Aufgabe 1

Injektivitaet

Es seien $f \in L^{p'}(I; V^*)$ und $u_0 \in H$ beliebige Daten sowie $u_j \in W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ fuer $j = 1, 2$ Loesungen, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{d_e u_j}{dt} + \mathcal{A}u = f \qquad & \text{in } L^{p'}(I; V^*) \\ (i_c u_j)(0) = u_0 \qquad & \text{in } H. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(i)

Es sei $g \in (L^q(I))^* = L^{q'}(I)$ beliebig, aber fest. Wir zeigen die Aussage zuerst fuer Treppenfunktionen $s \in \mathcal{S}(I) \subseteq L^{q'}(I)$ und anschliessend den allgemeinen Fall.

$s \in \mathcal{S}(I)$

Da $s \in \mathcal{S}(I)$ eine Treppenfunktion ist, existieren fuer $i = 1, \dots, m$ Konstanten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte Intervalle $I_i \subseteq I$ mit

$$s(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i}(t).$$

Daraus folgt

$$\langle s, f_n \rangle_{L^q(I)} = \int_I s(t) f_n(t) \ dt = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_{I_i} \sin(nt) \ dt$$

und wegen

$$\int_{I_i} \sin(nt) \ dt = -\frac{1}{n} [\cos(nt)]_{t=\inf I_i}^{t=\sup I_i}$$

erhalten wir

$$|\langle s, f_n \rangle_{L^q(I)}| \leq \frac{1}{n} \cdot 2\pi \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \to 0.$$

$g \in L^{q'}(I)$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\mathcal{S}(I)$ dicht in $L^{q'}(I)$ liegt, existiert eine Treppenfunktion $s \in \mathcal{S}(I)$ mit

$$\|g - s\|_{L^{q'}(I)} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi + 1}.$$

Weiterhin existiert nach (i) ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass fuer alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt

$$|\langle s, f_n \rangle_{L^q(I)}| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi + 1}.$$

Offensichtlich impliziert die Hoeldersche Ungleichung

$$|\langle g - s, f_n \rangle_{L^q(I)}| \leq \|(g-s) f_n\|_{L^1(I)} \leq \|g - s\|_{L^{q'}(I)} \|f_n\|_{L^q(I)} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi + 1} 2\pi,$$

d.h. insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\langle g, f_n \rangle_{L^q(I)}| &\leq |\langle g - s, f_n \rangle_{L^q(I)}| &&+ |\langle s, f_n \rangle_{L^q(I)}| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi + 1} 2\pi &&+ \frac{\varepsilon}{2\pi + 1} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

(ii)

Offensichtlich gilt

$$\|f_n\|_{L^2(I)}^2 = \int_I \sin^2(nt)\ dt = \int_I \sin(nt) \cdot \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{n} \cos(nt) \right)\ dt$$

und mit der klassischen partiellen Integration folgt

$$\int_I \sin^2(nt)\ dt = \left[-\frac{1}{n} \sin(nt) \cos(nt) \right]_{t=0}^{t=2\pi} + \frac{1}{n} \int_I \frac{d}{dt} (\sin(nt)) \cos(nt)\ dt.$$

Wegen $\sin(0) = 0 = \sin(2\pi n)$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ verschwindet der erste Term, d.h.

$$\int_I \sin^2(nt)\ dt = \int_I \cos^2(nt)\ dt$$

und wegen

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

folgt

$$2 \int_I \sin^2(nt)\ dt = \int_I 1\ dt = 2\pi.$$

Alles in allem erhalten wir

$$\|f_n\|_{L^2(I)}^2 = \pi$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3

Wegen $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(I)$ gilt fuer alle $g \in (L^p(I))^* = L^{p'}(I)$

$$\langle g, f_n \rangle_{L^p(I)} = \int_I g(t) f_n(t) \; dt \to \int_I g(t) f(t) \; dt = \langle g, f \rangle_{L^p(I)}.$$

