Konsep Tambahan, Agreement, dan Closure

MSIM 4103 – Logika Informatika

Program Studi Sistem Informasi

Jurusan Tehnik, FST

UNIVERSITAS TERBUKA

Materi Inisiasi 8

1. Konsep Tambahan
   - Satisfiabel Kalimat Tertutup
   - Contradictory Kalimat Tertutup
   - Consistent Kalimat Tertutup
2. Agreement
   - Agree on Simbol
   - Agree on Ekspresi dan Kalimat
3. Closure

1. Konsep Tambahan

- Satisfiabel Kalimat Tertutup
- Contradictory Kalimat Tertutup
- Consistent Kalimat Tertutup

Review Materi Sebelumnya

- Kalimat dikatakan tertutup jika semua variabel yang muncul tidak memiliki permunculan bebas/ **tidak memuat variabel bebas**.
- Variabel bebas: variabel yang **tidak termasuk** dalam scope kuantifier universal (for all) atau exsintensial (for some).
- Suatu interpretasi **dikatakan interpretasi untuk kalimat logika predikat** $\mathcal{E}$ jika *I* memberikan nilai kepada masing-masing **simbol bebas** (konstanta, variabel bebas, fungsi, predikat) **dalam** $\mathcal{E}$.

Satisfiabel untuk Kalimat Tertutup

- Suatu kalimat tertutup $\mathcal{F}$ dikatakan satisfiabel jika ada suatu interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}$ yang menyebabkan kalimat $\mathcal{F}$ bernilai true.
- Cara membuktikan kalimat logika predikat $\mathcal{F}$ bersifat satisfiabel:
  1. Periksa apakah kalimat logika predikat $\mathcal{F}$ tertutup atau tidak. Bila ya, lanjut ke langkah 2 dan 3.
  2. Tentukan suatu domain dan interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}$ yang menyebabkan nilainya adalah true.
  3. Tunjukan nilai kebenaran kalimat $\mathcal{F}$ adalah true pada interpretasi tersebut.

Contoh 8.1

Periksa apakah kalimat berikut ini bersifat satisfiabel!

$\mathcal{F}$: (for some x) (p(x) and r(x))

Jawaban Contoh 8.1

Langkah 1

Periksa apakah kalimat merupakan kalimat tertutup, yaitu kalimat yang tidak memuat variabel bebas. (Pemeriksaan lihat materi sesi 6)

$$\mathcal{F}\text{: (for some x) (p(x) and q(x))}$$

merupakan kalimat tertutup karena variabel x yang muncul dalam p(x) dan q(x) terikat oleh kuantifier eksistensial for some.

Jawaban Contoh 8.1

Langkah 2
Tentukan domain interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}$: (for some x) (p(x) and q(x)).
(Contoh cara memberikan interpretasi ada dalam materi sesi 6)

Misalkan Domain untuk kalimat $\mathcal{F}$ adalah bilangan bulat dan interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}$ dinotasikan dengan interpretasi *I*. Interpretasi *I* akan memberikan interpretasi terhadap simbol bebas dalam kalimat, yaitu simbol predikat p dan q.

Untuk simbol bebas p akan diberikan interpretasi berikut ini: $p \leftarrow p_I(d_1)$: $d_1 > 0$

Untuk simbol bebas q akan diberikan interpretasi berikut ini: $q \leftarrow q_I(d_1)$: $d_1 > d_1 - 2$.

Interpretasi *I* dapat dituliskan sebagai *I*: $\{p \leftarrow p_I(d_1): d_1 > 0,\ q \leftarrow q_I(d_1): d_1 > d_1 - 2\}$

Jawaban Contoh 8.1

Langkah 3
Tunjukan nilai kebenaran kalimat $\mathcal{F}$ adalah true pada interpretasi tersebut.

