

# **DISTRIBUSI NORMAL**

**Widya Setiafindari, ST.**

## Distribusi Normal

---

Distribusi probabilitas yg terpenting dalam statistik adalah distribusi normal atau Gaussian.

### Jenis Variabel Acak Kontinu

Digunakan untuk menerangkan fenomena alam, industri, perdagangan, tingkat pendapatan masyarakat, dsb.



# Distribusi Normal

---

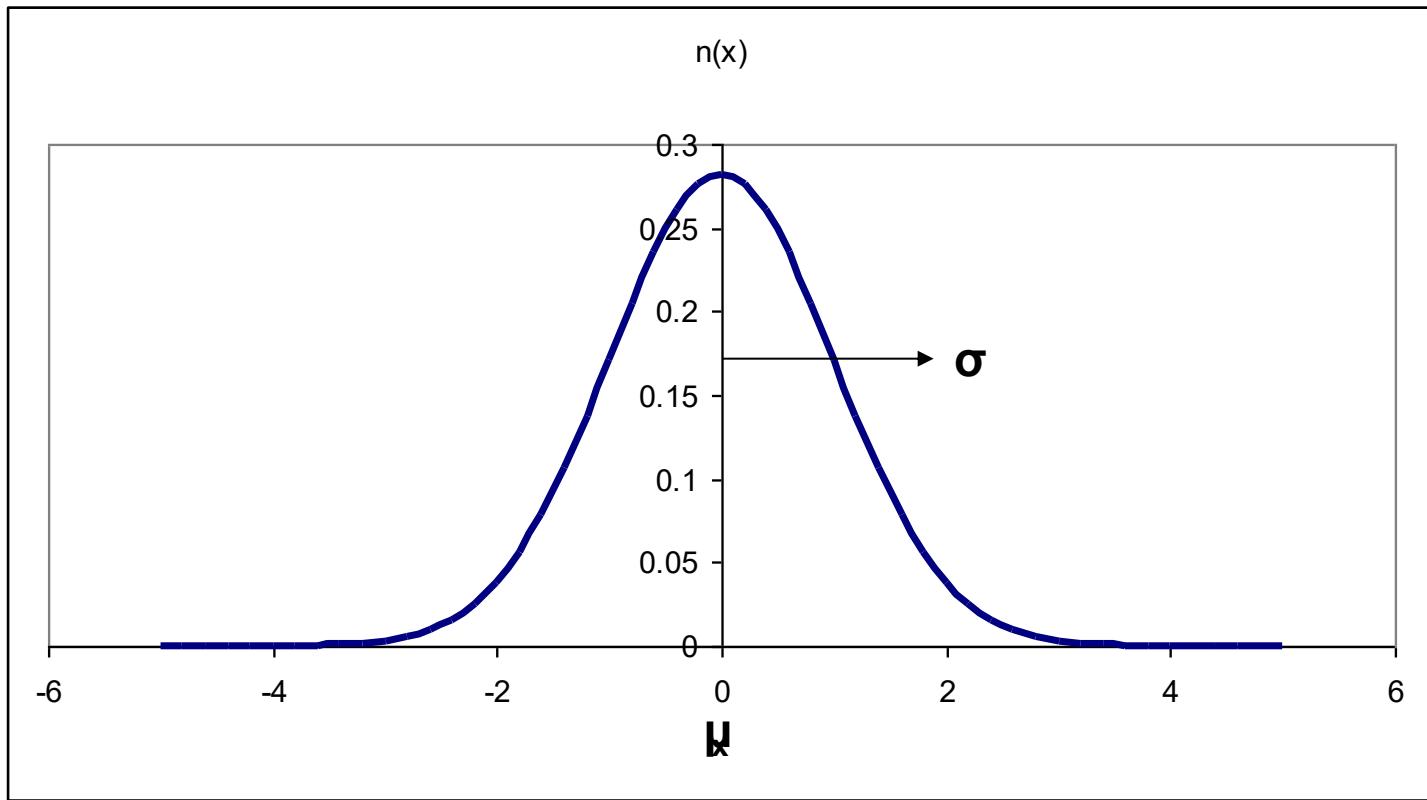
Fungsi rapat probabilitas variabel random  $X$  dengan mean  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$  yang memiliki distribusi normal adalah:

