

# Хеджирование с помощью опционов

---

Выгузов Алексей — ЭКРмд-01-24

27 ноября 2025 г.

## 0. Банковский счёт, экспонента и интеграл

# Что такое банковский счёт?

## Определение

**Банковский счёт** (безрисковый актив) — это детерминированный процесс  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ , удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t) B(t), \quad r(t) — \text{известная безрисковая ставка.}$$

Начальное условие принято задавать как  $B(0) = 1$ . Тогда решение имеет вид

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right).$$

При постоянной ставке  $r(t) \equiv r$  получаем классическую формулу:

$$B(t) = e^{rt}.$$

Банковский счёт (**безрисковый актив**) определяется как процесс  $B(t)$ , описывающий эволюцию капитала, размещённого под фиксированную и заранее известную процентную ставку  $r$ . Он обладает следующими свойствами:

- **Детерминированность** - все значения заранее известны
- **Отсутствие риска дефолта** - гарантированная выплата
- **Numeraire** — используется для оценки стоимости других активов

## Что означает эта формула

Пусть промежуток времени  $[0, T]$  разбит на равные отрезки длины  $\Delta t$ :

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t = T, \quad \Delta t = \frac{T}{n}.$$

Будем предполагать, что за один малый шаг времени капитал изменяется по правилу

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r\Delta t).$$

После  $n$  шагов имеем

$$B(T) = B(0)(1 + r\Delta t)^n.$$

## Что означает эта формула

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  (то есть при  $n \rightarrow \infty$ ), получаем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 + r\Delta t)^{T/\Delta t} = e^{rT}.$$

Таким образом, в пределе дискретная динамика переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = rB(t).$$

## Пример

---

Пусть на банковском счёте лежит сумма  $B(0) = 100\ 000$  рублей, а годовая ставка равна ключевой ставке ЦБ РФ:  $r = 16,5\% = 0.165$ .

Рассчитаем рост капитала за один год ( $T = 1$ ) при разных схемах начисления.

## Решение

1. Капитализация 1 раз в год (линейная модель):

$$B_1(1) = 100\,000 \left(1 + \frac{0.16}{1}\right)^1 = 100\,000 \cdot 1.16 = \mathbf{116\,000} \text{ рублей.}$$

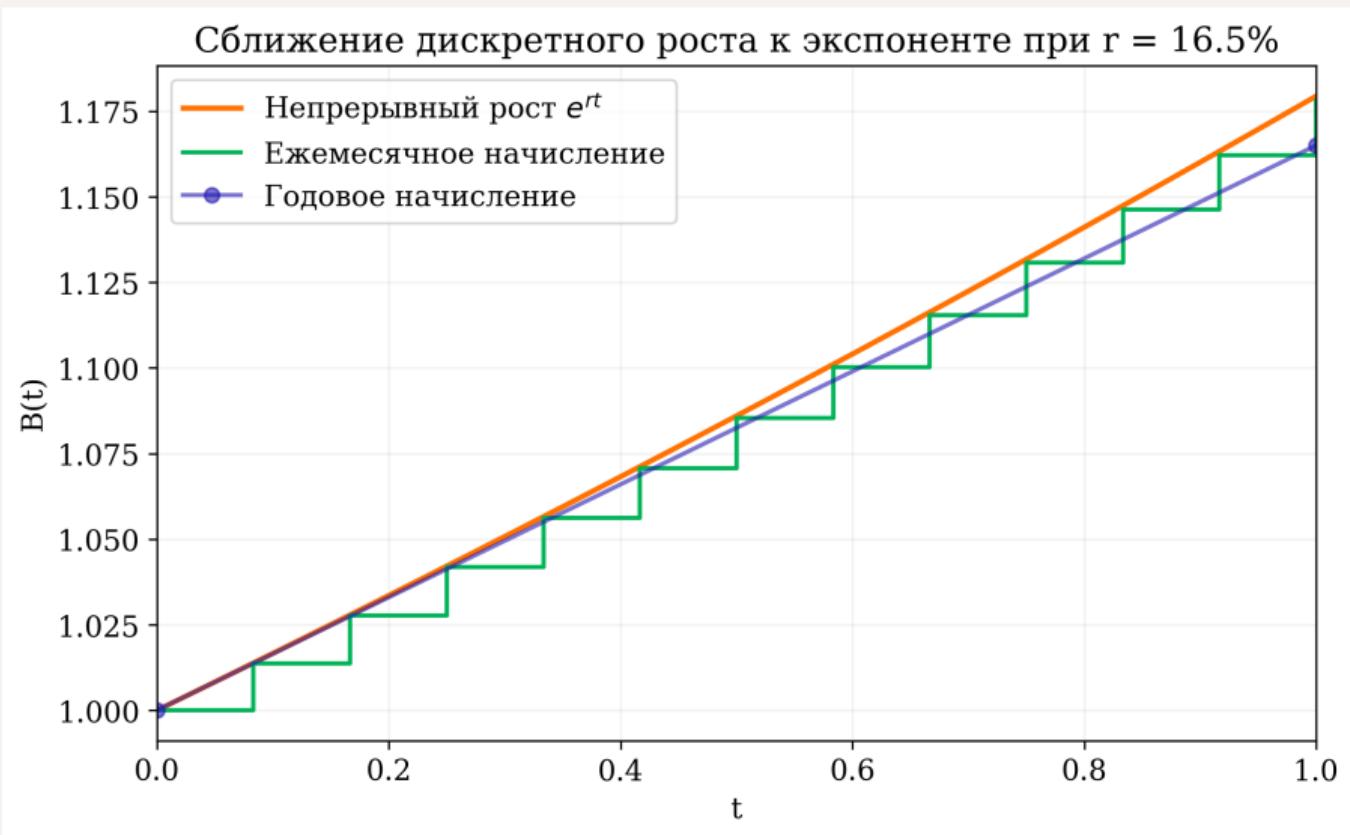
2. Капитализация раз в месяц ( $n = 12$ ):

