Хэджирование с помощью опционов

Выгузов Алексей — ЭКРмд-01-24

27 ноября 2025 г.

0. Банковский счёт, экспонента и интеграл

Что такое банковский счёт?

Определение

Банковский счёт (безрисковый актив) — это детерминированный процесс $\{B(t)\}_{t\geq 0}$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)\,B(t), \quad r(t) \text{ — известная безрисковая ставка.}$$

Начальное условие принято задавать как $B(0) = 1$. Тогда решение имеет вид

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right).$$

При постоянной ставке $r(t) \equiv r$ получаем классическую формулу:

$$B(t) = e^{rt}.$$

Банковский счёт

Банковский счёт (безрисковый актив) определяется как процесс $B(t)$, описывающий эволюцию капитала, размещённого под фиксированную и заранее известную процентную ставку r. Он обладает следующими свойствами:

- **Детерминированность** - все значения заранее известны
- **Отсутствие риска дефолта** - гарантированная выплата
- **Numeraire** — используется для оценки стоимости других активов

Что означает эта формула

Пусть промежуток времени $[0, T]$ разбит на равные отрезки длины Δt:

$$0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \ldots,\ n\Delta t = T, \qquad \Delta t = \frac{T}{n}.$$

Будем предполагать, что за один малый шаг времени капитал изменяется по правилу

$$B(t + \Delta t) = B(t)\big(1 + r\Delta t\big).$$

После n шагов имеем

$$B(T) = B(0)\,(1 + r\Delta t)^n.$$

Что означает эта формула

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ (то есть при $n \to \infty$), получаем

$$\lim_{\Delta t \to 0} (1 + r\Delta t)^{T/\Delta t} = e^{rT}.$$

Таким образом, в пределе дискретная динамика переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = rB(t).$$

Пример

Пусть на банковском счёте лежит сумма $B(0) = 100\,000$ рублей,а годовая ставка равна ключевой ставке ЦБ РФ: $r = 16,5\% = 0.165$.

Рассчитаем рост капитала за один год $(T = 1)$ при разных схемах начисления.

Решение

1. Капитализация 1 раз в год (линейная модель):

$$B_1(1) = 100\,000\left(1 + \frac{0.16}{1}\right)^1 = 100\,000 \cdot 1.16 = \mathbf{116\,000} \text{ рублей.}$$

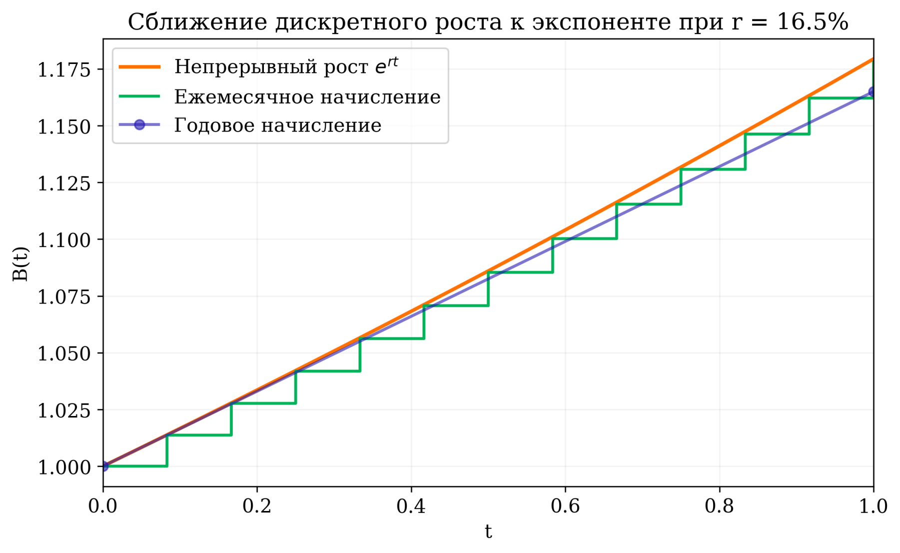
2. Капитализация раз в месяц ($n = 12$):

$$B_{12}(1) = 100\,000\left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{12} \approx 100\,000 \cdot 1.17180 \approx \mathbf{117\,180} \text{ рублей.}$$

