1 Карта областей и соответствие пунктам программы

Сокращения областей:

- МА — математический анализ / вещественный анализ;
- ФА — функциональный анализ / теория меры;
- ЛА — линейная алгебра;
- АГ — аналитическая геометрия;
- ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения;
- ЧПУ — уравнения в частных производных;
- КА — теория функций комплексного переменного (ТФКП);
- ВИ — вариационное исчисление;
- ВМ — вычислительная математика.

1.1 МА: вещественный и математический анализ

- Пункты: 1–11, 31 (частично).
- пункт 1. Предел, непрерывность функции одной переменной, свойства непрерывной функции на отрезке. Понятие производной.
- пункт 2. Функции многих переменных, полный дифференциал, геометрический смысл, достаточные условия дифференцируемости, градиент.
- пункт 3. Первообразная и неопределённый интеграл. Интеграл Римана.
- пункт 4. Определённый интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Формула Ньютона–Лейбница.
- пункт 5. Числовой ряд и его сходимость. Необходимый признак сходимости. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак.
- пункт 6. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.
- пункт 7. Функциональный ряд. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.
- пункт 8. Степенной ряд и его радиус сходимости. Почленное интегрирование и дифференцирование. Ряд Тейлора.
- пункт 9. Несобственные интегралы и их сходимость.
- пункт 10. Ряд Фурье. Тригонометрический ряд Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
- пункт 11. Метрическое пространство, полнота, компактность. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Принцип Коши.
- пункт 31 (частично). Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

Минимальные знания

- Предел (по Коши и по Гейне), непрерывность, свойства непрерывных функций на отрезке (ограниченность, достижение максимумов/минимумов, теорема о промежуточном значении).
- Производная, связь с монотонностью, экстремумами, правила дифференцирования.
- Необходимые и достаточные условия экстремума одной и нескольких переменных.
- Определённый интеграл Римана, интегрируемость непрерывных и монотонных функций, формула Ньютона–Лейбница.
- Классические признаки сходимости числовых рядов (необходимый признак, Даламбер, Коши, интегральный).
- Понятия абсолютной и условной сходимости, перестановки членов ряда.
- Определение функционального и степенного ряда, радиус сходимости, базовые свойства.
- Определение равномерной сходимости, связь с непрерывностью, интегрированием и дифференцированием.
- Несобственные интегралы (по бесконечному промежутку и по особенностям подынтегральной функции).
- Базовые факты о рядах Фурье: формулы коэффициентов, ортогональность тригонометрических функций, формулировка теорем Фурье/Парсеваля.
- Метрические пространства: определение метрики, сходимость, замкнутые и открытые множества, компактность, полные пространства, критерий Коши.

Смежные темы

- Связь рядов Фурье с гильбертовыми пространствами L^2 (ФА).
- Связь равномерной сходимости с метриками на пространствах функций.
- Связь степенных рядов с ТФКП (расклады аналитических функций).

Основные источники

- Г.М. Фихтенгольц, "Курс дифференциального и интегрального исчисления", т. 1–3.
- Л.Д. Кудрявцев, "Курс математического анализа", т. 1–3.
- С.М. Никольский, "Курс математического анализа".
- (Более современно) Т. Тао, "Введение в математический анализ" (покрывает существенную часть пунктов 1–11).

Задачники

- Б.П. Демидович, "Сборник задач и упражнений по математическому анализу".
- В.А. Зорич, "Математический анализ" (упражнения).

1.2 ФА/теория меры: интеграл Лебега и гильбертовы пространства

Соответствующие пункты программы

- Пункты: 12–13.
- 12. Функции с ограниченным изменением. Мера в смысле Лебега. Теорема Д.Ф. Егорова, C-свойства. Абсолютно непрерывные функции.
- 13. Суммируемые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства. Гильбертово пространство. Пространства L^2 и l^2. Сходимость в среднем.

