Differentialgleichungen III, Übungsblatt 9

Dr. A. Kaltenbach SoSe 2024

Aufgabe 1 (Instationärer Satz von Browder–Minty)

Sei (V, H, i) ein Gelfand-Dreier, wobei V separabel und reflexiv ist, $p \in (1, \infty)$ und $I \coloneqq (0, T)$, $0 < T < \infty$.

Sei weiter $A(t)\colon V \to V^*$, $t \in I$, eine Familie von monotonen Operatoren, die den Voraussetzungen des instationären Satzes von Browder–Minty (*cf.* Theorem 6.17) genügt.

Zeigen Sie, dass falls $\lambda = 0$, der Operator

$$\left(\frac{\mathrm{d}_e}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}, (i_c \cdot)(0)\right)^{\top} : W_e^{1,p,p'}(I; V, V^*) \to L^{p'}(I; V^*) \times H\,,$$

eine Bijektion mit demi-stetiger Inversen.

Aufgabe 2 (Eine lästige, aber nützliche Folge)

Sei $I = (0, 2\pi)$ und die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{I})$, für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_n(t) \coloneqq \sin(nt) \qquad \text{für alle } t \in \overline{I}\,.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^q(I)$ $(n \to \infty)$ für alle $q \in [1, \infty)$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|^2_{L^2(I)} = \pi$.

Aufgabe 3

Sei X eine Banach-Raum, $p \in (1, \infty)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x \in X$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I)$ eine Folge, sodass

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } L^p(I) \quad (n \to \infty)\,.$$

Zeigen Sie, dass für die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I; X)$, für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$u_n(t) \coloneqq x f_n(t) \quad \text{in } X \quad \text{für f.a. } t \in I\,,$$

gilt, dass

$$u_n \rightharpoonup u \quad L^p(I; X) \quad (n \to \infty)\,.$$

Aufgabe 4 (Kanzellierungseigenschaft des konvektiven Terms)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet und $p \in [\frac{3d+2}{d+2}, \infty)$.

Zeigen Sie, dass der stationäre konvektive Term $C\colon W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega) \to (W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega))^*$, für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ definiert durch

$$\langle C\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} \coloneqq -\int_\Omega \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \,\mathrm{d}x\,,$$

die Kanzellierungseigenschaft hat, d.h. für alle $\mathbf{v} \in W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)$ gilt, dass

$$\langle C\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_{W^{1,p}_{0,\sigma}(\Omega)} = 0\,.$$