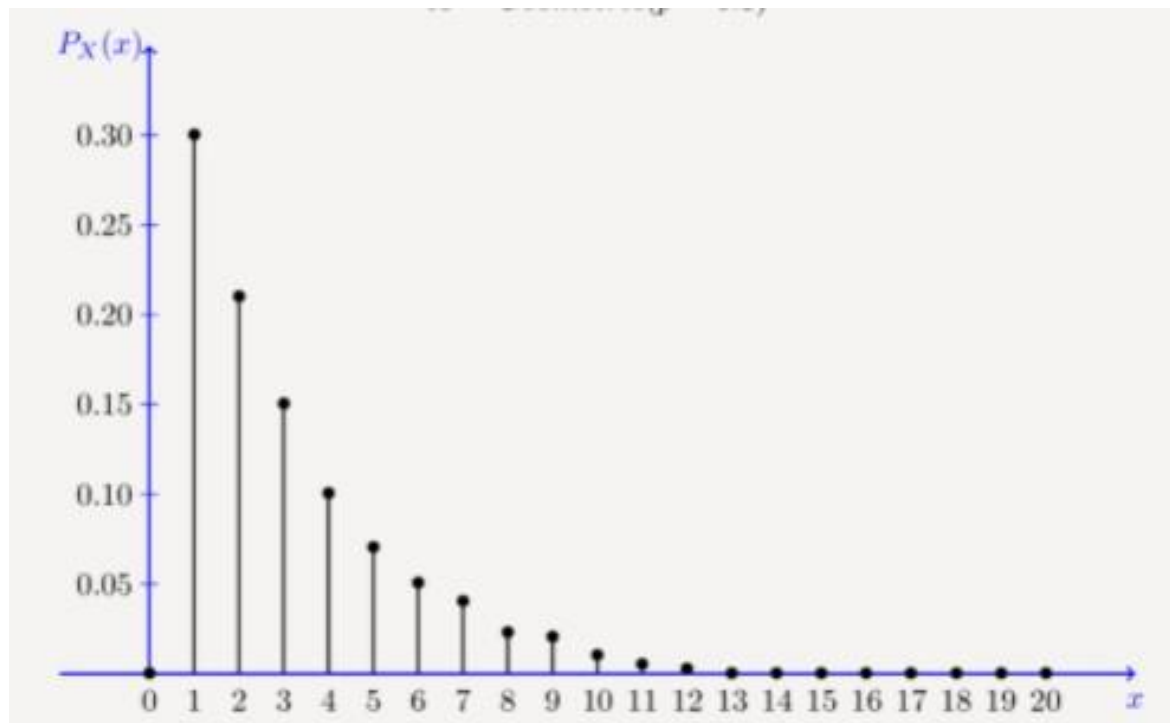
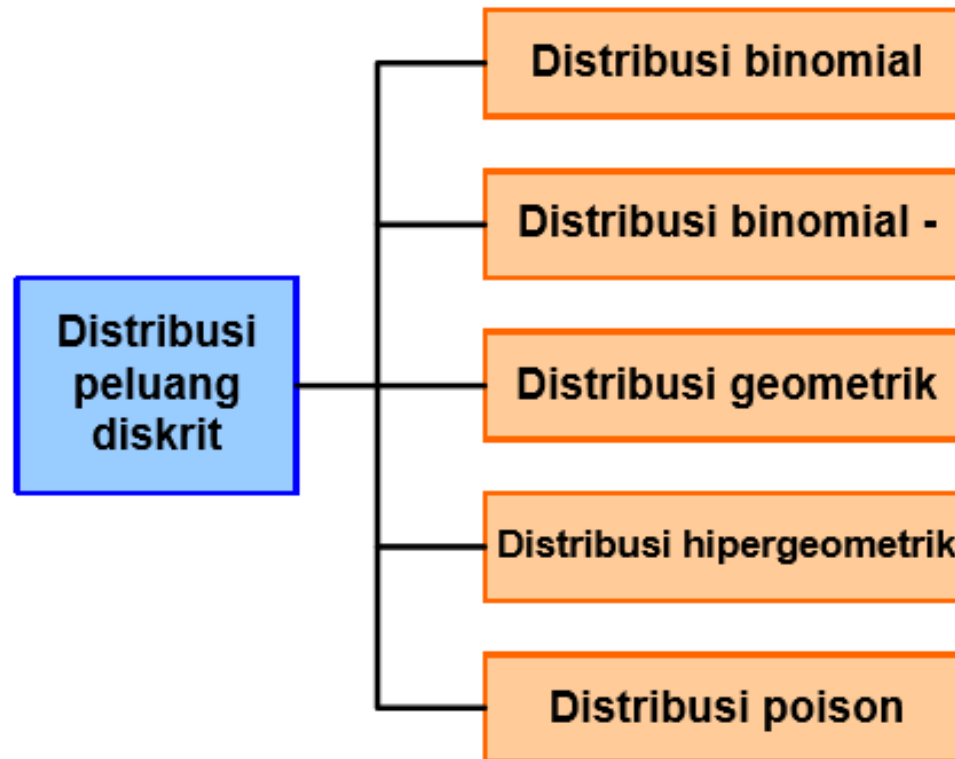