Минимальные знания

- Понимание конструкции меры Лебега на $\mathbb{R}$ (внешняя мера, измеримые множества, борелевская σ-алгебра).
- Определение измеримой функции.
- Определение интеграла Лебега для неотрицательных и для абсолютно интегрируемых функций.
- Основные теоремы: монотонная сходимость, теорема Фату, теорема Лебега о мажорируемой сходимости (формулировки).
- Понятие функций с ограниченной вариацией и абсолютно непрерывных функций (на уровне формулировок).
- Определение гильбертова пространства, примеры $L^2[a, b]$ и l^2.
- Понятие сходимости в среднем (сходимость в метрике L^2).

Смежные темы

- Связь интеграла Лебега с интегралом Римана: условия совпадения.
- Связь рядов Фурье с пространством L^2 и ортогональными системами.
- Основы теории вероятностей на базе меры Лебега (если спрашивают про тервер).

Основные источники

- А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, “Элементы теории функций и функционального анализа”.
- А.Н. Ширяев, “Вероятность”, т. 1 (разделы о мере и интеграле Лебега).
- В.А. Треногин, “Функциональный анализ” (более продвинутый уровень).

Задачники

- Упражнения в книге Колмогорова–Фомина.
- Специализированные задачники по теории меры (по необходимости).

1.3 АГ: аналитическая геометрия

Соответствующие пункты программы

- Пункты: 14–15.
- 14. Плоскости и прямые в пространстве. Различные виды уравнений. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Метрические приложения.
- 15. Кривые и поверхности второго порядка. Канонические уравнения. Приведение к каноническому виду.

Минимальные знания

- Уравнение прямой и плоскости в $\mathbb{R}^3$ в различных формах (общий вид, нормальный вид).
- Взаимное расположение прямых и плоскостей, углы, расстояния.
- Канонические уравнения кривых второго порядка (окружность, эллипс, парабола, гипербола).
- Канонические уравнения поверхностей второго порядка (эллипсоид, одно- и двуполостный гиперболоид, параболоиды и т.д.).

Смежные темы

- Линейные преобразования и диагонализация квадратичных форм (связь с ЛА).
- Метрические свойства через скалярное произведение.

Основные источники

- М.М. Постников, “Аналитическая геометрия”.
- А.П. Веселов, Е.В. Троицкий, “Лекции по аналитической геометрии”.

Задачники

- Упражнения в книгах Постникова и Веселова–Троицкого.

1.4 ЛА: линейная алгебра

Соответствующие пункты программы

- Пункты: 16–18.
- 16. Системы линейных алгебраических уравнений. Методы решения. Теорема о структуре общего решения однородной и неоднородной систем. Фундаментальная система решений.
- 17. Собственные векторы и собственные значения матриц. Характеристический многочлен. Теорема Гамильтона–Кэли.
- 18. Билинейные и квадратичные формы. Изменение матрицы при смене базиса. Канонический и нормальный вид. Закон инерции.

Минимальные знания

- Матрицы, операции, ранг, определитель.
- Решение СЛАУ (метод Гаусса, условия существования/единственности).
- Понятие ядра и образа линейного оператора.
- Собственные значения и собственные векторы, характеристический многочлен.
- Формулировка и смысл теоремы Гамильтона–Кэли.
- Определение билинейной и квадратичной формы, матрицы формы.
- Приведение квадратичной формы к каноническому виду, закон инерции.

Смежные темы

- Связь квадратичных форм с кривыми и поверхностями второго порядка (АГ).
- Линейные операторы в гильбертовых пространствах (ФА, при обсуждении L^2).

Основные источники

- И.М. Гельфанд, “Лекции по линейной алгебре”.
- А.И. Кострикин, “Введение в алгебру”.
- А.Г. Курош, “Курс высшей алгебры”.

Задачники

- Задачи в книгах Гельфанда и Кострикина.

1.5 ОДУ: обыкновенные дифференциальные уравнения

Соответствующие пункты программы

- Пункты: 19–21.
- 19. ОДУ первого порядка. Теорема Коши о существовании и единственности решения.
- 20. Линейное ОДУ второго порядка. Однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений.
- 21. Системы ОДУ. Определитель Вронского.

