UNIVERSITAS TERBUKA

MA4112 Aljabar Linear Elementer

Sistem Persamaan Linear

Salwa Nursyahida

Outline

1. Sistem Persamaan Linier (SPL)
2. Ilustrasi Grafik SPL
3. Penyajian SPL dalam bentuk Matriks
4. Operasi yang mempertahankan penyelesaian SPL
5. Contoh Penyelesaian SPL
6. Metode Gauss Jordan
7. Eliminasi Gauss

SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

Bentuk umum :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

dimana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variabel tak diketahui, $a_{ij}, bi,$
$i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$ adalah bilangan diketahui.
Ini adalah SPL dengan m persamaan dan n variabel.

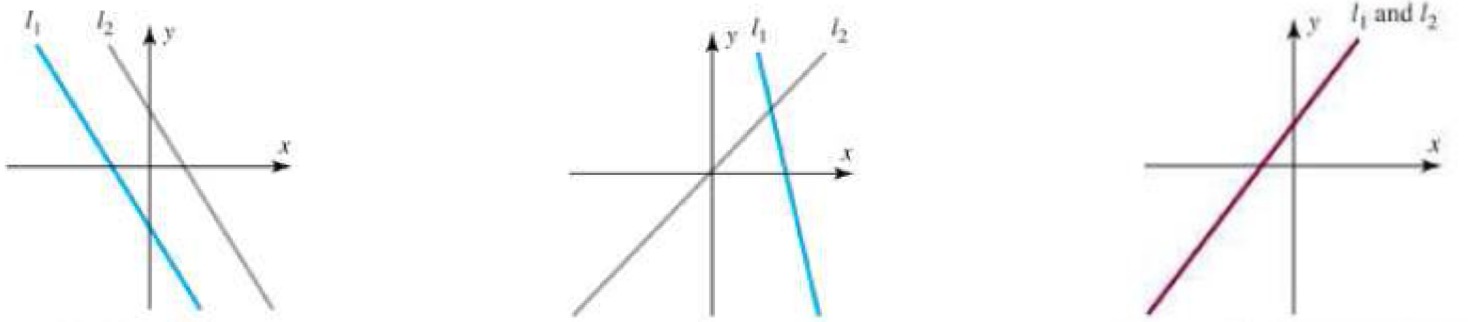
SPL

- Mempunyai penyelesaian disebut KONSISTEN
  - TUNGGAL
  - BANYAK
- Tidak mempunyai penyelesaian disebut TIDAK KONSISTEN

ILUSTRASI GRAFIK

SPL 2 persamaan 2 variabel: $$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Masing-masing pers berupa garis lurus. Penyelesaiannya adalah titik potong kedua garis ini.



(a) No solution — (b) One solution — (c) Infinitely many solutions

kedua garis sejajar — kedua garis berpotongan — kedua garis berhimpitan

PENYAJIAN SPL DALAM MATRIKS

SPL

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

BENTUK MATRIKS

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix}
$$

STRATEGI MENYELESAIKAN SPL:
mengganti SPL lama menjadi SPL baru yang mempunyai penyelesaian sama (ekuivalen) tetapi dalam bentuk yang lebih sederhana.

TIGA OPERASI YANG MEMPERTAHANKAN PENYELESAIAN SPL

SPL	MATRIKS
1. Mengalikan suatu persamaan dengan konstanta tak nol.	1. Mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol.
2. Menukar posisi dua persamaan sebarang.	2. Menukar posisi dua baris sebarang.
3. Menambahkan kelipatan suatu persamaan ke persamaan lainnya.	3. Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya.

Ketiga operasi ini disebut OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

SPL atau bentuk matriksnya diolah menjadi bentuk seder-hana sehingga tercapai 1 elemen tak nol pada suatu baris

CONTOH

DIKETAHUI

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{............(i)} \\ \text{............(ii)} \\ \text{............(iii)} \end{array}$$

kalikan pers (i) dengan (-2), kemudian tambahkan ke pers (ii).

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

kalikan baris (i) dengan (-2), lalu tambahkan ke baris (ii).

kalikan pers (i) dengan (-3), kemudian tambahkan ke pers (iii).

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

kalikan baris (i) dengan (-3), lalu tambahkan ke baris (iii).

kalikan pers (ii) dengan (1/2).

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

kalikan baris (ii) dengan (1/2).

LANJUTAN CONTOH

kalikan pers (ii) dengan (1/2).

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

kalikan baris (ii) dengan (1/2).

kalikan pers (ii) dengan (-3), lalu tambahkan ke pers (iii).

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

kalikan brs (ii) dengan (-3), lalu tambahkan ke brs (iii).

kalikan pers (iii) dengan (-2).

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

kalikan brs (iii) dengan (-2).

kalikan pers (ii) dengan (-1), lalu tambahkan ke pers (i).

$$\begin{aligned} x \quad + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

kalikan brs (ii) dengan (-1), lalu tambahkan ke brs (i).

Lanjutan CONTOH

kalikan pers (ii) dengan (-1), lalu tambahkan ke pers (i).

$$\begin{aligned} x \quad + \frac{11}{2}z &= \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

kalikan brs (ii) dengan (-1), lalu tambahkan ke brs (i).

kalikan pers (iii) dengan (-11/2), lalu tambahkan ke pers (i) dan kalikan pers (ii) dg (7/2), lalu tambahkan ke pers (ii)

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

kalikan brs (iii) dengan (-11/2), lalu tambahkan ke brs (i) dan kalikan brs (ii) dg (7/2), lalu tambahkan ke brs (ii)

Diperoleh penyelesaian x = 1, y = 2, z = 3. Terdapat kaitan menarik antara bentuk SPL dan representasi matriksnya. Metoda ini berikutnya disebut dengan METODA ELIMINASI GAUSS.