$$B_{12}(1) = 100\,000 \left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{12} \approx 100\,000 \cdot 1.17180 \approx \mathbf{117\,180} \text{ рублей.}$$

3. Непрерывное начисление ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$B_{\text{cont}}(1) = 100\,000 e^{0.16} \approx 100\,000 \cdot 1.17351 \approx \mathbf{117\,351} \text{ рублей.}$$

# График



## Сравнение результатов

---

$$\overbrace{116\,000}^{B_1(1)} < \overbrace{117\,180}^{B_{12}(1)} < \overbrace{117\,351}^{B_{\text{cont}}(1)}$$

- При простой схеме процент не капитализируется — итог меньше всех.
- Чем чаще происходит капитализация, тем выше итоговая сумма.
- Непрерывный рост даёт теоретический максимум:  $e^r$ .

Рост ускоряется со временем — экспоненциальный эффект.

# 1. Случайность и риск

## Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.  
Что будет с этой ценой завтра?

## Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.  
Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

## Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.  
Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

**Цена актива** — это случайная величина, а будущее рынка — это множество возможных исходов, которыми мы должны уметь работать.

- Финансовые решения принимаются **сегодня**, а результат проявляется в **будущем**.
- Завтрашняя цена неизвестна → каждое решение связано с **неопределённостью**.
- **Риск** возникает тогда, когда итог зависит от того, какой сценарий реализуется.
- Чтобы принимать осмысленные решения, нужно понимать:
  - какие исходы возможны;
  - каковы их вероятности;
  - какие убытки или прибыли они несут.
- Модели риска (в т.ч. биномиальная модель и дельта-хедж) — инструменты управления этой неопределённостью.

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

2. Теория вероятностей как язык

## Определение

Вероятностное пространство — это тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , где

1.  $\Omega$  — множество всех возможных исходов (пространство элементарных событий);
2.  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра событий, то есть множество подмножеств  $\Omega$ , для которых определены вероятности;
3.  $\mathbb{P}$  — функция вероятности, каждому событию  $A \in \mathcal{F}$  ставит число  $\mathbb{P}(A)$  в интервале  $[0, 1]$  и удовлетворяет аксиомам вероятности.

## Теория вероятностей как язык (формально)

---

Вероятностное пространство задаётся тремя объектами:

1. Множество исходов (возможные будущие состояния рынка):

$$\Omega = \{\text{up}, \text{down}, \text{flat}\}.$$

2. Система событий — все наблюдаемые комбинации исходов:

$$\mathcal{F} = \sigma(\{\text{up}\}, \{\text{down}\}, \{\text{flat}\}).$$

3. Вероятностная мера:

$$P(\text{up}) = 0.3, \quad P(\text{down}) = 0.4, \quad P(\text{flat}) = 0.3.$$

Получаем вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

### 3. Почему банкам нужно хеджирование

## Почему банкам нужно хеджирование

- Банк подвержен рыночным рискам:
  - процентным,
  - валютным,
  - фондовым.
- Проданные клиентам опционы создают **нелинейный P&L**.
- Малые изменения цены базового актива могут вызывать крупные колебания результата.
- Хеджирование — инструмент стабилизации P&L в условиях рыночной неопределенности.

