

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Системное и прикладное программное обеспечение

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчет к лабораторной работе № 3
«Численное интегрирование»
Вариант 17

Выполнил:
Студент группы Р3213
Харламов Александр Сергеевич

Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург
2022 год

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Задание лабораторной работы

Обязательное задание

1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
2. Пределы интегрирования задаются пользователем.
3. Точность вычисления задается пользователем.
4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: $n=4$.
5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

Программная реализация задачи

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя:
 - Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
 - Метод трапеций

$$\int_0^2 (-x^3 - x^2 - 2x + 1) dx$$

2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1 (столбец 3), точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n=6$.

3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n=6$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений.
6. В отчете отразить последовательные вычисления.

Необязательное задание

1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».
2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобственных интегралов 2 рода (заданными численными методами).
3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв: 1) в точке a , 2) в точке b , 3) на отрезке интегрирования

Вычислительная реализация задачи

1. Вычислить интеграл точно

$$\int_0^2 (-x^3 - x^2 - 2x + 1) dx = \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^2 = -4 - \frac{8}{3} - 4 + 2 = -\frac{26}{3} = -8.6666667$$

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона-Котеса при $n=6$

$$c_0 = c_6 = \frac{41(b-a)}{840} = \frac{41}{420} = 0.0976, \quad c_1 = c_5 = \frac{9(b-a)}{35} = \frac{18}{35} = 0.5143,$$

$$c_2 = c_4 = \frac{9(b-a)}{280} = \frac{9}{140} = 0.0643, \quad c_3 = \frac{34(b-a)}{105} = \frac{68}{105} = 0.6476$$

$$f(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &\approx c_0 f(0) + c_1 f\left(\frac{2}{6}\right) + c_2 f\left(\frac{4}{6}\right) + c_3 f\left(\frac{6}{6}\right) + c_4 f\left(\frac{8}{6}\right) + c_5 f\left(\frac{10}{6}\right) + c_6 f(2) = \\ &= 0.0976 + 0.0952 - 0.0691 - 1.943 - 0.3739 - 5.010 - 1.464 = \\ &= -8.529 \end{aligned}$$

3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n=6$. Определить погрешности вычислений.

3.1. Метод средних прямоугольников

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &\approx \frac{2}{6} \left(f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{3}{6}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right) + f\left(\frac{7}{6}\right) + f\left(\frac{9}{6}\right) + f\left(\frac{11}{6}\right) \right) = \\ &= \frac{2}{6} (0.634 - 0.375 - 1.940 - 4.282 - 7.625 - 12.19) = -\frac{2}{6} * 25.778 = \\ &= -8.593\end{aligned}$$

$$\Delta I = I - I_{\text{прям}} = |-8.667 + 8.593| = 0.074 (\approx 0.85\%)$$

3.2. Метод трапеций

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &\approx \frac{2}{6} \left(\frac{f(0) + f(2)}{2} + f(2/6) + f(4/6) + f(6/6) + f(8/6) + f(10/6) \right) = \\ &= \frac{2}{6} (-7 + 0.185 - 1.074 - 3.0 - 5.815 - 9.741) = -\frac{2}{6} * 26.445 = \\ &= -8.806\end{aligned}$$

$$\Delta I = I - I_{\text{прям}} = |-8.667 + 8.982| = 0.315 (\approx 3.63\%)$$

3.3. Метод Симпсона

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &\approx \frac{2}{18} [f(0) + 4(f(2/6) + f(6/6) + f(10/6)) + 2(f(4/6) + f(8/6)) + f(2)] = \\ &= -\frac{2}{18} * 78 = -\frac{26}{3} = -8.66667\end{aligned}$$

$$\Delta I = I - I_{\text{прям}} = \left| -\frac{26}{3} + \frac{26}{3} \right| = 0 (\approx 0\%)$$

Рабочие формулы используемых методов

Метод прямоугольников

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \dots + h_n y_{n-1} = \sum_{i=1}^n h_i y_{i-1}$ - левые
прямоугольники

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_n y_n = \sum_{i=1}^n h_i y_i$ - правые
прямоугольники

При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = \text{const}$:

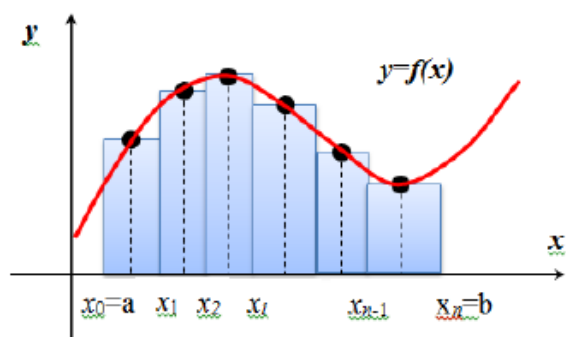
$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n y_{i-1}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n y_i$$

Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f(x_{i-1/2})$$
$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots, n$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = \text{const}$:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})$$

Метод трапеций

Подынтегральную функцию на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют интерполяционным многочленом первой степени:

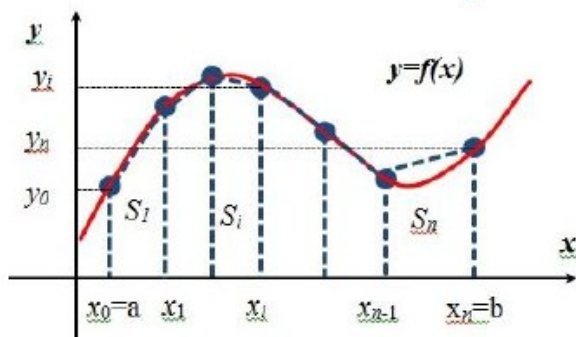
$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x + b$$

Используют линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющей точки (x_i, y_i) . Площадь всей фигуры (криволинейной трапеции):

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h_1 + \frac{y_1 + y_2}{2} h_2 + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h_n$$
$$y_0 = f(a), \quad y_n = f(b), \quad y_i = f(x_i), \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i (y_{i-1} + y_i)$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = \text{const}$ формула трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

или
$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Правило Рунге - это эмпирический способ оценки погрешности, основанный на сравнении результатов вычислений, проводимых с разными шагами h :

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}$$

I – точное значение интеграла;

$I_{h/2}, I_h$ - приближенные значения интеграла, вычисленные с различными шагами h ;

k - порядок точности квадратурной формулы,

($k=2$ - для формул средних прямоугольников и трапеций, $k=4$ - для формулы Симпсона).