## MKKI4201 / MODUL 5



## DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT



# Distribusi Bernoulli

## BERNOULLI TRIAL

a. Ciri - ciri :

1. Percobaan menghasilkan 2 keluaran M. E., yaitu S = SUKSES dan F = GAGAL
2. Keluaran bersifat exhaustive, yaitu : tidak ada keluaran yang lain
3.  $P(S) = p$  dan  $P(F) = q$ , sehingga  $p+q = 1$

b. Diberikan oleh :  $P(Y = y) = p^y \cdot q^{(1-y)}$ , dengan  $y = \begin{cases} 1, & \text{jika S muncul} \\ 0, & \text{jika F muncul} \end{cases}$

c.  $\mu = p$  dan  $\sigma^2 = p \cdot q$

## STUDI KASUS 1

Dalam pelemparan koin, ditentukan bahwa munculnya muka (M) adalah SUKSES dan munculnya belakang (B) adalah GAGAL.

**SOLUSI :**  $y = 1$ , jika muncul muka, dan  $P(M) = p = \frac{1}{2}$

$y = 0$ , jika muncul belakang, dan  $P(B) = q = \frac{1}{2}$

Sehingga distribusi peluang dari  $y$  menurut *bernoulli trial* adalah :

$$P(1) = p^1 \cdot q^{(1-1)} = p = 0,5$$

$$P(0) = p^0 \cdot q^{(1-0)} = q = 0,5$$

# Distribusi Binomial

## DISTRIBUSI BINOMIAL

### a. Ciri - ciri :

1. Percobaan terdiri atas  $n$  kali *bernoulli trial* yang identik ;
2. Hanya ada 2 keluaran M.E., yaitu  $S = \text{SUKSES}$  dan  $F = \text{GAGAL}$  untuk tiap *trial* ;
3.  $P(S) = p$  dan  $P(F) = q$ , bernilai tetap dari satu *trial* ke *trial* lain ;
4. Semua *trial* saling *independent* ;
5. Variabel *random* Binomial  $Y$  adalah jumlah  $S$  dalam  $n$  *trial*.

### b. Diberikan oleh :

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y \cdot q^{(n-y)}, \text{ untuk } y = 0, 1, 2, \dots, n$$

dengan :  $p$  = peluang SUKSES dalam *trial* tunggal

$$q = 1 - p$$

$n$  = jumlah *trial*

$y$  = jumlah SUKSES dalam  $n$  *trial*

### c. $\mu = n \cdot p$ dan $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$

# Distribusi Binomial

## STUDI KASUS 2

Seorang insinyur elektro sedang mengamati problem arus listrik pada komputer. Hasil *survey* terakhir menunjukkan bahwa 10 % komputer yang dipakai mengalami problem ini. Jika 5 sampel *random* dipilih dari seluruh populasi amatan, hitung peluang :

- terdapat 3 komputer terpilih mengalami kerusakan
- paling sedikit 3 komputer terpilih mengalami kerusakan
- kurang dari 3 komputer terpilih mengalami kerusakan