3. Непрерывное начисление ($n \to \infty$):

$$B_{\text{cont}}(1) = 100\,000\, e^{0.16} \approx 100\,000 \cdot 1.17351 \approx \mathbf{117\,351} \text{ рублей.}$$

График



Сближение дискретного роста к экспоненте при r = 16.5%
Непрерывный рост e^{rt}
Ежемесячное начисление
Годовое начисление
B(t)
t
1.000
1.025
1.050
1.075
1.100
1.125
1.150
1.175
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Сравнение результатов

$$\overbrace{116\,000}^{B_1(1)} < \overbrace{117\,180}^{B_{12}(1)} < \overbrace{117\,351}^{B_{\text{cont}}(1)}$$

- При простой схеме процент не капитализируется — итог меньше всех.
- Чем чаще происходит капитализация, тем выше итоговая сумма.
- Непрерывный рост даёт теоретический максимум: e^r.

Рост ускоряется со временем — экспоненциальный эффект.

1. Случайность и риск

Цена завтра 1/3

Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.
Что будет с этой ценой завтра?

Цена завтра 2/3

Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.
Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

Цена завтра 3/3

Пример

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.
Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

Цена актива — это случайная величина, а будущее рынка — это множество возможных исходов, которыми мы должны уметь работать.

Риск и принятие решений

- Финансовые решения принимаются **сегодня**, а результат проявляется **в будущем**.
- Завтрашняя цена неизвестна $\rightarrow$ каждое решение связано с неопределённостью.
- **Риск** возникает тогда, когда итог зависит от того, какой сценарий реализуется.
- Чтобы принимать осмысленные решения, нужно понимать:
  - какие исходы возможны;
  - каковы их вероятности;
  - какие убытки или прибыли они несут.
- Модели риска (в т.ч. биномиальная модель и дельта-хедж) — инструменты управления этой неопределённостью.

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

2. Теория вероятностей как язык

Вероятностное пространство

Определение

Вероятностное пространство — это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где

1. Ω — множество всех возможных исходов (пространство элементарных событий);
2. $\mathcal{F}$ — σ-**алгебра** событий, то есть множество подмножеств Ω, для которых определены вероятности;
3. $\mathbb{P}$ — функция вероятности, каждому событию $A \in \mathcal{F}$ ставит число $\mathbb{P}(A)$ в интервале $[0, 1]$ и удовлетворяет аксиомам вероятности.

Теория вероятностей как язык (формально)

Вероятностное пространство задаётся тремя объектами:

1. **Множество исходов** (возможные будущие состояния рынка):

$$\Omega = \{\text{up}, \text{down}, \text{flat}\}.$$

2. **Система событий** — все наблюдаемые комбинации исходов:

$$\mathcal{F} = \sigma(\{\text{up}\}, \{\text{down}\}, \{\text{flat}\}).$$

3. **Вероятностная мера**:

$$P(\text{up}) = 0.3, \quad P(\text{down}) = 0.4, \quad P(\text{flat}) = 0.3.$$

Получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

3. Почему банкам нужно хеджирование

Почему банкам нужно хеджирование

- Банк подвержен рыночным рискам:
  - процентным,
  - валютным,
  - фондовым.
- Проданные клиентам опционы создают **нелинейный** P&L.
- Малые изменения цены базового актива могут вызывать крупные колебания результата.
- Хеджирование — инструмент стабилизации P&L в условиях рыночной неопределённости.

Что такое хеджирование

- **Хеджирование** — снижение риска за счёт корректирующей позиции.
- Не цель заработка, а цель — **стабилизация P&L**.
- Компенсация чувствительности портфеля к изменениям цены.
- Основная идея: нейтрализовать влияние случайных движений рынка.

4. Опционы

Что такое опцион?

