UNIVERSITAS TERBUKA

Logika Predikat

MSIM 4103 – Logika Informatika

Program Studi Sistem Informasi

Jurusan Tehnik , FST

UNIVERSITAS TERBUKA

Materi Inisiasi 6

1. Kalimat Logika Predikat
   - Simbol
   - Tahap Membangun Logika Predikat
2. Variabel Bebas dan Terikat
3. Kalimat tertutup
4. Interpretasi Kalimat Logika Predikat

UNIVERSITAS TERBUKA

1. Kalimat Logika Predikat

- Simbol
- Tahapan Membangun Kalimat Logika Predikat

Kalimat Logika Predikat

- Logika predikat: perluasan logika proposisional yang bertujuan menyatakan objek, sifat objek, serta hubungan antar objek.
- Simbol-simbol pembentuk kalimat logika predikat
  1. Simbol kebenaran (true dan false)
  2. Simbol konstanta – huruf a, b, c, dengan indeks atau aksen (a, b, c, a', b', a_1, b_1, …)
  3. Simbol variabel – huruf u, v, w, x, y, z dengan indeks atau aksen (u, v, u', v', u_1, v_1, …)
  4. Simbol fungsi – huruf f, g, h dengan indeks (f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2, …)
  5. Simbol predikat – huruf kecil p, q, r dengan indeks (p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, …)

Note: simbol huruf besar P, Q, R yang ada di logika proposisional tidak digunakan di logika predikat

Penjelasan Simbol

Simbol Konstanta dan Variabel

- Menyatakan objek.

Simbol Fungsi dan Predikat

- Simbol fungsi menunjukan fungsi objek.
- Simbol predikat menunjukan relasi antar objek.
- Terhubung dengan banyaknya bilangan positif yang disebut aritasnya.

Aritas Simbol Fungsi dan Predikat

Aritas

- Banyaknya argument dalam fungsi/ predikat
- Jika banyak aritas 1 disebut unary.
- Jika banyak aritas 2 disebut binary.
- Jika banyak aritas 3 disebut ternary.

Contoh

- $f(t_1, t_2, t_3)$: fungsi dengan 3 aritas.
- $f(t_1, t_2)$: fungsi dengan 2 aritas.
- $p(t_1, t_2)$: predikat dengan 2 aritas.
- $p(t_1)$: predikat dengan 1 aritas.

Tahapan Membangun Kalimat Logika Predikat

1. Definisikan term
2. Definisikan proposisi
3. Definisikan kalimat

Term dari Logika Predikat

- Ekspresi yang menunjukan objek-objek.
- Aturan untuk mendefinisikan term:
  1. Konstanta (a, b, c) adalah term.
  2. Variabel (u, v, w, x, y, z) adalah term.
  3. Jika t_1, t_2, t_3, … t_n adalah term maka f: fungsi dengan n aritas ($f(t_1, t_2, t_3, \ldots t_n)$) adalah term.
  4. Jika F adalah kalimat dan t_1, t_2 merupakan term maka if F then t_1 else t_2 merupakan term.

  Dalam suatu ekspresi banyak aritas haruslah sama untuk simbol fungsi yang sama.

Langkah Menentukan Term

1. Tentukan semua simbol yang ada dalam ekspresi.
2. Periksa apakah memenuhi aturan term atau tidak.

Contoh 6.1

Apakah f(g(u), b, f(a, b, x)) merupakan term?

Jawaban Contoh 6.1

1. Tentukan semua simbol yang ada dalam ekspresi, yaitu: a, b, u, x, f, g.
2. Periksa apakah memenuhi aturan term.
   - Karena a dan b adalah konstanta, maka a dan b adalah term.
   - Karena u dan x adalah variabel, maka u dan x adalah term.
   - karena u adalah term, maka fungsi g(u) (fungsi dengan 1 aritas) adalah term.
   - karena a, b, x adalah term, maka fungsi f(a, b, x) (fungsi dengan 3 aritas) adalah term.
   - Karena g(u), b, dan f(a, b, x) adalah term, maka fungsi f(g(u), b, f(a,b,x)) (fungsi dengan 3 aritas) adalah term.
     Perhatikan juga fungsi f pada f(a, b, x) dan f(g(u), b, f(a,b,x)) harus memiliki aritas yang sama (dalam kasus ini aritasnya 3).

Proposisi dari Logika Predikat

- Ekspresi untuk menyatakan relasi antar objek.
- Aturan untuk mendefinisikan proposisi:
  1. Simbol kebenaran (true atau false) adalah proposisi.
  2. Jika t_1, t_2, t_3, … t_n adalah term maka p: predikat dengan n aritas ($p(t_1, t_2, t_3, \ldots t_n)$) adalah proposisi.

