



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ПИиКТ Программная инженерия

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7.
РАБОТА С СИСТЕМОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ВЁРСТКИ T_EX**

Студент:
Преподаватель:

Харламов Александр Сергеевич
Мальшева Татьяна Алексеевна

Группа:

P3113

3. Функция Эйлера.

Число красных дробей

Пусть у нас имеется натуральное число n . Рассмотрим все натуральные числа, не превосходящие n , и выберем из них те, которые взаимно просты с числом n . Количество этих чисел обозначим через $\phi(n)$.

Например, для $n = 8$ такими числами будут 1, 3, 5, 7, и тем самым $\phi(8) = 4$.

Итак, каждому натуральному числу n сопоставлено число $\phi(n)$. Это соответствие ϕ называется *функцией Эйлера*.

Перечислим некоторые свойства функции Эйлера:

- 1) $\phi(n) < n$.
- 2) Если $n = p$ - простое число, то $\phi(p) = p - 1$.
- 3) Для $n > 2$ число $\phi(n)$ четно.
- 4) Если $n = p^d$ - степень простого числа p , то

$$\phi(p^d) = p^d - p^{d-1} = p^{d-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

5*) Если m и n взаимно просты, то

$$\phi(mn) = \phi(m) * \phi(n)$$

6) Общая формула для $\phi(n)$ такова:

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right);$$

здесь p_1, p_2, \dots, p_r - все простые числа, на которые делится n . (Эта формула доказана в статье "Малая теорема Ферма" Квант 1972, № 10.)

Доказать все эти свойства мы предлагаем читателю. Объясним только свойство 3). Все числа, меньше, чем n и взаимно простые с n , можно разбить на все пары: каждая пара состоит из таких чисел q, s , что $q + s = n$. Таким образом, число $\phi(n)$ - четно.

Число красных дробей в n -й строчке F_n , очевидно, равно $\phi(n)$, так как несократимых дробей m/n ($0 \leq m/n \leq 1$) со знаменателем n столько же, сколько натуральных чисел m , меньших, чем n , и взаимно простых с n .

Вопрос о том, сколько всего членов содержит n -й ряд Фарея F_n , обсуждает в своем письме читатель "Кванта" А. Китаев из Ленинграда.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	...
$\Phi(n)$	2	3	5	7	11	13	19	23	29	...

Таблица 2. Функция Эйлера и число дробей F_n

Ясно, что это число - обозначим его $\Phi(n)$ - равно $\Phi(n) = 1 + \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \dots + \phi(n)$, поскольку $\Phi(1) = 2$ и $\Phi(n) = \Phi(n-1) + \phi(n)$ (см. таблицу 2). Простой формулы для $\Phi(n)$, видимо, не существует. Но интересно, что, несмотря на крайне нерегулярное поведение функции Эйлера $\phi(n)$ (отношение $\frac{\phi(n)}{n}$ бывает сколь угодно близко и к 0, и к 1), для $\Phi(n)$ можно доказать такое предельное отношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(n)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2} \approx 0,305 \dots,$$

т.е. $\Phi(x)$ при больших x возрастает "приблизительно по параболе": $\Phi(x) \approx \frac{3}{\pi^2} x^2$

Это - одна из красивых теорем, полученных австрийским математиком Ф. Мертенсом (1874 г.).

4. Соседние знаменатели

Вернемся теперь к вопросу, поставленному в конце пункта 3, и объясним, почему, действуя по правилу В, мы получим $\phi(n)$ несократимых дробей со знаменателем n . Сделаем еще одно наблюдение.

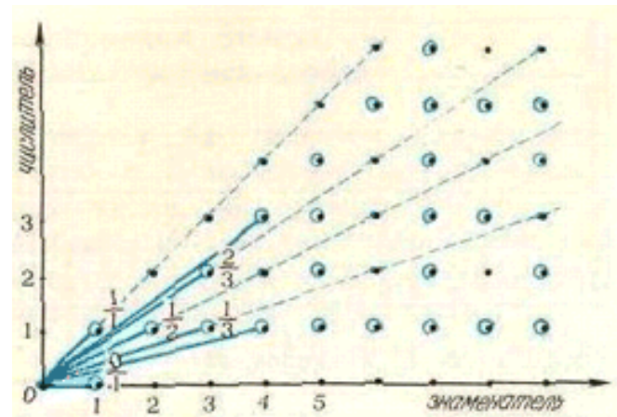


Рис. 1

Обратим внимание на знаменатели дробей в таблице 1. Составим для удобства из них новую таблицу 3. Правило В позволяет продолжать "таблицу знаменателей" (не заботясь о числителях) следующим образом.

