UNIVERSITAS TERBUKA

MA4112 Aljabar Linear Elementer

Invers Matriks

Salwa Nursyahida

Outline

1. Definisi Invers Matriks
2. Mencari Invers Matriks dengan Matriks Adjoin
3. Mencari Invers Matriks dengan Operasi Baris Elementer
4. Mencari Invers Matriks dengan Operasi Kolom Elementer
5. Sifat-sifat Matriks Invers

INVERS MATRIKS

Definisi :

Jika A dan B adalah sebarang matriks bujur sangkar sedemikian sehingga $AB = BA = I$. Maka B merupakan invers dari A atau A^{-1} dan sebaliknya. Matriks yang mempunyai invers disebut invertible atau non singular.

Untuk mendapatkan A^{-1} , dapat dilakukan dengan cara :

1. Metode Matriks Adjoint / Determinan
2. Metode Operasi Baris Elementer (OBE) atau Operasi Kolom Elementer (OKE)

Mencari Invers Matriks dengan Matriks Adjoin

Matriks adjoint adalah transpos dari matriks kofaktor, dengan matriks kofaktor didefinisikan

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga $Adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$

Invers dari A,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Mencari Invers Matriks dengan Matriks Adjoin

Carilah invers dari A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Solusi : $C_{11} = M_{11} = d$ $\quad C_{21} = -M_{21} = -b$

$C_{12} = -M_{12} = -c$ $\quad C_{22} = M_{22} = a$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Mencari Invers Matriks dengan Matriks Adjoin

Carilah invers dari $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Solusi :

$C_{11} = M_{11} = -5$

$C_{12} = -M_{12} = 1$

$C_{13} = M_{13} = 1$

$C_{21} = -M_{21} = 4$

$C_{22} = M_{22} = -2$

$C_{23} = -M_{23} = 0$

$C_{31} = M_{31} = -4$

$C_{32} = -M_{32} = 0$

$C_{33} = M_{33} = 2$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = (2)(-5) + (4)(1) + (4)(1) = -2$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mencari Invers Matriks dengan Operasi Baris Elementer

Jika A matriks persegi non singular, dengan OBE terhadap A dapat direduksi menjadi bentuk normal I sedemikian hingga :

$$P\ A = I$$

dengan P hasil penggandaan matriks elementer (baris).

$$\begin{aligned} \text{Selanjutnya,} \quad P\ A &= I \\ P^{-1}\ P\ A &= P^{-1}\ I \\ I\ A &= P^{-1} \\ A &= P^{-1} \end{aligned}$$

Ini berarti $A^{-1} = P$

Dengan demikian hasil penggandaan matriks elementer (baris) ini pada hakekatnya adalah invers dari matriks A.

Teknis pencarian invers dengan OBE :

$$(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1})$$

Mencari Invers Matriks dengan Operasi Kolom Elementer

Jika A matriks persegi non singular, dengan OKE terhadap A dapat direduksi menjadi bentuk normal I sedemikian hingga :

dengan Q hasil penggandaan matriks elementer (kolom).

Selanjutnya, $A\ Q = I$

$A\ Q\ Q^{-1} = I\ Q^{-1}$

$A\ I = Q^{-1}$

$A = Q^{-1}$

Ini berarti $A^{-1} = Q$

Dengan demikian hasil penggandaan matriks elementer (kolom) ini pada hakekatnya adalah invers dari matriks A.

Teknis pencarian invers dengan OKE :

$$\left(\frac{A}{I}\right) \sim \left(\frac{I}{A^{-1}}\right)$$

Mencari Invers Matriks dengan Operasi Baris Elementer

Carilah invers dari $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ dengan melakukan OBE !

Solusi :

$$(B \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{H_{13}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21(1)} \\ \sim \\ H_{31(2)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{1(-1)} \\ \sim \\ H_{3(-1/2)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{13(-3)} \\ \sim \\ H_{23(1)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{H_{12(-2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$= (I \mid B^{-1})$$

$$\text{Jadi } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mencari Invers Matriks dengan Operasi Kolom Elementer

Carilah invers dari $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ dengan melakukan OKE !