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Dimana  $\mu = \text{mean}$ ,  $\sigma = \text{deviasi standar}$ ,  $\pi = 3,14159 \dots$ , dan  $e = 2,71828 \dots$

Probabilitas ini dinyatakan sebagai  $P(a < X < b)$





## Sifat Distribusi Normal:

---

Contoh **variabel random yg memiliki distribusi normal** misalnya:

- distribusi error dalam pengukuran
- pengukuran dalam meteorologi
- pengukuran curah hujan
- sebagai pendekatan bagi distribusi binomial dan distribusi hipergeometrik, dan lainnya



# Sifat-Sifat Distribusi Normal:

Mean	$\mu$
Varians	$\sigma^2$
Deviasi Standar	$\sigma$
Koefisien momen kemiringan	$\alpha_3 = 0$
Koefisien momen kurtois	$\alpha_4 = 3$
Deviasi mean	$\sigma \sqrt{2/\pi} = 0,7979\sigma$



## Sifat-Sifat Distribusi Normal:

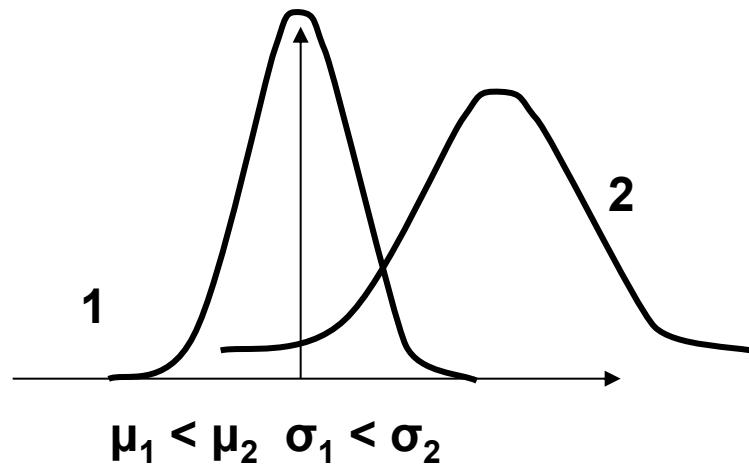
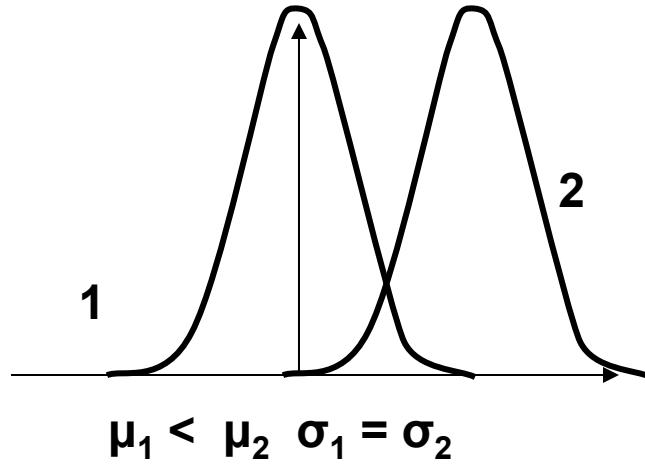
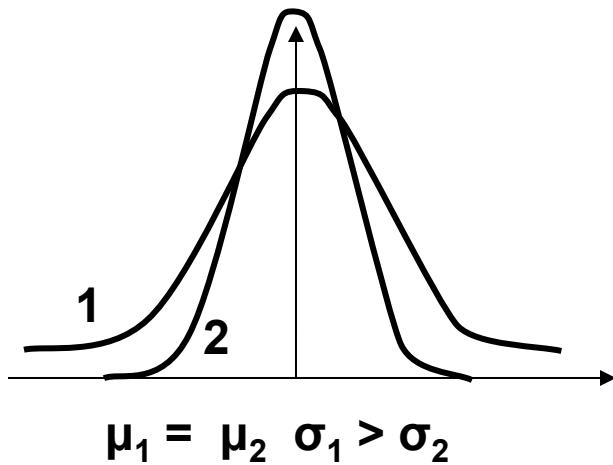
---

1. Rata-ratanya (mean)  $\mu$  dan standard deviasinya =  $\sigma$
2. Mode (maximum) terjadi di  $x=\mu$
3. Bentuknya simetrik thd  $x=\mu$
4. Titik belok tepat di  $x=\mu \pm \sigma$
5. Kurva mendekati nol secara asimptotis semakin  $x$  jauh dari  $x=\mu$
6. Total luasnya = 1



# Sifat-Sifat Distribusi Normal:

- Bentuk distribusi normal ditentukan oleh  $\mu$  dan  $\sigma$ .



