jawaban Contoh 7.2

1. Tentukan suatu domain untuk kalimat
   Misalkan *D:* himpunan bilangan bulat.
2. Tentukan dahulu simbol bebas dalam kalimat, yaitu a, y, f, p, q.
3. Tentukan interpretasi untuk kalimat
   I: $\{a \leftarrow 2,\ y \leftarrow 3,\ f \leftarrow f_I(d_1) = d_1 + 2,\ p \leftarrow p_I(d_1, d_2): d_1 < d_2,\ q \leftarrow q_I(d_1): d_1 > d_1 + 1\}$

UNIVERSITAS TERBUKA

Jawaban Contoh 7.2

Misalnya diambil d sebagai bilangan bulat 1. Periksa nilai kebenaran kalimat pada perluasan interpretasi <x←d>●*I* atas domain D, maka diperoleh:

- a=2, y=3, f(y)=f(3)=3+2=5
- p(a, f(y): a<f(y), yaitu 2 < 5. (true)
- x=1, f(x)=f(1)=1+2=3
- q(f(x)): (1+2)>(1+2)+1 ≡ 3>4. (false)
- **not** p(a, f(y)) **or** q(x): not (true) or false. (false)

Jadi, ada d yang menyebabkan kalimat (**for all** *x*) **(not** *p*(*a, f*(*y*)) **or** *q*(f(x))) bernilai false di bawah suatu perluasan interpretasi <x←d>●*I* atas domain D. Jadi, kalimat (**for all** *x*) **(not** *p*(*a, f*(*y*)) **or** *q*(x)) bernilai false di bawah suatu interpretasi *I* atas domain *D.*

2. Validitas Kalimat

- Validitas untuk Kalimat Tertutup

Validitas Kalimat Logika Predikat

Dalam kalimat logika predikat, validitas akan didefinisikan khusus untuk kalimat tertutup (kalimat yang tidak mengandung variabel bebas).

Definisi

Suatu kalimat tertutup $\mathcal{F}$ dikatakan valid jika kalimat $\mathcal{F}$ bernilai true di bawah setiap interpretasi untuk $\mathcal{F}$.

Validitas Kalimat Logika Predikat

Pembuktiannya Kalimat Valid

- Menggunakan aturan semantik dan akal sehat.
- Mengasumsikan kalimat tidak valid dan menemukan kontradiksi.

Pembuktian Kalimat Tidak Valid

- Menggunakan aturan semantik dan akal sehat.
- Temukan satu interpretasi yang menyebabkan kalimat bernilai *false.*
- Mengasumsikan kalimat tidak valid dan tidak menemukan kontradiksi.

Contoh 7.3

Tunjukan kalimat berikut valid:

$\mathcal{F}$: (**for all** x) *p*(x) **or not** (**for all** x) *p*(x)

Jawaban Contoh 7.3

Andaikan kalimat $\mathcal{F}$ tidak valid, maka terdapat suatu interpretasi *I* atas domain D yang menyebabkan $\mathcal{F}$ false di bawah *I*. Menggunakan aturan **or**, maka (**for all** x) *p*(x) bernilai false di bawah *I* dan **not** (**for all** x) *p*(x) bernilai false di bawah *I* .

(a) (**for all** x) *p*(x) bernilai false di bawah *I* artinya **ada** elemen d dalam D menyebabkan kalimat *p*(x) bernilai **false** di bawah interpretasi yang diperluas $<x \leftarrow d> \bullet I$

(b) (**not** (for all x) *p*(x)) bernilai false di bawah *I*. Dengan aturan not, maka (for all x) *p*(x) bernilai true di bawah *I*. Jadi, **untuk setiap** elemen *e* dalam *D* menyebabkan kalimat *p*(x) bernilai **true** di bawah interpretasi yang diperluas $<x \leftarrow e> \bullet I$

UNIVERSITAS TERBUKA

Jawaban Contoh 7.3

Karena menurut (b), nilai yang diberikan ke x untuk semua elemen dalam domain D, termasuk juga d ϵ D. Oleh karena itu, bisa diambil e=d yang menyebabkan:

- *p*(x) bernilai **false** di bawah interpretasi yang diperluas <*x*←*d*>•*I*
- *p*(x) bernilai **true** di bawah interpretasi yang diperluas <*x*←*e*>•*I*

Karena e=d, maka <*x*←*d*>•*I* dan <*x*←*e*>•*I* sama, tetapi terdapat kontradiksi nilai p(x). Karena terdapat kontradiksi, maka pengandaian kalimat $\mathcal{F}$ tidak valid salah, jadi haruslah kalimat $\mathcal{F}$ valid.

UNIVERSITAS TERBUKA

Referensi

1. Suprapto. (2020). Logika Informatika (BMP). Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.
2. Bergman, M, Moor, J, and Nelson, J. (2014). The Logic Book (6th Edition). New York: McGraw Hill.