

## Aufgabe 1

Wir zeigen, dass  $W_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega)$  ein Banachraum,  $L_{0,\text{div}}^2(\Omega)$  ein Hilbertraum und  $i : W_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_{0,\text{div}}^2(\Omega)$  eine dichte Einbettung ist.

### $W_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum

Eine moegliche Wahl fuer die Norm auf  $W_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega)$  ist gegeben durch

$$\|\cdot\|_{W_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega)} : W_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v = (v_1, \dots, v_d)^T \mapsto \left( \sum_{j=1}^d \|v_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Vollstaendigkeit folgt daraus, dass

$$W_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega) \subseteq (W_0^{1,p}(\Omega))^d$$

abgeschlossen bezueglich der  $(W_0^{1,p}(\Omega))^d$ -Norm ist.

### $L_{0,\text{div}}^2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum

Da  $L^2(\Omega)$  ein Hilbertraum ist, ist  $L_{0,\text{div}}^2(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$  ebenfalls ein Hilbertraum. Eine moegliche Wahl fuer die Norm ist

$$\|\cdot\|_{L_{0,\text{div}}^2(\Omega)} : L_{0,\text{div}}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v = (v_1, \dots, v_d)^T \mapsto \sqrt{\sum_{j=1}^d \|v_j\|_{L_0^2(\Omega)}^2}.$$

### $i : W_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_{0,\text{div}}^2(\Omega)$ ist eine dichte Einbettung

Offensichtlich ist  $i$  linear. Dann ist  $i$  injektiv, falls die Abbildung einen trivialen Kern hat. Wir werden den Sobolevschen Einbettungssatz benutzen. Nach Voraussetzung gilt

$$p \geq \frac{2d}{d+2} = \left( \frac{d+2}{2d} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{d} \right)^{-1},$$

was aequivalent ist zu

$$p \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{d} \right) \geq 1$$

und

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{d}.$$

Somit existiert eine Konstante  $c > 0$ , sodass fuer alle  $v \in W^{1,p}(\Omega)$  gilt

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Es sei

$$v = (v_1, \dots, v_d)^T \in W_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega)$$

beliebig mit

$$\|v\|_{L_{0,\text{div}}^2(\Omega)} = 0.$$

Dann folgt

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$$

d.h.  $i$  ist injektiv.

Ausserdem ist  $i$  stetig. Es sei  $v \in W_{0,\text{div}}^{1,p}(\Omega)$  beliebig. Dann gilt

$$\|iv\|_{L^2(\Omega)} \leq \|iv\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

d.h.  $i$  ist beschränkt und als lineare Abbildung somit stetig.

Es bleibt also zu zeigen, dass  $R(i)$  dicht in  $L_{0,\text{div}}^2(\Omega)$  liegt. Es sei  $v \in L_{0,\text{div}}^2(\Omega)$  beliebig. Dann existiert eine Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}$  mit

$$v_n \rightarrow v \quad \text{in } (L^2(\Omega))^d.$$

Wegen  $\mathcal{V} \subseteq V$  und  $iv_n = v_n$  liegt somit  $R(i)$  dicht in  $L_{0,\text{div}}^2(\Omega)$ .

## Aufgabe 2

Nach Korollar 4.9 gilt

$$\frac{d_e u}{dt} = e \left( \frac{du}{dt} \right),$$

d.h. Satz 5.2 (ueber Gelfand-Dreier) und die Linearitaet von  $i$  liefern

$$\left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v(t) \right\rangle_V = \left( \left( i \frac{du}{dt} \right)(t), (iv)(t) \right)_H = \left( \frac{d(iu)}{dt}(t), (iv)(t) \right)_H$$

fuer alle  $v \in C^1(\bar{I}; V)$ . Nach der Produktregel der klassischen Ableitung in Hilbertraeumen folgt

$$\left( \frac{d(iu)}{dt}(t), (iv)(t) \right)_H = \frac{d}{dt} ((iu)(t), (iv)(t))_H - \left( (iu)(t), \frac{d(iv)}{dt}(t) \right)_H.$$

Fuer den Subtrahent gilt

$$\left( (iu)(t), \frac{d(iv)}{dt}(t) \right)_H = \left( \left( i \frac{dv}{dt} \right)(t), (iu)(t) \right)_H,$$

da das reelle Skalarprodukt symmetrisch und  $i$  linear ist. Erneute Anwendung von Satz 5.2 (ueber Gelfand-Dreier) liefert

$$\left( \left( i \frac{dv}{dt} \right)(t), (iu)(t) \right)_H = \left\langle \frac{d_e v}{dt}(t), u(t) \right\rangle_V$$

und somit folgt mit dem klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{t'}^t \left\langle \frac{d_e u}{dt}(s), v(s) \right\rangle_V ds = [((iu)(s), (iv)(s))_H]_{s=t'}^{s=t} - \int_{t'}^t \left\langle \frac{d_e v}{ds}(s), u(s) \right\rangle_V ds$$

fuer  $t, t' \in \bar{I}$  mit  $t' \leq t$ .

### Aufgabe 3

Da die Operatorfamilie  $A(t) : X \rightarrow Y, t \in I$  der Caratheodory- und der  $(p, q)$ -Majoranten-Bedingung genuegt, folgt aus Lemma 6.6 (Nemyckii-Operator), dass der induzierte Operator  $\mathcal{A} : L^p(I; X) \rightarrow L^q(I; Y)$  wohldefiniert, beschaenkt und demi-stetig ist. Es bleibt also zu zeigen, dass  $\mathcal{A}$  zusaetzlich stetig ist. Es sei also

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(I; X)$$

eine beliebige Folge, die gegen ein Element  $u \in L^p(I; X)$  konvergiert. Wir werden das Teilfolgenkonvergenzprinzip aus Aufgabe 4 anwenden und betrachten deswegen eine beliebige Teilfolge

$$(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Wegen Korollar 2.8 (Umkehrung des Satzes von Lebesgue) existiert eine Teilfolge

$$(u_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} \subseteq (u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}},$$

sodass fuer fast alle  $t \in I$  gilt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} u_{n_{k_l}}(t) = u(t) \quad \text{in } X.$$

Aufgrund der Stetigkeit von  $A$  folgt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} A(t)u_{n_{k_l}}(t) = A(t)u(t) \quad \text{in } Y$$

und somit mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_I \|A(t)u(t) - A(t)u_{n_{k_l}}(t)\|_Y^q dt = 0,$$

d.h.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{A}u_{n_{k_l}} = \mathcal{A}u \quad \text{in } L^q(I; Y).$$

Nach dem Teilfolgenkonvergenzprinzip folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}u_n = \mathcal{A}u \quad \text{in } L^q(I; Y),$$

womit die Stetigkeit von  $\mathcal{A}$  folgt.

## Aufgabe 4

Wir betrachten die reelle Zahlenfolge

$$(\|x_n - x\|_X)_{n \in \mathbb{N}},$$

und definieren

$$\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X \in [0, \infty].$$

Dann existiert eine Teilfolge

$$(\|x_{n_k} - x\|_X)_{k \in \mathbb{N}},$$

mit

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x\|_X.$$

Nach Voraussetzung existiert eine weitere Teilfolge

$$(\|x_{n_{k_l}} - x\|_X)_{l \in \mathbb{N}},$$

mit

$$0 = \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_{k_l}} - x\|_X.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Grenzwerte folgt

$$\alpha = 0,$$

d.h.  $x_n \rightarrow x$  in  $X$ .