Differentialgleichungen III, Übungsblatt 4

Dr. A. Kaltenbach SoSe 2024

Aufgabe 1

Seien X, Y Banachräume und $j\colon X\to Y$ eine Einbettung.

Zeigen Sie, dass falls X reflexiv ist, für eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ und ein Element $x\in X$ aus

$$jx_n \rightharpoonup jx \quad \text{in } Y \quad (n\to\infty)\,,$$

folgt, dass

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{in } X \quad (n\to\infty)\,.$$

Aufgabe 2 ((Linear-)induzierte Einbettung/Isometrie/Isomorphismus)

Sei $p\in[1,\infty]$ und $A\colon X\to Y$ ein linearer und stetiger Operator.

Zeigen Sie, dass für den *(linear-)induzierten Operator* $\mathcal{A}\colon L^p(I;X)\to L^p(I;Y)$, für alle $u\in L^p(I;X)$ definiert durch

$$(\mathcal{A}u)(t) \coloneqq A(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für f.a. } t\in I\,,$$

die folgenden Aussagen gelten:

(i) Falls $A\colon X\to Y$ eine Einbettung ist, dann ist auch $\mathcal{A}\colon L^p(I;X)\to L^p(I;Y)$ eine Einbettung.

(ii) Falls $A\colon X\to Y$ eine Isometrie ist, dann ist auch $\mathcal{A}\colon L^p(I;X)\to L^p(I;Y)$ eine Isometrie.

(iii) Falls $A\colon X\to Y$ ein Isomorphismus ist, dann ist auch $\mathcal{A}\colon L^p(I;X)\to L^p(I;Y)$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 3 (L^∞-Stabilität des Faltungsglättungsoperators)

Sei $I\coloneqq(0,T)$, $0<T<\infty$, und $p\in[1,\infty]$.

Zeigen Sie, dass der *Faltungsglättungsoperator* $\mathcal{S}_I^h\colon L^p(I;X)\to C^\infty(\mathbb{R};X)$ (*cf.* Satz 2.15) L^∞-L^∞-stabil mit Konstante 1 ist, d.h. für alle $u\in L^\infty(I;X)$ gilt, dass

$$\|\mathcal{S}_I^h u\|_{L^\infty(\mathbb{R};X)} \le \|u\|_{L^\infty(I;X)} \quad \text{für alle } h>0\,.$$