# CIRI DISTRIBUSI NORMAL

---

- 1. NILAI MEAN, MEDIAN DAN MODUS ADALAH SAMA / BERHIMPIT.**
- 2. KURVANYA SIMETRIS**
- 3. ASIMPTOTIK (fungsi yang dibatasi oleh suatu fungsi  $n \in \mathbb{N}$  yang cukup besar).**
- 4. LUAS DAERAH YANG TERLETAK DIBAWAH KURVA DAN DIATAS GARIS MENDATAR = 1**



# KELUARGA DISTRIBUSI NORMAL

---

SEMAKIN BESAR NILAI  $\sigma$ , MAKA  
KURVA AKAN SEMAKIN LANDAI,  
DAN SEMAKIN KECIL NILAI  $\sigma$  MAKA  
KURVA AKAN SEMAKIN MELANCIP

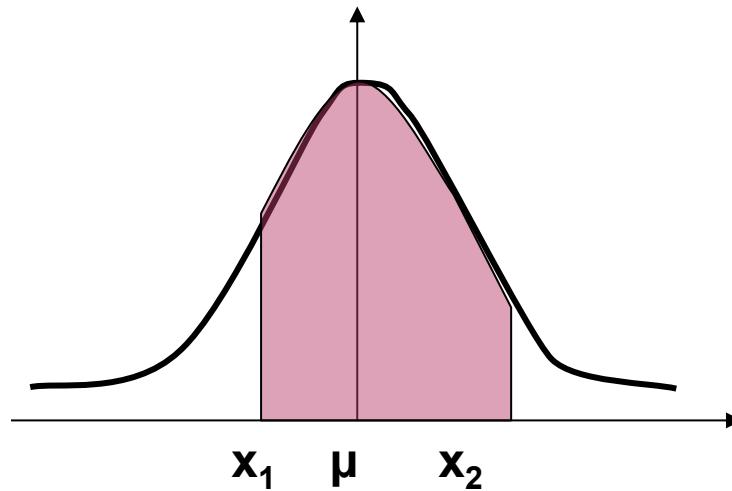


# Luas di Bawah Kurva dan Probabilitas

---

$P(x_1 < x < x_2)$  = probabilitas variabel random  $x$  memiliki nilai antara  $x_1$  dan  $x_2$

$P(x_1 < x < x_2)$  = luas di bawah kurva normal antara  $x=x_1$  dan  $x=x_2$



# Luas di Bawah Kurva dan Probabilitas

---

Oleh karena perhitungan integral normal tsb sulit, maka disusunlah tabel nilai rapat probabilitas. Akan tetapi karena nilai rapat probabilitasnya tergantung pada  $\mu$  dan  $\sigma$  maka sangatlah tidak mungkin mentabelkan untuk semua nilai  $\mu$  dan  $\sigma$



# Kurva DIstribusi Normal Standard

---

Distribusi normal standard adalah distribusi normal dengan mean  $\mu=0$  dan standard deviasi  $\sigma=1$ .

Transformasi  $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$  memetakan distribusi normal

menjadi distribusi normal standard, sebab distribusi normal dengan variabel z ini memiliki mean =0 dan standard deviasi = 1.  
Transformasi ini juga mempertahankan luas dibawah kurvanya,  
artinya:



# Kurva DIstribusi Normal Standard

---

Transformasi ini juga mempertahankan luas dibawah kurvanya, artinya:

$$\text{Luas dibawah kurva distribusi normal antara } x_1 \text{ dan } x_2 = \text{Luas dibawah kurva distribusi normal standard antara } z_1 \text{ dan } z_2$$

Dengan  $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$  dan  $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$ .

Sehingga cukup dibuat tabel distribusi normal standard kumulatif saja!



