Differentialgleichungen III, Übungsblatt 3

Dr. A. Kaltenbach SoSe 2024

Aufgabe 1

Sei $p \in [1,\infty]$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $(L^p(I;X), \|\cdot\|_{L^p(I;X)})$ ist ein normierter Vektorraum.

(ii) Falls $X \hookrightarrow Y$, dann gilt

$$L^p(I;X) \hookrightarrow L^p(I;Y)\,.$$

(iii) Falls $A\colon X \to Y$ linear und stetig ist, dann ist der *(linear-)induzierte Operator* $\mathcal{A}\colon L^p(I;X) \to L^p(I;Y)$, für alle $u \in L^p(I;X)$ definiert durch

$$(\mathcal{A}u)(t) \coloneqq A(u(t)) \quad \text{ in } Y \quad \text{ für f.a. } t \in I\,,$$

wohldefiniert, linear und stetig. Insbesondere gilt für alle $u \in L^p(I;X)$, dass

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^p(I;Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|u\|_{L^p(I;X)}\,.$$

Aufgabe 2 (Folgerungen aus der Hölder'schen Ungleichung (vgl. Satz 2.5))

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Falls $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, dann gilt

$$L^q(I;X) \hookrightarrow L^p(I;X)\,.$$

(ii) Falls $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$, dann gilt

$$L^p(I;X) \cap L^p(I;X) \hookrightarrow L^r(I;X)\,.$$

Genauer gilt für alle $u \in L^p(I;X) \cap L^p(I;X)$, dass $u \in L^r(I;X)$ mit

$$\|u\|_{L^r(I;X)} \leq \|u\|_{L^q(I;X)}^{1-\theta}\|u\|_{L^p(I;X)}^{\theta}\,,$$

wobei $\theta \in [0,1]$, sodass $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p}$.

(iii) Seien $1 \leq p,q,r \leq \infty$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ und $B\colon X \times Y \to Z$ bilinear und stetig. Dann ist der *(bilinear-)induzierte operator* $\mathcal{B}\colon L^p(I;X) \times L^q(I;Y) \to L^r(I;Z)$, für alle $(u,v)^\top \in L^p(I;X) \times L^q(I,Y)$ definiert durch

$$\mathcal{B}(u,v)(t) \coloneqq B(u(t),v(t)) \quad \text{ in } Z \quad \text{ für f.a. } t \in I\,,$$

wohldefiniert, bilinear und stetig. Insbesondere gilt für alle $(u,v)^\top \in L^p(I;X) \times L^q(I,Y)$, dass

$$\|\mathcal{B}(u,v)\|_{L^r(I;Z)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(X\times Y,Z)}\|(u,v)^\top\|_{L^p(I;X)\times L^q(I;Y)}\,.$$