## Что такое хеджирование

---

- Хеджирование — снижение риска за счёт корректирующей позиции.
- Не цель заработка, а цель — **стабилизация Р&Л**.
- Компенсация чувствительности портфеля к изменениям цены.
- Основная идея: нейтрализовать влияние случайных движений рынка.

## 4. Опционы

# Что такое опцион?

## Определение

Опцион — это финансовый контракт, который даёт его владельцу **право**, но не обязанность, совершить определённое действие в будущем.

- либо купить базовый актив по фиксированной цене,
- либо продать базовый актив по фиксированной цене.

Это ключевая характеристика:

- Покупатель опциона принимает решение *после того, как узнает рыночную цену*.
- Продавец опциона, наоборот, берёт на себя **обязательство выполнить** решение покупателя.

Поэтому покупатель всегда платит премию, а продавец её получает.

## Вспомогательные обозначения 1/3

---

- Страйк (K) — это заранее установленная цена сделки, по которой действует право опциона

- **Страйк (K)** — это заранее установленная цена сделки, по которой действует право опциона
- **Экспирация (T)** — момент времени, когда право может быть использовано (европейский стиль). В момент  $T$  определяется конечная выплата опциона.

- **Страйк (K)** — это заранее установленная цена сделки, по которой действует право опциона
- **Экспирация (T)** — момент времени, когда право может быть использовано (европейский стиль). В момент  $T$  определяется конечная выплата опциона.

### Определение(Формальное)

Опцион — это право совершить операцию по цене  $K$  в момент времени  $T$ , когда уже известно фактическое значение цены  $S_T$ .

**Call-опцион** — право купить актив по цене  $K$ .

- выгоден, если  $S_T > K$ ;
- не нужен, если  $S_T \leq K$ .

**Put-опцион** — право продать актив по цене  $K$ .

- выгоден, если  $S_T < K$ ;
- не используется, если  $S_T \geq K$ .

- **Long Call:** вы покупаете право купить. Платите премию.
  - **Short Call:** вы продаёте право купить. Получаете премию.
  - **Long Put:** вы покупаете право продать. Платите премию.
  - **Short Put:** вы продаёте право продать. Получаете премию.
- (!!!) Здесь важно не перепутать: *long* и *short* в опционах — это не владение активом, а владение правом или обязательством.

- **Long Call:** вы покупаете право купить. Платите премию.
- **Short Call:** вы продаёте право купить. Получаете премию.
- **Long Put:** вы покупаете право продать. Платите премию.
- **Short Put:** вы продаёте право продать. Получаете премию.

(!!!) Здесь важно не перепутать: **long** и **short** в опционах — это не владение активом, а владение **правом или обязательством**.

- Покупатель (**long**) имеет право и ограниченный риск.
- Продавец (**short**) имеет обязательство и потенциально неограниченный риск.

Немного формализма...  
*(выводим формулы наглядно)*

Держатель call-опциона имеет право купить актив по  $K$ . Рассмотрим возможные действия в зависимости от цены  $S_T$ :

$$\begin{cases} \text{если } S_T \leq K, \text{ право не нужно} \Rightarrow \text{выплата } 0, \\ \text{если } S_T > K, \text{ покупаем по } K \text{ и продаём по } S_T \Rightarrow S_T - K. \end{cases}$$

Это кусочная функция, которую компактно записывают как

$$\text{Payoff}_{\text{call}} = \max(S_T - K, 0).$$

Держатель put имеет право продать по  $K$ :

$$\begin{cases} \text{если } S_T \geq K, \text{ право не нужно} \Rightarrow \text{выплата } 0, \\ \text{если } S_T < K, \text{ продаём по } K \text{ то, что стоит } S_T \Rightarrow K - S_T. \end{cases}$$

Компактная запись:

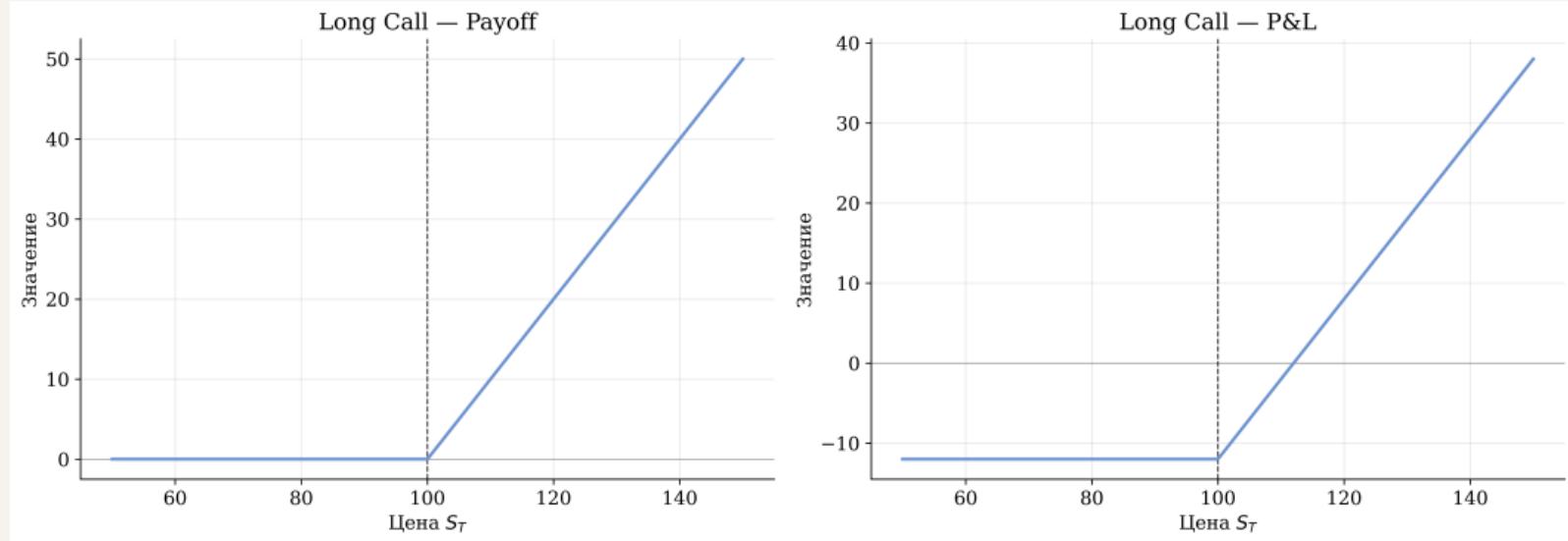
$$\text{Payoff}_{\text{put}} = \max(K - S_T, 0).$$

Теперь запишем четыре фундаментальные позиции:

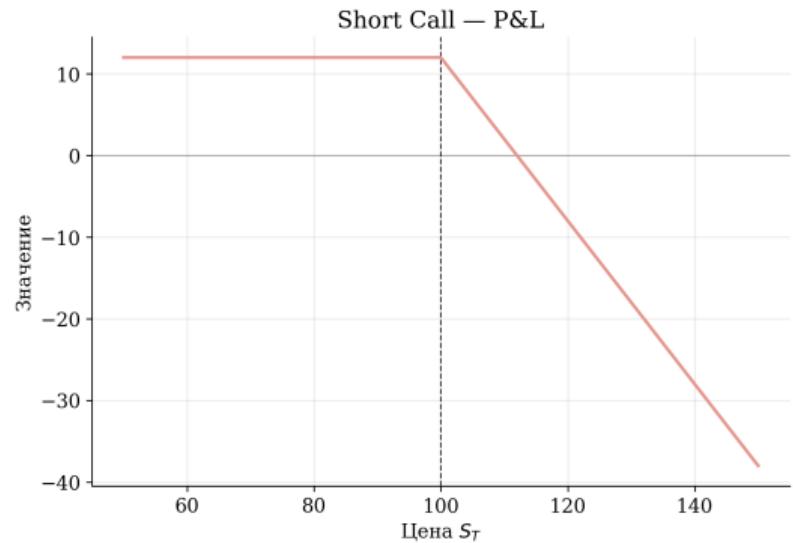
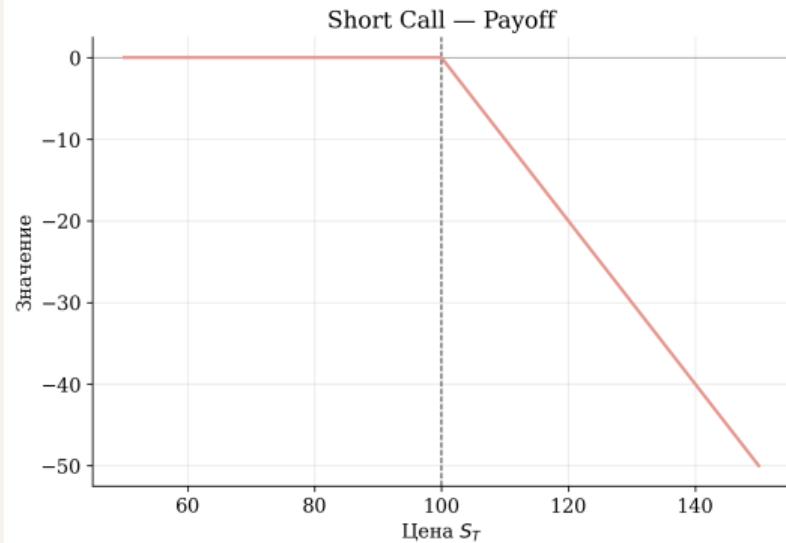
$$\begin{cases} \text{Payoff}_{\text{Long Call}} &= \max(S_T - K, 0), \\ \text{Payoff}_{\text{Short Call}} &= -\max(S_T - K, 0), \\ \text{Payoff}_{\text{Long Put}} &= \max(K - S_T, 0), \\ \text{Payoff}_{\text{Short Put}} &= -\max(K - S_T, 0). \end{cases}$$

