Aufgabe 1

Wir zeigen, dass $W^{1,p}_{0,\text{div}}(\Omega)$ ein Banachraum, H ein Hilbertraum und $i : W^{1,p}_{0,\text{div}}(\Omega) \to H$ eine dichte Einbettung ist.

$W^{1,p}_{0,\text{div}}(\Omega)$ ist ein Banachraum

Eine moegliche Wahl fuer die Norm auf $W^{1,p}_{0,\text{div}}(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\|\cdot\|_{W^{1,p}_{0,\text{div}}(\Omega)} : W^{1,p}_{0,\text{div}}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad v = (v_1, \dots, v_d)^T \mapsto \left(\sum_{j=1}^{d} \|v_j\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Vollstaendigkeit folgt daraus, dass

$$W^{1,p}_{0,\text{div}}(\Omega) \subseteq \left(W^{1,p}_0(\Omega)\right)^d$$

abgeschlossen bezueglich der $\left(W^{1,p}_0(\Omega)\right)^d$-Norm ist.

$L^2_{0,\text{div}}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum

Da $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum ist, ist $L^2_{0,\text{div}}(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ ebenfalls ein Hilbertraum. Eine moegliche Wahl fuer die Norm ist

$$\|\cdot\|_{L^2_{0,\text{div}}(\Omega)} : L^2_{0,\text{div}}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad v = (v_1, \dots, v_d)^T \mapsto \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \|v_j\|^2_{L^2_0(\Omega)}}.$$

$i : W^{1,p}_{0,\text{div}}(\Omega) \to L^2_{0,\text{div}}(\Omega)$ ist eine dichte Einbettung

Offensichtlich ist i linear. Dann ist i injektiv, falls die Abbildung einen trivialen Kern hat. Es sei

$$v = (v_1, \dots, v_d)^T \in W^{1,p}_{0,\text{div}}(\Omega)$$

beliebig mit

$$\|v\|_{L^2_{0,\text{div}}(\Omega)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \|v_j\|^2_{L^2_0(\Omega)}} = 0.$$

Wegen $W_0 L^2_0(\Omega)$