UNIVERSITAS TERBUKA

MA4112 Aljabar Linear Elementer

Matriks

Salwa Nursyahida

Outline

1. Pengertian Matriks
2. Notasi Matriks
3. Jenis-jenis Matriks
4. Operasi pada Matriks
5. Hukum Perkalian Matriks

Beberapa pengertian tentang matriks

1. Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun atau dijajarkan secara empat persegi panjang menurut baris-baris dan kolom-kolom.
2. Matriks adalah jajaran elemen (berupa bilangan) berbentuk empat persegi panjang.
3. Matriks adalah suatu himpunan kuantitas-kuantitas (yang disebut elemen), disusun dalam bentuk persegi panjang yang memuat baris-baris dan kolom-kolom.

Notasi Matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

→ **Baris ke -1**

→ Unsur/entri/elemen ke-*mn* (baris *m kolom n)*

Kolom ke -2

Matrix A berukuran (ordo) m x n

Misalkan *A dan B adalah matriks berukura sama, A dan B dikatakan sama (notasi A = B)*

Jika $a_{ij} = b_{ij}$ ***untuk setiap i dan j***

Jenis-jenis Matriks

1. MATRIKS NOL, adalah matriks yang semua elemennya nol

   Sifat-sifat :

   a. A+0=A, jika ukuran matriks A = ukuran matriks 0
   b. A*0=0, begitu juga 0*A=0.

2. MATRIKS BUJURSANGKAR, adalah matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama. Barisan elemen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ disebut diagonal utama dari matriks bujursangkar A tersebut.

   Contoh : Matriks berukuran 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks

3. MATRIKS DIAGONAL, adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya nol.

   Contoh : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. MATRIKS SATUAN/IDENTITY, adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya adalah 1.

   Contoh : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Sifat-sifat matriks identitas : A*I=A , I*A=A

Jenis-jenis Matriks

5. MATRIKS SKALAR, adalah matriks diagonal yang semua elemennya sama tetapi bukan nol atau satu.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. MATRIKS SEGITIGA ATAS (UPPER TRIANGULAR), adalah matriks bujursangkar yang semua elemen dibawah diagonal elemennya adalah nol.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks

7. MATRIKS SEGITIGA BAWAH (LOWER TRIANGULAR), adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diatas diagonal elemennya adalah nol.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

8. MATRIKS SIMETRIS, adalah matriks bujursangkar yang elemennya simetris secara diagonal. Dapat juga dikatakan bahwa matriks simetris adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri. $A = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks

9. MATRIKS ANTISIMETRIS adalah matriks yang trnsposenya adalah negatif dari matriks tersebut. Maka $A^T = -A$ dan $a_{ij} = -a_{ij}$, elemen diagonal utamanya adalah nol/

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

TRANSPOSE MATRIKS

Jika diketahui suatu matriks $A = a_{ij}$ berukuran $m \times n$ maka transpose dari A adalah matriks $A^T = n \times m$ yang didapat dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A sebagai kolom ke-i dari A^T.

Beberapa Sifat Matriks Transpose :

a) $(A + B)^T = AT + BT$

b) $(AT)^T = A$

c) $k(AT) = (kA)^T$

d) $(AB)^T = BT\,AT$

Penjumlahan Matriks

Penjumlahan dua matriks hanya bisa dilakukan jika kedua matriks tersebut memiliki ordo, dan penjumlahan matriks dilakukan dengan menjumlahkan setiap elemen yang bersuaian

$$A + B = \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

untuk matriks berordo 2, maka

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Pengurangan Matriks

Pengurangan dua matriks hanya bisa dilakukan jika kedua matriks tersebut memiliki ordo sama, dan pengurangan matriks dilakukan dengan mengurangai setiap elemen yang bersuaian pada matriks pertama dengan matriks kedua

$$A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$$

untuk matriks berordo 2, maka

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Perkalian Matriks

1. Perkalian Skalar dengan Matriks

Contoh $k\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kp & kq \\ kr & ks \end{pmatrix}$

2. Perkalian Matriks dengan Matriks

Misalkan A berordo $p \times q$ *dan B berordo* $m \times n$

Syarat dua buah matriks dapat dikalikan adalah jika banyaknya kolom pada matriks pertama sama dengan banyaknya kolom pada matriks kedua, dalam kasus ini haruslah *q = m* , hasil perkalian AB, berordo $p \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & g \end{pmatrix}_{(2x3)}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}_{(3x2)}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & g \end{pmatrix}_{(2x3)} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix}_{(3x2)} = \begin{pmatrix} ap+br+dt & aq+bs+du \\ ep+fr+gt & eq+fs+gu \end{pmatrix}_{(2x2)}$$

Hukum Perkalian Matriks :

1. Hukum Distributif, $A(B+C) = AB + AC$
2. Hukum Assosiatif, $A(BC) = (AB)C$
3. Tidak Komutatif, $AB \neq BA$
4. Jika $AB = 0$, maka beberapa kemungkinan
   i. $A=0$ dan $B=0$
   ii. $A=0$ atau $B=0$
   iii. $A\neq 0$ dan $B\neq 0$
5. Bila $AB = AC$, belum tentu $B = C$