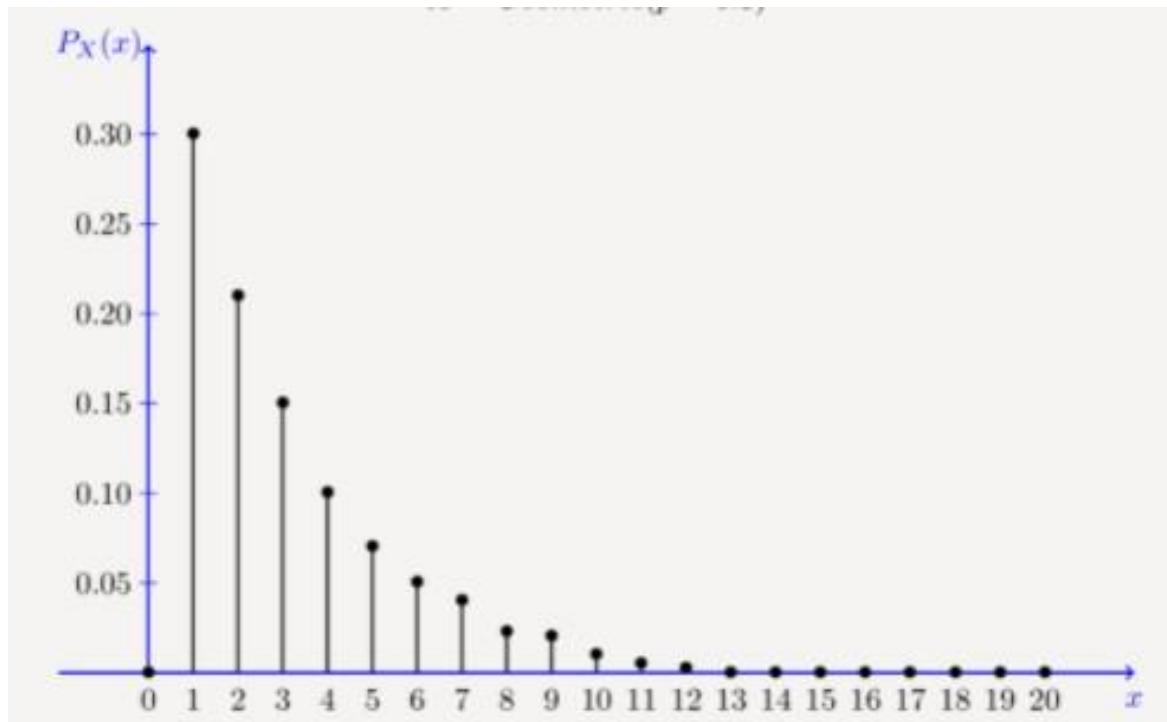
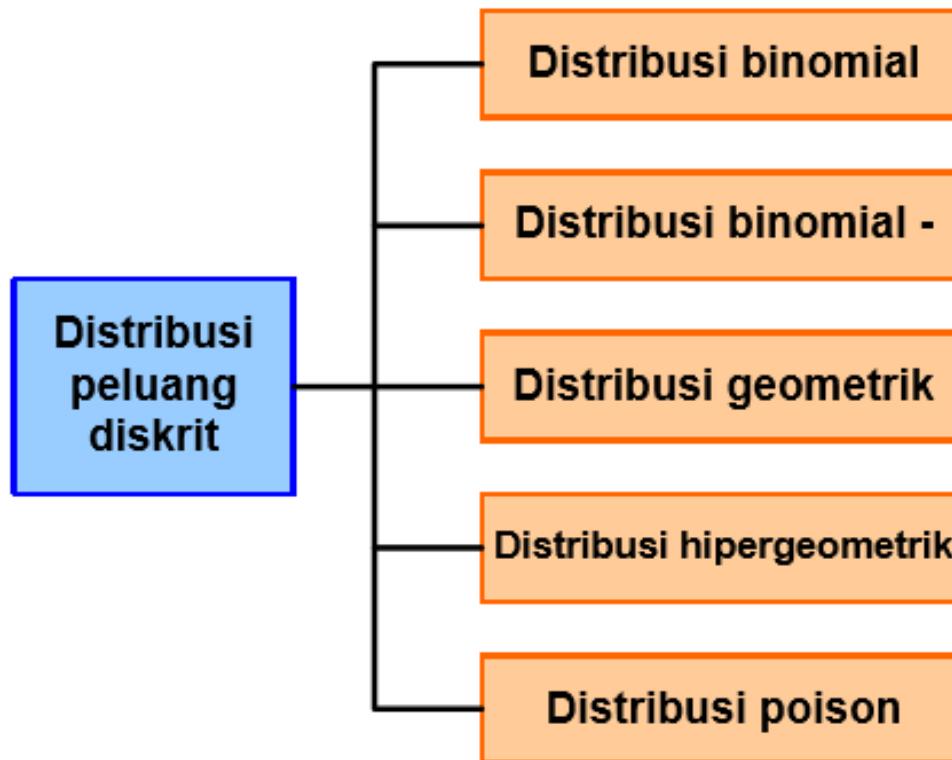


