Банковский счёт, экспонента и интеграл

Банковский счёт (безрисковый актив) — это детерминированный процесс $\{B(t)\}_{t\geq 0}$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)\,B(t),$$

где $r(t)$ — известная безрисковая ставка. Начальное условие принято задавать как $B(0) = 1$. Тогда решение имеет вид

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right).$$

При постоянной ставке $r(t) \equiv r$ получаем классическую формулу:

$$B(t) = e^{rt}.$$

Банковский счёт — самый простой актив в финансах, который растёт полностью детерминированно: если положить деньги под ставку r, мы заранее знаем, сколько получим через любое время t.

Именно поэтому банковский счёт используется как «линейка стоимости»: все рискованные активы сравниваются с ним. Если актив растёт быстрее e^{rt} — это риск, если медленнее — это невыгодно, а равенство означает полное отсутствие риска. Все модели хеджирования и оценки опционов строятся относительно банковского счёта. Это безрисковый актив, относительно которого мы впоследствии будем измерять стоимость любых рискованных инструментов: акций, облигаций, фьючерсов и, конечно, опционов.

Предположим, что ставка процента равна r. Тогда за малый промежуток времени Δt баланс на счёте изменяется по простой формуле:

$$B(t+\Delta t) = B(t)\,\big(1 + r\,\Delta t\big).$$

Пусть промежуток времени $[0, T]$ разбит на равные отрезки длины Δt:

$$0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ \ldots,\ n\Delta t = T, \qquad \Delta t = \frac{T}{n}.$$

Будем предполагать, что за один малый шаг времени капитал изменяется по правилу

$$B(t+\Delta t) = B(t)\big(1 + r\Delta t\big).$$

После n шагов имеем

$$B(T) = B(0)\,(1 + r\Delta t)^n.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ (то есть при $n \to \infty$), получаем

$$\lim_{\Delta t\to 0}(1 + r\Delta t)^{T/\Delta t} = e^{rT}.$$

Таким образом, в пределе дискретная динамика переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{dB(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} = rB(t).$$

То есть за каждый маленький интервал времени счёт увеличивается на пропорциональную долю от текущего уровня. Но в реальности проценты начисляются непрерывно, а не рывками. Поэтому мы уменьшаем длину интервала Δt всё сильнее, стремим её к нулю и смотрим на поведение процесса в предельном смысле. Это уравнение выражает идею: скорость роста банковского счёта в любой момент времени пропорциональна его текущему значению.

Пусть $B(0) = 100$ и ставка $r = 10\%$ в год.

$$B_1(1) = 100\,000\left(1 + \frac{0.16}{1}\right)^1 = 100\,000 \cdot 1.16 = \mathbf{116\,000} \text{ рублей.}$$

2. Сложные проценты: капитализация раз в год ($n = 1$):

$$B_{12}(1) = 100\,000\left(1 + \frac{0.16}{12}\right)^{12} \approx 100\,000 \cdot 1.17180 \approx \mathbf{117\,180} \text{ рублей.}$$

3. Непрерывное начисление ($n \to \infty$):

$$B_{\text{cont}}(1) = 100\,000\,e^{0.16} \approx 100\,000 \cdot 1.17351 \approx \mathbf{117\,351} \text{ рублей.}$$

Важно: рост ускоряется со временем — именно это и есть **экспоненциальный эффект**.

Даже в **самой простой** финансовой конструкции — банковском счёте — уже присутствуют экспонента и интеграл. Это означает, что без инструментов анализа финансовая математика невозможна в принципе. Почему это так критично? Потому что банковский счёт играет роль **эталона** для всех остальных активов. Рискованные активы — акции, деривативы, валюты — оцениваются относительно этого детерминированного, предсказуемо растущего инструмента.

И далее вся архитектура финансовой математики строится на следующей идее: существует актив, который растёт как e^{rt}, и мы сравниваем с ним поведение всех других инструментов. Это фундамент для понятий **дисконтирования**, **отсутствия арбитража** и, в конечном счёте, для механики **хеджирования опциона**.

1. Случайность, риск и зачем тут математика

Представим, что у нас есть акция, которая сегодня стоит 100 рублей.Что будет с этой ценой завтра?

На самом деле вариантов бесконечно много: 99, 101, 98.5, 105 — любое число, и заранее мы его не знаем.

Важно понять: даже если у нас есть прогнозы, аналитики, графики, новости — рынок всё равно остаётся случайным. Каждое завтрашнее значение цены — это реализация некоторого случайного исхода, который мы можем описать только вероятностно.

В финансах мы никогда не спрашиваем:«Какая завтра будет цена?» Это вопрос без смысла.

