

Nama : Farhan Fadillah

NIM : 055743473

Soal Nomor 1: Identifikasi Distribusi Probabilitas dan Ruang Sampel

Studi Kasus 1: Pemilihan Buku di Perpustakaan

Deskripsi Kasus: Seorang petugas perpustakaan memilih 50 buku secara acak tanpa pengembalian dari koleksi 500 buku. Dari total 500 buku tersebut, diketahui 40 buku dalam kondisi rusak.

a. Distribusi yang Paling Sesuai

Distribusi Hipergeometrik (Hypergeometric Distribution) adalah distribusi yang paling sesuai untuk kasus ini.

Alasan Pemilihan:

1. **Sampling tanpa pengembalian:** Karakteristik fundamental dari distribusi hipergeometrik adalah pengambilan sampel tanpa mengembalikan objek ke populasi
2. **Populasi terbatas:** Total populasi diketahui ($N = 500$ buku)
3. **Dua kategori hasil:** Setiap pengambilan hanya menghasilkan “buku rusak” (sukses) atau “buku bagus” (gagal)
4. **Probabilitas berubah:** Karena tidak ada pengembalian, probabilitas mendapatkan buku rusak berubah pada setiap pengambilan

Parameter Distribusi:

- $N = 500$ (total populasi)
- $K = 40$ (jumlah objek sukses/buku rusak)
- $n = 50$ (ukuran sampel)
- X = jumlah buku rusak dalam sampel

b. Ruang Sampel (S)

Ruang sampel merupakan semua kemungkinan hasil yang dapat terjadi dalam percobaan. Untuk kasus ini:

$$S = \{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq k \leq \min(40, 50)\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 40\}$$

Penjelasan:

- **Batas bawah (0):** Memungkinkan untuk tidak mendapatkan buku rusak sama sekali jika semua 50 buku yang terambil berasal dari 460 buku bagus
- **Batas atas (40):** Tidak mungkin mendapatkan lebih dari 40 buku rusak karena hanya ada 40 buku rusak dalam populasi

Studi Kasus 2: Pembacaan Kartu E-Money di Transjakarta

Deskripsi Kasus: Seorang penumpang menempelkan kartu e-money di gate Transjakarta. Hanya ada dua kemungkinan hasil: “terbaca” (sukses) atau “tidak terbaca” (gagal).

a. Distribusi yang Paling Sesuai

Distribusi Bernoulli (Bernoulli Distribution) adalah distribusi yang paling tepat untuk kasus ini.

Alasan Pemilihan:

1. **Satu percobaan tunggal:** Hanya ada satu kali penempelan kartu
2. **Dua hasil mutually exclusive:** Hanya ada “sukses” atau “gagal”
3. **Variabel acak biner:** $X = 1$ jika sukses, $X = 0$ jika gagal
4. **Probabilitas konstan:** $p = P(\text{sukses})$ tetap untuk setiap percobaan

Parameter Distribusi:

- p = probabilitas kartu terbaca
- $q = 1 - p$ = probabilitas kartu tidak terbaca

b. Ruang Sampel (S)

$$S = \{0,1\}$$

Dimana:

- **0** = gagal (kartu tidak terbaca)
- **1** = sukses (kartu terbaca)

Studi Kasus 3: Kedatangan Pelanggan di Warung

Deskripsi Kasus: Seorang pemilik warung mencatat jumlah pelanggan yang datang per jam, terutama pada sore hari setelah azan magrib. Pelanggan datang secara acak dengan rata-rata tertentu.

a. Distribusi yang Paling Sesuai

Distribusi Poisson (Poisson Distribution) adalah distribusi yang paling sesuai untuk memodelkan kasus ini.