Karena pada interpretasi *I*: $\{p \leftarrow p_I(d_1): d_1>0, q \leftarrow q_I(d_1): d_1>d_1-2\}$, dapat dipilih bilangan bulat yang lebih dari 0 (misalkan adalah 1), sehingga

p(1): 1>0 (bernilai true) dan q(1): 1>1-2 $\equiv$ 1>-1 (bernilai true)

p(1) and q(1): true and true (bernilai true)

Jadi, (**for some x) (p(x) and q(x))** bernilai true pada suatu interpretasi *I*.

Oleh karena itu, **kalimat $\mathcal{F}$ bersifat satisfiabel.**

Contradictory untuk Kalimat Tertutup

- Suatu kalimat tertutup $\mathcal{F}$ dikatakan contradictory jika untuk setiap interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}$ menyebabkan kalimat $\mathcal{F}$ bernilai false.
- Cara membuktikan kalimat logika predikat $\mathcal{F}$ bersifat contradictory:
  1. Tentukan apakah kalimat logika predikat $\mathcal{F}$ tertutup atau tidak. Bila ya, lanjut ke langkah 2a atau 2b.
  2. Buktikan sifat contradictory
     a. Langsung menggunakan Proof by Falsification.
        - Asumsikan kalimat $\mathcal{F}$ tidak bersifat contradictory, artinya ada suatu interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}$ yang menyebabkan kalimat $\mathcal{F}$ bernilai true.
        - Uraikan hingga menemukan kontradiksi.

     b. Mengubah kalimat $\mathcal{F}$ menjadi not $\mathcal{F}$ dan menunjukan kalimat not $\mathcal{F}$ bersifat valid. (Lihat materi sesi 7)

Contoh 8.2

Periksa apakah kalimat berikut ini bersifat satisfiabel!

$\mathcal{F}$: not (for all x) (p(x)) and (for all x) (p(x))

Jawaban Contoh 8.2

Periksa kalimat $\mathcal{F}$: not (for all x) (p(x)) and (for all x) (p(x)) dengan Proof by Falsification (PbF)

Langkah 1

Asumsikan $\mathcal{F}$ tidak bersifat contradictory, artinya ada suatu interpretasi *I* atas suatu *domain D* sedemikian sehingga $\mathcal{F}$ bernilai true di bawah *I*.

Jawaban Contoh 8.2

Langkah 2

Uraikan kalimat $\mathcal{F}$: not (for all x) (p(x)) and (for all x) (p(x)) hingga menemukan/ tidak menemukan kontradiksi.

Kalimat $\mathcal{F}$: not (for all x) (p(x)) and (for all x) (p(x)) merupakan kalimat konjungsi dari kalimat **not** (**for all** x) (p(x)) dan kalimat (**for all** x) (p(x)). Kalimat $\mathcal{F}$ bernilai true apabila kedua kalimat, **not** (**for all** x) (p(x)) dan (**for all** x) (p(x)) bernilai true.

Kalimat **not** (**for all** x) (p(x)) bernilai true diperoleh apabila nilai kalimat (**for all** x) (p(x)) bernilai false. Namun, ini kontradiksi dengan nilai kalimat (**for all** x) (p(x)) bernilai true.

Jawaban Contoh 8.2

$\mathcal{F}$: **not** (**for all** x) (p(x)) **and** (**for all** x) (p(x))

T

T T

F

Perhatikan garis putus-putus, terjadi perbedaan nilai kebenaran (**for all** x) (p(x)) di sisi kanan dan kiri (kontradiksi). Jadi, haruslah $\mathcal{F}$ bernilai salah untuk setiap interpretasi (bersifat contradictory).

Konsisten untuk Kalimat Tertutup

- Suatu kalimat tertutup $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$ dikatakan konsisten apabila terdapat interpretasi untuk $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$ yang membuat $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$ bernilai true.
- Cara membuktikan kalimat logika predikat $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$ bersifat konsisten:
  1. Periksa apakah kalimat logika predikat $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$ tertutup atau tidak. Bila ya, lanjut ke langkah 2 dan 3
  2. Tentukan suatu domain dan interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$.
  3. Tunjukan nilai kebenaran kalimat $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$ adalah true pada interpretasi tersebut.