Мы спрашиваем:«Какие ценовые сценарии возможны? Каковы их вероятности?»

Потому что именно вероятности определяют: насколько рискован актив, сколько мы можем потерять, как нам строить хеджирующую стратегию. И вот здесь появляется ключевая идея: цена актива — это случайная величина, а будущее рынка — это множество возможных исходов, которыми мы должны уметь работать.

В финансах решения всегда принимаются заранее. Если я покупаю актив сегодня — я фиксирую цену сегодня, но результат увижу только завтра или через месяц.

Проблема в том, что будущее неизвестно. Цена может вырасти, может упасть, может остаться прежней.

Поэтому любое решение — купить, продать, держать, хеджировать — всегда делается в условиях неопределённости.

И вот здесь возникает ключевое понятие: риск.

Риск — это не обязательно “потеря денег”. Риск — это ситуация, в которой результат моего решения зависит от того, какой именно исход реализуется в будущем.

Покупая актив, я фактически делаю ставку на то, что завтра реализуется благоприятный сценарий. Но поскольку существует и неблагоприятный сценарий, я автоматически получаю риск.

Отсюда следует очень практический вывод:

Чтобы принимать осмысленные финансовые решения, нужно понимать распределение будущих исходов.

Без этого невозможно:

- оценить убытки,
- сравнить инструменты,
- построить стратегию,
- либо управлять рисками.

фундамент мотивации для моделей, которые мы дальше будем строить: биномиальная модель, риск-нейтральная мера, дельта-хедж — всё это способы управлять последствиями будущей неопределённости.

двлее тервер

terver

Сейчас я покажу вам очень важный момент. То, что мы называем «случайностью рынка», можно формализовать в три шага. Настолько просто и быстро, что после этого вы увидите, что вся теория опционов — это на самом деле аккуратная работа с тремя объектами.

Шаг 1. Множество исходов — Ω. Это все возможные сценарии рынка завтра.Это пространство всех будущих «всех миров», которые может выбрать рынок.

Шаг 2. События — $\mathcal{F}$. Это не отдельные исходы, а наборы исходов, которые нас интересуют.

1. рынок вырастет $\to$ {up};
2. рынок изменится $\to$ {up,down};
3. рынок изменится $\to$ {up,down};

Именно такие объединения образуют σ-алгебру. Почему σ? Потому что события должны быть замкнуты относительно счетных объединений, пересечений и дополнений. То есть: если мы можем наблюдать события A и B, то мы обязаны иметь возможность наблюдать.

Шаг 3. Вероятность — P. Теперь каждому событию мы назначаем число от 0 до 1 — «вес» сценария. Например:

$$P(\text{up}) = 0.3, \quad P(\text{down}) = 0.4, \quad P(\text{flat}) = 0.3.$$

Это и есть мера вероятности.

Почему банкам нужно хеджироваться

Теперь, когда мы увидели, что цены — случайные, а решения принимаются заранее, давайте посмотрим, почему именно банк — не инвестор, не спекулянт — должен хеджировать риски.

Банк работает с большим количеством рыночных факторов: процентные ставки, валюты, фондовый рынок, сырьевые активы. Каждый из этих факторов меняется случайно, и каждый напрямую влияет на стоимость позиций банка.

Особенно важен случай с опционами. Опцион — это инструмент с нелинейным профилем выплаты. Когда банк продаёт клиенту опцион, он получает премию сегодня, но берёт на себя обязательство, результат которого будет сильно зависеть от будущей цены — да ещё и нелинейно.

Из-за этой нелинейности маленькое движение цены может сильно изменить P&L банка. Получается, что даже если базовый актив меняется чуть-чуть, итоговый результат по проданному опциону может меняться очень резко.

Поэтому банку нужно управлять чувствительностью портфеля к движению рынка — дельтой, гаммой, вегой. И самый базовый инструмент — дельта-хеджирование, о котором мы будем говорить дальше.

Что значит хеджироваться

Хеджирование — это не попытка угадать рынок и не способ получить прибыль, а инструмент, который уменьшает влияние случайности на результат.

Когда у банка есть позиция, которая чувствительна к цене базового актива, банк может открыть корректирующую позицию — такую, которая компенсирует эту чувствительность.

Идея очень простая:

1. есть риск
2. добавляем позицию, которая ведёт себя противоположно
3. риск уменьшается или исчезает

Цель хеджирования — не максимизация прибыли, а стабилизация итогового результата, чтобы P&L не прыгал из-за движения рынка.

В контексте опционов это означает: если опцион даёт нелинейный риск, мы должны подобрать комбинацию базовых активов так, чтобы его нейтрализовать. В простейшем случае — это дельта-хедж.