Определение

Опцион — это финансовый контракт, который даёт его владельцу **право**, но не обязанность,совершить определённое действие в будущем.

- либо **купить** базовый актив по фиксированной цене,
- либо **продать** базовый актив по фиксированной цене.

Это ключевая характеристика:

- Покупатель опциона принимает решение *после того, как узнает рыночную цену*.
- Продавец опциона, наоборот, берёт на себя **обязательство** выполнить решение покупателя.

Поэтому покупатель всегда платит премию, а продавец её получает.

Вспомогательные обозначения 1/3

- **Страйк (K)** — это заранее установленная цена сделки, по которой действует право опциона

Вспомогательные обозначения 2/3

- **Страйк (K)** — это заранее установленная цена сделки, по которой действует право опциона
- **Экспирация (T)** — момент времени, когда право может быть использовано (европейский стиль). В момент T определяется конечная выплата опциона.

Вспомогательные обозначения 3/3

- **Страйк (K)** — это заранее установленная цена сделки, по которой действует право опциона
- **Экспирация (T)** — момент времени, когда право может быть использовано (европейский стиль). В момент T определяется конечная выплата опциона.

Определение(Формальное)

Опцион — это право совершить операцию по цене K в момент времени T, когда уже известно фактическое значение цены S_T.

Виды опционов

Call-опцион — право *купить* актив по цене K.

- выгоден, если $S_T > K$;
- не нужен, если $S_T \leq K$.

Put-опцион — право *продать* актив по цене K.

- выгоден, если $S_T < K$;
- не используется, если $S_T \geq K$.

Лонги и шорты

- **Long Call**: вы покупаете право купить. Платите премию.
- **Short Call**: вы продаёте право купить. Получаете премию.
- **Long Put**: вы покупаете право продать. Платите премию.
- **Short Put**: вы продаёте право продать. Получаете премию.

(!!!) Здесь важно не перепутать: long и short в опционах — это не владение активом, а владение **правом** или **обязательством**.

Лонги и шорты

- **Long Call**: вы покупаете право купить. Платите премию.
- **Short Call**: вы продаёте право купить. Получаете премию.
- **Long Put**: вы покупаете право продать. Платите премию.
- **Short Put**: вы продаёте право продать. Получаете премию.

(!!!) Здесь важно не перепутать: long и short в опционах — это не владение активом, а владение **правом** или **обязательством**.

- Покупатель (long) имеет право и ограниченный риск.
- Продавец (short) имеет обязательство и потенциально неограниченный риск.

Немного формализма...

(выводим формулки наглядно)

Call

Держатель call-опциона имеет право купить актив по K. Рассмотрим возможные действия в зависимости от цены S_T:

$$\begin{cases} \text{если } S_T \leq K, \text{ право не нужно} \Rightarrow \text{выплата } 0, \\ \text{если } S_T > K, \text{ покупаем по } K \text{ и продаём по } S_T \Rightarrow S_T - K. \end{cases}$$

Это кусочная функция, которую компактно записывают как

$$\text{Payoff}_{\text{call}} = \max(S_T - K, 0).$$

Put

Держатель put имеет право продать по K:

$$\begin{cases} \text{если } S_T \geq K, & \text{право не нужно} \Rightarrow \text{выплата } 0, \\ \text{если } S_T < K, & \text{продаём по } K \text{ то, что стоит } S_T \Rightarrow K - S_T. \end{cases}$$

Компактная запись:

$$\text{Payoff}_{\text{put}} = \max(K - S_T, 0).$$

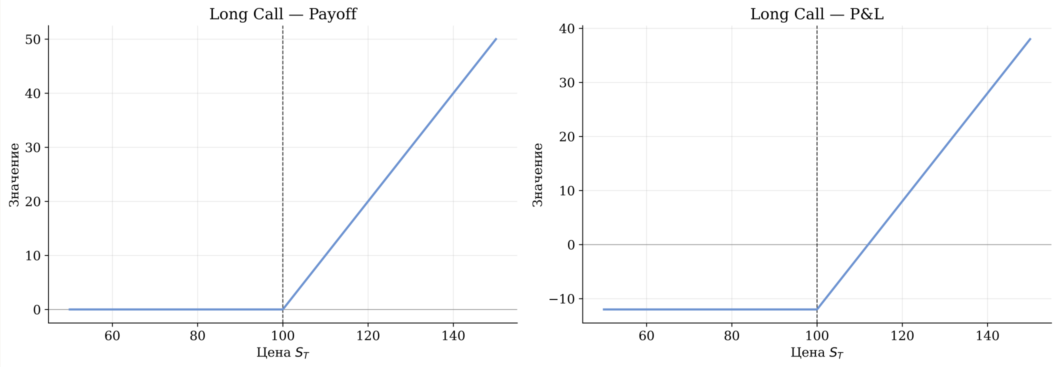
Все позиции

Теперь запишем четыре фундаментальные позиции:

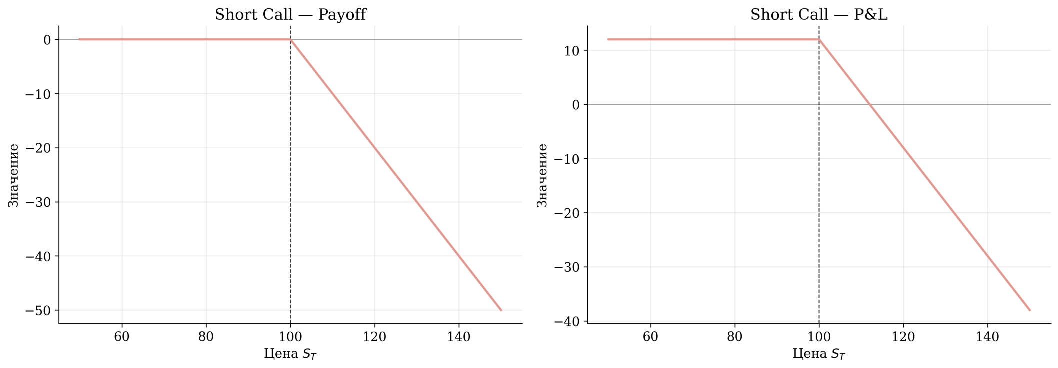
$$\begin{cases} \text{Payoff}_{\text{Long Call}} & = \max(S_T - K, 0), \\ \text{Payoff}_{\text{Short Call}} & = -\max(S_T - K, 0), \\ \text{Payoff}_{\text{Long Put}} & = \max(K - S_T, 0), \\ \text{Payoff}_{\text{Short Put}} & = -\max(K - S_T, 0). \end{cases}$$

Минус означает обязательство выплатить то, что получает покупатель.