*Минус означает обязательство выплатить то, что получает покупатель.*

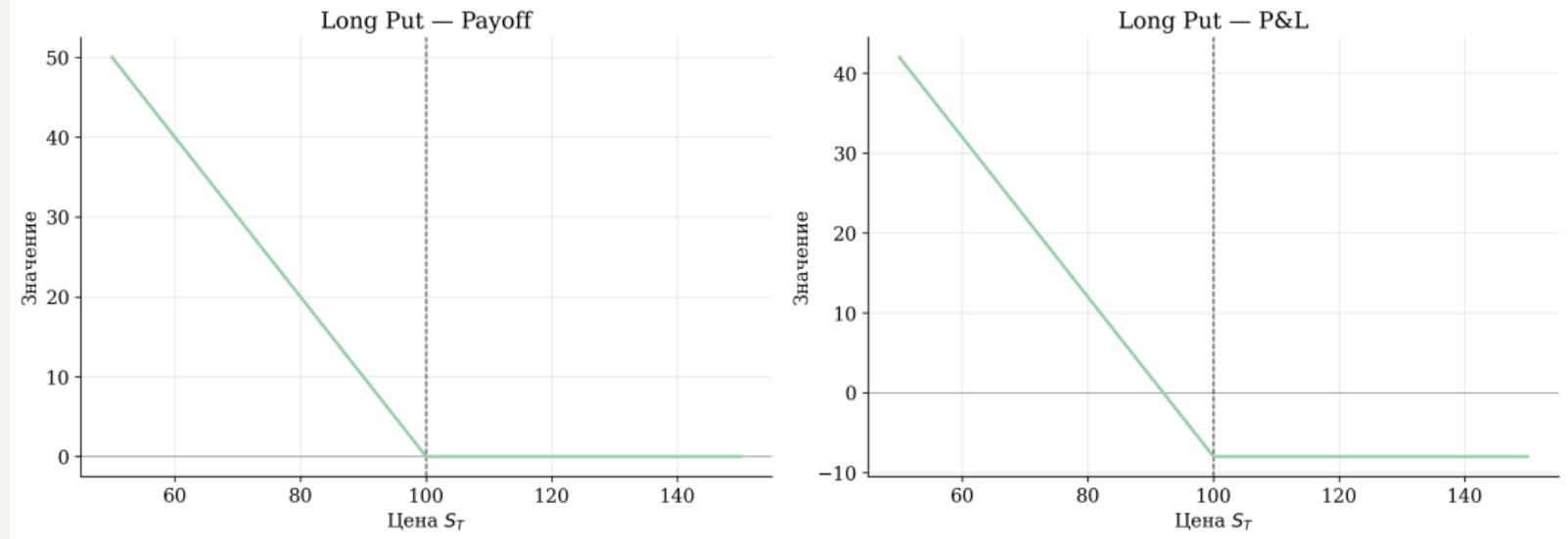
## Payoff - Long Call $\max(S_T - K, 0)$