# Tabel Distribusi Normal Standard Kumulatif

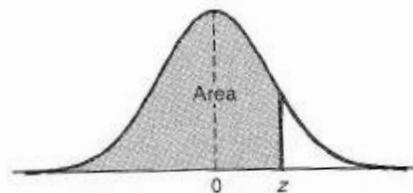


Table A.3 Areas under the Normal Curve

=	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-1.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-1.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-1.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-1.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-1.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-0.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-0.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-0.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-0.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0042	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036



# Hubungan antara Distribusi Binomial dan Distribusi Normal

---

- ▶ Jika  $N$  cukup besar dan jika tak satu pun dari  $p$  atau  $q$  sangat dekat dengan nol maka distribusi binomial dapat didekati atau diaproksimasi oleh sebuah distribusi normal dengan variabel terstandarisasi yang dirumiskan sebagai:

$$z = \frac{x - Np}{\sqrt{Npq}}$$

- ▶ Pendekatan ini akan semakin baik seiring dengan semakin bertambah besarnya  $N$ . Dalam praktiknya, pendekatannya akan sangat bagus jika  $Np$  dan  $Nq$  keduanya lebih besar daripada 5.



## Contoh: Hitung Luas

Pergunakanlah tabel distribusi normal standard untuk menghitung luas daerah :

- a) Di sebelah kanan  $z=1.84$
- b) Antara  $z=-1.97$  s/d  $z=0.86$

Jawab.

Ingin bahwa luas yg diberikan dalam tabel distribusi normal kumulatif adalah luas dari  $z=-\infty$  s/d  $z_0$  tertentu:  $P(z < z_0)$ .

- a)  $P(z > 1.84) = 1 - P(z \leq 1.84) = 1 - 0.9671 = 0.0329$
- b) 
$$\begin{aligned}P(-1.97 < z < 0.86) &= P(z < 0.86) - P(z < -1.97) \\&= 0.8051 - 0.0244 \\&= 0.7807\end{aligned}$$



## Contoh: Cari z

Carilah nilai  $z=k$  di distribusi normal standard sehingga

- a)  $P(Z>k) = 0.3015$
- b)  $P(k<z<-0.18) = 0.4197$

Jawab:

a)  $P(Z>k) = 0.3015$  berarti  $P(Z<k) = 1 - P(z>k) = 1 - 0.3015 = 0.6985$

Dari tabel terbaca luas ke kiri = 0.6985 adalah untuk  $z=0.52$ .

b)  $P(k<z<-0.18) = P(z<-0.18) - P(z<k) = 0.4197$   
 $= 0.4286 - P(z<k) = 0.4197$

Jadi  $P(z<k) = 0.4286 - 0.4197 = 0.0089$

Dari tabel  $z = -2.37$



# Contoh: Luas di bawah kurva normal non standard

---

Contoh.

Variabel X terdistribusi normal dengan mean 50 dan standard deviasi =10. Carilah probabilitas untuk menemukan X bernilai antara 45 dan 62?

Jawab.

Dalam soal ini  $\mu = 50$  dan  $\sigma=10$ .  $x_1 = 45$  dan  $x_2 = 62$

Pertama kita mapping x ke z (melakukan normalisasi atau standardisasi):

$$z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma \rightarrow z_1 = (45-50)/10 = -0.5$$

$$z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma \rightarrow z_2 = (62-50)/10 = 1.2$$

Sehingga

$$P(45 < x < 62) = P(-0.5 < z < 1.2)$$

$$P(-0.5 < z < 1.2) = P(z < 1.2) - P(z < -0.5) = 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$$



# Memakai Distribusi Normal Dalam Arah Kebalikan

---

Diketahui luas dibawah distribusi normal yg diinginkan yang terkait dengan besar probabilitas, ingin dicari nilai variabel random X yg terkait.

Contoh.

Misalkan distribusi normal memiliki  $\mu=40$   $\sigma=6$ , carilah nilai  $x_0$  sehingga:

- a)  $P(x < x_0) = 45\%$
- b)  $P(x > x_0) = 14\%$

Jawab.