Листинг программы

https://github.com/itookyourboo/itmo_comp_math/tree/master/lab3_integration

```

def rect_method(f, a, b, align=0, num=100):
    h = (b - a) / num
    arr = np.linspace(a, b, num, endpoint=False)
    match align:
        case -1:
            res = h * sum(f(x) for x in arr)
        case 0:
            res = sum(h * f(x + h / 2) for x in arr)
        case 1:
            res = sum(h * f(x + h) for x in arr)
        case _:
            raise ValueError('incorrect align')

    return res

def trapeze_method(f, a, b, num=100):
    h = (b - a) / num
    arr = np.linspace(a, b, num, endpoint=False)[1:]
    return h * ((f(a) + f(b)) / 2 + sum(f(x) for x in arr))

def runge_err(res, res2, k):
    return abs(res2 - res) / (2 ** k - 1)

```

Результаты работы программы

```

Выберите метод для вычисления интеграла функции: -x^3 - x^2 - 2x + 1
1. Метод левых прямоугольников
2. Метод средних прямоугольников
3. Метод правых прямоугольников
4. Метод трапеций
1
Введите границы интегрирования через пробел: 0 2
Введите число разбиений: 100
Результат вычисления: -8.5072
Число разбиений: 100
Погрешность: 0.1595 (0.02%)
Погрешность по правилу Рунге: 0.0528

```

Выберите метод для вычисления интеграла функции: $-x^3 - x^2 - 2x + 1$

1. Метод левых прямоугольников
2. Метод средних прямоугольников
3. Метод правых прямоугольников
4. Метод трапеций

2

Введите границы интегрирования через пробел: 0 2

Введите число разбиений: 6

Результат вычисления: -8.592592592592592

Число разбиений: 6

Погрешность: 0.0741 (0.01%)

Погрешность по правилу Рунге: 0.0741

Выберите метод для вычисления интеграла функции: $-x^3 - x^2 - 2x + 1$

1. Метод левых прямоугольников
2. Метод средних прямоугольников
3. Метод правых прямоугольников
4. Метод трапеций

3

Введите границы интегрирования через пробел: -6 6

Введите число разбиений: 29

Результат вычисления: -226.68727705112957

Число разбиений: 29

Погрешность по правилу Рунге: 34.0702

Выберите метод для вычисления интеграла функции: $-x^3 - x^2 - 2x + 1$

1. Метод левых прямоугольников
2. Метод средних прямоугольников
3. Метод правых прямоугольников
4. Метод трапеций

4

Введите границы интегрирования через пробел: 0 2

Введите число разбиений: 6

Результат вычисления: -8.814814814814813

Число разбиений: 6

Погрешность: 0.1481 (0.02%)

Погрешность по правилу Рунге: 0.1481

Дополнительное задание

```
def inf_or_err(f, num):
    try:
        res = f(num)
        return np.isinf(res)
    except Exception:
        return True

def diverges(f, a, b):
    return inf_or_err(f, a) or inf_or_err(f, b)

def normalized_rect_method(f, F, a, b, align=0, num=100):
    if diverges(F, a, b):
        return None

    res = rect_method(f, a, b, align, num)
    if np.isinf(res):
        return None

    return res

def normalized_trapeze_method(f, F, a, b, num=100):
    if diverges(F, a, b):
        return None

    res = trapeze_method(f, a, b, num)
    if np.isinf(res):
        return None

    return res
```

Результаты работы программы

Выберите функцию для интегрирования:

1. $1 / x$
2. $1 / \sqrt{3 - x}$

1

Выберите метод для вычисления интеграла функции: $1 / x$

1. Метод левых прямоугольников
2. Метод средних прямоугольников
3. Метод правых прямоугольников
4. Метод трапеций

1

Введите границы интегрирования через пробел: 0 2

Введите число разбиений: 8

Интеграл расходится

Выберите функцию для интегрирования:

1. $1 / x$
2. $1 / \sqrt{3 - x}$

2

Выберите метод для вычисления интеграла функции: $1 / \sqrt{3 - x}$

1. Метод левых прямоугольников
2. Метод средних прямоугольников
3. Метод правых прямоугольников
4. Метод трапеций

4

Введите границы интегрирования через пробел: 0 3

Введите число разбиений: 8

Интеграл расходится

```
Выберите функцию для интегрирования:  
1. 1 / x  
2. 1 / sqrt(3 - x)  
1  
Выберите метод для вычисления интеграла функции: 1 / x  
1. Метод левых прямоугольников  
2. Метод средних прямоугольников  
3. Метод правых прямоугольников  
4. Метод трапеций  
2  
Введите границы интегрирования через пробел: 1 10  
Введите число разбиений: 100  
Результат вычисления: 2.302251444327005
```

Выводы

Я познакомился с такими числовыми методами вычисления определенных интегралов, как метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона, а также научился оценивать погрешность при помощи правила Рунге.