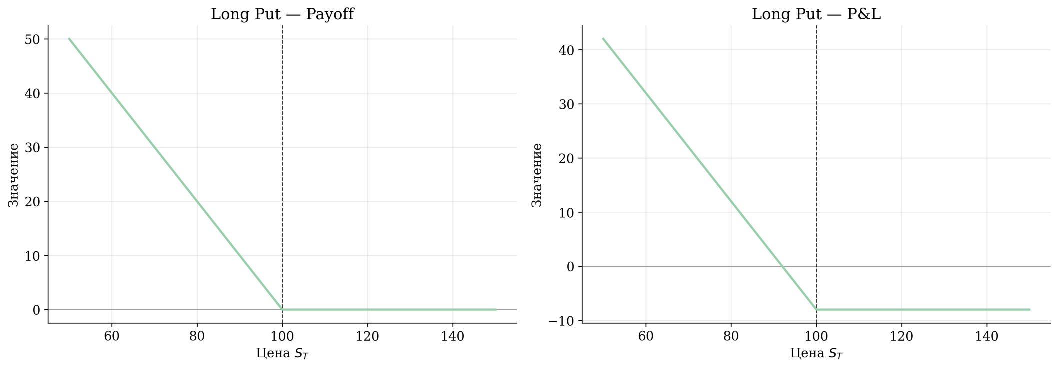
Payoff - Long Call $\max(S_T - K, 0)$



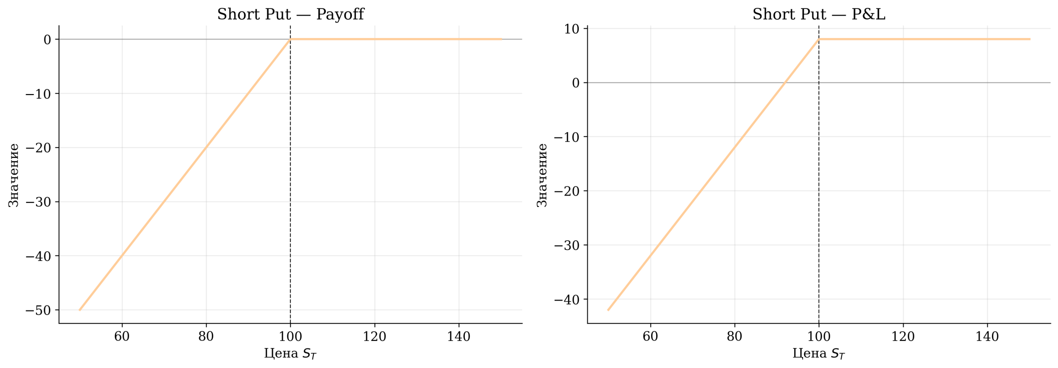
Payoff - Short Call $-\max(S_T - K, 0)$



Payoff - Long Put $\max(K - S_T, 0)$



Payoff - Short Put $-\max(K - S_T, 0)$



Пример

Пусть базовый актив имеет возможные цены на экспирации:

$$S_T \in \{80,\ 100,\ 130\}.$$

Возьмём страйк $K = 100$. Тогда для каждого сценария вычислим выплаты: Теперь для каждого S_T вычислим выплаты по четырём фундаментальным позициям:

Long Call (LC), Short Call (SC), Long Put (LP), Short Put (SP).

CALL-OPTION

1. Long Call по определению:

$$\text{Payoff}_{LC}(S_T) = \max(S_T - K, 0).$$

$$S_T = 80: \quad \max(80 - 100, 0) = 0,$$
$$S_T = 100: \quad \max(100 - 100, 0) = 0,$$
$$S_T = 130: \quad \max(130 - 100, 0) = 30.$$

2. Short Call - продавец call обязуется выплатить покупателю противоположный результат:

$$\text{Payoff}_{SC}(S_T) = -\max(S_T - K, 0).$$

$$S_T = 80: \quad 0,$$
$$S_T = 100: \quad 0,$$
$$S_T = 130: \quad -30.$$

PUT-OPTION

3. Long Put - по определению:

$$\text{Payoff}_{LP}(S_T) = \max(K - S_T, 0).$$

$$\begin{aligned} S_T = 80: &\quad \max(100 - 80, 0) = 20, \\ S_T = 100: &\quad \max(100 - 100, 0) = 0, \\ S_T = 130: &\quad \max(100 - 130, 0) = 0. \end{aligned}$$

4. Short Put - по оперделению продавец put получает результат со знаком «минус»:

$$\text{Payoff}_{SP}(S_T) = -\max(K - S_T, 0).$$

$$\begin{aligned} S_T = 80: &\quad -20, \\ S_T = 100: &\quad 0, \\ S_T = 130: &\quad 0. \end{aligned}$$

Итог

S_T	LC	SC	LP	SP
80	0	0	20	-20
100	0	0	0	0
130	30	-30	0	0

- При низкой цене ($S_T = 80$) ценность имеет только put: право продать по 100 приносит 20.
- Вблизи страйка ($S_T = 100$) все опционы на границе — payoff равен нулю.
- При высокой цене ($S_T = 130$) ценность имеет только call: право купить за 100 и продать за 130 даёт 30.

Модели ценообразования
Биномиальная модель

ОФФ-ТОП. Что такое бином Ньютона?

