UNIVERSITAS TERBUKA

MA4112 Aljabar Linear Elementer

Determinan

Salwa Nursyahida

π

Outline

1. Pengertian Determinan
2. Perhitungan Determinan Matriks 2×2
3. Perhitungan Determinan dengan Metode Sarrus
4. Minor dan Kofaktor
5. Perhitungan Determinan dengan Teorema Laplace (Ekspansi Kofaktor)
6. Perhitungan Determinan denganSifat-sifat determinan
7. Sub-Matriks atau Matriks Bagian

Pengertian Determinan

Determinan adalah nilai real yang dihitung berdasarkan operasi antara nilai elemen-elemennya. Dinotasikan dengan **det(A)** atau **|A|**.

Jika nilai **det(A)=0**, maka matriks bujur sangkar tersebut **singular**, artinya tidak memiliki invers,

Jika nilai **det(A)** $\neq$ **0**, maka berarti matriks A tersebut **nonsingular**, yaitu matriks tersebut punya invers.

DETERMINAN MATRIKS berukuran 2X2

Misalkan didefinisikan matriks A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Maka determinan dari A didefinisikan

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Metode Sarrus untuk mencari determinan matriks 3×3

Salin kembali kolom ke 1 dan ke 2 kemudian ditempatkan disebelah kanan tanda determinan.

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama, dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama. Nyatakan jumlah hasil kali dengan (+).

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Lanjutan Metode Sarrus

Sehingga $A(+) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

Selanjutnya, hitunglah jumlah hasil kali jumlah elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder. Nyatakan jumlah hasil harga tersebut dengan A(-).

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$A(-) = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\det(A) = A(+) - A(-)$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12} \right)$$

Minor dan Kofaktor

Jika A_{ij} diperoleh dari matriks A dengan elemen-elemen baris ke-i dan elemen-elemen kolom ke-j dihilangkan maka minor matriks didefinisikan

$$M_{ij} = \det(A_{ij})$$

dan kofaktor matriks didefinisikan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Minor dan Kofaktor

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka diperoleh

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21}$$

Contoh Minor dan Kofaktor

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ maka diperoleh

$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\ (7) = 7$

$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\ (9) = -9$

$C_{13} = (-1)^4 M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$C_{21} = (-1)^3 M_{21} = -M_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$C_{22} = M_{22} = 0$

$C_{23} = -M_{23} = 0$

$C_{31} = M_{31} = 7$

$C_{32} = -M_{32} = -9$

$C_{33} = M_{33} = 5$

Teorema Laplace (Ekspansi Kofaktor) Mencari determinan dengan Kofaktor Matriks

Didefinisikan det (A) merupakan jumlah perkalian elemen-elemen dari sembarang baris/kolom dengan kofaktor-faktornya.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{i1}(C_{i1}) + a_{i2}(C_{i2}) + \ldots + a_{in}(C_{in})$$

dengan *i* sembarang disebut ekspansi baris ke *i*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{1j}(C_{1j}) + a_{2j}(C_{2j}) + \ldots + a_{nj}(C_{nj})$$

dengan *j* sembarang disebut ekspansi kolom ke-*j*.

Contoh menghitung determinan dengan teorema laplace dengan ekspansi kolom ke 1

Hitung det(A): $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

Kita ingin menguraikan menurut kolom 1:

$a_{11} = 1,\ a_{21} = 2,\ a_{31} = 1.$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } |A| &= a_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= 1.1 + 2.1 + 1.-1 = 2. \end{aligned}$$

Secara singkat kita tulis:

$$|A| = +1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

Contoh menghitung determinan dengan teorema laplace dengan ekspansi baris ke 1

Hitung det(A): $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

Kita ingin menguraikan menurut baris 1.

$a_{11} = 1,\ a_{12} = -2,\ a_{13} = 3.$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M^{11}| = + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -13$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 10.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 24.$$

$$\text{Jadi } |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= 1.-13 - 2.10 + 3.24 = 39.$$

Sifat-sifat Determinan

- Nilai determinan tidak berubah bila semua baris diubah menjadi kolom atau semua kolom diubah menjadi baris, dengan kata lain :

  det(A) = det(A^t)

- Det(AB) = det(A) . det(B).
- Jika dua baris atau kolom dipertukarkan tempatnya, tanda determinan berubah.
- Pada suatu determinan terdapat 2 baris atau 2 kolom yang identik, maka harga determinan = 0.
- Bila nilai determinan tidak berubah, jika elemen-elemen sebuah baris/kolom ditambah atau dikurangi dengan suatu kelipatan nilai real dari elemen-elemen dari baris/kolom lain.
- Besar determinan menjadi β kali, bila suatu baris atau kolom dikalikan dengan skalar β.
- Apabila semua unsur dalam satu baris atau satu kolom = 0, maka harga determinan = 0.
- Jika suatu matriks merupakan matriks segitiga atas atau segitiga bawah, maka hasil determinannya merupakan hasil kali dari elemen-elemen yang terletak pada diagonal utamanya.