## SOLUSI :

- a. Tepat 3 komputer,  $y = 3$

$$P(3) = \binom{5}{3} \cdot (10\%)^3 \cdot (90\%)^{(2)} = 0,0081$$

- b. Paling sedikit 3 komputer,  $y = 3, 4, \text{ dan } 5$

$$P(Y \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$$

$$P(3) = 0,0081$$

$$P(4) = \binom{5}{4} \cdot (10\%)^4 \cdot (90\%)^1 = 0,00045$$

$$P(5) = \binom{5}{5} \cdot (10\%)^5 \cdot (90\%)^0 = 0,00001$$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } P(Y \geq 3) &= 0,0081 + 0,00045 + 0,00001 \\ &= 0,00856 \end{aligned}$$

# Distribusi Binomial

c. Kurang dari 3 komputer,  $y = 0, 1, 2$

$$P(Y < 3) = 1 - P(Y \geq 3) = 1 - 0,00856 = 0,99144$$

ATAU dengan memanfaatkan TABEL DISTRIBUSI BINOMIAL.



## STUDI KASUS 3

Sebuah mata uang dilempar 4 kali, kemungkinan munculnya sisi gambar mempunyai distribusi Binomial dengan kemungkinan sukses  $\frac{1}{2}$  adalah sebagai berikut :

$$P(Y = y) = \binom{4}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{4-y}$$

Kemungkinan munculnya gambar 2 kali adalah :

$$P(Y = y) = \binom{4}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{4-y} = \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$$

# Distribusi Binomial

Fungsi kepadatan probabilitasnya adalah :

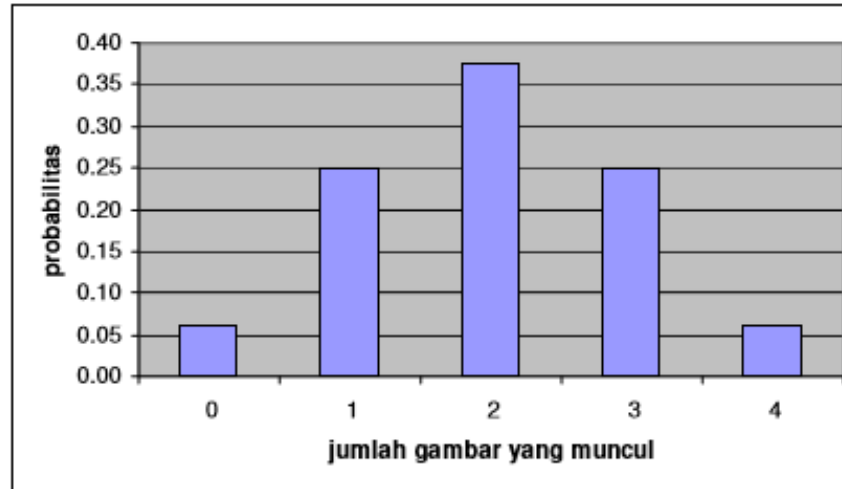
$$P(0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$$

$$P(3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$





## Distribusi Binomial

Rata-rata kemunculan gambar adalah :

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{n=0}^4 y \binom{4}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{4-y} \\ &= 0 + 1 \frac{4!}{1!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \frac{4!}{3!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \frac{4!}{0!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{4}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{4}{16} = \frac{32}{16} = 2\end{aligned}$$

Varians kemunculan gambar adalah :

$$\sigma^2 = np(1-p) = 4 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 1$$

## STUDI KASUS 5

Dilakukan  $n$  pengulangan percobaan dengan menggunakan bilangan acak yang mempunyai probabilitas untuk sukses adalah  $\frac{2}{3}$

1. Jika diulangi 3 kali, hitung kemungkinan sukses lebih dari 2 kali.
2. Jika diulangi 5 kali, hitung kemungkinan sukses lebih dari 3 kali.

## Distribusi Binomial

Bila dilakukan pengulangan 2 kali

$$P(y \geq 2) = P(2) + P(3)$$

$$= \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{3}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{8}{27} = \frac{20}{27}$$

Bila dilakukan pengulangan 5 kali

$$P(y \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$$

$$\begin{aligned} &= \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= 10 \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{3} + \frac{32}{243} = \frac{80 + 80 + 32}{243} = \frac{192}{243} \end{aligned}$$



# Distribusi Multinomial

## DISTRIBUSI MULTINOMIAL

Percobaan **BINOMIAL** akan menjadi percobaan **MULTINOMIAL** apabila tiap usaha dapat memberikan lebih dari DUA hasil yang mungkin. Misal, pembagian hasil *output* pabrik menjadi ringan, berat, atau masih dapat diterima. Contoh lain adalah pengambilan suatu kartu dengan perhatian keempat jenis kartu.

