— -01-24

26 2025 .

0. ,

?

( ) — $\{B(t)\}_{t\geq 0}$,

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)\,B(t), \quad r(t)$$ —

.

$$B(0) = 1.$$

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right).$$

$r(t) \equiv r$:

$$B(t) = e^{rt}.$$

( ) $B(t)$, ,
r. :

- -
- -
- **Numeraire —**

$[0, T]$ Δt:

$$0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \ldots,\ n\Delta t = T, \qquad \Delta t = \frac{T}{n}.$$

,

$$B(t + \Delta t) = B(t)\big(1 + r\Delta t\big).$$

n

$$B(T) = B(0)\,(1 + r\Delta t)^n.$$

$\Delta t \to 0$ ($n \to \infty$),

$$\lim_{\Delta t \to 0} (1 + r\Delta t)^{T/\Delta t} = e^{rT}.$$

,

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = rB(t).$$

$B(0) = 100\,000$, :

$r = 16,5\% = 0.165.$

$(T = 1)$.

1. 1 ( ):

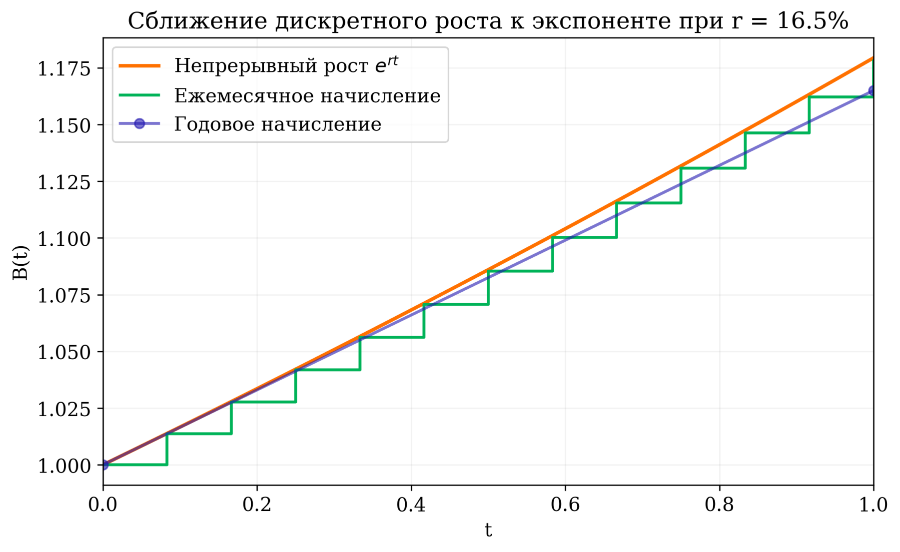
$$B_1(1) = 100\,000\left(1 + \frac{0.16}{1}\right)^1 = 100\,000 \cdot 1.16 = \mathbf{116\,000} \qquad .$$

2. $(n = 12)$:

$$B_{12}(1) = 100\,000\left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{12} \approx 100\,000 \cdot 1.17180 \approx \mathbf{117\,180} \qquad .$$

3. $(n \to \infty)$:

$$B_{\mathsf{cont}}(1) = 100\,000\,e^{0.16} \approx 100\,000 \cdot 1.17351 \approx \mathbf{117\,351} \qquad .$$



Сближение дискретного роста к экспоненте при r = 16.5%
Непрерывный рост e^{rt}
Ежемесячное начисление
Годовое начисление
B(t)
1.175
1.150
1.125
1.100
1.075
1.050
1.025
1.000
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t

$$\overbrace{116\,000}^{B_1(1)} < \overbrace{117\,180}^{B_{12}(1)} < \overbrace{117\,351}^{B_{\mathsf{cont}}(1)}$$

- — .
- , .
- : e^r.

— .

1.

1/3

, , 100 .
?

2/3

, , 100 .
?

: 99, 101, 98.5, 105 — , .

, , 100 .
?

: 99, 101, 98.5, 105 — , .
— , — , .

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

— $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

1. Ω — ( );
2. $\mathcal{F}$ — σ- , Ω, ;
3. $\mathbb{P}$ — , $A \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(A)$ $[0, 1]$

.