Langkah Menentukan Proposisi

1. Tentukan semua simbol yang ada dalam ekspresi.
2. Periksa apakah memenuhi aturan term atau tidak.
3. Periksa apakah memenuhi aturan proposisi atau tidak.

Contoh 6.2

Apakah $p(g(u), b, f(a, b, x))$ merupakan proposisi?

Jawaban Contoh 6.2

1. Tentukan semua simbol yang ada dalam ekspresi, yaitu: a, b, u, x, f, g, p.
2. Periksa apakah memenuhi aturan term.
   - Karena a dan b adalah konstanta, maka a dan b adalah term.
   - Karena u dan x adalah variabel, maka u dan x adalah term.
   - karena u adalah term, maka fungsi g(u) (fungsi dengan 1 aritas) adalah term.
   - karena a, b, x adalah term, maka fungsi f(a, b, x) (fungsi dengan 3 aritas) adalah term.
3. Periksa apakah memenuhi aturan proposisi.
   Karena g(u), b, f(a, b, x) adalah term dan p merupakan simbol predikat dengan 3 aritas, maka p(g(u), b, f(a, b, x)) adalah proposisi.

Kalimat dari Logika Predikat

- Kalimat dari logika predikat dibentuk dari proposisi-proposisinya dengan aturan:
  1. Setiap proposisi merupakan kalimat.
  2. Apabila $\mathcal{F}$ kalimat, maka negasinya (not $\mathcal{F}$) merupakan kalimat.
  3. Apabila $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, maka konjungsinya $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ merupakan kalimat.
  4. Apabila $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, maka disjungsinya $\mathcal{F}$ or $\mathcal{G}$ adalah kalimat.
  5. Apabila $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, maka implikasinya (if $\mathcal{F}$ then $\mathcal{G}$) adalah kalimat.

UNIVERSITAS TERBUKA

Kalimat dari Logika Predikat

6. Apabila $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ kalimat, maka ekuivalensinya ($\mathcal{F}$ if and only if $\mathcal{G}$) adalah kalimat.
7. Apabila $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ dan $\mathcal{H}$ kalimat, maka kondisionalnya (**if** $\mathcal{F}$ **then** $\mathcal{G}$ **else** $\mathcal{H}$) adalah kalimat.
8. Aturan kuantifier
   Jika *x* sebarang variabel dan $\mathcal{F}$ adalah kalimat, maka (**for all** *x*) $\mathcal{F}$ dan (**for some** *x*) $\mathcal{F}$ merupakan kalimat.
   For all disebut universal quantifier dan for some disebut existential quantifier.

2. Variabel Bebas dan Terikat

Variabel Bebas dan Terikat

Variabel Bebas

- Permunculannya perlu diberikan nilai dalam interpretasi.
- Bila variabel tidak termasuk dalam scope kuantifier universal atau exsintensial artinya variabel tersebut variabel bebas.

Variabel terikat

- Permunculannya tidak tergantung dan tidak perlu diberikan nilai dalam interpretasi.
- Bila variabel termasuk dalam scope kuantifier universal atau existensial artinya variabel tersebut variabel terikat.

Permunculan suatu variabel bisa berada dalam lebih dari satu kuantifier.

Langkah Penentuan

1. Tentukan variabel yang ada dalam kalimat.
2. Tentukan scope kuantifier untuk variabel tersebut. Bila termasuk dalam suatu scope, maka ia variabel terikat.

Contoh 6.3

Tentukan variabel bebas dan terikat dari kalimat berikut ini!

$\mathcal{F}$: ((for some y) p(x,y)) and ((for all x) q(f(x), y))

Jawaban Contoh 6.3

1. Tentukan variabel yang ada dalam kalimat, yaitu x dan y.
2. Tentukan scope masing-masing variabel.
   - Pada kalimat (for some y) p(x, y), terdapat variabel x dan y.
     1. Variabel x dalam p(x,y) tidak berada dalam scope kuantifier apapun, sehingga variabel x pada kalimat adalah variabel bebas.
     2. Variabel y dalam p(x, y) berada dalam scope kuantifier (for some y), sehingga variabel y pada kalimat adalah variabel terikat.
   - Pada kalimat (for all x) q(f(x), y), terdapat variabel x dan y.
     1. Variabel x dalam q(f(x),y) berada dalam scope kuantifier (for all x), sehingga variabel x pada kalimat adalah variabel terikat.
     2. Variabel y dalam q(f(x),y) tidak berada dalam scope kuantifier apapun, sehingga variabel y pada kalimat adalah variabel bebas.

