ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Системное и прикладное программное обеспечение

Дисциплина «Вычислительная математика»

Отчет к лабораторной работе № 3
«Численное интегрирование»
Вариант 17

Выполнил:
Студент группы P3213
Харламов Александр Сергеевич

Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург
2022 год

Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Задание лабораторной работы

Обязательное задание

1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.

2. Пределы интегрирования задаются пользователем.

3. Точность вычисления задается пользователем.

4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.

5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

Программная реализация задачи

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя:

- Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)

- Метод трапеций

$$\int_0^2 (-x^3 - x^2 - 2x + 1)\,dx$$

2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.

3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.

4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.

5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1 (столбец 3), точно.

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при n=6.

3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n=6.

4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.

5. Определить относительную погрешность вычислений.

6. В отчете отразить последовательные вычисления.

Необязательное задание

1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».

2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобственных интегралов 2 рода (заданными численными методами).

3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв: 1) в точке a, 2) в точке b, 3) на отрезке интегрирования

Вычислительная реализация задачи

1. Вычислить интеграл точно

$$\int_0^2 (-x^3-x^2-2x+1)dx=\left(-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\Bigg|_0^2=-4-\frac{8}{3}-4+2=-\frac{26}{3}=-8.6666667$$

2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона-Котеса при n=6

$$c_0=c_6=\frac{41(b-a)}{840}=\frac{41}{420}=0.0976,\;\; c_1=c_5=\frac{9(b-a)}{35}=\frac{18}{35}=0.5143,$$
$$c_2=c_4=\frac{9(b-a)}{280}=\frac{9}{140}=0.0643,\;\; c3=\frac{34(b-a)}{105}=\frac{68}{105}=0.6476$$

$$f(x)=-x^2-x^2-2x+1$$

$$\int_0^2 f(x)dx\approx c_0 f(0)+c_1 f(\frac{2}{6})+c_2 f(\frac{4}{6})+c_3 f(\frac{6}{6})+c_4 f(\frac{8}{6})+c_5 f(\frac{10}{6})+c_6 f(2)=$$
$$=0.0976+0.0952-0.0691-1.943-0.3739-5.010-1.464=$$
$$=-8.529$$

3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n=6. Определить погрешности вычислений.

3.1. Метод средних прямоугольников

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{2}{6}\left(f(\frac{1}{6})+f(\frac{3}{6})+f(\frac{5}{6})+f(\frac{7}{6})+f(\frac{9}{6})+f(\frac{11}{6})\right)=$$

$$=\frac{2}{6}(0.634-0.375-1.940-4.282-7.625-12.19)=-\frac{2}{6}*25.778=$$

$$=-8.593$$

$$\Delta I = I - I_{прям} = |-8.667+8.593| = 0.074 (\approx 0.85\%)$$

3.2. Метод трапеций

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{2}{6}\left(\frac{f(0)+f(2)}{2}+f(2/6)+f(4/6)+f(6/6)+f(8/6)+f(10/6)\right)=$$

$$=\frac{2}{6}(-7+0.185-1.074-3.0-5.815-9.741)=-\frac{2}{6}*26.445=$$

$$=-8.806$$

$$\Delta I = I - I_{прям} = |-8.667+8.982| = 0.315 (\approx 3.63\%)$$

3.3. Метод Симпсона

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{2}{18}[f(0)+4(f(2/6)+f(6/6)+f(10/6))+2(f(4/6)+f(8/6))+f(2)]=$$

$$=-\frac{2}{18}*78=\frac{-26}{3}=-8.66667$$

$$\Delta I = I - I_{прям} = |\frac{-26}{3}+\frac{26}{3}| = 0 (\approx 0\%)$$

Рабочие формулы используемых методов

Метод прямоугольников

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \cdots + h_n y_{n-1} = \sum_{i=1}^n h_i\, y_{i-1}$ - левые прямоугольники

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \cdots + h_n y_n = \sum_{i=1}^n h_i y_i$ - правые прямоугольники

При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^n y_{i-1}$$

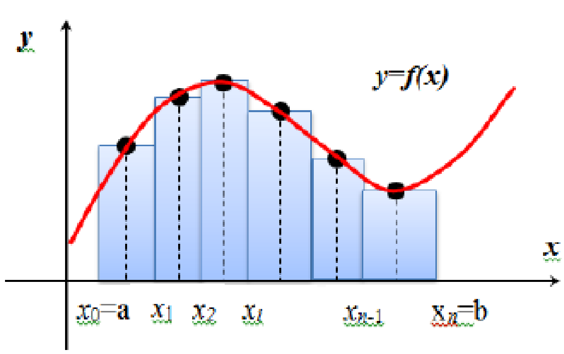
$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^n y_i$$

Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h_i\, f(x_{i-1/2})$$

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots n$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})$$

Метод трапеций

Подынтегральную функцию на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют интерполяционным многочленом первой степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x + b$$

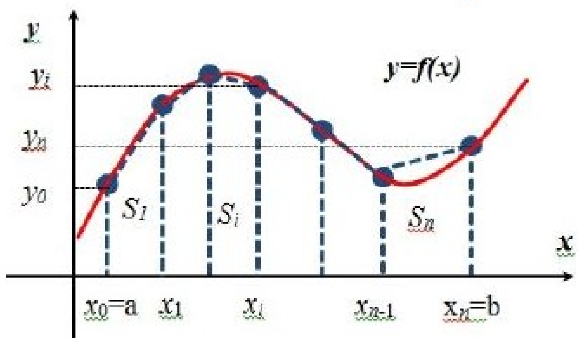
Используют линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i) . Площадь всей фигуры (криволинейной трапеции):

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h_1 + \frac{y_1 + y_2}{2} h_2 + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h_n$$

$$y_0 = f(a), \qquad y_n = f(b), \qquad y_i = f(x_i), \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i)$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$ формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Правило Рунге - это эмпирический способ оценки погрешности, основанный на сравнении результатов вычислений, проводимых с разными шагами *h:*

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}$$

I – точное значение интеграла;

$I_{h/2}, I_h$ - приближенные значения интеграла, вычисленные с различными шагами *h;*

k - порядок точности квадратурной формулы,

(k=2 - для формул средних прямоугольников и трапеций, k=4 - для формулы Симпсона).

Листинг программы

https://github.com/itookyourboo/itmo_comp_math/tree/master/lab3_integration

```python
def rect_method(f, a, b, align=0, num=100):
    h = (b - a) / num
    arr = np.linspace(a, b, num, endpoint=False)
    match align:
        case -1:
            res = h * sum(f(x) for x in arr)
        case 0:
            res = sum(h * f(x + h / 2) for x in arr)
        case 1:
            res = sum(h * f(x + h) for x in arr)
        case _:
            raise ValueError('incorrect align')

    return res



def trapeze_method(f, a, b, num=100):
    h = (b - a) / num
    arr = np.linspace(a, b, num, endpoint=False)[1:]
    return h * ((f(a) + f(b)) / 2 + sum(f(x) for x in arr))



def runge_err(res, res2, k):
    return abs(res2 - res) / (2 ** k – 1)
```

Результаты работы программы

```
Выберите метод для вычисления интеграла функции: -x^3 - x^2 - 2x + 1
    1. Метод левых прямоугольников
    2. Метод средних прямоугольников
    3. Метод правых прямоугольников
    4. Метод трапеций
1
Введите границы интегрирования через пробел: 0 2
Введите число разбиений: 100
Результат вычисления: -8.5072
Число разбиений: 100
Погрешность: 0.1595 (0.02%)
Погрешность по правилу Рунге: 0.0528
```

```
Выберите метод для вычисления интеграла функции: -x^3 - x^2 - 2x + 1
    1. Метод левых прямоугольников
    2. Метод средних прямоугольников
    3. Метод правых прямоугольников
    4. Метод трапеций
2
Введите границы интегрирования через пробел: 0 2
Введите число разбиений: 6
Результат вычисления: -8.592592592592592
Число разбиений: 6
Погрешность: 0.0741 (0.01%)
Погрешность по правилу Рунге: 0.0741
```

```
Выберите метод для вычисления интеграла функции: -x^3 - x^2 - 2x + 1
    1. Метод левых прямоугольников
    2. Метод средних прямоугольников
    3. Метод правых прямоугольников
    4. Метод трапеций
3
Введите границы интегрирования через пробел: -6 6
Введите число разбиений: 29
Результат вычисления: -226.68727705112957
Число разбиений: 29
Погрешность по правилу Рунге: 34.0702
```

```
Выберите метод для вычисления интеграла функции: -x^3 - x^2 - 2x + 1
    1. Метод левых прямоугольников
    2. Метод средних прямоугольников
    3. Метод правых прямоугольников
    4. Метод трапеций
4
Введите границы интегрирования через пробел: 0 2
Введите число разбиений: 6
Результат вычисления: -8.814814814814813
Число разбиений: 6
Погрешность: 0.1481 (0.02%)
Погрешность по правилу Рунге: 0.1481
```

Выводы

Я познакомился с такими числовыми методами вычисления определенных интегралов, как метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона, а также научился оценивать погрешность при помощи правила Рунге.