MKKI4201 / MODUL 5



DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT



Distribusi Bernoulli

BERNOULLI TRIAL

a. Ciri - ciri :

1. Percobaan menghasilkan 2 keluaran M. E., yaitu S = SUKSES dan F = GAGAL

2. Keluaran bersifat exhaustive, yaitu : tidak ada keluaran yang lain

3. $P(S) = p$ dan $P(F) = q$, sehingga $p+q = 1$

b. Diberikan oleh : $P(Y = y) = p^y \cdot q^{(1-y)}$, dengan $y = \begin{cases} 1, & \text{jika S muncul} \\ 0, & \text{jika F muncul} \end{cases}$

c. $\mu = p$ dan $\sigma^2 = p \cdot q$

STUDI KASUS 1

Dalam pelemparan koin, ditentukan bahwa munculnya muka (M) adalah SUKSES dan munculnya belakang (B) adalah GAGAL.

SOLUSI : $y = 1$, jika muncul muka, dan $P(M) = p = \frac{1}{2}$

$y = 0$, jika muncul belakang, dan $P(B) = q = \frac{1}{2}$

Sehingga distribusi peluang dari y menurut *bernoulli trial* adalah :

$$P(1) = p^1 \cdot q^{(1-1)} = p = 0,5$$

$$P(0) = p^0 \cdot q^{(1-0)} = q = 0,5$$



Distribusi Binomial

DISTRIBUSI BINOMIAL

a. Ciri - ciri :

1. Percobaan terdiri atas n kali *bernoulli trial* yang identik ;
2. Hanya ada 2 keluaran M.E., yaitu S = SUKSES dan F = GAGAL untuk tiap *trial* ;
3. $P(S) = p$ dan $P(F) = q$, bernilai tetap dari satu *trial* ke *trial* lain ;
4. Semua *trial* saling *independent* ;
5. Variabel *random* Binomial Y adalah jumlah S dalam n *trial*.

b. Diberikan oleh :

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} \cdot p^y \cdot q^{(n-y)}, \text{ untuk } y = 0, 1, 2, \dots, n$$

dengan : p = peluang SUKSES dalam *trial* tunggal

$$q = 1 - p$$

$$n = \text{jumlah trial}$$

$$y = \text{jumlah SUKSES dalam } n \text{ trial}$$

c. $\mu = n.p$ dan $\sigma^2 = n.p.q$



Distribusi Binomial

STUDI KASUS 2

Seorang insinyur elektro sedang mengamati problem arus listrik pada komputer. Hasil *survey* terakhir menunjukkan bahwa 10 % komputer yang dipakai mengalami problem ini. Jika 5 sampel *random* dipilih dari seluruh populasi amatan, hitung peluang :

- a. terdapat 3 komputer terpilih mengalami kerusakan
- b. paling sedikit 3 komputer terpilih mengalami kerusakan
- c. kurang dari 3 komputer terpilih mengalami kerusakan

SOLUSI :

