УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ПИиКТ Программная инженерия

Лабораторная работа №7.
Работа с системой компьютерной вёрстки TEX

Студент:	Харламов Александр Сергеевич
Преподаватель:	Малышева Татьяна Алексеевна
Группа:	P3113

Санкт-Петербург
2020

3. Функция Эйлера. Число красных дробей

Пусть у нас имеется натуральное число n. Рассмотрим все натуральные числа, не превосходящие n, и выберем из них те, которые взаимно просты с числом n. Количество этих чисел обозначим через $\phi(n)$.

Например, для $n = 8$ такими числами будут 1, 3, 5,7, и тем самым $\phi(8) = 4$.

Итак, каждому натуральному числу n сопоставлено число $\phi(n)$. Это соответствие ϕ называется *функцией Эйлера.*

Перечислим некоторые свойства функции Эйлера:
1) $\phi(n) < n$.
2) Если $n = p$ - простое число, то $\phi(p) = p - 1$.
3) Для $n > 2$ число $\phi(n)$ четно.
4) Если $n = p^d$ - степень простого числа p, то

$$\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

5*) Если m и n взаимно просты, то
$\phi(mn) = \phi(m) * \phi(n)$
6) Общая формула для $\phi(n)$ такова:

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right);$$

здесь $p_1, p_2, \dots, p_r$ - все простые числа, на которые делится n. (Эта формула доказана в статье «Малая теорема Ферма», «Квант», 1972, № 10.)

Доказать все эти свойства мы предлагаем читателю. Объясним только свойство 3). Все числа, меньше, чем n и взаимно простые с n, можно разбить на все пары: каждая пара состоит из таких чисел q, s, что $q + s = n$. Таким образом, число $\phi(n)$ - четно.

Число `красных` дробей в n-й строчке F_n, очевидно, равно $\phi(n)$, так как несократимых дробей $m/n \quad (0 \leq m/n \leq 1)$ со знаменателем n столько же, сколько натуральных чисел m, меньших, чем n, и взаимно простых с n.

Вопрос о том, сколько всего членов содержит n-й ряд Фарея F_n, обсуждает в своем письме читатель «Кванта» `А. Китаев` из Ленинграда.

n	1	2	3	4	5	6	7	7	9	...
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	...
$\Phi(n)$	2	3	5	7	11	13	19	23	29	...

Таблица 2. Функция Эйлера и число дробей F_n

Ясно, что это число - обозначим его $\Phi(n)$ - равно $\Phi(n) = 1 + \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \ldots + \phi(n)$, поскольку $\Phi(1) = 2$ и $\Phi(n) = \Phi(n-1) + \phi(n)$ (см. таблицу 2). Простой формулы для $\Phi(n)$, видимо, не существует. Но интересно, что, несмотря на крайне нерегулярное поведение функции Эйлера $\phi(n)$ (отношение $\dfrac{\phi(n)}{n}$ бывает сколь угодно близко и к 0, и к 1), для $\Phi(n)$ можно доказать такое предельное отношение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(n)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2} \approx 0{,}305\ldots,$$

т.е. $\Phi(x)$ при больших x возрастает «приблизительно по параболе»: $\Phi(x) \approx \dfrac{3}{\pi^2}x^2$

Это - одна и красивых теорем, полученных австрийским математиком Ф. Мертенсом (1874 г.).

4. Соседние знаменатели

Вернемся теперь к вопросу, поставленному в конце пункта 3, и объясним, почему, действуя по правилу **B**, мы получим $\phi(n)$ несократимых дробей со знаменателем n. Сделаем еще одно наблюдение.