### a. Ciri - ciri

1. Percobaan terdiri atas  $n$  kali *trial* yang identik ;
2. Terdapat  $k$  jenis keluaran untuk tiap *trial* ;
3.  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ , yaitu peluang dari masing - masing keluaran, bernilai tetap dari satu *trial* ke *trial* lain, dan  $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k = 1$  ;
4. Semua *trial* bersifat *independent* ;
5. Variabel *random* multinomial adalah  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_k$  untuk setiap  $k$  jenis keluaran.

# Distribusi Multinomial

b. Diberikan oleh :

$$P(Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_k) = \frac{n!}{y_1! y_2! y_3! \dots y_k!} \cdot p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot p_3^{y_3} \cdot \dots \cdot p_k^{y_k}$$

dengan :  $p_i$  = peluang keluaran ke -  $i$  dalam *trial* tunggal

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k = 1$$

$$n = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_k = \text{jumlah } \textit{trial}$$

$$y_i = \text{jumlah kemunculan keluaran ke - } i \text{ dalam } n \textit{ trial}$$

c.  $\mu_i = n \cdot p_i$  dan  $\sigma_i^2 = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$

## STUDI KASUS 6

Sebuah penelitian menunjukkan bahwa 10% monitor komputer memberikan radiasi tinggi, 30 % sedang, dan 60% rendah. Bila diambil sampel acak 40 monitor dari sebuah populasi amatan, hitunglah :

- Peluang bahwa 10 monitor memiliki radiasi tinggi, 10 sedang, 20 rendah ;
- Rata - rata dan variansi monitor dengan radiasi tinggi dari 40 monitor yang terpilih sebagai sampel.

# Distribusi Multinomial

## SOLUSI :

a. Ditentukan :

$y_1$  = jumlah monitor radiasi tinggi

$y_2$  = jumlah monitor radiasi sedang

$y_3$  = jumlah monitor radiasi rendah

$p_1$  = peluang terpilihnya monitor radiasi tinggi

$p_2$  = peluang terpilihnya monitor radiasi sedang

$p_3$  = peluang terpilihnya monitor radiasi rendah

Sehingga :

$$P(10,10,20) = \frac{40!}{10!10!20!} \cdot (10\%)^{10} \cdot (30\%)^{10} \cdot (60\%)^{20} = 0,0005498$$

b.  $\mu_i = n \cdot p_i = 40 \cdot 10\% = 4$

$$\sigma_i^2 = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i) = 40 \cdot (10\%) \cdot (1 - 10\%) = 3,6$$



## DISTRIBUSI GEOMETRIC

Distribusi **GEOMETRIC**, yaitu banyaknya usaha yang **berakhir pada sukses yang pertama**.

a. Ciri - ciri

Distribusi Binomial negatif dengan  $r = 1$  (mencapai SUKES pertama)

b. Diberikan oleh :

$$P(Y = y) = p \cdot q^{y-1}, \text{ untuk } y = 1, 2, 3, \dots$$

dengan :  $y$  = jumlah *trial* sampai SUKSES PERTAMA dicapai.

c.  $\mu_i = 1/p$  dan  $\sigma^2 = q/p^2$

## Distribusi Geometrik

Sebuah kontainer berisi sekring untuk ekspor. Dari spesifikasi produsen diketahui bahwa proporsi cacat sekring adalah 10 %. Inspektur sedang melakukan pengujian kesesuaian mutu sekring dengan cara mengambil satu persatu sampai diketemukan sekring yang cacat. Tentukan peluang bahwa sekring cacat ditemukan dalam 5 pengujian pertama.