Es sei $v \in (L^p(I;X))^* = L^{p'}(I;X^*)$ beliebig. Dann gilt

$$\langle v, u_n \rangle_{L^p(I;X)} = \int_I \langle v(t), x f_n(t) \rangle_X \; dt = \int_I f_n(t) \langle v(t), x \rangle_X \; dt,$$

d.h. falls wir zeigen koennen, dass gilt

$$t \mapsto \langle v(t), x \rangle_X \in L^{p'}(I),$$

dann folgt

$$\langle v, u_n \rangle_{L^p(I;X)} \to \langle v, u \rangle_{L^p(I;X)}.$$

Wegen der linearen Beschraenktheit der dualen Paarung gilt

$$\int_I |\langle v(t), x \rangle_X|^{p'} \; dt \leq \|x\|_X^{p'} \int_I \|v(t)\|_{X^*}^{p'} \; dt = \|x\|_X^{p'} \|v\|_{L^{p'}(I;X^*)}^{p'}$$

und nach Annahme $v \in L^{p'}(I;X^*)$. Hiermit haben wir gezeigt

$$t \mapsto \langle v(t), x \rangle_X \in L^{p'}(I),$$

und schlussendlich

$$\langle v, u_n \rangle_{L^p(I;X)} \to \langle v, u \rangle_{L^p(I;X)}.$$

Aufgabe 4

Wir zeigen die Kanzellierungseigenschaft des konvektiven Terms zuerst fuer Testfunktionen

$$\varphi \in \mathcal{V} = \{\phi \in (C_c^\infty(\Omega))^d \mid \nabla \cdot \phi = 0 \;\text{ in } \Omega\},$$

wobei $\cdot$ das euklidische Skalarprodukt kennzeichnet. Anschliessend zeigen wir, dass daraus die Kanzellierungseigenschaft fuer beliebige Funktionen

$$v \in W_{0,\sigma}^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{(W^{1,p}(\Omega))^d}}$$

folgt.

$\varphi \in \mathcal{V}$

Fuer das dyadische Produkt gilt

$$\varphi \otimes \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1\varphi_1 & \cdots & \varphi_1\varphi_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_d\varphi_1 & \cdots & \varphi_d\varphi_d \end{bmatrix} = [\varphi_1\varphi, \ldots, \varphi_d\varphi] = [\varphi_i\varphi]_{i=1,\ldots,d}$$

und fuer den Gradienten

$$\nabla\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla\varphi_1^T \\ \vdots \\ \nabla\varphi_1^T \end{bmatrix} = \left[\nabla\varphi_i^T\right]_{i=1,\ldots,d}$$

Somit folgt, da $\varphi \otimes \varphi$ symmetrisch ist

$$\varphi \otimes \varphi : \nabla\varphi = \sum_{i=1}^d \varphi_i\varphi \cdot \nabla\varphi_i.$$

Fuer $i = 1, \ldots, d$ erhalten wir mit dem Satz von Gauss

$$\int_\Omega \varphi_i\varphi \cdot \nabla\varphi_i \; dx = \int_{\partial\Omega} \varphi_i\varphi \cdot \nu \; dO - \int_\Omega \varphi_i\nabla \cdot \varphi \; dx,$$

wobei $\nu \in C^1(\Omega)$ das aeussere Normaleneinheitsfeld ist. Wegen $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega$ verschwindet der erste Term und wegen $\nabla \cdot \varphi = 0$ der zweite, also

$$\int_\Omega \varphi_i\varphi \cdot \nabla\varphi_i \; dx = 0$$

und somit letztendlich

$$\langle C\varphi, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} = -\int_\Omega \varphi \otimes \varphi : \nabla\varphi \; dx = -\sum_{i=1}^d \int_\Omega \varphi_i\varphi \cdot \nabla\varphi_i \; dx = 0.$$

$v \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$

Es seien $v \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $\varphi \in \mathcal{V}$ mit

$$\|v - \varphi\|_{(W^{1,p}(\Omega))^d} < \frac{\varepsilon}{1 + \|\varphi\|^2_{(L^{2p'}(\Omega))^d} + 2\||\varphi||\nabla\varphi|\|_{L^{p'}(\Omega)}} =: \delta$$

Durch Einfuegen von

$$\begin{aligned} \langle Cv, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} - \langle Cv, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} &= 0 \\ \langle C\varphi, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} - \langle C\varphi, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} &= 0 \\ \langle C\varphi, v - \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} - \langle C\varphi, v - \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} &= 0 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle Cv, v\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} = \langle Cv - C\varphi, v-\varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} + \langle C\varphi, v-\varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} \\ + \langle Cv - C\varphi, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} + \langle C\varphi, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}\end{aligned}$$

Wir betrachten die einzelnen Summanden getrennt.