Alasan Pemilihan:

1. **Kejadian dalam interval waktu:** Menghitung jumlah kedatangan dalam interval waktu tetap (1 jam)
2. **Independensi kejadian:** Kedatangan satu pelanggan tidak mempengaruhi kedatangan pelanggan lain
3. **Rata-rata konstan:** Rata-rata kedatangan (λ) diketahui dan stabil

4. **Kejadian tidak simultan:** Pelanggan datang satu per satu dalam interval waktu yang sangat kecil

Asumsi Distribusi Poisson:

- Kejadian terjadi independently
- Rata-rata kedatangan proporsional terhadap panjang interval
- Tidak ada dua kejadian yang terjadi pada saat yang sama
- Probabilitas kejadian dalam interval kecil sangat kecil

b. Ruang Sampel (S)

$$S = \{0,1,2,3,4, \dots\} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Penjelasan: Secara teoretis, tidak ada batas atas untuk jumlah pelanggan yang bisa datang dalam satu jam, meskipun praktis terbatas oleh kapasitas ruangan dan waktu.

Studi Kasus 4: Kedisiplinan Kehadiran Pekerja

Deskripsi Kasus: Seorang pekerja mencoba datang tepat waktu selama 20 hari kerja. Setiap hari dicatat apakah dia “tepat waktu” (sukses) atau “terlambat” (gagal). Jumlah hari tepat waktu total dicatat.

a. Distribusi yang Paling Sesuai

Distribusi Binomial (Binomial Distribution) adalah distribusi yang paling tepat untuk kasus ini.

Alasan Pemilihan:

1. **n percobaan independen:** Terdapat 20 hari kerja yang independen
2. **Dua hasil setiap percobaan:** Setiap hari hanya “tepat waktu” atau “terlambat”
3. **Probabilitas konstan:** Diasumsikan probabilitas tepat waktu (p) sama setiap hari
4. **Fokus pada jumlah sukses:** Variabel acak X = jumlah hari tepat waktu dari 20 hari

Parameter Distribusi:

- $n = 20$ (jumlah percobaan/hari)
- p = probabilitas datang tepat waktu
- $q = 1 - p$ = probabilitas terlambat
- X = jumlah hari tepat waktu

b. Ruang Sampel (S)

$$S = \{0,1,2,3, \dots, 20\}$$

Penjelasan:

- **Minimum (0):** Pekerja terlambat setiap hari selama 20 hari
- **Maksimum (20):** Pekerja tepat waktu setiap hari selama 20 hari

Rumus Probabilitas: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Ilustrasi distribusi binomial untuk $n=20$

Soal Nomor 2: Perhitungan Peluang dengan Distribusi Poisson

Deskripsi Masalah: Sebuah call center menerima rata-rata 12 panggilan per jam. Proses kedatangan panggilan mengikuti Distribusi Poisson dengan parameter $\lambda = 12$ panggilan/jam.

a. Peluang Paling Banyak 4 Panggilan dalam 30 Menit Pertama

Langkah 1: **Konversi Parameter λ** Untuk interval 30 menit (0.5 jam): $\lambda_{30} = 12 \times 0.5 = 6$ panggilan

Langkah 2: Definisi Variabel Acak} Misalkan $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 6)$ adalah variabel acak yang menyatakan jumlah panggilan dalam 30 menit.

Langkah 3: Perhitungan Kumulatif} Kita perlu menghitung $P(X \leq 4)$: $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

Langkah 4: Aplikasi Rumus Poisson} Rumus umum: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

Perhitungan detail:

k	Rumus	Perhitungan	Hasil
0	$\frac{e^{-6} \cdot 6^0}{0!}$	$e^{-6} \cdot 1$	0.002479
1	$\frac{e^{-6} \cdot 6^1}{1!}$	$e^{-6} \cdot 6$	0.014874
2	$\frac{e^{-6} \cdot 6^2}{2!}$	$e^{-6} \cdot 18$	0.044622
3	$\frac{e^{-6} \cdot 6^3}{3!}$	$e^{-6} \cdot 36$	0.089245
4	$\frac{e^{-6} \cdot 6^4}{4!}$	$e^{-6} \cdot 54$	0.133868

Langkah 5: Penjumlahan Probabilitas} $P(X \leq 4) = 0.002479 + 0.014874 + 0.044622 + 0.089245 + 0.133868$
 $P(X \leq 4) = 0.285088$

Hasil Akhir:} $P(X \leq 4) \approx 0.2851$ atau 28.51%

Interpretasi: Ada probabilitas sebesar 28.51% bahwa dalam 30 menit pertama akan ada paling banyak 4 panggilan yang masuk ke call center.

b. Peluang 8 Panggilan di 30 Menit Pertama dan 6 Panggilan di 30 Menit Kedua

Langkah 1: Asumsi Independensi} Proses Poisson memiliki sifat independensi pada interval yang tidak overlap. Jadi, kejadian di 30 menit pertama dan kedua saling bebas.