Минимальные знания

- Базовые методы решения ОДУ первого порядка (разделяющиеся, линейные, уравнения с разделяющимися переменными).
- Формулировка теоремы Пикара–Линдёлефа (Коши) о существовании и единственности.
- Решение линейных ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
- Понятие фундаментальной системы решений, общее решение.
- Определитель Вронского и критерий линейной независимости решений.

Смежные темы

- Связь с рядом Тейлора (построение решений в виде степенных рядов).
- Численные методы решения ОДУ (связь с разделом ВМ).

Основные источники

- Л.С. Понтрягин, "Обыкновенные дифференциальные уравнения".
- В.В. Степанов, "Курс дифференциальных уравнений".

Задачники

- Задачники по ОДУ (Демидович и др.).

1.6 ЧПУ и пространства Соболева

Соответствующие пункты программы

- Пункты: 22–24.
- 22. Уравнения с частными производными. Линейные уравнения второго порядка. Классификация.
- 23. Пространства Соболева. Теорема вложения.
- 24. Однозначная и фредгольмова разрешимость эллиптических задач. Задача на собственные функции и значения. Гладкость обобщённых решений.

Минимальные знания

- Базовая классификация PDE второго порядка (эллиптические, параболические, гиперболические) по знаку дискриминанта.
- Общее представление о пространстве Соболева $W^{k,p}$, особенно H^1, H^2.
- Идея слабых решений и фредгольмовой постановки задач.
- Формулировка теорем вложения (на уровне понимания).

Смежные темы

- Связь с функциональным анализом (операторы в гильбертовых пространствах).
- Связь с вариационным исчислением (задачи на минимум функционалов).

Основные источники

- В.А. Треногин, "Функциональный анализ".
- Классические лекции по ЧПУ (Жидков, Самарский, Ладыженская и др.).

1.7 КА: теория функций комплексного переменного (ТФКП)

Соответствующие пункты программы

- Пункты: 25–27.
- 25. Функции комплексного переменного. Дифференцируемость. Условия Коши–Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
- 26. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши.
- 27. Степенные ряды с комплексными членами. Ряд Лорана. Особые точки. Вычеты.

Минимум по ТФКП, который нужно знать

- Комплексная плоскость, аналитическая функция, голоморфность.
- Условия Коши–Римана (формулировка и интерпретация).
- Понятие конформного отображения и геометрический смысл производной комплексной функции (масштаб и поворот).
- Интеграл по контуру, формулировка теоремы Коши об интеграле по замкнутому контуру.
- Формула Коши для значения функции и её производных.
- Степенные ряды комплексных функций, диски сходимости.
- Ряд Лорана, выделение главной части.
- Классификация особых точек: устранимая, полюс, существенная.
- Определение вычета, базовые формулы для вычисления вычетов.
- Применение вычетов к вычислению определённых и несобственных интегралов (на уровне примеров).

Смежные темы

- Связь степенных рядов с вещественным анализом (разложения элементарных функций).
- Связь с PDE (уравнение Лапласа и гармонические функции).

Основные источники

- Б.В. Шабат, “Введение в комплексный анализ”, ч. 1.
- И.Н. Привалов, “Введение в теорию функций комплексного переменного”.

Задачники

- Упражнения в книге Шабата.

1.8 ВИ: вариационное исчисление и механика

Соответствующие пункты программы

- Пункты: 28–30.
- 28. Простейшая проблема вариационного исчисления. Уравнение Эйлера–Лагранжа. Геодезические линии.
- 29. Задача о движении механической системы при наличии связей. Классификация связей и перемещений.
- 30. Принцип наименьшего действия.

Минимальные знания

- Постановка классической задачи вариационного исчисления для функционалов вида

  $$J[y] = \int_a^b L(x, y, y')\, dx,$$

  вывод уравнения Эйлера–Лагранжа.
- Примеры геодезических линий (прямая на плоскости, дуга большой окружности на сфере).
- Общее представление о связях в механике и принципе наименьшего действия.