Solusi :

$$\left(\frac{B}{I}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{K_{31(-2)}}{\overset{K_{21(-2)}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{K_{12(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{K_{13(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 5 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{K_{1(1/2)}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline \frac{5}{2} & -2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{K_{3(-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\frac{I}{B^{-1}}\right)$$

Jadi $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sifat-sifat Matriks Invers

(1) **Matriks invers (jika ada) adalah tunggal (*unique*)**

Andaikan B dan C adalah invers dari matriks A, maka berlaku :
AB = BA = I, dan juga
AC = CA = I
Tetapi untuk : BAC = B(AC) = BI = B ....(*)
BAC = (BA)C = IC = C ....(**)
Dari (*) dan (**) haruslah B = C.

(2) **Invers dari *matriks invers* adalah matriks itu sendiri.**

Andaikan matriks $C = A^{-1}$, berarti berlaku :
AC = CA = I (*)
Tetapi juga berlaku $C\,C^{-1} = C^{-1}\,C = I$ (**)
Dari (*) dan (**) berarti :
$C^{-1} = A$
$(A^{-1})^{-1} = A$.

Sifat-sifat Matriks Invers

(3) **Matriks invers bersifat nonsingular (determinannya tidak nol)**

det $(A A^{-1})$ = det (A) det (A^{-1})

det (I) = det (A) det (A^{-1})

1 = det (A) det (A^{-1}) ; karena det (A) $\neq$ 0 , maka :

det (A^{-1}) = $\dfrac{1}{\det(A)}$

ini berarti bahwa det (A^{-1}) adalah tidak nol dan kebalikan dari det (A).

(4) **Jika A dan B masing-masing adalah matriks persegi berdimensi *n*, dan berturut-turut A^{-1} dan B^{-1} adalah invers dari A dan B, maka berlaku hubungan : $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$**

$(AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = I$ (*)

di sisi lain :

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = A A^{-1} = I$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\,I\,B = B^{-1}B = I$ (**)

Menurut sifat (1) di atas matriks invers bersifat uniqe (tunggal), karena itu dari (*) dan (**) dapatlah disimpulkan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Sifat-sifat Matriks Invers

(5) **Jika matriks persegi A berdimensi *n* adalah non singular, maka berlaku $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.**

Menurut sifat determinan : $|A^T| = |A| \neq 0$, oleh sebab itu $(A^T)^{-1}$ ada, dan haruslah :

$(A^T)^{-1} A^T = A^T (A^T)^{-1} = I$ (*)

Di sisi lain menurut sifat transpose matriks :

$(A A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$

$I^T = (A^{-1})^T A^T$

$(A^{-1})^T A^T = I$, hubungan ini berarti bahwa $(A^{-1})^T$ adalah juga invers dari A^T.

Padahal invers matriks bersifat tunggal, oleh karena itu memperhatikan (*), haruslah :

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Invers Matriks

Misalkan A adalah matriks bujur sangkar.

B dinamakan invers dari A jika dipenuhi

$$A\,B = I \quad \text{dan} \quad B\,A = I$$

Sebaliknya, A juga dinamakan invers dari B.

Notasi $A = B^{-1}$

Cara menentukan invers suatu matriks A adalah

$$\left(A \mid I\right) \underset{\sim}{\text{OBE}} \left(I \mid A^{-1}\right)$$

Jika OBE dari A tidak dapat menghasilkan matriks identitas maka A dikatakan **tidak punya invers**

Contoh :

Tentukan matriks invers (jika ada) dari :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{b_1 \leftrightarrow b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} -3b_1+b_2 \\ 2b_1+b_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad -b_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$-b_3 + b_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$-b_2 + b_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Jadi Invers Matriks A adalah $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{dan} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

maka

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat Matriks Invers

Berikut ini adalah sifat-sifat matriks invers :

i. $(A^{-1})^{-1} = A$

ii. Jika A, B dapat dibalik atau memiliki invers

maka $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

iii. Misal $k \in Riil$ maka $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

iv. Akibat dari (ii) maka $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$