

Aufgabe 1

“(i) \Rightarrow (ii)”

Es gilt

$$\frac{d_e u}{dt} + \mathcal{A}u = f \quad \text{in } L^{p'}(I; V),$$

was äquivalent ist zu

$$\int_I \left\| \frac{d_e u}{dt}(t) + A(t)u(t) - f(t) \right\|_{V^*}^{p'} dt = 0,$$

denn \mathcal{A} ist nach Voraussetzung ein induzierter Operator. Hieraus folgt wiederum

$$\frac{d_e u}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t) \quad \text{in } V^*$$

für fast alle $t \in I$, was genau die punktweise Formulierung ist.

“(ii) \Rightarrow (iii)”

Für fast alle $t \in I$ gilt

$$\frac{d_e u}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t) \quad \text{in } V^*$$

d.h. für alle $v \in V$ gilt

$$\left\langle \frac{d_e u}{dt}(t) + A(t)u(t), v \right\rangle_V = \langle f(t), v \rangle_V.$$

Da die Gleichheit für fast alle $t \in I$ gilt, folgt für beliebige $v \in V$

$$\int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V dt = \int_I \langle f(t) - A(t)u(t), v \rangle_V dt.$$

Korollar 4.9 und die Linearität von e erlauben es uns die Ableitung aus der dualen Paarung herauszuziehen

$$\int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V dt = \int_I \frac{d}{dt} \langle e(u(t)), v \rangle_V dt,$$

sodass wir mit einer Testfunktion $\varphi \in C^\infty(\bar{I})$ multiplizieren und die **Standardformel für partielle Integration** anwenden können

$$\int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t) dt = [\langle e(u(t)), v \rangle_V \varphi(t)]_{t=0}^{t=T} - \int_I \langle e(u(t)), v \rangle_V \varphi'(t) dt.$$

Nach Voraussetzung setzen wir $\varphi(T) = 0$ und wenden Satz 5.2 (über Gelfand-Dreier) an, wodurch folgt

$$\int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t) dt = -(u_0, iv)_H \varphi(0) - \int_I ((iu)(t), iv)_H \varphi'(t) dt.$$

Alles in allem gilt also

$$-(u_0, iv)_H \varphi(0) - \int_I ((iu)(t), iv)_H \varphi'(t) dt = \int_I \langle f(t) - A(t)u(t), v \rangle_V dt,$$

d.h.

$$\int_I \langle f(t) - A(t)u(t), v \rangle_V dt + (u_0, iv)_H \varphi(0) + \int_I ((iu)(t), iv)_H \varphi'(t) dt = 0.$$

“(iii) \Rightarrow (i)”

Es sei $v \in V$ und $\varphi(T) \in C^\infty(\bar{I})$ mit $\varphi(T) = 0$ beliebig. Dann folgt aus Satz 5.2 (ueber Gelfand-Dreier)

$$\int_I ((iu)(t), iv)_H \varphi'(t) dt = \int_I \langle e(u(t)), v \rangle_V \varphi'(t) dt$$

und mit der **Standardformel fuer partielle Integration**, Korollar 4.9 und der Linearitaet von e

$$\int_I \langle e(u(t)), v \rangle_V \varphi'(t) dt = [\langle e(u_c(t)), v \rangle_V \varphi(t)]_{t=0}^{t=T} - \int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t) dt.$$

Durch $\varphi(T) = 0$ und erneute Anwendung von Satz 5.2 (ueber Gelfand-Dreier) folgt

$$\int_I ((iu)(t), iv)_H \varphi'(t) dt = -((iu_c)(0), iv)_H \varphi(0) - \int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t) dt.$$

Setzen wir diese Identitaet in die Voraussetzung ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_I \langle f(t) - A(t)u(t), v \rangle_V dt + (u_0, iv)_H \varphi(0) \\ - ((iu_c)(0), iv)_H \varphi(0) - \int_I \left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t) dt = 0. \end{aligned}$$

oder aequivalent

$$(u_0 - (iu_c)(0), iv)_H \varphi(0) + \int_I \left\langle f(t) - A(t)u(t) - \frac{d_e u}{dt}(t), v \right\rangle_V \varphi(t) dt = 0.$$

Da φ und v variabel sind, folgt fuer fast alle $t \in I$

$$\begin{aligned} u_0 - (iu_c)(0) &= 0 \quad \text{in } H \\ f(t) - A(t)u(t) - \frac{d_e u}{dt}(t) &= 0 \quad \text{in } V^*. \end{aligned}$$

Durch Integration der V^* -Norm der zweiten Gleichung ueber I folgt

$$\int_I \left\| \frac{d_e u}{dt}(t) + A(t)u(t) - f(t) \right\|_{V^*}^{p'} dt = 0,$$

was nichts anderes bedeutet als

$$\frac{d_e u}{dt} + \mathcal{A}u = f \quad \text{in } L^{p'}(I; V).$$

Aufgabe 2

Wir zeigen, dass die Voraussetzungen des Instationären Lemmas von Lax-Milgram mit $\lambda = 0$ erfüllt sind, woraus die zu zeigende Aussage folgt.

Wohldefiniertheit

In Aufgabe 1 von Blatt 7 wurde bereits gezeigt, dass

$$(V, H, i) := \left(W_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega), L_{0,\text{div}}^2(\Omega), \text{id}_{W_{0,\text{div}}^{1,2}(\Omega)} \right)$$

ein Gelfand-Dreier ist. Weiterhin ist V als Teilmenge von $L^2(\Omega)$ separabel und reflexiv. Der Operator $A : V \rightarrow V^*$ aus der Aufgabenstellung ist linear, da das Frobenius-Skalarprodukt bilinear und der Laplaceoperator linear ist.

Carathéodory- und (2, 2)-Majoranten-Bedingung

Wir zeigen, dass der lineare Operator $A : V \rightarrow V^*$ beschränkt ist. Hieraus folgt nämlich erstens die Stetigkeit und somit die Dichtestetigkeit von A , d.h. die Carathéodorybedingung ist erfüllt. Zweitens impliziert die Beschränktheit auch die (2, 2)-Majoranten-Bedingung mit $\gamma = 0$. Es seien also $v, w \in V$ beliebig. Dann gilt nach der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung

$$\langle Av, w \rangle_V = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w \, dx \leq \| |\nabla v| | \nabla w \|_{L^1(\Omega)}$$

und durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\| |\nabla v| | \nabla w \|_{L^1(\Omega)} \leq \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla w \|_{L^2(\Omega)} = \| v \|_V \| w \|_V.$$

Zusammengefasst gilt

$$\| Av \|_{V^*} = \sup_{w \neq 0} \frac{\langle Av, w \rangle_V}{\| w \|_V} \leq \| v \|_V,$$

d.h. der Operator A ist beschränkt.

Semikoerzivitaet-Bedingung

Für beliebige Elemente $v \in V$ gilt

$$\langle Av, v \rangle_V = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx = \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)}^2 = \| v \|_V^2.$$

Insbesondere ist $\lambda = 0$, d.h. die Lösung ist eindeutig.