Смежные темы

- Связь с пространствами Соболева и слабыми решениями.
- Связь с ОДУ (уравнения Эйлера–Лагранжа как система ОДУ).

Основные источники

- И.М. Гельфанд, С.В. Фомин, “Вариационное исчисление”.
- В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин, “Оптимальное управление” (для расширения кругозора).

1.9 ВМ: вычислительная математика и ортогональные системы

Соответствующие пункты программы

- Пункты: 31–33.
- 31. Ортогональные системы функций. Метод ортогонализации Шмидта. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
- 32. Интерполяционные формулы Ньютона и Лагранжа. Многочлены Чебышева, их свойства.
- 33. Численное решение задачи Коши для ОДУ: метод Эйлера, методы второго порядка, метод Рунге–Кутты.

Минимальные знания

- Определение ортогональной системы функций в L^2, смысл ортогонализации по Граму–Шмидту.
- Формулировки неравенства Бесселя и равенства Парсеваля.
- Интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа, смысл узлов интерполяции.
- Базовые свойства многочленов Чебышева (ортогональность, минимаксное свойство).
- Схема метода Эйлера, базовых методов второго порядка и метода Рунге–Кутты для решения задачи Коши.

Смежные темы

- Связь ортогональных систем с рядами Фурье и пространствами L^2.
- Связь численных методов ОДУ с теоремой существования и единственности (точность и устойчивость).

Основные источники

- Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, "Численные методы".
- А.А. Самарский, "Численные методы" (и другие его книги по ЧПУ).

Задачники

- Задачи в книгах Бахвалова и Жидкова.

2 Рекомендуемые источники в разрезе разделов

- МА (1–11): Фихтенгольц, Кудрявцев, Никольский, Тао.
- Теория меры и ФА (12–13): Колмогоров–Фомин, Ширяев (т. 1).
- АГ (14–15): Постников, Веселов–Троицкий.
- ЛА (16–18): Гельфанд, Кострикин, Курош.
- ОДУ (19–21): Понтрягин, Степанов.
- ЧПУ и Соболев (22–24): Треногин, классические конспекты по ЧПУ.
- КА / ТФКП (25–27): Шабат, Привалов.
- ВИ (28–30): Гельфанд–Фомин, Алексеев–Тихомиров–Фомин.
- ВМ (31–33): Бахвалов–Жидков, Самарский.

3 Как брать информацию для задач и как лучше решать

Источник задач

- Для математического анализа: Демидович, задачи у Фихтенгольца и Зорича.
- Для линейной алгебры и аналитической геометрии: задачи у Гельфанда, Кострикина, Постникова.
- Для ОДУ: задачники Понтрягина, Демидовича.
- Для комплексного анализа: упражнения у Шабата.
- Для теории меры и ФА: упражнения у Колмогорова–Фомина.
- Для вариационного исчисления: задачи у Гельфанда–Фомина.
- Для вычислительных методов: задачи у Бахвалова–Жидкова.

Рекомендуемая методика решения

1. Для каждого пункта программы (1–33) составить краткий конспект:
   - определения;
   - 2–3 ключевые теоремы;
   - 1–2 простых примера;
   - 1 контрпример (если уместно).
2. По каждому разделу прорешать 10–20 типовых задач:
   - на сходимость рядов;
   - на пределы и непрерывность;
   - на простые ОДУ;
   - на вычеты и контурные интегралы;
   - на собственные значения и квадратичные формы и т.п.
3. После решения задач обязательно проговаривать устно:
   - формулировку задачи;
   - метод решения;
   - ключевую идею, которая используется (например, какой признак сходимости применён).
4. Смоделировать формат экзамена:
   - выбрать 2 пункта из списка 1–33;
   - за 10–15 минут подготовить план устного ответа с определениями, теоремами и одним примером;
   - проговорить ответ вслух, как на экзамене.

Такой подход позволяет минимально, но системно закрыть все разделы программы и выйти на уровень, достаточный для набора ≥ 30 баллов на вступительном экзамене.