Contoh 8.3

Periksa apakah kalimat berikut bersifat konsisten.

$\mathcal{F}_1$: (for some x) p(x)

$\mathcal{F}_2$: (for some y) q(y)

$\mathcal{F}_3$: (for some z) (if p(z) then q(z))

Jawaban Contoh 8.3

Langkah 1
Periksa apakah kalimat logika predikat $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ tertutup atau tidak.

Pada $\mathcal{F}_1$: (for some x) p(x) , variabel x dalam p(x) terikat oleh kuantifier for some.

Pada $\mathcal{F}_2$: (for some y) q(y) , variabel y dalam q(y) terikat oleh kuantifier for some.

Pada $\mathcal{F}_3$: (for some z) (if p(z) then q(z)) , variabel z dalam p(z) dan q(z) terikat oleh kuantifier for some.

Jadi, **kalimat logika predikat $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ tertutup .**

Jawaban Contoh 8.3

Langkah 2

Tentukan suatu domain dan interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.

Simbol bebas pada kalimat $\mathcal{F}_1$ adalah predikat p.

Simbol bebas pada kalimat $\mathcal{F}_2$ adalah predikat q.

Simbol bebas pada kalimat $\mathcal{F}_3$ adalah predikat p dan predikat q.

Oleh karena itu, interpretasi harus memuat semua simbol bebas kalimat $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.

Jawaban Contoh 8.3

Langkah 2 (lanjutan)

Misalkan domain yang diambil adalah bilangan real dan interpretasi dinotasikan dengan *J*. Interpretasi *J* akan memberikan interpretasi terhadap simbol bebas dalam kalimat, yaitu simbol predikat p dan q.

Untuk simbol bebas p akan diberikan interpretasi berikut ini: $p \leftarrow p_J(d_1)$: $0{,}5d_1 \neq 1$

Untuk simbol bebas q akan diberikan interpretasi berikut ini: $q \leftarrow q_J(d_1)$: $d_1 > 1{,}25$.

Interpretasi *J* dapat dituliskan sebagai *J*: $\{p \leftarrow p_J(d_1)$: $0{,}5d_1 \neq 1$, $q \leftarrow q_J(d_1)$: $d_1 > 1{,}25\}$

Jawaban Contoh 8.3

Langkah 3
Tunjukan nilai kebenaran kalimat $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ adalah true pada interpretasi tersebut.

<u>Kalimat $\mathcal{F}_1$</u>
Karena dapat dipilih bilangan real x≠2 (misalkan x=3) sehingga p(3): 0,5(3)≠1≡1,5≠1 (bernilai true) maka kalimat $\mathcal{F}_1$: (for some x) p(x) bernilai true pada *J.*

<u>Kalimat $\mathcal{F}_2$</u>
Karena dapat dipilih bilangan real y>1,25 (misalkan y=1,3) sehingga q(1,3): 1,3>1,25 (bernilai true) maka kalimat $\mathcal{F}_2$: (for some y) q(y) bernilai true pada *J.*

Jawaban Contoh 8.3

Langkah 3 (lanjutan)

Kalimat $\mathcal{F}_3$

Karena dapat dipilih bilangan real z≠2 dan z>1,25 (misalkan z=2,1) sehingga

p(2,1): 0,5(2,1)≠1 ≡ 1,05≠1 (bernilai true),

q(2,1): 2,1>1,25 (bernilai true), dan

If p(2,1) then q (2,1): if true then true (bernilai true)

maka kalimat $\mathcal{F}_3$: (for some z) (if p(z) then q (z)) bernilai true pada *J.*

Karena interpretasi *J* dapat membuat nilai kalimat $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ adalah true, maka kalimat $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ konsisten.

