Хэджирование с помощью опционов

Выгузов Алексей — ЭКРмд-01-24

26 ноября 2025 г.

План презентации

0. Банковский счёт, экспонента и интеграл

Что такое банковский счёт?

Определение

Банковский счёт (безрисковый актив) — это детерминированный процесс $\{B(t)\}_{t\geq 0}$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)\,B(t), \quad r(t) \text{ — известная безрисковая ставка.}$$

Начальное условие принято задавать как $B(0) = 1$. Тогда решение имеет вид

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right).$$

При постоянной ставке $r(t) \equiv r$ получаем классическую формулу:

$$B(t) = e^{rt}.$$

Банковский счёт

Банковский счёт (безрисковый актив) определяется как процесс $B(t)$, описывающий эволюцию капитала, размещённого под фиксированную и заранее известную процентную ставку r. Он обладает следующими свойствами:

- **Детерминированность** - все значения заранее известны
- **Отсутствие риска дефолта** - гарантированная выплата
- **Numeraire** — используется для оценки стоимости других активов

Что означает эта формалу

Пусть промежуток времени $[0, T]$ разбит на равные отрезки длины Δt:

$$0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \ldots,\ n\Delta t = T, \qquad \Delta t = \frac{T}{n}.$$

Будем предполагать, что за один малый шаг времени капитал изменяется по правилу

$$B(t + \Delta t) = B(t)\bigl(1 + r\Delta t\bigr).$$

После n шагов имеем

$$B(T) = B(0)\,(1 + r\Delta t)^n.$$

Что означает эта формалу

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ (то есть при $n \to \infty$), получаем

$$\lim_{\Delta t \to 0} (1 + r\Delta t)^{T/\Delta t} = e^{rT}.$$

Таким образом, в пределе дискретная динамика переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = rB(t).$$

Пример

Пусть на банковском счёте лежит сумма $B(0) = 100\,000$ рублей,а годовая ставка равна ключевой ставке ЦБ РФ: $r = 16,5\% = 0.165$.
Рассчитаем рост капитала за один год $(T = 1)$ при разных схемах начисления.

Решение

1. Капитализация 1 раз в год (линейная модель):

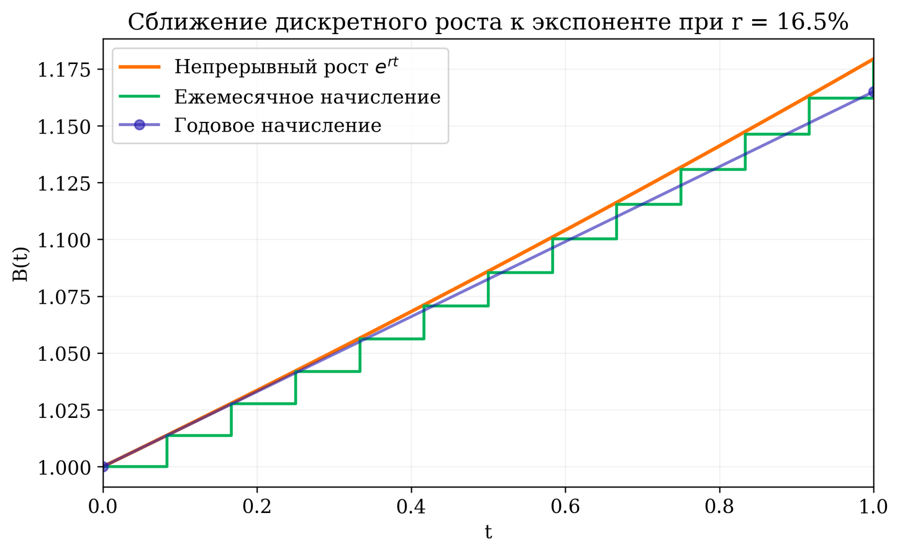
$$B_1(1) = 100\,000\left(1 + \frac{0.16}{1}\right)^1 = 100\,000 \cdot 1.16 = \mathbf{116\,000}\ \text{рублей.}$$