Menghitung Determinan menggunakan Sifat-Sifat Determinan

1. Determinan dari matriks dan transposenya adalah sama; $|A^T| = |A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 26 \longrightarrow |A^T| = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 26$$

Akibatnya :
semua sifat determinan berlaku secara baris / dan secara kolom.

2. Matriks persegi yang mempunyai baris (kolom) nol, determinannya nol (0).

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det(C) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 7 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Menghitung Determinan menggunakan Sifat-Sifat Determinan

3. Determinan dari suatu matriks persegi A yang salah satu baris (kolom) dikalikan dengan skalar *k*, maka determinannya berubah menjadi $k\,|A|$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$

Jika baris kedua dikalikan dengan 7

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -21 & 28 \end{vmatrix} = 35 = 7\,|A|$

Akibat sifat ini : $|A| = 5$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -21 & 28 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 7\,(5) = 35$$

Suatu **determinan** jika salah satu baris (kolom) mempunyai faktor yang sama, maka sudah dapat difaktorkan.

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \\ 1 & -12 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Menghitung Determinan menggunakan Sifat-Sifat Determinan

4. **Determinan suatu matriks yang salah satu baris (kolom) nya ditukar dengan baris (kolom) yang lain, maka nilai determinan matriks tersebut berubah menjadi negatif determinan semula.**

$$\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 31$$

Baris pertama ditukar baris kedua

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -31$$

5. **Determinan dari suatu matriks persegi yang mempunyai dua baris (kolom) yang sama adalah sama dengan 0 (nol).**

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Menghitung Determinan menggunakan Sifat-Sifat Determinan

6. **Determinan dari suatu matriks persegi yang salah satu barisnya (kolomnya merupakan kelipatan dari baris (kolom) yang lain adalah sama dengan 0 (nol).**

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ Karena kolom ke dua kelipatan kolom ke empat, |B| = 0

7. **Determinan dari matriks persegi A = (a_{ij}) berdimensi *n* yang baris ke -i (kolom ke-j) terdiri dari elemen-elemen yang dapat diuraikan menjadi dua suku binomium, maka determinannya sama dengan determinan A yang baris ke-i (kolom ke-j) diganti dengan suku binomium yang pertama <u>*ditambah*</u> determinan A yang baris ke-i (kolom ke-j) diganti dengan suku yang kedua**.

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+3 & 4+1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5+3 & 5 \\ 5+4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Menghitung Determinan menggunakan Sifat-Sifat Determinan

8. **Determinan suatu matriks persegi tidak berubah nilainya jika salah satu baris (kolom) ditambah dengan kelipatan baris (kolom) yang lain.**

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ = 11 Jika k2 + 3k1 $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ = 11

Jika b1 – b2 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ = 11

Sifat ke 8 ini sering dipakai untuk menyederhanakan baris (kolom), sebelum menghitung nilai determinan

9. **Determinan dari matriks segitiga adalah sama dengan produk (hasil kali) elemen-elemen diagonalnya.**

$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ = (3)(-1)(5) = - 15

$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ = (-3)(-2)(4)(1) = 24

Menghitung Determinan menggunakan Sifat-Sifat Determinan

Gunakan sifat determinan untuk menghitung :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b2 + 3b1} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b3 – 2 b1} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{b3 + 3 b2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (1)(-1)(3) = -3$$

Petunjuk umum : Gunakan sifat ke 8, untuk mereduksi matriks menjadi matriks segitiga; kemudian gunakan sifat ke 9

Sub-Matriks atau Matriks Bagian

Matriks yang diperoleh dengan menghilangkan beberapa baris dan/atau beberapa kolom dari suatu matriks

A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

Menghilangkan baris pertama diperoleh submatriks : $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

Menghilangkan baris kedua dan kolom ketiga diperoleh submatriks : $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

dan sebagainya.