2. Agreement

- *Agree on* Simbol
- *Agree on* Ekspresi dan Kalimat

Agree on Simbol

Dua atau lebih interpretasi dikatakan *agree on* simbol (simbol variabel, konstanta, fungsi dan predikat) jika:

- Dua atau lebih interpretasi memberikan nilai yang sama kepada setiap simbol (khususnya simbol bebas, yaitu simbol konstanta, variabel bebas, fungsi, predikat), atau
- Dua atau lebih interpretasi tidak memberikan nilai kepada simbol (terdapat simbol bebas yang tidak diberi nilai).

Contoh 8.4

Misalkan interpretasi *I* dan *J* merupakan interpretasi atas domain bilangan bulat. Interpretasi I={a$\leftarrow$2, b$\leftarrow$3, x $\leftarrow$0, f $\leftarrow f_I(d_1, d_2)=d_1-d_2$, q $\leftarrow q_I(d_1, d_2, d_3)=d_1>d_2$} dan interpretasi J={a$\leftarrow$2, b$\leftarrow$0, x$\leftarrow$0, f $\leftarrow f_J(d_1, d_2)=d_1+d_2$, q $\leftarrow q_J(d_1, d_2, d_3)=d_1>d_2$} .

a. Tentukan pada simbol apa saja kedua interpretasi *agree on* simbol?
b. Tentukan pada simbol apa saja kedua interpretasi tidak *agree on* simbol?

Jawaban Contoh 8.4

Perhatikan simbol yang ada dalam interpretasi *I* dan *J*.

Pada interpretasi *I*, simbol yang diberikan interpretasi adalah:

$a \leftarrow 2$, $b \leftarrow 3$, $x \leftarrow 0$, $f \leftarrow f_I\,(d_1, d_2) = d_1 - d_2$, $q \leftarrow q_i\,(d_2, d_2, d_3) = d_1 > d_2$

Pada interpretasi *J*, simbol yang diberikan interpretasi adalah:

$a \leftarrow 2$, $b \leftarrow 0$, $x \leftarrow 0$, $f \leftarrow f_I\,(d_1, d_2) = d_1 + d_2$, $q \leftarrow q_i\,(d_2, d_2, d_3) = d_1 > d_2$

a. Berdasarkan penjelasan tersebut, interpretasi *I* dan *J* *agree on* simbol konstanta a, variabel x, dan predikat q.

b. Berdasarkan penjelasan tersebut, interpretasi *I* dan *J* tidak *agree on* simbol konstanta b, variabel x, dan fungsi f.

Agree on Ekspresi dan Kalimat

Dua interpretasi *I* dan *J* *agree on* ekspresi atau kalimat $\mathcal{F}$ jika

- Nilai ekspresi $\mathcal{F}$ pada interpretasi *I* dan *J* sama, atau
- Kedua interpretasi (*I* dan *J*) bukan merupakan interpretasi untuk ekspresi $\mathcal{F}$.

Contoh 8.5

Misalkan interpretasi *I* dan *J* merupakan interpretasi atas domain bilangan bulat. Interpretasi *I*={a$\leftarrow$2, b$\leftarrow$0, f $\leftarrow f_I$ $(d_1, d_2)=d_1-d_2$, q $\leftarrow q_i$ $(d_1, d_2, d_3) = d_1+d_2>d_3$} dan
interpretasi *J*={a$\leftarrow$2, b$\leftarrow$0, f $\leftarrow f_I$ $(d_1, d_2)=d_1+d_2$, q $\leftarrow q_J$ $(d_1, d_2, d_3) = d_1+d_2>d_3$} . Apakah interpretasi *I* dan *J* *agree on* kalimat $\mathcal{F}$:(for some x) q(a, x, f(b,x))?