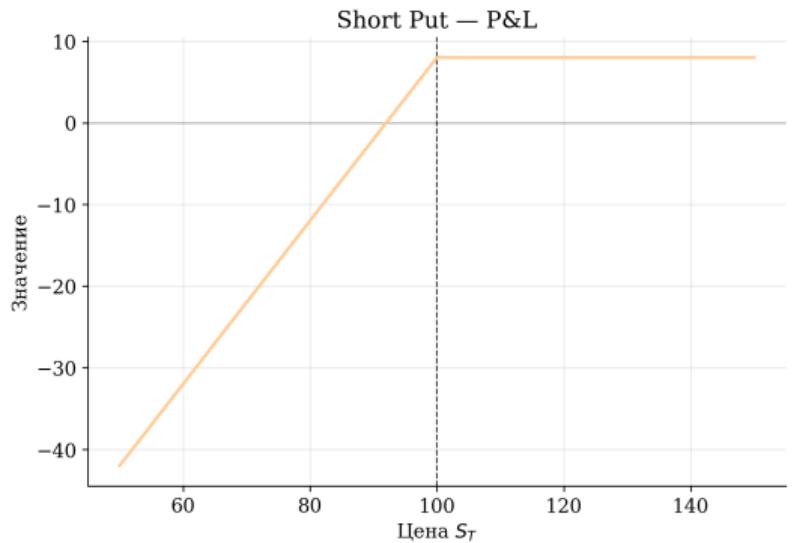
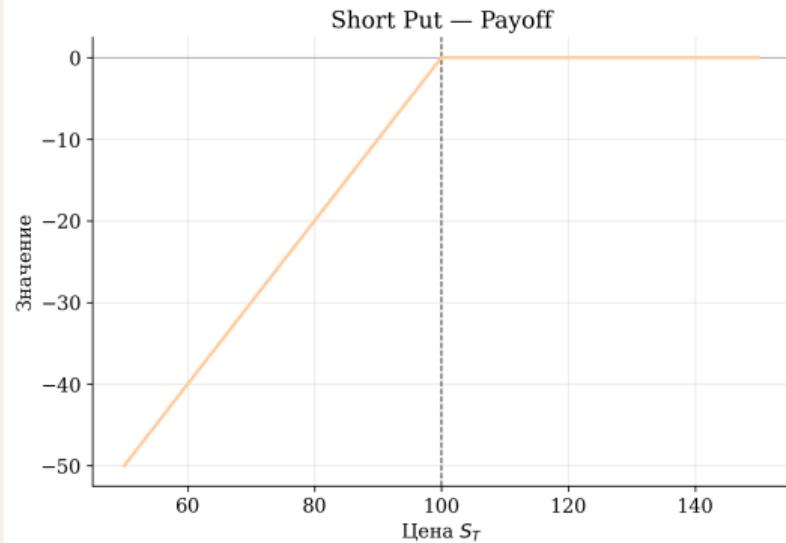
Payoff - Short Call  $= \max(S_T - K, 0)$



## Payoff - Long Put $\max(K - S_T, 0)$



**Payoff - Short Put** –  $\max(K - S_T, 0)$



## Пример

---

Пусть базовый актив имеет возможные цены на экспирации:

$$S_T \in \{80, 100, 130\}.$$

Возьмём страйк  $K = 100$ . Тогда для каждого сценария вычислим выплаты:

Теперь для каждого  $S_T$  вычислим выплаты по четырём фундаментальным позициям:

Long Call (LC), Short Call (SC), Long Put (LP), Short Put (SP).

## CALL-OPTION

---

1. Long Call по определению:

$$\text{Payoff}_{LC}(S_T) = \max(S_T - K, 0).$$

$$S_T = 80 : \quad \max(80 - 100, 0) = 0,$$

$$S_T = 100 : \quad \max(100 - 100, 0) = 0,$$

$$S_T = 130 : \quad \max(130 - 100, 0) = 30.$$

2. Short Call - продавец call обязуется выплатить покупателю противоположный результат:

$$\text{Payoff}_{SC}(S_T) = -\max(S_T - K, 0).$$

$$S_T = 80 : \quad 0,$$

$$S_T = 100 : \quad 0,$$

$$S_T = 130 : \quad -30.$$

## PUT-OPTION

---

3. Long Put - по определению:

$$\text{Payoff}_{LP}(S_T) = \max(K - S_T, 0).$$

$$S_T = 80 : \quad \max(100 - 80, 0) = 20,$$

$$S_T = 100 : \quad \max(100 - 100, 0) = 0,$$

$$S_T = 130 : \quad \max(100 - 130, 0) = 0.$$

4. Short Put - по определению продавец put получает результат со знаком «минус»:

$$\text{Payoff}_{SP}(S_T) = -\max(K - S_T, 0).$$

$$S_T = 80 : \quad -20,$$

$$S_T = 100 : \quad 0,$$

$$S_T = 130 : \quad 0.$$

$S_T$	$LC$	$SC$	$LP$	$SP$
80	0	0	20	-20
100	0	0	0	0
130	30	-30	0	0

- При низкой цене ( $S_T = 80$ ) ценность имеет только put: право продать по 100 приносит 20.
- Вблизи страйка ( $S_T = 100$ ) все опционы на границе — payoff равен нулю.
- При высокой цене ( $S_T = 130$ ) ценность имеет только call: право купить за 100 и продать за 130 даёт 30.

