Differentialgleichungen III, Übungsblatt 7

Dr. A. Kaltenbach SoSe 2024

Aufgabe 1 (Gelfand-Dreier für p-Navier–Stokes-Gleichungen)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet und

$$\mathcal{V} := \left\{ \phi \in (C_c^\infty(\Omega))^d \mid \operatorname{div} \phi = 0 \text{ in } \Omega \right\}.$$

Definiere weiter für $p \in (1, \infty)$

$$W^{1,p}_{0,\operatorname{div}}(\Omega) := \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{(W^{1,p}_0(\Omega))^d}} \qquad \text{und} \qquad L^2_{0,\operatorname{div}}(\Omega) := \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{(L^2(\Omega))^d}}.$$

Zeigen Sie, dass für $p \geq \frac{2d}{d+2}$ das Tripel

$$(V, H, i) := \left(W^{1,p}_{0,\operatorname{div}}(\Omega), L^2_{0,\operatorname{div}}(\Omega), \operatorname{id}_{W^{1,p}_{0,\operatorname{div}}(\Omega)} \right),$$

ein Gelfand-Dreier bildet.

Aufgabe 2 (Verallgemeinerte partielle Integrationsformel für differenzierbare Funktionen)

Sei (V, H, i) ein Gelfand-Dreier und $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$.

Zeigen Sie ohne Verwendung der verallgemeinerten partiellen Integrationsformel (vgl. Theorem 5.6), dass für alle $u, v \in C^1(\overline{I}; V)$ und $t, t' \in \overline{I}$ mit $t' \leq t$ gilt, dass

$$\int_{t'}^{t} \left\langle \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}(s), v(s) \right\rangle_V \mathrm{d}s = \left[(i(u(s)), i(v(s)))_H \right]_{s=t'}^{s=t} - \int_{t'}^{t} \left\langle \frac{\mathrm{d}_e v}{\mathrm{d}t}(s), u(s) \right\rangle_V \mathrm{d}s.$$

Aufgabe 3 (Induzierter Operator)

Sei X, Y Banach-Räume, $p, q \in [1, \infty)$ und $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$.

Zeigen Sie, dass falls eine Familie von stetigen Operatoren $A(t)\colon X \to Y$, $t \in I$, der Caratheodory- (vgl. Definition 6.3(i)) und der (p, q)-Majoranten-Bedingung (vgl. Definition 6.3(ii)) genügt, dass dann der induzierte Operator $\mathcal{A}\colon L^p(I; X) \to L^q(I; Y)$ stetig ist.

Aufgabe 4 (Teilfolgenkonvergenzprinzip)

Sei X ein Banach-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass ein Element $x \in X$ existiert, sodass für jede Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine weitere Teilfolge $(n_k')_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass

$$x_{n_k'} \to x \quad \text{in } X \quad (k \to \infty).$$

Zeigen Sie, dass

$$x_n \to x \quad \text{in } X \quad (n \to \infty).$$