Jawaban Contoh 8.5

- Tentukan semua simbol bebas dalam kalimat $\mathcal{F}$: (for some x) q(a, x, f(b,x)), yaitu a, b, fungsi f dan predikat q.
- Periksa apakah interpretasi *I* dan *J* memberikan nilai pada semua simbol bebas dalam kalimat.
  Karena $I=\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 0, f \leftarrow f_I (d_1, d_2)=d_1-d_2, q \leftarrow q_i (d_1, d_2, d_3) = d_1+d_2>d_3\}$ dan $J=\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 0, f \leftarrow f_I (d_1, d_2)=d_1+d_2, q \leftarrow q_i (d_1, d_2,d_3) = d_1+d_2>d_3\}$ memberikan nilai pada a, b, f, dan q, artinya keduanya merupakan interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}$.

Jawaban Contoh 8.5

- Periksa nilai kalimat pada interpretasi *I* dan *J*.
  Pada interpretasi *I* ={a$\leftarrow$2, b$\leftarrow$0, f $\leftarrow f_I$ (d_1, d_2)=d_1-d_2, q $\leftarrow q_i$ (d_1, d_2, d_3) = d_1+d_2>d_3}, q(a, x, f(b,x)) adalah q(2, x, f(0, x)): 2+x > f(0,x) $\equiv$ 2+x > 0-x $\equiv$ 2x > -2 $\equiv$ x > -1.
  Dapat dipilih x> -1 (misalnya x=1), sehingga q (2, 1, f(0,1)) $\equiv$ 1 > -1 bernilai true.
  Jadi, kalimat $\mathcal{F}$:(for some x) q(a, x, f(b,x)) bernilai true pada interpretasi *I*.

  Pada interpretasi *J* ={a$\leftarrow$2, b$\leftarrow$0, f $\leftarrow f_I$ (d_1, d_2)=d_1+d_2, q $\leftarrow q_J$ (d_1, d_2,d_3) = d_1+d_2>d_3}, q(a, x, f(b,x)) adalah q(2, x, f(0, x)): 2+x > f(0,x) $\equiv$ 2+x > 0+x $\equiv$ 2 > 0.
  Untuk x berapapun (misalnya x=3), berlaku q (2, 3, f(0,1)) $\equiv$ 2 > 0 bernilai true.
  Jadi, kalimat $\mathcal{F}$:(for some x) q(a, x, f(b,x)) bernilai true pada interpretasi *J*.
  Karena nilai kalimatnya sama pada interpretasi *I* dan *J*, maka *I* dan *J* agree on kalimat $\mathcal{F}$.

3. Closure

Operasi Closure

- Suatu kalimat yang tidak tertutup bisa diubah menjadi kalimat tertutup dengan menambahkan operator closure (kuantifier yang diikuti tanda *, yaitu for all * atau for some *).
- Misalkan x_1, x_2, x_3, … x_n merupakan variabel bebas yang ada dalam suatu kalimat $\mathcal{F}$ yang muncul secara berurutan. Operator Closure:

1. Universal Closure (for all *) adalah kalimat tertutup
   (for all x_1) (for all x_2) (for all x_3) … (for all x_n) $\mathcal{F}$
2. Existential Closure (for some *) adalah kalimat tertutup
   (for some x_1) (for some x_2) (for some x_3) … (for some x_n) $\mathcal{F}$

Contoh 8.6

Ubahlah kalimat berikut ini menjadi kalimat tertutup:

$\mathcal{F}$: if q(a, b, x) then p(f(a), y))

Jawaban Contoh 8.6

- Tentukan semua variabel bebas dalam kalimat dan urutkan sesuai permunculannya

if q(a, b, x) then p(f(a), y))

Variabel bebas 1   Variabel bebas 2

- Untuk mengubah menjadi kalimat tertutup bisa menggunakan universal closure atau existential closure.
  - Universal closure: (for all *) $\mathcal{F}$: (for all x) (for all y) if q(a, b, x) then p(f(a), y))
  - Existential closure: (for some *) $\mathcal{F}$: (for some x) (for some y) if q(a, b, x) then p(f(a), y))

Referensi

1. Suprapto. (2020). Logika Informatika (BMP). Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.