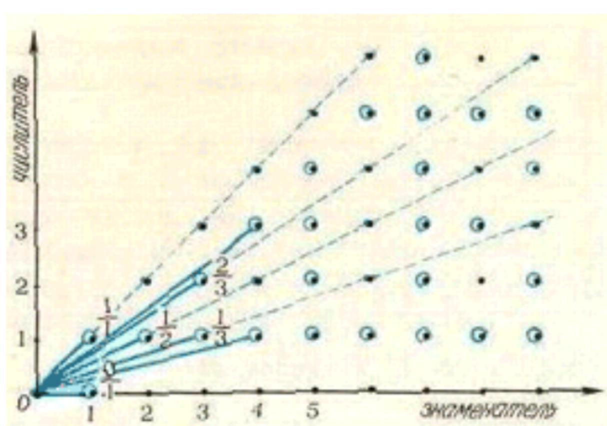
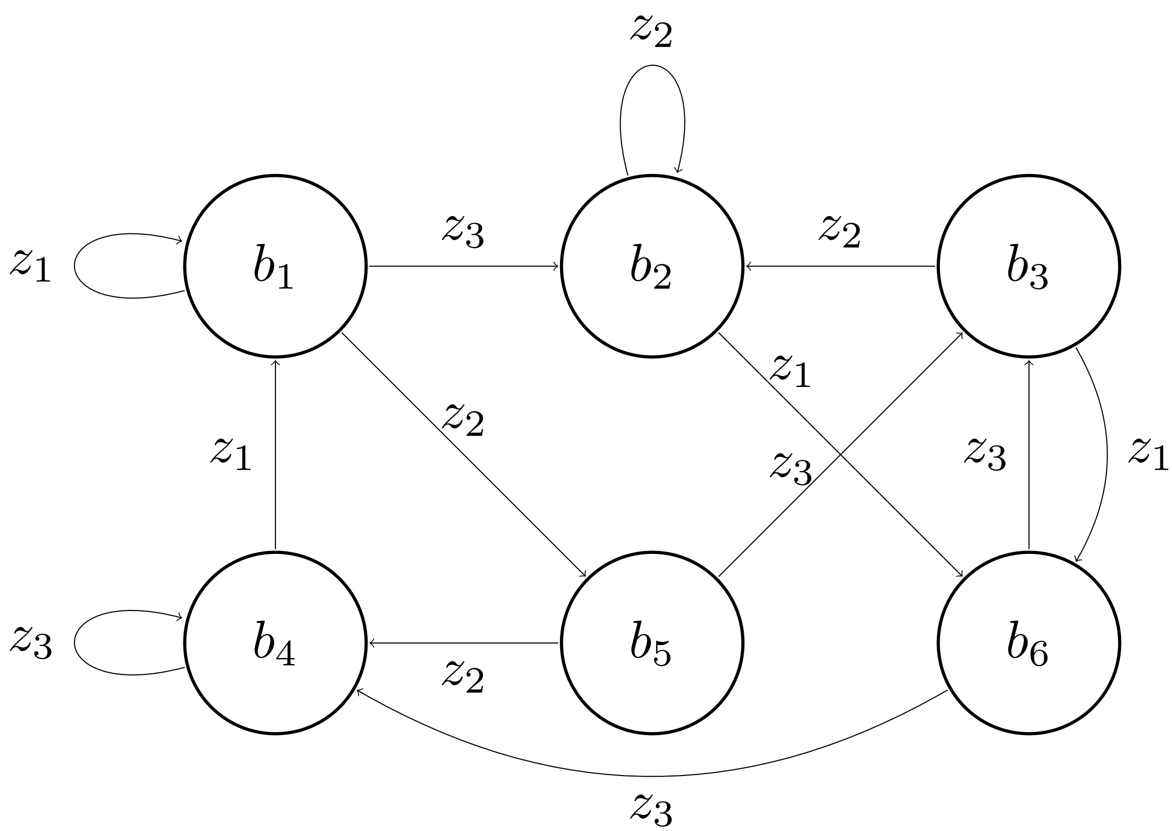


Рис. 1

Обратим внимание на знаменатели дробей в таблице 1. Составим для удобства из них новую таблицу 3. Правило B позволяет продолжать "таблицу знаменателей"(не заботясь о числителях) следующим образом.


b_1
b_2
b_3
b_4
b_5
b_6
z_1
z_2
z_3