# Модели ценообразования

## Биномиальная модель

# ОФФ-ТОП. Что такое бином Ньютона?

## Оффтоп: что такое бином Ньютона (интуитивно)

---

**Бином Ньютона** — это формула, которая описывает разложение выражения  $(a + b)^n$ .

- при раскрытии скобок мы выбираем  $n$  раз — берём  $a$  или  $b$ ;
- каждая комбинация даёт одно слагаемое вида  $a^k b^{n-k}$ ;
- количество таких комбинаций определяется тем, сколько способов выбрать  $k$  раз  $a$  среди  $n$  шагов;
- поэтому в формуле появляются биномиальные коэффициенты  $\binom{n}{k}$ .

Главная идея:  $(a + b)^n$  — это сумма всех возможных комбинаций выбора  $a$  и  $b$  по  $n$  раз.

## Бином Ньютона: формула и связь с вероятностью

---

Формула бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Биномиальный коэффициент:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}.$$

## Интуиция случайности: монетка

---

Самый простой случайный объект — обычная монета. Каждый подброс даёт один из двух исходов:

$$\Omega = \{\text{орёл, решка}\}.$$

Каждый исход сам по себе не особенно интересен. Но если подбросить монету много раз, начинаются закономерности.

- при 10 бросках мы ожидаем примерно 5 орлов;
- при 1000 бросках — около 500;
- но каждый конкретный эксперимент даёт немного другое число.

Отдельный исход непредсказуем, но совокупное поведение имеет структуру.

## Что такое случайная величина (формально)

---

Случайная величина — это не «случайное число». Это функция, которая каждому исходу ставит в соответствие число:

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Каждый исход  $\omega \in \Omega$  отображается в значение  $\xi(\omega)$ . Примеры:

- Подбрасываем монету 5 раз: исход — последовательность из Н/Т. Случайная величина:

$$X(\omega) = \text{число орлов в исходе } \omega.$$

- В финансах  $S_T$  — тоже случайная величина:

$$S_T(\omega) = \text{цена актива в момент } T.$$

Случайная величина — это правило, которое превращает исходы в числа.

## Что такое распределение случайной величины

---

Интуитивно: распределение — это закон того, как часто случайная величина принимает различные значения.

Формально: распределение — это мера на  $\mathbb{R}$ , индуцированная отображением  $\xi$ :

$$P_\xi(A) = P(\xi^{-1}(A)).$$

- Чтобы узнать вероятность того, что  $\xi \in A$ , надо взять все исходы  $\omega$ , которые приводят к этому событию.
- Распределение описывает структуру случайной величины то есть какие значения и с какими вероятностями она может принимать.

## Биномиальное распределение: постановка задачи

**Задача.** Какова вероятность того, что при 5 подбрасываниях монеты ровно 3 раза выпадет орёл? Определим параметры:

- число испытаний:  $n = 5$ ;
- число «успехов»:  $k = 3$ ;
- вероятность успеха:  $p = \frac{1}{2}$ ;
- вероятность неуспеха:  $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ .

Общая формула биномиального распределения:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

В нашем случае:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

## Биномиальное распределение: решение

---

Вычислим биномиальный коэффициент:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = 10.$$

Тогда вероятность равна:

$$P(X = 3) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

**Ответ:**  $\frac{5}{16}$ .

Представим теперь не монетку, а цену актива.

Сегодня цена равна  $S_0$ . Завтра будет один из двух сценариев:

$S_T$  чуть выше, или  $S_T$  чуть ниже

в каждый маленький промежуток времени цена может сделать один из нескольких типичных шагов.

Монетка — это аналогия:

- орёл  $\iff$  цена выросла;
- решка  $\iff$  цена упала.

## Пример

---

Пусть акция стоит 100 сегодня.

Завтра она:

- либо чуть подрастёт — например, до 102;
- либо чуть просядет — например, до 98.

Мы не знаем, какой сценарий произойдёт. Но важно другое: **нам известны возможные варианты, и каждый из них имеет вероятность.**

Это позволяет:

- строить сценарии будущего,
- оценивать риск,
- моделировать выплаты опционов,
- и — главное — строить хедж.