Langkah 2: Definisi Variabel Acak}

- X_1 : jumlah panggilan di 30 menit pertama, $X_1 \sim \text{Poisson}(6)$
- X_2 : jumlah panggilan di 30 menit kedua, $X_2 \sim \text{Poisson}(6)$

Langkah 3: Perhitungan Probabilitas Individual}

$$\text{Untuk } X_1 = 8: P(X_1 = 8) = \frac{e^{-6} \cdot 6^8}{8!} P(X_1 = 8) = \frac{0.002479 \cdot 1,679,616}{40,320} P(X_1 = 8) = 0.002479 \cdot 41.6667 = 0.10328$$

$$\text{Untuk } X_2 = 6: P(X_2 = 6) = \frac{e^{-6} \cdot 6^6}{6!} P(X_2 = 6) = \frac{0.002479 \cdot 46,656}{720} P(X_2 = 6) = 0.002479 \cdot 64.8 = 0.16062$$

Langkah 4: Perhitungan Probabilitas Gabungan} Karena X_1 dan X_2 independen:

$$P(X_1 = 8 \text{ dan } X_2 = 6) = P(X_1 = 8) \times P(X_2 = 6) P(X_1 = 8 \cap X_2 = 6) = 0.10328 \times 0.16062 = 0.01659$$

Hasil Akhir:} $P(X_1 = 8 \text{ dan } X_2 = 6) \approx 0.0166$ atau 1.66%

Interpretasi: Probabilitas bahwa tepat 8 panggilan masuk dalam 30 menit pertama DAN tepat 6 panggilan masuk dalam 30 menit kedua adalah sebesar 1.66%.

Analisis Komparatif Distribusi

Penjelasan Hubungan:

1. **Bernoulli → Binomial:** Binomial adalah generalisasi dari n percobaan Bernoulli
2. **Binomial → Normal:** Untuk n besar, Binomial mendekati Normal
3. **Poisson → Normal:** Untuk λ besar, Poisson mendekati Normal
4. **Hypergeometric → Binomial:** Jika $N \gg n$, Hypergeometric \approx Binomial
5. **Hypergeometric → Poisson:** Untuk K kecil dan N besar

Kriteria Pemilihan Distribusi

Situasi	Distribusi	Syarat Utama
Satu percobaan biner	Bernoulli	$n = 1$
n percobaan independen dengan pengembalian	Binomial	p konstan
n percobaan tanpa pengembalian	Hipergeometrik	populasi terbatas
Kejadian dalam interval waktu/ruang	Poisson	λ konstan,

Situasi	Distribusi	Syarat Utama independensi
---------	------------	------------------------------

Kesimpulan

Dari analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1. **Pemilihan distribusi probabilitas yang tepat sangat bergantung pada karakteristik percobaan** seperti metode sampling, jumlah percobaan, dan sifat independensi antar kejadian.
2. **Distribusi Hipergeometrik** ideal untuk sampling tanpa pengembalian dari populasi terbatas, seperti kasus pemilihan buku di perpustakaan.
3. **Distribusi Bernoulli** merupakan dasar untuk semua distribusi biner dan cocok untuk percobaan tunggal dengan dua hasil.
4. **Distribusi Poisson** sangat powerful untuk memodelkan kejadian random dalam interval waktu/ruang, dengan aplikasi luas dalam queueing theory dan reliability engineering.
5. **Distribusi Binomial** generalisasi dari Bernoulli untuk n percobaan independen, fundamental dalam analisis data biner.
6. **Perhitungan pelabilitas dalam kasus call center** menunjukkan pentingnya memahami sifat-sifat distribusi Poisson, terutama independensi antar interval waktu.