**SOLUSI :**

$$p = 0,1 \text{ dan } q = 0,9$$

$$\text{Sehingga : } P(Y = y) = p \cdot q^{y-1} = (0,1) \cdot (0,9)^{y-1}$$

$$\begin{aligned} P(Y \leq 5) &= p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) \\ &= (0,1)(0,9)^0 + (0,1)(0,9)^1 + (0,1)(0,9)^2 + \dots + (0,1)(0,9)^4 \\ &= 0,41 \end{aligned}$$

# Distribusi Hipergeometrik

## DISTRIBUSI HYPERGEOMETRIC

### a. Ciri - ciri

1. Percobaan terdiri atas pengambilan *random*  $n$  elemen tanpa pengembalian dari total  $N$  elemen ;
2. Terdapat  $S$  (SUKSES) sebanyak  $r$  dan  $F$ (GAGAL) sebanyak  $N - r$  ;
3. Ukuran  $n$  dianggap besar sebanding  $N$  ( $n/N > 0,05$ )
4. Variabel *random hypergeometric*  $Y$  adalah jumlah  $S$  (SUKSES) dalam pengambilan  $n$  elemen.

### b. Diberikan oleh :

$$P(Y = y) = \frac{\binom{r}{y} \binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}, \text{ untuk } y = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

dengan :  $N$  = jumlah total elemen

$r$  = jumlah SUKSES dalam  $N$

$n$  = jumlah elemen pengambilan

$y$  = jumlah SUKSES dalam pengambilan ( $n$ )

c.  $\mu_i = n.r / N$  dan  $\sigma^2 = \frac{r.(N-r).n.(N-n)}{N^2(N-1)}$

# Distribusi Hipergeometrik

## STUDI KASUS

Dari 10 katalis yang ada diperlukan 3 untuk keperluan pembuatan produk kimia baru. Dari sepuluh katalis tersebut terdapat 4 jenis katalis berkadar asam tinggi dan 6 jenis berkadar asam rendah.

- tentukan peluang bahwa katalis yang terpilih semua berkadar asam rendah ;
- tentukan peluang bahwa dari 3 katalis yang dipilih, hanya 1 yang memiliki kadar asam tinggi.

## SOLUSI :

$y$  = jumlah katalis berkadar asam tinggi dari 3 katalis terpilih

$N = 10$  ,  $n = 3$  ,  $r = 4$

MAKA

$$P(Y = y) = \frac{\binom{4}{y} \binom{6}{3-y}}{\binom{10}{3}}$$

$$\text{a. } P(Y = 0) = \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$

$$\text{b. } P(Y = 1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}$$



# Distribusi Poisson

## DISTRIBUSI POISSON

### a. Ciri - ciri

1. Variabel *random*  $y$  = jumlah kemunculan kejadian yang diamati selama unit ukuran tertentu (contoh : jarak, area, volume, dll) ;
2. Nilai peluang dari sebuah kejadian adalah sama untuk setiap ukuran tertentu ;
3. Jumlah kejadian yang muncul untuk setiap unit adalah *independent* ;
4.  $\lambda$  = rata - rata jumlah kejadian dalam setiap unit ukuran

### b. Diberikan oleh

$$P(Y = y) = \frac{\lambda^y \cdot e^{-\lambda}}{y!}, \text{ untuk } y = 0, 1, 2, \dots$$

dengan :  $\lambda$  = rata - rata jumlah kejadian dalam setiap unit ukuran  
 $e = 2,71828$

### c. $\mu = \lambda$ dan $\sigma^2 = \lambda$

# Distribusi Poisson

## STUDI KASUS

Sejumlah  $y$  retak pada spesimen beton untuk sebuah jenis semen mengikuti distribusi poisson. Dengan pengamatan awal diketahui bahwa jumlah rata - rata keretakan setiap spesimen adalah 2,5. Tentukan peluang bahwa sebuah spesimen yang dipilih secara *random* memiliki jumlah keretakan 5.

## SOLUSI :

$$\mu = \lambda = 2,5$$

Sehingga

$$P(Y = 5) = \frac{2,5^5 \cdot e^{-2,5}}{5!} = 0,067$$



# Distribusi Poisson

## STUDI KASUS

Rata-rata kedatangan truk setiap jam pada sebuah gudang bongkar muat adalah 4, maka kedatangan  $x$  truk dapat dinyatakan sebagai distribusi Poisson dengan rata-rata 4 yang dituliskan dengan :

$$P(Y = y) = \frac{e^{-4} 4^y}{y!}$$

y	P(y)
0	0.018316
1	0.073263
2	0.146525
3	0.195367
4	0.195367
5	0.156293
6	0.104196
7	0.059540
8	0.029770
9	0.013231
10	0.005292
11	0.001925
12	0.000642
13	0.000197
14	0.000056
15	0.000015