- a. Tepat 3 komputer, $y = 3$

$$P(3) = \binom{5}{3} \cdot (10\%)^3 \cdot (90\%)^2 = 0,0081$$

- b. Paling sedikit 3 komputer, $y = 3, 4$, dan 5

$$P(Y \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$$

$$P(3) = 0,0081$$

$$P(4) = \binom{5}{4} \cdot (10\%)^4 \cdot (90\%)^1 = 0,00045$$

$$P(5) = \binom{5}{5} \cdot (10\%)^5 \cdot (90\%)^0 = 0,00001$$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } P(Y \geq 3) &= 0,0081 + 0,00045 + 0,00001 \\ &= 0,00856 \end{aligned}$$



Distribusi Binomial

c. Kurang dari 3 komputer, $y = 0, 1, 2$

$$P(Y < 3) = 1 - P(Y \geq 3) = 1 - 0,00856 = 0,99144$$

ATAU dengan memanfaatkan TABEL DISTRIBUSI BINOMIAL.

STUDI KASUS 3

Sebuah mata uang dilempar 4 kali, kemungkinan munculnya sisi gambar mempunyai distribusi Binomial dengan kemungkinan sukses $\frac{1}{2}$ adalah sebagai berikut :

$$P(Y = y) = \binom{4}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{4-y}$$

Kemungkinan munculnya gambar 2 kali adalah :

$$P(Y = y) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$$



Distribusi Binomial

Fungsi kepadatan probabilitasnya adalah :

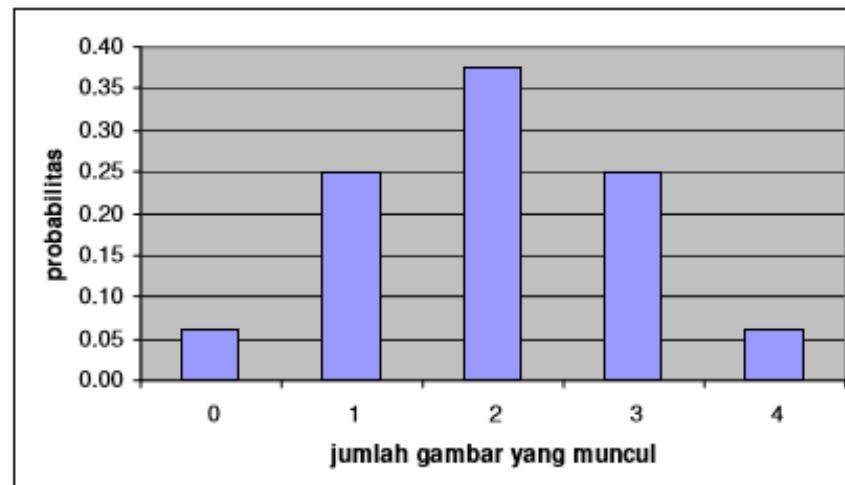
$$P(0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$$

$$P(3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$



Distribusi Binomial

Rata-rata kemunculan gambar adalah :

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{y=0}^4 y \binom{4}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{4-y} \\&= 0 + 1 \frac{4!}{1!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \frac{4!}{3!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \frac{4!}{0!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\&= \frac{4}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{4}{16} = \frac{32}{16} = 2\end{aligned}$$

Varians kemunculan gambar adalah :

$$\sigma^2 = np(1-p) = 4 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 1$$

STUDI KASUS 5

Dilakukan n pengulangan percobaan dengan menggunakan bilangan acak yang mempunyai probabilitas untuk sukses adalah $\frac{2}{3}$

1. Jika diulangi 3 kali, hitung kemungkinan sukses lebih dari 2 kali.
2. Jika diulangi 5 kali, hitung kemungkinan sukses lebih dari 3 kali.