Опционы: определения, логика, формулы и примеры

Что такое опцион

Опцион — это финансовый контракт, который даёт его владельцу **право**, но не обязанность,совершить определённое действие в будущем:

- либо **купить** базовый актив по фиксированной цене,
- либо **продать** базовый актив по фиксированной цене.

Это ключевая характеристика: покупатель опциона принимает решение *после того, как узнает рыночную цену*. Если выгодно — он использует право. Если нет — просто отказывается.

Продавец опциона, наоборот, берёт на себя **обязательство** выполнить решение покупателя. Поэтому покупатель всегда платит премию, а продавец её получает.

Страйк и дата экспирации

Страйк (K) — это заранее установленная цена сделки, по которой действует право опциона. **Экспирация (T)** — момент времени, когда право может быть использовано (европейский стиль). В момент T определяется конечная выплата опциона. Таким образом, опцион — это право совершить операцию по цене K в момент времени T, когда уже известно фактическое значение цены S_T.

3.3. Два базовых типа: Call и Put

Call-опцион — право *купить* актив по цене K.

- выгоден, если $S_T > K$;
- не нужен, если $S_T \leq K$.

Put-опцион — право *продать* актив по цене K.

- выгоден, если $S_T < K$;
- не используется, если $S_T \geq K$.

всего лишь фундаментальные конструкции, но вся финансовая инженерия построена на их комбинациях.

Что значит Long и Short в опционах

Здесь важно не перепутать: long и short в опционах — это не владение активом, а владение **правом** или **обязательством**.

- **Long Call**: вы покупаете право купить. Платите премию.
- **Short Call**: вы продаёте право купить. Получаете премию.
- **Long Put**: вы покупаете право продать. Платите премию.
- **Short Put**: вы продаёте право продать. Получаете премию.

Покупатель (long) имеет право и ограниченный риск. Продавец (short) имеет обязательство и потенциально неограниченный риск.

3.5. Логика вывода формул payoff

Теперь аккуратно выведём все формулы выплат, не просто запоминая их, а понимая, как они рождаются из логики принятия решений.

Call

Удержатель call-опциона имеет право купить актив по K. Рассмотрим возможные действия в зависимости от цены S_T:

$$\begin{cases} \text{если } S_T \leq K, & \text{право не нужно} \Rightarrow \text{выплата } 0, \\ \text{если } S_T > K, & \text{покупаем по } K \text{ и продаём по } S_T \Rightarrow S_T - K. \end{cases}$$

Это кусочная функция, которую компактно записывают как

$$\text{Payoff}_{\text{call}} = \max(S_T - K, 0).$$

Put

Удержатель put имеет право продать по K:

$$\begin{cases} \text{если } S_T \geq K, & \text{право не нужно} \Rightarrow \text{выплата } 0, \\ \text{если } S_T < K, & \text{продаём по } K \text{ то, что стоит } S_T \Rightarrow K - S_T. \end{cases}$$

Компактная запись:

$$\text{Payoff}_{\text{put}} = \max(K - S_T, 0).$$

Payoff формулы (long/short)

Теперь запишем четыре фундаментальные позиции:

$$\text{Payoff}_{\text{Long Call}} = \max(S_T - K, 0),$$
$$\text{Payoff}_{\text{Short Call}} = -\max(S_T - K, 0),$$
$$\text{Payoff}_{\text{Long Put}} = \max(K - S_T, 0),$$
$$\text{Payoff}_{\text{Short Put}} = -\max(K - S_T, 0).$$

Минус означает обязательство выплатить то, что получает покупатель.

Расчёт payoff для всех четырёх позиций

Пусть базовый актив имеет возможные цены на экспирации:

$$S_T \in \{80,\ 100,\ 130\}.$$

Возьмём страйк $K = 100$. Тогда для каждого сценария вычислим выплаты:

S_T	Long Call	Short Call	Long Put	Short Put
80	0	0	20	−20
100	0	0	0	0
130	30	−30	0	0

- При $S_T = 80$ call-опционы бесполезны, а put дают выгоду $100 - 80 = 20$.
- При $S_T = 100$ оба типа опционов на границе — payoff равен нулю.
- При $S_T = 130$ call даёт $130 - 100 = 30$, а put бесполезен.

Эта таблица показывает:

- где появляется выгода,
- где появляется обязательство,
- почему формулы именно такие.
- почему продавец опциона несёт потенциально большой риск,

Зачем? Переход к binomial

В предыдущем блоке мы увидели, что структура выплат по опционам — это кусочные функции:они резко меняются при переходе цены через страйк. Особенно это важно для продавца call и put: его P&L может быть крайне чувствительным к изменениям цены базового актива.

