Differentialgleichungen III, Übungsblatt 8

Dr. A. Kaltenbach — SoSe 2024

Aufgabe 1 (Äquivalente Formulierungen)

Sei (V,H,i) ein Gelfand-Dreier, $p\in(1,+\infty)$ und $I\coloneqq(0,T)$, $0<T<\infty$. Sei weiter $f\in L^{p'}(I;V^*)$, $u_0\in H$ und $\mathcal{A}\colon W_e^{1,p,p'}(I;V,V^*)\to L^{p'}(I;V^*)$ induziert durch die Familie von Operatoren $A(t)\colon V\to V^*$, $t\in I$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Operatorformulierung: Es gilt, dass

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}+\mathcal{A}u&=f &&\text{in } L^{p'}(I;V^*)\,,\\ u_c(0)&=u_0 &&\text{in } H\,.\end{aligned}$$

(ii) Punktweise Formulierung: Es gilt, dass

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}(t)+A(t)(u(t))&=f(t) &&\text{in } V^*\,,\\ u_c(0)&=u_0 &&\text{in } H\,.\end{aligned}$$

(iii) Schwache Formulierung: Für alle $v\in V$ und $\varphi\in C^\infty(\overline{I})$ mit $\varphi(T)=0$ gilt, dass

$$\int_I((iu)(t),iv)_H\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=(u_0,iv)_H\varphi(0)+\int_I\langle f(t)-A(t)(u(t)),v\rangle_V\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe 2 (Instationäre Stokes-Gleichungen)

Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$, ein beschränktes Gebiet,

$$(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega),L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega),\mathrm{id}_{W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)})$$

der Gelfand-Dreier aus Aufgabe 1 von Blatt 7, und $I\coloneqq(0,T)$, $0<T<\infty$.

Zeigen Sie, dass zu jedem Paar von Daten $(f,u_0)\in L^2(I;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)\times L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ ein eindeutiges $u\in W_e^{1,2,2}(I;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega),(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$ mit einem stetigen Repräsentanten $u_c\in C^0(\overline{I};L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$ existiert, sodass

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}+\mathcal{A}u&=f &&\text{in } L^2(I;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)\,,\\ u_c(0)&=u_0 &&\text{in } L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)\,,\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{A}\colon L^2(I;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))\to L^2(I;(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*)$, für alle $v\in L^2(I;W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))$ definiert durch

$$(\mathcal{A}v)(t)\coloneqq A(v(t))\quad\text{in } (W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*\quad\text{für f.a. } t\in I\,,$$

den instationären schwachen Laplace bezeichnet, wobei $A\colon W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)\to(W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*$, für alle $v,w\in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ definiert durch

$$\langle Av,w\rangle_{W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)}\coloneqq\int_\Omega\nabla v:\nabla w\,\mathrm{d}x$$

den stationären schwachen Laplace bezeichnet.

Hierbei bezeichnen wir für zwei Matrizen $\mathrm{B}=(b_{ij})_{i,j=1,\dots,d},\mathrm{C}=(c_{ij})_{i,j=1,\dots,d},\in\mathbb{R}^{d\times d}$ mit $\mathrm{B}:\mathrm{C}\coloneqq\sum_{i,j=1}^d b_{ij}c_{ij}$ das Frobenius-Skalarprodukt.