## Почему двух сценариев достаточно?

---

На очень маленьком промежутке времени поведение цены похоже на подброс монетки:

- цена делает **маленький стандартный шаг вверх** (реакция на новости, ликвидность, дисбаланс ордеров);
- или **маленький стандартный шаг вниз**.

Это не означает, что цена *реально* может принимать только два значения.  
Это означает, что для **моделирования одного короткого шага двух вариантов** достаточно.

## Что такое арбитраж в одном шаге

---

Арбитраж — это стратегия без начальных затрат, которая гарантированно приносит прибыль. В одном шаге модели:

$$S_0 \rightarrow \begin{cases} uS_0 & \text{(рост)} \\ dS_0 & \text{(падение)} \end{cases}$$

Банковский счёт:

$$B_1 = B_0(1 + r\Delta t)$$

Арбитраж появляется, если можно:

- составить портфель из  $S$  и  $B$ ,
- не вложив ни копейки,
- и получить прибыль в обоих состояниях.

## Когда возникает арбитраж

---

Рассмотрим отношение доходности актива и банка.

Если:

$$u \leq 1 + r\Delta t$$

то актив растёт медленнее банка  $\rightarrow$  выгодно занять актив и держать банк.

Если:

$$d \geq 1 + r\Delta t$$

то актив не падает  $\rightarrow$  выгодно занять деньги под  $r$  и купить актив.

В обоих случаях можно получить гарантированную прибыль.

## Условие отсутствия арбитража

---

Чтобы ни одна арбитражная стратегия не существовала, требуется:

$$d < 1 + r\Delta t < u.$$

Это означает:

- рост актива быстрее роста банка,
- падение актива слабее падения банка.

Только в этом случае модель консистентна.

## Требование отсутствия арбитража

---

Чтобы не было арбитража, средняя цена под правильной вероятностью должна равняться росту банка:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_1] = S_0(1 + r\Delta t).$$

$$q = \frac{(1 + r\Delta t) - d}{u - d}.$$

Это единственная вероятность, у которой нет арбитража.

## Что такое риск-нейтральная вероятность

---

Риск-нейтральная вероятность:

$$q = \frac{(1 + r\Delta t) - d}{u - d}$$

- не реальная вероятность;
- не ожидание рынка;
- техника для устранения арбитража;
- обеспечивает, что дисконтированная цена актива — мартингал.

## Выплаты по call-опциону в узлах

---

$$C_u = \max(uS_0 - K, 0), \quad C_d = \max(dS_0 - K, 0).$$

## Цена call в одном шаге

---

$$C_0 = \frac{1}{1 + r\Delta t} (qC_u + (1 - q)C_d).$$

## Схема движения и ценообразования

---

$$S_0 \rightarrow \begin{cases} uS_0 & (C_u) \\ dS_0 & (C_d) \end{cases}$$

$$C_0 = \frac{qC_u + (1 - q)C_d}{1 + r\Delta t}$$

## Идея: портфель, который повторяет опцион

---

Предположим, что есть портфель вида:

$$\Pi = \Delta S_0 - B_0,$$

который через один шаг даёт выплаты:

$$\Pi_u = \Delta u S_0 - B_0(1 + r\Delta t),$$

$$\Pi_d = \Delta d S_0 - B_0(1 + r\Delta t).$$

Хотим:

$$\Pi_u = C_u, \quad \Pi_d = C_d.$$

Тогда портфель **реплицирует** опцион.

## Решение системы репликации

---

Из:

$$\Delta u S_0 - B_0(1 + r\Delta t) = C_u$$

$$\Delta d S_0 - B_0(1 + r\Delta t) = C_d$$

вычтем второе из первого:

$$\Delta S_0(u - d) = C_u - C_d.$$

Отсюда:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u - d)S_0}.$$

## Стоимость позиций в долгах

---

Подставляем найденную  $\Delta$  в уравнение:

$$\Delta u S_0 - B_0(1 + r\Delta t) = C_u.$$

Тогда:

$$B_0 = \frac{\Delta u S_0 - C_u}{1 + r\Delta t}.$$

## Цена реплицирующего портфеля

Сегодня стоимость портфеля:

$$\Pi_0 = \Delta S_0 - B_0.$$

Так как портфель точно повторяет опцион:

$$C_0 = \Pi_0.$$

## Почему появляется формула с ожиданием

После плавных телодвижений получаем:

$$C_0 = \frac{1}{1 + r\Delta t} (qC_u + (1 - q)C_d),$$

где

$$q = \frac{(1 + r\Delta t) - d}{u - d}.$$