$\langle C\varphi, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} = 0$

Das haben wir bereits im vorherigen Abschnitt gezeigt

$\langle Cv - C\varphi, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}$

Nach dem Satz von Cauchy-Schwartz gilt

$$\begin{aligned}|\langle Cv - C\varphi, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}| &= \left|\int_\Omega (v\otimes v - \varphi\otimes\varphi) : \nabla\varphi \; dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |v\otimes v - \varphi\otimes\varphi||\nabla\varphi| \; dx\end{aligned}$$

und durch Hinzufuegen von $v\otimes\varphi - v\otimes\varphi$ und $\varphi\otimes(v-\varphi) - \varphi\otimes(v-\varphi)$ folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v\otimes v - \varphi\otimes\varphi||\nabla\varphi| \; dx &\leq \int_\Omega |(v-\varphi)\otimes(v-\varphi)||\nabla\varphi| \; dx \\ &+ \int_\Omega |(v-\varphi)\otimes\varphi||\nabla\varphi| \; dx. + \int_\Omega |\varphi\otimes(v-\varphi)||\nabla\varphi| \; dx.\end{aligned}$$

Wegen $|x\otimes y| = |x||y|$ erhalten wir

$$\int_\Omega |v\otimes v - \varphi\otimes\varphi||\nabla\varphi| \; dx \leq \int_\Omega |v-\varphi|^2|\nabla\varphi| \; dx + 2\int_\Omega |v-\varphi||\varphi||\nabla\varphi| \; dx.$$

Anwendung der Hoelderungleichung liefert

$$\begin{aligned}|\langle Cv - C\varphi, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}| &\leq \|v-\varphi\|^2_{(L^p(\Omega))^d}\|\nabla\varphi\|_{(L^{(\frac{p}{2})'}(\Omega))^{d,d}} \\ &+ 2\|v-\varphi\|_{(L^p(\Omega))^d}\||\varphi||\nabla\varphi|\|_{L^{p'}(\Omega)},\end{aligned}$$

d.h. es folgt

$$|\langle Cv - C\varphi, \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}| \leq \delta^2\|\nabla\varphi\|_{(L^{(\frac{p}{2})'}(\Omega))^{d,d}} + 2\delta\||\varphi||\nabla\varphi|\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

$\langle C\varphi, v-\varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}$

Nach den Ungleichungen von Cauchy-Schwartz und Hoelder gilt

$$\begin{aligned}|\langle C\varphi, v-\varphi\rangle| \leq \int_\Omega |\varphi|^2|\nabla v - \nabla\varphi| \; dx &\leq \|\varphi\|^2_{(L^{2p'}(\Omega))^d}\|v-\varphi\|_{(W^{1,p}(\Omega))^d} \\ &\leq \delta\|\varphi\|^2_{(L^{2p'}(\Omega))^d}\end{aligned}$$

$\langle Cv - C\varphi, v - \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}$

Nach den Ungleichungen von Cauchy-Schwartz und Hoelder gilt

$$\begin{aligned}|\langle Cv - C\varphi, v - \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}| &\leq \int_\Omega |v-\varphi|^2 |\nabla v - \nabla\varphi| \; dx \\ &\leq \|v-\varphi\|^2_{L^{2p'}(\Omega)} \|v-\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Wir wollen den Kompaktheitssatz von Rellich anwenden. Es gilt

$$p \geq \frac{3d+2}{d+2} > \frac{3d}{d+2} = \frac{3}{2}\frac{2d}{d+2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{d}\right)^{-1},$$

was aequivalent ist zu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{d} > \frac{3}{2p}$$

und

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{d} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2p'}.$$

Hieraus folgt

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{2p'}(\Omega),$$

d.h.

$$\|v-\varphi\|^2_{L^{2p'}(\Omega)} < \delta^2 < \delta.$$

Alles in allen erhalten wir

$$|\langle Cv - C\varphi, v - \varphi\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)}| \leq \delta.$$

Zusammengefasst haben wir gezeigt

$$\langle Cv, v\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} \leq \delta + \delta\|\varphi\|^2_{(L^{2p'}(\Omega))^d} + 2\delta\||\varphi||\nabla\varphi|\|_{L^{p'}(\Omega)} = \varepsilon.$$