Distribusi Binomial

Bila dilakukan pengulangan 2 kali

$$P(y \geq 2) = P(2) + P(3)$$

$$= \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{3}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{8}{27} = \frac{20}{27}$$

Bila dilakukan pengulangan 5 kali

$$P(y \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$$

$$= \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$= 10 \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{3} + \frac{32}{243} = \frac{80+80+32}{243} = \frac{192}{243}$$

Distribusi Multinomial

DISTRIBUSI MULTINOMIAL

Percobaan **BINOMIAL** akan menjadi percobaan **MULTINOMIAL** apabila tiap usaha dapat memberikan lebih dari DUA hasil yang mungkin. Misal, pembagian hasil *output* pabrik menjadi ringan, berat, atau masih dapat diterima. Contoh lain adalah pengambilan suatu kartu dengan perhatian kempat jenis kartu.

a. Ciri - ciri

1. Percobaan terdiri atas n kali *trial* yang identik ;
2. Terdapat k jenis keluaran untuk tiap *trial* ;
3. $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$, yaitu peluang dari masing - masing keluaran, bernilai tetap dari satu *trial* ke *trial* lain, dan $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k = 1$;
4. Semua *trial* bersifat *independent* ;
5. Variabel *random* multinomial adalah $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_k$ untuk setiap k jenis keluaran.



Distribusi Multinomial

b. Diberikan oleh :

$$P(Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_k) = \frac{n!}{y_1! y_2! y_3! \dots y_k!} \cdot p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot p_3^{y_3} \dots \cdot p_k^{y_k}$$

dengan : p_i = peluang keluaran ke - i dalam *trial* tunggal

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k = 1$$

$$n = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_k = \text{jumlah trial}$$

y_i = jumlah kemunculan keluaran ke - i dalam n *trial*

c. $\mu_i = n \cdot p_i$ dan $\sigma^2_i = n \cdot p_i \cdot (1-p_i)$

STUDI KASUS 6

Sebuah penelitian menunjukkan bahwa 10% monitor komputer memberikan radiasi tinggi, 30 % sedang, dan 60% rendah. Bila diambil sampel acak 40 monitor dari sebuah populasi amatan, hitunglah :

- Peluang bahwa 10 monitor memiliki radiasi tinggi, 10 sedang, 20 rendah ;
- Rata - rata dan variansi monitor dengan radiasi tinggi dari 40 monitor yang terpilih sebagai sampel.



Distribusi Multinomial

SOLUSI :

a. Ditentukan :

y_1 = jumlah monitor radiasi tinggi

y_2 = jumlah monitor radiasi sedang

y_3 = jumlah monitor radiasi rendah

p_1 = peluang terpilihnya monitor radiasi tinggi

p_2 = peluang terpilihnya monitor radiasi sedang

p_3 = peluang terpilihnya monitor radiasi rendah

Sehingga :

$$P(10,10,20) = \frac{40!}{10!10!20!} \cdot (10\%)^{10} \cdot (30\%)^{10} \cdot (60\%)^{20} = 0,0005498$$

b. $\mu_i = n \cdot p_i = 40 \cdot 10\% = 4$

$$\sigma^2_i = n \cdot p_i \cdot (1-p_i) = 40 \cdot (10\%) \cdot (1-10\%) = 3,6$$

Distribusi Geometrik

DISTRIBUSI GEOMETRIC

Distribusi **GEOMETRIC**, yaitu banyaknya usaha yang berakhir pada sukses yang pertama.

a. Ciri - ciri

Distribusi Binomial negatif dengan $r = 1$ (mencapai SUKSES pertama)

b. Diberikan oleh :

$$P(Y = y) = p \cdot q^{y-1}, \text{ untuk } y = 1, 2, 3, \dots$$

dengan : y = jumlah *trial* sampai SUKSES PERTAMA dicapai.

c. $\mu_i = 1/ p$ dan $\sigma^2 = q/ p^2$



Distribusi Geometrik

Sebuah kontainer berisi sekring untuk ekspor. Dari spesifikasi produsen diketahui bahwa proporsi cacat sekring adalah 10 %. Inspektor sedang melakukan pengujian kesesuaian mutu sekring dengan cara mengambil satu persatu sampai ditemukan sekring yang cacat. Tentukan peluang bahwa sekring cacat ditemukan dalam 5 pengujian pertama.