2. Капитализация раз в месяц ($n = 12$):

$$B_{12}(1) = 100\,000\left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{12} \approx 100\,000 \cdot 1.17180 \approx \mathbf{117\,180}\ \text{рублей.}$$

3. Непрерывное начисление ($n \to \infty$):

$$B_{\text{cont}}(1) = 100\,000\,e^{0.16} \approx 100\,000 \cdot 1.17351 \approx \mathbf{117\,351}\ \text{рублей.}$$



Сближение дискретного роста к экспоненте при r = 16.5%
Непрерывный рост e^{rt}
Ежемесячное начисление
Годовое начисление
B(t)
1.175
1.150
1.125
1.100
1.075
1.050
1.025
1.000
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t

Сравнение результатов

$$\overbrace{116\,000}^{B_1(1)} < \overbrace{117\,180}^{B_{12}(1)} < \overbrace{117\,351}^{B_{\text{cont}}(1)}$$

- При простой схеме процент не капитализируется — итог меньше всех.
- Чем чаще происходит капитализация, тем выше итоговая сумма.
- Непрерывный рост даёт теоретический максимум: e^r.

Рост ускоряется со временем — экспоненциальный эффект.

1. Счлучайность и риск

Цена завтра 1/3

Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.
Что будет с этой ценой завтра?

Цена завтра 2/3

Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.
Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

Цена завтра 3/3

Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.
Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

Цена актива — это случайная величина, а будущее рынка — это множество возможных исходов, которыми мы должны уметь работать.

Риск и принятие решений

- Финансовые решения принимаются **сегодня**, а результат проявляется **в будущем**.
- Завтрашняя цена неизвестна $\rightarrow$ каждое решение связано с неопределённостью.
- **Риск** возникает тогда, когда итог зависит от того, какой сценарий реализуется.
- Чтобы принимать осмысленные решения, нужно понимать:
  - какие исходы возможны;
  - каковы их вероятности;
  - какие убытки или прибыли они несут.
- Модели риска (в т.ч. биномиальная модель и дельта-хедж) — инструменты управления этой неопределённостью.

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

Теория вероятностей как язык

Вероятностное пространство

Определение

Вероятностное пространство — это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где

1. Ω — множество всех возможных исходов (пространство элементарных событий);
2. $\mathcal{F}$ — σ-**алгебра** событий, то есть множество подмножеств Ω, для которых определены вероятности;
3. $\mathbb{P}$ — функция вероятности, каждому событию $A \in \mathcal{F}$ ставит число $\mathbb{P}(A)$ в интервале $[0, 1]$ и удовлетворяет аксиомам вероятности.

Теория вероятностей как язык (формально)

Вероятностное пространство задаётся тремя объектами:

1. **Множество исходов** (возможные будущие состояния рынка):

$$\Omega = \{\text{up}, \text{down}, \text{flat}\}.$$

2. **Система событий** — все наблюдаемые комбинации исходов:

$$\mathcal{F} = \sigma(\{\text{up}\}, \{\text{down}\}, \{\text{flat}\}).$$

3. **Вероятностная мера**:

$$P(\text{up}) = 0.3, \quad P(\text{down}) = 0.4, \quad P(\text{flat}) = 0.3.$$

Получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Почему банкам нужно хеджирование

- Банк подвержен рыночным рискам:
  - процентным,
  - валютным,
  - фондовым.
- Проданные клиентам опционы создают **нелинейный** P&L.
- Малые изменения цены базового актива могут вызывать крупные колебания результата.
- Требуется управление чувствительностью портфеля: дельта, гамма, вега.
- Хеджирование — инструмент стабилизации P&L в условиях рыночной неопределённости.

Что такое хеджирование

- **Хеджирование** — снижение риска за счёт корректирующей позиции.
- Не цель заработка, а цель — **стабилизация P&L**.
- Компенсация чувствительности портфеля к изменениям цены.
- Основная идея: нейтрализовать влияние случайных движений рынка.