- a) Kita mulai dengan mencari nilai Z yg sama luasnya.

$$P(z < z_0) = 45\% = 0.45 \rightarrow \text{dari tabel } z_0 = -0.13$$

$$z_0 = (x_0 - \mu)/\sigma \rightarrow x_0 = \mu + \sigma z_0 = 40 + 6 * (-0.13) = 39.22$$



# Memakai Distribusi Normal Dalam Arah Kebalikan

---

Jawab.

b) Kita mulai dengan mencari nilai Z yg sama luasnya.

$$P(z>z_0) = 14\% \rightarrow P(z<z_0) = 1 - P(z>z_0) = 1 - 0.14 = 0.86$$

$$P(z<z_0) = 0.86 \rightarrow \text{dari tabel } z_0 = 1.08$$

$$z_0 = (x_0 - \mu)/\sigma \rightarrow x_0 = \mu + \sigma z_0 = 40 + 6*(1.08) = 46.48$$



# Contoh Penerapan Distribusi Normal

Sebuah perusahaan bolam lampu mengetahui bahwa umur lampunya (sebelum putus) terdistribusi secara normal dengan rata-rata umurnya 800 jam dan standard deviasinya 40 jam. Carilah probabilitas bahwa sebuah bolam produksinya akan:

- Berumur antara 778 jam dan 834 jam
- Berumur kurang dari 750 jam atau lebih dari 900 jam

Jawab.

$$\mu = 800 \quad \sigma = 40.$$

- $P(778 < x < 834)$

$$x_1 = 778 \rightarrow z_1 = (x_1 - \mu) / \sigma = (778 - 800) / 40 = -0.55$$

$$x_2 = 834 \rightarrow z_2 = (x_2 - \mu) / \sigma = (834 - 800) / 40 = 0.85$$

$$\begin{aligned}P(778 < x < 834) &= P(-0.55 < z < 0.85) = P(z < 0.85) - P(z < -0.55) \\&= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111\end{aligned}$$



# Contoh Penerapan Distribusi Normal

---

b) Berumur kurang dari 750 jam atau lebih dari 900 jam

$$\mu = 800 \quad \sigma = 40.$$

$$P(x < 750 \text{ atau } x > 900)$$

$$x_1 = 750 \rightarrow z_1 = (x_1 - \mu) / \sigma = (750 - 800) / 40 = -1.25$$

$$x_2 = 900 \rightarrow z_2 = (x_2 - \mu) / \sigma = (900 - 800) / 40 = 2.5$$

$$P(x < 750 \text{ atau } x > 900) = P(z < -1.25) + P(z > 2.5)$$

$$= P(z < -1.25) + 1 - P(z < 2.5)$$

$$= 1 + P(z < -1.25) - P(z < 2.5)$$

$$= 1 + 0.1056 - 0.9938 = 0.1118$$



## Soal:

---

- 1) Dalam suatu ujian akhir Matematika, mean nilai adalah 72 sementara deviasi standarnya adalah 15. tentukan angka-angka standar (yaitu nilai-nilai dalam satuan deviasi standar) dari siswa-siswa yang memperoleh nilai
  - (a) 60
  - (b) 93
  - (c) 72
- 2) Sebuah koin yang seimbang dilemparkan sebanyak 500 kali. Carilah probabilitas bahwa selisih banyaknya kemunculan tanda gambar dengan 250 kali adalah
  - (a) tidak lebih dari 10
  - (b) tidak lebih dari 30



# Soal

- 
- 3) Diameter ball-bearing yg diproduksi sebuah pabrik memiliki mean 3cm dengan standard deviasi 0.005 cm. Pembeli hanya mau menerima jikalau ball bearingnya memiliki diameter  $3.0 \pm 0.01$ cm.
- a) berapakah persenkah dari produksi pabrik tersebut yg tidak bisa diterima pembeli?
- b) jikalau dalam sebulan pabrik tsb memproduksi 10000 ball-bearing, berapa banyak yg harus dibuang tiap bulan karena ditolak pembeli?
- 4) Sebuah pengukur diameter bola besi dipasang secara otomatis dalam sebuah pabrik. Pengukur tsb hanya akan meloloskan diameter bola  $1.50 \pm d$  cm. Diketahui bahwa bola produksi pabrik tersebut memiliki diameter yg terdistribusi normal dengan rata-rata 1.50 dan standard deviasi 0.2 cm. Jikalau diinginkan bahwa 95% produksinya lolos seleksi berapakah nilai d harus ditetapkan?



# Soal

---

- 5) Rata-rata nilai kuliah statistik diketahui 65 dengan standard deviasi 15. a) Jikalau diinginkan 15% murid mendapat nilai A dan diketahui distribusi nilai normal, berapakah batas bawah nilai agar mendapat A? (b) Selanjutnya diinginkan yg mendapat B adalah sebanyak 25%. Berapakah batas bawah B? (c) Seandainya diinginkan yg tidak lulus paling banyak 25%, berapakah batas bawah agar siswa lulus?

