Aufgabe 1

“$(i) \Rightarrow (ii)$”

Es gilt

$$\frac{d_e u}{dt} + \mathcal{A}u = f \quad \text{in } L^{p'}(I;V),$$

was aequivalent ist zu

$$\int_I \left\| \frac{d_e u}{dt}(t) + A(t)u(t) - f(t) \right\|_{V^*}^{p'} dt = 0,$$

denn $\mathcal{A}$ ist nach Voraussetzung ein induzierter Operator. Hieraus folgt wiederum

$$\frac{d_e u}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t) \quad \text{in } V^*$$

fuer fast alle $t \in I$, was genau die punktweise Formulierung ist.

“$(ii) \Rightarrow (iii)$”

Fuer fast alle $t \in I$ gilt

$$\frac{d_e u}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t) \quad \text{in } V^*$$

d.h. fuer alle $v \in V$ gilt

$$\left\langle \frac{d_e u}{dt}(t) + A(t)u(t), v \right\rangle_V = \langle f(t), v \rangle_V .$$

Da die Gleicheit fuer fast alle $t \in I$ gilt, folgt fuer beliebige $v \in V$

$$\int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V dt = \int_I \langle f(t) - A(t)u(t), v \rangle_V \; dt.$$

Korollar 4.9 und die Linearitaet von e erlauben es uns die Ableitung aus der dualen Paarung herauszuziehen

$$\int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V dt = \int_I \frac{d}{dt} \langle e(u(t)), v \rangle_V \; dt,$$

sodass wir mit einer Testfunktion $\varphi \in C^\infty(\overline{I})$ multiplizieren und die Standardformel fuer partielle Integration anwenden koennen

$$\int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t) \; dt = \left[\langle e(u_c(t)), v \rangle_V \varphi(t) \right]_{t=0}^{t=T} - \int_I \langle e(u(t)), v \rangle_V \varphi'(t) \; dt.$$

Nach Voraussetzung setzen wir $\varphi(T) = 0$ und wenden Satz 5.2 (ueber Gelfand-Dreier) an, wodurch folgt

$$\int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t) \; dt = -(u_0, iv)_H \varphi(0) - \int_I ((iu)(t), iv)_H \varphi'(t) \; dt.$$

Alles in allem gilt also

$$-(u_0, iv)_H \varphi(0) - \int_I ((iu)(t), iv)_H \varphi'(t)\ dt = \int_I \langle f(t) - A(t)u(t), v\rangle_V\ dt,$$

d.h.

$$\int_I \langle f(t) - A(t)u(t), v\rangle_V\ dt + (u_0, iv)_H \varphi(0) + \int_I ((iu)(t), iv)_H \varphi'(t)\ dt = 0.$$

“$(iii) \Rightarrow (i)$”

Es sei $v \in V$ und $\varphi(T) \in C^\infty(\bar{I})$ mit $\varphi(T) = 0$ beliebig. Dann folgt aus Satz 5.2 (ueber Gelfand-Dreier)

$$\int_I ((iu)(t), iv)_H \varphi'(t)\ dt = \int_I \langle e(u(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\ dt$$

und mit der Standardformel fuer partielle Integration, Korollar 4.9 und der Linearitaet von e

$$\int_I \langle e(u(t)), v\rangle_V \varphi'(t)\ dt = [\langle e(u_c(t)), v\rangle_V \varphi(t)]_{t=0}^{t=T} - \int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t)\ dt.$$

Durch $\varphi(T) = 0$ und erneute Anwendung von Satz 5.2 (ueber Gelfand-Dreier) folgt

$$\int_I ((iu)(t), iv)_H \varphi'(t)\ dt = -((iu_c)(0), iv)_H \varphi(0) - \int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t)\ dt.$$

Setzen wir diese Identitaet in die Voraussetzung ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_I \langle f(t) - A(t)u(t), v\rangle_V\ dt + (u_0, iv)_H \varphi(0) \\ &\qquad - ((iu_c)(0), iv)_H \varphi(0) - \int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t)\ dt = 0. \end{aligned}$$

oder aequivalent

$$(u_0 - (iu_c)(0), iv)_H \varphi(0) + \int_I \left\langle f(t) - A(t)u(t) - \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t)\ dt = 0.$$

Da φ und v variabel sind, folgt fuer fast alle $t \in I$

$$\begin{aligned} u_0 - (iu_c)(0) &= 0 \quad \text{in } H \\ f(t) - A(t)u(t) - \frac{d_e u}{dt}(t) &= 0 \quad \text{in } V^*. \end{aligned}$$

Durch Integration der V^*-Norm des zweiten Terms ueber I folgt

$$\int_I \left\| \frac{d_e u}{dt}(t) + A(t)u(t) - f(t) \right\|_{V^*}^{p'}\ dt = 0,$$

was nichts anderes bedeutet als

$$\frac{d_e u}{dt} + \mathcal{A}u = f \quad \text{in } L^{p'}(I; V).$$

Aufgabe 2

Wir zeigen, dass die Voraussetzungen des Instationaeren Lemmas von Lax-Milgram mit $\lambda = 0$ erfuellt sind, woraus die zu zeigende Aussage folgt.

Wohldefiniertheit

In Aufgabe 1 von Blatt 7 wurde bereits gezeigt, dass

$$(V, H, i) := \left(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega), L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega), \mathrm{id}_{W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}\right)$$

ein Gelfand-Dreier ist. Weiterhin ist V als Teilmenge von $L^2(\Omega)$ separabel und reflexiv. Der Operator $A : V \to V^*$ aus der Aufgabenstellung ist linear, da das Frobenius-Skalarprodukt bilinear und der Laplaceoperator linear ist.

Carathéodory- und $(2, 2)$-Majoranten-Bedingung

Wir zeigen, dass der lineare Operator $A : V \to V^*$ beschraenkt ist. Hieraus folgt naemlich erstens die Stetigkeit und somit die Demistetigkeit von A, d.h. die Carathéodorybedingung ist erfuellt. Zweitens impliziert die Beschraenktheit auch die $(2, 2)$-Majoranten-Bedingung mit $\gamma = 0$. Es seien also $v, w \in V$ beliebig. Dann gilt nach der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung

$$\langle Av, w\rangle_V = \int_\Omega \nabla v : \nabla w \; dx \leq \| |\nabla v| |\nabla w| \|_{L^1(\Omega)}$$

und durch Anwendung der Hoelderschen Ungleichung

$$\| |\nabla v| |\nabla w| \|_{L^1(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|_V \|w\|_V .$$

Zusammengefasst gilt

$$\|Av\|_{V^*} = \sup_{w \neq 0} \frac{\langle Av, w\rangle_V}{\|w\|_V} \leq \|v\|_V ,$$

d.h. der Operator A ist beschraenkt.

Semikoerzivitaet-Bedingung

Fuer beliebige Elemente $v \in V$ gilt

$$\langle Av, v\rangle_V = \int_\Omega |\nabla v|^2 \; dx = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} = \|v\|^2_V .$$

Insbesondere ist $\lambda = 0$, d.h. die Loesung ist eindeutig.