SOLUSI :

$$p = 0,1 \text{ dan } q = 0,9$$

$$\text{Sehingga : } P(Y = y) = p \cdot q^{y-1} = (0,1) \cdot (0,9)^{y-1}$$

$$\begin{aligned}P(Y \leq 5) &= p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) \\&= (0,1)(0,9)^0 + (0,1)(0,9)^1 + (0,1)(0,9)^2 + \dots + (0,1)(0,9)^4 \\&= 0,41\end{aligned}$$

Distribusi Hipergeometrik

DISTRIBUSI HYPERGEOMETRIC

a. Ciri - ciri

1. Percobaan terdiri atas pengambilan *random* n elemen tanpa pengembalian dari total N elemen ;
2. Terdapat S (SUKSES) sebanyak r dan F(GAGAL) sebanyak N - r ;
3. Ukuran n dianggap besar sebanding N ($n/N > 0,05$)
4. Variabel *random hypergeometric* Y adalah jumlah S (SUKSES) dalam pengambilan n elemen.

b. Diberikan oleh :

$$P(Y = y) = \frac{\binom{r}{y} \binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}, \text{ untuk } y = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

dengan : N = jumlah total elemen

r = jumlah SUKSES dalam N

n = jumlah elemen pengambilan

y = jumlah SUKSES dalam pengambilan (n)

c. $\mu_i = n.r/N$ dan $\sigma^2 = \frac{r.(N-r).n.(N-n)}{N^2(N-1)}$



Distribusi Hipergeometrik

STUDI KASUS

Dari 10 katalis yang ada diperlukan 3 untuk keperluan pembuatan produk kimia baru. Dari sepuluh katalis tersebut terdapat 4 jenis katalis berkadar asam tinggi dan 6 jenis berkadar asam rendah.

- tentukan peluang bahwa katalis yang terpilih semua berkadar asam rendah ;
- tentukan peluang bahwa dari 3 katalis yang dipilih, hanya 1 yang memiliki kadar asam tinggi.

SOLUSI :

y = jumlah katalis berkadar asam tinggi dari 3 katalis terpilih

$$N = 10, n = 3, r = 4$$

MAKA

$$P(Y=y) = \frac{\binom{4}{y} \binom{6}{3-y}}{\binom{10}{3}}$$

$$\text{a. } P(Y=0) = \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$

$$\text{b. } P(Y=1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}$$



Distribusi Poisson

DISTRIBUSI POISSON

a. Ciri - ciri

1. Variabel *random* y = jumlah kemunculan kejadian yang diamati selama unit ukuran tertentu (contoh : jarak, area, volume, dll) ;
2. Nilai peluang dari sebuah kejadian adalah sama untuk setiap ukuran tertentu ;
3. Jumlah kejadian yang muncul untuk setiap unit adalah *independent* ;
4. λ = rata - rata jumlah kejadian dalam setiap unit ukuran

b. Diberikan oleh

$$P(Y = y) = \frac{\lambda^y \cdot e^{-\lambda}}{y!}, \text{untuk } y = 0,1,2,\dots$$

dengan : λ = rata - rata jumlah kejadian dalam setiap unit ukuran
 $e = 2,71828$

c. $\mu = \lambda$ dan $\sigma^2 = \lambda$



Distribusi Poisson

STUDI KASUS

Sejumlah y retak pada spesimen beton untuk sebuah jenis semen mengikuti distribusi poisson. Dengan pengamatan awal diketahui bahwa jumlah rata - rata keretakan setiap spesimen adalah 2,5. Tentukan peluang bahwa sebuah spesimen yang dipilih secara *random* memiliki jumlah keretakan 5.

SOLUSI :

$$\mu = \lambda = 2,5$$

Sehingga

$$P(Y = 5) = \frac{2,5^5 \cdot e^{-2,5}}{5!} = 0,067$$



Distribusi Poisson

STUDI KASUS

Rata-rata kedatangan truk setiap jam pada sebuah gudang bongkar muat adalah 4, maka kedatangan x truk dapat dinyatakan sebagai distribusi Poisson dengan rata-rata 4 yang dituliskan dengan :

$$P(Y = y) = \frac{e^{-4} 4^y}{y!}$$

y	P(y)
0	0.018316
1	0.073263
2	0.146525
3	0.195367
4	0.195367
5	0.156293
6	0.104196
7	0.059540
8	0.029770
9	0.013231
10	0.005292
11	0.001925
12	0.000642
13	0.000197
14	0.000056
15	0.000015