Оффтоп: что такое бином Ньютона (интуитивно)

Бином Ньютона — это формула, которая описывает разложение выражения $(a + b)^n$.

- при раскрытии скобок мы выбираем n раз — берём a или b;
- каждая комбинация даёт одно слагаемое вида $a^k b^{n-k}$;
- количество таких комбинаций определяется тем, *сколько способов выбрать k раз a среди n шагов*;
- поэтому в формуле появляются биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$.

Главная идея: $(a + b)^n$ — **это сумма всех возможных комбинаций выбора a и b по n раз**.

Бином Ньютона: формула и связь с вероятностью

Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Биномиальный коэффициент:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Интуиция случайности: монетка

Самый простой случайный объект — обычная монета. Каждый подброс даёт один из двух исходов:

$$\Omega = \{\text{орёл}, \ \text{решка}\}.$$

Каждый исход сам по себе не особенно интересен. Но если подбросить монету много раз, начинаются закономерности.

- при 10 бросках мы ожидаем примерно 5 орлов;
- при 1000 бросках — около 500;
- но каждый конкретный эксперимент даёт немного другое число.

Отдельный исход непредсказуем, но совокупное поведение имеет структуру.

Что такое случайная величина (формально)

Случайная величина — это **не «случайное число»**. Это *функция*, которая каждому исходу ставит в соответствие число:

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Каждый исход $\omega \in \Omega$ отображается в значение $\xi(\omega)$. Примеры:

- Подбрасываем монету 5 раз: исход — последовательность из H/T. Случайная величина:

$$X(\omega) = \text{число орлов в исходе } \omega.$$

- В финансах S_T — тоже случайная величина:

$$S_T(\omega) = \text{цена актива в момент } T.$$

Случайная величина — это правило, которое превращает исходы в числа.

Что такое распределение случайной величины

Интуитивно: распределение — это закон того, *как часто* случайная величина принимает различные значения.

Формально: распределение — это мера на $\mathbb{R}$, индуцированная отображением ξ:

$$P_\xi(A) = P\big(\xi^{-1}(A)\big).$$

- Чтобы узнать вероятность того, что $\xi \in A$, надо взять все исходы ω, которые приводят к этому событию.
- Распределение описывает структуру случайной величины то есть какие значения и с какими вероятностями она может принимать.

Биномиальное распределение: постановка задачи

Задача. Какова вероятность того, что при 5 подбрасываниях монеты ровно 3 раза выпадет орёл? Определим параметры:

- число испытаний: $n = 5$;
- число «успехов»: $k = 3$;
- вероятность успеха: $p = \frac{1}{2}$;
- вероятность неуспеха: $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.

Общая формула биномиального распределения:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \, q^{\,n-k}.$$

В нашем случае:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Биномиальное распределение: решение

Вычислим биномиальный коэффициент:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = 10.$$

Тогда вероятность равна:

$$P(X = 3) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

Ответ: $\frac{5}{16}$.

От монетки к финансовой логике

Представим теперь не монетку, а цену актива.
Сегодня цена равна S_0. Завтра будет один из двух сценариев:

$$S_T \text{ чуть выше,} \quad \text{или} \quad S_T \text{ чуть ниже}$$

в каждый маленький промежуток времени цена может сделать один из нескольких типичных шагов.
Монетка — это аналогия:

- орёл $\iff$ цена выросла;
- решка $\iff$ цена упала.

Пример

Пусть акция стоит 100 сегодня.

Завтра она:

- либо *чуть подрастёт* — например, до 102;
- либо *чуть просядет* — например, до 98.

Мы не знаем, какой сценарий произойдёт. Но важно другое: **нам известны возможные варианты, и каждый из них имеет вероятность**.

Это позволяет:

- строить сценарии будущего,
- оценивать риск,
- моделировать выплаты опционов,
- и — главное — строить хедж.

Почему двух сценариев достаточно?

На очень маленьком промежутке времени поведение цены похоже на подброс монетки:

- цена делает **маленький стандартный шаг вверх** (реакция на новости, ликвидность, дисбаланс ордеров);
- или **маленький стандартный шаг вниз**.