3. Kalimat Tertutup

Kalimat Tertutup

- Kalimat dikatakan tertutup jika semua variabel yang muncul tidak memiliki permunculan bebas/ tidak memuat variabel bebas.
- Simbol bebas dalam suatu ekspresi:
  - Variabel bebas dalam ekspresi
  - Simbol konstanta
  - Fungsi
  - Predikat

Contoh 6.4

Tentukan variabel bebas dan terikat serta simbol bebas dari kalimat berikut ini!

$$\mathcal{F}\text{: (for all x) q(x, y, f(a,b))}$$

Apakah kalimat tersebut tertutup?

Jawaban Contoh 6.4

Penentuan Variabel Bebas dan Terikat

1. Tentukan semua variabel yang ada dalam kalimat, yaitu x dan y.
2. Tentukan scope kuantifier masing-masing variabel, yaitu:
    1. Variabel x berada dalam scope kuantifier (for all x), sehingga variabel x adalah variabel terikat.
    2. Variabel y tidak berada dalam scope kuantifier apapun, sehingga variabel y adalah variabel bebas.

Jawaban Contoh 6.4

Penentuan Simbol Bebas

Simbol bebas dalam suatu ekspresi: variabel bebas dalam ekspresi, simbol konstanta, fungsi, dan predikat. Jadi, simbol bebas:
- variabel y,
- konstanta a dan b,

- fungsi f, dan
- predikat q.

Kalimat bukan merupakan kalimat tertutup karena masih memuat variabel bebas, yaitu variabel y.

4. Interpretasi Kalimat Logika Predikat

Interpretasi Kalimat Logika Predikat

- Memberikan nilai pada setiap simbol yang muncul dalam kalimat. Simbol: konstanta, variabel, fungsi dan predikat.
- Dalam interpretasi kalimat logika predikat diperlukan domain, yaitu himpunan objek yang menyediakan nilai atau arti untuk terms. Domain merupakan himpunan tidak kosong.
  Contoh domain:
  - Domain bilangan bulat {…., -2, -1, 0, 1, 2, …}
  - Domain bilangan asli ganjil {1, 3, 5, 7, …}

Interpretasi Kalimat Logika Predikat

Suatu interpretasi I atas domain D memberikan nilai kepada masing-masing himpunan simbol konstanta, variabel, fungsi, dan predikat dengan aturan sebagai berikut:

- masing-masing simbol konstanta (misalnya a) diberikan interpretasi nilai yang merupakan elemen dari domain (misalnya $a_I \in D$), yang dituliskan dengan

$$a \leftarrow a_I$$

konstanta nilai yang diberikan

Interpretasi Kalimat Logika Predikat

- masing-masing simbol variabel (misalnya x) diberikan interpretasi nilai yang merupakan elemen dari domain (misalnya $x_I \in D$), yang dituliskan dengan

$$x \leftarrow x_I$$

variabel bebas

nilai yang diberikan

Jika variabel merupakan variabel bebas sekaligus terikat, variabel tersebut tetap perlu diberikan nilai.

Interpretasi Kalimat Logika Predikat

- masing-masing simbol fungsi (misalnya f) dengan aritas n diberikan interpretasi fungsi dengan aritas n (misalkan $f_I(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$), dengan fungsi f_I didefinisikan pada $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ dalam D dan nilai $f_I(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ juga merupakan elemen dari D.

$$f \leftarrow f_I(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$$

fungsi — fungsi yang didefinisikan

Jadi, hasil dari fungsi harus merupakan anggota dari domain.

Contoh: D: bilangan bulat, $f \leftarrow f_I(d_1, d_2) = d_1 + d_2$,
hasil dari $f_I(d_1, d_2)$ adalah bilangan bulat juga.

UNIVERSITAS TERBUKA

Interpretasi Kalimat Logika Predikat

- masing-masing simbol predikat (misalnya p) dengan aritas n diberikan interpretasi predikat dengan aritas n (misalkan $p_I(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$), dengan fungsi p_I didefinisikan pada $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ dalam D dan nilai $p_I(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ adalah **true/false**.

$$p \leftarrow p_I(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$$

predikat   predikat yang didefinisikan

Jadi, hasil dari predikat harus merupakan nilai kebenaran true/ false. Biasanya menggunakan tanda $>, <, =, \neq, \leq, \geq$.

Contoh: D: bilangan bulat, $p \leftarrow p_I(d_1, d_2) = d_1 < d_2$,
hasil dari $p_I(d_1, d_2)$ adalah true/ false.

Interpretasi Kalimat Logika Predikat

- Suatu interpretasi **dikatakan interpretasi untuk kalimat logika predikat** $\mathcal{E}$ jika I memberikan nilai kepada masing-masing **simbol bebas** (konstanta, variabel bebas, fungsi, predikat) **dalam** $\mathcal{E}$.

