

Хэджирование с помощью опционов

Выгузов Алексей — ЭКРмд-01-24

27 ноября 2025 г.

0. Банковский счёт, экспонента и интеграл

Что такое банковский счёт?

Определение

Банковский счёт (безрисковый актив) — это детерминированный процесс $\{B(t)\}_{t \geq 0}$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t) B(t), \quad r(t) \text{ — известная безрисковая ставка.}$$

Начальное условие принято задавать как $B(0) = 1$. Тогда решение имеет вид

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right).$$

При постоянной ставке $r(t) \equiv r$ получаем классическую формулу:

$$B(t) = e^{rt}.$$

Банковский счёт (безрисковый актив) определяется как процесс $B(t)$, описывающий эволюцию капитала, размещённого под фиксированную и заранее известную процентную ставку r . Он обладает следующими свойствами:

- **Детерминированность** - все значения заранее известны
- **Отсутствие риска дефолта** - гарантированная выплата
- **Numeraire** — используется для оценки стоимости других активов

Что означает эта формула

Пусть промежуток времени $[0, T]$ разбит на равные отрезки длины Δt :

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t = T, \quad \Delta t = \frac{T}{n}.$$

Будем предполагать, что за один малый шаг времени капитал изменяется по правилу

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r\Delta t).$$

После n шагов имеем

$$B(T) = B(0)(1 + r\Delta t)^n.$$

Что означает эта формула

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ (то есть при $n \rightarrow \infty$), получаем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 + r\Delta t)^{T/\Delta t} = e^{rT}.$$

Таким образом, в пределе дискретная динамика переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = rB(t).$$

Пусть на банковском счёте лежит сумма $B(0) = 100\,000$ рублей, а годовая ставка равна ключевой ставке ЦБ РФ: $r = 16,5\% = 0.165$.

Рассчитаем рост капитала за один год ($T = 1$) при разных схемах начисления.

1. Капитализация 1 раз в год (линейная модель):

$$B_1(1) = 100\,000 \left(1 + \frac{0.16}{1}\right)^1 = 100\,000 \cdot 1.16 = \mathbf{116\,000} \text{ рублей.}$$

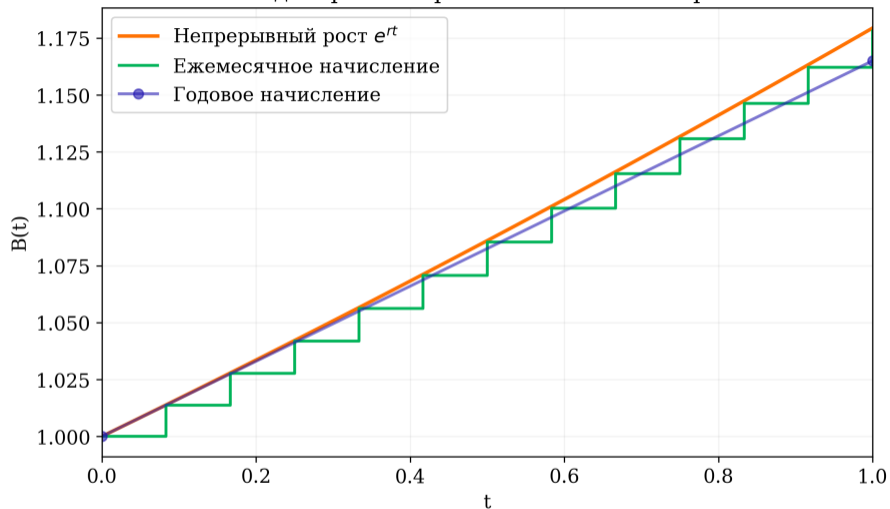
2. Капитализация раз в месяц ($n = 12$):

$$B_{12}(1) = 100\,000 \left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{12} \approx 100\,000 \cdot 1.17180 \approx \mathbf{117\,180} \text{ рублей.}$$

3. Непрерывное начисление ($n \rightarrow \infty$):

$$B_{\text{cont}}(1) = 100\,000 e^{0.16} \approx 100\,000 \cdot 1.17351 \approx \mathbf{117\,351} \text{ рублей.}$$

Сближение дискретного роста к экспоненте при $r = 16.5\%$



$$\underbrace{B_1(1)}_{116\,000} < \underbrace{B_{12}(1)}_{117\,180} < \underbrace{B_{\text{cont}}(1)}_{117\,351}$$

- При простой схеме процент не капитализируется — итог меньше всех.
- Чем чаще происходит капитализация, тем выше итоговая сумма.
- Непрерывный рост даёт теоретический максимум: e^r .

Рост ускоряется со временем — экспоненциальный эффект.

1. Случайность и риск

Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.
Что будет с этой ценой завтра?

Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.
Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.
Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

Цена актива — это случайная величина, а будущее рынка — это множество возможных исходов, которыми мы должны уметь работать.

- Финансовые решения принимаются **сегодня**, а результат проявляется в **будущем**.
- Завтрашняя цена неизвестна → каждое решение связано с неопределённостью.
- **Риск** возникает тогда, когда итог зависит от того, какой сценарий реализуется.
- Чтобы принимать осмысленные решения, нужно понимать:
 - какие исходы возможны;
 - каковы их вероятности;
 - какие убытки или прибыли они несут.
- Модели риска (в т.ч. биномиальная модель и дельта-хедж) — инструменты управления этой неопределённостью.

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

2. Теория вероятностей как язык

Определение

Вероятностное пространство — это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где

1. Ω — множество всех возможных исходов (пространство элементарных событий);
2. \mathcal{F} — σ -алгебра событий, то есть множество подмножеств Ω , для которых определены вероятности;
3. \mathbb{P} — функция вероятности, каждому событию $A \in \mathcal{F}$ ставит число $\mathbb{P}(A)$ в интервале $[0, 1]$ и удовлетворяет аксиомам вероятности.

Вероятностное пространство задаётся тремя объектами:

1. Множество исходов (возможные будущие состояния рынка):

$$\Omega = \{\text{up}, \text{down}, \text{flat}\}.$$

2. Система событий — все наблюдаемые комбинации исходов:

$$\mathcal{F} = \sigma(\{\text{up}\}, \{\text{down}\}, \{\text{flat}\}).$$

3. Вероятностная мера:

$$P(\text{up}) = 0.3, \quad P(\text{down}) = 0.4, \quad P(\text{flat}) = 0.3.$$

Получаем вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) .

3. Почему банкам нужно хеджирование

Почему банкам нужно хеджирование

- Банк подвержен рыночным рискам:
 - процентным,
 - валютным,
 - фондовым.
- Проданные клиентам опционы создают **нелинейный P&L**.
- Малые изменения цены базового актива могут вызывать крупные колебания результата.
- Хеджирование — инструмент стабилизации P&L в условиях рыночной неопределённости.

- **Хеджирование** — снижение риска за счёт корректирующей позиции.
- Не цель заработка, а цель — **стабилизация P&L**.
- Компенсация чувствительности портфеля к изменениям цены.
- Основная идея: нейтрализовать влияние случайных движений рынка.

4. Опционы

Что такое опцион?

Определение

Опцион — это финансовый контракт, который даёт его владельцу **право**, но не обязанность, совершить определённое действие в будущем.

- либо **купить** базовый актив по фиксированной цене,
- либо **продать** базовый актив по фиксированной цене.

Это ключевая характеристика:

- Покупатель опциона принимает решение *после того, как узнает рыночную цену*.
- Продавец опциона, наоборот, берёт на себя **обязательство** выполнить решение покупателя.

Поэтому покупатель всегда платит премию, а продавец её получает.

- **Страйк (K)** — это заранее установленная цена сделки, по которой действует право опциона

- **Страйк (K)** — это заранее установленная цена сделки, по которой действует право опциона
- **Экспирация (T)** — момент времени, когда право может быть использовано (европейский стиль). В момент T определяется конечная выплата опциона.

- **Страйк (K)** — это заранее установленная цена сделки, по которой действует право опциона
- **Экспирация (T)** — момент времени, когда право может быть использовано (европейский стиль). В момент T определяется конечная выплата опциона.

Определение(Формальное)

Опцион — это право совершить операцию по цене K в момент времени T , когда уже известно фактическое значение цены S_T .

Call-опцион — право *купить* актив по цене K .

- выгоден, если $S_T > K$;
- не нужен, если $S_T \leq K$.

Put-опцион — право *продать* актив по цене K .

- выгоден, если $S_T < K$;
- не используется, если $S_T \geq K$.

- **Long Call:** вы покупаете право купить. Платите премию.
- **Short Call:** вы продаёте право купить. Получаете премию.
- **Long Put:** вы покупаете право продать. Платите премию.
- **Short Put:** вы продаёте право продать. Получаете премию.

(!!!) Здесь важно не перепутать: long и short в опционах — это не владение активом, а владение **правом** или **обязательством**.

- **Long Call:** вы покупаете право купить. Платите премию.
- **Short Call:** вы продаёте право купить. Получаете премию.
- **Long Put:** вы покупаете право продать. Платите премию.
- **Short Put:** вы продаёте право продать. Получаете премию.

(!!!) Здесь важно не перепутать: long и short в опционах — это не владение активом, а владение **правом** или **обязательством**.

- Покупатель (long) имеет право и ограниченный риск.
- Продавец (short) имеет обязательство и потенциально неограниченный риск.

Немного формализма...
(выводим формулки наглядно)