Возникает естественный вопрос:

Как вообще меняется цена базового актива и как описать её движение математически?

Чтобы рассчитывать стоимость опциона или хеджировать проданную позицию, нам нужно понять:

- какие движения цены возможны;
- насколько сильно они могут отличаться от текущего уровня;
- как на эти движения реагирует payoff опциона;

- можно ли собрать портфель, который «компенсирует» эти колебания.

Полная непрерывная модель (вроде модели Блэка–Шоулза) требует дифференциальных уравнений и стохастического анализа. Но существует простая модель, с которой начинается вся финансовая математика, — **биномиальная модель движений цены**.

Она достаточна для:

- понимания природы риска;
- объяснения хеджирования;
- построения портфеля-репликатора;
- расчёта цены опциона без арбитража;
- объяснения дельты как коэффициента хеджа.

И самое главное — биномиальная модель даёт первый пример, где:

в теории мы можем (практически) полностью устранить риск продавца опциона.

ключевая идею: любая модель финансового инструмента должна быть**арбитражно-свободной**. Арбитраж — это стратегия, которая приносит прибыль **без риска и без вложений**. Если модель допускает арбитраж, то цена опциона, которую мы получим из неё, будет бессмысленной: в реальном рынке такую возможность мгновенно вынесут.

В одном шаге у нас есть три возможные доходности:

$$d, \qquad 1 + r\Delta t, \qquad u,$$

которые соответствуют:

- доходности актива при движении вниз (d);
- доходности банковского счёта ($1 + r\Delta t$);
- доходности актива при движении вверх (u).

Условие отсутствия арбитража в биномиальной модели формулируется как:

$$d < 1 + r\Delta t < u.$$

Интуиция:

- Если $1 + r\Delta t \leq d$, то актив всегда растёт медленнее банка. Тогда выгодно шортить актив и класть деньги в банк. Получается прибыль без риска.
- Если $1 + r\Delta t \geq u$, то актив всегда растёт быстрее банка. Тогда выгодно занимать под r и покупать актив. Опять бесплатная прибыль.

Когда банковская ставка между движениями вверх и вниз, у нас не возникает гарантированного выигрыша. Это и означает, что модель согласована с реальностью и пригодна для дальнейших расчётов.

2. Риск-нейтральная вероятность

мы НЕ пытаемся угадать реальные рыночные вероятности. Вместо этого мы ищем такую вероятность q, при которой **дисконтированная цена актива становится мартингалом**.

Риск-нейтральная вероятность возникает **не из статистики**, а из чисто математического требования: не должно быть арбитража Она имеет форму:

$$q = \frac{(1 + r\Delta t) - d}{u - d}.$$

q — не прогноз и не вероятность роста по мнению рынка это искусственная техническая вероятность, созданная для удобства, делает модель арбитражно-свободной, она позволяет напрямую вычислять стоимость опциона.

ключевая мысля: в риск-нейтральном мире ожидаемая доходность актива совпадает с безрисковой:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_1] = S_0(1 + r\Delta t).$$

То есть актив ведёт себя так, будто он растёт как банковский счёт.

Строгое определение: Процесс X_t называется мартингалом относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$ и вероятности P, если:

$$\mathbb{E}[X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = X_t.$$

Интуитивно: мартингал — это случайный процесс, у которого отсутствует направленный тренд. Текущее значение — это лучшая возможная оценка будущего.

Пример:

- Честная игра: капитал игрока после каждой ставки, если ожидание равно нулю.
- Дисконтированная цена актива в риск-нейтральном мире.

В биномиальной модели дисконтированная цена актива:

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}$$

становится мартингалом при вероятности q:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_1 \mid S_0] = \tilde{S}_0.$$

Цена call в одном шаге

Теперь, когда у нас есть риск-нейтральная вероятность q, мы можем вычислить справедливую цену опциона.

Пусть через один шаг:

$$C_u = \text{выплата call при движении вверх}, \qquad C_d = \text{выплата call при движении вниз}.$$

Тогда справедливая цена — это **дисконтированное риск-нейтральное ожидание**:

$$C_0 = \frac{1}{1 + r\Delta t}\big(qC_u + (1-q)C_d\big).$$

- это не угадывание цены;
- это единственное значение, при котором нельзя построить арбитраж;
- формула является дискретным аналогом формулы Блэка–Шоулза;
- это фундаментальное равенство всего современного деривативного рынка.

тогда логически замкнуть это можно так

- известны u и d (движения цены),
- известен банковский счёт,
- есть условие "нет арбитража",
- найдена риск-нейтральная вероятность,
- получена цена опциона.