

# Хэджирование с помощью опционов

---

Выгузов Алексей — ЭКРмд-01-24

26 ноября 2025 г.



## 0. Банковский счёт, экспонента и интеграл

# Что такое банковский счёт?

## Определение

**Банковский счёт** (безрисковый актив) — это детерминированный процесс  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ , удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t) B(t), \quad r(t) \text{ — известная безрисковая ставка.}$$

Начальное условие принято задавать как  $B(0) = 1$ . Тогда решение имеет вид

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right).$$

При постоянной ставке  $r(t) \equiv r$  получаем классическую формулу:

$$B(t) = e^{rt}.$$

Банковский счёт (безрисковый актив) определяется как процесс  $B(t)$ , описывающий эволюцию капитала, размещённого под фиксированную и заранее известную процентную ставку  $r$ . Он обладает следующими свойствами:

- **Детерминированность** - все значения заранее известны
- **Отсутствие риска дефолта** - гарантированная выплата
- **Numeraire** — используется для оценки стоимости других активов

## Что означает эта формалу

Пусть промежуток времени  $[0, T]$  разбит на равные отрезки длины  $\Delta t$ :

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t = T, \quad \Delta t = \frac{T}{n}.$$

Будем предполагать, что за один малый шаг времени капитал изменяется по правилу

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r\Delta t).$$

После  $n$  шагов имеем

$$B(T) = B(0)(1 + r\Delta t)^n.$$

## Что означает эта формалу

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  (то есть при  $n \rightarrow \infty$ ), получаем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 + r\Delta t)^{T/\Delta t} = e^{rT}.$$

Таким образом, в пределе дискретная динамика переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = rB(t).$$

Пусть на банковском счёте лежит сумма  $B(0) = 100\,000$  рублей, а годовая ставка равна ключевой ставке ЦБ РФ:  $r = 16,5\% = 0.165$ .

Рассчитаем рост капитала за один год ( $T = 1$ ) при разных схемах начисления.



1. Капитализация 1 раз в год (линейная модель):

$$B_1(1) = 100\,000 \left(1 + \frac{0.16}{1}\right)^1 = 100\,000 \cdot 1.16 = \mathbf{116\,000} \text{ рублей.}$$

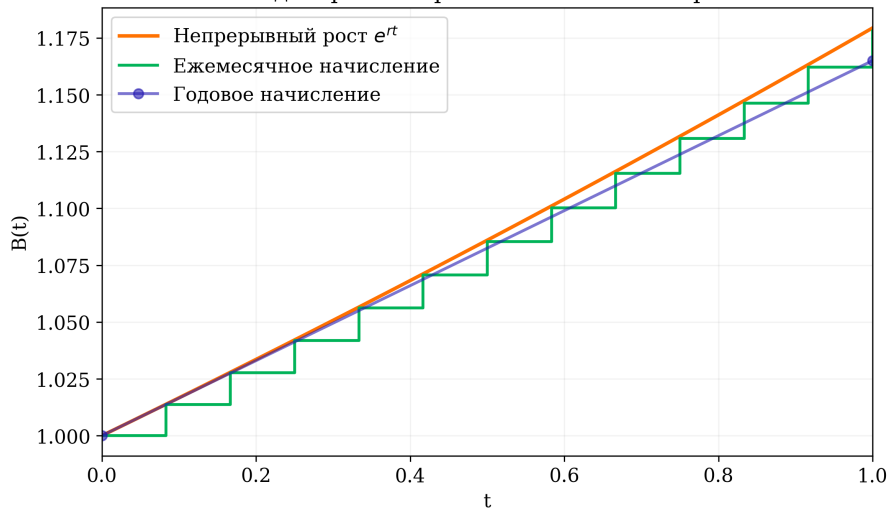
2. Капитализация раз в месяц ( $n = 12$ ):

$$B_{12}(1) = 100\,000 \left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{12} \approx 100\,000 \cdot 1.17180 \approx \mathbf{117\,180} \text{ рублей.}$$

3. Непрерывное начисление ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$B_{\text{cont}}(1) = 100\,000 e^{0.16} \approx 100\,000 \cdot 1.17351 \approx \mathbf{117\,351} \text{ рублей.}$$

Сближение дискретного роста к экспоненте при  $r = 16.5\%$



$$\underbrace{B_1(1)}_{116\,000} < \underbrace{B_{12}(1)}_{117\,180} < \underbrace{B_{\text{cont}}(1)}_{117\,351}$$

- При простой схеме процент не капитализируется — итог меньше всех.
- Чем чаще происходит капитализация, тем выше итоговая сумма.
- Непрерывный рост даёт теоретический максимум:  $e^r$ .

Рост ускоряется со временем — экспоненциальный эффект.

# 1. Случайность и риск

### Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.  
Что будет с этой ценой завтра?

### Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.  
Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

### Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.  
Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

**Цена актива** — это случайная величина, а будущее рынка — это множество возможных исходов, которыми мы должны уметь работать.

- Финансовые решения принимаются **сегодня**, а результат проявляется в **будущем**.
- Завтрашняя цена неизвестна → каждое решение связано с неопределённостью.
- **Риск** возникает тогда, когда итог зависит от того, какой сценарий реализуется.
- Чтобы принимать осмысленные решения, нужно понимать:
  - какие исходы возможны;
  - каковы их вероятности;
  - какие убытки или прибыли они несут.
- Модели риска (в т.ч. биномиальная модель и дельта-хедж) — инструменты управления этой неопределённостью.



$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

Теория вероятностей как язык

## Определение

Вероятностное пространство — это тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , где

1.  $\Omega$  — множество всех возможных исходов (пространство элементарных событий);
2.  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра событий, то есть множество подмножеств  $\Omega$ , для которых определены вероятности;
3.  $\mathbb{P}$  — функция вероятности, каждому событию  $A \in \mathcal{F}$  ставит число  $\mathbb{P}(A)$  в интервале  $[0, 1]$  и удовлетворяет аксиомам вероятности.