Aturan Dasar Semantik

Misalkan diketahui ekspresi $\mathcal{E}$ dan suatu interpretasi I untuk $\mathcal{E}$ atas D. Nilai kalimat $\mathcal{E}$ dapat diperoleh dengan menerapkan aturan:

1. Aturan konstanta.
   Nilai dari konstanta (misal a) adalah elemen dari domain (a_I).
2. Aturan variabel.
   Nilai dari variabel (misal X) adalah elemen dari domain (x_I).
3. Aturan aplikasi.
   Nilai dari $f_I(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$ adalah elemen dari domain ($f_I(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$).

Aturan Dasar Semantik

4. Aturan term if-then-else
   if $\mathcal{F}$ then s else t. Nilai kalimat sama dengan term s bila $\mathcal{F}$ true dan sama dengan term t bila $\mathcal{F}$ false.
5. Aturan true dan false
   Nilai simbol kebenaran true dan false adalah true dan false.
6. Aturan proposisi
   Nilai dari $p_l(t_1, t_2 , t_3 , \ldots ,t_n)$ adalah true/ false yang diperoleh dari $p_l(d_1, d_2 , d_3 , \ldots ,d_n)$.

Aturan Dasar Semantik

- Aturan untuk penghubung: not, and, or, if-then, if-and-only-if, dan if-then-else hampir serupa dengan aturan semantik logika proposisional.
  1. Aturan Negasi
     Jika $\mathcal{F}$ bernilai true pada suatu interpretasi I, maka not $\mathcal{F}$ bernilai false pada interpretasi tersebut.
  2. Aturan Konjungsi
     Jika $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{G}$ keduanya bernilai true pada suatu interpretasi I, maka $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ bernilai true pada interpretasi tersebut.

Aturan Quantifier

Universal Quantifier

- (For all x) $\mathcal{F}$ bernilai **true** di bawah interpretasi yang diberikan **jika untuk setiap** x dalam D menyebabkan kalimat $\mathcal{F}$ bernilai **true** di bawah interpretasi.
- (For all x) $\mathcal{F}$ bernilai **false** di bawah interpretasi yang diberikan **jika ada** x dalam D yang membuat kalimat $\mathcal{F}$ bernilai **false** di bawah interpretasi.

Existential Quantifier

- (For some x) $\mathcal{F}$ bernilai **true** di bawah interpretasi yang diberikan **jika ada** x dalam D yang membuat kalimat $\mathcal{F}$ bernilai **true** di bawah interpretasi.
- (For some x) $\mathcal{F}$ bernilai **false** di bawah interpretasi yang diberikan **jika untuk setiap** x dalam D menyebabkan kalimat $\mathcal{F}$ bernilai **false** di bawah interpretasi.

Langkah Menentukan Interpretasi untuk Kalimat

1. Tentukan semua simbol yang ada dalam kalimat.
2. Tentukan simbol bebas dari kalimat.
3. Berikan interpretasi untuk kalimat tersebut.

Contoh 6.5

Diketahui D adalah domain bilangan bulat. Apakah interpretasi

$$I=\{a\leftarrow 2,\ b\leftarrow 3,\ f \leftarrow f_I\,(d_1,\ d_2)=d_1-d_2,\ q \leftarrow q_i\,(d_2,\ d_2,\ d_3)=d_1>d_2\}$$

merupakan interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}$: (for all x) q(x, y, f(a,b))?

Jawaban Contoh 6.5

1. Tentukan semua simbol dalam $\mathcal{F}$, yaitu: a, b, x, y, f, dan q.
2. Tentukan simbol bebas dalam $\mathcal{F}$.
   Simbol bebas dalam suatu ekspresi: variabel bebas dalam ekspresi, simbol konstanta, fungsi, dan predikat. Jadi, simbol bebas:
   - variabel y,
   - konstanta a dan b,
   - fungsi f, dan
   - predikat q.
3. Perhatikan interpretasi yang diberikan, yaitu $I=\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 3, f \leftarrow f_I (d_1, d_2)=d_1-d_2, q \leftarrow q_i (d_2, d_2, d_3)=d_1>d_2\}$. Interpretasi tidak memberikan nilai untuk variabel bebas y.

Jadi, interpretasi $I=\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 3, f \leftarrow f_I (d_1, d_2)=d_1-d_2, q \leftarrow q_i (d_2, d_2, d_3)=d_1>d_2\}$ bukan merupakan interpretasi untuk kalimat $\mathcal{F}$.

Referensi

1. Suprapto. (2020). Logika Informatika (BMP). Tangerang Selatan: Universitas Terbuka.
2. Bergman, M, Moor, J, and Nelson, J. (2014). The Logic Book (6th Edition). New York: McGraw Hill.