# MA4112 Aljabar Linear Elementer

## Perkalian Titik dan Perkalian Silang

Salwa Nursyahida

# Outline

1. Sudut antar vektor
2. Perkalian titik
3. Menentukan Sudut antar dua vektor
4. Proyeksi Ortogonal
5. Panjang Proyeksi
6. Perkalian Silang

# Sudut antara dua vektor

Misalkan $u$ dan $v$ adalah dua vektor tak nol pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3, dan asumsikan vektor-vektor tersebut ditempatkan sedemikian rupa sehingga titik awalnya berhimpitan.

Sudut antara $u$ dan $v$ yang dimaksudkan di sini adalah sudut $\theta$ yang ditentukan oleh $0 < \theta \leq \pi$

# Perkalian titik

Misalkan $u$ dan $v$ adalah vektor pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3 dan $\theta$ adalah sudut antara $u$ dan $v$, maka perkalian titik (dot product) yang ditulis $u \cdot v$ didefinisikan oleh

$$u \cdot v = \begin{cases} \|u\|\|v\| \cos\theta & \text{Jika } u \neq 0 \text{ dan } v \neq 0 \\ 0 & \text{Jika } u \neq 0 \text{ dan } v \neq 0 \end{cases}$$

# Contoh

Misalkan $u = (0,0,1)$ dan $v = (0,2,2)$ dan sudut antara $u$ dan $v$ adalah $45°$, maka

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2$$

# Perkalian titik pada ruang berdimensi 2 dan 3

Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ maka

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Misalkan $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ maka

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

# Menentukan Sudut antara Vektor-vektor

Misakkan $u$ dan $v$ vektor-vektor tak nol , maka

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

# Contoh

Misalkan $u = (2, -1, 1)$ dan $v = (1, 1, 2)$ maka

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

Untuk vektor-vektor tersebut diperoleh

$$\|u\| = \|v\| = \sqrt{6}$$

Sehingga

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Maka $\theta = 60°$

# Sudut Vektor

Misalkan $u$ dan $v$ adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3

$(a) v \cdot v = \|v\|^2$ yaitu $\|v\| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}}$

(b) Jika vektor-vektor $u$ dan $v$ adalah tak nol dan $\theta$ adalah sudut di antaranya maka

| | | |
|---|---|---|
| $\theta$ adalah lancip | jika dan hanya jika | $u \cdot v > 0$ |
| $\theta$ adalah tumpul | jika dan hanya jika | $u \cdot v < 0$ |
| $\theta$ adalah $\frac{\pi}{2}$ (siku-siku) | jika dan hanya jika | $u \cdot v = 0$ |

# Contoh

Jika $u = (1, -2,3), v = (-3,4,2)$ dan $w = (3,6,3)$ maka

$$u \cdot v = (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5$$
$$v \cdot w = (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21$$
$$u \cdot w = (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0$$

Sehingga

$u$ dan $v$ membentuk sudut tumpul

$v$ dan $w$ membentuk sudut lancip

$u$ dan $w$ saling tegak lurus

# Sifat perkalian titik

Jika $u, v$ dan $w$ adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 2 dan 3 dan $k$ adalah scalar maka

$(a)\ u \cdot v = v \cdot u$

$(b)\ u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

(c) $k(u \cdot v) = (ku) \cdot v = u \cdot kv$

(d) $v \cdot v > 0$ jika $v \neq 0$ dan $v \cdot v = 0$ jika $v = 0$

# Proyeksi Ortogonal

Jika $u$ dan $a$ adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 2 atau ruang berdimensi 3 dan jika $a \neq 0$ maka proyeksi vektor $u$ pada $a$

$$proj_a u = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a$$

Projeksi ortogonal $u$ pada $a$

$$u - proj_a u = u - \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a$$

# contoh

Misalkan $u = (2, -1,3)$ dan $a = (4, -1,2)$, maka

$$u \cdot a = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$

$$\|a\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

Sehingga proyeksi vektor $u$ pada $a$ adalah

$$proj_a u = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = \frac{15}{21}(4, -1,2) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

Dan proyeksi orthogonal $u$ pada $a$ adalah

$$u - proj_a u = (2, -1,3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

# Panjang proyeksi

Panjang proyeksi $u$ pada $a$ adalah

$$\|proj_a u\| = \left\|\frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a\right\| = \frac{|u \cdot a|}{\|a\|}$$

Jika $\theta$ menyatakan sudut antara $u$ dan $a$ dan karena $u \cdot a = \|u\|\|a\| \cos\theta$ maka

$$\|proj_a u\| = \|u\| \cos\theta$$

# Perkalian Silang

Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor-vektor pada ruang berdimensi 3 maka perkalian silang

$$u \times v = (\mathrm{u}_2\mathrm{v}_3 - \mathrm{u}_3\mathrm{v}_2, \mathrm{u}_3\mathrm{v}_1 - \mathrm{u}_1\mathrm{v}_3, \mathrm{u}_1\mathrm{v}_2 - \mathrm{u}_2\mathrm{v}_3)$$

Atau dalam notasi determinan

$$u \times v = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$