Aufgabe 1

Wir zeigen, dass $W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ ein Banachraum, $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ ein Hilbertraum und $i : W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \to L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ eine dichte Einbettung ist.

$W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ ist ein Banachraum

Eine moegliche Wahl fuer die Norm auf $W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\|\cdot\|_{W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} : W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad v = (v_1, \ldots, v_d)^T \mapsto \left(\sum_{j=1}^{d} \|v_j\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Vollstaendigkeit folgt daraus, dass

$$W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \subseteq \left(W^{1,p}_0(\Omega)\right)^d$$

abgeschlossen bezueglich der $\left(W^{1,p}_0(\Omega)\right)^d$-Norm ist.

$L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum

Da $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum ist, ist $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ ebenfalls ein Hilbertraum. Eine moegliche Wahl fuer die Norm ist

$$\|\cdot\|_{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} : L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad v = (v_1, \ldots, v_d)^T \mapsto \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \|v_j\|^2_{L^2_0(\Omega)}}.$$

$i : W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \to L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ ist eine dichte Einbettung

Offensichtlich ist i linear. Dann ist i injektiv, falls die Abbildung einen trivialen Kern hat. Es sei

$$v = (v_1, \ldots, v_d)^T \in W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$$

beliebig mit

$$\|v\|_{L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \|v_j\|^2_{L^2_0(\Omega)}} = 0,$$

was aequivalent is zu

$$v_j = 0 \quad \text{fast ueberall}$$

fuer alle $j = 1, \ldots, d$. Hieraus folgt insbesondere

$$\nabla v = 0 \quad \text{fast ueberall}$$

und somit

$$v = 0 \quad \text{in } W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega),$$

d.h. i ist injektiv. Es bleibt also zu zeigen, dass $R(i)$ dicht in $L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ liegt. Es sei $v \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ beliebig. Dann existiert eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega) \subseteq V$ mit

$$v_n \to v \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

Hier muss mit $\nabla \cdot v = 0$ und der p, d-Ungleichung gearbeitet werden

Aufgabe 2

Nach Korollar 4.9 gilt

$$\frac{d_e u}{dt} = e\left(\frac{du}{dt}\right),$$

d.h. Satz 5.2 (ueber Gelfand-Dreier) und die Linearitaet von i liefern

$$\left\langle \frac{d_e u}{dt}(t), v(t) \right\rangle_V = \left(\left(i\frac{du}{dt} \right)(t), (iv)(t) \right)_H = \left(\frac{d\,(iu)}{dt}(t), (iv)(t) \right)_H$$

fuer alle $v \in C^1(\overline{I}; V)$. Nach der Produktregel der klassischen Ableitung in Hilbertraeumen folgt

$$\left(\frac{d\,(iu)}{dt}(t), (iv)(t) \right)_H = \frac{d}{dt}\left((iu)\,(t), (iv)(t) \right)_H - \left((iu)\,(t), \frac{d(iv)}{dt}(t) \right)_H.$$

Fuer den Subtrahent gilt

$$\left((iu)\,(t), \frac{d(iv)}{dt}(t) \right)_H = \left(\left(i\frac{dv}{dt} \right)(t), (iu)(t) \right)_H,$$

da das reelle Skalarprodukt symmetrisch und i linear ist. Erneute Anwendung von Satz 5.2 (ueber Gelfand-Dreier) liefert

$$\left(\left(i\frac{dv}{dt} \right)(t), (iu)(t) \right)_H = \left\langle \frac{d_e v}{dt}(t), u(t) \right\rangle_V$$

und somit folgt mit dem klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{t'}^{t} \left\langle \frac{d_e u}{dt}(s), v(s) \right\rangle_V \, ds = \left[\left((iu)\,(s), (iv)(s) \right)_H \right]_{s=t'}^{s=t} - \int_{t'}^{t} \left\langle \frac{d_e v}{ds}(s), u(s) \right\rangle_V \, ds$$

fuer $t, t' \in \overline{I}$ mit $t' \le t$.

Aufgabe 3

Da die Operatorfamilie $A(t) : X \to Y, t \in I$ der Caratheodory- und der (p,q)-Majoranten-Bedingung genuegt, folgt aus Lemma 6.6 (Nemyckii-Operator), dass der induzierte Operator $\mathcal{A} : L^p(I; X) \to L^q(I; Y)$ wohldefiniert, beschraenkt und demi-stetig ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ zusaetzlich stetig ist. Es sei also

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(I; X)$$

eine beliebige Folge, die gegen ein Element $u \in L^p(I; X)$ konvergiert. Wir werden das Teilfolgenkonvergenzprinzip aus Aufgabe 4 anwenden und betrachten deswegen eine beliebige Teilfolge

$$(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Wegen Korollar 2.8 (Umkehrung des Satzes von Lebesgue) existiert eine Teilfolge

$$\left(u_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}},$$

sodass fuer fast alle $t \in I$ gilt

$$\lim_{l\to\infty} u_{n_{k_l}}(t) = u(t) \quad \text{in } X.$$

Aufgrund der Stetigkeit von A folgt

$$\lim_{l\to\infty} A(t)u_{n_{k_l}}(t) = A(t)u(t) \quad \text{in } Y$$

und somit mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{l\to\infty} \int_I \left\| A(t)u(t) - A(t)u_{n_{k_l}}(t) \right\|_Y^q \, dt = 0,$$

d.h.

$$\lim_{l\to\infty} \mathcal{A}u_{n_{k_l}} = \mathcal{A}u \quad \text{in } L^q(I; Y).$$

Nach dem Teilfolgenkonvergenzprinzip folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}u_n = \mathcal{A}u \quad \text{in } L^q(I; Y),$$

womit die Stetigkeit von $\mathcal{A}$ folgt.

Aufgabe 4

Wir betrachten die reelle Zahlenfolge

$$(\|x_n - x\|_X)_{n\in\mathbb{N}},$$

und definieren

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X \in [0, \infty].$$

Dann existiert eine Teilfolge

$$(\|x_{n_k} - x\|_X)_{k\in\mathbb{N}},$$

mit

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x\|_X.$$

Nach Voraussetzung existiert eine weitere Teilfolge

$$\left(\|x_{n_{k_l}} - x\|_X\right)_{l\in\mathbb{N}},$$

mit

$$0 = \lim_{l\to\infty} \|x_{n_{k_l}} - x\|_X.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Grenzwerte folgt

$$\alpha = 0,$$

d.h. $x_n \to x$ in X.