Differentialgleichungen III, Übungsblatt 1

Dr. A. Kaltenbach SoSe 2024

Aufgabe 1 (Young-Ungleichung)

Sei $p \in (1,\infty)$, $a, b \geq 0$ und $\varepsilon > 0$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(ii) $ab \leq \varepsilon a^p + \frac{(\varepsilon p)^{1-p'}}{p'}b^{p'}$.

Aufgabe 2 (Elementare Eigenschaften des Bochner–Lebesgue-Raums $L^1(I;X)$)

Sei X ein Banachraum und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $(L^1(I;X), \|\cdot\|_{L^1(I;X)})$ ist ein normierter Vektorraum.

(ii) $\mathcal{S}(I;X)$ liegt dicht in $L^1(I;X)$.

Aufgabe 3 (Elementare Eigenschaften des Bochner-Integrals)

Sei X ein Banachraum und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) **Linearität:** Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in L^1(I;X)$ gilt, dass

$$\int_I \{\alpha\, u + \beta\, v\}(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_I u(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_I v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(ii) **Stetigkeit:** Für alle $u \in L^1(I;X)$ gilt, dass

$$\left\| \int_I u(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_I \|u(t)\|_X\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe 4 (Stetige Funktionen auf Raum-Zeit-Zylinder)

Für ein Zeitintervall $I = (0,T)$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, bezeichne $Q_T \coloneqq (0,T) \times \Omega$ den zugehörigen Raum-Zeit-Zylinder.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $C^0(\overline{I};C^0(\overline{\Omega}))$ ist isometrisch Isomorph zu $C^0(\overline{Q_T})$.

(ii) Falls $u \in C^0(\overline{Q_T})$ und $\tilde{u} \in C^0(\overline{I};C^0(\overline{\Omega}))$ so, dass

$$\tilde{u}(t) \coloneqq u(t,\cdot) \quad \text{in } C^0(\overline{\Omega}) \quad \text{für alle } t \in \overline{I}\,,$$

dann hat $u \in C^0(\overline{Q_T})$ genau dann eine partielle Zeitableitung $\partial_t u \in C^0(\overline{Q_T})$, falls $\tilde{u} \in C^1(\overline{I};C^0(\overline{\Omega}))$. Insbesondere gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t}(t) = (\partial_t u)(t,\cdot) \quad \text{in } C^0(\overline{\Omega}) \quad \text{für alle } t \in \overline{I}\,.$$