RANGKUMAN ALJABAR LINIER ELEMENTER

Salwa Nursyahida

A. Sistem Persamaan Linear dan Matriks

A. 1. Sistem Persamaan Linier

1. Sistem persamaan linier (SPL) yang terdiri dari m buah persamaan dan n buah variabel dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks
$$AX = B$$
Dimana A adalah matriks real berukuran $m \times n, X = (x_1, \dots, x_n)^t$ dan $B = (b_1, \dots, b_n)^t$. Jika $B = 0$ sistem di atas disebut SPL homogen.
2. Teknik mendapatkan solusi SPL adalah dengan mengubah matriks lengkap $(A|B)$ ke eselon baris $(A'|B')$ dan melakukan subtitusi balik . Setiap kolom pada A' yang tidak mempunyai 1 utama memunculkan sebuah parameter pada variabel bersangkutan.
3. Banyaknya baris tak nol pada matriks eselon baris A' disebut rank dari A, dinotasikan $rank(A)$. Dalam hal ini kita mempunyai teorema bahwa: **Suatu SPL $\boldsymbol{AX = B}$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $\boldsymbol{rank(A) = rank(A|B)}$.**
4. SPL $AX = B$ dengan n buah variabel mempunyai solusi tunggal jika dan hanya jika $rank(A) = n$. Jika $rank(A) < n$ maka SPL mempunyai solusi tak hingga banyak dengan parameter yang terlibat sebanyak $n - rank(A)$.
5. SPL homogen $AX = 0$ dimana A berukuran $m \times n$ dan $n > m$ selalu mempunyai solusi tak hingga banyak. Banyaknya parameter yang terlibat adalah $n - rank(A)$.
6. Pada SPL homogen $AX = 0$ dmana A berukuran $n \times n$ berlaku : **SPL mempunyai solusi tunggal jika dan hanya jika $\boldsymbol{det(A) \neq 0}$.** Jika $\det(A) = 0$ maka SPL di atas mempunyai solusi tak hingga banyak.

A. 2. Determinan

1. Untuk sebarang dua matriks $A, B \in M_{n\times n}$ berlaku
$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$
2. Jika $A \in M_{n\times n}$ maka berlaku

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

3. Jika $\det(A) \neq 0$ maka

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

4. Determinan matriks segitiga adalah perkalian entri-entri diagonal

A. 3. Invers

1. Matriks persegi A mempunyai invers jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.
2. Jika A mempunyai invers maka A^{-1} diperoleh dengan melakukan OBE pada matriks $(A|I)$ sehingga berubah menjadi $(I|A')$. Dalam hal ini A' yang diperoleh merupakan A^{-1}.
3. Jika A mempunyai invers maka A^n juga mempunyai invers dan berlaku

$$(\boldsymbol{A^n})^{-\boldsymbol{1}} = (\boldsymbol{A^{-1}})^{\boldsymbol{n}}$$

4. Jika A, B masing-masing mempunyai invers maka

$$(\boldsymbol{AB})^{-\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{B^{-1}A^{-1}}$$

A. 4. Transpos

1. Untuk sebarang dua matriks A, B yang berukuran sama berlaku

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{A^t} + \boldsymbol{B^t}$$

2. Jika A berukuran$m \times n$ dan B berukuran sama berlaku

$$(AB)^t = B^t A^t$$

3. Untuk sebarang matriks persegi A berlaku

$$\det(A) = \det(A^t)$$

4. Jika A mempunyai invers maka A' juga mempunyai invers dan

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

B. Ruang Vektor

B. 1. Ruang dan Subruang Vektor

1. Misalkan V suatu himpunan tak kosong dan $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan skalar real. V dikatakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$ jika terdapat operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian skala real sehingga untuk semua $x, y, z \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ memenuhi:

a. $x + y \in V$

b. $x + y = y + x$

c. $(x + y) + z = x + (y + z)$

d. Terdapat $0 \in V$ sehingga $x + 0 = x$

e. Terdapat $-x \in V$ sehingga $x + (-x) = 0$

f. $ax \in V$,

g. $(\alpha + \beta)x = ax + ay$,

h. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

i. $1x = x$

2. Misalkan V suatu ruang vektor dan W subhimpunan tak kosong dari V. W merupakan subruang dari V jika Wmerupakan ruang vektor terjadap operasi yang sama.

3. Misalkan W subhimpunan tak kosong dari vektor V. W merupakan subruang dari V jika memenuhi kedua sifat berikut:

   a. $x + y \in W$, untuk semua $x, y \in W$.

   b. $ax \in W$, untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}, x \in W$.

B. 2. Kombinasi Linier, Merentang, Bebas Linier, Basis, dan Dimensi

1. Misalkan V adalah ruang vektor dan $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Sebuah vektor v dikatkan ombinasi linier dari $v_1, v_2, \dots, v_n$ jika

$$v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$$

   Untuk suatu $k_1, \dots k_n \in \mathbb{R}$.

2. Misakan V suatu ruang vektor dan $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Himpunan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dikatakan merentang V jika setiap vektor di V merupakan kombinasi linier dari $v_1, v_2, \dots, v_n$. Dinotasikan

$$Span\{v_1, \dots, v_n\} = \{k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n | \ k_1, \dots k_n \in \mathbb{R}\} = V$$

3. Misalkan V suatu ruang vektor dan $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Himpunan $\{v_1, \dots, v_n\}$ dikatakan bebas linier jika persamaan

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = 0$$

   Hanya diperoleh oleh $k_1 = k_2 = k_n = 0$.

4. Misalkan V adalah ruang vektor dan S, T adalah sub-himpunan berhingga dari V, dengan $S \subset T$. Jika T bebas linier maka S bebas linier.

5. Misalakan V suatu ruang vektor dan $v_1, \ldots, v_n \in V$. Himpunan $B = \{v_1, .., v_n\}$ dikatakan sebagai basis bagi V jika B merentang V dan B bebas linier.
6. Misalkan V suatu ruang vektor dan S sub-himpunan berhingga. Jika $span\ S = V$, maka terdapat sub-himpunan dari S yang merupakan basis dari V.
7. Misalkan V suatu ruang vektor. Jika $\{v_1, .., v_n\}$ dan $\{w_1, \ldots, w_n\}$ adalah basis untuk V, maka $n = m$.
8. Misalkan V suatu ruang vektor dan $V \neq \{0\}$, maka dimensi dari V dinotasikan $\dim V$ adalah banyaknya vektor basis dari V.
9. Didefinisikan $\dim\{0\} = 0$

B. 3. Rank dan Nulitas Matriks

1. Misalkan $A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ adalah matriks $m \times n$, maka range dari A didefinisikan

$$range\ A = Span\ \{a_1, \ldots, a_n\}$$

Dan $rank\ A = \dim(range\ A)$

2. Misalkan A adalah matriks $m \times n$, maka kernel dari A didefinisikan dengan

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$$

Dan nulitas dari A didefinisikan dengan

$$nulitas\ A = \text{null A} = \dim(\ker A)$$

3. Misalkan A adalah matriks $m \times n$,

$$rank\ A + nulitas\ A = n$$