Банковский счёт, экспонента и интеграл

Банковский счёт (безрисковый актив) — это детерминированный процесс $\{B(t)\}_{t\geq 0}$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)\,B(t),$$

где $r(t)$ — известная безрисковая ставка. Начальное условие принято задавать как $B(0) = 1$. Тогда решение имеет вид

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right).$$

При постоянной ставке $r(t) \equiv r$ получаем классическую формулу:

$$B(t) = e^{rt}.$$

Банковский счёт — самый простой актив в финансах. Он растёт полностью детерминированно: если положить деньги под ставку r, мы заранее знаем, сколько получим через любое время t.

Именно поэтому банковский счёт используется как «линейка стоимости»: все рискованные активы сравниваются с ним. Если актив растёт быстрее e^{rt} — это риск, если медленнее — это невыгодно, а равенство означает полное отсутствие риска. Все модели хеджирования и оценки опционов строятся относительно банковского счёта. Это безрисковый актив, относительно которого мы впоследствии будем измерять стоимость любых рискованных инструментов: акций, облигаций, фьючерсов и, конечно, опционов.

Предположим, что ставка процента равна r. Тогда за малый промежуток времени Δt баланс на счёте изменяется по простой формуле:

$$B(t + \Delta t) = B(t)\,\big(1 + r\,\Delta t\big).$$

Пусть промежуток времени $[0, T]$ разбит на равные отрезки длины Δt:

$$0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \ldots,\ n\Delta t = T, \qquad \Delta t = \frac{T}{n}.$$

Будем предполагать, что за один малый шаг времени капитал изменяется по правилу

$$B(t + \Delta t) = B(t)\big(1 + r\Delta t\big).$$

После n шагов имеем

$$B(T) = B(0)\,(1 + r\Delta t)^n.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ (то есть при $n \to \infty$), получаем

$$\lim_{\Delta t \to 0} (1 + r\Delta t)^{T/\Delta t} = e^{rT}.$$

Таким образом, в пределе дискретная динамика переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = rB(t).$$

То есть за каждый маленький интервал времени счёт увеличивается на пропорциональную долю от текущего уровня. Но в реальности проценты начисляются непрерывно, а не рывками. Поэтому мы уменьшаем длину интервала Δt всё сильнее, стремим её к нулю и смотрим на поведение процесса в предельном смысле. Это уравнение выражает идею: скорость роста банковского счёта в любой момент времени пропорциональна его текущему значению.

Пусть $B(0) = 100$ и ставка $r = 10\%$ в год.

$$B_1(1) = 100\,000\left(1 + \frac{0.16}{1}\right)^1 = 100\,000 \cdot 1.16 = \mathbf{116\,000} \text{ рублей}.$$

2. Сложные проценты: капитализация раз в год ($n = 1$):

$$B_{12}(1) = 100\,000 \left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{12} \approx 100\,000 \cdot 1.17180 \approx \mathbf{117\,180} \text{ рублей.}$$

3. Непрерывное начисление ($n \to \infty$):

$$B_{\mathsf{cont}}(1) = 100\,000\, e^{0.16} \approx 100\,000 \cdot 1.17351 \approx \mathbf{117\,351} \text{ рублей.}$$

Важно: рост ускоряется со временем — именно это и есть **экспоненциальный эффект**.

Важно отметить следующее: даже в **самой простой** финансовой конструкции — банковском счёте — уже присутствуют экспонента и интеграл. Это означает, что без инструментов анализа финансовая математика невозможна в принципе.

Почему это так критично? Потому что банковский счёт играет роль **эталона** для всех остальных активов. Рискованные активы — акции, деривативы, валюты — оцениваются относительно этого детерминированного, предсказуемо растущего инструмента.

И далее вся архитектура финансовой математики строится на следующей идее: существует актив, который растёт как e^{rt}, и мы сравниваем с ним поведение всех других инструментов. Это фундамент для понятий **дисконтирования**, **отсутствия арбитража** и, в конечном счёте, для механики **хеджирования опциона**.