KERJAKAN EXERCISE SET 1.1

BENTUK ESELON-BARIS

Misalkan SPL disajikan dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

maka SPL ini mempunyai penyelesaian x = 1, y = 2, z = 3. Matriks ini disebut bentuk eselon-baris tereduksi.

Untuk dapat mencapai bentuk ini maka syaratnya adalah:

1. Jika suatu baris matriks tidak nol semua maka elemen tak nol pertama adalah 1. Baris ini disebut mempunyai leading 1.
2. Semua baris yg terdiri dari nol semua dikumpulkan di bagian bawah.
3. Leading 1 pada baris lebih atas posisinya lebih kiri dari pada leading 1 baris berikut.
4. Setiap kolom yang memuat leading 1, elemen lain semuanya 0.

Penyelesaian SPL melalui bentuk eselon-baris

Misal diberikan bentuk matriks SPL :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan penyelesaian masing-masing SPL di atas.

METODA GAUSS-JORDAN

Ide pada metoda eliminasi Gauss adalah mengubah matriks ke dalam bentuk eselon-baris tereduksi.

CONTOH: Diberikan SPL berikut.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}
$$

Bentuk matriks SPL ini adalah:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_1 + B_2 \to B_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{5B_2+B_3 \to B_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_4 \leftarrow B_4+4B_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_3 \rightleftarrows B_4 \quad B_3 \leftarrow B_3/3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[2B_2+B_1 \to B_1]{-3B_3+B_2 \to B_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh:

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Akhirnya, dengan mengambil x_2:= r, x_4:= s dan x_5:= t maka diperoleh penyelesaian:

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

dimana r, s dan t bilangan real sebarang. Jadi SPL ini mempunyai tak berhingga banyak penyelesaian.

METODA SUBSTITUSI MUNDUR

Misalkan kita mempunyai SPL dalam matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk ini ekuivalen dengan:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

LANGKAH 1: selesaikan variabel leading, yaitu x_6. Diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

LANGKAH 2: mulai dari baris paling bawah subtitusi ke atas, diperoleh

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

LANJUTAN SUBSTITUSI MUNDUR

LANGKAH 3: subtitusi baris 2 ke dalam baris 1, diperoleh:

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

LANGKAH 4: Karena semua persamaan sudah tersubstitusi maka peker-jaan substitusi selesai. Akhirnya dengan mengikuti langkah pada metoda Gauss-Jordan sebelumnya diperoleh:

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

Eliminasi Gaussian

Mengubah menjadi bentuk eselon-baris (tidak perlu direduksi), kemudian menggunakan substitusi mundur.

CONTOH: Selesaikan dengan metoda eliminasi Gaussian

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

PENYELESAIAN: Diperhatikan bentuk matriks SPL berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan OBE diperoleh bentuk eselon-baris berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 9 - y - 2z \\ y &= -\tfrac{17}{2} + \tfrac{7}{2}z \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= 3 - y \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned} \Rightarrow x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$$

SPL HOMOGEN

Bentuk umum:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian trivial (sederhana):

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$$

Bila ada penyelesaian lain yang tidak semuanya nol maka disebut penyelesaian tak trivial.

SPL HOMOGEN

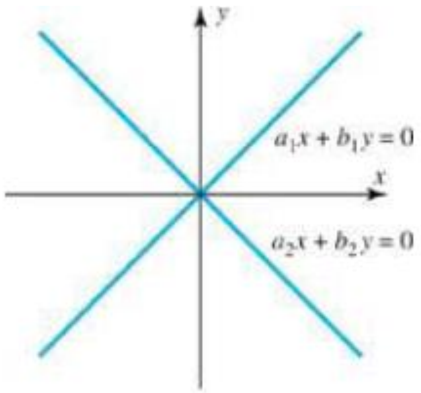
- pasti ada penyelesaian trivial

atau

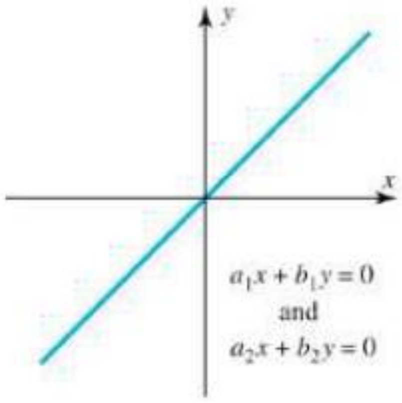
- penyelesaian trivial + takberhingga banyak penyelesaian taktrivial

ILUSTRASI:

$$a_1x + b_1y = 0 \qquad (a_1, b_1 \text{ not both zero})$$
$$a_2x + b_2y = 0 \qquad (a_2, b_2 \text{ not both zero})$$



(*a*) Only the trivial solution



(*b*) Infinitely many solutions

Syarat cukup SPL homogen mempunyai penyelesaian taktrivial

Bila banyak variabel n lebih dari banyak persamaan m maka SPL homogen mempaunyai penyelesaian taktrivial.

CONTOH:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\quad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

variabel = 5

persamaan = 4.

Bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk akhir eselon-baris tereduksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 0 \\ x_3 \qquad + x_5 &= 0 \\ x_4 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

PENYELESAIAN UMUMNYA :

$$x_1 = -s - t,\ x_2 = s,\ x_3 = -t,\ x_4 = 0,\ x_5 = t.$$

dimana penyelesaian trivialnya terjadi pada saat $s = t = 0$.

1. Proses OBE dalam untuk menghasilkan bentuk eselon baris tereduksi tidak mempengaruhi kolom akhir matrik.
2. Bila banyak persamaan awal n maka banyak pers. akhir r tidak melebihi n, yaitu r ≤ n.