Это не означает, что цена *реально* может принимать только два значения. Это означает, что **для моделирования одного короткого шага двух вариантов достаточно**.

Как вводится биномиальная модель

Пусть сегодня цена актива равна S_0. Тогда через один шаг времени:

$$S_1 = \begin{cases} uS_0, \\ dS_0, \end{cases} \qquad \text{где } u > d > 0.$$

- Любой рост можно записать как

$$u = \frac{S_1(up)}{S_0};$$

- любое падение можно записать как

$$d = \frac{S_1(down)}{S_0}.$$

То есть u и d — это **относительные изменения цены**, а не произвольные параметры: они = «во сколько раз цена изменилась».

Интерпретация параметров u и d

Если сегодня цена $S_0 = 100$, и завтра она может быть:

$$S_1(up) = 105 \qquad S_1(down) = 97 \quad \rightarrow \begin{cases} u = \frac{105}{100} = 1.05, \\ d = \frac{97}{100} = 0.97. \end{cases}$$

То есть $u - 1$ — относительный рост (завтра +5%), $1 - d$ — относительное падение (завтра -3%)

Одношаговая биномиальная модель цены

Теперь у нас есть два возможных будущих значения цены:

$$S_1 = uS_0 \quad \text{или} \quad S_1 = dS_0.$$

Эта структура визуализируется как биномиальное дерево:

$$S_0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} uS_0 & \text{(рост)} \\ dS_0 & \text{(падение)} \end{cases}$$

где $u > d > 0$. Это — **один временной шаг** модели. Вся дальнейшая конструкция строится путём повторения этого шага.

Реальные вероятности роста и падения

Чтобы модель стала вероятностной, задаём вероятность каждого сценария:

$$P(\text{рост}) = p, \qquad P(\text{падение}) = 1 - p,$$

где $0 < p < 1$. Что означает параметр p?

- Если $p > \frac{1}{2}$ — ожидаемое движение вверх сильнее.
- Если $p < \frac{1}{2}$ — рынок смотрит вниз.
- Если $p = \frac{1}{2}$ — модель симметрична (как монетка).

Реальные вероятности *не участвуют в цене опциона*. Но они нужны, чтобы вообще понимать структуру случайности.

Банковский счёт на одном шаге

Пусть банковский счёт приносит известную ставку r на временном шаге Δt.

Тогда его динамика:

$$B_1 = B_0(1 + r\Delta t).$$

Это значение фиксировано — тут нет случайности. Почему это важно?

- Банк — это **эталон** стоимости.
- Через B_t мы сравниваем все будущие денежные потоки.
- При ценообразовании опциона мы будем «дисконтировать» выплаты именно через B_t.

Отсутствие арбитража в одном шаге

Арбитраж — это стратегия, которая даёт **безрисковую прибыль из воздуха**. В корректной модели такого быть не должно.

В одном шаге у нас есть три доходности:

$$\text{рост: } u, \qquad \text{падение: } d, \qquad \text{банк: } 1 + r\Delta t.$$

Условие отсутствия арбитража:

$$\boxed{d < 1 + r\Delta t < u}$$

Интуиция:

- если $1 + r\Delta t \leq d$ — выгоднее шортить актив и держать деньги в банке $\to$ бесплатная прибыль;
- если $1 + r\Delta t \geq u$ — выгоднее занимать под r и покупать актив $\to$ опять бесплатная прибыль.

Цена call-опциона в одном шаге

В вершине дерева после одного шага возможны две выплаты:

$$C_u, \quad C_d.$$

Тогда справедливая (безарбитражная) цена сегодня равна:

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{1 + r\Delta t}\Big(qC_u + (1-q)C_d\Big)}$$

Интерпретация:

- берём **матожидание выплаты** при риск-нейтральной вероятности q;
- **дисконтируем** через банковский счёт;
- получаем единственную возможную цену без арбитража.

Это фундаментальная формула всей финансовой математики в дискретном времени.